עבורה Vol $_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
ight)
ightarrow [0,\infty]$ עבורה אזי לא קיימת $n\in\mathbb{N}$ יהי

- $.Vol_n([0,1]^n) = 1 \bullet$
- . $\operatorname{Vol}_n\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Vol}_n\left(A_i\right)$ אזי $\left\{A_i
 ight\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
 ight)$ תהיינה
- . $\mathrm{Vol}_n\left(arphi\left(A
 ight)
 ight)=\mathrm{Vol}_n\left(A
 ight)$ אזי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $arphi:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$ תהא

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ קיימות עבורן איזומטריות איזומטריות איזומטריות $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריות איזומטריות איזומטריות $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריות איזומטריות $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$ וכן $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$ איזומטריות המקיימות $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$ וכן $Y,Y_i=\emptyset$ איזומטריות איזומטריים אייים איזומטריים איזומטריות איזומטריות איזומטריים איזומטריי

 $X \equiv Y$ אזי בחלקים חופפות $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$ סימון: תהיינה

 $X \equiv Y$ אזי $(Y) \neq \varnothing$ וכן $(X) \neq \varnothing$ וחסומות עבורן אוינה $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה ווהיינה $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ יהי היי $(Y) \neq \emptyset$ ותהיינה ווהיינה $(Y) \neq \emptyset$ ותהיינה אזי לא קיימת $(Y) \neq \emptyset$ ווהיינה אזי לא קיימת $(Y) \neq \emptyset$ ווהיינה אזי לא קיימת ווהיינה ו

- $.Vol_n([0,1]^n)=1 \bullet$
- . $\mathrm{Vol}_n\left(A \uplus B\right) = \mathrm{Vol}_n\left(A\right) + \mathrm{Vol}_n\left(B\right)$ אזי $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ תהיינה
- . $\mathrm{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathrm{Vol}_n\left(A\right)$ אזי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $\varphi:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$ ההא

עבורה $\operatorname{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
ight) o [0,\infty]$ אזי קיימת $n\in\{1,2\}$ יהי יהי

- $.Vol_n([0,1]^n)=1 \bullet$
- $\operatorname{Vol}_n\left(A \uplus B\right) = \operatorname{Vol}_n\left(A\right) + \operatorname{Vol}_n\left(B\right)$ אזי $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ תהיינה
- $\operatorname{Vol}_n\left(arphi\left(A
 ight)
 ight)=\operatorname{Vol}_n\left(A
 ight)$ אזי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $arphi:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$ תהא

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X \in \mathcal{A} \bullet$
- $\forall E \in \mathcal{A}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A} \bullet$
- . | או סופית מתקיים בכל $E\subseteq\mathcal{A}$

 $A\cap B\in\mathcal{A}$ אזי א $A,B\in\mathcal{A}$ טענה: תהא

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ המקיימת

- $X \notin \mathcal{I} \bullet$
- $. \forall A \in \mathcal{I}. \forall B \subseteq A.B \in \mathcal{I} \bullet$
- $\bigcup E \in \mathcal{A}$ סופית מתקיים $E \subseteq \mathcal{A}$ לכל •

המקיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי קבוצה X המקיימת σ

- $X \in \mathcal{A} \bullet$
- $\forall E \in \mathcal{A}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A} \bullet$
- . $\bigcup E \in \mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $E \subseteq \mathcal{A}$ לכל

מסקנה: תהא $\mathcal A$ אלגברה אזי σ אלגברה.

המקיימת $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי קבוצה X המקיימת σ

- $X \notin \mathcal{I} \bullet$
- $. \forall A \in \mathcal{I}. \forall B \subseteq A.B \in \mathcal{I} \bullet$
- $\bigcup E \in \mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $E \subseteq \mathcal{A}$ לכל

טענה: תהיינה $G \cap_{\alpha \in I} A_{\alpha}$ אזי אזי $\sigma \in A_{\alpha}$ אלגברה $G \cap_{\alpha \in I} G \cap_{\alpha \in I} G$

אזי A אזי מעל X המכילות מעל כל ה σ ־אלגברה נוצרת: תהא אזי $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ ותהיינה ותהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המכילות את $\sigma\left(A\right)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_{\alpha}$

 $\mathcal{B}\left(X
ight)=\sigma\left(\left\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}\left(X
ight)\mid$ פתוחה $\mathcal{O}
ight\}$ פתרי אזי מרחב מטרי אזי יהי מרחב מטרי אזי מרחב מטרי אזי

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות

- .X אלגברה בורל על σ
- $.\sigma\left(\left\{B_{r}\left(a\right)\mid\left(r>0\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)\bullet$
- $.\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_+\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$ •
- $.\sigma\left(\{B_r\left(a
 ight)\mid (r\in\mathbb{Q}_+)\wedge (a\in Y)\}
 ight)$ צפופה אזי $Y\subseteq X$ תהא •

 $A=igcap_{i=1}^\infty \mathcal{O}_i$ עבורה קיימות פתוחות פתוחות איימות קיימות עבורה קיימות $A\subseteq X:G_\delta$

```
A,B\in\mathcal{B}\left(X
ight) אזי אזי F_{\delta} ותהא B קבוצה G_{\delta} ותהא קבוצה מסקנה:
                                                                                                                                    טענה: הקבוצות הבאות שוות
                                                                                                                                  \mathbb{R}^n אלגברה בורל על\sigma
                                                                                                       .\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^n \left[a_i, b_i\right) \mid a_1, b_1 \dots a_n, b_n \in \mathbb{R}\right\}\right) \bullet
                                                                                                       .\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^n \left[a_i, b_i\right) \mid a_1, b_1 \dots a_n, b_n \in \mathbb{Q}\right\}\right) \bullet
                                                                              אזי C\left(f
ight)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid xרציפה ב־f
ight\} ותהא f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} אזי משפט: תהא
                                                                                                                                                .C(f) \in G_{\delta} \bullet
                                                                                                  .C\left(f
ight)=X עבורה f אזי קיימת X\in G_{\delta} תהא
                                                                             \operatorname{Aint}\left(\overline{A}
ight)=\varnothing המקיימת A\subseteq X המרי מטרי מרחב מטרי זלילה: יהי
                      A=igcup_{i=1}^\infty B_i דלילות עבורן דלילות אזי אבורה קיימות A\subseteq X עבורה מטרי אזי איזי אבורן דלילות עבורן דלילות עבורן אזי
                                                             . האשונה מקטגוריה שנייה: יהי א מרחב מטרי אזי אינה מקטגוריה אינה מהטגוריה אינה מרחב מטרי יהי א
                                                                     A^{\mathcal{C}} אזי אזי אונה אזי A \subseteq X מקטגוריה אזי מרחב מטרי ותהא אזי איורית: יהי
                                                                                                                                    למה: יהי X מרחב מטרי אזי
                                                                                                 . דלילה B \subseteq A אזיי אזיי A \subseteq X תהא \bullet
                                                                                            . דלילה \bigcup_{i=1}^n A_i אזי דלילות A_1 \dots A_n \subseteq X דלילה •
                                                                                                                    . דלילה אזי \overline{A} דלילה אזי A\subseteq X תהא
                                                                                                                       מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.
                                                      \operatorname{cint}(A)=arnothing משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא A\subseteq X מקטגוריה ראשונה אזי
                                                                                                                   מסקנה: קבוצות דלילות מהוות \sigma־אידיאל.
                                                                                                                                                   \mathbb{Q} \notin G_{\delta} :מסקנה
                                   A=F\uplus N אזי קיימת איי אניחה עבורה ראשונה וקיימת R\subseteq\mathbb{R} משפט: תהא איי קיימת F\subseteq\mathbb{R} אזי קיימת
משפט בנך: במרחב המטרי \{f\in C\left([0,1]\right)\mid \exists x\in (0,1).f\in \mathcal{D}\left(x\}\} משפט בנך: במרחב המטרי עם נורמת מקסימום הקבוצה C\left([0,1]\right)
                                                                                                                                                               ראשונה.
                                                                                                הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.
A = G \triangle Q
משפט: תהא A\subseteq X אזי (ל־Aיש את תכונת בייר)\Longleftrightarrow(קיימת F\subseteq X סגורה וקיימת ל־A\subseteq X אזי (ל־Aיש את תכונת בייר)
                                                                                                                                                         .(A = F \triangle P
                                                                                 . בעלת תכונת בייר אזי A^{\mathcal{C}} בעלת תכונת בייר בעלת הכונת בייר. מסקנה:
          \{A\subseteq X\mid בעלת תכונת בייר A\}=\sigma (\{A\subseteq X\mid (משפט: יהי A\}=\sigma בעלת תכונת בייר אזי משפט: יהי A\}=\sigma משפט: יהי אזי מחבר מטרי אזי (\{A\subseteq X\mid \alpha \in A\}
                                          נסמן lpha+1 נסמן, \mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\} נסמן נסמן \mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) נסמן \mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}
באשר \sigma\left(\mathcal{T}
ight)=\mathcal{F}_{\omega_{1}} אזי \mathcal{F}_{\lambda}=igcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha} נסמן \lambda נסמן \mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{igcap_{n=1}^{\infty}A_{n}\mid A_{n}\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}
                                                                                                             הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה. \omega_1
                                                                                               |\sigma\left(X
ight)|=\aleph אזי און אין עבורה עבורה X קבוצה עבורה טענה: תהא
```

