הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע אזי $|X|\le|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ועל אזי $|X|=|Y|$.

סימון: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $\neg(|X|=|Y|)$ אזי $|X|\ne|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|X|\ne|Y|$ אזי $|X|<|Y|$.

הערה: נקרא לביטוי $|X|$ העוצמה של X.

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין (קש"ב): תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|Y|\le|X|$ אזי $|X|=|Y|$.

סימון: $\aleph_0=|\mathbb{N}|$.

קבוצה בת מנייה: קבוצה X עבורה $|X|=\aleph_0$.

קבוצה סופית: קבוצה A עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $|\{0,\ldots,n-1\}|=n$.

קבוצה אינסופית: קבוצה A עבורה לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$.

טענה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אינסופית אזי B בת מנייה.

מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהא A בת מנייה תהא B קבוצה ותהא $f:A\to B$ על אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\cup B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות בנות מנייה אזי $\bigcup_{i=1}^n A_i$ בת מנייה.

טענה: תהא $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i\in\mathbb{N}$ ותהא $\langle f_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת פונקציות באשר $f_n:\mathbb{N}\to A_n$ על לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^\infty A_i$ סופית או בת מנייה.

מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid(a\in A)\wedge(b\in B)\}$.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\times B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ בנות מנייה אזי $A_1\times\ldots\times A_n$ בת מנייה.

הגדרה: תהא A קבוצה אזי $A^1=A$.

הגדרה: תהא A קבוצה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $A^n=A\times A^{n-1}$.

טענה: $\bigcup_{n=1}^\infty\mathbb{N}^n$ בת מנייה.

מסקנה: $|\{A\subseteq\mathbb{N}\mid \text{סופית } A\}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

מספר אלגברי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו קיים $p\in\mathbb{Z}[x]$ המקיים $p(a)=0$.

מספר טרנסצנדנטי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו לכל $p\in\mathbb{Z}[x]$ מתקיים $p(a)\ne0$.

משפט קנטור: $|\{a\in\mathbb{C}\mid \text{אלגברי } a\}|=\aleph_0$.

יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי $\preccurlyeq\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ באשר

- רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $x\preccurlyeq x$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq z$ אזי $x\preccurlyeq z$.
- אנטי סימטריות חלשה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq x$ אזי $x=y$.

יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי $\prec\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\prec\rangle$ באשר

- אנטי רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $\neg(x\prec x)$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\prec y$ וכן $y\prec z$ אזי $x\prec z$.
- אנטי סימטריות חזקה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\prec y$ אזי $\neg(y\prec x)$.

יחס סדר קווי חלקי/חלש: יחס סדר חלקי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\vee(y\preccurlyeq x)$.

יחס סדר קווי חזק: יחס סדר חזק $\langle A,\prec\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\prec y)\vee(y\prec x)\vee(x=y)$.

טענה: $\langle\mathbb{N},\le_{\mathbb{N}}\rangle$ יחס סדר קווי חלקי.

טענה: תהא A קבוצה אזי $\langle\mathcal{P}(A),\subseteq\rangle$ יחס סדר חלקי.

פונקציה שומרת סדר: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים אזי $f:A\to B$ חח"ע עבורה לכל $a,b\in A$ מתקיים $(aRb)\iff(f(a)Sf(b))$.

סדרים חלקיים איזומורפיים: סדרים $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ עבורם קיימת $\pi:A\to B$ הפיכה שומרת סדר.

סימון: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים איזומורפיים אזי $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$.

יחס סדר קווי בעל איבר ראשון/מינימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $a\in A$ באשר לכל $b\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון $a\in A$ אזי $\min(A)=a$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle B,S\rangle\simeq\langle A,R\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר ראשון.

יחס סדר קווי בעל איבר אחרון/מקסימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $b\in A$ באשר לכל $a\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון $a\in A$ אזי $\max(A)=a$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle B,S\rangle\simeq\langle A,R\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר אחרון.

יחס סדר קווי צפוף: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ המקיימים xRy קיים $z\in A$ עבורו xRz וכן zRy.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי צפוף ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle B,S\rangle\simeq\langle A,R\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ צפוף.

טענה: $\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.

מסקנה: $\langle\mathbb{N},\leq_{\mathbb{N}}\rangle\not\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A,\prec\rangle$ סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\prec\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},<_{\mathbb{Q}}\rangle$.

חסם מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\overline{B}_X=\{a\in A\mid X \text{ חסם מלעיל של } a\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\overline{B}_X\neq\varnothing$.

חסם מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\underline{B}_X=\{a\in A\mid X \text{ חסם מלרע של } a\}$.

קבוצה חסומה מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\underline{B}_X\neq\varnothing$.

קבוצה חסומה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ בעלת חסם מלרע וחסם מלעיל.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\sup(X)=\min\left(\overline{B}_X\right)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\inf(X)=\max\left(\underline{B}_X\right)$.

יחס סדר קווי שלם: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $X\subseteq A$ חסומה מלעיל קיים $\sup(X)$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי ($\langle A,R\rangle$ סדר שלם)$\Longleftrightarrow$(לכל $X\subseteq A$ חסומה קיימים $\sup(X),\inf(X)$).

קבוצה צפופה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה לכל $x,y\in A$ באשר xRy קיים $z\in X$ המקיים xRz וכן zRy.

השלמה של יחס סדר קווי חלקי: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי סדר חלקי $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ המקיים

- $P\subseteq L$.
- לכל $x,y\in P$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\Longleftrightarrow(x\sqsubseteq y)$.
- $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
- $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ צפוף ב־$\langle L,\sqsubseteq\rangle$.

