

**טופולוגיה:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  המקיימת

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ .

- תהינה  $U \subseteq \mathcal{T}$  אזי  $\bigcup U \in \mathcal{T}$ .

- תהינה  $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}$  אזי  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ .

**מרחב טופולוגי (מ"ט):** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  טופולוגיה על  $X$  אזי  $(X, \mathcal{T})$ .

**קבוצה פתוחה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מרחב טופולוגי אזי  $U \subseteq X$  המקיימת  $U \in \mathcal{T}$ .

**קבוצה סגורה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מרחב טופולוגי אזי  $E \subseteq X$  המקיימת  $X \setminus E \in \mathcal{T}$ .

**טענה:** תהא  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  עבורה  $X, \emptyset \in \mathcal{T}$  וכן  $(\bigcup U \in \mathcal{T}) \iff (\forall U \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup U \in \mathcal{T})$  (לכל  $U, V \in \mathcal{T}$  מתקיים  $U \cap V \in \mathcal{T}$ ).

**הטופולוגיה הטריטוראלית:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $\{X, \emptyset\}$ .

**הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $\mathcal{P}(X)$ .

**הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי:** יהי  $(X, \rho)$  מרחב מטרי אזי  $\mathcal{T}(X, \rho) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists r > 0. B_r(x) \subseteq U\}$ .

**טופולוגיה מטריזבילית:** מרחב טופולוגי  $(X, \mathcal{T}_X)$  עבורו קיים  $(X, \rho)$  מרחב מטרי המקיים  $\mathcal{T}(X, \rho) = \mathcal{T}_X$ .

**הטופולוגיה הקו־סופית:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $\{A \subseteq X \mid |X \setminus A| < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$ .

**משפט:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ויהי  $\mathcal{C} = \{E \subseteq X \mid X \setminus E \in \mathcal{T}\}$  אזי

- $X, \emptyset \in \mathcal{C}$ .

- תהינה  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$  אזי  $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \in \mathcal{C}$ .

- תהינה  $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{C}$  אזי  $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{C}$ .

**בסיס לטופולוגיה:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  המקיימת

- $\bigcup \mathcal{B} = X$ .

- תהינה  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$  עבורן  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  ותהא  $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$  קיימת  $B_3 \in \mathcal{B}$  עבורה  $x \in B_3$  וכן  $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

**הטופולוגיה הנוצרת מבסיס:** תהא  $X$  קבוצה ויהי  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  בסיס אזי

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists B \in \mathcal{B}. (x \in B) \wedge (B \subseteq U)\}$$

**למה:** תהא  $X$  קבוצה ויהי  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  בסיס אזי  $\mathcal{T}(\mathcal{B})$  טופולוגיה על  $X$ .

**סימון:**  $\mathcal{B}_E = \{(a, b) \mid a < b\}$  וכן  $\mathcal{B}_{\text{Sorg}} = \{(a, b) \mid a < b\}$  וכן  $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_E \cup \{(a, b) \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\} \mid a < b\}$ .

**טענה:**  $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{\text{Sorg}}, \mathcal{B}_K$  בסיסים של  $\mathbb{R}$ .

**הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית:**  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_E))$ .

**הישר של זורגנפריי:**  $\mathbb{R}_{\text{Sorg}} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{Sorg}}))$ .

**טופולוגיית-K:**  $\mathbb{R}_K = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$ .

**משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת:** יהי  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  בסיס אזי  $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \exists A \subseteq \mathcal{B}. U = \bigcup A\}$ .

**מסקנה:** יהיו  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$  בסיסים עבורם  $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$  וכן  $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_1)$  אזי  $\mathcal{T}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$ .

**טופולוגיה עדינה לטופולוגיה:** תהא  $X$  קבוצה ותהינה  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  טופולוגיות על  $X$  עבורן  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$  אזי  $\mathcal{T}_2$ .

**טופולוגיה גסה לטופולוגיה:** תהא  $X$  קבוצה ותהינה  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  טופולוגיות על  $X$  עבורן  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$  אזי  $\mathcal{T}_1$ .

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ויהי  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$  עבורו  $(x \in A) \wedge (A \subseteq U) \implies \forall U \in \mathcal{T}. \forall x \in U. \exists A \in \mathcal{A}. (x \in A) \wedge (A \subseteq U)$  אזי  $\mathcal{A}$  בסיס של  $\mathcal{T}$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי  $\{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. a \leq x\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. x \leq b\}$  בסיס.

**טופולוגיית הסדר:** תהא  $X$  קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי

$$\mathcal{T}(\{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. a \leq x\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. x \leq b\})$$

**טענה:**  $\mathbb{R}$  מצוייד בטופולוגיית הסדר זהה ל- $\mathbb{R}$  מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

**תת בסיס:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  עבורה  $\bigcup \mathcal{S} = X$ .

**הטופולוגיה הנוצרת מתת-בסיס:** תהא  $X$  קבוצה ויהי  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  תת-בסיס אזי

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{U \subseteq X \mid \exists A_1 \dots A_k \subseteq \mathcal{S}. U = \bigcup (\bigcap_{i=1}^k A_i)\}$$

**למה:** תהא  $X$  קבוצה ויהי  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$  תת-בסיס אזי  $\mathcal{T}(\mathcal{S})$  טופולוגיה על  $X$ .

**טופולוגיית זריצקי:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\mathcal{T}(\{\{a \in \mathbb{F}^n \mid f(a) \neq 0\} \mid f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]\})$ .

**סביבה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ויהי  $x \in X$  אזי  $U \in \mathcal{T}$  עבורה  $x \in U$ .

**פנים של קבוצה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $\text{int}(A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$ .

**סגור של קבוצה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $\text{cl}(A) = \overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq E \\ E^c \in \mathcal{T}}} E$ .

**שפה של קבוצה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$ .

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$ .

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי

$$\text{int}(A) = \max_{\subseteq} \{U \in \mathcal{T} \mid U \subseteq A\} \bullet$$

$$\overline{A} = \min_{\subseteq} \{E \mid (A \subseteq E) \wedge (E^c \in \mathcal{T})\} \bullet$$

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  ויהי  $x \in X$  התב"ש

$$x \in \overline{A} \bullet$$

• לכל  $U \in \mathcal{T}$  המקיים  $x \in U$  מתקיים  $U \cap A \neq \emptyset$ .

• יהי  $\mathcal{B}$  בסיס של  $\mathcal{T}$  אזי לכל  $B \in \mathcal{B}$  המקיים  $x \in B$  מתקיים  $B \cap A \neq \emptyset$ .

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$ .

**מסקנה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  ויהי  $x \in X$  אזי  $(x \in \partial A) \iff (x \in U \text{ המקיימת } U \in \mathcal{T} \text{ ו} U \cap A \neq \emptyset \text{ ו} U \cap A^c \neq \emptyset)$

**קבוצה צפופה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט אזי  $A \subseteq X$  המקיימת  $X = \overline{A}$ .

**טופולוגיית הנקודה הייחודית:** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $p \in X$  אזי  $\mathcal{T}_p = \{U \subseteq X \mid p \in U\} \cup \{\emptyset\}$ .

**נקודת הצטברות:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $x \in X$  עבורו לכל סביבה  $U$  של  $x$  מתקיים  $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ .

**סדרה מתכנסת/גבול:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $x \in X^\mathbb{N}$  אזי  $y \in X$  עבורו לכל סביבה  $U$  של  $y$  החל ממקום מסוים  $x_n \in U$ .

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $\overline{A} \subseteq \{x \in X \mid x \text{ קיימת } a \in A^\mathbb{N} \text{ המתכנסת אל } x\}$ .

**טענה:** תהא  $A \subseteq X$  אזי  $\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ נקודת הצטברות של } A\}$ .

**מסקנה:** תהא  $A \subseteq X$  אזי  $(A \text{ סגורה}) \iff (x \in \overline{A} \iff x \text{ נקודת הצטברות של } A)$ .

**פונקציה רציפה בנקודה:** יהיו  $(Y, \mathcal{S})$ ,  $(X, \mathcal{T})$  מ"טים ותהא  $f : X \rightarrow Y$  אזי  $x \in X$  עבורה לכל  $\mathcal{V} \subseteq Y$  סביבה של  $f(x)$  קיימת סביבה  $U \subseteq X$  של  $x$  עבורה  $f(U) \subseteq \mathcal{V}$ .

