משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה
- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Vol}_n\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Vol}_n(A_i)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $k\in\mathbb{N}$ קיימות $X_1\ldots X_k,Y_1\ldots Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ וקיימות $\varphi_1\ldots\varphi_k$ איזומטריות המקיימות $X=\biguplus_{i=1}^{k}X_i$ וכן $Y=\biguplus_{i=1}^{k}Y_i$ וכן $\forall j\in[k].Y_j=\varphi_j(X_j)$.

סימון: תהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חופפות בחלקים אזי $X\equiv Y$.

משפט פרדוקס בנך־טרסקי: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ ותהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\mathrm{int}(X)\neq\varnothing$ וכן $\mathrm{int}(Y)\neq\varnothing$ אזי $X\equiv Y$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה
- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(A\uplus B)=\mathrm{Vol}_n(A)+\mathrm{Vol}_n(B)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

משפט בנך: יהי $n\in\{1,2\}$ אזי קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה
- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(A\uplus B)=\mathrm{Vol}_n(A)+\mathrm{Vol}_n(B)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהיינה $A,B\in\mathcal{A}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{A}$.

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

σ־אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$ σ־אלגברה אזי $\mathcal{A}$ אלגברה.

σ־אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ σ־אלגבראות אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ σ־אלגברה.

σ־אלגברה נוצרת: תהא X קבוצה תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל X המכילות את A אזי $\sigma(A)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $\sigma(A)$ הינה ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את A.

σ־אלגברה בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathcal{B}(X)=\sigma(\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}(X)\mid \text{פתוחה } \mathcal{O}\})$.

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות
- σ־אלגברה בורל על X.
- $\sigma(\{B_r(a)\mid(r>0)\wedge(a\in X)\})$.
- $\sigma(\{B_r(a)\mid(r\in\mathbb{Q}_+)\wedge(a\in X)\})$.
- תהא $Y\subseteq X$ צפופה אזי $\sigma(\{B_r(a)\mid(r\in\mathbb{Q}_+)\wedge(a\in Y)\})$.

קבוצה G_δ: $X\subseteq A$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ פתוחות המקיימות $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

קבוצה F_δ: $A \subseteq X$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סגורות המקיימות $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_i$.

מסקנה: תהא A קבוצה G_δ ותהא B קבוצה F_δ אזי $A, B \in \mathcal{B}(X)$.

טענה: הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על $\mathbb{R}^n$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mid a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{R}\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mid a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{Q}\right\}\right)$.

משפט: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $C(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ רציפה ב־} x\}$ אזי

- $C(f) \in G_\delta$.
- תהא $X \in G_\delta$ אזי קיימת f עבורה $C(f) = X$.

קבוצה דלילה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ המקיימת $\text{int}\left(\overline{A}\right) = \varnothing$.

קבוצה מקטגוריה ראשונה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימות $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ דלילות עבורן $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ שאינה מקטגוריה ראשונה.

קבוצה שיורית: יהי X מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $A^{\mathcal{C}}$.

למה: יהי X מרחב מטרי אזי

- תהא $A \subseteq X$ דלילה ותהא $B \subseteq A$ אזי B דלילה.
- תהיינה $A_1 \ldots A_n \subseteq X$ דלילות אזי $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ דלילה.
- תהא $A \subseteq X$ דלילה אזי $\overline{A}$ דלילה.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $\text{int}(A) = \varnothing$.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות σ־אידיאל.

מסקנה: $\mathbb{Q} \notin G_\delta$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי קיימת $F \subseteq \mathbb{R}$ מקטגוריה ראשונה וקיימת $N \subseteq \mathbb{R}$ זניחה עבורה $A = F \uplus N$.

משפט בנך: במרחב המטרי $C([0,1])$ עם נורמת מקסימום הקבוצה $\{f \in C([0,1]) \mid \exists x \in (0,1) . f \in \mathcal{D}(x)\}$ היא מקטגוריה ראשונה.

הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבוצה בעלת תכונת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימת $G \subseteq X$ פתוחה וקיימת $Q \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A = G \triangle Q$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ אזי (ל־A יש את תכונת בייר)$\iff$(קיימת $F \subseteq X$ סגורה וקיימת $P \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A = F \triangle P$).

