קשירות	קומפקטי	הפרדה	מניה	טופולוגיה
מסילתית מסילתית מקומית	קומפקטי מקומית	T_4	п	\mathbb{R}^n
קשיר	-	T_2	П	\mathbb{R}_{K}
?	?	T_1	?	זריצקי
מסילתית מסילתית מקומית	קומפקטי קומפקטי סדרתית	T_1	ספרבילי לינדלוף	קו־סופי
קשיר קשיר מקומית	-	T_1	לינדלוף	קו־בת־מנייה
-	-	T_4	מניה ו ספרבילי לינדלוף	$\mathbb{R}_{\mathrm{Sorg}}$
מסילתית מסילתית מקומית	-	T_4	ספרבילי לינדלוף	\mathbb{R}/\mathbb{Z}
מסילתית מסילתית מקומית	-	T_4	П	R ^ℵ 0
קשיר	-	T_4	П	sin טופולוגי
קשיר קשיר מקומית	קומפקטי קומפקטי סדרתית	T_4	מניה I לינדלוף	מילוני $[0,1]^2$
מסילתית מסילתית מקומית	קומפקטי מקומית	T_0	מניה I ספרבילי	נקודה ייחודית
מסילתית מסילתית מקומית	קומפקטי מקומית	נורמלי+ T_0	מניה וו	קרניים הולכות לאינסוף
מסילתית מסילתית מקומית	-	T_3	מניה I ספרבילי	מישור של מור
קשיר קשיר מקומית מסילתית מסילתית מקומית	קומפקטי מקומית קומפקטי סדרתית	T_4	I	הישר הארוך

$\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}\left(X ight)$ המקיימת קבוצה אזי תהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}\left(X ight)$

- $X, \emptyset \in \mathcal{T} \bullet$
- $U \in \mathcal{T}$ אזי $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. $U \in \mathcal{U}$.
- $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ איי $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}$ תהיינה \bullet

 (X,\mathcal{T}) אזי א איי טופולוגיה על טופולוגיה על $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ מרחב טופולוגיה על איי תהא $U\in\mathcal{T}$ המקיימת $U\subseteq X$ אזי אוי מרחב מרחב: יהי (X,\mathcal{T}) המקיימת $X \setminus E \in \mathcal{T}$ המקיימת $E \subseteq X$ מרחב טופולוגי אזי מרחב המקיימת מורה: יהי

 \mathcal{T} טענה: תהא $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}. (\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T})$ וכן $X, \varnothing \in \mathcal{T}$ עבורה $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ אזי איי $(U \cap V \in \mathcal{T}$ מתקיים $U, V \in \mathcal{T}$ טופולוגיה) אופולוגיה) מופולוגיה)

> $\{X,\varnothing\}$ הטופולוגיה הטריוואלית: תהא קבוצה אזי איי $\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי קבוצה X קבוצה אזי הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית:

הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: יהי ($X,\,
ho$) מרחב מטרי אזי

 $.\mathcal{T}\left(X,\rho\right)=\left\{ U\subseteq X\mid\forall x\in U.\exists r>0.B_{T}\left(x\right)\subseteq U\right\}$

טופולוגיה מטריזבילית: מרחב טופולוגי ($X,\,\mathcal{T}_X$) עבורו קיים ($X,\,\mathcal{T}_X$) מרחב מטרי מטריזבילית:

 $\{A\subset X\mid |X\backslash A|<lephi_0\}\cup\{\varnothing\}$ הטופולוגיה הקו־סופית: תהא האי קבוצה אזי איי $\mathcal{C}=\{E\subseteq X\mid Xackslash E\in\mathcal{T}\}$ איי משפט: יהי יהי משפט: יהי מייט ויהי

- $\cap_{\alpha\in\Lambda} E_{\alpha}\in\mathcal{C}$ אזיי $\{E\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{C}$ תהיינה $\bigcup_{i=1}^{ar{n}} E_i \in \mathcal{C}$ איי $\{E_i\}_{i=1}^{ar{n}} \subseteq \mathcal{C}$ תהיינה \bullet
- בסיס לטופולוגיה: תהא X קבוצה אזי לטופולוגיה: מקיימת
- אזיי $x \in B_1 \cap B_2$ ותהא $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ עבורן אזיי $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ תהיינה $.B_3\subseteq B_1\cap B_2$ וכן $x\in B_3$ עבורה $B_3\in \mathcal{B}$ קיימת

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא X קבוצה ויהי מב $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ בסיס אזי

 $.\mathcal{T}\left(\mathcal{B}\right) = \left\{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists B \in \mathcal{B}. \left(x \in B\right) \land \left(B \subseteq U\right)\right\}$ X טופולוגיה על $\mathcal{T}\left(\mathcal{B}
ight)$ בסיס אזי בסיס וופולוגיה על א קבוצה ויהי

וכן $\mathcal{B}_{\mathsf{Sorg}} = \{[a,b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_E = \{(a,b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_E \cup \left\{ (a, b) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \mid a < b \right\}$

 \mathbb{R} טענה: \mathcal{B}_E , $\mathcal{B}_{\mathrm{Sorg}}$, \mathcal{B}_K בסיסים של $\mathbb{R}=(\mathbb{R},\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{E}
ight))$:הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית

 $\mathbb{R}_{\mathrm{Sorg}} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathrm{Sorg}}))$:הישר של זורגנפריי: $\mathbb{R}_K = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$ ו K^* טופולוגיית:

משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{ U \subseteq X \mid \exists A \subseteq \mathcal{B}.U = \bigcup A \}$

 $\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_1
ight)$ וכן $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_2
ight)$ בסיסים עבורם $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ יהיי

 $\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{1}
ight)=\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{2}
ight)$ אוי $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ עבורן X עבורן על א טופולוגייה עדינה לטופולוגיה: תהא א קבוצה ותהיינה עדינה לטופולוגיה עדינה לטופולוגיה עדינה לטופולוגיה אינה א קבוצה ותהיינה אינה אינה עדינה לטופולוגיה עדינה לטופולוגייה עדינה עדינ

 $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על א טופולוגיה על עבורן תהיינה על החיינה א קבוצה עבורן א עבורן עבורן עבורן עופולוגיה אופולוגיה איז עבורן א קבוצה ותהיינה אופולוגיה עם איז עבורן איז עבורן איז ביינו עופולוגיה איז עבורן איז עבורן עבורן עבורן עבורן איז עבורן איז עבורן עבורן איז עבורן איז עבורן עבורן איז עבורן עבורן איז עבורן איז עבורן $A\in\mathcal{A}$ קיימת $x\in\mathcal{U}$ ולכל ולכל לכל אבורה לכל עבורה עבורה מ"ט ותהא מ"ט ותהא א מ"ט ותהא א עבורה לכל

 \mathcal{T} אוי בסיס של אוי $(x\in A)\wedge (A\subseteq U)$ המקיימת

 $\mathcal{B}_{<} = \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{[a,b) \mid a \leq X\} \cup \{(a,b] \mid X \leq b\}$. בסיס אזי אזי קבוצה בעלת הוס דר מלא אזי קבוצה בסיס בסיס אזי קבוצה בסיס מענה: תהא

 $\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{<}
ight)$ טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי

 \mathbb{R} מצוייד בטופולוגיית הסדר זהה ל \mathbb{R} מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית. $\bigcup\mathcal{S}=X$ עבורה עביס: עבורה אזי איי קבוצה אזי עבורה אזי תהא תת בסיס: תהא

הטופולוגיה הנוצרת מתת־בסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}\left(X
ight)$ הטופולוגיה הנוצרת מתת־בסיס: $\mathcal{T}(S) = \left\{ U \subseteq X \mid \exists A_1 \dots A_k \subseteq S.U = \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^k A \right) \right\}$ X טופולוגיה על \mathcal{T} (\mathcal{S}) אזי \mathcal{S} תת־בסיס אזי \mathcal{S} על על \mathcal{T} טופולוגיה על טופולוגיית זריצקי: יהי \mathbb{F} שדה ויהי איזי זריצקי: יהי

