

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $U \subseteq A$ עבורה קיימת $W \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $U = W \cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $U \subseteq A$ עבורה קיימת $W \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $U = W \cap A$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהא $U \subseteq A$ אזי $(U \text{ פתוחה ביחס ל-} A) \iff (\forall x \in U, \exists r > 0, B_r(x) \cap A \subseteq U)$.

קבוצה קשירה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ עבורה לכל $U \subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל- A מתקיים $U \in \{A, \emptyset\}$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $(A \text{ קשירה}) \iff (A \text{ לא קיימות } U, V \subset A \text{ פתוחות יחסית ל-} A \text{ עבורן } A \in \{U \cap V, U \cup V\})$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהא $f : A \rightarrow B$ אזי $(f \text{ רציפה}) \iff (U \subseteq B \text{ פתוחה יחסית ל-} B \text{ מתקיים כי } f^{-1}(U) \text{ פתוחה יחסית ל-} A)$.

C^m -יריעה k -מימדית: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in M$ קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה \mathcal{O} של x וכן קיימת $\Gamma_f = M \cap \mathcal{O}$ עבורה $f \in C^m(G, \mathbb{R}^{n-k})$.

יריעה חלקה k -מימדית: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in M$ קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה \mathcal{O} של x וכן קיימת $\Gamma_f = M \cap \mathcal{O}$ עבורה $f \in C^\infty(G, \mathbb{R}^{n-k})$.

סימון: תהיינה A, B קבוצות אזי $\{f : A \rightarrow B \mid f \text{ אנליטית מקומית}\} = C^\omega(A, B)$.

יריעה אנליטית k -מימדית: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in M$ קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה \mathcal{O} של x וכן קיימת $\Gamma_f = M \cap \mathcal{O}$ עבורה $f : G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית.

הערה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה 1 -מימדית אזי M תיקרא עקומה.

הערה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה 2 -מימדית אזי M תיקרא משטח.

הערה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה $(n-1)$ -מימדית אזי M תיקרא היפר-משטח.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ הינה יריעה חלקה $n-1$ מימדית.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ יריעה}) \iff \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ פתוחות עבורן $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha$ וכן $M \cap \mathcal{U}_\alpha$ יריעה לכל $\alpha \in \Lambda$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ יריעה}) \iff (x \in M \text{ קיימת סביבה } U \text{ עבורה } M \cap U \text{ יריעה})$.

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ C^m -יריעה k -מימדית ותהא $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r \in C^m(G, \mathbb{R}^n)$ עבורה $r(G) = M$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ עבורה לכל $x \in G$ מתקיים $\text{rank}(\mathcal{D}_r(x)) = k$.

הומאומורפיזם: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $B \subseteq \mathbb{R}^m$ אזי $f \in C(A, B)$ הפיכה עבורה $f^{-1} \in C(B, A)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r : G \rightarrow A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ יריעה}) \iff \{\mathcal{U}_\alpha\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ פתוחות ביחס ל- M עבורן $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha$ וכן קיימות $\{G_\alpha\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha \in C^m(G_\alpha, \mathbb{R}^n)$ עבורן $r_\alpha(G_\alpha) = \mathcal{U}_\alpha$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ יריעה}) \iff (x \in M \text{ קיימת סביבה } U \text{ עבורה } M \cap U \text{ בעלת פרמטריזציה טובה})$.

מערכת משוואות רגולרית: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\{f_i\}_{i=1}^{n-k} \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה לכל $x \in U$ המקיימת $(f_1 \dots f_{n-k})(x) = 0$ מתקיים כי $\{\nabla f_i(x)\}$ בת"ל.

טענה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1 \dots f_{n-k} \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\{f_1 \dots f_{n-k}\}$ מערכת משוואות רגולרית $\iff (x \in U \text{ לכל } x \in U \text{ עבורו } (f_1 \dots f_{n-k})(x) = 0 \text{ מתקיים } \text{rank}(\mathcal{D}_{(f_1 \dots f_{n-k})}(x)) = n-k)$.

הצגה סתומה רגולרית: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ C^m -יריעה k -מימדית ותהא $U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית

$\{(f_1 \dots f_{n-k}) = 0\} = M$ עבורה $\{f_i\}_{i=1}^{n-k} \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}$

אליפסואיד: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו-מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד-יריעתי: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}$

טענה: היפרבולואיד חד-יריעתי הינו יריעה דו-מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו-יריעתי: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\}$

טענה: היפרבולואיד דו-יריעתי הינו יריעה דו-מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}\}$

טענה: קונוס הינו יריעה דו-מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $(0, 0, 0)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma : I \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\text{Im}(\gamma)$ אזי $f : I \times (0, 2\pi \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת $f(t, \rho) = (\gamma_1(t) \cos(\rho), \gamma_1(t) \sin(\rho), \gamma_2(t))$ הינה פרמטריזציה טובה של $\text{Im}(f)$.