**פונקציה רציפה:** יהיו  $(Y, \mathcal{S})$ ,  $(X, \mathcal{T})$  מ"טים אזי  $f : X \rightarrow Y$  עבורה  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  לכל  $U \in \mathcal{S}$ .

**משפט:** יהיו  $(Y, \mathcal{S})$ ,  $(X, \mathcal{T})$  מ"טים ותהא  $f : X \rightarrow Y$  התב"ש

•  $f$  רציפה.

• לכל  $U \subseteq Y$  פתוחה מתקיים כי  $f^{-1}(U)$  פתוחה.

• לכל  $E \subseteq Y$  סגורה מתקיים כי  $f^{-1}(E)$  סגורה.

• לכל  $A \subseteq X$  מתקיים  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ .

• לכל  $x \in X$  הפונקציה  $f$  רציפה ב- $x$ .

**הומיאומורפיזם:** יהיו  $(Y, \mathcal{S})$ ,  $(X, \mathcal{T})$  מ"טים אזי  $f : X \rightarrow Y$  רציפה חח"ע ועל עבורה  $f^{-1}$  רציפה.

**טענה:** יהיו  $(Y, \mathcal{S})$ ,  $(X, \mathcal{T})$  מ"טים ותהא  $f : X \rightarrow Y$  חח"ע ועל התב"ש

•  $f$  הומיאומורפיזם.

• תהא  $U \subseteq Y$  אזי  $(U \text{ פתוחה}) \iff (f^{-1}(U) \text{ פתוחה})$ .

• תהא  $E \subseteq Y$  אזי  $(E \text{ סגורה}) \iff (f^{-1}(E) \text{ סגורה})$ .

• לכל  $A \subseteq X$  מתקיים  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ .

**הטופולוגיה המושרית על קבוצה מפונקציה:** תהא  $X$  קבוצה יהי  $(Y, \mathcal{S})$  מ"ט ותהא  $f : X \rightarrow Y$  אזי  $\mathcal{T}_f = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{S}\}$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה יהי  $(Y, \mathcal{S})$  מ"ט ותהא  $f : X \rightarrow Y$  אזי  $(X, \mathcal{T}_f)$  מ"ט.

**מסקנה:** תהא  $X$  קבוצה יהי  $(Y, \mathcal{S})$  מ"ט ותהא  $f : X \rightarrow Y$  אזי  $f$  רציפה על  $(X, \mathcal{T}_f)$ ,  $(Y, \mathcal{S})$ .

**תת מרחב טופולוגי (ת"מ):** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $\mathcal{T}_A = \{U \subseteq A \mid \exists V \in \mathcal{T}. U = \text{Id}^{-1}(V)\}$ .

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $(A, \mathcal{T}_A)$  מ"ט.

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$ .

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט ויהי  $\mathcal{B}$  בסיס של  $\mathcal{T}$  אזי  $\mathcal{B}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$  בסיס של  $\mathcal{T}_A$ .

**טענה:** יהי  $A \subseteq X$  אזי

• תהא  $U \subseteq A$  אזי  $(U \text{ פתוחה ביחס ל-}\mathcal{T}_A) \iff (U \text{ פתוחה ביחס ל-}\mathcal{T} \text{ עבורה } U \cap A = U)$ .

• תהא  $E \subseteq A$  אזי  $(E \text{ סגורה ביחס ל-}\mathcal{T}_A) \iff (E \text{ סגורה ביחס ל-}\mathcal{T} \text{ עבורה } F \cap A = E)$ .

• תהא  $D \subseteq A$  אזי  $\text{cl}_X(D) \cap A = \text{cl}_A(D)$ .

• תהא  $D \subseteq A$  אזי  $\text{int}_X(D) \cap A \subseteq \text{int}_A(D)$ .

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T}_X)$  מ"ט ויהי  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  ת"מ אזי

• נניח כי  $Y$  פתוחה ב- $X$ , תהא  $A \subseteq Y$  פתוחה ב- $Y$  אזי  $A$  פתוחה ב- $X$ .

• נניח כי  $Y$  סגורה ב- $X$ , תהא  $A \subseteq Y$  סגורה ב- $Y$  אזי  $A$  סגורה ב- $X$ .

**טענה:** יהיו  $X, Z$  מ"ט יהי  $Y \subseteq Z$  ת"מ ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f : X \rightarrow Z$  רציפה.

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"ט יהי  $A \subseteq X$  ת"מ ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f|_A : A \rightarrow Y$  רציפה.

**טענה:** יהיו  $X, Z$  מ"ט יהי  $Z \subseteq Y$  ת"מ ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה עבורה  $f(X) \subseteq Z$  אזי  $f : X \rightarrow Z$  רציפה.

**טענה:** יהיו  $X, Z$  מ"ט ותהא  $f : X \rightarrow Y$  אזי  $(f \text{ רציפה}) \iff (f \text{ קיימות } \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ פתוחות עבורן } \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = X \text{ וכן } f|_{U_\alpha} \text{ רציפה לכל } \alpha \in \Lambda)$ .

**טענה:** יהיו  $X, Y, Z$  מ"ט תהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה ותהא  $g : Y \rightarrow Z$  רציפה  $g \circ f : X \rightarrow Z$  רציפה.

**משפט למת ההדבקה:** יהיו  $X, Y$  מ"ט תהיינה  $A, B \subseteq X$  סגורות עבורן  $X = A \cup B$  תהא  $f : A \rightarrow Y$  רציפה ותהא  $g : B \rightarrow Y$  רציפה עבורן  $f \cup g : X \rightarrow Y$  רציפה.

**סימון:** יהיו  $X, Y$  מ"ט ותהא  $f : X \rightarrow Y$  חח"ע ורציפה נגדיר  $\hat{f} : X \rightarrow f(X)$  כך  $\hat{f} = f$ .

**שיכון:** יהיו  $X, Y$  מ"ט אזי  $f : X \rightarrow Y$  חח"ע ורציפה עבורה  $\hat{f}$  הומיאומורפיזם.

**הערה:** יהיו  $X, Y$  מ"ט ויהי  $f : X \rightarrow Y$  שיכון אזי נזהה את  $X$  בתור  $f(X)$ .

**תכונה טופולוגית:** תכונה  $P$  של מ"ט באשר לכל  $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ , מ"טים עבורם קיים  $f : X \rightarrow Y$  הומיאומורפיזם מתקיים  $(X, \mathcal{T}) \iff (Y, \mathcal{S})$  מקיים  $P$ .

**מרחב טופולוגי בעל תכונת ערך הביניים:** מרחב טופולוגי  $(X, \mathcal{T})$  עבורו לכל  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה לכל  $a, b \in X$  ולכל  $t \in [f(a), f(b)]$  קיים  $c \in X$  עבורו  $f(c) = t$ .

**טענה:** תכונת ערך הביניים הינה תכונה טופולוגית.

**העתקת מנה:** יהיו  $X, Y$  מ"ט אזי  $f : Y \rightarrow X$  פונקציה על המקיימת  $(f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y) \iff (\forall U \subseteq X. (U \in \mathcal{T}_X))$ .

**הערה:** יהיו  $X, Y$  מ"ט ותהא  $f : Y \rightarrow X$  העתקת מנה אזי  $f$  רציפה.

**טענה:** יהיו  $X, Y, Z$  מ"ט תהא  $f : X \rightarrow Y$  העתקת מנה ותהא  $g : Y \rightarrow Z$  העתקת מנה אזי  $g \circ f : X \rightarrow Z$  העתקת מנה.

**משפט:** יהי  $X$  מ"ט תהא  $A$  קבוצה ותהא  $f : X \rightarrow A$  על אזי קיימת ויחידה טופולוגיה  $\mathcal{T}_A$  על  $A$  עבורה  $f$  העתקת מנה.