משפט יחידות השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה $\langle L,\sqsubseteq\rangle,\langle L^*,\sqsubseteq^*\rangle$ השלמות אזי קיים איזומורפיזם $\pi:L\to L^*$ עבורו $\pi(p)=p$ לכל $p\in P$.

משפט קיום השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.

חתך דדקינד: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $A,B\subseteq P$ לא ריקות אזי $\langle A,B\rangle$ באשר

- $A\cap B=\varnothing$.
- $A\cup B=P$.
- לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ מתקיים $a\preccurlyeq b$.
- $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]=\langle(-\infty,p),[p,\infty)\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]$ חתך דדקינד.

הגדרה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $\langle A,B\rangle,\langle C,D\rangle$ חתכי דדקינד באשר $A\subseteq C$ אזי $\langle A,B\rangle\preccurlyeq\langle C,D\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\{[p]\mid p\in P\},\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$.

הערה: נשתמש בהתאמה מעל בתור שיכון של P בחתכי הדדקינד שלה.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\operatorname{Ded}(P)=\{\langle A,B\rangle\mid \text{חתך דדקינד } \langle A,B\rangle\}$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\operatorname{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\operatorname{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ צפופה ב־$\langle \text{Ded}\left(P\right),\preccurlyeq\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle \text{Ded}\left(P\right),\preccurlyeq\rangle$ סדר שלם.

טענה: יהי $\langle A,\prec\rangle$ סדר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון $\langle B,\sqsubset\rangle$ עבורו קיימת $f:A\to B$ שומרת סדר.

מספרים ממשיים: $\langle\mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}}\rangle$ הינה ההשלמה של $\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי $\langle P,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle\mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}}\rangle$.

טענה: $|\mathbb{R}|\neq\aleph_0$.

קבוצת החזקה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}\left(X\right)=\{Y\mid Y\subseteq X\}$.

סימון: תהא X קבוצה אזי $^{X}2=\{f\mid f:X\to\{0,1\}\}$.

טענה: תהא X קבוצה אזי $|\mathcal{P}\left(X\right)|=\left|^{X}2\right|$.

משפט קנטור: תהא X קבוצה אזי $|X|<|\mathcal{P}\left(X\right)|$.

טענה: $|\mathbb{R}|=\left|^{\mathbb{N}}2\right|$.

קבוצת קנטור: נגדיר $C_0=[0,1]$ ונגדיר $C_{n+1}=\left(\frac{1}{3}C_n\right)\cup\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}C_n\right)$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathcal{C}=\bigcap_{i=0}^{\infty}C_i$.

טענה: $(\mathcal{C},<_{\mathbb{R}})\simeq\left(^{\mathbb{N}}\{0,1\},<_{\text{lex}}\right)$.

טענה: תהיינה A,B קבוצות זרות ותהיינה C,D קבוצות זרות באשר $|A|=|C|$ וכן $|B|=|D|$ אזי $|A\cup B|=|C\cup D|$.

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות זרות אזי $|A|+|B|=|A\cup B|$.

טענה: תהא A קבוצה אזי $|A\times\{0\}|=|A|$.

הגדרה חיבור: תהיינה A,B קבוצות אזי $|A|+|B|=|A\times\{0\}|+|B\times\{1\}|$.

טענה: תהיינה A,B,C,D קבוצות באשר $|A|=|C|$ וכן $|B|=|D|$ אזי $|A\times B|=|C\times D|$.

הגדרה כפל: תהיינה A,B קבוצות אזי $|A|\cdot|B|=|A\times B|$.

הערה: נאמר כי κ היא עוצמה אם קיימת קבוצה A עבורה $|A|=\kappa$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa+\kappa=2\cdot\kappa$.

טענה: תהיינה κ,λ,μ עוצמות אזי $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$.

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי $^{B}A=\{f\mid f:B\to A\}$.

טענה: תהיינה A,B,C,D קבוצות באשר $|A|=|C|$ וכן $|B|=|D|$ אזי $\left|^{B}A\right|=\left|^{D}C\right|$.

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי $|A|^{|B|}=\left|^{B}A\right|$.

מסקנה: $|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa\cdot\kappa=\kappa^2$.

טענה: תהיינה κ,λ,μ עוצמות אזי $\kappa^{(\lambda+\mu)}=\kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu}$ וכן $\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu}=\kappa^{(\lambda\cdot\mu)}$ וכן $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu}=(\kappa^{\mu})\cdot(\lambda^{\mu})$

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\aleph_0+n=\aleph_0$ וכן $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0\cdot n=\aleph_0$ וכן $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0^n=\aleph_0$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $2^{\aleph_0}+n=2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0}+\aleph_0=2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $2^{\aleph_0}\cdot n=2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0}\cdot\aleph_0=2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0}\cdot2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\left(2^{\aleph_0}\right)^n=2^{\aleph_0}$ וכן $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq2}$ אזי $n^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ וכן $\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

טענה: $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\left(2^{\aleph_0}\right)}>2^{\aleph_0}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $|\mathbb{R}^n|=2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{C}|=2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{N}\to\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$ וכן $\left|^{\mathbb{N}}\mathbb{N}\right|=2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא B קבוצה באשר $|B|=2^{\aleph_0}$ ותהא $A\subseteq B$ באשר $|A|\leq\aleph_0$ אזי $|B\backslash A|=2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a\in\mathbb{C}\mid \text{מספר טרנסצנדנטי } a\}|=2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a\in\mathbb{R}\mid \text{אי־רציונלי } a\}|=2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f\mid(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})\wedge(\text{רציפה } f)\}|=2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f\mid(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})\wedge(\text{מונוטונית } f)\}|=2^{\aleph_0}$.

טענה: $|\{A\mid(A\subseteq\mathbb{R})\wedge(\text{פתוחה } A)\}|=2^{\aleph_0}$.