 $\mathcal{T}\left(\left\{\left\{a\in\mathbb{F}^{n}\mid f\left(a\right)\neq0\right\}\mid f\in\mathbb{F}\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]\right\}\right)$ $x \in U$ עבורה $U \in \mathcal{T}$ אזי $x \in X$ מ"ט ויהי (X, \mathcal{T}) עבורה סביבה: יהי

.int $(A)=\mathring{A}=igcup_{U\subset A}U$ אוי א $A\subseteq X$ מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) איז יהי קבוצה: יהי

.d $(A)=\overline{A}=\bigcap_{A\subset E}\ E$ אזי או $A\subseteq X$ מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) יהי סגור של קבוצה: יהי

 $.\partial A=\overline{A}ackslash \inf{(A)}$ אזי א $A\subseteq X$ מייט ותהא מייט (X,\mathcal{T}) אזי יהי .int $(A)\subseteq A\subseteq \overline{A}$ אזי אוי מ"ט ותהא מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) איזי יהי $A\subseteq X$ טענה: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט ותהא אוי

- .int (A) = $\max_{\subset} \{ \mathcal{U} \in \mathcal{T} \mid \mathcal{U} \subseteq A \}$ •
- $\overline{A} = \min_{\subset} \left\{ E \mid (A \subseteq E) \land \left(E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{T} \right) \right\} \bullet$

 $x\in X$ ייהי ויהי $A\subseteq X$ מ"ט תהא מ"ט מענה: יהי ויהי (X,\mathcal{T}) מ"ט תהא

- $U\cap A
 eq \emptyset$ מתקיים $x\in U$ המקיים $U\in \mathcal{T}$ לכל •
- $B\cap A
 eq\emptyset$ יהי \mathcal{B} בסיס של \mathcal{T} אזי לכל $\mathcal{B}\in\mathcal{B}$ המקיים $x\in\mathcal{B}$ המקיים $x\in\mathcal{B}$ $.\partial A=\overline{A}\cap\left(\overline{Xackslash}Aig)$ אזי $A\subseteq X$ מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) טענה: יהי

 $U\in\mathcal{T}$ מסקנה: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט תהא $X\in X$ ויהי ווהי $A\subseteq X$ מחש מ"ט תהא מסקנה: יהי $U\cap A^\mathcal{C}
eq 0$ וכן של א וכן עור א מתקיים $x\in U$ המקיימת א המקיימת וכן א מתקיים א $X=\overline{A}$ המקיימת $A\subseteq X$ מ"ט אזי (X,\mathcal{T}) המקיימת

טופולוגיית הנקודה הייחודית: תהא X קבוצה ותהא אזי סופולוגיית הנקודה הייחודית

 $T_p = \{U \subseteq X \mid p \in U\} \cup \{\emptyset\}$ x קודת הצטברות: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט ותהא $X\subseteq X$ אזי $x\in X$ אזי $x\in X$ עבורו לכל סביבה $x\in X$ של

 $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ מתקיים y של U סדרה מתכנסת/גבול: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט ותהא $x\in X^\mathbb{N}$ אזי $y\in X$ עבורו לכל סביבה $y\in X$

 $.x_n \, \in \, U$ החל ממקום מסוים

טענה: יהי $A\subseteq X$ מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) אזי $A\subseteq\left\{ x\in X\mid x$ המתכנסת אל $a\in A^{\mathbb{N}}$ קיימת $\subseteq\overline{A}$

 $A \cup \{x \in X \mid A$ שלנה: מסענה: $x\} = \overline{A}$ אזי א $A \subseteq X$ תהא סענה: תהא

.($\{x\in X\mid A$ של הצטברות אל בקודת הצטברות אזי אזי ($\{x\in X\mid A$ אזי אזי מסקנה: תהא אזי אזי ($\{x\in X\mid A$ f:X o Y אזי $x\in X$ מייטים ותהא $x\in X$ מייטים והא מייטים יהיו יהיו $f\left(\mathcal{U}
ight)\subseteq\mathcal{V}$ של x של של של קיימת סביבה קיימת של קיימת עבורה לכל $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{Y}$ של א עבורה f:X o Y אוי מייטים אזי (X,\mathcal{T}) , (Y,\mathcal{S}) איי יהיו $\forall U \in \mathcal{S}.f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$

התב"ש $f:X\to Y$ ותהא משפט: הייו ($X,\mathcal{T})$, (Y,\mathcal{S}) יהיו משפט: יהיו

- פתוחה. $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה מתקיים כי $U\subseteq Y$ פתוחה.
- סגורה. $f^{-1}\left(E
 ight)$ סגורה מתקיים כי $E\subseteq Y$ סגורה.
 - $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f\left(A\right)}$ מתקיים $A\subseteq X$ •
- $x \in X$ לכל $x \in X$ הפונקציה $x \in X$ לכל

ע ועל עבורה אוי א רציפה אח"ע ועל אזי אזי אזי אויטים אזי אויע ועל אועל אויע ועל אויע ועל אויע יהיו אויע יהיו אויע ועל אויטים אזי אויטים אזי אויע ועל אויע ועל עבורה אויע יהיו

טענה: יהיו f:X o Y מ"טים ותהא מ"טים חח"ע ועל התב"ע סענה: יהיו

- . תהא $f^{-1}\left(U
 ight)$ איי (U פתוחה) איי שאיי ($U\subseteq Y$ תהא $U\subseteq Y$
- .(מגורה) אזי $f^{-1}(E)$ אזי $E \subset Y$ אזי $E \subset Y$ תהא
- - $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f\left(A\right)}$ מתקיים $A \subseteq X$ לכל •

f:X o Y מ"ט ותהא (Y,\mathcal{S}) הטופולוגיה מפונקציה: תהא מפונקציה: תהא מפונקציה המושרית על קבוצה מפונקציה: הא $\mathcal{T}_{f} = \left\{ f^{-1}\left(U\right) \mid U \in \mathcal{S} \right\}$ איי

טענה: תהא X קבוצה יהי (Y,\mathcal{S}) מ"ט ותהא f:X o Y מ"ט. מ"ט. מסקנה: תהא f:X o Y מ"ט ותהא f:X o Y מ"ט ותהא אזי f רציפה על $(X, \mathcal{T}_f), (Y, \mathcal{S})$

> תת מרחב טופולוגי (ת"מ): יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט ותהא אזי אזי מרחב טופולוגי (ת"מ) $\mathcal{T}_A = \{U \subseteq A \mid \exists V \in \mathcal{T}.U = \mathrm{Id}^{-1}(V)\}$

טענה: יהי (A,\mathcal{T}_A) מ"ט ותהא $A\subseteq X$ מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) יהי $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$ אזי אזי ותהא מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) טענה: יהי יהי

טענה: יהי $\mathcal{B}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ אזי \mathcal{T} בסיס של מ"ט ויהי מ"ט ויהי (X,\mathcal{T}) טענה: יהי

טענה: יהי $A\subseteq X$ אזי

- תהא $U\subseteq A$ אזי (U פתוחה ביחס ל־ \mathcal{T}_A) \Longleftrightarrow (קיימת U פתוחה ביחס ל־ \mathcal{T} עבורה U
- עבורה $E\subseteq A$ אזי (E סגורה ביחס ל־ T_A) אזי (E סגורה ביחס ל־E עבורה ההא
 - $\operatorname{.cl}_X \; (D) \cap A = \operatorname{cl}_A \; (D)$ אזי $D \subseteq A$ תהא •
 - $\operatorname{int}_{X}\left(D\right)\cap A\subseteq\operatorname{int}_{A}\left(D\right)$ אזי $D\subseteq A$ תהא Φ טענה: יהי (Y,\mathcal{T}_Y) מ"ט ויהי מ"ט ת"מ אזי (X,\mathcal{T}_X) טענה:

Xב פתוחה ב אזי A פתוחה ב X פתוחה ב X פתוחה ב X פתוחה ב X פתוחה ב X

Xבורה ב־ אזי א סגורה ב־ א נניח כי

 $f_{\upharpoonright_A}:A o Y$ אזי אזי הייט הייf:X o Y ת"מ ותהא ת"מ הייט הייX,Y הייט טענה: יהיו

טענה: יהיו X, אזי (f:X o Y מייט ותהא X, אזי (f:X o Yרציפה לכל $f_{\restriction U_{\alpha}}$ וכן $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_{\alpha}=X$ פתוחות עבורן $\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$