**טופולוגיית המנה המושרית:** יהי  $X$  מ"ט תהא  $A$  קבוצה ותהא  $f : X \rightarrow A$  על אזי טופולוגיה  $\mathcal{T}_A$  על  $A$  עבורה  $f$  העתקת מנה.

**מרחב המנה:** יהי  $X$  מ"ט יהי  $\sim$  יחס שקילות מעל  $X$  ונגדיר  $X/\sim$  כך  $f(x) = [x]_\sim$  אזי  $X/\sim$  מצוידת עם טופולוגיית המנה.

**משפט התכונה האוניברסלית:** תהא  $f : X \rightarrow Y$  העתקת מנה ותהא  $g : X \rightarrow Z$  עבורה  $g|_{f^{-1}(\{y\})}$  קבועה לכל  $y \in Y$  אזי קיימת  $h : Y \rightarrow Z$  עבורה

$$g = h \circ f$$

•  $g = h \circ f$

•  $(h \text{ רציפה}) \iff (g \text{ רציפה})$ .

•  $(h \text{ העתקת מנה}) \iff (g \text{ העתקת מנה})$ .

**מסקנה:** תהא  $f : X \rightarrow Y$  העתקת מנה ותהא  $g : X \rightarrow Z$  עבורה  $g|_{f^{-1}(\{y\})}$  קבועה לכל  $y \in Y$  אזי

•  $(g \circ f^{-1}) \iff (g \text{ רציפה})$ .

•  $(g \circ f^{-1}) \iff (g \text{ העתקת מנה})$ .

**מסקנה:** תהא  $g : X \rightarrow Z$  רציפה ועל ותהא  $f : X \rightarrow \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\}$  העתקת מנה אזי  $(g \circ f^{-1})$  הומיאומורפיזם  $(g \iff g)$  העתקת מנה.

**קבוצה רוויה:** תהא  $f : X \rightarrow Y$  אזי  $A \subseteq X$  עבורה לכל  $y \in Y$  אם  $A \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$  אז  $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$ .

**טענה:** תהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $(f \text{ העתקת מנה}) \iff (f \text{ על ולכל } U \in \mathcal{T}_X \text{ מתקיים כי } f(U) \text{ פתוחה ורוויה})$ .

**העתקה פתוחה:** העתקה  $f : X \rightarrow Y$  עבורה לכל  $U \in \mathcal{T}_X$  מתקיים כי  $f(U)$  פתוחה.

**העתקה סגורה:** העתקה  $f : X \rightarrow Y$  עבורה לכל  $E \subseteq X$  סגורה מתקיים כי  $f(E)$  סגורה.

**טענה:** תהא  $f : X \rightarrow Y$  חח"ע ועל התב"ש

•  $f$  פתוחה.

•  $f$  סגורה.

•  $f^{-1}$  רציפה.

**טענה:** תהא  $f : X \rightarrow Y$  חח"ע ועל התב"ש

- $f$  הומיאומורפיזם.
- $f$  רציפה ופתוחה.
- $f^{-1}$  רציפה וסגורה.

**טענה:** תהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה פתוחה ועל אזי  $f$  העתקת מנה.

**טענה:** תהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה סגורה ועל אזי  $f$  העתקת מנה.

**המרחב הפרויקטיבי הממשי:** נגדיר  $\sim = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} (x = \lambda y)\}$  אזי  $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ .

**מכפלה של קבוצות:** תהינה  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  קבוצות אזי  $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha\}$ .

**טענה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $\mathcal{B}_{\text{box}} = \{\prod_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\}$  בסיס של  $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ .

**טופולוגיית התיבה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $\mathcal{T}_{\text{box}} = \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{box}})$ .

**הטלה:** תהינה  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  קבוצות אזי  $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow X_\beta$  המוגדרת  $\pi_\beta(f) = f(\beta)$ .

**טענה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $\mathcal{S}_{\text{prod}} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\}$  תת-בסיס של  $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ .

**טופולוגיית המכפלה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \mathcal{T}(\mathcal{S}_{\text{prod}})$ .

**מסקנה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים באשר  $|\Lambda| < \aleph_0$  אזי  $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \mathcal{T}_{\text{box}}$ .

**מסקנה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים באשר  $|\Lambda| \geq \aleph_0$  אזי  $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{box}}$ .

**מסקנה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים ותהא  $(\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \mathcal{T})$  טופולוגיה עבורה  $\pi_\alpha$  רציפה לכל  $\alpha \in \Lambda$  אזי  $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subseteq \mathcal{T}$ .

**מסקנה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \{ \prod_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha \mid (\forall \alpha \in \Lambda. \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha) \wedge (|\{\alpha \in \Lambda \mid \mathcal{U}_\alpha \neq X_\alpha\}| \in \mathbb{N}) \}$ .

**משפט:** תהא  $f : Y \rightarrow (\prod_{\alpha} X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  אזי  $(f \text{ רציפה}) \iff (\pi_\alpha \circ f)$  רציפה לכל  $\alpha$ .

**טענה:** תהא  $|\Lambda| \geq \aleph_0$  אזי  $(\mathbb{R}^\Lambda, \mathcal{T}_{\text{box}})$  אינה מטריזבילית.

**טענה:** תהא  $|\Lambda| \geq \aleph_0$  אזי  $(\mathbb{R}^\Lambda, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  אינה מטריזבילית.

**טענה:** מטריזביליות הינה תכונה טופולוגית.

**טענה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים ותהינה  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  באשר  $A_\alpha \subseteq X_\alpha$  לכל  $\alpha \in \Lambda$  אזי  $\overline{\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha} = \prod_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}$  בטופולוגיית המכפלה.

**טענה:** יהיו  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים ותהינה  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  באשר  $A_\alpha \subseteq X_\alpha$  לכל  $\alpha \in \Lambda$  אזי  $\overline{\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha} = \prod_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}$  בטופולוגיית התיבה.

**הפרדה של מרחב טופולוגי:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט אזי  $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$  באשר  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$  וכן  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$  וכן  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$  וכן  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \emptyset$ .

**מרחב טופולוגי קשיר:** מרחב טופולוגי  $(X, \mathcal{T})$  עבורו לא קיימת הפרדה.

**מרחב טופולוגי אי-קשיר:** מרחב טופולוגי  $(X, \mathcal{T})$  עבורו קיימת הפרדה.

**משפט:** יהי  $f : X \rightarrow Y$  הומיאומורפיזם אזי  $(X \text{ קשיר}) \iff (Y \text{ קשיר})$ .

**מסקנה:** קשירות הינה תכונה טופולוגית.

**טענה:** יהי  $X$  מרחב מטרי התב"ש

- $X$  אי-קשיר.

- קיימות  $E, F \subseteq X$  סגורות זרות לא ריקות עבורן  $X = E \cup F$ .

- קיימת  $D \in \mathcal{P}(X) \setminus \{X, \emptyset\}$  סגורה ופתוחה.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט קשיר ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f(X)$  קשירה.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט ויהי  $Y \subseteq X$  תת-מרחב אזי  $(Y \text{ אי-קשיר}) \iff (Y \text{ קיימות } H, K \in \mathcal{P}(X) \setminus \{X, \emptyset\} \text{ עבורן } Y = H \cup K \text{ וכן } \overline{H} \cap \overline{K} = \emptyset)$ .

**טענה:** תהא  $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$  הפרדה של  $X$  ויהי  $Y \subseteq X$  תת-מרחב קשיר אזי  $(Y \subseteq U) \oplus (Y \subseteq V)$ .

**טענה:** תהינה  $A, B \subseteq X$  באשר  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$  קשירה וכן  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$  קשירה.

**מסקנה:** תהא  $A \subseteq X$  קשירה אזי  $\overline{A}$  קשירה.

**טענה:** תהא  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  עבורה לכל  $A \in \mathcal{A}$  מתקיים כי  $A$  קשירה וכן  $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$  וכן  $\bigcup \mathcal{A} = X$  אזי  $X$  קשיר.