יחס סדר טוב: סדר קווי $\langle W,\prec\rangle$ עבורו לכל $A\subseteq W$ באשר $A\neq\varnothing$ קיים איבר קטן ביותר.

טענה: $\left\langle \mathbb{N},<_{\mathbb{N}}\right\rangle$ סדר טוב.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\langle \mathbb{N}_{\le n},<_{\mathbb{N}_{\le n}}\right\rangle$ סדר טוב.

רישה של יחס סדר טוב: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב אזי $S\subseteq W$ המקיימת

- $S\neq W$.
- לכל $a\in S$ ולכל $b\in W$ אם $b\prec a$ אזי $b\in S$.

סימון: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a\in W$ אזי $W\left[a\right]=\left\{ b\in W\mid b\prec a\right\}$.

מסקנה: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a\in W$ אזי $W\left[a\right]$ רישה ב־W.

טענה: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב ותהא S רישה ב־W אזי קיים $x\in W$ עבורו $S=W\left[x\right]$.

טענה: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב ותהא $f:W\to W$ שומרת סדר אזי $\left(x\prec f\left(x\right)\right)\vee\left(x=f\left(x\right)\right)$ לכל $x\in W$.

מסקנה: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a\in W$ אזי $W\not\simeq W\left[a\right]$.

מסקנה: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $f:W\to W$ איזומורפיזם אזי $f=\mathrm{Id}$.

מסקנה: יהיו $\left\langle W,\prec\right\rangle ,\left\langle A,\sqsubset\right\rangle$ יחסי סדר טובים ויהיו $f,g:W\to A$ איזומורפיזמים אזי $f=g$.

משפט ההשוואה: יהיו $\left\langle W,\prec\right\rangle ,\left\langle A,\sqsubset\right\rangle$ יחסי סדר טובים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\left\langle W,\prec\right\rangle \simeq\left\langle A,\sqsubset\right\rangle$.
- קיים $w\in W$ עבורו $\left\langle W\left[w\right],\prec\right\rangle \simeq\left\langle A,\sqsubset\right\rangle$.
- קיים $a\in A$ עבורו $\left\langle W,\prec\right\rangle \simeq\left\langle A\left[a\right],\sqsubset\right\rangle$.

קבוצה טרנזיטיבית: קבוצה X עבורה לכל $A\in X$ ולכל $y\in A$ מתקיים $y\in X$.

סודר: קבוצה טרנזיטיבית X עבורה $\left\langle X,\in\right\rangle$ יחס סדר טוב.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha\cup\left\{ \alpha\right\}$ סודר.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha\notin\alpha$.

טענה: יהי α סודר ויהי $x\in\alpha$ אזי x סודר.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $\beta\notin\alpha$.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\beta\subsetneq\alpha$ אזי $\alpha\in\beta$.

טענה משפט ההשוואה: יהיו α,β סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\alpha=\beta$.
- $\alpha\in\beta$.
- $\beta\in\alpha$.

טענה: תהא S קבוצה לא ריקה של סודרים אזי $\min\left(S\right)$ קיים.

הגדרה: $\mathcal{O}_{n}=\left\{ \alpha\mid\text{סודר }\alpha\right\}$.

סימון: $\mathcal{O}_{n}=\mathrm{Ord}$.

טענה פרדוקס גוראלי־פורטי: $\mathcal{O}_{n}$ אינה קבוצה.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $\left(\alpha\cup\left\{ \alpha\right\} \in\beta\right)\vee\left(\alpha\cup\left\{ \alpha\right\} =\beta\right)$.

סימון: יהי α סודר אזי $\alpha+1=\alpha\cup\left\{ \alpha\right\}$.

טענה: תהא S קבוצת סודרים אזי קיים סודר α עבורו לכל $\beta\in S$ מתקיים $\beta\in\alpha$.

טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב אזי סודר α עבורו $\left\langle \alpha,\in\right\rangle \simeq\left\langle W,\prec\right\rangle$.

משפט: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל־$\left\langle W,\prec\right\rangle$.

סימון: יהי $\left\langle W,\prec\right\rangle$ יחס סדר טוב ויהי α סודר טיפוס של $\left\langle W,\prec\right\rangle$ אזי $\mathrm{otp}\left(\left\langle W,\prec\right\rangle \right)=\alpha$.

אקסיומת ההחלפה: תהא P נוסחה באשר לכל קבוצה X קיימת ויחידה קבוצה Y עבורה $P\left(X,Y\right)$ אזי לכל קבוצה A קיימת קבוצה B באשר לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ המקיים $P\left(a,b\right)$. זוהי אינה טענה

אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי $\left\{ a\in A\mid P\left(a\right)\right\}$ קבוצה. זוהי אינה טענה

משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר α מתקיים $\left(\forall\beta\in\alpha.P\left(\beta\right)\right)\Longrightarrow\left(P\left(\alpha\right)\right)$ אזי לכל סודר γ מתקיים $P\left(\gamma\right)$.

סודר עוקב: סודר α עבורו קיים סודר $\beta\in\alpha$ המקיים $\alpha=\beta+1$.

סודר גבולי: סודר α עבורו לכל סודר $\beta\in\alpha$ מתקיים $\alpha\neq\beta+1$.

משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת

- $P\left(\varnothing\right)$.
- לכל סודר α מתקיים $P\left(\alpha\right)\Longrightarrow P\left(\alpha+1\right)$.
- לכל סודר גבולי α מתקיים $\left(\forall\beta\in\alpha.P\left(\beta\right)\right)\Longrightarrow\left(P\left(\alpha\right)\right)$.

אזי לכל סודר γ מתקיים $P\left(\gamma\right)$.

אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה S באשר $\varnothing\in S$ וכן לכל $x\in S$ מתקיים $x+1\in S$. זוהי אינה טענה

טענה: תהא S קבוצה באשר $\varnothing\in S$ וכן לכל $x\in S$ מתקיים $x+1\in S$ ויהי δ הסודר הראשון באשר $\delta\notin S$ אזי δ סודר גבולי.

סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו $\varnothing$ הינו ω.

סימון: $0=\varnothing$.

הגדרה: $\mathbb{N}=\omega$.

הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה $n+1=n\cup\left\{ n\right\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

סימון: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $\alpha<\beta$.

הגדרה חיבור: יהי α סודר אזי

- $\alpha+0=\alpha$.
- יהי β סודר אזי $\alpha+\left(\beta+1\right)=\left(\alpha+\beta\right)+1$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha+\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha+\gamma\right)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\left(\alpha+\beta\right)+\gamma=\alpha+\left(\beta+\gamma\right)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\alpha+\gamma\le\beta+\gamma$.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי קיים ויחיד סודר γ עבורו $\alpha+\gamma=\beta$.

טענה: $\omega=0+\omega$ וכן $\omega=1+\omega$ וכן $\omega+1>\omega$.

הגדרה כפל: יהי α סודר אזי

- $\alpha\cdot0=0$.
- יהי β סודר אזי $\alpha\cdot\left(\beta+1\right)=\left(\alpha\cdot\beta\right)+\alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha\cdot\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha\cdot\gamma\right)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ וכן $\gamma\neq0$ אזי $\gamma\cdot\alpha<\gamma\cdot\beta$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\alpha\cdot\gamma\le\beta\cdot\gamma$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\alpha\left(b+\gamma\right)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

טענה: $0\cdot\omega=0$ וכן $1\cdot\omega=\omega$ וכן $2\cdot\omega=\omega$ וכן $\omega\cdot2=\omega+\omega$.

טענה: יהי $n<\omega$ אזי $\omega+\omega>\omega+n$.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha+\omega$ סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי α סודר אזי

- $\alpha^{0}=1$.
- יהי β סודר אזי $\alpha^{\beta+1}=\alpha^{\beta}\cdot\alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha^{\beta}=\bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha^{\gamma}\right)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ וכן $1<\gamma$ אזי $\gamma^{\alpha}<\gamma^{\beta}$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\alpha^{\gamma}\le\beta^{\gamma}$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma}$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma}=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

טענה: $1^{\omega}=1$ וכן $2^{\omega}=\omega$ וכן $\omega^{1}=\omega$ וכן $\omega^{2}=\omega\cdot\omega$ וכן $\omega^{2}>2^{\omega}$.

טענה: יהי α סודר אזי $\omega^{\alpha}\ge\alpha$.

טענה צורת קנטור נורמלית: יהי α סודר אזי קיים ויחיד $k<\omega$ קיימים ויחידים $\beta_{1}\ldots\beta_{k}$ סודרים באשר $\beta_{i}>\beta_{j}$ לכל $i<j$ וקיימים ויחידים $n_{1}\ldots n_{k}\in\mathbb{N}_{+}$ עבורם $\alpha=\sum_{i=1}^{k}\omega^{\beta_{i}}\cdot n_{i}$.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha>0$ וכן $\beta>\alpha$ אזי קיימים ויחידים סודרים ξ,δ עבורם $\beta=\alpha\cdot\delta+\xi$ וכן $\xi<\alpha$.

מונה: סודר α עבורו לכל $\beta<\alpha$ מתקיים $\left|\beta\right|<\left|\alpha\right|$.

סימון: $\aleph_{0}=\omega$.

טענה: יהיו α,β סודרים בני מנייה אזי $\alpha+\beta,\alpha\cdot\beta,\alpha^{\beta}$ סודרים בני מנייה.

טענה: קיים סודר α המקיים $\omega<\alpha$ באשר α אינו בן מנייה.

טענה: יהי δ סודר אזי קיים מונה κ באשר $\delta<\kappa$.

סימון: יהי α סודר אזי α^{+} הינו המונה הראשון עבורו $\alpha<\alpha^{+}$.

הגדרה $\aleph$: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha+1}=\aleph_{\alpha}^{+}$.

הגדרה $\aleph$: יהי α סודר גבולי אזי $\aleph_{\alpha}=\bigcup_{\beta<\alpha}\aleph_{\beta}$.

טענה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha}$ מונה.

טענה: יהי κ מונה אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $\kappa=\aleph_{\alpha}$.

סימון: יהי α סודר אזי $\omega_{\alpha}=\aleph_{\alpha}$.

סימון: יהיו δ,α סודרים אינסופיים באשר $|\delta|=|\aleph_{\alpha}|$ אזי $|\delta|=\aleph_{\alpha}$.

הערה: כאשר מבצעים פעולות בין מונים הכוונה היא לפי ההגדרה של עוצמות, כאשר מבצעים פעולות בין סודרים הכוונה היא לפי ההגדרה של סודרים.

הגדרה: יהי α סודר אזי יחס סדר $\langle\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha},\lhd\rangle$ באשר לכל $(\delta,\kappa),(\beta,\gamma)\in\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha}$ מתקיים $(\beta,\gamma)\lhd(\delta,\kappa)$ אם"ם אחד מהבאים מתקיים

- $\max(\beta,\gamma)<\max(\delta,\kappa)$.
- $\max(\beta,\gamma)=\max(\delta,\kappa)$ וכן $\beta<\delta$.
- $\max(\beta,\gamma)=\max(\delta,\kappa)$ וכן $\beta=\delta$ וכן $\gamma<\kappa$.

טענה: יהי α סודר אזי $\langle\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha},\lhd\rangle$ יחס סדר טוב.

