```
\Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n] \ .a_i < x_i < b_i\} אזי a,b \in \mathbb{R}^n יהיו תיבה פתוחה: יהיו
                                                                           .\overline{\Pi}_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid orall j\in [n]\,.a_i\leq x_i\leq b_i\} אזי a,b\in\mathbb{R}^n תיבה סגורה: יהיו
                                                                                 \exists r>0.B_{r}\left(x
ight)\subseteq M המקיימת x\in M אזי אזי M\subseteq\mathbb{R}^{n} נקודה פנימית: תהא
                                                     \operatorname{Lint}(M) = \overset{\circ}{M} = \{x \in M \mid M \; פנים של קבוצה: תהא M \subseteq \mathbb{R}^n אזי M \subseteq \mathbb{R}^n פנים של קבוצה:
                                                                                                                                  M=\stackrel{\circ}{M} עבורה M\subset\mathbb{R}^n קבוצה פתוחה:
                           נקודה חיצונית. \exists r>0.B_r\left(x\right)\subseteq\mathbb{R}^n\backslash M המקיימת x\in\mathbb{R}^n ותהא ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי x נקודה חיצונית.
                      נקודה מבודדת: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת x\in M האזי x נקודה מבודדת: תהא
                                     נקודת שפה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n ותהא x נקודת שבה: לא נקודה פנימית ולא נקודה X נקודת שבה: תהא
                                                                            .\partial M=\{x\in M\mid M שפה של קבוצה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי M\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                AM\subseteq M עבורה סגורה: קבוצה M\subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                          \overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M אזי אזי M \subseteq \mathbb{R}^n סגור של קבוצה: תהא
                                                            (\mathbb{R}^n \backslash M) טענה: תהא M \subseteq \mathbb{R}^n אזי (x נקודה חיצונית של אזי (x נקודה פנימית של אזי (x נקודה חיצונית של
                                                                                                                  . מסקנה: תהא M^{\mathcal{C}} אזי (M פתוחה)\Longrightarrow תהא M\subseteq\mathbb{R}^n סגורה).
                                                                                                     \exists r>0.M\subseteq B_{r}\left(0
ight) המקיימת M\subseteq\mathbb{R}^{n} קבוצה חסומה:
                                                                                                                               . סגורה וחסומה קבוצה קבוצה קבוצה קומפקטית: קבוצה קומפקטית
טענה היינה בורל: תהא K\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n אזי (K\subseteq\mathbb{R}^n אזי לכל לכל היינה בורל: תהא אזי K\subseteq\mathbb{R}^n אזי אזי (לכל
                                                                                                                                                               .(\exists \mathcal{B} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{B}}I_n
                                                                                                                                               a^{(k)}=a\left(k
ight) אזי a\in\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{\mathbb{N}} סימונ: תהא a\in\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{\mathbb{N}}
                                           \lim_{k	o\infty}a^{(k)}=L אזי \lim_{k	o\infty}\|a^{(k)}-L\|=0 עבורן L\in\mathbb{R}^n אוו אזי a\in(\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} גבול: תהא
                                                                          0 \xrightarrow[x 	o a]{} \lim_{x 	o a} נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד.
                                            a\in [n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_j\Longleftrightarrow \left(a^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right) אזי b\in \mathbb{R}^n ויהי a\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} משפט: תהא a\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} ויהי a\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.
                . \left(\forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \left\|a^{(m)} - a^{(p)}\right\| < \varepsilon\right) \Longleftrightarrow (\mathsf{DR}) \text{ (In } a) אזי (a \in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} )
                                                                                     משפט בולצאנו ווירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.
     a^{(k_i)}\in K המקיימת a^{(k_i)}\in K אזי (לכל קומפקטית) קיימת a\in K^\mathbb{N} קיימת אזי (לכל קומפקטית) אזי אזי K\subseteq \mathbb{R}^n המקיימת
       f_i:A	o\mathbb{R} כאשר f=\langle f_1,\dots,f_m
angle הערה: תהא f:A	o\mathbb{R}^m כאשר f:A	o\mathbb{R}^m הערה: תהא
                                                                                    אזי L\in\mathbb{R}^m ותהא a\in\mathbb{R}^n תהא f:A	o\mathbb{R}^m תהא A\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                           \lim_{x\to a} f(x) = L אזי \forall x \in A^{\mathbb{N}}. (x^{(k)} \to a) \Longrightarrow (f(x^{(k)}) \to L) היינה: אם
                  \lim_{x \to a} f\left(x
ight) = L אזי \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in A \setminus \{a\}. \ \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f\left(x
ight) - L\| < \varepsilon סושי: אם •
                                                                                                          מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.
                                                 A = \lim_{x \to a} f(x) עבורה A \in A אזי A \in \mathbb{R}^n תהא A \subseteq \mathbb{R}^n תהא רציפות בנקודה:
       A\subseteq C(B) (ביפה נקודתית עבור כל B\subseteq A אוי ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n אוי ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n אוי ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n איי ותהא
                               A\subseteq A משפט: תהא A\subseteq \mathbb{R}^n תהא A\subseteq \mathbb{R}^m ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n משפט: תהא
                                                                                                    מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.
                                  . וכן f,f^{-1} הפיכה עבורה f:A	o B אזי B\subset\mathbb{R}^n וכן A\subset\mathbb{R}^n הפיכה עבורה A\subset\mathbb{R}^n רציפות.
                                                                                                                             A:I	o\mathbb{R}^m עקומה פרמטרית: יהיI\subseteq\mathbb{R} יהי
                                                                                                                                                                  מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.
```

 $\gamma\left(t
ight)=\left(1-t
ight)a+tb$  כך כך  $\gamma:\left[0,1
ight] o \mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר: יהיו  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה  $a,b\in\mathbb{R}^m$  יהיו  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a,b\in\mathbb{R}^m$ 