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ בעלת תכונת בייר אזי $A^{\mathcal{C}}$ בעלת תכונת בייר.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\{A \subseteq X \mid A \text{ בעלת תכונת בייר}\} = \sigma\left(\{A \subseteq X \mid (A \text{ פתוחה}) \lor (A \text{ מקטגוריה ראשונה})\}\right)$.

משפט: תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\varnothing, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \left\{A^{\mathcal{C}} \mid A \in \mathcal{F}_\alpha\right\} \cup \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_\alpha\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{F}_\alpha$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא X קבוצה עבורה $|X| = \aleph$ אזי $|\sigma(X)| = \aleph$.

מרחב מדיד: תהא X קבוצה ותהא $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ־אלגברה אזי (X, Σ).

פונקציית מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing) = 0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$.

מרחב מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא μ פונקציית מידה אזי (X, Σ, μ).

מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) < \infty$.

מידה σ־סופית: פונקציית מידה μ עבורה קיימים $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ המקיימים $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ וכן $\forall i \in \mathbb{N}_+ . \mu(B_i) < \infty$.

מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) = 1$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי
- מונוטוניות: יהיו $A,B\in\Sigma$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.
- σ־תת־אדיטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.
- רציפות מלעיל: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.
- רציפות מלרע: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ וכן $\mu(A_1)<\infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

מידת בורל: תהא X קבוצה אזי מידה μ על $(X,\mathcal{B}(X))$.

קבוצה ממידה אפס/זניחה: $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu(E)=0$.

סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{N}=\{E\in\Sigma\mid\mu(E)=0\}$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זניחות אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ זניחה.

כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי ψ פרידיקט עבורו קיימת $E\in\mathcal{N}$ המקיים כי ψ מתקיים לכל $X\backslash E$ אזי נאמר כי "ψ נכונה μ כמעט בכל מקום".

מידה שלמה: פונקציית מידה μ עבורה לכל $E\in\mathcal{N}$ ולכל $F\subseteq E$ מתקיים $F\in\mathcal{N}$.

השלמה של σ־אלגברה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}=\{E\cup F\mid(E\in\Sigma)\wedge(\exists N\in\mathcal{N}.F\subseteq N)\}$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}$ σ־אלגברה.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי קיימת ויחידה מידה שלמה ν על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\nu_{\restriction_\Sigma}=\mu$.

השלמה של מידה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי המידה השלמה $\overline{\mu}$ על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\overline{\mu}_{\restriction_\Sigma}=\mu$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\left(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu}\right)$ מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X\in\mathcal{D}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{D}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $B\backslash A\in\mathcal{D}$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{D}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{D}$.

מערכת π: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A_1\ldots A_n\in\Pi$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\Pi$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ מחלקות דינקין אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$ מחלקת דינקין.

מחלקת דינקין נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות דינקין מעל X המכילות את A אזי $d(A)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $d(A)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

משפט הלמה של דינקין: תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π אזי $\sigma(\Pi)=d(\Pi)$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma(\Pi)$ ותהיינה μ,ν מידות סופיות על Σ עבורן $\mu(X)=\nu(X)$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi}=\nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma(\Pi)$ תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Pi$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ וכן $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=X$ ותהיינה μ,ν מידות על Σ עבורן $\forall n\in\mathbb{N}_+.\mu(A_i)=\nu(A_i)<\infty$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi}=\nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

חוג למחצה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $\varnothing\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $C_1\ldots C_n\in\mathcal{E}$ עבורם $A\backslash B=\biguplus_{i=1}^{n}C_i$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ חוג למחצה ויהיו $A_1\ldots A_n\in\mathcal{E}$ אזי
- יהי $P\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $B_1\ldots B_m\in\mathcal{E}$ עבורם $P\backslash\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}B_i$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in[n])\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in\mathbb{N}_+)\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{\infty}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.

מידה אלמנטרית: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ חוג למחצה אזי $\mu:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ המקיימת
- $\mu(\varnothing)=0$.
- אדיטיביות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ עבורם $A\uplus B\in\mathcal{E}$ אזי $\mu(A\uplus B)=\mu(A)+\mu(B)$.

- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu\left(A\right)\le\mu\left(B\right)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$.

מידה חיצונית: יהי $X\neq\varnothing$ אזי $\mu^*:\mathcal{P}\left(X\right)\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת

- $\mu^*\left(\varnothing\right)=0$.
- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu^*\left(A\right)\le\mu^*\left(B\right)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$.

המידה החיצונית הנוצרת על ידי ρ: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\rho\left(\varnothing\right)=0$ נגדיר $\rho^*:\mathcal{P}\left(X\right)\to\left[0,\infty\right]$ כך $\rho^*\left(A\right)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(E_i\right)\mid\left(\left\{E_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}\right)\wedge\left(A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\rho\left(\varnothing\right)=0$ אזי ρ^* מידה חיצונית.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $m^*_{\restriction\mathcal{M}}=m$.

קבוצה λ: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי $E\in\mathcal{A}$ עבורה לכל $F\in\mathcal{A}$ מתקיים $\lambda\left(E\cap F\right)+\lambda\left(E^{\mathcal{C}}\cap F\right)=\lambda\left(E\cap F\right)+\lambda\left(F\backslash E\right)=\lambda\left(F\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי $\Gamma_0=\left\{E\in\mathcal{A}\mid E\text{ קבוצה }\lambda\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי

- Γ_0 אלגברה.
- λ אדיטיבית על Γ_0.
- תהיינה $E_1\ldots E_n\in\Gamma_0$ ויהי $F\in\mathcal{A}$ אזי $\lambda\left(\biguplus_{i=1}^{n}\left(E_k\cap F\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(E_n\cap F\right)$.

קבוצה מדידה ביחס למידה חיצונית: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $A\subseteq X$ עבורה לכל $E\subseteq X$ מתקיים $\mu^*\left(E\right)=\mu^*\left(E\cap A\right)+\mu^*\left(E\backslash A\right)$.

סימון: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $\Sigma_{\mu^*}=\left\{A\subseteq X\mid A\text{ מדידה }\mu^*\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mathcal{M}\subseteq\Sigma_{m^*}$.

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי

- Σ_{μ^*} σ־אלגברה.
- $\mu^*_{\restriction\Sigma_{\mu^*}}$ מידה שלמה.

המשכת קרתיאודורי: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי m^* מידה מעל Σ_{m^*}.

משפט: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא $\left(X,\Sigma',\mu\right)$ המשכת קרתיאודורי נוספת של $\left(\mathcal{M},m\right)$ אזי

- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu\left(A\right)\le m^*\left(A\right)$.
- נניח כי $m^*\left(X\right)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^*\left(A\right)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^*\left(A\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

משפט קרתיאודורי: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא μ^* מידה חיצונית עבורה לכל $A,B\subseteq X$ באשר $d\left(A,B\right)>0$ מתקיים $\mu^*\left(A\cup B\right)=\mu^*\left(A\right)+\mu^*\left(B\right)$ אזי $\mathcal{B}\left(X\right)\subseteq\Sigma_{\mu^*}$.

קבוצה רגולרית: קבוצה $A\in\Sigma$ עבורה $\mu\left(A\right)=\sup\left\{\mu\left(K\right)\mid\left(K\subseteq A\right)\wedge\left(K\text{ קומפקטית}\right)\right\}$.

מידה רגולרית: מידה μ עבורה כל $A\in\Sigma$ הינה רגולרית.

משפט אולם: יהי X מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא μ מידת בורל עבורה $\mu\left(X\right)<\infty$ אזי μ רגולרית.

מידת הנפח האלמנטרית: מידה אלמנטרית m מעל $\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(a_i,b_i\right)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}\right\}$ עבורה $m\left(\prod_{i=1}^{n}\left(a_i,b_i\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)$.

σ־אלגברה לבג: $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)=\sigma\left(\left\{A\subseteq\mathbb{R}^n\mid\left(A\text{ פתוחה}\right)\vee\left(A\text{ זניחה על פי מידת הנפח האלמנטרית}\right)\right\}\right)$.

מסקנה: $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\subseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

טענה: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)=\Sigma_{m^*}$.