משפט: יהי α סודר אזי $\operatorname{otp}(\langle\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha},\lhd\rangle)=\aleph_{\alpha}$.

מסקנה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\alpha}=\aleph_{\alpha}$.

משפט: יהיו κ,λ מונים אינסופיים אזי

- $\kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.
- $\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.

מסקנה: יהיו α,β סודרים אזי

- $\aleph_{\alpha}+\aleph_{\beta}=\aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$.
- $\aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\beta}=\aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$.

פונקציית בחירה: תהא S קבוצה באשר $\varnothing\notin S$ אזי $f:S\to A$ עבורה לכל $X\in S$ מתקיים $f(X)\in X$.

אקסיומת הבחירה (AC): תהא S קבוצה באשר $\varnothing\notin S$ אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S. זוהי אינה טענה

טענה: תהא $A\neq\varnothing$ אזי (קיימת $f:A\to\mathbb{N}$ חח"ע)$\Longleftrightarrow$(קיימת $g:\mathbb{N}\to A$ על).

משפט הסדר הטוב/משפט צרמלו: תהא A קבוצה עבורה קיימת פונקציית בחירה על $\mathcal{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$ אזי קיים סדר טוב על A.

הגדרה משפט הסדר הטוב: תהא A קבוצה אזי קיים סדר טוב על A. זוהי אינה טענה

משפט: (AC)$\Longleftrightarrow$(משפט הסדר הטוב).

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $|A|=\aleph_{\alpha}$. דורש AC

השערת הרצף הפרטית (CH): $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. דורש AC, זוהי אינה טענה

השערת הרצף הכללית (GCH): יהי α סודר אזי $2^{\aleph_{\alpha}}=\aleph_{\alpha+1}$. דורש AC, זוהי אינה טענה

הערה: CH בלתי תלויה ב־ZFC.

הערה: GCH בלתי תלויה ב־ZFC.

הערה: AC בלתי תלויה ב־ZF.

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיימת $B\subseteq A$ בת מנייה. דורש AC

טענה: תהא $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ סופית או בת מנייה. דורש AC

יחס סדר חלקי בעל איבר מינימלי: סדר חלקי $\langle A,\leq\rangle$ עבורו קיים $a\in A$ באשר לכל $b\in A$ מתקיים $(b\leq a)\Longrightarrow(b=a)$.

יחס סדר קווי בעל איבר מקסימלי: סדר קווי $\langle A,\leq\rangle$ עבורו קיים $b\in A$ באשר לכל $a\in A$ מתקיים $(b\leq a)\Longrightarrow(b=a)$.

הגדרה הלמה של צורן: יהי $\langle P,\leq\rangle$ יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת $A\subseteq P$ קיים חסם מלעיל אזי קיים ב־P איבר מקסימלי. זוהי אינה טענה

משפט: (AC)$\Longleftrightarrow$(הלמה של צורן).

אקסיומת הבחירה הבת־מנייה (AC_ω): תהא S קבוצה בת־מנייה באשר $\varnothing \notin S$ אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S. זוהי אינה טענה

אקסיומת הבחירה התלויה (DC): תהא X קבוצה ויהי R יחס מלא מעל X אזי קיימת $\langle x_n \mid m < \omega \rangle$ באשר $x_n \in X$ לכל $n < \omega$ עבורה $x_n R x_{n+1}$ לכל $n < \omega$. זוהי אינה טענה

טענה: $(\text{AC}) \Longrightarrow (\text{AC}_\omega)$ וכן $(\text{AC}) \Longrightarrow (\text{DC})$ וכן $(\text{AC}_\omega) \Longrightarrow (\text{DC})$.

הגדרה: תהא I קבוצה ותהיינה $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות אזי $\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f \mid \left(f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \right) \wedge \left(\forall i \in I \left(f(i) \in X \right) \right) \right\}$.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות באשר $X_\alpha \neq \varnothing$ לכל $\alpha \in I$ אזי $\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$. דורש AC

טענה: (לכל קבוצה I ולכל $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות אם $X_\alpha \neq \varnothing$ לכל $\alpha \in I$ אזי $\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$)$\Longleftarrow$(AC).

טענה: (לכל קבוצות A, B מתקיים $|A| \le |B|$ או $|A| \ge |B|$)$\Longleftarrow$(AC).

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $\langle V, +, \cdot \rangle$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי קיים בסיס ל־V. דורש AC

טענה: תהא I קבוצה תהיינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות זרות ותהיינה $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות זרות באשר $|A_i| = |B_i|$ לכל $i \in I$ אזי $\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| = \left| \bigcup_{i \in I} B_i \right|$. דורש AC

הגדרה סכום מונים: תהא I קבוצה יהיו $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ מונים ותהיינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות זרות באשר $|A_i| = \kappa_i$ לכל $i \in I$ אזי $\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|$. דורש AC

טענה: תהא I קבוצה תהיינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות ותהיינה $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות באשר $|A_i| = |B_i|$ לכל $i \in I$ אזי $\left| \prod_{i \in I} A_i \right| = \left| \prod_{i \in I} B_i \right|$. דורש AC

הגדרה כפל מונים: תהא I קבוצה יהיו $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ מונים ותהיינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות באשר $|A_i| = \kappa_i$ לכל $i \in I$ אזי $\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \prod_{i \in I} A_i \right|$. דורש AC

הערה: מכאן והלאה לא ייסומן כאשר הטענות יסתמכו על AC.

למה: יהי λ מונה אינסופי ויהי κ מונה באשר $\kappa \ge 1$ אזי $\sum_{i < \lambda} \kappa = \kappa \cdot \lambda$.