 רציפה $g\ :\ Y\ \to\ Z$ ותהא רציפה $f\ :\ X\ \to\ Y$ מ"ט תהא א $X,\,Y,\,Z$ יהיו יהיו טענה: יהיו רציפה. $a \circ f : X \to Z$

 $X = A \cup B$ סגורות עבורן $A, B \subset X$ מ"ט תהיינה X, Y יהיו יהיו למת ההדבקה: אזי $A \cap B$ על f = g רציפה עבורן g: B o Y אזי f: A o Y אזי f: A o Yרציפה. $f \cup g: X o Y$

קר $\hat{f}:X o f(X)$ סימון: יהיו X,Y מ"ט ותהא Y o f:X o Y חח"ע ורציפה נגדיר

. חח"ע ורציפה \hat{f} הומיאומורפיזם חח"ע ורציפה $f:X\to Y$ אזי מ"ט מינון: יהיו יהיו יהיו $f\left(X
ight)$ בתור בתור אזי נזהה את X בתור f:X o Y מ"ט ויהי בתור מ"ט X, איי נזהה את בתור

f:X o פיים עבורם קיים עבורם מ"טים עבורם מ"ט מאטים לכל מ"ט באשר לכל מ"ט באשר לכל מ"ט מופולוגית: תכונה P

רציפה $f:X o \mathbb{R}$ אבורו לכל עבור טופולוגי מרחב מרחב אריים: מרחב ערך הביניים: מרחב טופולוגי בעל תכונת ערך הביניים: מרחב טופולוגי $.f\left(c\right)=t$ עבורו $c\in X$ קיים $t\in\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]$ ולכל מל לכל לכל הליט ליים ל

טענה: תכונת ערך הביניים הינה תכונה טופולוגית. המקיימת על המקיימת f:Y o X מ"ט אזי אזי X,Y והיו פונקציה על המקיימת

 $\forall U \subseteq X. (U \in T_X) \iff (f^{-1}(U) \in T_Y)$ תירה: הייו X,Y מ"ט ותהא f:Y o X מ"ט ותהא X,Y העתקת מנה אזי f רציפה.

על \mathcal{T}_A על אזי קיימת ויחידה טופולוגיה f:X o A על ותהא קבוצה משפט: יהי על מ"ט תהא א קבוצה ותהא

 $o X/\sim X$ ונגדיר אונגדיר מנחב המנה: יהי X מ"ט יהי וחס שקילות מעל Xמצויידת עם טופולוגיית המנה. איי א $f\left(x\right)=\left[x\right]_{\sim}$

עבורה $g\,:\,X\,\to\,Z$ ותהא מנה העתקת $f\,:\,X\,\to\,Y$ תהא תהא משפט התכונה האוניברסילית: עבורה h:Y o Z אזי קיימת $y\in Y$ עבורה $f^{-1}(\{y\})$

- $g = h \circ f \bullet$
- (מ רציפה) (ביפה) (ביפה).
- .(העתקת מנה) $\Leftrightarrow (a)$ העתקת מנה).

קבועה $g_{\left\lceil f^{-1}(\{y\}) \right.}$ עבורה g:X o Z אנה ותהא העתקת מנה העתקת הא f:X o Y

- לכל $y \in Y$ אזי
- .(ביפה) $(g \circ f^{-1})$ פון רציפה) $(g \circ f^{-1})$
- .(העתקת מנה) $g \circ f^{-1}$ העתקת מנה) $g \circ f^{-1}$

 $f:X o \left\{g^{-1}\left(\{z\}
ight)\mid z\in Z
ight\}$ מסקנה: g:X o Z הא מסקנה: תהא . העתקת מנה אזי ($g \circ f^{-1}$) העתקת מנה אזי ($g \circ f^{-1}$) העתקת

קבוצה רוויה: תהא $Y\in Y$ אמו עבורה לכל אזי אזי $f:X\to Y$ אהו לכל קבוצה קבוצה $f^{-1}\left(\{y\}\right) \subseteq A \bowtie A \cap f^{-1}\left(\{y\}\right) \neq \emptyset$

טענה: תהא $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$ ולכל על ולכל איי מנה) העתקת איי היים רציפה רוויה רציפה וויה איי וויה מתקיים $f: X \to Y$

. פתוחה $f\left(\mathcal{U}
ight)$ מתקיים כי מתוחה עבורה לכל f:X o Y מתקיים כי פתוחה. . סגורה מתקיים כי f:X o Y סגורה מתקיים כי f:X o Y סגורה מעתקה מגורה:

- ov טענה: תהא f:X o Y אח"ע ועל התב"ש . פתוחה $f \bullet$
 - סגורה, f = 0
- . רציפה ופתוחה f. רציפה וסגורה f

. מנה. העתקת f אזי אזי פתוחה רציפה לו רציפה לו העתקת לו העתקת מנה. ר $f:X \to Y$. מנה. העתקת f אזי f העתקת מנה f:X o Y העתקת מנה.

 $\sim=\left\{(x,y)\in(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})^2\;\Big|\;\exists\lambda\in\mathbb{R}\,(x=\lambda y)
ight\}$ המרחב הפרויקטיבי הממשי: נגדיר $\mathbb{RP}^{\hat{n}-1}=(\mathbb{R}^n\!\setminus\!\{0\})/\!\!\sim\!n$ איי

מכפלה של קבוצות: תהיינה $\{X_{lpha}\}_{lpha\in\Lambda}$ קבוצות אזי

 $\mathcal{B}_{ ext{box}} = \left\{\prod_{lpha \in \Lambda} \mathcal{U}_lpha \mid \mathcal{U}_lpha \in \mathcal{T}_lpha
ight\}$ בסיס בסיס מענה: יהיו $\{(X_lpha, \mathcal{T}_lpha)\}_{lpha \in \Lambda}$ בסיס

 $\cdot \prod_{\alpha \in \Lambda} X_{\alpha}$ של $\mathcal{T}_{
m box}=\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{
m box}
ight)$ אייטים אוי $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha)\}_{lpha\in\Lambda}$ יהיו התיבה: יהיו המוגדרת $\pi_{eta}: \prod_{lpha \in \Lambda} X_{lpha} o X_{eta}$ אזיי קבוצות אזי קבוצות המינה תהיינה תהיינה

 $.\pi_{\beta}(f) = f(\beta)$ טענה: יהיו $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha\,)\}_{lpha\in\Lambda}$ טענה: יהיו $.\prod_{\alpha\in\Lambda}X_{\alpha}$ תת־בסיס של $\mathcal{S}_{\mathrm{prod}}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\left\{\pi_{\alpha}^{-1}\left(\mathcal{U}_{\alpha}\right)\mid\mathcal{U}_{\alpha}\in\mathcal{T}_{\alpha}\right\}$

 $\mathcal{T}_{ ext{prod}} = \mathcal{T}\left(\mathcal{S}_{ ext{prod}}
ight)$ מ"טים אזי $\{(X_lpha,\mathcal{T}_lpha)\}_{lpha\in\Lambda}$ יהיו $\mathcal{T}_{\mathrm{prod}} = \mathcal{T}_{\mathrm{box}}$ אזיי $|\Lambda| < leph_0$ מסקנה: יהיו $|\Lambda| < lpha$ מיטים באשר מיטים $\{(X_lpha, \mathcal{T}_lpha)\}_{lpha \in \Lambda}$ איזי $\mathcal{T}_{ ext{prod}}\subseteq\mathcal{T}_{ ext{box}}$ אזי $|\Lambda|\geq lpha$ מסקנה: יהיו $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha)\}_{lpha\in\Lambda}$ אזי אינים באשר π_lpha מסקנה: יהיו $(\Pi_lpha\in\Lambda\ X_lpha\,,\,\mathcal{T})$ מ"טים ותהא $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha)\}_{lpha\in\Lambda}$ טופולוגיה עבורה $\mathcal{T}_{\mathrm{prod}} \subseteq \mathcal{T}$ אזי $\alpha \in \Lambda$ רציפה לכל

מסקנה: יהיו $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha)\}_{lpha\in\Lambda}$ מסקנה: יהיו $\mathcal{T}_{prod} = \left\{ \prod_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_{\alpha} \mid (\mathcal{U}_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\alpha}) \land (|\{\mathcal{U}_{\alpha} \neq X_{\alpha}\}| \in \mathbb{N}) \right\}$

 $(\alpha \)$ משפט: תהא $(\alpha \)$ רציפה לכל $\pi_{lpha} \circ f$ אזי אזי $(\alpha \)$ אזי $(\alpha \)$ רציפה לכל $\pi_{lpha} \circ f$ טענה: תהא \mathbb{R}^{Λ} , $\mathcal{T}_{\mathrm{box}}$) אזי $|\Lambda| \geq leph_0$ אינה מטריזבילית.