 $.B_r\left(a
ight)=\{x\in\mathbb{R}\mid \|x-a\|< r\}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $a\in\mathbb{R}^n$  יהי הנור: יהי הי  $\overline{B}_r\left(a
ight)=\{x\in\mathbb{R}\mid \|x-a\|\leq r\}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $a\in\mathbb{R}^n$  סבירה: יהי הי  $a\in\mathbb{R}^n$  ויהי  $r\in\mathbb{R}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $r\in\mathbb{R}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$ 

```
A,b\in M. [a,b]\subseteq M המקיימת M\subseteq \mathbb{R}^n קבוצה קמורה: קבוצה
                                                                                         . טענה: יהי B_{r}\left(a\right),\overline{B}_{r}\left(a\right) אזי r\in\mathbb{R} ויהי a\in\mathbb{R}^{n} קבוצות קמורות
       \gamma\left(1
ight)=y וכן \gamma\left(0
ight)=x המקיימת \gamma:\left[0,1
ight]	o M קיימת מסילה x,y\in M וכן עבורה לכל M\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                          תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.
                            . \biguplus \mathcal{A} = M פתוחה אזי קיימת \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_{<leph_0}\left(\mathbb{R}^n
ight) פתוחה אזי קיימת M \subseteq \mathbb{R}^n קבוצה של תחומים ארים עבורה
                     [f(a),f(b)]\subseteq f([a,b]) מתקיים f(a)< f(b) עבורן a,b\in A מבקיימת לכל f:A	o \mathbb{R}
                                                                טענה: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) קשירה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n
                                         עבורם x,y\in\mathcal{K} אזי קיימים אזי f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}
ight) עבורם אזי קומפקטית תהא אזי קיימים אזי קומפקטית עבורם
                                                                                                                                                                      f(\mathcal{K}) = [f(x), f(y)]
                                                                                רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n אזי המקיימת
                                                                                     \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in \mathcal{M}. \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon
                                                                          . טענה: תהא f \in C(\mathcal{K},\mathbb{R}^m) אזי קומפקטית ותהא \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n אזי \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n
                          מתקיים \lambda \in \mathbb{R} ולכל a \in L מרחב יהי עבורה לכל v: L 	o \mathbb{R} אזי מעל n \in L מתקיים מרחב וקטורי נוצר סופית מעל
                                                                                                                       (\upsilon(a) > 0) \land ((\upsilon(a) = 0) \iff (a = 0)) \bullet
                                                                                                                                            .\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right) :הומוגניות
                                                                                                   v\left(a+b\right)\leq v\left(a\right)+v\left(b\right) אי שיוויון המשולש (אש"מ): •
                                                                  \forall x \in \mathbb{R}^n. v\left(x
ight) \leq c \left\|x\right\| עבורו עבורו v: \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} נורמה אזי קיים v: \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R}
                                                                                                                       v \in C\left(\mathbb{R}^n
ight) נורמה אזי v:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} טענה: תהא
                                                                  \forall x \in \mathbb{R}^n.c \, \|x\| \leq v \, (x) עבורו c>0 נורמה אזי קיים v:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} עהא
                                             a\cdot\eta\leq v\leq b\cdot\eta נורמות שקולות: v,\eta:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} נורמות עבורן קיימים a,b>0 נורמות נורמות נורמות שקולות:
                                                                                                                                         טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.
                                                                                                                  תהא v,\|\cdot\| נורמה אזי v:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} שקולות.
                            (v\left(x^{(k)}
ight)	o 0)\Longleftrightarrow (
ho\left(x^{(k)}
ight)	o 0) אזי x\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} נורמות ותהא v,
ho:\mathbb{R}^n	o \mathbb{R} מסקנה: תהיינה
                                                            \|v\|_p=(\sum_{i=1}^n|v_i|^p)^{rac{1}{p}} כך \|\cdot\|_p:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} נגדיר נורמה p\in\mathbb{N}_+ עבור \ell_p
                                    \|v\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|v\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|v\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|v\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כורמת \gamma:(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h} אזי \alpha\in(0,1) ויהי \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m אזי \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m מסקנה: תהא \gamma'(a)=\begin{pmatrix}\gamma'_1(a)\\\vdots\\\gamma'_m(a)\end{pmatrix} אזי \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m
      המקיימת L\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) עבורה קיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} אזי a\in\mathcal{U} תחום ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת
                                                                                                                                   f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)
                                                        f\in\mathcal{D}\left(a
ight) אזי a\in\mathcal{U} איזי f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יהי
                                                      f\in\mathcal{D}\left(a
ight)\Longrightarrow f\in C\left(a
ight) אזי a\in\mathcal{U} ויהי f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי
                                      \operatorname{grad} f(a) = [L]_{\operatorname{ct}} אזי אזי f: \mathcal{U} 	o \mathbb{R} ותהא ותהא a \in \mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי יהי

abla f\left(a
ight)=\mathrm{grad}f\left(a
ight) אזי דיפרנציאבילית דיפרנציאביל ותהא a\in\mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n דיפרנציאבילית יהי
                           .rac{\partial f}{\partial x_i}\left(a
ight)=\lim_{h	o 0}rac{f(a+hx_i)-f(a)}{h} אזי a\in\mathcal{U} ויהי ווהי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n נגזרת חלקית: יהי
                                                                                                    .f'_{x_i}=rac{\partial f}{\partial x_i} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n הערה: יהי
                                           a_{i}=a_{i}משפט: יהי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי
                .
abla f\left(a
ight) = \left(rac{\partial f}{\partial x_{1}}\left(a
ight),\ldots,rac{\partial f}{\partial x_{n}}\left(a
ight)
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R} תחום ותהא
                                \mathcal{U} = \mathcal{U}(a) (a) איי (a \in \mathcal{U} איי ויהי a \in \mathcal{U} ויהי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n הערה: יהי
המקיימת L\in {
m Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) עבורה קיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m אזי אזי a\in\mathcal{U} תחום ויהי עובר יהי יהי יהי
                                                                                                                                  f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)
       (f\in\mathcal{D}\left(a
ight))\Longleftrightarrow (orall i\in\{1\dots m\}\,.f_i\in\mathcal{D}\left(a
ight)) איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n ויהי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n תחום ותהא f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n
                                      (\mathcal{D}_{f}\left(a
ight))_{i,j}^{'}=rac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\left(a
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^{m} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}
```

```
(\forall x \in \mathcal{U}.f(x) = Ax + c) \Longrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = A) אזי A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) תהא
                                                                       \mathcal{D}_f \in C\left(\mathcal{U}
ight) וכן f \in \mathcal{D}\left(\mathcal{U}
ight) המקיימת המקיימת שזי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n תחום אזי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n וכן