 $A=igcup_{i=1}^\infty \mathcal{O}_i$ סגורות המקיימות סגורות קיימות קיימות עבורה קיימות עבורה קיימות $A\subseteq X:F_\delta$

 $\mu:\Sigma o [0,\infty]$ אזי מרחב מדיד המקיימת (X,Σ) המקיימת פונקציית מידה: יהי

 (X,Σ) אזי מרחב מדיד: תהא $\Sigma\subseteq\mathcal{P}(X)$ מרחב מדיד: תהא

 $.\mu(\varnothing) = 0 \bullet$

 $\mu\left(iguplus_{i=1}^\infty B_i
ight)=\sum_{i=1}^\infty \mu\left(B_i
ight)$ ארות באוגות איי ארות באונה תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ אדטיביות: (X,Σ,μ) מרחב מידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא ותהא מידה: יהי

 $\mu\left(X
ight)<\infty$ מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת

 $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ המקיימים $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ וכן $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ המקיימים אוכן $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ המקיימים מידה $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ המקיימים מידה שנוקציית מידה $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ $\mu\left(X
ight)=1$ מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי

 $\mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right)$ אזי $A\subseteq B$ באשר $A,B\in\Sigma$ יהיו • מונוטוניות: יהיו

```
\mu\left(igcup_{i=1}^{\infty}A_i
ight)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i
ight) אזי \{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma התראדיטיביות: תהיינה \sigma
```

 $\mu\left(igcup_{i=1}^{\infty}A_{i}
ight)=\lim_{n
ightarrow\infty}\mu\left(A_{n}
ight)$ אזי $orall i\in\mathbb{N}_{+}.A_{i}\subseteq A_{i+1}$ באשר באשר $\{A_{i}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ אזי סלעיל: תהיינה $\{A_{i}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$

 $\mu\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i
ight)=\lim_{n o\infty}\mu\left(A_n
ight)$ אזי $\mu\left(A_1
ight)<\infty$ וכן $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ באשר $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ היינה מלרע: תהיינה $\mu\left(A_n
ight)$ באשר $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ וכן $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ מידת בורל: תהא $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ מידת בורל: תהא $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$

 $\mu\left(E
ight)=0$ המקיימת $E\in\Sigma$ זניחה: אפס/זניחה

 $\mathcal{N}=\{E\in\Sigma\mid\mu\left(E
ight)=0\}$ סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי

. אניחה $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ אניחות אזי $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq \Sigma$ אניחה.

 μ כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי ψ פרידיקט עבורו קיימת $E\in\mathcal{N}$ המקיים כי ψ אזי נאמר כי ψ אזי נאמר כי ψ נכונה בכל מקום.

 $F\in\mathcal{N}$ מתקיים $F\subseteq E$ ולכל ולכל עבורה מידה מידה מידה מידה מידה עבורה לכל

 $.\overline{\Sigma}=\{E\cup F\mid (E\in\Sigma)\wedge (\exists N\in\mathcal{N}.F\subseteq N)\}$ מרחב מידה אזי (X,Σ,μ) יהי יהי יהי השלמה של ס־אלגברה: יהי

. טענה: יהי $\overline{\Sigma}$ יהי מידה מידה (X,Σ,μ) יהי טענה:

 $.
u_{
ho_{\Sigma}}=\mu$ עבורה על $\overline{\Sigma}$ עבורה מידה מידה אזי קיימת ויחידה מידה מידה מידה (X,Σ,μ) יהי

 $.\overline{\mu}_{1\Sigma}=\mu$ עבורה על $\overline{\Sigma}$ עבורה השלמה המידה מידה מידה מרחב מרחב (X,Σ,μ) יהי

טענה: יהי $(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu})$ מרחב מידה אזי מרחב מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא $X \neq \varnothing$ אזי $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ מחלקת הינקין

- $X \in \mathcal{D} \bullet$
- $.B \backslash A \in \mathcal{D}$ יהיו $A \subseteq B$ באשר $A, B \in \mathcal{D}$ יהיו •
- $\bigcup_{i=1}^\infty A_i\in\mathcal{D}$ אזי $orall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ באשר $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{D}$ ההיינה ullet

 $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \Pi$ מתקיים $A_1 \dots A_n \in \Pi$ עבורה לכל עבורה $\Pi \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ אזי אזי $X
eq \varnothing$ מערכת π

. מחלקת חלקת $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_{\alpha}$ אזי דינקין מחלקות אחלקת $\left\{\mathcal{D}_{\alpha}\right\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ מחלקת ההיינה

 $d\left(A
ight) = igcap_{lpha \in I} \mathcal{D}_{lpha}$ אזי אזי $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי המכילות את $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ מחלקת דינקין נוצרת: תהא $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$

למה: תהא A אלגברה על X עבורה לכל A עבורה לכל A באשר $A_i \subseteq A_i \subseteq A_i$ מתקיים A אזי A אזי A אזי A למה: תהא A אלגברה על A עבורה לכל A עבורה לכל $A_i = A_i \subseteq A_i$ באשר $A_i = A_i \subseteq A_i$ מתקיים $A_i \in A_i \subseteq A_i$ אזי $A_i \in A_i \subseteq A_i$ מערכת A אלגברה על $A_i = A_i \subseteq A_i$ מערכת $A_i = A_i \subseteq A_i$ מתקיים $A_i = A_i \subseteq A_i$ מערכת $A_i = A_i$ מערכת A_i

עבורן Σ עבורן מידות סופיות על μ, ν מידות ההיינה $\Sigma = \sigma(\Pi)$ מערכת π עבורה $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ מרחב מדיד תהא μ, ν מידות סופיות על μ, ν וכן μ, ν וכן μ, ν אזי $\mu_{\uparrow \Pi} = \nu_{\uparrow \Pi}$ וכן $\mu(X) = \nu(X)$

 $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ באשר $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Pi$ תהיינה $\Sigma=\sigma\left(\Pi\right)$ מסקנה: יהי $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ מרחב מדיד תהא (X,Σ) מרחב $\mu=\nu$ אזי $\mu_{\uparrow\pi}=\nu_{\uparrow\pi}$ וכן $\forall n\in\mathbb{N}_+.\mu\left(A_i\right)=\nu\left(A_i\right)<\infty$ עבורן עבורן Σ עבורן μ,ν מידות על μ,ν מידו

חוג למחצה: תהא $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי קבוצה X המקיימת

- $\mathscr{A} \in \mathcal{E} ullet$
- $A\cap B\in\mathcal{E}$ אזי $A,B\in\mathcal{E}$ יהיו
- $A \backslash B = \biguplus_{i=1}^n C_i$ עבורם $C_1 \dots C_n \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $A, B \in \mathcal{E}$ יהיי

טענה: יהי $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{E}$ חוג למחצה ויהיו $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי

- $P ackslash igcup_{i=1}^n A_i = igoplus_{i=1}^m B_i$ עבורם $B_1 \dots B_m \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $P \in \mathcal{E}$ יהי
- $.\bigcup_{i=1}^n A_i = \biguplus_{i=1}^m \biguplus_{j=1}^m B_{i,j}$ עבורם $\{B_{i,j} \mid (i \in [n]) \land (j \in [m_i])\} \subseteq \mathcal{E}$ קיימים •
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \biguplus_{i=1}^\infty \biguplus_{j=1}^m B_{i,j}$ עבורם $\{B_{i,j} \mid (i \in \mathbb{N}_+) \land (j \in [m_i])\} \subseteq \mathcal{E}$ קיימים •

 $\mu:\mathcal{E} o [0,\infty]$ מידה אלמנטרית: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ חוג למחצה אזי

- $.\mu(\varnothing) = 0 \bullet$
- $.\mu\left(A\uplus B
 ight)=\mu\left(A
 ight)+\mu\left(B
 ight)$ אזי אדיטיביות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ עבורם $A,B\in\mathcal{E}$
 - $.\mu\left(A
 ight) \leq \mu\left(B
 ight)$ אזי $A\subseteq B$ באשר $A,B\in\mathcal{E}$ מונוטוניות: תהיינה
 - $.\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)\leq \sum_{i=1}^\infty \mu\left(A_i\right)$ אזי $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{E}$ ההיינה ס־תת־אדטיביות: תהיינה ס

מידה חיצונית: יהי $X
eq \emptyset$ אזי $\mu^*:\mathcal{P}\left(X
ight)
ightarrow\left[0,\infty
ight]$ אזי $X
eq \emptyset$ המקיימת