טענה: יהי λ מונה אינסופי ויהיו $\{\kappa_i \mid i < \lambda\}$ מונים באשר $\kappa_i \ge 1$ לכל $i < \lambda$ אזי $\sum_{i < \lambda} \kappa_i = \sup \{\kappa_i \mid i < \lambda\} \cdot \lambda$.

טענה: $\sum_{1 \le n < \aleph_0} n = \aleph_0$.

טענה: $\prod_{1 \le n < \aleph_0} n = 2^{\aleph_0}$.

משפט קניג: תהא I קבוצה יהיו $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ מונים ויהיו $\langle \lambda_i \mid i \in I \rangle$ מונים באשר $\kappa_i < \lambda_i$ לכל $i \in I$ אזי $\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$.

סופיות של סודר: יהי α סודר גבולי אזי הסודר המינימלי δ עבורו קיימת סדרה עולה $\langle \alpha_i \mid i < \delta \rangle$ המקיימת $\alpha_i < \alpha$ לכל $i < \delta$ וכן $\alpha = \bigcup_{i < \delta} \alpha_i$.

סימון: יהי α סודר גבולי אזי הסופיות של α הינה $\text{cof}(\alpha)$.

טענה: $\text{cof}(\omega) = \omega$ וכן $\text{cof}(\omega + \omega) = \omega$ וכן $\text{cof}(\aleph_\omega) = \omega$.

סודר סדיר: סודר גבולי α המקיים $\alpha = \text{cof}(\alpha)$.

סודר חריג: סודר גבולי α המקיים $\alpha \neq \text{cof}(\alpha)$.

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\alpha)$ מונה.

טענה: יהי κ מונה אזי κ סודר גבולי.

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\text{cof}(\alpha)) = \text{cof}(\alpha)$.

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\alpha)$ מונה סדיר.

טענה: יהי κ מונה אזי (κ חריג)$\Longleftrightarrow$(קיים סודר $\lambda < \kappa$ וקיימים מונים $\langle \kappa_i \mid i < \lambda \rangle$ באשר $\kappa_i < \kappa$ לכל $i < \lambda$ עבורם $\kappa = \sum_{i < \lambda} \kappa_i$).

טענה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha+1}$ סדיר. דורש AC

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\aleph_\alpha) = \text{cof}(\alpha)$.

טענה: $\text{cof}\left(2^{\aleph_0}\right) > \aleph_0$.

מונה גבולי: יהי α סודר גבולי אזי $\aleph_\alpha$.

מונה עוקב: יהי α סודר עוקב אזי $\aleph_\alpha$.

מסקנה: יהי $\aleph_\alpha$ מונה עוקב אזי $\aleph_\alpha$ מונה סדיר.

סימון: יהי κ מונה אזי $2^{<\kappa} = \sup \left\{ 2^\lambda \mid (\text{מונה } \lambda) \wedge (\lambda < \kappa) \right\}$.

סימון: יהי κ מונה אזי $\beth(\kappa) = \kappa^{\text{cof}(\kappa)}$.

טענה: יהי κ מונה עוקב אזי $\beth(\kappa) = 2^\kappa$.

טענה: יהי α סודר עבורו $\aleph_\alpha$ מונה גבולי וכן קיים $\beta < \alpha$ וקיים מונה $\lambda < \kappa$ עבורם $2^{\aleph_\gamma} = \lambda$ לכל $\beta \le \gamma < \alpha$ אזי $2^{\aleph_\alpha} = \beth(\aleph_\alpha) \cdot 2^{<\aleph_\alpha}$.

טענה: יהי α סודר עבורו $\aleph_\alpha$ מונה גבולי וכן לכל $\alpha < \beta$ ולכל מונה $\lambda < \kappa$ קיים $\beta \le \gamma < \alpha$ עבורו $2^{\aleph_\gamma} \neq \lambda$ אזי $2^{\aleph_\alpha} = \gimel\left(2^{<\aleph_\alpha}\right)$.

מסנן: תהא X קבוצה אזי $F \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $F \notin \varnothing$ וכן $X \in F$.
- תהיינה $A, B \in F$ אזי $A \cap B \in F$.
- תהא $A \in F$ ותהא $X \subseteq B$ באשר $A \subseteq B$ אזי $B \in F$.

על־מסנן: תהא X קבוצה אזי מסנן $F \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ עבורו לכל $Y \subseteq X$ מתקיים $Y \in F$ או $X \backslash Y \in F$.

טענה: תהא X קבוצה ויהי $F \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ מסנן אזי קיים על־מסנן $G \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $F \subseteq G$. דורש AC

מסנן ראשי: תהא X קבוצה אזי מסנן $F \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ עבורו קיימת $A \subseteq X$ באשר $A \neq \varnothing$ המקיימת $F = \{Y \subseteq X \mid A \subseteq Y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ויהי $F \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ מסנן ראשי אזי קיים $a \in X$ עבורו $F = \{Y \subseteq X \mid a \in Y\}$.

טענה: תהא X קבוצה אינסופית אזי קיימת $F \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ באשר F על־מסנן לא ראשי. דורש AC

טענה: יהי τ סודר אזי קיים סודר $\aleph_\tau < \alpha$ עבורו $\aleph_\alpha = \alpha$.

מונה אי נשיג חלש: יהי α סודר אזי מונה $\aleph_\alpha$ באשר $\aleph_\alpha$ מונה גבולי וסדיר.

מונה אי נשיג חזק: יהי α סודר אזי מונה $\aleph_\alpha$ באשר $\aleph_\alpha$ מונה סדיר וכן לכל מונה $\lambda < \aleph_\alpha$ מתקיים $2^\lambda < \aleph_\alpha$.

טענה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל סודר α מתקיים ($\aleph_\alpha$ אי נשיג חלש)$\Longleftrightarrow$($\aleph_\alpha$ אי נשיג חזק)).