                                                                                                                  f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) אזי ברציפות אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n גזירה ברציפות
                                                                             . orall i \in [m] \,. orall j \in [n] \,. rac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C \left( \mathcal{U} 
ight) איז f \in C^1 \left( \mathcal{U}, \mathbb{R}^m 
ight) תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n איז f \in \mathcal{D} \left( \mathcal{U} 
ight) איז \forall i \in [m] \,. orall j \in [n] \,. rac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C \left( \mathcal{U} 
ight) עבורה f : \mathcal{U} 	o \mathbb{R}^m איז שפט: יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m עבורה \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n משפט: יהי
                                                 \mathcal{L}_{i}\left(orall i\in\left[m
ight].orall j\in\left[n
ight].rac{\partial f_{i}}{\partial x_{i}}\in C\left(\mathcal{U}
ight)
ight)\Longleftrightarrow\left(f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)
ight) אזי f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{m} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                                  d_{\overline{\partial v}}(a)=\lim_{h	o 0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h} אזי a\in \mathcal{U} ויהי v\in \mathbb{S}^{n-1} יהי f:\mathcal{U}	o \mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                         .rac{\partial f}{\partial v}(a)=
abla f\left(a
ight)\cdot v אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} ותהא v\in\mathbb{S}^{n-1} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מענה: יהי
                                                 \frac{\partial f}{\partial x}(a)=\mathcal{D}_f(a)\cdot v אזי f\in\mathcal{D}(a) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m ותהא v\in\mathbb{S}^{n-1} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: יהי
                                                                                                                                 .(טענה: יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n תחום אזי \mathcal{U} קשירה מסילתית איי פוליגונלית). \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n טענה: יהי
                                       (orall x\in\mathcal{U}.f(x)=c) \Longleftarrow (orall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0) משפט: יהי \mathcal{U}=\mathcal{U}ת תחום תהא \mathcal{U}=\mathcal{U}ויהי ויהי \mathcal{U}=\mathcal{U}
                                 \mathcal{U}(x) \in \mathcal{U}(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}(x) \in \mathcal{U}(x) = 0) אזי c \in \mathbb{R}^m ויהי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n מסקנה: יהי
             A: \mathcal{U}. ויהי A: \mathcal{U}. 
        A\in\mathcal{U}.f\left(x
ight)=Ax+c\Longleftrightarrow\left(orall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x
ight)=A
ight) אזי A\in\mathcal{M}_{m	imes n}\left(\mathbb{R}
ight) תהא f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{m} מסקנה: תהא
                                                                                                                         .rac{\partial\left(rac{\partial f}{\partial x_i}
ight)}{\partial x_i}=rac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} גזירה אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} סימון: תהא
                                                                                  rac{\partial \left(rac{\partial f}{\partial x_j}
ight)}{\partial x_i}=rac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} גזירה אזי rac{\partial f}{\partial x_j} באשר ויהיו f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} גזירה אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                                                                                                                                                                    \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}} הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה מוכלל
                                  \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(a
ight) = rac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(a
ight) איז a \in \mathcal{U} ויהי \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^1\left(\mathcal{U}
ight) עבורן i,j \in \{1\dots n\} וכך 
 dמסקנה: יהי K\in\mathbb{N}^n תהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורה \mathcal{D}_f\in C^k ויהי \mathcal{D}_f\in\mathcal{C}^k ויהי \mathcal{D}_f\in\mathcal{C}^k אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא
                                                                                                                                                  \|Av\|_{
m st} \leq \|A\|_{
m st} \cdot \|v\|_{
m st} איז v \in \mathbb{R}^n ויהי A \in M_{m 	imes n}\left(\mathbb{R}
ight) טענה: תהא
אזי g\in D\left(f\left(a
ight)
ight) וכן f\in\mathcal{D}\left(a
ight) עבורן g:\mathcal{V}	o\mathbb{R}^k אזי g\in\mathcal{D}\left(f\left(a
ight)
ight) וכן \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m עבורן אזי \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m אזי \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m אזי
                                                                                                                                                                                                  \mathcal{D}_{g \circ f}\left(a\right) = \mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right) \cdot \mathcal{D}_{f}\left(a\right) וכן g \circ f \in \mathcal{D}\left(a\right)
                                                    \Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n 	imes \mathbb{R} \mid (x \in \mathcal{U}) \land (f(x) = y)\} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                                 \Pi_c=\{x\in\mathcal{U}\mid f(x)=c\} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{R} אזי תחום תהא
משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום יהי עבורה f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורה משיק לגרף הפונקציה בנקודה:
                                                                                                                                                                                                                                    y - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i)
                  N_a = (-
abla f\left(a
ight), 1) אזי f \in \mathcal{D}\left(a
ight) עבורה f : \mathcal{U} 	o \mathbb{R} אותהא a \in \mathcal{U} תחום יהי עG \subseteq \mathbb{R}^n אזי עבורה יהי

abla f\left(a
ight) \perp \Pi_{f\left(a
ight)} אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) עבורה f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} אחי a\in\mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n טענה: יהי
                                                                                                                                                                                            נקודת קיצון: יהי f:\mathcal{U} 	o \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                                                       \forall x \in \mathcal{O}.f\left(x\right) \geq f\left(a\right) המקיימת סביבה עבורה קיימת סביבה a \in \mathcal{U} צבורה מינימום מקומי:
                                                                                   . \forall x \in \mathcal{O}. f\left(x\right) \leq f\left(a\right) המקיימת שביבה \mathcal{O} המקיימת עבורה קיימת a \in \mathcal{U} . עבורה קיימת
                                                                                                         .
abla f\left(a
ight)=0 משפט פרמה: יהי a\in\mathcal{U} תחום תהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n משפט פרמה:
                                                                                                                                                                                       נקודת קיצון: יהי f:\mathcal{U} 	o \mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי
                                                                                   aנקודת מינימום מקומי: a \in \mathcal{U} עבורה לכל i \in [m] מתקיים a \in \mathcal{U} נקודת מינימום מקומי.
                                                                            f_i נקודת מקסימום מקומי: u \in [m] עבורה לכל עבורה i \in [m] מתקיים a \in \mathcal{U} נקודת מקסימום מקומי
                                                                                                                  \mathcal{D}_f\left(a
ight)=0 אזי קיצון אזי a\in\mathcal{U} ותהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m מסקנה: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום תהא
                                                                \mathcal{D}_f(a)=0 המקיימת a\in\mathcal{U} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת יהי
\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^n\|V|=k}}inom{k!}{V_1,...,V_n}\prod_{i=1}^n\left(a_i-b_i
ight)^{V_i}rac{\partial^k}{\partial x^V}f נגדיר a,b\in\mathbb{R}^n ויהיו f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) תחום תהא
```