 $.\mu^*(\varnothing) = 0 \bullet$

```
.\mu^{*}\left(A
ight)\leq\mu^{*}\left(B
ight) אזי A\subseteq B באשר A,B\in\mathcal{P}\left(X
ight) מונוטוניות: תהיינה
                                                                         .\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_{i}\right)אזי \left\{ A_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right) היינה היינה \sigma

ho\left(arnothing
ight)=0 עבורה 
ho:\mathcal{E}	o[0,\infty] ותהא arnothing,X\in\mathcal{E} עבורה יהי יהי 
ho\left(arnothing)=\mathcal{E} באשר באשר באשר באשר באשר באשר אונית הנוצרת על ידי
                                                             .
ho^{st}\left(A
ight)=\inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty}
ho\left(E_{i}
ight)\mid\left(\left\{ E_{i}
ight\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}
ight)\wedge\left(A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}
ight)
ight\} כך 
ho^{st}:\mathcal{P}\left(X
ight)
ightarrow\left[0,\infty
ight]
                                           טענה: יהי 
ho(\varnothing)=0 אזי 
ho(\varnothing)=0 ותהא 
ho(\varnothing)=0 עבורה 
ho(\varnothing)=0 אזי 
ho(\varnothing)=0 מידה חיצונית.
                                                                                                        .m_{
eal}^*=m טענה: יהי אלמנטרית מידה ותהא ותהא m מידה למחצה חוג למחצה אוי \mathcal{M}
מתקיים F\in\mathcal{A} עבורה לכל \lambda (\varnothing)=0 אזי \lambda עבורה לכל \lambda:\mathcal{A}	o[0,\infty] מתקיים \lambda:\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X) אזי \lambda
                                                                                                                 \lambda(E \cap F) + \lambda(E^{\mathcal{C}} \cap F) = \lambda(E \cap F) + \lambda(F \setminus E) = \lambda(F)
                               A\subseteq \{E\in\mathcal{A}\mid \lambda קבוצה A\subseteq\mathcal{P}(X) אזי A\subseteq\mathcal{P}(X) איזי אלגברה ותהא אלגברה ותהא A\subseteq\mathcal{P}(X) איזי A\subseteq\mathcal{P}(X)
                                                                                      טענה: תהא \lambda\left(\varnothing\right)=0 אזי אברה תהא \lambda:\mathcal{A} \to [0,\infty] אלגברה ותהא אלגברה \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right) אזי
```

- - . אלגברה Γ_0
 - $.\Gamma_0$ אדיטיבית על א λ
 - $\lambda\left(\biguplus_{i=1}^n\left(E_k\cap F
 ight)
 ight)=\sum_{i=1}^n\lambda\left(E_n\cap F
 ight)$ אזי $F\in\mathcal{A}$ ויהי ויהי ויהי $E_1\dots E_n\in\Gamma_0$

קבוצה מדידה ביחס למידה חיצונית: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי אזי $A\subseteq X$ מתקיים μ^* מתקיים: תהא $.\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$

 $\Sigma_{\mu^*}=\{A\subseteq X\mid \mu^*$ מדידה $A\}$ אזי על X איזי מידה חיצונית על מידה מידה μ^*

 $\mathcal{M}\subseteq \Sigma_{m^*}$ יהי אלמנטרית מידה m מידה ותהא חוג למחצה יהי \mathcal{M}

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי

- . אלגברה $\sigma \Sigma_{\mu^*} \bullet$
- . מידה שלמה $\mu^*_{\restriction_{\Sigma_{,,*}}}$

 Σ_{m^*} מידה מעל m^* מידה אלמנטרית מידה m מידה מעל חוג למחצה חוג למחצה ותהא

משפט: יהי ${\mathcal M}$ חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא (X,Σ',μ) המשכת קרתיאודורי נוספת של

- $\mu(A) < m^*(A)$ מתקיים $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$
- $\mu\left(A
 ight)=m^{st}\left(A
 ight)$ מתקיים $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}}$ לכל $m^{st}\left(X
 ight)<\infty$ נניח כי
 - $\mu\left(A
 ight)=m^{st}\left(A
 ight)$ מתקיים $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}}$ לכל אזי לכל σ m נניח כי

מסקנה: יהי ${\mathcal M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

מתקיים $d\left(A,B
ight)>0$ באשר $A,B\subseteq X$ מתקיים מידה חיצונית עבורה מטרי ותהא μ^* מידה מטרי משפט הרתיאודורי: יהי $\mathcal{B}\left(X\right)\subseteq\Sigma_{\mu^{st}}$ איז $\mu^{st}\left(A\cup B\right)=\mu^{st}\left(A\right)+\mu^{st}\left(B\right)$

 $\mu\left(A\right)=\sup\left\{ \mu\left(K\right)\mid\left(K\subseteq A\right)\wedge\left(\Pi^{\prime}\right),$ קומפקטית אבורה $A\in\Sigma$ עבורה קבוצה רגולרית: קבוצה אבורה

מידה רגולרית: מידה μ עבורה כל $A \in \Sigma$ הינה רגולרית

. תולרית. אזי μ אזי אוי μ אזי μ אזי μ משפט אולם: יהי א מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא ותהא אוי משפט אולם: יהי אוי שלח מטרי שלח וחפירבילי ותהא אוי אוי וחפירבילי ותהא אוי אוי אוי וחפירבילי ותהא אוי אוי וחפירבילי ותהא אוי אוי וחפירבילי ותהא אוים וחפירבילי ותהא אוים וחפירבילי ותהא אוים וחפירבילי ותהא אויה וחפירבילי ותהא אוים וחפירבילי וחפירבילי ותהא אוים וחפיר

עבורה $\{\prod_{i=1}^n (a_i,b_i) \mid a_1,b_1\dots a_n,b_n\in\mathbb{R}\}$ עבורה מידה אלמנטרית: מידה אלמנטרית

 $.m(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

 $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n
ight)=\sigma\left(\left\{A\subseteq\mathbb{R}^n\mid\left($ מניחה לבג: A
ight)ל פי מידת הנפח האלמנטרית מידת הנפח מידת לבג: A

 $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d
ight)\subseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)$ מסקנה:

מסקנה: תהא $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ אזי $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ אזי איי איי $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ אזי $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ מסקנה: תהא האלמנטרית.

טענה: תהא λ מידת לבג אזי

- $.\lambda\left(E
 ight)=\lim_{n o\infty}\lambda\left(E\cap\left[-n,n
 ight]^{d}
 ight)$ אזי $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
 ight)$ תהא
- $A(\mathcal{O}\backslash E)<arepsilon$ פתוחה עבורה $E\subseteq\mathcal{O}$ אזי קיימת arepsilon>0 ויהי ויהי ויהי $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$
- $A\left(Eackslash F
 ight)<arepsilon$ סגורה עבורה $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$ תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$ אזי קיימת
- $A(E \backslash F) < arepsilon$ עבורה $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ אזי קיימת arepsilon > 0 אויהי $\mu(E) < \infty$ עבורה $\varepsilon > 0$
- $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$ וכן $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$ תהא $E\subseteq \mathbb{R}^d$ אזי וכן $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$

```
טענה: תהא \mu מידת לבג ותהא A \subseteq \mathbb{R}^d התב"ש
                                                                                                                                                                   A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) •
                                                                                                            A=Gackslash E עבורן E\in\mathcal{N} וקיימת וקיימת G\in G_\delta
                                                                                                          A=F\cup E עבורן איימת E\in\mathcal{N} וקיימת וקיימת F\in F_{\sigma}
                                                                                      (\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right),m) מסקנה: תהא \lambda מידת לבג אזי (\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right),\lambda) השלמה של
                                                     אזי A\subseteq\mathcal{O} אזי ותהא f:\mathcal{O}	o\mathbb{R}^d פתוחה תהא שפט: תהא f:\mathcal{O}	o\mathbb{R}^d איזי לבג תהא
                                                                                                                       f\left(A
ight)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
ight) אזי A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
ight) נניח כי
                                                                                                                             \lambda\left(f\left(A\right)\right)=0 נניח כי \lambda\left(A\right)=0 אזי
                                                                A(A)=\lambda\left(A+x
ight) אזי X\in\mathbb{R}^n ויהי A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n
ight) משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא
מסקנה: תהא 
u\left(E
ight)<\infty חבומה מתקיים E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
ight) אזי איי קיים עווריאנטית מידה אינווריאנטית להזוות וכן לכל
                                                                                                                                                        \lambda = \kappa \nu עבורו \kappa \in [0, \infty)
                                                                    \lambda\left(T\left(E
ight)
ight)=\left|\det\left(T
ight)
ight|\lambda\left(E
ight) אזי E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
ight) ותהא T\in\operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^{d}
ight) משפט: תהא
                                                       A=\prod_{i=1}^n (a_i,b_i) המקיימים a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R} עבורה קיימים A\subseteq\mathbb{R}^d המקיימים
                                                                                                                 חסומה ותהא \lambda מידת לבג אזי E \subseteq \mathbb{R}^d הגדרה: תהא
                                                                          \lambda_{*,J}(E) = \sup \{\lambda(A) \mid (A \subseteq E)\} מידת ז'ורדן פנימית: • מידת
                                                                            \lambda_I^*(E) = \inf \left\{ \lambda\left(A\right) \mid (A \subseteq A) \wedge (A \supseteq E) \right\} מידת ז'ורדן חיצונית:
                                                   \lambda_J(E)=\lambda_J^*(E) אזי א\lambda_{*,J}(E)=\lambda_J^*(E) אחסומה עבורה E\subseteq\mathbb{R}^d אאזי
                                                                         \lambda_{J}^{*}(E)=\lambda\left(\overline{E}
ight) וכן \lambda_{*,J}\left(E
ight)=\lambda\left(\mathrm{int}\left(E
ight)
ight) חסומה אזי וכן E\subseteq\mathbb{R}^{d}
                                                                                                                   טענה: תהא \lambda מידת לבג אזי E \subseteq \mathbb{R}^d מידת לבג אזי
                                                                                                                                                              . מדידה ז'ורדן E ullet
                                                                     A(B\backslash A)<arepsilon וכן A\subseteq E\subseteq B פשוטות עבורן A,B אזי קיימות arepsilon>0
                                                                                                                                                                 \lambda_I^*(\partial E) = 0 \bullet
                                                                                                                                                                  .\lambda^* (\partial E) = 0 \bullet
                                                      (x-y)\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\} עבורם x,y\in E אזי קיימים אז עבורה \lambda\left(E
ight)>1 עבורה E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)
                                       V \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) 
eq \mathcal{Z}^d אזי א \lambda(V) > 2^d משפט מינקובסקי: יהי ווף קמור V \subseteq \mathbb{R}^d גוף קמור סימטרי סביב
      \lambda\left(E\cap Q
ight)>	heta\cdot\lambda\left(Q
ight) עבורה Q\subseteq\mathbb{R}^d אזי קיימת קוביה 	heta\in\left(0,1
ight) ותהא \lambda\left(E
ight)\in\left(0,\infty
ight) עבורה E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)
                                                                              0 \in \operatorname{int}(E-E) אזי \lambda\left(E
ight) > 0 עבורה E \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}
ight) אזי משפט שטיינהאוס: תהא
                                                      (x-y)\in\mathbb{Q}\setminus\{0\} עבורם x,y\in E אזי קיימים א \lambda\left(E
ight)>0 עבורה E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}
ight) עבורה
                      \mathcal{O}=(\biguplus_{i=1}^\infty B_i)\cup E עבורם E\in\mathcal{N} עבורים וקיימת למה: תהא \mathcal{O}=\{B_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d
ight) פתוחה אזי קיימים
                                                                                                . מונוטונית ורציפה מימין מונוטונית התפלגות: F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}
                       טענה: תהא \mu מידת בורל סופית על \mathbb{R} אזי F:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} המוגדרת F:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} הינה פונקציית התפלגות.
                                                                                         קדם־מיימת \mu:\mathcal{A}
ightarrow [0,\infty] אלגברה אזי \mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) המקיימת
```

