הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע אזי $|X|\leq|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ועל אזי $|X|=|Y|$.

סימון: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $\neg\left(|X|=|Y|\right)$ אזי $|X|\neq|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\leq|Y|$ וכן $|X|\neq|Y|$ אזי $|X|<|Y|$.

הערה: נקרא לביטוי $|X|$ העוצמה של X.

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין (קש"ב): תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\leq|Y|$ וכן $|Y|\leq|X|$ אזי $|X|=|Y|$.

סימון: $|\mathbb{N}|=\aleph_0$.

קבוצה בת מנייה: קבוצה X עבורה $|X|=\aleph_0$.

קבוצה סופית: קבוצה A עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\dots,n-1\}|$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $|\{0,\dots,n-1\}|=n$.

קבוצה אינסופית: קבוצה A עבורה לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\dots,n-1\}|$.

טענה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אינסופית אזי B בת מנייה.

מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהא A בת מנייה תהא B קבוצה ותהא $f:A\to B$ על אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\cup B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\dots A_n$ קבוצות בנות מנייה אזי $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ בת מנייה.

טענה: תהא $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i\in\mathbb{N}$ ותהא $\langle f_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת פונקציות באשר $f_n:\mathbb{N}\to A_n$ על לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ סופית או בת מנייה.

מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid(a\in A)\wedge(b\in B)\}$.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\times B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\dots A_n$ בנות מנייה אזי $A_1\times\ldots\times A_n$ בת מנייה.

הגדרה: תהא A קבוצה אזי $A^1=A$.

הגדרה: תהא A קבוצה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $A^n=A\times A^{n-1}$.

טענה: $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{N}^n$ בת מנייה.

מסקנה: $|\{A\subseteq\mathbb{N}\mid A\text{ סופית}\}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

מספר אלגברי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו קיים $p\in\mathbb{Z}[x]$ המקיים $p(a)=0$.

מספר טרנסצנדנטי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו לכל $p\in\mathbb{Z}[x]$ מתקיים $p(a)\neq0$.

משפט קנטור: $|\{a\in\mathbb{C}\mid a\text{ אלגברי}\}|=\aleph_0$.

יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי $\preccurlyeq\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ באשר

- רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $x\preccurlyeq x$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq z$ אזי $x\preccurlyeq z$.
- אנטי סימטריות חלשה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq x$ אזי $x=y$.

יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי $\prec\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\prec\rangle$ באשר

- אנטי רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $\neg(x\prec x)$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\prec y$ וכן $y\prec z$ אזי $x\prec z$.
- אנטי סימטריות חזקה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\prec y$ אזי $\neg(y\prec x)$.

יחס סדר קווי חלקי/חלש: יחס סדר חלקי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\vee(y\preccurlyeq x)$.

יחס סדר קווי חזק: יחס סדר חזק $\langle A,\prec\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\prec y)\vee(y\prec x)\vee(x=y)$.

טענה: $\langle\mathbb{N},\leq_{\mathbb{N}}\rangle$ יחס סדר קווי חלקי.

טענה: תהא A קבוצה אזי $\langle\mathcal{P}(A),\subseteq\rangle$ יחס סדר חלקי.

פונקציה שומרת סדר: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים אזי $f:A\to B$ חח"ע עבורה לכל $a,b\in A$ מתקיים $(aRb)\iff(f(a)\,Sf(b))$.

סדרים חלקיים איזומורפיים: סדרים $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ עבורם קיימת $\pi:A\to B$ הפיכה שומרת סדר.

סימון: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים איזומורפיים אזי $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$.

יחס סדר קווי בעל איבר ראשון/מינימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $a\in A$ באשר לכל $b\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון $a\in A$ אזי $\min(A)=a$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר ראשון.

יחס סדר קווי בעל איבר אחרון/מקסימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $b\in A$ באשר לכל $a\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון $a\in A$ אזי $\max(A)=a$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר אחרון.

יחס סדר קווי צפוף: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ המקיימים xRy קיים $z\in A$ עבורו xRz וכן zRy.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי צפוף ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ צפוף.

טענה: $\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.