משפט: יהי  $a\in\mathcal{U}$  יהי  $f,g:\mathcal{U} o\mathbb{R}^m$  משפט: יהי תחום תהיינה  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי יהי

 $.f\in C\left( a
ight)$  אזי  $f\in \mathcal{D}\left( a
ight)$  •

 $.cf, f + g \in \mathcal{D}(a)$  אמ  $f, g \in \mathcal{D}(a)$  אם •

 $.(\forall x \in \mathcal{U}.f(x) = c) \Longrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = 0) \bullet$ 

```
\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\left(\sum_{i=1}^n\left(a_i-b_i\right)rac{\partial f}{\partial x_i}
ight)^k אזי a,b\in\mathbb{R}^n ויהיו f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n משפט טיילור: יהי f\in\mathcal{U} תחום יהי f\in\mathcal{U} תהא f\in\mathcal{C}^{k+1} עבורה f\in\mathcal{C}^{k+1} עבורה של f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m משפט טיילור: יהי
                                                                                     f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{i}f\left(a\right)+\frac{1}{\left(k+1\right)!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{k+1}f\left(c\right) עבורו c\in\left[x,a\right] אזי קיים x\in\mathcal{O}
                                                                          (H_f)_{i,j}=f''_{x_i,x_i} יהי פעמיים אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} הסיאן: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום ותהא
                                                                  עבורו c\in[x,a] עבורו אזי קיים a\in\mathcal{U} ותהא ותהא f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) עבורו תחום תהא ענה: יהי
                                                                                                                                                                        f(x) = f(a) + (x - a)^{t} H_{f}(c) (x - a)
                                                                                                            משפט: יהי a\in\mathcal{U} תחום תהא f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                                                                                                                                                        .(מנימום) חיובית ממש) חיובית ממש) חיובית ממש).
                                                                                                                                                    .(מקסימום) שלילית ממש) שלילית שלילית H_f(a)
                                                                                          (לא אחד מהמקרים מלעיל))\wedge (\det(H_f(a)) \neq 0)) (\det(H_f(a)) \neq 0))
                                                                                                           מסקנה: יהי a\in\mathcal{U} תחום תהא f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2 יהי
                                                                                                                  .(det (H_f(a)) > 0) \land (f''_{x,x}(a) > 0) •
                                                                                                               .(det (H_f(a)) > 0) \land (f''_{x,x}(a) < 0) •
                                                                                          (לא אחד מהמקרים מלעיל)) (\det(H_f(a)) \neq 0) (לא אחד מהמקרים מלעיל)) •
                               \det\left(H_f(a)
ight)
eq a\in\mathcal{U} אזי f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום ותהא \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n יהי a\in\mathcal{U} קריטית עבורה \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n
משפט פונקציה סתומה: יהי F(a)=0 וכן F(a)=0 ותהא ותהא F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) משפט פונקציה סתומה: יהי
מתקיים (x,y)\in I_x	imes I_y עבורה לכל f\in C^1(I_x,I_y) וקיימת a_2\in I_y וכן a_1\in I_x פתוחים עבורם וI_x,I_y\subseteq \mathbb{R}
                                                                                                                                                                                         (F(x,y)=0) \iff (y=f(x))
I_x,I_y\subseteq\mathbb{R} יהיו F_u(a)
eq 0 וכן F(a)=0 וכן F(a)=0 יהיו אווים F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) יהיו עבורה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2 יהי
עבורם (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in I_{x}	imes I_{y} עבורה לכל f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}
ight) וכן a_{1}\in I_{x} וכן a_{2}\in I_{y} ותהא
                                                                                                                                                                                                  J_x על J'(x)=-rac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}
I_x,I_y\subseteq\mathbb{R} יהיו F_y'(a)
eq 0 וכן F(a)=0 וכן G(a)=0 יהיו F(a)=0 פתוחים G(a)=0 פתוחים G(a)=0 פתוחים G(a)=0 פתוחים G(a)=0
עבורם (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in I_{x}	imes I_{y} עבורה לכל f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}
ight) ותהא a_{2}\in I_{y} ומתקיים a_{1}\in I_{x}
                                                                                                                                                                                                                   f(x) \in C^k(I_x, I_y)
אזי קיימים F'(a) \neq 0 וכן F(a) = 0 ותהא F \in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}) אזי קיימים \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}
עבורה f\in C^k\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i},I_y
ight) וכן a_i\in I_y וכן מתקיים מתקיים לכל וכל פתוחים עבורם לכל וi\in [n]
                                                                                                          (F(x,y)=0)\Longleftrightarrow (y=f(x)) מתקיים (x,y)\in (\prod_{i=1}^n I_{x_i})\times I_y לכל
I_{x_1},\dots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R} יהיו יהיי F'_{x_{n+1}}(a)
eq 0 וכן F(a)=0 עבורה a\in\mathcal{U} ותהא ותהא F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) יהיו עוב יהיי יהיי
(x,y)\in (\prod_{i=1}^n I_{x_i})	imes I_y עבורה לכל f\in C^1 עבורה לכל a_i\in I_y ותהא ותהא a_{n+1}\in I_y ותהא a_i\in I_x מתקיים עבורם לכל a_i\in I_{x_i} מתקיים a_i\in I_{x_i} איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x על a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x
                                                    \mathcal{D}_f(a) = \left(F_x'(a), F_y'(a)top M^{n+m}
ight) אזי a \in \mathcal{U} אותהא f \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) תחום תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m} איזי מימון: יהי
ינר אזי F'_y(a) וכן וכך F(a)=0 וכן המים בינקציה אזי הפיכה אזי הפיכה עבורה F'\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) הפיכה אזי הפיכה אזי
קיימת a_{j+n}\in I_{y_j} מתקיים j\in [m] ולכל ומה מתקיים מתקיים עבורם לכל פתוחים עבורם לכל וולכל a_i\in I_{x_i} מתקיים עבורם לכל ווקיימת אורם לכל וואיים מתקיים אורם לכל וואיים אורם לכל וואיים מתקיים אורם לכל וואיים אורם לכל וואיים אורם לכל וואיים המתקיים אורם לכל וואיים אורם לכל וואים אורם לכל וואיים אורם לכל
         (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in (\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}})	imes \left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight) עבורה לכל f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight)
                                      וכן F'_y(a) וכן F(a)=0 אבורה a\in\mathcal{U} אביכה יהיו הפיכה ההא F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m) הפיכה יהיו עבורה ער הא
                      ותהא a_{j+n}\in I_{y_j} מתקיים מתקיים ולכל a_i\in I_{x_i} מתקיים עבורם לכל שבורם פתוחים עבורם ולכל I_{x_1},\dots,I_{x_n},I_{y_1}\dots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}
אזי (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow(y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}})	imes\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight) אזי f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight)
                                                                                                                                         \prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}} על \mathcal{D}_{f}\left(x
ight)=-F_{y}'\left(x,f\left(x
ight)
ight)^{-1}\cdot F_{x}'\left(x,f\left(x
ight)
ight)
מסקנה: יהי 
abla F\left(a
ight) 
eq 0 אזי משוואת המשטח המשיק וכך F\left(a
ight) = 0 ותהא ותהא ותהא F \in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) אזי משוואת המשטח המשיק יהי
                                                                                                                                                                     \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(a) (x_i - a_i) = 0 לגרף ב־a לגרף
מסקנה: יהי הפיכה אזי משוואת המשטח הפיכה אזי משוואת המשטח וכן F\left(a
ight)=0 ותהא ותהא ותהא ותהא F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight) הפיכה אזי משוואת המשטח מסקנה:
```

 $\sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(a) (x_i - a_i) = 0$  המשיק לגרף ב־a הינו

 של  $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$  משפט פונקציה הפוכה: יהי  $\mathcal{D}_f(a)$  תחום יהי  $a\in\mathcal{U}$  ותהא ותהא  $a\in\mathcal{U}$  תחום יהי עוברה שנקציה הפוכה: יהי  $\mathcal{O}$  עבורה f דיפאומורפיזם על af עבורה  $\mathcal{D}_f(a)$  הפיכה ותהא  $\mathcal{D}_f(a)$  סביבה של  $a\in\mathcal{U}$  תחום יהי  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  תחום יהי  $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}$  תחום יהי  $\mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x
ight)
ight)=\mathcal{D}_{f}\left(x
ight)^{-1}$  על  $\mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x
ight)
ight)$ טענה: יהיו  $f:\mathcal{U} o\mathcal{V}$  תהא  $A\subset\mathcal{U}$  תהא  $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n$  דיפאומורפיזם אזי .(בתוחה) f(A) פתוחה) • סגורה)  $(A) \Leftrightarrow (A) \rightarrow A$ .(א קומפקטית) f(A) קומפקטית).  $\partial (f(A)) = f(\partial A)$  אזי  $\partial A \subseteq \mathcal{U}$  אם  $\Phi$ i פתוחה. יהי  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  תחום אזי  $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}^m$  המקיימת לכל  $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$  פתוחה מתקיים  $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}^m$  פתוחה.  $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$  אזי קיימת סביבה rank  $(\mathcal{D}_f(a))=m$  עבורה  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  ותהא ותהא  $a\in\mathcal{U}$  משפט פונקציה פתוחה: יהי