מידת לבג: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי המשכת קרתיאודור $\lambda=m^*$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)\to\left[0,\infty\right]$ מידה אלמנטרית עבורה $\nu\left(\prod_{i=1}^{n}\left(a_i,b_i\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)$ אזי ν הינה מידת הנפח האלמנטרית.

טענה: תהא λ מידת לבג אזי

- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $\lambda\left(E\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda\left(E\cap\left[-n,n\right]^d\right)$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $E\subseteq\mathcal{O}$ פתוחה עבורה $\lambda\left(\mathcal{O}\backslash E\right)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ סגורה עבורה $\lambda\left(E\backslash F\right)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $\mu\left(E\right)<\infty$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ קומפקטית עבורה $\lambda\left(E\backslash F\right)<\varepsilon$.
- תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי ($E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$)$\Longleftrightarrow$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\lambda\left(A\right)=\lambda\left(B\right)$).

טענה: תהא μ מידת לבג ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ התב"ש
- $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
- קיימת $G\in G_\delta$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=G\backslash E$.
- קיימת $F\in F_\sigma$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=F\cup E$.

מסקנה: תהא λ מידת לבג אזי $\left(\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right),\lambda\right)$ השלמה של $\left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right),m\right)$.

משפט: תהא λ מידת לבג תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה תהא $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^d$ ליפשיץ ותהא $A\subseteq\mathcal{O}$ אזי
- נניח כי $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $f\left(A\right)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
- נניח כי $\lambda\left(A\right)=0$ אזי $\lambda\left(f\left(A\right)\right)=0$.

משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ויהי $x\in\mathbb{R}^n$ אזי $\lambda\left(A\right)=\lambda\left(A+x\right)$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)\to\left[0,\infty\right]$ מידה אינווריאנטית להזזות וכן לכל $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ חבומה מתקיים $\nu\left(E\right)<\infty$ אזי קיים $\kappa\in\left[0,\infty\right)$ עבורו $\lambda=\kappa\nu$.

משפט: תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ותהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $\lambda\left(T\left(E\right)\right)=\left|\det\left(T\right)\right|\lambda\left(E\right)$.

קבוצה פשוטה: $A\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה קיימים $a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}$ המקיימים $A=\prod_{i=1}^n\left(a_i,b_i\right)$.

הגדרה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ חסומה ותהא λ מידת לבג אזי
- מידת ז'ורדן פנימית: $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\sup\left\{\lambda\left(A\right)\mid\left(A\text{ פשוטה}\right)\wedge\left(A\subseteq E\right)\right\}$.
- מידת ז'ורדן חיצונית: $\lambda_J^*\left(E\right)=\inf\left\{\lambda\left(A\right)\mid\left(A\text{ פשוטה}\right)\wedge\left(A\supseteq E\right)\right\}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ חסומה עבורה $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\lambda_J^*\left(E\right)$ אזי $\lambda_J\left(E\right)=\lambda_J^*\left(E\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ חסומה אזי $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\lambda\left(\mathrm{int}\left(E\right)\right)$ וכן $\lambda_J^*\left(E\right)=\lambda\left(\overline{E}\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ חסומה ותהא λ מידת לבג אזי
- E מדידה ז'ורדן.
- לכל $\varepsilon>0$ אזי קיימות A,B פשוטות עבורן $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\lambda\left(B\backslash A\right)<\varepsilon$.
- $\lambda_J^*\left(\partial E\right)=0$.
- $\lambda^*\left(\partial E\right)=0$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>1$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Z}^d\backslash\left\{0\right\}$.

משפט מינקובסקי: יהי $V\subseteq\mathbb{R}^d$ גוף קמור סימטרי סביב 0 עבורו $\lambda\left(V\right)>2^d$ אזי $V\cap\left(\mathbb{Z}^d\backslash\left\{0\right\}\right)\neq\varnothing$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)\in\left(0,\infty\right)$ ותהא $\theta\in\left(0,1\right)$ אזי קיימת קוביה $Q\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה $\lambda\left(E\cap Q\right)>\theta\cdot\lambda\left(Q\right)$.

משפט שטיינהאוס: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>0$ אזי $0\in\mathrm{int}\left(E-E\right)$.