**מסקנה:** תהינה  $\{X_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$  באשר  $X_n$  קשיר וכן  $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$  לכל  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $X$  קשיר.

**מסקנה:**  $\mathbb{R}$  עם הטופולוגיה הסטנדרטית קשיר.

**מסקנה:**  $(-1, 1)$  עם הטופולוגיה המושרית מ- $\mathbb{R}$  סטנדרטי הינו קשיר.

**מסקנה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  באשר  $a < b$  אזי  $(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$  קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ- $\mathbb{R}$  סטנדרטי.

**מסקנה:** יהי  $a \in \mathbb{R}$  אזי  $(a, \infty), (-\infty, a], (-\infty, \infty), (-\infty, a), (a, \infty)$  קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ- $\mathbb{R}$  סטנדרטי.

**טענה:**  $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$  איננה קשירה.

**טענה:** יהיו  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טס אזי  $(X_\alpha \text{ קשיר לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  קשיר.

**טענה:**  $(\prod_{i=1}^\infty \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{box}})$  איננה קשירה.

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\mathbb{R}^n$  קשיר עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"ט קשירים תהא  $A \subset X$  ותהא  $B \subset Y$  אזי  $(X \times Y) \setminus (A \times B)$  מ"ט קשיר.

**מסילה:** יהי  $X$  מ"ט ויהיו  $x, y \in X$  אזי  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  רציפה עבורה  $\gamma(0) = x$  וכן  $\gamma(1) = y$ .

**מרחב טופולוגי קשיר מסילתי:** מרחב טופולוגי  $(X, \mathcal{T})$  עבורו לכל  $x, y \in X$  קיימת מסילה מ- $x$  ל- $y$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט קשיר מסילתי אזי  $X$  קשיר.

**מסקנה:** יהי  $n > 1$  אזי  $\mathbb{R}^n$  איננו הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$ .

**למה:** יהי  $X$  מ"ט קשיר מסילתי ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f(X)$  קשיר מסילתי.

**מסקנה:** קשירות מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

**טענה:** יהי  $\mathbb{C}^n$  עם הטופולוגיה הסטנדרטית על  $\mathbb{R}^{2n}$  ויהי  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  אזי  $\mathbb{C}^n \setminus \{x \in \mathbb{C}^n \mid p(x) = 0\}$  קשירה מסילתית.

**מסקנה:** יהי  $M_{n \times n}(\mathbb{C})$  עם הטופולוגיה הסטנדרטית על  $\mathbb{C}^{n^2}$  אזי  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  תת-מרחב קשיר מסילתי.

**סימון:** יהי  $X$  מ"ט ויהיו  $x, y \in X$  אזי  $(x \sim_{\text{קשיר}} y) \iff (x, y \in D \text{ קשירה עבורה } D \subseteq X)$  (קיימת מסילה מ- $x$  ל- $y$ ).

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $\sim_{\text{קשיר}}$  יחס שקילות מעל  $X$ .

**רכיבי קשירות:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $X/\sim_{\text{קשיר}}$ .

**סימון:** יהי  $X$  מ"ט ויהיו  $x, y \in X$  אזי  $(x \sim_{\text{מסילתית}} y) \iff (x, y \in D \text{ קשירה עבורה } D \subseteq X)$  (קיימת מסילה מ- $x$  ל- $y$ ).

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $\sim_{\text{מסילתית}}$  יחס שקילות מעל  $X$ .

**רכיבי קשירות מסילתית:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $X/\sim_{\text{מסילתית}}$ .

**משפט:** יהיו  $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  רכיבי הקשירות של  $X$  אזי

• לכל  $\alpha \in \Lambda$  מתקיים כי  $D_\alpha$  קשירה.

• יהיו  $\alpha, \beta \in \Lambda$  באשר  $\alpha \neq \beta$  אזי  $D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$ .

• מתקיים  $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$ .

• לכל  $Y \subseteq X$  תת-מרחב קשיר קיים ויחיד  $\alpha \in \Lambda$  עבורו  $Y \subseteq D_\alpha$ .

**משפט:** יהיו  $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  רכיבי הקשירות המסילתית של  $X$  אזי

• לכל  $\alpha \in \Lambda$  מתקיים כי  $D_\alpha$  קשירה.

• יהיו  $\alpha, \beta \in \Lambda$  באשר  $\alpha \neq \beta$  אזי  $D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$ .

• מתקיים  $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$ .

• לכל  $Y \subseteq X$  תת-מרחב קשיר קיים ויחיד  $\alpha \in \Lambda$  עבורו  $Y \subseteq D_\alpha$ .

**מסקנה:** יהי  $D$  רכיב קשירות של  $X$  אזי  $D$  סגור.

**מרחב טופולוגי קשיר מקומית נקודתית:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $x \in X$  המקיים לכל סביבה  $\mathcal{U} \subseteq X$  של  $x$  קיימת סביבה  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  קשירה

עבורה  $x \in \mathcal{V}$ .

**מרחב טופולוגי קשיר מקומית:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $x \in X$  מתקיים כי  $X$  קשיר מקומית ב- $x$ .

**טענה:** קשירות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

**מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית נקודתית:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $x \in X$  המקיים לכל סביבה  $\mathcal{U} \subseteq X$  של  $x$  קיימת סביבה  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  קשירה מסילתית עבורה  $x \in \mathcal{V}$ .

**מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $x \in X$  מתקיים כי  $X$  קשיר מסילתית מקומית ב- $x$ .

**טענה:** קשירות מקומית מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

**טענה:**  $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$  איננו קשיר מקומית.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $(X \text{ קשיר מקומית}) \iff (\text{לכל } \mathcal{U} \in \mathcal{T} \text{ ולכל } D \text{ רכיב קשירות של } \mathcal{U} \text{ מתקיים } (D \in \mathcal{T}))$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $(X \text{ קשיר מסילתית מקומית}) \iff (\text{לכל } \mathcal{U} \in \mathcal{T} \text{ ולכל } D \text{ רכיב קשירות מסילתית של } \mathcal{U} \text{ מתקיים } (D \in \mathcal{T}))$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט קשיר וקשיר מסילתית מקומית אזי  $X$  קשיר מסילתית.

**בסיס סביבות בן מנייה בנקודה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $x \in X$  עבורו קיימות  $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^\infty$  סביבות של  $x$  עבורן לכל סביבה  $\mathcal{V}$  של  $x$  קיים

$n \in \mathbb{N}$  עבורו  $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{V}$ .

**מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המנייה הראשונה:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $x \in X$  קיים בסיס סביבות בן מנייה ב- $x$ .

**מסקנה:** יהי  $X$  מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי  $X$  מניה I.

**טענה:**  $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$  מניה I.

**טענה:**  $X$  המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה מניה I.

**טענה:**  $\mathbb{R}$  המצוייד עם הטופולוגיה הקו־בת־מניה אינו מניה I.

**משפט:** יהי  $X$  מ"ט מניה I ותהא  $A \subseteq X$  תת־קבוצה אזי  $\{\text{קיימת } a \in A^{\mathbb{N}} \text{ המתכנסת אל } x \mid x \in X\} = \bar{A}$ .

**משפט:** יהיו  $X, Y$  מ"טים באשר  $X$  מניה I ותהא  $f : X \rightarrow Y$  אזי  $f$  (רציפה)  $\iff \{x_n\} \subseteq X$  המתכנסת ל- $a \in X$  עבור  $a \in X$  מתקיים כי  $\{f(x_n)\}$  מתכנסת ל- $f(a)$ .

**מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה השנייה:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו קיים בסיס לכל היותר בן מנייה היוצר את  $\mathcal{T}$ .

**מסקנה:** יהי  $X$  מ"ט מניה II אזי  $X$  מניה I.

**טענה:**  $\mathbb{R}^n$  מניה II.

**סימון:**  $\mathbb{R}^{\aleph_0} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$

**טענה:**  $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  מניה II.

**טענה:**  $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{box}})$  אינו מניה I.

**טענה:**  $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$  אינו מניה II.

**טענה:** יהי  $X$  המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי  $(X$  מניה II)  $\iff |\aleph_0 \geq |X|$ .