 $\mathcal{O}$  של של פתוחה על f

וכן  $g\left(a
ight)=0$  המקיימת  $a\in\mathcal{U}$  אזי  $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)$  תהא  $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  המקיימת  $.\nabla f(a) \in \operatorname{span} \{\nabla g_i(a)\}\$ 

בת"ל וכן  $\{
abla g_i(a)\}$  וכן  $\{g(a)=0$  המקיימת  $a\in\mathcal{U}$  ותהא ותהא  $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  תהא  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$  וכן g=0 אזי a נקודה קריטית של a בתנאי sols  $(g)\cap\mathcal{O}$  פיימת סביבה a של a עבורה a קיימת קיימת סביבה

כך  $L\in C^1(\mathcal{U} imes\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$  נגדיר  $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  ותהא  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  נגדיר  $L(x_1 \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_m) = f(x_1 \dots x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1 \dots x_n)$ 

מסקנה: יהי a) אזי ( $a\in\mathcal{U}$  אחזי  $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  תהא  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  יהי  $(L \ )$ עבורה ( $a,\lambda)$  נקודה קריטית של געבורה ( $b,\lambda)$  עבורה  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  נקיימת

 $\operatorname{Lank}\left(f\left(a
ight)
ight)=\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{f}\left(a
ight)
ight)$  אזי  $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)$  ותהא  $a\in\mathcal{U}$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  אזי יהי משפט: יהי  $\forall x \in \mathcal{U}.\mathsf{rank}\,(f\,(x)) = k$  עבורה  $f \in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$  חום תהא משפט מהא של אזי קיימת  $a \in \mathcal{U}$  חום תהא  $arphi\left(a
ight)$  סביבה של  $\mathcal{W}\subsetarphi\left(\mathcal{O}
ight)$  סביבה של  $\mathcal{V}:\mathcal{V} o\mathbb{R}^m$  וכן  $arphi:\mathcal{O} o\mathbb{R}^m$  סביבה של  $f\left(a
ight)$  סביבה של  $g\left(a
ight)$ 

 $\mathcal{W}$  על  $\left(\psi\circ f\circ arphi^{-1}
ight)(x)=(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$  עבורם  $g\in C^{p-1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n
ight)$  אזי קיימת  $f\left(0
ight)=0$  הלמה של הדמר: תהא של  $f\left(0
ight)=0$  סביבה קמורה של  $f\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$  ותהא  $f\left(x
ight) = \sum_{i=1}^{n} x_{i} g\left(x
ight)$  וכן  $g\left(0
ight) = \nabla f\left(0
ight)$ 

a מביבה של מנוונת אזי קיימת  $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$  הלמה של מורס: יהי  $a\in\mathcal{U}$  ותהא ותהא  $f\in C^3\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$  סביבה של  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  יהי  $\left(f\circ g
ight)(x)-f\left(a
ight)=\sum_{i=1}^{k}x_{i}^{2}-\sum_{i=k+1}^{n}x_{i}^{2}$  המקיים  $g:\mathcal{O} o\mathbb{R}^{n}$  הנים  $\mathcal{O}:\mathcal{O}$  סביבה של  $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n}$  וגם  $\mathcal{O}:\mathcal{O}:\mathcal{O}$ 

 $P_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n] . a_i \leq x_i \leq b_i\}$  אזי  $a,b \in \mathbb{R}^n$  תיבה סגורה: יהיו

 $.P_{a,b}$  אזי  $\exists i \in [n] \,.a_i = b_i$  עבורם  $a,b \in \mathbb{R}^n$  אזי היי  $.\{\prod_{i=1}^n\left[t_i^{m_i},t_i^{m_i+1}
ight]\mid orall i\in[n].m_i\in[\ell_i-1]\}$  אזי  $[a_i.b_i]$  אזי  $\{t_i^0,\dots,t_i^{\ell_i}\}$  תהיינה  $i\in[n]$  תהיינה  $i\in[n]$  אזי  $i\in[n]$ 

. $\operatorname{Vol}(P) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Vol}(A_i)$  אזי P חלוקה של  $\{A_1, \dots, A_k\}$  ותהא  $a,b \in \mathbb{R}^n$  טענה: יהיו

. $\operatorname{Vol}\left(P_{a,b}
ight)=0$  אזי מנוונת  $P_{a,b}$  עבורם  $a,b\in\mathbb{R}^n$  הערה: יהיו

 $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}
ight\}
ight)=\sum_{j=1}^{k}f\left(x^{(j)}
ight)$  Vol $(A_{j})$  אזי עום רימן: יהיו  $a,b\in\mathbb{R}^{n}$  תהא  $a,b\in\mathbb{R}^{n}$  תהא תהא  $d\left(M
ight)=\sup_{x,y\in M}\|x-y\|$  אזי  $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$  קוטר קבוצה: תהא

 $A(\Pi)=\max_{i< i< k} d\left(A_i
ight)$  חלוקה אזי  $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^n$  מדד העדינות: יהיו

 $\int_{P}f\left(x
ight)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\left(\Pi
ight)
ightarrow0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}
ight)$  אזי  $f:P
ightarrow\mathbb{R}$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^{n}$  אינטגרביליות רימן: יהיו

 $f \in R\left(P
ight)$  אינטגרבילית רימן אזי  $f:P o\mathbb{R}$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^n$  סימון: יהיו

P טענה: תהא  $f \in R(P)$  אזי אוים חסומה על ענה: תהא

 $.\overline{S}\left(f,\Pi
ight)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{P_{i}}\left(f
ight)$  Vol $\left(P_{j}
ight)$  אזי אויף אויף אויף חסומה ותהא  $f:P o\mathbb{R}$  חסומה תיבה תהא חסומה ותהא  $\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{P_i}(f)\operatorname{Vol}(P_i)$  אזי חלוקה אזי  $\{A_1,\ldots,A_n\}$  חסומה ותהא  $f:P o\mathbb{R}$  תיבה תהא תיבה תהא טענה: תהא  $x^{(j)}$  נקודות חלוקה ויהיו  $f:P \to \mathbb{R}$  נקודות מתאימות אזי  $S(f,\Pi) \leq S(f,\Pi,\{x^{(i)}\}) \leq \overline{S}(f,\Pi)$ 