מסקנה: $\langle\mathbb{N},\leq_{\mathbb{N}}\rangle\not\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A,\prec\rangle$ סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\prec\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},<_{\mathbb{Q}}\rangle$.

חסם מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\overline{B}_X=\{a\in A\mid X$ חסם מלעיל של $a\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\overline{B}_X\neq\varnothing$.

חסם מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\underline{B}_X=\{a\in A\mid X$ חסם מלרע של $a\}$.

קבוצה חסומה מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\underline{B}_X\neq\varnothing$.

קבוצה חסומה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ בעלת חסם מלרע וחסם מלעיל.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\sup(X)=\min\left(\overline{B}_X\right)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\inf(X)=\max\left(\underline{B}_X\right)$.

יחס סדר קווי שלם: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $X\subseteq A$ חסומה מלעיל קיים $\sup(X)$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי ($\langle A,R\rangle$ סדר שלם)$\Longleftrightarrow$(לכל $X\subseteq A$ חסומה קיימים $\sup(X),\inf(X)$).

קבוצה צפופה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה לכל $x,y\in A$ באשר xRy קיים $z\in X$ המקיים xRz וכן zRy.

השלמה של יחס סדר קווי חלקי: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי סדר חלקי $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ המקיים

- $P\subseteq L$.
- לכל $x,y\in P$ מתקיים $(x\sqsubseteq y)\Longleftrightarrow(x\preccurlyeq y)$.
- $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
- $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ צפוף ב־$\langle L,\sqsubseteq\rangle$.

משפט יחידות השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה $\langle L,\sqsubseteq\rangle,\langle L^*,\sqsubseteq^*\rangle$ השלמות אזי קיים איזומורפיזם $\pi:L\to L^*$ עבורו $\pi(p)=p$ לכל $p\in P$.

משפט קיום השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.

חתך דדקינד: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $A,B\subseteq P$ לא ריקות אזי $\langle A,B\rangle$ באשר

- $A\cap B=\varnothing$.
- $A\cup B=P$.
- לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ מתקיים $a\preccurlyeq b$.
- $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]=\langle(-\infty,p),[p,\infty)\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]$ חתך דדקינד.

הגדרה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $\langle A,B\rangle,\langle C,D\rangle$ חתכי דדקינג באשר $A\subseteq C$ אזי $\langle A,B\rangle\preccurlyeq\langle C,D\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\{[p]\mid p\in P\},\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$.

הערה: נשתמש בהתאמה מעל בתור שיכון של P בחתכי הדדקינד שלה.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\mathrm{Ded}(P)=\{\langle A,B\rangle\mid\langle A,B\rangle$ חתך דדקינד$\}$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ צפופה ב־$\langle \mathrm{Ded}\left(P\right), \preccurlyeq \rangle$.

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle \mathrm{Ded}\left(P\right), \preccurlyeq \rangle$ סדר שלם.

טענה: יהי $\langle A, \prec \rangle$ סדר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון $\langle B, \sqsubset \rangle$ עבורו קיימת $f : A \to B$ שומרת סדר.

מספרים ממשיים: $\langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} \rangle$ הינה ההשלמה של $\langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle$.

משפט: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} \rangle$.

טענה: $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$.

קבוצת החזקה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}\left(X\right) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$.

סימון: תהא X קבוצה אזי ${}^{X}2 = \{f \mid f : X \to \{0,1\}\}$.

טענה: תהא X קבוצה אזי $|\mathcal{P}\left(X\right)| = \left|{}^{X}2\right|$.

משפט קנטור: תהא X קבוצה אזי $|X| < |\mathcal{P}\left(X\right)|$.

טענה: $|\mathbb{R}| = \left|{}^{\mathbb{N}}2\right|$.

קבוצת קנטור: נגדיר $C_0 = [0,1]$ ונגדיר $C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mathcal{C} = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$.

טענה: $(\mathcal{C}, <_{\mathbb{R}}) \simeq \left({}^{\mathbb{N}}\{0,1\}, <_{\mathrm{lex}}\right)$.

טענה: תהיינה A, B קבוצות זרות ותהיינה C, D קבוצות זרות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \cup B| = |C \cup D|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות זרות אזי $|A \cup B| = |A| + |B|$.