 $.\mu(\varnothing) = 0 \bullet$

 $.\mu\left(\biguplus_{i=1}^\infty B_i
ight)=\sum_{i=1}^\infty \mu\left(B_i
ight)$ איות באוגות איי איי אינה פרביות: תהיינה σ • סענה: תהא M אלגברה ותהא M קדם־מידה איי M קדם־מידה איי

 $\mathcal{A}\subseteq \Sigma_{m^*}$ אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי

 Σ_{m^*} מידה מעל m^* מידה המשכת קרתיאודורי: תהא אלגברה ותהא אלגברה ותהא

משפט: תהא \mathcal{A} אלגברה תהא קדם־מידה ותהא (X,Σ',μ) המשכת קדם־מידה של קדם־מידה משפט משפט: תהא

- $\mu\left(A
 ight) \leq m^{st}\left(A
 ight)$ מתקיים $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^{st}}$ לכל
- $.\mu\left(A\right)=m^{*}\left(A\right)$ מתקיים $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ לכל אזי $m^{*}\left(X\right)<\infty$ נניח כי פניח נניח האזי לכל
- $\mu\left(A
 ight)=m^{st}\left(A
 ight)$ מתקיים $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}}$ לכל אזי לכל σ m נניח כי

. מסקנה: תהא אלגברה ותהא קדם־מידה m קדם-מודורי יחידה. מסקנה: תהא אלגברה ותהא אלגברה ותהא

 $\{[a,b)\mid a\leq b\}$ פונקציית החוג למחצה $\mu\left([a,b)
ight)=F\left(b
ight)-F\left(a
ight)$ איז התפלגות איז פונקציית התפלגות איז $\mu\left(iguplus_{i=1}^n\left[a_i,b_i
ight)
ight)=\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i
ight)-F\left(a_i
ight)
ight)$ קדם־מידה מעל האלגברה $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ האלגברה העל האלגברה $\{iguplus_{i=1}^n\left[a_i,b_i
ight)\mid orall i\in[n].a_i\leq b_i\}$

```
.orall a,b\in\mathbb{R}.\mu\left([a,b]
ight)<\infty עבורה מקומית: מידת בורל מעל מעל מעורה מידה מופית מקומית:
                                                 \mu=\mu_F עבורה F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} מסקנה: תהא \mu מידת בורל סופית מקומית על \mathbb{R} אזי קיימת פונקציית התפלגות
                                                                                                                                                    .\overline{\mu_F} אזי התפלגות איז F:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} מידת לבג־סטילטייס: תהא
                                                                                                                                                                 \mu_F = \overline{\mu_F} פונקציית התפלגות נסמן F: \mathbb{R} 	o \mathbb{R} סימון: תהא
\mu_F\left(E
ight)=\inf\left\{\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i
ight)-F\left(a_i
ight)
ight)\mid E\subseteqigcup_{i=1}^n\left[a_i,b_i
ight)
ight\} אזי E\in\Sigma_{\mu_F} אזי E\in\Sigma_{\mu_F} פונקציית התפלגות ותהא F:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
 \mu_F\left(E
ight)=\inf\left\{\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i
ight)-F\left(a_i
ight)
ight)\mid E\subseteqigcup_{i=1}^n\left(a_i,b_i
ight)
ight\} אזי E\in\Sigma_{\mu_F} אזי התפלגות ותהא F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} פונקציית התפלגות ותהא
             \mu_F\left(E
ight)=\sup\left\{\mu_F\left(K
ight)\mid\left(K\subseteq E
ight)\wedge\left(משפט: תהא E\in\Sigma_{\mu_F} משפט ותהא ותהא פונקציית התפלגות ותהא E\in\Sigma_{\mu_F} אזי
                                                                                                                                                             \mu_F רגולרית. \mu_F מסקנה: תהא F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} רגולרית.
                                                                                                                                                    משפט: תהא E\subseteq\mathbb{R} התב"ש פונקציית התפלגות ותהא F:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
                                                                                                                                                                                                                                                                         .E \in \Sigma_{u_F} \bullet
                                                                                                                                                                                  E=Gackslash N עבורן N\in\mathcal{N} וכן וכן G\in G_\delta
                                                                                                                                                                               .E = F \uplus N עבורן N \in \mathcal{N} וכן וכן F \in F_{\sigma}
                                      A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}
ight) טענה: תהא E\subseteq B אזי A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}
ight)קיימות ליימות אויE\in\mathcal{B} וכן.
\mu_F(E) < \infty טענה העיקרון הראשון של ליטלווד: תהא \mathbb{R} 	o \mathbb{R} פונקציית התפלגות תהא E \in \Sigma_{\mu_F} עבורה F: \mathbb{R} 	o \mathbb{R} ותהא
                                                                                                                                                \mu_F\left(E\triangle\left(\bigcup_{i=1}^n\left(a_i,b_i\right)\right)\right)<arepsilon עבורם a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R} קיימים
                                                                                                                                                                             \mathcal{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left( \frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right) :קבוצת קנטור:
                                                                                                                                                                                                                         \mathcal{C} \in \mathcal{N} טענה: תהא \lambda מידת לבג אזי
                                                                                                                                                                                                                     \mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i} \mid x \in \mathbb{N}^{\{0,2\}} \right\} טענה:
                                                                                                   . קבוצה מבודדות מכילה נקודות בלתי קשירה לחלוטין אשר לא מכילה נקודות מבודדות קבוצה קבוצה לא מכילה מושלמת:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                   :טענה
                                                                                                                                                                                                                                                                             |\mathcal{C}| = \aleph \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                                  . קומפקטית \mathcal{C}
                                                                                                                                                                                                                                                                       מושלמת. \mathcal{C}
קבוצת קנטור מוכללת: תהיינה C_n שהוצאנו מגדיר היינה \{\delta_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left((0,1)\right) נגדיר ענדיר מוכללת: תהיינה היינה להיות מוכללת: עובדיר היינה אווי וכן את אווי מוכללת: מוכל
                                                                                                                                                                                    \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i אזי \delta_n \cdot \lambda(I) קטע באורך רC_{n-1} אזי די
                                                                                                                                \forall n \in \mathbb{N}_+.\delta_n = rac{1}{3} טענה: קבוצת קנטור הינה קבוצת קנטור מוכללת באשר
                                         .(\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i=\infty) אזי לבג) איי אניחה אניחה אזי קבוצת קנטור אזי (קבוצת אזי לבג) אזי אזי (\delta_n) אזי אזי (קבוצת קנטור המוכללת אזיינה
                               .arphi^\star\left(x
ight)=\sum_{i=1}^\inftyrac{a_i}{3^i} אזי a_i\in\{0,1\} אזי x=\sum_{i=1}^\inftyrac{2a_i}{3^i} בעל הצגה בעל הצגה x\in\mathcal{C} בעל הצגה הגדרה: נגדיר
                                                                                               .arphi\left(x
ight)=\sup\left\{ arphi^{\star}\left(t
ight)\mid\left(t\in\mathcal{C}
ight)\wedge\left(t\leq x
ight)
ight\} כך arphi:\left[0,1
ight]
ightarrow\left[0,1
ight] בדיר נגדיר
                                                                                                                                                                                        \varphi:[0,1] 	o [0,1] טענה: תהא \varphi:[0,1] 	o [0,1]
                                                                                                                                                                                                                                                                               עולה. \varphi
```

 $\mu_F\left([a,b)
ight)=F\left(b
ight)-F\left(a
ight)$ עבורה μ_F משפט: תהא $F:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ עבורה פונקציית התפלגות אזי קיימת ויחידה מידת בורל

 $(\exists c \in \mathbb{R}.F - G = c) \Longleftrightarrow (\mu_F = \mu_G)$ טענה: תהיינה $F,G:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות התפלגות אזי

- .רציפה φ
- $.\varphi(\mathcal{C}) = [0,1] \bullet$
- $.arphi\left(E
 ight)
 otin\mathcal{L}\left(\mathbb{R}
 ight)$ עבורה $E\subseteq\mathcal{C}$ קיימת