**טענה:**  $X$  המצוייד עם הטופולוגיה הטריואלית מניה II.

**טענה:** נגדיר  $d_u : \mathbb{R}^{\aleph_0} \times \mathbb{R}^{\aleph_0} \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $d_u((a_k)_{k=1}^{\infty}, (b_k)_{k=1}^{\infty}) = \min \{\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k - b_k|, 1\}$  אזי  $d_u$  מטריקה.

**הטופולוגיה האחידה:**  $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}(d_u))$  הינו מניה I וכן אינו מניה II.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט מניה I והי  $A \subseteq X$  תת־מרחב אזי  $A$  מניה I.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט מניה II והי  $A \subseteq X$  תת־מרחב אזי  $A$  מניה II.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט מניה I ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה ופתוחה אזי  $f(X)$  מניה I.

**מסקנה:** מניה I הינה תכונה טופולוגית.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט מניה II ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה ופתוחה אזי  $f(X)$  מניה II.

**מסקנה:** מניה II הינה תכונה טופולוגית.

**מרחב טופולוגי ספרבילי:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו קיימת  $A \subseteq X$  צפופה בת מנייה.

**מרחב טופולוגי לינדלוף:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$  המקיימים  $\bigcup \mathcal{U}_{\alpha} = X$  קיימת  $f : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$  עבורה

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{U}_{f(i)} = X$$

**טענה:**  $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$  ספרבילי.

**טענה:** יהי  $X$  המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי  $(X$  ספרבילי)  $\iff |\aleph_0 \geq |X|$ .

**טענה:** יהי  $X$  המצוייד עם הטופולוגיה הטריואלית אזי  $X$  ספרבילי.

**טענה:**  $\mathbb{R}$  המצוייד בטופולוגיה הקו־בת־מנייה אינו ספרבילי.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט מניה II אזי  $X$  לינדלוף וספרבילי.

**טענה:**  $\mathbb{R}$  המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית אינו מניה I.

**למה:** יהי  $\mathcal{B}$  בסיס של  $(X, \mathcal{T})$  אזי  $(X$  לינדלוף)  $\iff \{\mathcal{B}_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B}$  (לכל  $\mathcal{B}_{\alpha} \subseteq X$ ) קיימת  $f : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$  עבורה

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}_{f(i)} = X$$

**טענה:**  $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$  לינדלוף.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט ספרבילי ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f(X)$  ספרבילי.

**מסקנה:** ספרביליות הינה תכונה טופולוגית.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט לינדלוף ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f(X)$  לינדלוף.

**מסקנה:** לינדלוף הינה תכונה טופולוגית.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט ספרבילי ותהא  $A \subseteq X$  פתוחה אזי  $A$  ספרבילי.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט לינדלוף ותהא  $E \subseteq X$  סגורה אזי  $E$  לינדלוף.

**מסקנה:** יהיו  $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים מניה I באשר  $|\Lambda| \leq \aleph_0$  אזי  $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  מניה I.

**מסקנה:** יהיו  $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים מניה II באשר  $|\Lambda| \leq \aleph_0$  אזי  $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  מניה II.

**מסקנה:** יהיו  $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים ספרבילים באשר  $|\Lambda| \leq \aleph_0$  אזי  $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  ספרבילי.

**טענה:** יהי  $X$  מרחב מטרי התב"ש

- $X$  מניה II.
- $X$  ספרבילי.
- $X$  לינדלף.

**מרחב טופולוגי  $T_0$ :** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $x, y \in X$  שונים קיימת סביבה  $\mathcal{U}$  של  $x$  עבורה  $y \notin \mathcal{U}$  או קיימת סביבה  $\mathcal{V}$  של  $y$  עבורה  $x \notin \mathcal{V}$ .

**מרחב טופולוגי  $T_1$ :** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $x, y \in X$  שונים קיימת סביבה  $\mathcal{U}$  של  $x$  עבורה  $y \notin \mathcal{U}$  וגם קיימת סביבה  $\mathcal{V}$  של  $y$  עבורה  $x \notin \mathcal{V}$ .

**מרחב טופולוגי  $T_2$ /האוסדורף:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $x, y \in X$  שונים קיימת סביבה  $\mathcal{U}$  של  $x$  וכן סביבה  $\mathcal{V}$  של  $y$  עבורן  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ .

**מסקנה:**  $T_0, T_1, T_2$  הינן תכונות טופולוגיות.

**מסקנה:** יהי  $X$  מרחב טופולוגי  $T_1$  אזי  $X$  מרחב טופולוגי  $T_0$ .

**מסקנה:** יהי  $X$  מרחב טופולוגי  $T_2$  אזי  $X$  מרחב טופולוגי  $T_1$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי  $X$  מרחב  $T_2$ .

**טענה:** תהייה  $\mathcal{T}, \mathcal{S}$  טופולוגיות על  $X$  באשר  $\mathcal{S}$  עדינה מ- $\mathcal{T}$  וכן  $(X, \mathcal{T})$  מרחב  $T_i$  אזי  $(X, \mathcal{S})$  מרחב  $T_i$ .

**מסקנה:**  $\mathbb{R}_{\text{sorg}}$  האוסדורף.

**טענה:**  $\mathbb{Q}$  המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית הינו  $T_1$  וכן אינו  $T_2$ .

**טענה:**  $\mathbb{R}$  המצוייד בטופולוגיה הקו־בת־מניה הינו  $T_1$  וכן אינו  $T_2$ .

**טענה:** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי אזי  $(X, \mathcal{T}(d))$  הינו  $T_2$ .

**טענה:** תהא  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט  $T_i$  ותהא  $(Y, \mathcal{S})$  מ"ט באשר  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$  אזי  $(Y, \mathcal{S})$  הינה  $T_i$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט  $T_i$  ויהי  $A \subseteq X$  תת־מרחב אזי  $A$  מרחב  $T_i$ .

**טענה:** יהיו  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $(X_\alpha)$  מרחב  $T_i$  לכל  $\alpha \in \Lambda \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  מרחב  $(T_i)$ .

**הישר עם הראשית הכפולה:** תהא  $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$  עם הטופולוגיה המושרית מ- $\mathbb{R}^2$  הסטנדרטית ויהי  $\sim = \text{Id} \cup \{((\frac{a}{0}), (\frac{a}{1})) \mid a \neq 0\}$  יחס שקילות על  $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$  אזי  $\mathbb{R} \times \{0, 1\} / \sim$  עם טופולוגיית המנה.

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט אזי  $(\mathcal{T})$  הוא  $T_0$   $\iff$  (לכל  $a, b \in X$  שונים מתקיים  $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$ ).

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט אזי  $(\mathcal{T})$  הוא  $T_1$   $\iff$   $\{x\}$  קבוצה סגורה לכל  $x \in X$ .

**טענה:** יהי  $(X, \mathcal{T})$  מ"ט אזי  $(\mathcal{T})$  הוא  $T_2$   $\iff$  (לכל  $A \subseteq X$  מתקיים  $A = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{T}} \bigcup_{A \subseteq \mathcal{U}} \mathcal{U}$ ).

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט האוסדורף ותהא  $\{x_n\} \subseteq X$  סדרה מתכנסת אזי קיים ויחיד  $y \in X$  עבורו  $\{x_n\}$  מתכנסת ל- $y$ .

**מרחב טופולוגי  $T_i$  מקומית:** מ"ט  $X$  עבורו לכל  $x \in X$  קיימת סביבה  $\mathcal{U}$  של  $x$  עבורה  $\mathcal{U}$  הינה  $T_i$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט  $T_0$  מקומית אזי  $X$  הינו  $T_0$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט  $T_1$  מקומית אזי  $X$  הינו  $T_1$ .

**טענה:** הישר עם הראשית הכפולה הינו  $T_2$  מקומית וכן אינו  $T_2$ .

**קבוצה מסוג  $G_\delta$ :** יהי  $X$  מ"ט אזי  $A \subseteq X$  עבורה קיימת  $\{U_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{T}$  המקיימת  $A = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט  $T_1$  מניה I ויהי  $x \in X$  אזי  $\{x\}$  הינו  $G_\delta$ .