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>0$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Q}\backslash\left\{0\right\}$.

למה: תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה אזי קיימים $\left\{B_i\right\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ כדורים וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורם $\mathcal{O}=\left(\biguplus_{i=1}^\infty B_i\right)\cup E$.

פונקציית התפלגות: $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ מונוטונית עולה ורציפה מימין.

טענה: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ אזי $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $F\left(x\right)=\mu\left(\left(-\infty,x\right]\right)$ הינה פונקציית התפלגות.

קדם־מידה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה אזי $\mu:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת
- $\mu\left(\varnothing\right)=0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\left\{B_i\right\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^\infty B_i\right)=\sum_{i=1}^\infty\mu\left(B_i\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $m^*_{\restriction\mathcal{A}}=m$.

טענה: תהא$\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $\mathcal{A}\subseteq\Sigma_{m^*}$.

המשכת קרתיאודורי: תהא$\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי m^* מידה מעל Σ_{m^*}.

משפט: תהא$\mathcal{A}$אלגברה תהא m קדם־מידה ותהא $\left(X,\Sigma',\mu\right)$ המשכת קרתיאודורי נוספת של $\left(\mathcal{A},m\right)$ אזי

- לכל $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A) \le m^*(A)$.
- נניח כי $m^*(X) < \infty$ אזי לכל $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A) = m^*(A)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A) = m^*(A)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהא m קדם־מידה σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

טענה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$ מידה אלמנטרית מעל החוג למחצה $\{[a,b) \mid a \le b\}$.

טענה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i))$ קדם־מידה מעל האלגברה $\{\biguplus_{i=1}^{n}[a_i,b_i) \mid \forall i \in [n] . a_i \le b_i\}$.

משפט: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי קיימת ויחידה מידת בורל μ_F עבורה $\mu_F([a,b)) = F(b) - F(a)$.

טענה: תהיינה $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות התפלגות אזי $(\mu_F = \mu_G) \iff (\exists c \in \mathbb{R}. F - G = c)$.

מידה סופית מקומית: מידת בורל μ מעל $\mathbb{R}$ עבורה $\forall a,b \in \mathbb{R}. \mu([a,b]) < \infty$.

מסקנה: תהא μ מידת בורל סופית מקומית על $\mathbb{R}$ אזי קיימת פונקציית התפלגות $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עבורה $\mu = \mu_F$.

מידת לבג־סטילטייס: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\overline{\mu_F}$.

סימון: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות נסמן $\mu_F = \overline{\mu_F}$.

מסקנה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E \in \Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i)) \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\right\}$.

למה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E \in \Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i)) \mid E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right\}$.

משפט: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E \in \Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F(E) = \sup\{\mu_F(K) \mid (K \subseteq E) \wedge (\text{קומפקטית } K)\}$.

מסקנה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי μ_F רגולרית.

משפט: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E \subseteq \mathbb{R}$ התב"ש

- $E \in \Sigma_{\mu_F}$.
- קיימת $G \in G_\delta$ וכן $N \in \mathcal{N}$ עבורן $E = G \backslash N$.
- קיימת $F \in F_\sigma$ וכן $N \in \mathcal{N}$ עבורן $E = F \uplus N$.

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(E \in \Sigma_{\mu_F}) \iff$(קיימות $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ המקיימות $A \subseteq E \subseteq B$ וכן $\mu_F(A) = \mu_F(B)$).

טענה העיקרון הראשון של ליטלווד: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות תהא $E \in \Sigma_{\mu_F}$ עבורה $\mu_F(E) < \infty$ ותהא $\varepsilon > 0$ אזי קיימים $a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{R}$ עבורם $\mu_F\left(E \triangle \left(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right)\right) < \varepsilon$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$

טענה: תהא λ מידת לבג אזי $\mathcal{C} \in \mathcal{N}$.

טענה: $\mathcal{C} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i} \;\middle|\; x \in \mathbb{N}^{\{0,2\}}\right\}$.

קבוצה מושלמת: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ בלתי קשירה לחלוטין אשר לא מכילה נקודות מבודדות.