טענה: תהא $(\mathbb{R}^{\Lambda}\,,\,\mathcal{T}_{ ext{prod}})$ אינה מטריזבילית. $|\Lambda|\,\geq\,leph_0$ אינה טענה: מטריזביליות הינה תכונה טופולוגית.

 $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\mathscr{Q}$ וכן $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ באשר מרחב (\mathcal{U},\mathcal{V}) מ"ט אזי (X,\mathcal{T}) באיר יהי מרחב טופולוגי: יהי

- $X=E\cup F$ סגורות ארות לא ריקות עבורן סגורות $E,F\subseteq X$ סגורות סיימות
- . פתוחה ופתוחה $D \in \mathcal{P}\left(X\right) \setminus \{X,\varnothing\}$ סגורה ופתוחה \bullet

 $(קיימות) \Longleftrightarrow (אי־קשיר) אזי אזי אזי תת־מרחב אזי איי מ"ט ויהי איי מ"ט ויהי איי תת־מרחב אזי אזי מ"ט ויהי איי מ"ט ויהי$

 $(Y \subseteq U) \oplus (Y \subseteq V)$

וכן $\bigcap \mathcal{A}
eq \emptyset$ וכן קשירה וכן $A \in \mathcal{A}$ עבורה לכל $A \in \mathcal{A}$ עבורה לכל ענה: תהא

מסקנה: תהיינה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)\setminus\{\varnothing\}$ באשר וכן

מסקנה: 🎗 עם הטופולוגיה הסטנדרטית קשיר.

עם עם (a,b) , [a,b] , (a,b] , [a,b) אזי a < b באשר בא $a,b \in \mathbb{R}$ יהיו מסקנה: יהיו

טענה: R_{Sorg} איננה קשירה.

מ"ט קשיר. וכן $f\left(0
ight)=x$ משטלה: יהי X מ"ט ויהיו $x,y\in X$ אוי איי $\gamma:\left[0,1
ight]
ightarrow X$ וכן

xמרחב מסילה מ $x,y\in X$ עבורו לכל (X,\mathcal{T}) מרחב טופולתית: מרחב מסילה מx

. מסילתית קשירה $\mathbb{C}^n\setminus\left\{x\in\mathbb{C}^n\mid p\left(x\right)=0\right\}$

קשירה עבורה $D\subseteq X$ קיימת (קיימת $x,y\in X$ אזי עבורה עבורה אזי יהי $x,y\in X$ אזי יהי סימון: יהי

 $(x, y \in D)$

 (y^-) אזי ($x \sim x$ פּשיר מסילה מ־x אזי ($x \in X$ אזי אזי פשיר מסילתית אזי (קיימת מסילה מ־x אזי ($x \in X$ אזי פשיר מסילתית אזי (קיימת מסילה מ־x

 $X/{\sim}$ רכיבי קשירות מסילתית: יהי א מ"ט אזי קשיר מסילתית רכיבי

- $Y\subseteq D_{lpha}$ עבורו $lpha\in\Lambda$ עבורו קשיר קשיר קשיר א לכל $Y\subseteq X$

- - לכל $A_lpha\subseteq X_lpha$ באשר אבאר $\{A_lpha\}_{lpha\in\Lambda}$ מ"טים ותהיינה מ"טים באשר אבאר לכל אמיינה: יהיו . בטופולוגיית המכפלה $\Pi_{\alpha\in\Lambda}$ המ $\overline{A_{\alpha}}=\overline{\prod_{\alpha\in\Lambda}A_{\alpha}}$ אזי $\alpha\in\Lambda$ לכל $A_{lpha}\subseteq X_{lpha}$ באשר א $\{A_{lpha}\}_{lpha\in\Lambda}$ מ"טים ותהיינה מ"טים איטים מ"טים מורהיינה איזיו איטים ותהיינה אומים ותהיינה איטים ותהיינה איטים ותהיינה אומים ות איי $\alpha \in \Lambda$ איי $\alpha \in \Lambda$ \overline{A} \overline{A} \overline{A} \overline{A} \overline{A} \overline{A} בטופולוגיית התיבה.
 - $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \emptyset$ וכן $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$ וכן מרחב טופולוגי קשיר: מרחב טופולוגי $(X,\,\mathcal{T})$ עבורו לא קיימת הפרדה.
 - .(א קשיר) קשיר) אזי (א קשיר) הומיאומורפיזם אזי f:X o Y הומיאומורפיזם אזי (א קשיר)

 - סענה: יהי X מ"ט קשיר ותהא f:X o Y רציפה אזי f:X o Y
 - . ($\overline{H} \cap K = H \cap \overline{K} = \varnothing$ וכן
 $Y = H \cup K$ עבורן א עבורן א, $K \in \mathcal{P}\left(X\right) \setminus \{X,\varnothing\}$ טענה: תהא ער קשיר קשיר אזי א ויהי א הפרדה של תרמרחב קשיר אזי $Y\subseteq X$ ויהי של הפרדה לע. תהא מענה: תהא
 - . מטקנה: תהא אזי \overline{A} קשירה אזי קשירה אזי קשירה
 - . עם הטופולוגיה מי \mathbb{R} סטנדרטי הינו קשיר (-1,1) מסקנה:
 - $(-\infty,a)\,,(-\infty,a]\,,(-\infty,\infty)\,,[a,\infty)\,,(a,\infty)$ אוי $a\in\mathbb{R}$ מסקנה: יהי $a\in\mathbb{R}$ יהי קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ־ℝ סטנדרטי.

 - $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ אזי $B \subset Y$ ותהא $A \subset X$ מ"ט קשירים תהא X, Y יהיו טענה: יהיו

 - תר־מרחב קשיר GL $_n$ ($\mathbb C$) אזי אזי אזי הסטנדרטית עם הטופולוגיה הסטנדרטית עם אזי אזי $M_{n imes n}$ ($\mathbb C$) מסקנה: יהי
 - - . מתקיים כי $\alpha \in \Lambda$ קשירה פירה לכל $\alpha \in \Lambda$

- \mathbf{v} טענה: יהי \mathbf{X} מרחב טופולוגי התב"ש

 - טענה: $\left(\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{R},\,\mathcal{T}_{ ext{box}}
 ight)$ איננה קשירה. מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $n \in \mathbb{N}$ קשיר עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

 - יאי $p:\mathbb{C}^n o \mathbb{C}$ ויהי ויהי \mathbb{R}^{2n} אזי הסטנדרטית עם הטופולוגיה עם ענה: יהי
 - $X/{\sim}$ רכיבי קשירות: יהי א מ"ט אזי קשיר
 - $.D_{\alpha}\cap D_{\beta}=\varnothing$ אזי $\alpha\neq\beta$ באשר $\alpha,\beta\in\Lambda$ יהיי יהיי יהיי

- - . לכל X אזי א ה $n\in\mathbb{N}$ לכל לכל אזי א $n\in\mathbb{N}$

- - איר. X מ"ט קשיר מסילתית אזי X קשיר.
- - X טענה: יהי א מ"ט אזי γ מסילתית מסילתית מסילות מעל מיט אזי מיט אזי אזי מסילתית

- - $.X = \bigcup_{lpha \in \Lambda} D_{lpha}$ מתקיים •

- - .X טענה: יהי אזי קשיר השילות מעל מ"ט אזי משיר טענה: יהי אזי אזי

. מתקיים כי D_{lpha} קשירה $lpha\in\Lambda$ לכל

 $.D_{\alpha}\cap D_{\beta}=\varnothing$ אזי $\alpha\neq\beta$ באשר $\alpha,\beta\in\Lambda$ יהיו •

 $.X = \bigcup_{lpha \in \Lambda} D_lpha$ מתקיים •

 $Y\subseteq D_{\alpha}$ עבורו $\alpha\in\Lambda$ ויחיד קשיר קשיר תת־מרחב א לכל א לכל \bullet

מסקנה: יהי D רכיב קשירות של X אזי D סגור.