**העתקת נסג:** יהי  $X$  מ"ט ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $r : X \rightarrow A$  רציפה עבורה  $r(a) = a$  לכל  $a \in A$ .

**קבוצת נסג:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $A \subseteq X$  עבורה קיימת  $r : X \rightarrow A$  נסג.

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף ותהא  $A \subseteq X$  נסג אזי  $A$  סגורה.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט  $T_1$  תהא  $A \subseteq X$  ויהי  $x \in X$  אזי  $(x)$  נקודת הצטברות של  $A$   $\iff$  (לכל  $\mathcal{U}$  סביבה של  $x$  מתקיים  $|A \cap \mathcal{U}| \geq \aleph_0$ ).

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $(X)$  מרחב האוסדורף  $\iff \{(a, a) \mid a \in X\}$  קבוצה סגורה.

**מרחב טופולוגי רגולרי:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $x \in X$  ולכל  $E \subseteq X$  סגורה באשר  $x \notin E$  קיימות  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$  עבורן  $x \in \mathcal{U}$  וכן  $E \subseteq \mathcal{V}$  וכן  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ .

**מרחב טופולוגי נורמלי:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $E, F \subseteq X$  סגורות באשר  $E \cap F = \emptyset$  קיימות  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$  עבורן  $E \subseteq \mathcal{U}$  וכן  $F \subseteq \mathcal{V}$  וכן  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ .

**מרחב טופולוגי  $T_3$ :** מרחב טופולוגי  $X$  רגולרי וכן  $T_1$ .

**מרחב טופולוגי  $T_4$ :** מרחב טופולוגי  $X$  נורמלי וכן  $T_1$ .



**מסקנה:**  $T_3, T_4$  הינן תכונות טופולוגיות.

**מסקנה:** יהי  $X$  מרחב טופולוגי  $T_3$  אזי  $X$  מרחב טופולוגי  $T_2$ .

**מסקנה:** יהי  $X$  מרחב טופולוגי  $T_4$  אזי  $X$  מרחב טופולוגי  $T_3$ .

**טענה:**  $\mathbb{R}_K$  הינו  $T_2$  וכן אינו רגולרי.

**טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף:** נגדיר  $\mathcal{T} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  אזי  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ .

**טענה:**  $\mathbb{R}$  המצוייד עם טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף הינו  $T_0$  וכן אינו  $T_1$  וכן אינו רגולרי וכן הינו נורמלי.

**טענה:**  $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$  הינו  $T_4$ .

**סימון:** תהייה  $X, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  עבורן  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  וכן  $\bar{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{U}$  אזי  $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $(X \text{ רגולרי}) \iff$  ולכל  $x \in X$  ולכל  $\mathcal{U} \subseteq X$  סביבה של  $x$  קיימת סביבה  $\mathcal{V}$  של  $x$  עבורה  $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $(X \text{ נורמלי}) \iff$  (לכל  $E \subseteq X$  סגורה ולכל  $\mathcal{U} \subseteq X$  פתוחה באשר  $E \subseteq \mathcal{U}$  קיימת  $\mathcal{V} \subseteq X$  פתוחה עבורה

$E \subseteq \mathcal{V} \in \mathcal{U}$ ).

**משפט הלמה של אוריסון:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $(X \text{ נורמלי}) \iff$  (לכל  $A, B \subseteq X$  סגורות וזרות ולכל  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  קיימת  $f : X \rightarrow [a, b]$

רציפה עבורה  $f|_A = a$  וכן  $f|_B = a$ ).

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט רגולרי ויהי  $A \subseteq X$  אזי  $A$  רגולרי.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט נורמלי ויהי  $E \subseteq X$  סגור אזי  $E$  נורמלי.

**טענה:** יהיו  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $(X_\alpha \text{ רגולרי לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  רגולרי.

**מסקנה:** יהיו  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $(X_\alpha \text{ הינו } T_3 \text{ לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  הינו  $T_3$ .

**מסקנה:**  $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}^2$  הינו רגולרי וכן אינו נורמלי.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט מטריזבילי אזי  $X$  נורמלי.

**טענה:** יהי  $(X, \prec)$  יחס סדר טוב אזי  $X$  המצוייד עם טופולוגיית הסדר נורמלי.

**מרחב טופולוגי נורמלי לחלוטין:** מ"ט  $X$  עבורו לכל  $A \subseteq X$  מתקיים כי  $A$  נורמלי.

**קבוצות מופרדות:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $(X \text{ נורמלי לחלוטין}) \iff$  (לכל  $A, B \subseteq X$  עבורן  $A \cap B = \emptyset$  וכן  $\bar{A} \cap B = \emptyset$ ).

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $(X \text{ נורמלי לחלוטין}) \iff$  (לכל  $A, B \subseteq X$  מופרדות קיימות  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$  זרות עבורן  $A \subseteq \mathcal{U}$  וכן  $B \subseteq \mathcal{V}$ ).

**סימון:**  $\mathcal{B}_{\text{moore},1} = \{B_r(p) \mid (p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \wedge (p_2 > r > 0)\}$

**סימון:**  $\mathcal{B}_{\text{moore},2} = \{B_{p_2}(p) \cup \{(p_1, 0)\} \mid (p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0})\}$

**המישור של מור:**  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  מצוייד עם הטופולוגיה  $(\mathcal{B}_{\text{moore},1} \cup \mathcal{B}_{\text{moore},2})$ .

**טענה:** המישור של מור הינו קשיר האוסדורף רגולרי וכן אינו נורמלי.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט רגולרי ומניה II אזי  $X$  נורמלי.

**מסקנה:** יהי  $X$  מ"ט רגולרי לינדלוף אזי  $X$  נורמלי.

**למה:** יהי  $X$  מ"ט באשר  $\mathcal{T}_X$  מושרית מהמטריקה  $d$  אזי קיימת מטריקה  $d'$  של  $X$  עבורה  $d' \leq 1$  וכן  $d'$  משרה את  $\mathcal{T}_X$ .

**למה:** יהיו  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  מ"טים אזי  $(X_n \text{ מטריזבילי לכל } n \in \mathbb{N}) \iff (\prod X_n, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  מטריזבילי.

**מסקנה:**  $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  מטריזבילי.

**משפט המטריזציה של אוריסון:** יהי  $X$  מ"ט  $T_0$  רגולרי ומניה II אזי  $X$  מטריזבילי.

**מרחב טופולוגי מטריזבילי מקומית:** מ"ט  $X$  עבורו לכל  $x \in X$  קיימת סביבה  $\mathcal{U}$  של  $x$  עבורה  $\mathcal{U}$  הינה מטריזבילית.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט  $T_0$  רגולרי לינדלוף ומטריזבילי מקומית אזי  $X$  מטריזבילי.

**מרחב טופולוגי קומפקטי:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{T}$  המקיימים  $\bigcup \mathcal{U}_\alpha = X$  קיים  $n \in \mathbb{N}$  וקיימת  $f : [n] \rightarrow \Lambda$

עבורה  $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_{f(i)} = X$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{B}$  בסיס של  $(X, \mathcal{T})$  אזי  $(X \text{ קומפקטי}) \iff$  (לכל  $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B}$  המקיימים  $\bigcup \mathcal{B}_\alpha = X$  קיים  $n \in \mathbb{N}$  וקיימת  $f : [n] \rightarrow \Lambda$

עבורה  $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{B}_{f(i)} = X$ ).

**טענה:**  $X$  המצוייד עם הטופולוגיה הטריואלית קומפקטי.

**טענה:** יהי  $X$  המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי  $(X \text{ קומפקטי}) \iff (X \text{ סופי})$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה סגורה ותהא  $\mathcal{T}$  טופולוגיה על  $X$  אזי  $(X, \mathcal{T})$  קומפקטי.