. $\operatorname{diam}\left(A\right)=\sup\left\{d\left(x,y\right)\mid x,y\in A\right\}$ אזי אזי מרחב מטרי ותהא מטרי מרחב מטרי ותהא מירי אזי אזי אזי מרחב מטרי ותהא

אזי $E\subseteq X$ יהי $\delta>0$ יהי יהי מטרי מטרי מרחב מטרי יהי (X,d) אזי

 $\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam}\left(A_{i}\right)^{s} \mid \left(E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{i}\right) \wedge \left(\operatorname{diam}\left(A_{i}\right) < \delta\right)\right\}$

 $\mathcal{H}_s\left(E
ight)=\lim_{\delta\downarrow0}\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E
ight)$ איי איי $E\subseteq X$ ויהי $s\geq0$ מרדת מטרי יהי (X,d) מרחב מטרי יהי

טענה: יהי $\delta>0$ ויהי אזי מרחב מטרי יהי s>0 אזי מרחב מטרי יהי

- יורדת. $f\left(\delta
 ight)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E
 ight)$ המוגדרת $f:\left(0,\infty
 ight)
 ightarrow\left[0,\infty
 ight]$ יורדת. \bullet
- יורדת. $f\left(s\right)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$ המוגדרת $f:\left[0,\infty\right)
 ightarrow\left[0,\infty\right]$ יורדת. \bullet
- יורדת. $f(s)=\mathcal{H}_s\left(E\right)$ המוגדרת $f:(0,\infty)\to [0,\infty]$ יורדת. \bullet
 - $\mathcal{H}_s(\varnothing) = 0 \bullet$

```
\mathcal{H}_{s,\delta}(A \cup B) = \mathcal{H}_{s,\delta}(A) + \mathcal{H}_{s,\delta}(B)
            \mathcal{H}_s\left(A\cup B
ight)=\mathcal{H}_s\left(A
ight)+\mathcal{H}_s\left(B
ight) אזי d\left(A,B
ight)>0 אזי אבורן s\geq 0 ותהיינה s\geq 0 מסקנה: יהי
                                                                                                                                                                \mathcal{H}_s מדידה E\in\mathcal{B}\left(X
ight) אזי ותהא s\geq0 מדידה מסקנה: יהי
                                                                                                  \mathcal{H}_s\left(f\left(E
ight)
ight) \leq L^s \cdot \mathcal{H}_s\left(E
ight) אזי E \subseteq X ותהא ליפשיץ f: X 	o Y מסקנה: תהא
                                                                                                         \mathcal{H}_{s}\left(f\left(E
ight)
ight)=\mathcal{H}_{s}\left(E
ight) אזי E\subseteq X איזומטריה ותהא f:X	o X מסקנה: תהא
                                                                                                                                                         טענה: יהי E\subseteq X ותהא s\geq 0 מרחב מטרי יהי מיהי (X,d) טענה:
                                                                                                                                                    \mathcal{H}_t\left(E\right)=0 מתקיים t>s אזי לכל \mathcal{H}_s\left(E\right)<\infty אם •
                                                                                                                                                    \mathcal{H}_{t}\left(E\right)=\infty מתקיים t< s אזי לכל \mathcal{H}_{s}\left(E\right)>0 אם •
                                                                                                                                                                        \mathcal{H}_{s}\left(E
ight)=0 אזי n < s ויהי E \subseteq \mathbb{R}^{n} מסקנה: תהא
                                                            \dim_{\mathcal{H}}(E)=\inf\{s\geq 0\mid \mathcal{H}_s\left(E
ight)=0\} איז E\subseteq X מרחב מטרי ותהא מימד האוסדורף: יהי
                                                                                                                                                                                             \dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n)=n אזי n\in\mathbb{N}_+ מסקנה: יהי
                                                                                                                                                                                                                          \dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) = \log_3(2) משפט:
                                                                                                                                                     \mathcal{H}_n = rac{2^n}{\lambda(\{|x| \leq 1\})} \cdot \lambda אזי אוי לבג מעל משפט: תהא \lambda מידת לבג מעל
                                                                                                                                                                                  0<\mathcal{H}_n\left(\left[0,1\right]^n\right)<\infty אזי n\in\mathbb{N}_+ טענה: יהי n\in\mathbb{N}_+
                                                         T^{-1}\left(\Sigma_Y
ight)\subseteq\Sigma_X המקיימת T:X	o Y מרחבים מדידים מרחבים (X,\Sigma_X)\,,(Y,\Sigma_Y) הייו העתקה מדידה: יהיו
                                  T:(X,\Sigma_X)	o (Y,\Sigma_Y) אזי מדידה מדידה מדידים מדידים מדידים מדידים מדידים מדידים מדידים מדידים יהיו מדידה אזי מרחבים מדידים מדי
מענקה S:Y	o Z מדידה ותהא T:X	o Y העתקה מדידים מדידים וההא מדידה ותהא א מרחבים מדידים האוא מענה: יהיו
                                                                                                                                                                .
מדידה (\Sigma_X, \Sigma_Z) מדידה אזי אוי מדידה (\Sigma_Y, \Sigma_Z)
T^{-1}\left(\mathcal{E}
ight)\subseteq\Sigma_{X} וכן \Sigma_{Y}=\sigma\left(\mathcal{E}
ight) עבורה \mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(Y
ight) ותהא ותהא T:X	o Y מרחבים מדידים מדידים תהא איז יהיו
                                                                                                                                                                                                                  אזי T העתקה (\Sigma_X, \Sigma_Y)־מדידה.
                                                                        . מדידה (\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(Y)) העתקה T\in C(X,Y) מרחבים מטריים ותהא מענה: יהיו
                                                                                                                                                                                                      \overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=[-\infty,\infty] הגדרה:
                                                                                                                                          . הגדרה: נגדיר \infty-\infty, \frac{\infty}{\infty} והפעולות 0\cdot (\pm \infty)=0 אינן מוגדרות.
                                                                                                                       .\rho\left(x,y\right)=\left|A\left(x\right)-A\left(y\right)\right| וכן A\left(x\right)=\lim_{t\to x}\arctan\left(t\right) הגדרה: נגדיר
                                                                                                                                                                                                                     .טענה: (\overline{\mathbb{R}},
ho) מרחב מטרי שלם
                                                         S \in \mathcal{P}\left(\{\pm\infty\}\right) וכן B \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right) עבורן A \subseteq \overline{\mathbb{R}} עבורן אזי עבורן A \subseteq \overline{\mathbb{R}} אזי אזי (A \in \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right))
                                                                                                                                                                                                                              \mathcal{B}\left(\mathbb{R}
ight)=\mathbb{R}\cap\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}
ight) טענה:
                                                                                                                                                              פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי (X,\Sigma) מרחב מדיד אזי
                                                                                                                                                                                     - מדידה. (\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R})) f: X \to \mathbb{R} מדידה.
                                                                                                                                                                                    - מדידה. (\Sigma, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)) f: X \to \overline{\mathbb{R}} מדידה.
                                                                                                                                                          מסקנה: יהי f:X	o\mathbb{R} מרחב מדיד מרחב מרחב (X,\Sigma) מסקנה: יהי
                                                                                                                                                                                                                                            מדידה בורל. f \bullet
                                                                                                                                                                                                \{f\geq a\}\in \Sigma מתקיים a\in \mathbb{R} לכל
                                                                                                                                                                                                \{f \geq a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{Q} לכל
                                                                                                                                                                                                \{f>a\}\in \Sigma מתקיים a\in \mathbb{R} לכל
                                                                                                                                                                                                \{f>a\}\in\Sigma מתקיים a\in\mathbb{Q} לכל
                                                                                                                                                                                                \{f \leq a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{R} לכל
                                                                                                                                                                                                \{f \leq a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{Q} לכל
                                                                                                                                                                                                \{f < a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{R} לכל
                                                                                                                                                                                                \{f < a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{Q} לכל
                                                                                                           מסקנה: יהי f מדידה מדיד ותהא ותהא היי ותהא אזי מדידה מדידה מדידה מסקנה: יהי (X,\Sigma) מרחב מדיד ותהא
```

 $(f^{-1}(\pm\infty)\in\Sigma$ מרחב מדיד ותהא $f:X o\overline{\mathbb{R}}$ אזי (f מדידה בורל) מדידה בורל מדידה מדיד ותהא מדיד ותהא מדיד ותהא מדידה בורל)

מידות חיצוניות. $\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s,\delta}$