טענה: תהא A קבוצה אזי $|A \times \{0\}| = |A|$.

הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}|$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \times B| = |C \times D|$.

הגדרה כפל: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| \cdot |B| = |A \times B|$.

הערה: נאמר כי κ היא עוצמה אם קיימת קבוצה A עבורה $|A| = \kappa$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי ${}^{B}A = \{f \mid f : B \to A\}$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $\left|{}^{B}A\right| = \left|{}^{D}C\right|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A|^{|B|} = \left|{}^{B}A\right|$.

מסקנה: $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$ וכן $\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)}$ וכן $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu})$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\aleph_0 + n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0^n = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $2^{\aleph_0} + n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $2^{\aleph_0} \cdot n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\left(2^{\aleph_0}\right)^n = 2^{\aleph_0}$ וכן $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ וכן $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $|\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{N} \to \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $\left|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}\right| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא B קבוצה באשר $|B| = 2^{\aleph_0}$ ותהא $A \subseteq B$ באשר $|A| \leq \aleph_0$ אזי $|B \backslash A| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ מספר טרנסצנדנטי}\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ אי־רציונלי}\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \wedge (f \text{ רציפה})\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \wedge (f \text{ מונוטונית})\}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $|\{A \mid (A \subseteq \mathbb{R}) \wedge (A \text{ פתוחה})\}| = 2^{\aleph_0}$.

יחס סדר טוב: סדר קווי $\langle W, \prec \rangle$ עבורו לכל $A \subseteq W$ באשר $A \neq \varnothing$ קיים איבר קטן ביותר.

טענה: $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ סדר טוב.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\langle \mathbb{N}_{\leq n}, <_{\mathbb{N}_{\leq n}} \rangle$ סדר טוב.

רישה של יחס סדר טוב: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב אזי $S \subseteq W$ המקיימת

- $S \neq W$.
- לכל $a \in S$ ולכל $b \in W$ אם $b \prec a$ אזי $b \in S$.

סימון: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a \in W$ אזי $W[a] = \{b \in W \mid b \prec a\}$.

מסקנה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a \in W$ אזי $W[a]$ רישה ב־W.

טענה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ותהא S רישה ב־W אזי קיים $x \in W$ עבורו $S = W[x]$.

טענה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ותהא $f : W \to W$ שומרת סדר אזי $(x \prec f(x)) \vee (x = f(x))$ לכל $x \in W$.

מסקנה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a \in W$ אזי $W \not\simeq W[a]$.

מסקנה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $f : W \to W$ איזומורפיזם אזי $f = \mathrm{Id}$.

מסקנה: יהיו $\langle W, \prec \rangle, \langle A, \sqsubset \rangle$ יחסי סדר טובים ויהיו $f, g : W \to A$ איזומורפיזמים אזי $f = g$.

משפט ההשוואה: יהיו $\langle W, \prec \rangle, \langle A, \sqsubset \rangle$ יחסי סדר טובים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\langle W, \prec \rangle \simeq \langle A, \sqsubset \rangle$.
- קיים $w \in W$ עבורו $\langle W[w], \prec \rangle \simeq \langle A, \sqsubset \rangle$.
- קיים $a \in A$ עבורו $\langle W, \prec \rangle \simeq \langle A[a], \sqsubset \rangle$.

קבוצה טרנזיטיבית: קבוצה X עבורה לכל $A \in X$ ולכל $y \in A$ מתקיים $y \in X$.

סודר: קבוצה טרנזיטיבית X עבורה $\langle X, \in \rangle$ יחס סדר טוב.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha \cup \{\alpha\}$ סודר.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha \notin \alpha$.

טענה: יהי α סודר ויהי $x \in \alpha$ אזי x סודר.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\beta \in \alpha$ אזי $\alpha \notin \beta$.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \subsetneq \beta$ אזי $\alpha \in \beta$.

טענה משפט ההשוואה: יהיו α, β סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\alpha = \beta$.
- $\alpha \in \beta$.
- $\beta \in \alpha$.