מרחב טופולוגי קשיר מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x \in X$ המקיים לכל סביבה של של של מרחב טופולוגי מקומית נקודתית: יהי $x \in \mathcal{V}$ קשירה עבורה $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ קיימת סביבה x

מרחב אופולוגי מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ מתקיים כי X קשיר מקומית

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x\in X$ המקיים לכל סביבה $x \in \mathcal{V}$ של של מסילתית עבורה ל $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה קיימת של של $\mathcal{U} \subseteq X$

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ מתקיים כי X קשיר

.טענה: Rsorg איננו קשיר מקומית

טענה: יהי X מ"ט אזי (X קשיר מסילתית מקומית) איט אזי (לכל \mathcal{T} ולכל מקומית) איט אזי מ"ט אזי (מסילתית של \mathcal{U} מתקיים \mathcal{T}

. מסילתית משיר אזי א קשיר מסילתית מקומית אזי א קשיר מסילתית מסילתית אזי א מ"ט מיט קשיר מסילתית מסילתית מקומית אזי א

 סביבות של אנייה בנקודה: יהי א $x\in X$ מ"ט אזי מ"ט מנייה עבורו קיימות אנייה מנייה בנקודה: יהי אוי מ $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{V}$ עבורן לכל סביבה x של x של ע עבורן לכל עבורן x

מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה הראשונה: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ קיים

.I מטקנה: יהי X מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי מניה אוי X

.I טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה מניה

משפט: יהי X מ"ט מניה ו ותהא $A\subset X$ תת־קבוצה אזי $\overline{A} = \{x \in X \mid x$ קיימת $a \in A^{\mathbb{N}}$ המתכנסת אל

(לכל) (רציפה) אזי אזי f:X o Y אזי ותהא אזי מניה באשר אזי משפט: יהיו אזי מ"טים באשר אז מניה אז ותהא

 $.(f\left(a\right)$ ל־(מתכנסת ל $\{f\left(x_{n}\right)\}$ כי מתקיים מ $a\in X$ עבור aל-מתכנסת ל $\{x_{n}\}\subseteq X$ מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה השנייה: מרחב טופולוגי X עבורו קיים בסיס לכל היותר

.II טענה: \mathbb{R}^n מניה

 $\mathbb{R}^{lepho_0} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ סימון:

.II מניה $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0},\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}\right)$ מניה

.I אינו מניה $\left(\mathbb{R}^{\aleph}0\;,\,\mathcal{T}_{\mathrm{box}}\right)$ אינו

.II אינו מניה $\mathbb{R}_{\mathrm{Sorg}}$

.(א). איי א המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי איי איי (מניה וו) המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי איי (מניה ווו) אוייד אוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי איי

. II טענה: א המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית מניה אינה: א המצוייד עם הטופולוגיה מניה טענה: נגדיר $u:\mathbb{R}^{leph0} imes\mathbb{R}^{leph0} o\mathbb{R}$ כך

מטריקה. d_u אזי d_u $((a_k),(b_k))=\min\left\{\sup\left|a_k-b_k\right|,1\right\}$

.II הטופולוגיה האחידה: $(\mathbb{R}^{\aleph 0}\,,\,\mathcal{T}\,(d_{u}))$ הינו מניה וכן אינו מניה .I מניה A מ"ט מניה ויהי $A\subseteq X$ ויהי ויהי מ"ט מניה אזי $A\subseteq X$

. II מניה אזי א תת־מרחב אזי א מניה וו ויהי א
 $A\subseteq X$ והי מניה אזי מניה וו טענה: יהי א

. I מניה $f\left(X\right)$ אזי ופתוחה אזי f:X o Y מניה וותהא מיט מניה X מניה וותהא מספות: מונה I הנוה חבונה נוופולונים

. II מניה מ"ט מניה אזי אזי וותהא f:X o Y מניה וו ותהא מ"ט מניה אזי היי

מרחב אפופה בת צפופה א צפופה מנייה. עבורו איימת א צפופה בת מנייה. מרחב מופולוגי מרחב מחבילי: מרחב איימת א

 המקיימים $\{\mathcal{U}_{lpha}\}_{lpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{T}$ אבורו לכל עבורו טופולוגי לינדלוף: מרחב טופולוגי לינדלוף $.igcup_{i=0}^{\infty}\,\mathcal{U}_{f(i)}=X$ עבורה $f:\mathbb{N} o\Lambda$ קיימת $\mathcal{U}_{lpha}=X$

.טענה: \mathbb{R}_{Sorg} ספרבילי $(leph_0 \geq |X|)$ טענה: יהי א המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי סענה: יהי א המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי

. ספרבילי. אזי א המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית אזי א ספרבילי. X

טענה: יהי X מ"ט מניה Π אזי X לינדלוף וספרבילי.

ענה: ℝ המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית אינו מניה I.

למה: יהי \mathcal{B} בסיס של (X,\mathcal{T}) אזי (X לינדלוף) \iff (לכל \mathcal{B} בסיס של המקיימים . $\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{B}_{f(i)}=X$ עבורה $f:\mathbb{N}\to\Lambda$ קיימת $\mathcal{B}_{lpha}=X$

טענה: יהי אזי ל $f\left(X\right)$ אזי אזי $f:X\to Y$ ותהא יפרבילי מ"ט מינה אזי יהי יהי טענה: יהי מ"ט ספרבילי אזי

מסקנה: ספרביליות הינה תכונה טופולוגית. . טענה: יהי אזי לינדלוף ותהא $f:X\to Y$ ותהא לינדלוף מ"ט מינה אזי לינדלוף ותהא

> מסקנה: לינדלוף הינה תכונה טופולוגית. . סענה: יהי אזי מ"ט ספרבילי ותהא אוי א $A \subset X$ ותהא מ"ט ספרבילי מיט מענה: יהי אזי א

. טענה: יהי אזי Eינדלוף ותהא האזי ב $E\subseteq X$ ותהא לינדלוף מ"טXיהי יהי יהי

. I מניה $(\prod X_lpha\,,\,\mathcal{T}_{
m prod})$ אזי $|\Lambda|\leq lpha$ מניה מסקנה: יהיו $\{X_lpha\,\}_{lpha\in\Lambda}$ מניה מסקנה: יהיו . מניה וו. $(\prod X_lpha\,,\,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ אזי $|\Lambda|\leq lpha$ מניה וו באשר משקנה: יהיו $\{X_lpha\,\}_{lpha\in\Lambda}$

.II מניה X ullet

. לינדלוף $X \bullet$

עבורה x של \mathcal{U} מרחב טופולוגי x, $y\in X$ עבורו לכל עבורו מרחב מופולוגי T_0 : מרחב טופולוגי $x \notin \mathcal{V}$ או קיימת סביבה \mathcal{V} של \mathcal{V} עבורה $y \notin \mathcal{U}$

מרחב טופולוגי T_1 : מרחב טופולוגי X עבורו לכל עבורו אונים קיימת סביבה U של U של אונים קיימת אונים אונים עבורה $x
otin \mathcal{V}$ וגם קיימת סביבה \mathcal{V} של $y
otin \mathcal{U}$ וגם קיימת

 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = arnothing$ עבורן y של \mathcal{V} סביבה x וכן של xמסקנה: T_0 , T_1 , T_2 הינן תכונות טופולוגיות.