**טענה:**  $\mathbb{R}$  המצוייד עם הטופולוגיה הקו־סופית קומפקטי.

**טענה:**  $\mathbb{R}$  המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי.

**מסקנה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $(a, b)$  המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי.



**טענה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $[a, b]$  המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט ויהי  $Y \subseteq X$  אזי  $(Y \text{ קומפקטי}) \iff \text{לכל } \mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{T}_X \text{ המקיימים } Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha \text{ קיים } n \in \mathbb{N} \text{ וקיימת } f : [n] \rightarrow \Lambda \text{ עבורה } (Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{f(i)})$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט קומפקטי ותהא  $Y \subseteq X$  סגורה אזי  $Y$  קומפקטי.

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף תהא  $Y \subseteq X$  קומפקטי ויהי  $x \notin Y$  אזי קיימות  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}_X$  עבורן  $x \in \mathcal{U}$  וכן  $Y \subseteq \mathcal{V}$  וכן  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ .

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף ותהא  $Y \subseteq X$  קומפקטי אזי  $Y$  סגורה.

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף קומפקטי אזי  $X$  רגולרי.

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף קומפקטי אזי  $X$  נורמלי.

**טענה:** יהי  $X$  קומפקטי ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f(X)$  קומפקטי.

**מסקנה:** קומפקטיות הינה תכונה טופולוגית.

**טענה:** יהי  $X$  קומפקטי יהי  $Y$  האוסדורף ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה והפיכה אזי  $f$  הומיאומורפיזם.

**מסקנה:** יהי  $X$  קומפקטי יהי  $Y$  האוסדורף ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה וחח"ע אזי  $f$  שיכון.

**תכונת החיתוך הסופי:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$  המקיימת לכל  $n \in \mathbb{N}$  ולכל  $f : [n] \rightarrow \Lambda$  מתקיים  $\bigcap_{i=1}^n A_{f(i)} \neq \emptyset$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט אזי  $(X \text{ קומפקטי}) \iff \text{לכל } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ משפחה של קבוצות סגורות המקיימת את תכונת החיתוך הסופי מתקיים } \bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ .

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף קומפקטי מטריזבילי מקומית אזי  $X$  מטריזבילי.

**טענה:** יהי  $X$  קומפקטי מטריזבילי אזי  $X$  ספרבילי.

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף קומפקטי אזי  $(X \text{ מטריזבילי}) \iff (X \text{ מניה II})$ .

**טענה:** יהי  $X$  קומפקטי יהי  $Y$  האוסדורף ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה ועל אזי  $Y$  מטריזבילי.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט יהי  $Y$  האוסדורף קומפקטי ותהא  $f : X \rightarrow Y$  אזי  $(f \text{ רציפה}) \iff (\Gamma_f \text{ סגורה ב- } X \times Y)$ .

**למה:** יהי  $X$  קומפקטי יהי  $Y$  מ"ט ויהי  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$  כיסוי פתוח של  $X \times Y$  ללא תת-כיסוי סופי אזי קיימת  $x \in X$  עבורה לכל  $\mathcal{U}$  סביבה של  $x$  מתקיים כי  $\mathcal{U} \times Y$  אינה ניתנת לכיסוי סופי על ידי אברי  $\mathcal{A}$ .

**למה:** יהיו  $X, Z$  מ"טים יהי  $Y$  קומפקטי יהי  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y \times Z)$  כיסוי פתוח של  $X \times Y \times Z$  ללא תת-כיסוי סופי ותהא  $x \in X$  עבורה לכל  $\mathcal{U}$  סביבה של  $x$  מתקיים כי  $\mathcal{U} \times Y \times Z$  אינה ניתנת לכיסוי סופי על ידי אברי  $\mathcal{A}$  אזי קיימת  $y \in Y$  עבורה לכל  $\mathcal{U}$  סביבה של  $x$  ולכל  $\mathcal{V}$  סביבה של  $y$  מתקיים כי  $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times Z$  אינה ניתנת לכיסוי סופי.

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"טים אזי  $(X_i \text{ קומפקטי לכל } i \in [n]) \iff (\prod_{i=1}^n X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}}) \text{ קומפקטי}$ .

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"טים אזי  $(X_i \text{ קומפקטי לכל } i \in \mathbb{N}) \iff (\prod_{i=1}^\infty X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}}) \text{ קומפקטי}$ .

**טענה:** (אקסיומת הבחירה)  $\iff \text{לכל } \aleph_0 < |\Lambda| \text{ ולכל } \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \text{ מ"טים מתקיים } (X_\alpha \text{ קומפקטי לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}) \text{ קומפקטי}$ .

**מסקנה משפט טיכונוב:** יהיו  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $(X_\alpha \text{ קומפקטי לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}) \text{ קומפקטי}$ .

**טענה:** יהי  $\{0, 1\}$  המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי  $\{0, 1\}$  קומפקטי וכן  $(\prod_{n=1}^\infty \{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{box}})$  אינו קומפקטי.

**טענה:** יהי  $X$  קומפקטי יהי  $Y$  מ"ט מצוייד עם טופולוגיית הסדר  $<$  ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי קיימים  $a, b \in X$  עבורם  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  לכל  $x \in X$ .

**מספר לבג:** יהי  $X$  מרחב מטרי קומפקטי ויהי  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  כיסוי פתוח של  $X$  אזי  $\delta > 0$  עבורו לכל  $A \subseteq X$  אם  $\text{diam}(A) < \delta$  אז קיימת  $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$  עבורה  $A \subseteq \mathcal{U}$ .

**טענה:** יהי  $X$  מרחב מטרי קומפקטי ויהי  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$  כיסוי פתוח של  $X$  אזי קיים מספר לבג.

**מסקנה:** יהי  $X$  מרחב מטרי קומפקטי יהי  $Y$  מרחב מטרי ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה אזי  $f$  רציפה במ"ש.

**מרחב טופולוגיה קומפקטי מקומית:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל  $x \in X$  קיימת  $D \subseteq X$  קומפקטית וכן קיימת  $\mathcal{U} \subseteq D$  פתוחה המקיימת  $x \in \mathcal{U}$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט קומפקטי אזי  $X$  מ"ט קומפקטי מקומית.

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף התב"ש

•  $X$  קומפקטי מקומית.

• לכל  $x \in X$  קיימת  $\mathcal{U}$  סביבה של  $x$  באשר  $\overline{\mathcal{U}}$  קומפקטית.

• לכל  $x \in X$  ולכל  $\mathcal{U}$  סביבה של  $x$  קיימת  $\mathcal{V}$  סביבה של  $x$  עבורה  $\overline{\mathcal{V}}$  קומפקטית וכן  $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$ .

**מסקנה:** יהי  $X$  האוסדורף קומפקטי מקומית אזי  $X$  רגולרי.

**טענה:**  $\mathbb{R}^n$  מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי מקומית.

**טענה:**  $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  קומפקטי מקומית.

**טענה:**  $\mathbb{Q}$  מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי מקומית.

**טענה:** יהי  $X$  קומפקטי מקומית יהי  $Y$  מ"ט ותהא  $f : X \rightarrow Y$  רציפה ופתוחה אזי  $f(X)$  קומפקטית מקומית.

**מסקנה:** קומפקטיות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

**טענה:** יהי  $X$  קומפקטי מקומית ותהא  $Y \subseteq X$  סגורה אזי  $Y$  קומפקטית מקומית.

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף קומפקטי מקומית ותהא  $Y \subseteq X$  פתוחה אזי  $Y$  קומפקטית מקומית.

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"טים אזי  $(X_i)$  קומפקטי מקומית לכל  $i \in [n]$   $\iff (\prod_{i=1}^n X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  קומפקטי מקומית.

**הערתק נאותה:** יהיו  $X, Y$  מ"טים אזי  $f : X \rightarrow Y$  עבורה לכל  $C \subseteq Y$  קומפקטית מתקיים כי  $f^{-1}(C)$  קומפקטית.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט יהי  $Y$  האוסדורף קומפקטי מקומית ותהא  $f : X \rightarrow Y$  חח"ע על רציפה ונאותה אזי  $f$  הומיאומורפיזם.