 $\underline{S}(f,\Pi_1) \leq \underline{S}(f,\Pi_2) \leq \overline{S}(f,\Pi_2) \leq \overline{S}(f,\Pi_1)$  איי חלוקות איי חסומה ותהיינה  $f:P o \mathbb{R}$  חסומה תיבה תהא P

```
.\overline{I}(f)=\inf_{\Pi}\overline{S}(f,\Pi) אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה אזי
                                                     \underline{I}(f)=\sup_{\Pi}\underline{S}(f,\Pi) אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה תיבה תיבה תחתון: תהא
                                  \underline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight)\leq\underline{I}\left(f
ight)\leq\overline{L}\left(f
ight)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight) אזי חלוקה אזי חסומה f:P	o\mathbb{R} תיבה תהא P תיבה תהא
                                                   I(f)=\overline{I}(f) \iff (f\in R(P)) איי חסומה f:P	o\mathbb{R} תיבה ותהא תיבה תהא P
                                                                                    .\int_{P}f=\underline{I}\left(f
ight)=\overline{I}\left(f
ight) אזי חסומה f\in R\left(P
ight) תיבה תהא מסקנה: תהא
                                                                                                    .\operatorname{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^n\operatorname{Vol}\left(P_{a,b}\right) אזי \lambda>0 ויהי a,b\in\mathbb{R} טענה: יהיו
                                           טענה: יהיו P_i וכן P_i וכן P_i תיבה אזי ווהיו והיו P_i וכן P_i תיבה אזי עבורן לכל i 
eq j מתקיים מענה: יהיו
                                                                                                                                                        \operatorname{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Vol}\left(P_i\right)
                                                                .\operatorname{Vol}\left(P
ight) \leq \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Vol}\left(P_{i}
ight) תיבה אזי P\subseteq igcup_{i=1}^{n}P_{i} תיבות תהא תיבות ותהא מסקנה: יהיו
                                                                                                                                     טענה: יהיו P_1 \cap P_2 תיבות אזי P_1, P_2 תיבה.
                                                                                                                                  .\operatorname{Vol}\left(P\backslash\operatorname{int}\left(P\right)\right)=0 תיבה תהא תיבה P תיבה הערה:
                      \sum_{i=0}^\infty {
m Vol}\,(P_i)<arepsilon וכן E\subseteq igcup_{i=0}^\infty P_i המקיימת \{P_i\}_{i=0}^\infty קיימות תיבות arepsilon>0 קיימות תיבות בורה לכל
                                                                                                                                           \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid זניחה E\}
                                                                                                                      \{a\}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) אזי a\in\mathbb{R}^n יהי\varnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight)
                                                                                                                   \bigcup_{i=0}^{\infty}E_{i}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) זניחות אזי \left\{ E_{i}
ight\} _{i=0}^{\infty} טענה: תהיינה
E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty \mathrm{Vol}\left(P_i
ight)<arepsilon וכן E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty \mathrm{int}\left(P_i
ight)המקיימת אוי (E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty \mathrm{int}\left(P_i
ight) המקיימת לכל פיימות תיבות E קיימות תיבות קיימת אוי (E אוי וכך אוי לכל פיימות תיבות אוי (E אוי וכך אוי לכל פיימות תיבות הא
\sum_{i=0}^n \mathrm{Vol}\left(P_i
ight) < arepsilon וכן E \subseteq igcup_{i=0}^n \mathrm{int}\left(P_i
ight) המקיימת \{P_i\}_{i=0}^n המקיימת אזי לכל arepsilon > 0 קיימות תיבות arepsilon > 0 המקיימת וכן
                                                                                                               A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי A\subseteq E ותהא ותהא E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) טענה: תהא
                                                                                        P 
otin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) עינה: P 
otin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight), תהא P \subseteq \mathbb{R}^n תיבה לא מנוונת אזי
                                                                                              M \notin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) עבורה פנימית נקודה פנימית אזי M \subseteq \mathbb{R}^n טענה: תהא
                                                                                                                                  .int (M)=arnothing אזי M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) מסקנה: תהא
                                                                                           \Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}
ight) אזי f\in C\left(P,\mathbb{R}
ight) תיבה ותהא P\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                       \Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}
ight) אזי f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי
טענה: תהא e_i\in\mathbb{N} עבור צלע אורך אורך אורך עבור \{C_i\}_{i=0}^\infty מתקיים פתוחה אזי קיימות קוביות פענה: עבור \{C_i\}_{i=0}^\infty
                                                                                                                                        \mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i וכן int (P_i) \cap \operatorname{int}(P_j) = \emptyset
                                                                                                                                 מסקנה: \mathbb{S}^{n-1} \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right), קבוצת קנטור זניחה.
                 \omega\left(f,a
ight)=\lim_{\delta	o0^+}\omega\left(f,B_\delta\left(a
ight)\cap A
ight) איי f:A	o\mathbb{R} תהא A\subseteq\mathbb{R}^n תהא A\subseteq\mathbb{R}^n תהא איי
                                                          A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n טענה: תהא
                            למה של קנטור: תהא K \in K. קומפקטית יהי K \in K. ותהא אK \in K. המקיימת K \in K. קומפקטית יהי K \in K.
                                                                                                                     \forall x \in K. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \omega (f, B_{\delta}(x) \cap K) < \omega_0 + \varepsilon
מתקיים \psi מתקיים אזי נאמר E\subseteq A ויהי וויהי \psi פרידיקט אזי נאמר כי \psi'' מתקיים כמעט על כלA\subseteq \mathbb{R}^n אם היימת A\subseteq \mathbb{R}^n
                                B_{f,arepsilon}=\{x\in P\mid\omega\left(f,x
ight)\geqarepsilon\} אזי arepsilon>0 אזי f:P	o\mathbb{R} תיבה סגורה תהא P\subseteq\mathbb{R}^n
                                                           . תיבה B_{f,arepsilon} אזי arepsilon>0 אזי חסומה f:P	o\mathbb{R} קומפקטית. P\subseteq\mathbb{R}^n אזי למה:
                                                           למה: תהא חלוקה ויהי הגורה תהא למה: תהא תיבה סגורה תהא אזי חלוקה ויהי אזי אזי תיבה סגורה תהא למה: תהא חלוקה ויהי P\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                 A: B_{f, \frac{1}{k}} 
otag A \in \Pi \mid \left(A \cap B_{f, \frac{1}{k}} 
eq \varnothing \right) \wedge \left(\omega\left(f, A\right) \geq \frac{1}{2k}\right) כיסוי של
קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא P\subseteq\mathbb{R}^n תיבה סגורה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה אזי f רציפה כמעט על כל
                                                                                                                                                                           (f \in R(P)) \iff (P)
                                                                                                                   קבוצה מדידת ז'ורדן: E \subseteq \mathbb{R}^n חסומה עבורה \partial E זניחה.
                                                                                                                                                        טענה: תהיינה E_1,E_2\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                                                                               . סגורה \partial E_1 \bullet
                                                                                                        \partial (E_1 \backslash E_2), \partial (E_1 \cup E_2), \partial (E_1 \cap E_2) \subseteq \partial E_1 \cup \partial E_2 \bullet
                                                                                                                                            J(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{J}(E)\} סימון:
```

 $A \backslash B, A \cup B, A \cap B \in J$  מסקנה: תהיינה  $A, B \in J$  מסקנה:

 $S(f,\Pi_1) \leq \overline{S}(f,\Pi_2)$  איזי חלוקות אזי  $f:P o \mathbb{R}$  מענה: תהא  $f:P o \mathbb{R}$  תיבה תהא

```
\chi_A\left(x
ight)=\left\{egin{array}{ll} 1&x\in A \ 0&x
eq A \end{array}
ight.כך \chi_A:\mathbb{R}^n	o\{0,1\} אזי A\subseteq\mathbb{R}^n אזי אניזיקטור: תהא
                                                                                                    .\chi_A\in C\left(\mathbb{R}^n\backslash A
ight) וכן \chi_A\in C\left(\mathrm{int}\left(A
ight)
ight) אזי A\subseteq\mathbb{R}^n וכן
אזי f\cdot \chi_A\in R(P) אזי f:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} אחומה ותהא A\subseteq P תיבה סגורה תהא P\subseteq\mathbb{R}^n אזי אינטגרביליות רימן:
                                                                                                                                                                                 \int_A f = \int_P f \cdot \chi_A
                                 טענה: תהא A\subseteq P_1,P_2 ותהא P_1,P_2\subseteq \mathbb{R}^n מיננה תהיינה חסומה תהיינה A\subseteq \mathbb{R}^n מענה: תהא
                                                                                                                             (f \cdot \chi_A \in R(P_1)) \iff (f \cdot \chi_A \in R(P_2)) \bullet
                                                                                                                                                           \int_{P_1} f \cdot \chi_A = \int_{P_2} f \cdot \chi_A \bullet
                                                                                            V\left(A
ight)=\mathrm{Vol}\left(A
ight)=\int_{A}\mathrm{d}x אזי A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) מידה/נפח של תיבה: תהא
                                                                                                                           משפט: תהא f,g\in R\left(A
ight) ותהיינה A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי
                                                                            .\int_{A}\left(af+bg
ight)=a\int_{A}f+b\int_{A}g וכך af+bg\in R\left(A
ight) אזי a,b\in\mathbb{R} יהיו
                                                                                                                                                      \int_{A} f \geq 0 גניח כי f \geq 0 אזי f \geq 0
                                                                                                                                                 \int_{A} f \geq \int_{A} g נניח כי f \geq g אזי f \geq g
                                                                                                      .m\mathrm{Vol}\,(A) \leq \int_A f \leq M\mathrm{Vol}\,(A) אזי m \leq f \leq M נניח כי
                                               f\in R (A\cup B) וכן f\in R (A\cap B) אזי f\in R (A\cap B) ותהא A,B\in J (\mathbb{R}^n) וכן
                                                                    \int_{A\cup B}f=\int_{A}f+\int_{B}f אזי \mathrm{Vol}\left(A\cap B
ight)=0 עבורן A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) מסקנה: תהיינה
                                               \exists c \in A. \int_A f = f\left(c\right) \mathrm{Vol}\left(A\right) אזי f \in C\left(A, \mathbb{R}
ight) תחום ותהא A \in J\left(\mathbb{R}^n
ight) יהי יהי
                                                                             |\int_A f| \leq \int_A |f| וכך |f| \in R(A) אזי f \in R(A) ויהי A \in J(\mathbb{R}^n) טענה: תהא
                                                                           \int_A f = \int_A g אזי A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) כמעט על כל f,g \in R(A) ותהיינה A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)
                                                                                                                     \int_{\mathrm{int}(A)}f=\int_{A}f=\int_{\overline{A}}f אזי A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) משפט: תהא
                                                                                               \bigcup_{i=1}^k A_i, igcap_{i=1}^k A_i \in J\left(\mathbb{R}^n
ight) אזי A_1 \dots A_k \in J\left(\mathbb{R}^n
ight) טענה: תהינה
           . Vol \left(igcup_{i=1}^k A_i
ight)=\sum_{i=1}^n 	ext{Vol}\left(A_i
ight) אזי 	ext{Vol}\left(A_i\cap A_j
ight)=0 מסקנה: תהיינה A_1\dots A_k\in J\left(\mathbb{R}^n
ight) עבורן לכל
                                                                             A \in J(\mathbb{R}^n) אזי A \in \mathbb{R}^n ותהא A \subseteq \mathbb{R}^n ותהא A \subseteq \mathbb{R}^n טענה: תהא
                                                                                                      \operatorname{Vol}\left(A
ight)=\operatorname{Vol}\left(A+a
ight) אזי a\in\mathbb{R}^n ותהא A\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: תהא

u = 	ext{Vol} אאי 
u : J\left([0,1]^n\right) = 1 אאי עבורה בונקציית נפח: תהא 
u : J\left(\mathbb{R}^n\right) 	o \mathbb{R}_{>0} אאי אינווריאנטית להזאות עבורה
                                                                         . חסומה T\left(A\right) אורתוגונלית ותהא חסומה אזי אורתוגונלית אורתוגונלית אורתוגונלית אורתוגונלית חסומה אזי T\in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n\right)
                                                                       T(\partial A)=\partial\left(T\left(A
ight)
ight) אזי איזי A\subseteq\mathbb{R}^n אורתוגונלית ותהא T\in\operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^n
ight) מסקנה: תהא
                                                מסקנה: T\left(E\right) זניחה וחסומה אזי אורתוגונלית ותהא T\left(E\right) אורתוגונלית ותהא T\left(E\right) אורתוגונלית ותהא
                              .\operatorname{Vol}\left(T\left(A\right)
ight)=\operatorname{Vol}\left(A\right) וכן T\left(A
ight)\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) איז A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אורתוגונלית ותהא T\in\operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)
                                                  משפט פוביני: תהיינה M_{P	imes Q} , עבורה תיבות ותהא עבורה P\subseteq\mathbb{R}^m , אזי קיים אזי משפט פוביני: תהיינה
                      \iint_{P	imes Q}f=\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y קיימים ובפרט \int_{P}\int_{Q}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
                               a\in P קיים כמעט לכל \int_{O}f\left(a,y
ight)\mathrm{d}y אזי f\in R\left(P	imes Q
ight) תיבות ותהא Q\subseteq\mathbb{R}^{m} ,P\subseteq\mathbb{R}^{n} מסקנה: תהיינה
f\in R\left(A
ight) ותהא A=\{(x,y)\in B	imes \mathbb{R}\mid arphi_{1}\left(x
ight)\leq y\leq arphi_{2}\left(x
ight)\} תהא arphi_{1},arphi_{2}:B	o \mathbb{R} ותהא מסקנה: תהא B\subseteq \mathbb{R}^{n-1}
                                                                                                                                                  .\int_{A}f=\int_{B}\int_{arphi_{1}(x)}^{-arphi_{2}(x)}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}y\mathrm{d}xאזי
y\in P_n כמעט לכל A\cap \left(\mathbb{R}^{n-1}	imes\{y\}
ight)\in J\left(\mathbb{R}^{n-1}
ight) תיבה אזי A\subseteq \prod_{i=1}^n P_i כמעט לכל A\in J\left(\mathbb{R}^n
ight)
                                                                                                                                       \operatorname{Vol}(A) = \int_{P_n} \operatorname{Vol}\left(A \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\}\right)\right) \mathrm{d}y
                                                                                                                                      S\left(D
ight)=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y אזי D\subseteq\mathbb{R}^{2} שטח: תהא
                                                                        m\left(D
ight)=\iint_{D}
ho\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y צפיפות אזי 
ho:\mathbb{R}^{2}	o\mathbb{R}_{\geq0} ותהא D\subseteq\mathbb{R}^{2} ותהא
                                                                                                             מומנט מסה: תהא \rho:\mathbb{R}^2	o\mathbb{R}_{\geq 0} ותהא ותהא מסה: תהא מסה:
                                                                                                        M_{x}\left(D
ight)=\iint_{D}y\cdot
ho\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y:x מומנט מסה לפי ציר
                                                                                                       M_x\left(D
ight)=\iint_D x\cdot
ho\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y:מומנט מסה לפי ציר \left(rac{M_y(D)}{m(D)},rac{M_x(D)}{m(D)}
ight) אזי D\subseteq\mathbb{R}^2 אזי D\subseteq\mathbb{R}^2 אזי E\subseteq\mathbb{R}^3 מרבז ההא E\subseteq\mathbb{R}^3 אזי E\subseteq\mathbb{R}^3 אזי לבח: תהא
                                                               m\left(E
ight)=\iiint_{E}
ho\left(x,y,z
ight) מסה: תהא E\subseteq\mathbb{R}^{3} ותהא E\subseteq\mathbb{R}^{3} ותהא ותהא E\subseteq\mathbb{R}^{3}
                                                                                                             מומנט מסה: תהא E\subseteq\mathbb{R}^3 ותהא מסה: תהא מומנט מסה: ותהא אוי
                                                                            M_{xy}\left(E
ight)=\iiint_{E}z\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z:\left\{z=0
ight\} מומנט מסה לפי המישור
```

```
M_{xz}\left(E
ight)=\iiint_{E}y\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z:\left\{ y=0
ight\} מומנט מסה לפי המישור
                                                                                                                                                                         M_{yz}\left(E
ight)=\iiint_{E}x\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z:\left\{x=0
ight\} מומנט מסה לפי המישור - \cdot\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xy}(E)}{m(E)}
ight) אזי D\subseteq\mathbb{R}^{2} אזי D\subseteq\mathbb{R}^{2} מקבילון: יהיו D=\{\sum_{i=1}^{n}lpha_{i}v_{i}\mid\forall i\in[n].lpha_{i}\in[0,1]\} אזי v_{1}\ldots v_{n}\in\mathbb{R}^{n}
                                                                                                                                                                                                             \operatorname{Vol}\left(\operatorname{Par}\left(v_1\dots v_n
ight)
ight) = \left|\det\left(egin{array}{c} -v_1 & -v_1 & -v_2 & -v_1 & -v_2 & -v
                                                                                                                                                                                                        \mathcal{L} = \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\} אוי איז f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אוי יהי
                                                                                                                                                       טענה: תהיינה A,B\subseteq\mathbb{R}^n פתוחות וחסומות יהי G:A	o B אזי פתוחות פתוחות ותהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 (ביחה) אניחה) אניחה). \varphi(E)
                                                                                                                                                                                                                               .((\operatorname{Vol}\left(\varphi\left(E\right)\right)=0)\wedge\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)) \longleftarrow ((\operatorname{Vol}\left(E\right)=0)\wedge\left(\overline{E}\subseteq A\right)) \ \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                                                             \varphi(E) \wedge (\overline{\varphi(E)} \subset B) \iff ((\overline{E} \subset A) \wedge (\overline{E} \subset A)) \bullet
(f\circ \varphi) |\det \mathcal{D}_{\varphi}| \in R(A) אזי f\in R(B) מסקנה: תהיינה G: A 	o B איזי וחסומות יהי G: A 	o B דיפאומורפיזם ותהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                \int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) |\varphi'| dt
```