 T_0 אזי א מרחב טופולוגי מסקנה: יהי א מרחב טופולוגי מסקנה: יהי א מרחב טופולוגי מסקנה: T_1 אזי א מרחב טופולוגי מסקנה: יהי א מרחב טופולוגי מסקנה: יהי א מרחב טופולוגי אזי א מסקנה: יהי

.מסקנה: \mathbb{R}_{Sorg} האוסדורף

 T_2 טענה: \mathbb{Q} המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית הינו T_1 וכן אינו $.T_2$ וכן אינו T_1 וכן הינו הקו־בת־מניה הקורבת־בטופולוגיה וכן אינו $\mathbb R$ $.T_{2}$ הינו $\left(X,\,\mathcal{T}\left(d\right)\right)$ אזי מטרי מטרי מרחב ($X,\,d)$ יהי יהי יהי

 T_i מרחב אזי $A \subseteq X$ וויהי T_i מ"ט מ"ט $A \subseteq X$ וויהי מרחב אזי מ"ט מענה: יהי

 $ig(\prod X_lpha\,,\,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}ig)$ אייסים איי ($\alpha\in\Lambda$ מרחב X_lpha מרחב איי איי ($X_lpha\,,\,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}$ עם הטופולוגיה המושרית מ־ \mathbb{R}^2 הסטנדרטית ויהי $\mathbb{R} imes \{0,1\}$ הסטנדרטית ויהי

עם $\mathbb{R} imes\{0,1\}/\sim$ אזי $\mathbb{R} imes\{0,1\}$ עם שקילות על $\sim=\mathrm{Id}\cup\{\left(\left(egin{array}{c}a\\0\end{array}
ight),\left(egin{array}{c}a\\1\end{array}
ight)
ight)\mid a
eq0\}$ $(\overline{a})
eq \overline{b}$ טענה: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט אזי (\mathcal{T} הוא \mathcal{T}) \Longrightarrow (לכל $a,b\in X$ שונים מתקיים \overline{a}).

.($x\in X$ סענה: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט אזי (X הוא (X) סענה: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט אזי (X,\mathcal{T}) מ"ט אזי (X,\mathcal{T}) סענה: . $(A=\bigcap_{A\subset\mathcal{U}}\mathcal{U}$ מייט איי (T_1 הוא T_1) מייט איי (T_1 מייט איי (T

טענה: יהי X מ"ט האוסדורף ותהא $\{x_n\}\subseteq X$ סדרה מתכנסת אזי קיים ויחיד עבורו $y\in X$

 T_i מרחב טופולוגי T_i מקומית: מ"ט X עבורו לכל $x \in X$ קיימת סביבה u של u עבורה u הינה u.

 T_0 טענה: יהי X מינו מקומית אזי א מ"ט מ"ט מינו מינו מינו

 $.T_1$ טענה: יהי X מ"ט T_1 מקומית אזי אינו מינו T_1 T_2 אינו וכן מקומית מקומית היפולה הינו הראשית הכפולה הישר עם הראשית הכפולה היעו

קבוצה מסוג G_{δ} : יהי X מ"ט אזי $X\subseteq A$ עבורה קיימת $\mathcal{T}\subseteq \mathcal{T}$ המקיימת קבוצה מסוג $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$

 $.G_{\delta}$ טענה: יהי X מ"ט T_1 מניה וויהי $x\in X$ אזי ויהי T_1 מינו לכל $r\left(a
ight)=a$ רביפה עבורה r:X o A אזי אוי אוי העתקת מסג: יהי א מ"ט ותהא א העתקת ליגו אזי אזי א

נסג. $r:X\to A$ פיימת עבורה איז אזי אזי מ"ט אזי מ"ט אזי א עבורה אזי מינג יהי מייט אזי אזי אזי אזי אזי מייט אזי

. סענה: יהי א האוסדורף ותהא $A\subseteq X$ ותהא האוסדורף סענה: יהי אזי האוסדורף ותהא

טענה: יהי X מ"ט T_1 תהא $A\subseteq X$ ויהי $X\in X$ אזי ($x\in X$ נקודת הצטברות של $A\subseteq X$ $|A \cap \mathcal{U}| \geq lepha$ מתקיים מתקיים $|A \cap \mathcal{U}|$).

. (a, a) איי (a, a)

x
otin E סגורה באשר $E \subseteq X$ ולכל אולכל עבורו לכל עבורו באשר סופולוגי מרחב טופולוגי מרחב טופולוגי מרחב טופולוגי מרחב טופולוגי מרחב אולכל $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\mathscr{Q}$ וכן $E\subseteq\mathcal{V}$ וכן $x\in\mathcal{U}$ עבורן עבורן $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ קיימות

 $E\cap F=arnothing$ סגורות באשר באשר אבורו לכל די סגורות באשר א סגורות מרחב טופולוגי מרחב טופולוגי מרחב טופולוגי אבורו לכל $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\mathscr{D}$ וכן $F\subset\mathcal{V}$ וכן $E\subset\mathcal{U}$ עבורן $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ קיימות

 T_1 מרחב טופולוגי T_3 : מרחב טופולוגי אולרי וכן ברחב מרחב טופולוגי T_1 מרחב טופולוגי X נורמלי וכן : T_4 מרחב טופולוגי

מסקנה: $T_3\,,\,T_4$ הינן תכונות טופולוגיות. T_2 אזי א מרחב טופולוגי מסקנה: יהי א מרחב טופולוגי מסקנה: יהי א מרחב טופולוגי אזי אזי א

 $.T_3$ אזי א מרחב טופולוגי T_4 אזי א מרחב מרחב מסקנה: יהי א מרחב טופולוגי

טענה: \mathbb{R}_K הינו T_2 וכן אינו רגולרי. טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף: נגדיר $\{(a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{R}\}$ אזי

טענה: $\mathbb R$ המצוייד עם טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף הינו T_0 וכן אינו T_1 וכן אינו רגולרי וכן

 $.T_4$ טענה: $\mathbb{R}_{\mathrm{Sorg}}$ הינו

 $.\mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$ אזי אזי $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{U}$ וכן אוכן עבורן עבורן עבורן אזי עבורן אזי עבורן אזי x טענה: יהי X מ"ט אזי (X רגולרי) \Longleftrightarrow (לכל $x\in X$ ולכל $x\in X$ סביבה של x קיימת סביבה x

 $\mathcal{U}\subseteq X$ סענה: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי) \Longleftrightarrow (לכל $E\subseteq X$ סגורה ולכל מ"ט אזי (X מתוחה באשר .($E\subseteq\mathcal{V}\Subset\mathcal{U}$ פתוחה עבורה $\mathcal{V}\subseteq X$ קיימת $E\subseteq\mathcal{U}$

משפט הלמה של אוריסון: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי) \Longleftrightarrow (לכל $A,B\subseteq X$ סגורות וזרות ולכל . (
 $f_{ \mid \, B} \, = \, b$ וכן $f_{ \mid \, A} \, = \, a$ עבורה אביפה
 $f: X \, \to \, [a,b]$ קיימת קיימת $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. רגולרי אזי א $A\subseteq X$ יהי רגולרי מ"ט משנה: יהי אזי מ"ט רגולרי אזי אזי אזי מ

. טענה: יהי אזי מ"ט נורמלי ויהי א
 $E\subseteq X$ יהי נורמלי מ"ט מ"ט מיט מיט טענה $(\prod X_{lpha}\,,\,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ לשענה: יהיו $(\alpha\in\Lambda$ מ"טים אוי ((X_{lpha}) מ"טים אוי ((X_{lpha}) מ"טים אוי ((X_{lpha})

 $ig(\prod X_lpha, \mathcal{T}_{ ext{prod}}ig)$ אזיי $|\Lambda| \leq lpha$ מסקנה: יהיו $\{X_lpha\}_{lpha \in \Lambda}$ מיסקנה: יהיו

טענה: יהי א מרחב מטרי התב"ש

ספרבילי. X

 $\mathcal U$ אונים קיימת סביבה $x,y\in X$ עבורו לכל עבורו מרחב אונים קיימת מביבה מרחב טופולוגי

 (X,\mathcal{S}) אזי T_i מרחב (X,\mathcal{T}) וכן \mathcal{T} באשר \mathcal{S} עדינה על X באשר \mathcal{T} אונה: תהיינה \mathcal{T}

 $d' \leq 1$ מושרית מהמטריקה אזי קיימת מטריקה d' של X עבורה \mathcal{T}_X משל משרית ההי למה: יהי

 $ig(\prod X_n,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}ig)$ למה: יהיו $(n\in\mathbb{N})$ מ"טים אזי ו (X_n) מטריזבילי לכל $(X_n)_{n=0}^\infty$ מטריזבילי).