טענה: תהא S קבוצה לא ריקה של סודרים אזי $\min(S)$ קיים.

הגדרה: $\mathcal{O}_n = \{\alpha \mid \text{סודר } \alpha\}$.

סימון: $\mathcal{O}_n = \mathrm{Ord}$.

טענה פרדוקס גוראלי־פורטי: $\mathcal{O}_n$ אינה קבוצה.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \in \beta$ אזי $(\alpha \cup \{\alpha\} \in \beta) \vee (\alpha \cup \{\alpha\} = \beta)$.

סימון: יהי α סודר אזי $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

טענה: תהא S קבוצת סודרים אזי קיים סודר α עבורו לכל $\beta \in S$ מתקיים $\beta \in \alpha$.

טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב אזי סודר α עבורו $\langle \alpha, \in \rangle \simeq \langle W, \prec \rangle$.

משפט: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל־$\langle W, \prec \rangle$.

סימון: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי α סודר טיפוס של $\langle W, \prec \rangle$ אזי $\mathrm{opt}(\langle W, \prec \rangle) = \alpha$.

אקסיומת ההחלפה: תהא P נוסחה באשר לכל קבוצה X קיימת ויחידה קבוצה Y עבורה $P(X, Y)$ אזי לכל קבוצה A קיימת קבוצה B באשר לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ המקיים $P(a, b)$. זוהי אינה טענה

אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי $\{a \in A \mid P(a)\}$ קבוצה. זוהי אינה טענה

משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר α מתקיים $(\forall \beta \in \alpha . P(\beta)) \implies (P(\alpha))$ אזי לכל סודר γ מתקיים $P(\gamma)$.

סודר עוקב: סודר α עבורו קיים סודר $\beta \in \alpha$ המקיים $\alpha = \beta + 1$.

סודר גבולי: סודר α עבורו לכל סודר $\beta \in \alpha$ מתקיים $\alpha \neq \beta + 1$.

משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת

- $P(\varnothing)$.
- לכל סודר α מתקיים $P(\alpha) \Longrightarrow P(\alpha+1)$.
- לכל סודר גבולי α מתקיים $(\forall \beta \in \alpha . P(\beta)) \Longrightarrow (P(\alpha))$.

אזי לכל סודר γ מתקיים $P(\gamma)$.

אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה S באשר $\varnothing \in S$ וכן לכל $x \in S$ מתקיים $x+1 \in S$. זוהי אינה טענה

טענה: תהא S קבוצה באשר $\varnothing \in S$ וכן לכל $x \in S$ מתקיים $x+1 \in S$ ויהי δ הסודר הראשון באשר $\delta \notin S$ אזי δ סודר גבולי.

סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו $\varnothing$ הינו ω.

סימון: $0 = \varnothing$.

הגדרה: $\mathbb{N} = \omega$.

הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה $n+1 = n \cup \{n\}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

סימון: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \in \beta$ אזי $\alpha < \beta$.

הגדרה חיבור: יהי α סודר אזי

- $\alpha + 0 = \alpha$.
- יהי β סודר אזי $\alpha + (\beta+1) = (\alpha+\beta)+1$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma<\beta} (\alpha+\gamma)$.

טענה: $0+\omega = \omega$ וכן $1+\omega = \omega$ וכן $\omega+1 > \omega$.

הגדרה כפל: יהי α סודר אזי

- $\alpha \cdot 0 = 0$.
- יהי β סודר אזי $\alpha \cdot (\beta+1) = (\alpha\cdot\beta)+\alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma<\beta} (\alpha\cdot\gamma)$.

טענה: $0 \cdot \omega = 0$ וכן $1 \cdot \omega = \omega$ וכן $2 \cdot \omega = \omega$ וכן $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

טענה: יהי $n < \omega$ אזי $\omega + \omega > \omega + n$.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha + \omega$ סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי α סודר אזי

- $\alpha^0 = 1$.
- יהי β סודר אזי $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} (\alpha^\gamma)$.

טענה: $1^\omega = 1$ וכן $2^\omega = \omega$ וכן $\omega^1 = \omega$ וכן $\omega^2 = \omega \cdot \omega$ וכן $\omega^2 > 2^\omega$.