הגדרה: $V_0 = \varnothing$ וכן $V_{n+1} = \mathcal{P}\left(V_n\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ וכן $V_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

קבוצה סופית באופן תורשתי: קבוצה A באשר $A \in V_\omega$.

טענה: תהא V_ω קבוצת הקבוצות הסופיות באופן תורשתי אזי V_ω קבוצה טרנזיטיבית.

טענה: תהא V_ω קבוצת הקבוצות הסופיות באופן תורשתי ותהא $x \subseteq V_\omega$ סופית אזי $x \in V_\omega$.

טענה: תהא V_ω קבוצת הקבוצות הסופיות באופן תורשתי אזי

- תהא $x \in V_\omega$ אזי $|x| < \aleph_0$. לא מקיימת את "אקסיומת האינסוף"
- תהיינה $x, y \in V_\omega$ אזי $\{x, y\} \in V_\omega$. מקיימת את "אקסיומת הזיווג"
- תהא $x \in V_\omega$ אזי $\mathcal{P}\left(x\right) \in V_\omega$. מקיימת את "אקסיומת קבוצת החזקה"
- תהא $x \in V_\omega$ ותהא $f : x \to V_\omega$ אזי $\mathrm{Im}\left(f\right) \in V_\omega$. מקיימת את "אקסיומת ההחלפה"

הגדרה: יהי α סודר אזי $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}\left(V_\alpha\right)$ וכן יהי β סודר גבולי אזי $V_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} V_\gamma$ וכן $V = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}_n} V_\alpha$.

מסקנה: V מודל של תורת הקבוצות.

טענה: יהי α סודר אזי $\mathrm{cof}\left(2^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$.

מסקנה: יהי κ מונה ויהי α סודר אזי $\mathrm{cof}\left(\kappa^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \le \beta$ אזי $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\beta \le \alpha$ אזי $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = |\{X \subseteq \aleph_\alpha \mid |X| = \aleph_\beta\}|$.

טענה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל α, β סודרים באשר $\beta < \alpha$ וכן $\aleph_\alpha$ מונה סדיר מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$).

מסקנה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל α, β סודרים באשר $\beta < \alpha$ וכן $\aleph_\beta < \mathrm{cof}\left(\aleph_\alpha\right)$ מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$).

מסקנה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל α, β סודרים באשר $\aleph_\beta < \mathrm{cof}\left(\aleph_\alpha\right)$ מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1} & \beta\ge\alpha \\ \aleph_\alpha & \beta<\alpha \end{cases}$).

מסקנה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל α, β סודרים מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1} & \beta\ge\alpha \\ \aleph_\alpha & (\beta<\alpha)\wedge(\aleph_\beta<\mathrm{cof}(\aleph_\alpha)) \\ \aleph_{\alpha+1} & \text{else} \end{cases}$).

טענה נוסחאת האוסדורף: יהיו α, β סודרים אזי $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$.

קבוצה חסומה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ אזי קבוצה $A \subseteq \kappa$ עבורה קיים $\delta < \kappa$ המקיים $A \subseteq \delta$.

קבוצה סגורה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ אזי קבוצה $C \subseteq \kappa$ עבורה לכל $\tau < \kappa$ ולכל $\langle \alpha_i \mid i < \tau \rangle \subseteq C$ באשר $\alpha_i < \alpha_j$ לכל $i < j$ מתקיים $\bigcup_{i<\tau} \alpha_i \in C$.

קבוצה סגורה ולא חסומה (סל"ח): יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ אזי קבוצה $C \subseteq \kappa$ באשר C סגורה וכן C אינה חסומה.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ותהיינה $C_0, C_1 \subseteq \kappa$ סל"ח אזי $C_0 \cap C_1$ סל"ח.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ יהי $\lambda < \kappa$ ותהא $\langle C_i \mid i < \lambda \rangle$ באשר $C_i \subseteq \kappa$ סל"ח לכל $i < \lambda$ אזי $\bigcap_{i<\lambda} C_i$ סל"ח.

פונקציה רציפה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ אזי $f : \kappa \to \kappa$ עבורה לכל $\alpha < \kappa$ גבולי מתקיים $f\left(\alpha\right) = \bigcup_{\beta<\alpha} f\left(\beta\right)$.

פונקציה נורמלית: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ אזי $f : \kappa \to \kappa$ רציפה שומרת סדר.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ותהא $C \subseteq \kappa$ אזי (C סל"ח)$\Longleftrightarrow$(קיימת $f : \kappa \to \kappa$ נורמלית באשר $C = \mathrm{Im}\left(f\right)$).

קבוצת שבת: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ אזי קבוצה $S \subseteq \kappa$ עבורה לכל סל"ח $C \subseteq \kappa$ מתקיים $S \cap C \neq \varnothing$.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ ותהא $Y\subseteq\kappa$ חסומה אזי Y אינה שבת.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ ותהא S שבת אזי $|S|=\kappa$.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ ותהא $X\subseteq\kappa$ עבורה קיים סל"ח $C\subseteq\kappa$ המקיים $C\subseteq X$ אזי X שבת.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ תהא $X\subseteq\kappa$ שבת ויהי $C\subseteq\kappa$ סל"ח אזי $X\cap C$ שבת.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ ותהא $S\subseteq\kappa$ אזי (S שבת)$\Longleftrightarrow$(לכל $f:\kappa\to\kappa$ נורמלית קיים $p\in S$ עבורו $f(p)=p$).