מטריזבילי. מטקנה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0},\,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}\right)$ משפט המטריזציה של אוריסון: יהי X מ"ט T_0 רגולרי ומניה I אזי אז מטריזבילי. $\mathcal U$ עבורה של x של של $\mathcal U$ סביבה ספיבה עבורו לכל א עבורו מאט עבורו מיט מיט מיט של מיט א עבורה מיט א עבורו מיט אינע מיט א עבורו מיט אינע מיט אינע מיט א עבורו מיט אינע מיט אינע

 $ig(\prod X_lpha\,,\,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}ig)$ י \iff ($lpha\in\Lambda$ לכל לכל T_3 הינו אזי (X_lpha) מ"טים אזי (X_lpha) מסקנה: יהיו

 $\overline{A}\cap B=\varnothing$ וכן $A\cap \overline{B}=\varnothing$ עבורן $A,B\subseteq X$ מ"ט אזי מ"ט אזי מופרדות: יהי מופרדות: יהי א

 $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ מופרדות קיימות $A,B\subseteq X$ (לכל להלוטין) אזי (X נורמלי לחלוטין) אזי (מופרדות אזי מ"ט אזי אזי (מורמלי לחלוטין)

. מענה: יהי (X,\prec) יחס סדר טוב אזי א המצוייד עם טופולוגיית הסדר נורמלי יהי

מרחב טופולוגי נורמלי לחלוטין: מ"ט X עבורו לכל מתקיים כי $A\subseteq X$ מתקיים כי A נורמלי.

 $\mathcal{B}_{\text{moore}}^{1} = \left\{ B_r(p) \mid \left(p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \right) \land (p_2 > r > 0) \right\}$ סימון:

 $\mathcal{B}^2_{\text{moore}} = \left\{ B_{p_2}\left(p\right) \cup \left\{ \left(p_1, 0\right) \right\} \mid \left(p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}\right) \right\}$ סימון:

 $\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{ ext{moore}}^1\cup\mathcal{B}_{ ext{moore}}^2
ight)$ המישור של מור: $\mathbb{R} imes\mathbb{R}_{>0}$ מצוייד עם הטופולוגיה

טענה: המישור של מור הינו קשיר האוסדורף רגולרי וכו אינו נורמלי.

. נורמלי. אזי X יהי מ"ט רגולרי ומניה אזי אזי מ"ט רגולרי ומניה

מסקנה: יהי X מ"ט רגולרי לינדלוף אזי X נורמלי.

מסקנה: $\mathbb{R}^2_{\mathrm{Sorg}}$ הינו רגולרי וכן אינו נורמלי.

 $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן $A\subseteq\mathcal{U}$ זרות עבורן

טענה: יהי אזי מ"ט מ"ט רגולרי לינדלוף ומטריזבילי מקומית אזי אזי מטריזבילי. מיטר T_0 מיט מ"ט מיטריזבילי

המקיימים $\{\mathcal{U}_{lpha}\}_{lpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{T}$ עבורו לכל X אבורו טופולוגי מרחב טופולוגי מרחב טופולוגי מרחב אופולוגי א $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_{f(i)} = X$ עבורה $f:[n] o \Lambda$ וקיימת $n \in \mathbb{N}$ קיים $\bigcup \mathcal{U}_lpha = X$ סענה: יהי \mathcal{B} בסיס של (X,\mathcal{T}) אזי ($X,\mathcal{T})$ אזי יהי \mathcal{B} בסיס של בסיס של האזי ($X,\mathcal{T})$ אזי יהי . $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{B}_{f(i)} = X$ עבורה $f:[n] o \Lambda$ וקיימת $n \in \mathbb{N}$ קיים $\mathcal{B}_{\alpha} = X$

.טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית קופקטי .(סופי). המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X קומפקטי) המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X

. סענה: תהא X קבוצה סופית ותהא $\mathcal T$ טופולוגיה על אזי ($X,\mathcal T$) קומפקטי טענה: 🎗 המצוייד עם הטופולוגיה הקו־סופית קומפקטי.

. מסקנה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ אזי (a,b) המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי

. טענה: יהיו אזי $a,b\in\mathbb{R}$ אזי המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי. .($Y\subseteq\bigcup_{i=0}^n\mathcal{U}_{f(i)}$ עבורה $f:[n]\to\Lambda$ וקיימת $n\in\mathbb{N}$ קיים $Y\subseteq\bigcup\mathcal{U}_{\alpha}$

Y סגורה אזי Y קומפקטיY סענה: יהי X מ"ט קומפקטי ותהא עבורן $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}_X$ אזיי קיימות $x\notin Y$ קומפקטי א $Y\subseteq X$ תהא האוסדורף האוסדורף עבורן יהי

 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ (2) $Y \subseteq \mathcal{V}$ (2) $x \in \mathcal{U}$ סענה: יהי אזי אוסדורף ותהא או $Y\subseteq X$ ותהא האוסדורף אזי יהי יהי טענה: יהי האוסדורף ותהא

. רגולרי. אזי איזי א האוסדורף קומפקטי אזי איזי א רגולרי. טענה: יהי

טענה: יהי X קומפקטי ותהא f:X o Y קומפקטי ותהא אזי f:X o Y

מסקנה: קומפקטיות הינה תכונה טופולוגית. . הומיאומורפיזם f הומיאומורפיזם הפיכה f:X o Y הומיאומורף הומיאומורפיזם הומיאומורפיזם הומיאומורפיזם.

. שיכון אזי f אזי f רציפה וחח"ע אזי f:X o Y ותהא אוסדורף ותהא f:X o Y $\bigcap_{i=1}^n A_{f(i)} \neq \emptyset$ מתקיים $f:[n] \to \Lambda$

 $A\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ טענה: יהי X מ"ט אזי (X קומקפטי) \Longrightarrow (לכל (X לכל $A\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ משפחה של קבוצות סגורות המקיימת את תכונת החיתוך הסופי מתקיים $\mathcal{A}
eq \emptyset$.

טענה: יהי X האוסדורף קומקפטי מטריזבילי מקומית אזי אוסדורף קומקפטי מטריזבילי.

טענה: יהי X קומפקטי מטריזבילי אזי X ספרבילי.

 $(II \,$ מניה $X) \iff (טענה: יהי X)$ מניה קומפקטי אזי (X מטריזבילי) Y אזי f:X o Y אוסדורף ותהא אוסדורף ביפה ועל אזי f:X o Y אזי אוסדורף ועל אזי

ללא X imes Y של פתוח של $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\left(X imes Y
ight)$ ווהי מ"ט ויהי מ"ט ויהי למת: יהי למת: יהי א תת־כיסוי סופי אזי קיימת $X \in X$ עבורה לכל סביבה של סביבה עבורה לכל עבורה אינה אינה אינה מת־כיסוי אונה עבורה לכל עבורה אינה אינה ניתנת

למת: יהיו $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\left(X \times Y \times Z\right)$ יהי קומפקטי הי מ"טים יהי למת: יהיו למת: יהיו א מ"טים יהי למת מתקיים כי מתקיים על סביבה לכל עבורה לכל $x \in X$ מתקיים סופי ותהא א ללא ללא תר־כיסוי סופי ותהא סביבה לכל לכל עבורה אינה $y \in Y$ איזי אזי אברי אידי סופי לכיסוי ניתנת על אינה ע $\mathcal{U} \times Y \times Z$. של אינה ניתנת לכיסוי אינה על א $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times Z$ מתקיים של y סביבה של אינה ולכל x

 $(\prod_{i=1}^n X_i, \mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ ישענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"טים אזי $\{X_i\}_{i=1}^n$ סענה: יהיו $ig(\prod_{i=1}^\infty X_i,\mathcal{T}_{ ext{prod}}ig)$ ישענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"טים אזי (X_i קומפקטי לכל לכל איז יהיו

 X_{lpha}) טענה: (אקסיומת הבחירה) לכל אפריים (ארן אולכל ארכל איטים מתקיים (אקסיומת הבחירה) שענה: (אקסיומת הבחירה) קומפקטי)). $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ קומפקטי)).

 $(Y^X, \rho(d))$ \iff ($lpha\in\Lambda$ ססקנה משפט טיכונוב: יהיו $\{X_lpha\}_{lpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי מסקנה משפט טיכונוב: יהיו $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{prod})$ קומפקטי).