טענה: יהי $(A,B)>\delta$ עבורן $A,B\subset X$ יהי $\delta>0$ יהי s>0 אזי מרחב מטרי יהי (X,d) איזי

```
arphi=\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i} עבורם a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}
egin{aligned} egin{aligned} eta_{i=1}^n E_i &= X \end{aligned} באשר egin{aligned} arphi_{i=1} E_i &= X \end{aligned} באשר באשר באנה סטנדרטית של פונקציה פשוטה: יהי (X,\Sigma) מרחב מדיד ותהא
                                                                                           טענה: יהי (X,\Sigma) מרחב מדיד ותהא \mathbb{R} 	o \mathbb{R} פשוטה אזי קיימת הצגה סטנדרטית.
                                                                \varphi(X) סופית) מדידה וכן \varphi(X) מרחב מדיד ותהא \varphi:X \to \mathbb{R} אזי מרחב מדיד וכן \varphi(X) סופית).
                                                          (arphi_n\uparrow f) משפט: תהא \{arphi_n\}\subseteq X	o\overline{\mathbb{R}} משפט: מדידה חיוביות עבורן f:X	o\overline{\mathbb{R}} משפט: משפט
\{arphi_n\uparrow f משפט: תהא \{arphi_n\}\subseteq X	o\overline{\mathbb{R}} משפט: תהא \{arphi_n\}\subseteq X מדידה חיוביות עבורן עבורה \{arphi_n\uparrow f\} חסומה ותהיינה
                                                                                                                                                                                                                                       A אזי \varphi_n \rightrightarrows f על
                                                       |arphi_n|\uparrow|f| מסקנה: תהא f:X	o\overline{\mathbb{R}} מדידה אזי קיימות f:X	o\overline{\mathbb{R}} פשוטות עבורן מסקנה:
                                          טענה: תהא g:X	o\mathbb{R} מדידה g:X	o\mathbb{R} מדידה ל... אזי מדידה שלמה תהא f:X	o\mathbb{R} מדידה מדידה ל... אזי מדידה שלמה תהא
                    . מדידה f כ.ב.מ. אזי f כ.ב.מ. אזי f מדידה f:X	o\mathbb{R} המקיימת מדידה שלמה תהיינה f:X	o\mathbb{R} מדידות ותהא
                                                        \overline{\mu} פענה: תהא \mu מידה ותהא \overline{\mu} f:X	o\overline{\mathbb{R}} מדידה אזי קיימת \overline{\mathbb{R}} מדידה וכן \overline{\mu} כ.ב.מ.
                                                                                                  .
Borel (X)=\{f:X	o\mathbb{R}\mid בורל בורל: יהי X מרחב מטרי אזי מחלקת בורל: יהי
                                         .Baire_{i+1}\left(X\right)=\{\lim_{n\to\infty}f_{n}\mid\{f_{n}\}\subseteq \mathrm{Baire}_{i}\left(X\right)\} וכך שימון: יהי X מרחב מטרי אזי (X)=C\left(X\right) ובוים אלי
                                                                                                                                  .Baire (X) = \bigcup_{i=0}^{\infty} Baire_i(X) מחלקת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי
                                                                                                        .arphi\left(f,g
ight)\in \mathrm{Baire}\left(X
ight) אזי f,g\in \mathrm{Baire}\left(X
ight) ותהיינה arphi\in C\left(\mathbb{R}^{2},\mathbb{R}
ight) אזי
                                                                                                                  \{f_n 
ightarrow \mathbb{1}_F עבורן \{f_n \} \subseteq C \, (X, \mathbb{R}) עבורה אזי קיימות F \subseteq X למה: תהא
                                                                                                                                        מחלקה מונוטונית: יהי X מרחב מטרי אזי R\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) המקיימת
                                                                                                                          \bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}\in R אזי \forall i\in\mathbb{N}.E_{i}\subseteq E_{i+1} עבורן \{E_{i}\}\subseteq R ההיינה \bullet
                                                                                                                         \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in R אזי \forall i \in \mathbb{N}. E_i \supseteq E_{i+1} עבורן \{E_i\} \subseteq R תהיינה
                         מחלקה מונוטוניות מעל X המכילות את A\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) ותהיינה A\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) כל המחלקה מונוטוניות מעל
                                                                                                                                                                                                                                  \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{R}_{\alpha}
                                                     A את המכילה ביותר המטנה המחלקה המונוטונית הינה אזי \mathcal{M}\left(A
ight) אלגברה אזי אלגברה אזי \mathcal{M}\left(A
ight) הינה המחלקה
                                                                                                                                                            .\sigma\left(\mathcal{A}
ight)=\mathcal{M}\left(\mathcal{A}
ight) אלגברה אזי \mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) למה: תהא
                                                                                                                                                             .Baire (X)=\operatorname{Borel}(X) משפט: יהי X מרחב מטרי אזי
משפט לוזין/טענה העיקרון השני של ליטלווד: תהא f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))	o (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) תהא f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) ותהא
                                                                                                                                        f\in C\left(K
ight) וכן \mu\left(\mathbb{R}\backslash K
ight)<arepsilon קיימת עבורה א קומפקטית עבורה א קומפקטית 
                                                                                                        L^{0}\left(X,\Sigma
ight)=\left\{ f:X
ightarrow\overline{\mathbb{R}}\mid מדידה f
brace מרחב מידה אזי (X,\Sigma,\mu) יהי הגדרה: יהי
                                                                                מתקיים arepsilon>0 עבורה לכל f\in L^0\left(X,\Sigma
ight) ותהא ותהא \{f_n\}\subset L^0\left(X,\Sigma
ight) מתקיים
                                                                                                                                                         f_n \xrightarrow{\mu} f איז \mu\left(\left\{x \in X \mid |f_n\left(x\right) - f\left(x\right)| > 0\right\}\right) \to 0
\mu\left(Xackslash\left\{x\in X\mid\lim_{n	o\infty}f_{n}\left(x
ight)=f\left(x
ight)
ight\}
ight)=0 אבורה עבורה \left\{f_{n}
ight\}\subseteq L^{0}\left(X,\Sigma
ight) ותהא ותהא לא בכל מקום: יהיו
                                f_n \xrightarrow{a.s.} f וכן f_n \xrightarrow{a.e.} f אזי וכן f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f אזי ותהא f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f ותהא ותהא f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f עבורן ותהא f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f עבורן אזי ותהא f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f אזי ותהא f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f אזי ותהא עבורן ותהא ותהא f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f אזי ותהא ותהא ותהא ועבורן וותהא וותהא
                                                            \mu\left(igcap_{n=1}^{\infty}igcup_{k=n}^{\infty}E_{k}
ight)=0 אזי אזי \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(E_{n}
ight)<\infty מדידות עבורן מדידות עבורן אזי למה בורל קנטלי: יהיו
                                                                              \sum_{n=1}^\infty \mu\left(\{|f_n>arepsilon|\}<\infty מתקיים 0<0 מתקיים \{f_n\}\subseteq L^0\left(X,\Sigma
ight) אזי
                                                                                                                                                                                                                                           .f_n \xrightarrow{a.e.} 0 \bullet
```

 $f^-=-\max\{-f,0\}$ וכן וכך איזי $f^+=\max\{f,0\}$ איזי $f:X o\overline{\mathbb{R}}$ אכן: תהא משפט: תהיינה $f^+,f^-,rac{1}{f},f\cdot g,f+g,f^2$ מדידות איזי $f,g:X o\overline{\mathbb{R}}$ מדידות. $\{f<g\},\{f\leq g\},\{f=g\}\in\Sigma$ מדידות איזי $\{f,g:X o\overline{\mathbb{R}}$

מדידות. $\min\left\{f,g\right\},\max\left\{f,g\right\},|f|$ מדידות מדידות מדידות $f,g:X o\overline{\mathbb{R}}$ מדידות.

 $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$

מדידות. $\sup\{f_n\}$, $\inf\{f_n\}$, $\limsup\{f_n\}$, $\liminf\{f_n\}$, $\lim\inf\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות אזי משפט: תהא

עבורם $a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}$ וכן $E_1\ldots E_n\in\Sigma$ עבורה קיימים $arphi:X o\mathbb{R}$ עבורם מדיד אזי אזי מרחב מדיד אזי $arphi:X o\mathbb{R}$

וקיימים $orall_{i=1}^n E_i = X$ עבורם $E_1 \dots E_n \in \Sigma$ עבורה קיימים $arphi : X o \mathbb{R}$ וקיימים מרחב מדיד אזי