טענה:

- $|\mathcal{C}| = \aleph$.
- $\mathcal{C}$ קומפקטית.
- $\mathcal{C}$ מושלמת.

קבוצת קנטור מוכללת: תהיינה $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}((0,1))$ נגדיר $C_0 = [0,1]$ וכן את C_n להיות C_{n-1} לאחר שהוצאנו ממרכזו של כל קטע I ב־C_{n-1} קטע באורך $\delta_n \cdot \lambda(I)$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$.

טענה: קבוצת קנטור הינה קבוצת קנטור מוכללת באשר $\forall n \in \mathbb{N}_+ . \delta_n = \frac{1}{3}$.

טענה: תהיינה $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}((0,1))$ אזי (קבוצת קנטור המוכללת זניחה על פי מידת לבג)$\iff(\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i = \infty)$.

הגדרה: נגדיר $\varphi^\star : \mathcal{C} \to [0,1]$ כך שאם $x \in \mathcal{C}$ בעל הצגה $x = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2a_i}{3^i}$ עבור $a_i \in \{0,1\}$ אזי $\varphi^\star(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$.

פונקציית קנטור: נגדיר $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ כך $\varphi(x) = \sup\{\varphi^\star(t) \mid (t \in \mathcal{C}) \wedge (t \le x)\}$.

טענה: תהא $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ פונקציית קנטור אזי

- φ עולה.
- φ רציפה.
- $\varphi(\mathcal{C}) = [0,1]$.
- קיימת $E \subseteq \mathcal{C}$ עבורה $\varphi(E) \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

קוטר קבוצה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ אזי $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $\delta>0$ ויהי $E\subseteq X$ אזי
$\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)=\inf\left\{ \sum_{i=1}^{n}\operatorname{diam}\left(A_{i}\right)^{s}\mid\left(E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_{i}\right)\wedge\left(\operatorname{diam}\left(A_{i}\right)<\delta\right)\right\}$.

מידת האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_{s}\left(E\right)=\lim_{\delta\downarrow0}\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $\delta>0$ אזי

- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f\left(\delta\right)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$ יורדת.
- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:[0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f\left(s\right)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$ יורדת.
- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f\left(s\right)=\mathcal{H}_{s}\left(E\right)$ יורדת.
- $\mathcal{H}_{s}\left(\varnothing\right)=0$.
- $\mathcal{H}_{s},\mathcal{H}_{s,\delta}$ מידות חיצוניות.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ יהי $\delta>0$ ותהיינה $A,B\subseteq X$ עבורן $d\left(A,B\right)>\delta$ אזי
$\mathcal{H}_{s,\delta}\left(A\cup B\right)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(A\right)+\mathcal{H}_{s,\delta}\left(B\right)$.

מסקנה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ותהיינה $A,B\subseteq X$ עבורן $d\left(A,B\right)>0$ אזי $\mathcal{H}_{s}\left(A\cup B\right)=\mathcal{H}_{s}\left(A\right)+\mathcal{H}_{s}\left(B\right)$.

מסקנה: יהי $s\ge0$ ותהא $E\in\mathcal{B}\left(X\right)$ אזי E מדידה $\mathcal{H}_{s}$.

מסקנה: תהא $f:X\to Y$ ליפשיץ L ותהא $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_{s}\left(f\left(E\right)\right)\le L^{s}\cdot\mathcal{H}_{s}\left(E\right)$.

מסקנה: תהא $f:X\to X$ איזומטריה ותהא $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_{s}\left(f\left(E\right)\right)=\mathcal{H}_{s}\left(E\right)$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ותהא $E\subseteq X$ אזי

- אם $\mathcal{H}_{s}\left(E\right)<\infty$ אזי לכל $t>s$ מתקיים $\mathcal{H}_{t}\left(E\right)=0$.
- אם $\mathcal{H}_{s}\left(E\right)>0$ אזי לכל $t<s$ מתקיים $\mathcal{H}_{t}\left(E\right)=\infty$.

מסקנה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי $s>n$ אזי $\mathcal{H}_{s}\left(E\right)=0$.

מימד האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $E\subseteq X$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}\left(E\right)=\inf\left\{ s\ge0\mid\mathcal{H}_{s}\left(E\right)=0\right\}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=n$.