הגדרה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ ויהי $\delta<\kappa$ מונה סדיר אזי $S_\delta=\{\alpha<\kappa\mid(\alpha \text{ סודר גבולי})\wedge(\text{cof}(\alpha)=\delta)\}$.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ ויהי $\delta<\kappa$ מונה סדיר אזי S_δ שבת.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_1$ ויהיו $\delta_1,\delta_2<\kappa$ מונים סדירים באשר $\delta_1\neq\delta_2$ אזי $S_{\delta_1}\cap S_{\delta_2}=\varnothing$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_1$ אזי קיימת $S\subseteq\kappa$ שבת עבורה לכל סל"ח $C\subseteq\kappa$ מתקיים $C\nsubseteq S$.

טענה שובך היונים: יהי κ מונה סדיר יהי $\mu<\kappa$ סודר ותהיינה $\{A_\alpha\mid\alpha<\mu\}$ קבוצות זרות באשר $\kappa=\bigcup_{\alpha<\mu}A_\alpha$ אזי קיים סודר $\alpha^\star<\mu$ עבורו $|A_{\alpha^\star}|=\kappa$.

טענה שובך היונים: יהי κ מונה סדיר יהי $\mu<\kappa$ סודר ותהא $f:\kappa\to\mu$ אזי קיים סודר $\alpha^\star<\mu$ עבורו $\left|f^{-1}\left[\{\alpha^\star\}\right]\right|=\kappa$.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ יהי $\mu<\kappa$ סודר ותהיינה $\langle A_\alpha\mid\alpha<\mu\rangle$ קבוצות זרות באשר $\kappa=\bigcup_{\alpha<\mu}A_\alpha$ אזי קיים סודר $\alpha^\star<\mu$ עבורו $A_{\alpha^\star}$ שבת.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ תהא $S\subseteq\kappa$ שבת יהי $\mu<\kappa$ סודר ותהיינה $\{A_\alpha\mid\alpha<\mu\}$ קבוצות זרות באשר $S=\bigcup_{\alpha<\mu}A_\alpha$ אזי קיים סודר $\alpha^\star<\mu$ עבורו $A_{\alpha^\star}$ שבת.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ תהא $S\subseteq\kappa$ שבת יהי $\mu<\kappa$ סודר ותהא $f:S\to\mu$ אזי קיים סודר $\alpha^\star<\mu$ עבורו $f^{-1}\left[\{\alpha^\star\}\right]$ שבת.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ תהא $S\subseteq\kappa$ שבת יהי $\mu<\kappa$ סודר ותהא $f:S\to\mu$ אזי קיימת $S^\star\subseteq S$ שבת ב־κ עבורה $f_{\restriction_{S^\star}}$ קבועה.

פונקציה דוחסת: יהי κ מונה סדיר ותהא $S\subseteq\kappa$ אזי $f:S\to\kappa$ עבורה לכל $\alpha\in S$ מתקיים $f(\alpha)<\alpha$.

חיתוך אלכסוני: יהי κ מונה סדיר ותהיינה $\langle C_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle$ קבוצות באשר $C_\alpha\subseteq\kappa$ לכל $\alpha<\kappa$ אזי $\Delta_{\alpha<\kappa}C_\alpha=\{\beta<\kappa\mid\forall\alpha<\beta\,(\beta\in C_\alpha)\}$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר אזי $\Delta_{\alpha<\kappa}(\kappa\backslash\alpha)=\kappa$.

משפט: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ ויהיו $\langle C_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle$ סל"חים ב־κ אזי $\Delta_{\alpha<\kappa}C_\alpha$ סל"ח ב־κ.

מסנן נורמלי: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ אזי מסנן $F\subseteq\mathcal{P}(\kappa)$ עבורו לכל $\langle A_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle$ באשר $A_\alpha\in F$ לכל $\alpha<\kappa$ מתקיים $\Delta_{\alpha<\kappa}A_\alpha\in F$.

מסנן עדין: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ אזי מסנן $F\subseteq\mathcal{P}(\kappa)$ עבורו לכל $\alpha<\kappa$ מתקיים $\kappa\backslash\alpha\in F$.

משפט פודור: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ תהא $S\subseteq\kappa$ שבת ותהא $f:S\to\kappa$ דוחסת אזי קיימת $S^\star\subseteq S$ שבת ב־κ עבורה $f_{\restriction_{S^\star}}$ קבועה.

משפט: תהא $S\subseteq\aleph_1$ שבת אזי קיימות קבוצות זרות $\langle S_\alpha\mid\alpha<\aleph_1\rangle$ באשר S_α שבת ב־$\aleph_1$ לכל $\alpha<\aleph_1$ עבורן $S=\bigcup_{\alpha<\aleph_1}S_\alpha$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ ותהא $S\subseteq\kappa$ שבת עבורה לכל $\alpha\in S$ מתקיים $\text{cof}(\alpha)=\omega$ אזי קיימות קבוצות זרות $\langle S_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle$ באשר S_α שבת ב־κ לכל $\alpha<\kappa$ עבורן $S=\bigcup_{\alpha<\kappa}S_\alpha$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ יהי $\delta<\kappa$ מונה סדיר ותהא $S\subseteq\kappa$ שבת עבורה לכל $\alpha\in S$ מתקיים $\text{cof}(\alpha)=\delta$ אזי קיימות קבוצות זרות $\langle S_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle$ באשר S_α שבת ב־κ לכל $\alpha<\kappa$ עבורן $S=\bigcup_{\alpha<\kappa}S_\alpha$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa>\aleph_0$ ותהא $S\subseteq\kappa$ שבת עבורה לכל $\alpha\in S$ מתקיים $\text{cof}(\alpha)<\alpha$ אזי קיימות קבוצות זרות $\langle S_\alpha\mid\alpha<\kappa\rangle$ באשר S_α שבת ב־κ לכל $\alpha<\kappa$ עבורן $S=\bigcup_{\alpha<\kappa}S_\alpha$.