מסקנה: תהא $f:X o \overline{\mathbb{R}}$ אזי f סדרת פונקציות מדידות ותהא $f:X o \overline{\mathbb{R}}$ עבורה $f:X o \overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות ותהא

```
\mathcal{S}\left(\Sigma\right)=\left\{arphi\in X
ightarrow\mathbb{R}\mid שימון: יהי (X,\Sigma,\mu) מרחב מידה אזי מרחב מידה אזי יהי מרחב מידה אזי
                                                                                                                                  \mathcal{S}^{+}\left(\Sigma\right)=\left\{ arphi\in\mathcal{S}\left(\Sigma\right)\midarphi\geq0
ight\} סימון: יהי (X,\Sigma,\mu) מרחב מידה אזי
  f \in \mathcal{S}(\Delta) באונה (f, f, f) באונה (f, f) באונה (f) באונה (f)
                                                                                                                                        \int_{E}f\mathrm{d}\mu=\int_{X}\mathbb{1}_{E}f\mathrm{d}\mu אזי E\in\Sigma ותהא ותהא f\in\mathcal{S}^{+}\left(\Sigma\right) אינטגרל: תהא
                                                                                                                                                                  טענה: תהיינה \lambda \geq 0 ויהי A \in \Sigma תהא f,g \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right) טענה: תהיינה
                                                                                                                                                                                                                                             .\int_{X} \mathbb{1}_{A} \mathrm{d}\mu = \mu(A) \bullet
                                                                                                                                                                                         \int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu - הומוגניות חיובית:
                                                                                                                                                                           \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu חיבוריות: •
                                                                                                                                                                     \int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu אזי אוניטוניות: נניח כי f \leq g
                                                                                          .\Sigma טענה: \psi\left(E
ight)=\int_{E}f\mathrm{d}\mu המוגדרת \psi:\Sigma	o\mathbb{R} אזי איזי f\in\mathcal{S}^{+}\left(\Sigma
ight) הינה מעל
                                                                                 L^{0}\left(X,\Sigma
ight)=\left\{ f\in X
ightarrow\overline{\mathbb{R}}\mid\left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}
ight)
ight) מדידה f
brace מרחב מידה אזי מרחב מידה אזי
                                                                                                                L^0_+\left(X,\Sigma
ight)=\left\{f\in L^0\left(X,\Sigma
ight)\mid f\geq 0
ight\} סימון: יהי (X,\Sigma,\mu) מרחב מידה אזי
                                                                                                     \int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)) \wedge (\varphi \leq f)
ight\} אזי f \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right) למה: תהא
                                                                                    \int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X arphi \mathrm{d}\mu \mid (arphi \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma
ight)) \wedge (arphi \leq f)
ight\} אינטגרל: תהא f \in L^0_+\left(X,\Sigma
ight) אינטגרל: תהא
                                                                                                                                \int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X 1\!\!1_E f \mathrm{d}\mu אזי E \in \Sigma ותהא ותהא f \in L^0_+(X,\Sigma) אינטגרל: תהא
                      \int_X g \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu אזי g \leq f איזי g \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right) ותהא ותהא f_n \uparrow f עבורן ועבורן f, \{f_n\} \subseteq L^0_+\left(X, \Sigma\right)
\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu איי איf_n \uparrow f עבורן f, \{f_n\} \subseteq L^0_+(X, \Sigma) משפט התכנסות מונוטונית: תהיינה
                                                     \int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n 	o \infty} \int_X arphi_n \mathrm{d}\mu אזי arphi_n \uparrow f מסקנה: תהא f \in L^0_+(X,\Sigma) ותהא f \in L^0_+(X,\Sigma)
                                                                                                                                                          טענה: תהיינה A \in \Sigma תהא f,g \in L^0_+(X,\Sigma) ויהי \lambda \geq 0 אזי
                                                                                                                                                                                                                                             \int_{X} \mathbb{1}_{A} d\mu = \mu(A) \bullet
                                                                                                                                                                                         \int_{V} \lambda f d\mu = \lambda \int_{V} f d\mu הומוגניות חיובית: •
                                                                                                                                                                           \int_{Y} (f+g) d\mu = \int_{X} f d\mu + \int_{X} g d\mu חיבוריות: •
                                                                                                                                                                     \int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\muאזי אזי נניח כי פf \leq gמונוטוניות: נניח •
                                                                                                             \int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_E f_n \mathrm{d}\mu איי אוו \{f_n\} \subseteq L^0_+(X,\Sigma) מסקנה: תהא
                                                                                                                                             טענה: תהא f=0 אזי f\in L^0_+(X,\Sigma) כ.ב.מ.).
                                 \int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n	o\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu כ.ב.מ. אזי איזי f,\{f_n\}\subseteq L^0_+(X,\Sigma) טענה התכנסות מונוטונית: תהיינה
                                                          \int_X \left(\liminf_{n \to \infty} f_n 
ight) \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu אזי וווי הלמה של פטו: תהא \{f_n\} \subseteq L^0_+ (X, \Sigma) אזי הלמה של פטו: תהא
                                                                           \int_X f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu אזי אזי f_n \stackrel{a.e.}{\longrightarrow} f עבורן עבורן f, \{f_n\} \subseteq L^0_+(X,\Sigma) מסקנה: תהיינה
                                                                                 \int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \mathrm{d}\mu איי איי \int_X f^\pm \mathrm{d}\mu < \infty עבורה f \in L^0(X,\Sigma) אינטגרל: תהא
                                                                                                   L^{1}\left(\mu\right)=\left\{ f\in L^{0}\left(X,\Sigma\right)\mid\int_{X}f^{\pm}\mathrm{d}\mu<\infty\right\} מרחב מידה אזי \left(X,\Sigma,\mu\right)יהי יהי יהי מידה מידה אזי
                                                                                                                                                                                                                        oldsymbol{v}טענה: תהא f\in L^0\left(X,\Sigma
ight) התב"ש
                                                                                                                                                                                                                                                              f \in L^1(\mu) \bullet
```

 $A\setminus E$ על $f_n
ightrightarrows 0$ וכן $\mu\left(E
ight) < \delta$ עבורה $E\subseteq X$ אזי קיימת $\delta>0$ אזי אזי קיימת

. כ.ב.מ.. f=g אאי $f_n \xrightarrow{\mu} g$ וכן $f_n \xrightarrow{\mu} f$ עבורן $f,g \in L^0\left(X,\Sigma\right)$ ותהיינה ותהיינה $\{f_n\} \subseteq L^0\left(X,\Sigma\right)$

עבורה $E\subseteq X$ קיימת arepsilon>0 אזי לכל $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי חופית משפט אגורוב/טענה של ליטלווד: תהא א מידה מידה חופית משפט אגורוב

עבורן $\{A_k\}\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ וקיימות ותהיינה $\mu\left(N
ight)=0$ אזי קיימת אזי קיימת אזי קיימת $\mu\left(N
ight)=0$ אזי קיימת אזי קיימת ותהיינה ותהיינה

למה פרשה: יהי $(X, \mathcal{P}(X)) o (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על (X, ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי מידת בורל סופית על א

ותהא $f:(X,\mathcal{B}(X)) o (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ משפט לוזין: יהי (X,
ho) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על

 $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$ משפט ריס: תהיינה $f \xrightarrow{\mu} f$ אזי קיימת תת"ס עבורה

 A_k על $f_n
ightrightarrows f$ מתקיים $k \in \mathbb{N}$ וכן לכל $X = N \cup igcup_{k=1}^\infty A_k$

 $f\in C\left(K
ight)$ וכן $\mu\left(\mathbb{R}\backslash K
ight)<arepsilon$ אזי קיימת אוכן קומפקטית עבורה $K\subseteq\mathbb{R}$ אזי קיימת arepsilon>0

 $X \setminus E$ על $f_n \rightrightarrows f$ וכן $\mu(E) < \varepsilon$

 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ עבורן $\{f_n\} \subseteq C(X)$ קיימות

```
f^{\pm} \in L^{1}(\mu) \bullet
                              |f| \in L^1(\mu) \bullet
|f| \leq g עבורה g \in L^1(\mu) קיימת •
\lambda \in \mathbb{R} טענה: יהיו f,g \in L^{1}\left(\mu
ight) אזי
```

 $\int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu$ ובפרט ובפרט $\lambda f \in L^1\left(\mu
ight)$ הומוגניות: מתקיים

 $\int_{X}\left(f+g\right)\mathrm{d}\mu=\int_{X}f\mathrm{d}\mu+\int_{X}g\mathrm{d}\mu$ ובפרט ובפרט $f+g\in L^{1}\left(\mu\right)$ מתקיים •

 $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in L^{1}(\mu) \bullet$

 $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$ אזי $f \leq g$ כניח נניח: • מונוטוניות: נניח כי

 $\left|\int_X f \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X \left|f\right| \mathrm{d}\mu$ אי־שיוויון המשולש: •

 $\int_{E}f\mathrm{d}\mu=\int_{X}\mathbb{1}_{E}f\mathrm{d}\mu$ איי איי $E\in\Sigma$ ותהא ותהא $f\in L^{1}\left(\mu
ight)$ אינטגרל: תהא

 $.\psi\left(E
ight)=\int_{E}f\mathrm{d}\mu$ המוגדרת עם צפיפות ביחס למידה: תהא $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma
ight)$ אזי איי

fסימון: תהא μ הינה μ אזי מידה עם צפיפות f ביחס למידה μ הינה μ הינה

 $.\Sigma$ אזי מעל הינה מידה מעל $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ הינה מידה מעל

. מדידה: $(\Sigma,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{2}
ight))$ $f:X o\mathbb{C}$ העתקה מדידה מריב מריב מריב מריב מריב מריב מריב יהי

. (מדידות) Im (f), Re (f)) \Longleftrightarrow מדידה $f:X\to\mathbb{C}$ מדידות).

 $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X \mathrm{Re}\left(f
ight) \mathrm{d}\mu + i \int_X \mathrm{Im}\left(f
ight) \mathrm{d}\mu$ אזי אי $\int_X \mathrm{Re}\left(f
ight) \mathrm{d}\mu, \int_X \mathrm{Im}\left(f
ight) \mathrm{d}\mu < \infty$ אינטגרל: תהא $f: X o \mathbb{C}$ מדידה עבורה . הערה: נשתמש בסימון $L^{1}\left(\mu
ight)$ גם עבור פונקציות מרוכבות אינטגרביליות.

 $\left|\int_X f\mathrm{d}\mu
ight| \leq \int_X \left|f\right|\mathrm{d}\mu$ אזי $f\in L^1\left(\mu
ight)$ טענה: תהא

. סענה: תהא $\{f \neq 0\}$ אזי $f \in L^1\left(\mu\right)$ קבוצה סענה: תהא

.(ב.ב.מ.). f=0אזי (לכל $E\in\Sigma$ מתקיים f=0) אזי אזי (לכל $f\in L^1(\mu)$ אזי אזי (לכל ב.ב.מ.).