משפט: $\dim_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{C}\right)=\log_{3}\left(2\right)$.

משפט: תהא λ מידת לבג מעל $\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathcal{H}_{n}=\frac{2^{n}}{\lambda\left(\left\{ \left|x\right|\le1\right\} \right)}\cdot\lambda$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $0<\mathcal{H}_{n}\left(\left[0,1\right]^{n}\right)<\infty$.

העתקה מדידה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים אזי $T:X\to Y$ המקיימת $T^{-1}\left(\Sigma_{Y}\right)\subseteq\Sigma_{X}$.

סימון: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים ותהא $T:X\to Y$ העתקה מדידה אזי $T:\left(X,\Sigma_{X}\right)\to\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$.

טענה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right),\left(Z,\Sigma_{Z}\right)$ מרחבים מדידים תהא $T:X\to Y$ העתקה $\left(\Sigma_{X},\Sigma_{Y}\right)$-מדידה ותהא $S:Y\to Z$ העתקה $\left(\Sigma_{Y},\Sigma_{Z}\right)$-מדידה אזי $S\circ T$ העתקה $\left(\Sigma_{X},\Sigma_{Z}\right)$-מדידה.

טענה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים תהא $T:X\to Y$ ותהא $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(Y\right)$ עבורה $\Sigma_{Y}=\sigma\left(\mathcal{E}\right)$ וכן $T^{-1}\left(\mathcal{E}\right)\subseteq\Sigma_{X}$ אזי T העתקה $\left(\Sigma_{X},\Sigma_{Y}\right)$-מדידה.

טענה: יהיו X,Y מרחבים מטריים ותהא $T\in C\left(X,Y\right)$ אזי T העתקה $\left(\mathcal{B}\left(X\right),\mathcal{B}\left(Y\right)\right)$-מדידה.

הגדרה: $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\left\{ \pm\infty\right\} =\left[-\infty,\infty\right]$.

הגדרה: נגדיר $0\cdot\left(\pm\infty\right)=0$ והפעולות $\infty-\infty,\frac{\infty}{\infty}$ אינן מוגדרות.

הגדרה: נגדיר $A\left(x\right)=\lim_{t\to x}\arctan\left(t\right)$ וכן $\rho\left(x,y\right)=\left|A\left(x\right)-A\left(y\right)\right|$.

טענה: $\left(\overline{\mathbb{R}},\rho\right)$ מרחב מטרי שלם.

טענה: תהא $A\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ אזי $\left(A\in\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\Longleftrightarrow$(קיימת $B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $S\in\mathcal{P}\left(\left\{ \pm\infty\right\} \right)$ עבורן $A=B\cup S$).

טענה: $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)=\mathbb{R}\cap\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי $\left(X,\Sigma\right)$ מרחב מדיד אזי

- העתקה $f:X\to\mathbb{R}$ $\left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$-מדידה.
- העתקה $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $\left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-מדידה.

מסקנה: יהי $\left(X,\Sigma\right)$ מרחב מדיד ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ התב"ש

- f מדידה בורל.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left\{ f\ge a\right\} \in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\left\{ f\ge a\right\} \in\Sigma$.

- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f>a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f>a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f\le a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f\le a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f<a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f<a\}\in\Sigma$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f\in C(X,\mathbb{R})$ רציפה אזי f מדידה בורל.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ אזי (f מדידה בורל)$\iff$($f_{\restriction_{f^{-1}(\mathbb{R})}}$ מדידה בורל וכן $f^{-1}(\pm\infty)\in\Sigma$).

משפט: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\frac{1}{f},f\cdot g,f+g,f^2$ מדידות.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\{f<g\},\{f\le g\},\{f=g\}\in\Sigma$.

משפט: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות אזי $\sup\{f_n\},\inf\{f_n\},\limsup\{f_n\},\liminf\{f_n\}$ מדידות.

מסקנה: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ עבורה $f_n\to f$ אזי f מדידה.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\min\{f,g\},\max\{f,g\},|f|$ מדידות.