מונה: סודר α עבורו לכל $\beta < \alpha$ מתקיים $|\beta| < |\alpha|$.

סימון: $\aleph_0 = \omega$.

הערה: ההגדרה מלעיל מתלכדת עם היות $\omega = |\omega|$, לשם נוחות נשתמש פה בסימון זה ובהמשך נצדיקו.

טענה: יהיו α, β סודרים בני מנייה אזי $\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta, \alpha^\beta$ סודרים בני מנייה.

טענה: קיים סודר α המקיים $\omega < \alpha$ באשר α אינו בן מנייה.

טענה: יהי δ סודר אזי קיים מונה κ באשר $\delta < \kappa$.

סימון: יהי α סודר אזי α^+ הינו המונה הראשון עבורו $\alpha < \alpha^+$.

הגדרה א: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$.

הגדרה א: יהי α סודר גבולי אזי $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$.

טענה: יהי α סודר אזי $\aleph_\alpha$ מונה.

טענה: יהי κ מונה אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $\kappa = \aleph_\alpha$.

סימון: יהי α סודר אזי $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$.

סימון: יהיו δ, α סודרים אינסופיים באשר $|\delta| = |\aleph_\alpha|$ אזי $|\delta| = \aleph_\alpha$.

משפט: יהי α סודר אזי $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

משפט: יהיו κ, λ מונים אינסופיים אזי

- $\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- $\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

מסקנה: יהיו α, β סודרים אזי

- $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$.
- $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$.

הגדרה: יהי α סודר אזי יחס סדר $\langle \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, < \rangle$ באשר ...

טענה: יהי α סודר אזי $\langle \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, < \rangle$ יחס סדר טוב.

משפט: יהי α סודר אזי $\operatorname{opt}\left(\langle \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, < \rangle\right) = \aleph_\alpha$.

פונקציית בחירה: תהא S קבוצה באשר $\varnothing \notin S$ אזי $f : S \to A$ עבורה לכל $X \in S$ מתקיים $f(X) \in X$.

אקסיומת הבחירה (AC): תהא S קבוצה באשר $\varnothing \notin S$ אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S. זוהי אינה טענה

טענה: תהא $A \neq \varnothing$ אזי (קיימת $f : A \to \mathbb{N}$ חח"ע)$\Longleftrightarrow$(קיימת $g : \mathbb{N} \to A$ על).

משפט הסדר הטוב/משפט צרמלו: תהא A קבוצה עבורה קיימת פונקציית בחירה על $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ אזי קיים סדר טוב על A.

הגדרה משפט הסדר הטוב: תהא A קבוצה אזי קיים סדר טוב על A. זוהי אינה טענה

משפט: (AC)$\Longleftrightarrow$(משפט הסדר הטוב).

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $|A| = \aleph_\alpha$. דורש AC

השערת הרצף הפרטית (CH): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. דורש AC, זוהי אינה טענה

השערת הרצף הכללית (GCH): יהי α סודר אזי $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. דורש AC, זוהי אינה טענה

הערה: CH בלתי תלויה ב־ZFC.

הערה: GCH בלתי תלויה ב־ZFC.

הערה: AC בלתי תלויה ב־ZF.

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיימת $B \subseteq A$ בת מנייה. דורש AC

טענה: תהא $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i \in \mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ סופית או בת מנייה. דורש AC

יחס סדר חלקי בעל איבר מינימלי: סדר חלקי $\langle A, \leq \rangle$ עבורו קיים $a \in A$ באשר לכל $b \in A$ מתקיים $(b \leq a) \Longrightarrow (b = a)$.

יחס סדר קווי בעל איבר מקסימלי: סדר קווי $\langle A, \leq \rangle$ עבורו קיים $b \in A$ באשר לכל $a \in A$ מתקיים $(b \leq a) \Longrightarrow (b = a)$.

הגדרה הלמה של צורן: יהי $\langle P, \leq \rangle$ יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת $A \subseteq P$ קיים חסם מלעיל אזי קיים ב־P איבר מקסימלי. זוהי אינה טענה

משפט: (AC)$\Longleftrightarrow$(הלמה של צורן).