 $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu$ אזי או $\mu\left(\{f
eq g\}
ight) = 0$ עבורן $f,g \in L^1\left(\mu
ight)$ אזי מסקנה: תהיינה

 $f \sim g$ אזי $\mu\left(\{f
eq g\}
ight) = 0$ עבורן $f,g \in L^1\left(\mu
ight)$ אזי $f,g \in L^1\left(\mu
ight)$

 $L^{1}\left(\mu
ight) \equiv L^{1}(\mu)/_{\sim}$ מכאן והלאה נתייחס לפונקציות שקולות כזהות, כלומר נתייחס לפונקציות

 $.L^{1}\left(\mu
ight) \equiv L^{1}\left(\overline{\mu}
ight)$ איז מידה μ מידה μ

וכן $f\in L^{1}\left(\mu
ight)$ אזי $|f_{n}|\leq g$ עבורה $g\in L^{1}\left(\mu
ight)$ וכן קיימת $f\in L^{1}\left(\mu
ight)$ אזי $\{f_{n}\}\subseteq L^{1}\left(\mu
ight)$ אזי וכן משפט ההתכנסות הנשלטת/לבג: תהא $\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu$

 $\int_X f \mathrm{d}\mu = g$ וכן $f \in L^1(\mu)$ אזי ו $f_n \in L^1(\mu)$ איזי איזי וכן $f_n \xrightarrow{\mu} f$ וכן וכן $f_n \xrightarrow{\mu} f$ איזי וכן $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$

הערה: מהגדרת האינטגרל ניתן להפוך את כל המגבלות לכמעט בכל מקום.

...מסקנה: תהא $\sum f_n$ אזי אזי $\sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty$ עבורה עבורה אזי $\{f_n\}\subseteq L^1\left(\mu\right)$

 $\int_X \left(\sum_{n=1}^\infty f_n
ight)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n\mathrm{d}\mu$ וכן וכן $\sum_n f_n \in L^1(\mu)$ אזי מסקנה: תהא $\{f_n\} \subseteq L^1(\mu)$ עבורה $\{f_n\} \subseteq L^1(\mu)$

אזי $f_{m} \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ עבורן $f \in L^{1}\left(\mu
ight)$ ותהא ותהא $\left\{f_{n}
ight\} \subseteq L^{1}\left(\mu
ight)$ אזי אזי

 $\left(\int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0 \right) \Longleftrightarrow \left(\int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu \to \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \right)$

 $(R)\int_a^b f\mathrm{d}x$ אינטגרבילית רימן אזי אינטגרל רימן אינטגר $f:[a,b] o\mathbb{R}$ אינטגרבילית אינטגרל אינטגרל פאינט

f=g וכן $g\in L^1\left(\lambda
ight)$ מדידה עבורה $g:[a,b] o\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן איי קיימת $f:[a,b] o\mathbb{R}$ משפט: תהא λ מידת לבג ותהא $A(R)\int_a^bf\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}g\mathrm{d}\lambda$ המקיימת. המקיימת ג־כ.ב.מ.

 $L^{p}\left(\mu
ight)=\left\{ f:X
ightarrow\mathbb{R}\mid\left(f\in L^{0}\left(X,\Sigma
ight)
ight)\wedge\left(\int_{X}\left|f
ight|^{p}\mathrm{d}\mu<\infty
ight)
ight\}$ יהי $p\in\left[1,\infty
ight)$ יהי $p\in\left[1,\infty
ight]$

 $L^{\infty}\left(\mu
ight)=\left\{f:X
ightarrow\mathbb{R}\mid\left(f\in L^{0}\left(X,\Sigma
ight)
ight)\wedge\left(\exists c>0.\mu\left(\left\{\left|f
ight|\geq0
ight\}
ight)=0
ight)
ight\}$ סימון:

 $\|f\|=\left(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu
ight)^{rac{1}{p}}$ כך $\|\cdot\|_p:L^p\left(\mu
ight) o\mathbb{R}$ הגדרה: נגדיר

 $ho_{\infty}\left(f,g
ight)=\inf\left\{c>0\mid\mu\left(\left\{|f|\geq c
ight\}
ight)=0
ight\}$ כך $\left\|\cdot
ight\|_{\infty}:L^{\infty}\left(\mu
ight)
ightarrow\mathbb{R}$ הגדרה: נגדיר

טענה אי־שיוויון הולדר: יהיו $g\in L^{1}(\mu)$ עבורם $\frac{1}{p}+rac{1}{q}=1$ תהא $f\in L^{p}(\mu)$ ותהא $g\in L^{q}(\mu)$ אזי $g\in L^{q}(\mu)$ וכן $\int_X |fg| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$

 $g \in L^q(\mu)$ אזי $\|g\|_q \neq 0$ עבורה $g \in L^q(\mu)$ אזי $\|f\|_p \neq 0$ עבורה $\|f\|_p = \frac{\|g\|_p^p}{\|f\|_p^p} \Rightarrow (\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_p \, \|g\|_q)$ מסקנה: $\|f\|_p = \|f\|_p \, \|g\|_p$

מסקנה: תהא $g_{\lceil \{f \neq 0\}} = \|g\|_{\infty}$ איי ($\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_1 \, \|g\|_{\infty}$) איי $g \in L^{\infty}(\mu)$ ותהא $f \in L^1(\mu)$ מסקנה: תהא $f \in L^1(\mu)$ ותהא $f \in L^1(\mu)$ מסקנה אי־שיוויון קושי־שוורץ: תהיינה $f,g \in L^2(\mu)$ איי $f,g \in L^2(\mu)$

 $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ וכן $f+g \in L^p(\mu)$ אזי וההיינה תההיינה עובסקי: יהי יהי $p \in [1,\infty]$ ותהיינה $p \in [1,\infty]$ ותהיינה $p \in [1,\infty]$ מסקנה אי־שיוויון צ'בישב: תהא $p \in L^p(X,\Sigma)$ אזי לכל $p \in L^p(X,\Sigma)$ מענה אי־שיוויון צ'בישב: תהא $p \in L^p(X,\Sigma)$ אזי לכל ווהא לכל וואי

 $.f_{n}\stackrel{L^{p}}{\longrightarrow}f$ אאי $\lim_{n o\infty}\|f_{n}-f\|_{p}=0$ עבורן $f\in L^{p}\left(\mu
ight)$ ותהא $\{f_{n}\}\subseteq L^{p}\left(\mu
ight)$ איז $:L^{p}$

 $f_n = f_m$ אוי אווי $f_n = f_m$ אוי $f_n = f_m$ עבורה לכל $f_m = f_m$ עבורה לכל f_m

 $.\|\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\|_{p}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|f_{n}\|_{p}$ אזי אויביות $\{f_{n}\}\subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $p\in\left[1,\infty\right)$ למה: יהי

 $.\left(f_{n}\overset{L^{p}}{\longrightarrow}f
ight)\Longleftrightarrow\left(\left\Vert f_{n}\right\Vert _{p}
ightarrow\left\Vert f\right\Vert _{p}
ight)$ איזי $f_{n}\overset{\mu-a.e.}{\longrightarrow}f$ ותהא $f_{n}\overset{\mu-a.e.}{\longrightarrow}f$ עבורה $f_{n}\overset{\mu-a.e.}{\longrightarrow}f$ איזי $f_{n}\overset{\mu-a.e.}{\longrightarrow}f$ משפט ריס־פיסצ'ר: יהי $f_{n}\overset{\mu-a.e.}{\longrightarrow}f$ מרחב שלם.

 $f_{n_k} \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ עבורה $f_n \xrightarrow{L^p} f$ אזי קיימת תת"ס אזי קיימת $f_n \xrightarrow{L^p} f$ ותהא $f_n \xrightarrow{L^p} f$ ותהא $f_n \xrightarrow{L^p} f$ עבורה ותהא $f_n \xrightarrow{L^p} f$ אזי לכל $f_n \xrightarrow{L^p} f$ אזי

 $\mu\left(E
ight)<\delta$ המקיימת $E\in\Sigma$ מתקיים המינטגרבילית במידה שווה: $\{f_n\}\subseteq L^1\left(\mu
ight)$ עבורה לכל המקיים $\{f_n\}\subseteq L^1\left(\mu
ight)$ המקיימת גינטגרבילית במידה שווה: $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_E|f_n|\,\mathrm{d}\mu<arepsilon$

 $f\in L^1\left(\mu
ight)$ אינטגרביליות במ"ש) \wedge (קיימת $\{f_n\}$) אינטגרביליות במ"ש) עבורה $f\in L^1\left(\mu
ight)$ אינטגרביליות במ"ש) עבורה $f\in L^1\left(\mu
ight)$ אינטגרביליות במ"ש). $\{f_n\}\subseteq L^1\left(\mu
ight)$ אינטגרביליות במ"ש). עבורה $f\in L^1\left(\mu
ight)$ אינטגרביליות במ"ש) עבורה $f\in L^1\left(\mu
ight)$ אינטגרביליות במ"ש). עבורה $f\in L^1\left(\mu
ight)$ אינטגרביליות במ"ש) עבורה $f\in L^1\left(\mu
ight)$ אינטגרביליות במ"ש).

מסקנה: יהי $f\in L^p\left(\mu
ight)$ תהא $f\in L^p\left(\mu
ight)$ ותהא $f\in L^p\left(\mu
ight)$ עבורה $f\in [1,\infty)$ התב"ש

- $.f_n \xrightarrow{L^p} f \bullet$
- $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\setminus E}\left|f_{n}\right|^{p}\mathrm{d}\mu<arepsilon$ וכן $\mu\left(E
 ight)<\infty$ אינטגרביליות במ"ש וכן לכל arepsilon>0 קיימת קיימת $arepsilon\in\Sigma$
 - $\|f_n\|_p \to \|f\|_p < \infty \bullet$