פונקציה פשוטה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\ldots E_n\in\Sigma$ וכן $a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

פונקציה סטנדרטית: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\ldots E_n\in\Sigma$ עבורם $\biguplus_{i=1}^n E_i=X$ וקיימים $a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ אזי (φ פשוטה)$\iff$(φ מדידה וכן $\varphi(X)$ סופית).

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$.

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית תהא $A\subseteq X$ עבורה f חסומה ותהיינה $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$ אזי $\varphi_n\rightrightarrows f$ על A.

מסקנה: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות עבורן $\varphi_n\to f$ וכן $|\varphi_n|\uparrow|f|$.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה ותהא $g:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f=g$ כמעט בכל מקום אזי g מדידה.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהיינה $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f_n\to f$ כמעט בכל מקום אזי f מדידה.

טענה: תהא μ מידה ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mu}$-מדידה אזי קיימת $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ μ-מדידה וכן $f=g$ $\overline{\mu}$-כ.ב.מ.

מחלקת בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Borel}(X)=\{f:X\to\mathbb{R}\mid f \text{ מדידה בורל}\}$.

סימון: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}_0(X)=C(X)$ וכן $\text{Baire}_{i+1}(X)=\{\lim_{n\to\infty}f_n\mid\{f_n\}\subseteq\text{Baire}_i(X)\}$.

מחלקת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}(X)=\bigcup_{i=0}^\infty\text{Baire}_i(X)$.

למה: תהא $\varphi\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ ותהיינה $f,g\in\text{Baire}(X)$ אזי $\varphi(f,g)\in\text{Baire}(X)$.

למה: תהא $F\subseteq X$ סגורה אזי קיימות $\{f_n\}\subseteq C(X,\mathbb{R})$ עבורן $f_n\to\mathbb{1}_F$.

מחלקה מונוטונית: יהי X מרחב מטרי אזי $R\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\subseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^\infty E_i\in R$.
- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\supseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcap_{i=1}^\infty E_i\in R$.

מחלקה מונוטונית נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות המונוטוניות מעל X המכילות את A אזי $\mathcal{M}(\mathcal{A})=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{R}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\mathcal{M}(A)$ הינה המחלקה המונוטונית הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}(X)=\text{Borel}(X)$.

משפט לוזין/טענה העיקרון השני של ליטלווד: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ תהא $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימת $K\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R}\backslash K)<\varepsilon$ וכן $f\in C(K)$.

הגדרה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $L^0(X,\Sigma)=\left\{f:X\to\overline{\mathbb{R}}\mid f \text{ מדידה}\right\}$.

התכנסות במידה: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\mu(\{x\in X\mid|f_n(x)-f(x)|>0\})\to 0$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

התכנסות כמעט בכל מקום: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורה $\mu(X\backslash\{x\in X\mid\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\})=0$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$.

סימון: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f \in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ אזי $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ וכן $f_n \xrightarrow{a.s.} f$.

משפט לבג: תהא μ מידה סופית יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f \in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ אזי $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

למה בורל קנטלי: יהיו $\{E_n\} \subseteq \Sigma$ מדידות עבורן $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X,\Sigma)$ עבורן לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f_n > \varepsilon|\}) < \infty$ אזי

- $f_n f_n \xrightarrow{a.e.} f 0$.
- תהא $\delta > 0$ אזי קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \delta$ וכן $f_n \rightrightarrows 0$ על $X \backslash E$.

משפט ריס: תהיינה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ אזי קיימת תת"ס עבורה $f f_{n_k} f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהיינה $f, g \in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu} f$ וכן $f_n \xrightarrow{\mu} g$ אזי $f = g$ כמעט בכל מקום.

משפט אגורוב/טענה העיקרון השלישי של ליטלווד: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \varepsilon$ וכן $f_n \rightrightarrows f$ על $X \backslash E$.

מסקנה לוזין: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי קיימת $N \subseteq X$ עבורה $\mu(N) = 0$ וקיימות $\{A_k\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורן $X = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ וכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n \rightrightarrows f$ על A_k.

למה פרשה: יהי (X,ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X ותהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ אזי קיימות $\{f_n\} \subseteq C(X)$ עבורן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

משפט לוזין: יהי (X,ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X תהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R} \backslash K) < \varepsilon$ וכן $f \in C(K)$.