טענה: יהי $\{0,1\}$ המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי $\{0,1\}$ קומפקטי וכן רציפה f:X o Y ותהא א f:X o Y מ"ט מצוייד עם טופולוגיית הסדר ותהא א קומפקטי יהי

 $x\in X$ לכל $f\left(a
ight)\leq f\left(x
ight)\leq f\left(b
ight)$ עבורם $a,b\in X$ אזי קיימים עבורו $\delta>0$ אזי X מספר לבג: יהי מרחב מטרי קומפקטי ויהי ויהי $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}\left(X
ight)$ ויהי קומפקטי מספר לבג:

. טענה: יהי X מרחב מטרי קומפקטי ויהי $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}\left(X
ight)$ כיסוי פתוח של אזי קיים מספר לבג. רציפה f:X o Y מסקנה: יהי אזי קומפקטי הי קומפקטי יהי מטרי ותהא אזי ותהא מסקנה: יהי מסקנה: יהי אזי קומפקטי יהי אזי אוי

. מ"ט קומפקטי מקומית מ"ט קומפקטי מקומית מ"ט מיט קומפקטי מקומית ענה: יהי א

וכן קומפקטית עבורה $\overline{\mathcal{V}}$ עבורה x של סביבה של x קיימת עx סביבה של לכל לכל לכל מיימת אליים של א

. רגולרי. אזי א האוסדורף קומפקטי מקומית אזי א רגולרי. מסקנה: יהי

טענה: 🗘 מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי מקומית.

קומפקטית מקומית.

מסקנה: קומפקטיות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית ותהא $Y \subset X$ פתוחה אזי Y קומפקטית מקומית. \iff ($i \in [n]$ טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"טים אזי ליטים אזי אוי קומפקטי מקומית לכל

(חומפקטי מקומית) קומפקטי מקומית) ($\prod_{i=1}^{n} X_i, \mathcal{T}_{prod}$

. קומפקטית $f^{-1}(C)$ טענה: חח"ע על רציפה חח"ע איז חח"ל פומפקטי מקומית ותהא א חח"ע חח"ע על רציפה ונאותה מ"ט יהי א מ"ט יהי מ"ט יהי א חח"ע איז מקומית ותהא

f:X o Y עבורו קיים שיכון עבורו מ"ט אזי מ"ט אזי מ"ט אזי מ"ט אזי האוסדורף אוס מומפקטיפיקציה: יהי א

 $\overline{f(X)} = Y$ המקיים

X בפוף ב־X מסקנה: יהי X מ"ט ותהא Y קומפקטיפיקציה אזי $|Y\setminus X|=1$ עבורה Y עבורה אוי קומפקטיפיקציה אוי מ"ט אוי קומפקטיפיקציה אוי עבורה אלכסנדרוב: יהי טענה: יהי א האוסדורף קומפקטי מקומית שאינו קומפקטי אזי קיימת ל־X קומפקטיפיקציה יהי

קומפקטיפיקציית סטון־צ'ד: אוי מ"ט אזי קומפקטיפיקציית אוי אוי זיהי X מ"ט איי קומפקטיפיקציית זיהי $i:X\to Y$

. סענה: יהי X מ"ט ותהיינה Y,Z קומפקטיפיקציות סטון־צ'ך אזי X הומיאומורפיים. a_{k_n} קיימת תת־סדרה פופולוגי א עבורו לכל הדרה מרחב טופולוגי מרחב מרחב מרחב מרחב מרחב מופולוגי א מרחב מופולוגי א

למה: יהיו מיטים $a:\mathbb{N} \to \prod_{lpha \in \Lambda} X_lpha$ מ"טים תהא אמ"טים מהיהיו למה: יהיו אמיטים מ"טים מ"טי לכל $\pi_{lpha}\left(a
ight)$ אזי ($\pi_{lpha}\left(a_{n}
ight)\right)_{n=0}^{\infty}$ לכל מתכנסת ל- $b\in\prod_{lpha\in\Lambda}X_{lpha}$

. סענה: [0,1] o [0,1] קומפקטית וכן אינה קומפקטית סדרתית

טענה: הישר הארוך הינו קומפקטי סדרתית וכן אינו קומקפטי וכן אינו מטריזבילי. $\Delta\subseteq\Lambda$ הימת הכו וכן מה לכל מקומית קומפקטי אזי מ"טים אזי וכן מ"טים מיטים מיטים מיטים אזי יהיו אזי יהיו אזי אזי ו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$

טענה: יהי (A,d)) אזי (A) אזי אזי (A) מרחב מטרי שלם מטרי מרחב (X,d) אזי יהי

 $ho\left(d
ight):X^\Lambda imes X^\Lambda o\mathbb{R}$ אוי קבוצה אוי מרחב מטרי מרחב מרחב (X,d) המטריקה האחידה: המחידה . $ho\left(d
ight)\left(x,y
ight)=\sup_{lpha\in\Lambda}\left\{\min\left\{d\left(x_{lpha},y_{lpha}
ight),1
ight\}
ight\}$ המוגדרת

 $ho\left(d
ight)<1$ וכן X^{Λ} וכן X^{Λ} מטריקה מעל $ho\left(d
ight)$ מרחב מטרי ותהא Λ קבוצה אזי $ho\left(d
ight)$ טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי שלם ותהא Λ קבוצה אזי (X,d) מרחב מטרי שלם. ותהיינה $f: X \to Y$ מרחב מטרי (Y, d) ותהיינה למה: יהי א מ"ט יהי (X, d) ותהיינה

מסקנה: יהי X מרחב מטרי שלם אזי C (X,Y) מרחב מטרי שלם מרחב מטרי שלם.

 $A\subseteq\mathcal{U}$ אם עבורה עבורה אז קיימת איז איז איז או diam $(A)<\delta$ אם א $A\subseteq X$

 $D \subseteq X$ קיימת $x \in X$ עבורו לכל עבורו מחם מחומית: מרחב מחומית: מרחב טופולוגיה קומפקטי מקומית: $x \in \mathcal{U}$ פתוחה המקיימת $\mathcal{U} \subset D$ פתוחה המקיימת

טענה: יהי X האוסדורף התב"ש

. קומפקטית קומפקטית באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית אכל $x\in X$ לכל $x\in X$

. טענה: \mathbb{R}^n מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי מקומית . סענה: $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ קומפקטי מקומית

 $f\left(X
ight)$ אזי ופתוחה אזי f:X o Y ותהא מ"ט ותהא ענה: יהי א קומפקטי מקומית יהי אינ מ"ט ותהא

. מקומית קומפקטית אזי Y קומפקטית מקומית ותהא אור $Y \subset X$ סגורה אזי Y קומפקטית מקומית.

. השיכון. קומפקטיפיקציה היא לעיתים מ"ט ולעיתים השיכון.

 $g\circ i=f$ רציפה עבורה g:Y o Z היימת לינת f:X o Z ולכל

. טענה: $[0,1]^2$ מצוייד עם טופולוגיית הסדר המילוני הינו קומפקטי וכן קומפקטי סדרתית. . סענה: יהי א קומפקטי מניה אזי אזי א קומפקטי סדרתית. ענה: יהי א

טופולוגיית הישר מצוייד עם הסודר המינימלי אינו בן־מניה הארוך: יהי $\omega_1 \times [0,1)$ יהי אזי שאינו בן־מניה הסודר המינימלי יהי טופולוגיית הישר הארוך: יהי

סופית עבורה $(\prod_{\alpha\in\Lambda}X_{\alpha},\mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ טופית לכל לכל לכל לכל לכל אומפקטי (קומפקטי לכל לבורה ל $(\beta\in\Lambda\setminus\Delta)$ קומפקטי

. מרחב מטרי שלם ($X, \min \{d, 1\}$) אזי שלם מטרי מטרי מרחב מטרי אזי (X, d) אזי טענה: יהי

רציפה. איי $f_n \xrightarrow{u} f$ איי עבורן עבורן $f_n \}_{n=0}^\infty \subseteq X o Y$

אינו קומפקטי. $\left(\prod_{n=1}^{\infty} \{0,1\}, \mathcal{T}_{\text{box}}\right)$