**קומפקטיפיקציה:** יהי  $X$  מ"ט אזי מ"ט קומפקטי והאוסדורף  $Y$  עבורו קיים שיכון  $f : X \rightarrow Y$  המקיים  $\overline{f(X)} = Y$ .

**הערה:** קומפקטיפיקציה היא לעיתים מ"ט ולעיתים השיכון.

**מסקנה:** יהי  $X$  מ"ט ותהא  $Y$  קומפקטיפיקציה אזי  $X$  צפוף ב- $Y$ .

**קומפקטיפיקציה חד-נקודתית/אלכסנדרוב:** יהי  $X$  מ"ט אזי קומפקטיפיקציה  $Y$  עבורה  $|Y \setminus X| = 1$ .

**טענה:** יהי  $X$  האוסדורף קומפקטי מקומית שאינו קומפקטי אזי קיימת ל- $X$  קומפקטיפיקציה חד-נקודתית.

**הערה:** יהי  $X$  האוסדורף קומפקטי מקומית שאינו קומפקטי ותהינה  $Y, Z$  קומפקטיפיקציות חד-נקודתיות אזי  $Z, Y$  הומיאומורפיים.

**קומפקטיפיקציית סטון-צ'ך:** יהי  $X$  מ"ט אזי קומפקטיפיקציה  $i : X \rightarrow Y$  עבורה לכל מ"ט האוסדורף  $Z$  ולכל  $f : X \rightarrow Z$  רציפה

קיימת  $g : Y \rightarrow Z$  רציפה עבורה  $g \circ i = f$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט ותהינה  $Y, Z$  קומפקטיפיקציות סטון-צ'ך אזי  $Z, Y$  הומיאומורפיים.

**מרחב טופולוגי קומפקטי סדרתי:** מרחב טופולוגי  $X$  עבורו לכל סדרה  $a_n$  קיימת תת-סדרה  $a_{k_n}$  מתכנסת.

**למה:** יהיו  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים תהא  $a : \mathbb{N} \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  סדרה ויהי  $b \in \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  אזי  $(a)$  מתכנסת ל- $(b)$   $\iff (\pi_\alpha(a_n))_{n=0}^\infty$  מתכנסת ל- $(\pi_\alpha(b))_{n=0}^\infty$  לכל  $\alpha \in \Lambda$ .

**טענה:**  $\{x \in [0, 1] \mid |\{x_\alpha = 1\}| \leq \aleph_0\}$  קומפקטית סדרתית וכן אינה קומפקטית.

**טענה:**  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  קומפקטית וכן אינה קומפקטית סדרתית.

**טענה:**  $[0, 1]^2$  מצוייד עם טופולוגיית הסדר המילוני הינו קומפקטי וכן קומפקטי סדרתית.

**טענה:** יהי  $X$  קומפקטי מניה  $I$  אזי  $X$  קומפקטי סדרתית.

**טענה:** יהי  $X$  לינדלוף קומפקטי סדרתית אזי  $X$  קומפקטי.

**טופולוגיית הישר הארוך:** יהי  $\omega_1$  הסודר המינימלי שאינו בן-מניה אזי  $\omega_1 \times [0, 1]$  מצוייד עם הסדר המילוני.

**טענה:** הישר הארוך הינו קומפקטי סדרתית וכן אינו קומפקטי וכן אינו מטריזבילי.

**טענה:** יהיו  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  מ"טים אזי  $(X_\alpha)$  קומפקטי מקומית לכל  $\alpha \in \Lambda$  וכן קיימת  $\Delta \subseteq \Lambda$  סופית עבורה  $X_\beta$  קומפקטי לכל  $\beta \in \Lambda \setminus \Delta$   $\iff (\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$  קומפקטי מקומית.

**טענה:** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי שלם ותהא  $A \subseteq X$  אזי  $(A)$  סגורה  $\iff (A, d)$  מרחב מטרי שלם.

**טענה:** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי שלם אזי  $(X, \min\{d, 1\})$  מרחב מטרי שלם.

**המטריקה האחידה:** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי ותהא  $\Lambda$  קבוצה אזי  $\rho(d) : X^\Lambda \times X^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת

$$\rho(d)(x, y) = \sup_{\alpha \in \Lambda} \{\min\{d(x_\alpha, y_\alpha), 1\}\}$$

**טענה:** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי ותהא  $\Lambda$  קבוצה אזי  $\rho(d)$  מטריקה מעל  $X^\Lambda$  וכן  $\rho(d) \leq 1$ .

**טענה:** יהי  $(X, d)$  מרחב מטרי שלם ותהא  $\Lambda$  קבוצה אזי  $(X^\Lambda, \rho(d))$  מרחב מטרי שלם.

**למה:** יהי  $X$  מ"ט יהי  $(Y, d)$  מרחב מטרי תהא  $f : X \rightarrow Y$  ותהינה  $\{f_n\}_{n=0}^\infty \subseteq X \rightarrow Y$  רציפות עבורן  $f_n \xrightarrow{u} f$  אזי  $f$  רציפה.

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט ויהי  $(Y, d)$  מרחב מטרי אזי  $C(X, Y)$  סגורה במרחב המטרי  $(Y^X, \rho(d))$ .

**מסקנה:** יהי  $X$  מ"ט ויהי  $(Y, d)$  מרחב מטרי שלם אזי  $C(X, Y)$  מרחב מטרי שלם.

**העתקות הומוטופיות:** יהיו  $X, Y$  מ"ט אזי  $f, g : X \rightarrow Y$  רציפות עבורן קיימת  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  רציפה המקיימת  $F(x, 0) = f(x)$

וכן  $F(x, 1) = g(x)$  לכל  $x \in X$ .

**סימון:** יהיו  $X, Y$  מ"ט ויהיו  $f, g : X \rightarrow Y$  הומוטופיות אזי  $f \sim_{\text{homotopy}} g$ .

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"ט אזי  $\sim_{\text{homotopy}}$  יחס שקילות.

**החבורה יסודית של מרחב טופולוגי:** יהי  $X$  מ"ט ותהא  $a \in X$  אזי  $\pi_1(X, a) = \{f \in C([0, 1], X) \mid f(0) = f(1) = a\} / \sim_{\text{homotopy}}$

**טענה:** יהי  $X$  מ"ט ותהא  $a \in X$  אזי  $\pi_1(X, a)$  חבורה ביחס לשרשור מסילות.

**מסקנה משפט העקומה של ז'ורדן:** תהא  $\gamma$  מסילה סגורה פשוטה מעל  $\mathbb{S}^2$  אזי מספר רכיבי הקשירות של  $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$  הינו 2.

**מסקנה:**  $K_{3,3}$  איננו מישורי.

**משפט קורטובסקי:** יהי  $G$  גרף אזי  $(G \text{ איננו מישורי}) \iff (K_{3,3} \text{ תת גרף של } G \text{ או } K_5 \text{ תת גרף של } G)$ .

**חבורת המילים:** יהי  $\Sigma$  אלפבית אזי  $G(\Sigma) = \left\{ \left( w_1^{\sigma(1)}, \dots, w_n^{\sigma(n)} \right) \mid (w_1, \dots, w_n \in \Sigma) \wedge (\sigma : [n] \rightarrow \{\pm 1\}) \right\}$

**טענה:** יהי  $\Sigma$  אלפבית אזי  $G(\Sigma)$  חבורה ביחס לשרשור מילים.

**טענה:** יהי  $T$  טורוס בעל 4 חורים החתוך על ידי מישור בצד ותהא  $a \in T$  על החתך אזי  $G(\Sigma) \cong \pi_1(T, a)$ .

**הערה:** יהי  $\Sigma$  אלפבית יהי  $T$  טורוס בעל  $|\Sigma|$  חורים החתוך בצורה מסוימת ויהי  $a \in T$  על חתך מסוים אזי  $G(\Sigma) \cong \pi_1(X, a)$ .

**סימון:** יהי  $X$  מ"ט ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\pi_n(X) = \{f \in C(\mathbb{S}^n, X)\} / \sim_{\text{homotopy}}$