טענה: תהיינה  $A,B\subseteq\mathbb{R}$  פתוחות וחסומות יהי G:A o B דיפאומורפיזם ותהא אזי  $f\in R$ ו ובפרט ובפרט  $A,B\subseteq\mathbb{R}$ 

המקיימת  $\psi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  המקיימת עבורו קיימת  $\psi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  המקיימת אזי קיימת אזי  $\varphi:A o B$  המקיימת ההיינה  $\varphi(x) = (x_1, \dots, \psi(x_i), \dots x_n)$ 

> טענה: תהיעה  $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי  $\varphi:A o B$  דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא  $\int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) \left| \det \mathcal{D}_{\varphi}(t) \right| dt$

 $f\in R(A)$  אזי אלמנטריים אלמנטריים איזי  $\psi:A o B$  , $\varphi:B o C$  אזי פתוחות וחסומות יהיו אלמנטריים  $A,B,C\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי  $\int_{C} f = \int_{A} f\left(\left(\varphi \circ \psi\right)(t)\right) \left| \det \mathcal{D}_{\varphi \circ \psi}(t) \right| dt$ 

טענה: תהיינה  $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי קיימת יהי  $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$  סביבה של וכן arphi:A o B דיפאומורפיזם ויהי  $\mathscr{O}$  על  $arphi=\psi_1\circ\ldots\circ\psi_m$  עבורם אלמנטריים אלמנטריים דיפאומורפיזים  $\psi_1\ldots\psi_m$ 

> אזי  $f\in R\left(B
> ight)$  אזי ותהא G:A o B אזי וחסומות יהי פתוחות וחסומות אזי אזי משפט: תהיינה  $\int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) \left| \det \mathcal{D}_{\varphi}(t) \right| dt$

 $f\in R\left(arphi\left(E
ight)
ight)$  ותהא  $\overline{E}\subseteq A$  ותהא עבורה  $E\subseteq A$  אסקנה: תהיינה G:A o B ותהא וחסומות יהי  $\int_{\varphi(E)} f = \int_E f(\varphi(t)) \left| \det \mathcal{D}_{\varphi}(t) \right| dt$  ובפרט ובפרט ( $f \circ \varphi$ ) ובפרט איי

משפט: תהיינה  $A \setminus E, S \setminus B$  פתוחות עבורן אניחות עבורן  $A \setminus E, S \setminus B$  פתוחות וחסומות תהא משפט: תהיינה  $A \setminus E, S \setminus B$  פתוחות וחסומות וחסומות וכך  $(f\circ arphi) |\det \mathcal{D}_arphi| \in R(Aackslash E)$  אזי איז איז איז איז איז דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על Aackslash E ותהא G(Aackslash E) במו כן G(Aackslash E) $\int_{B}f=\int_{A\setminus E}f\left( arphi\left( t
ight) 
ight) \left| \det\mathcal{D}_{arphi}\left( t
ight) 
ight| \mathrm{d}t$  ובפרט

אניחות עבורן  $S\subseteq B$  , $E\subseteq A$  אניחום תהיינה בעל דיפרנציאל חסום תהא arphi:A o B אניחות וחסומות תהא  $(f\circ\varphi)|\det\mathcal{D}_{arphi}|\in R(A)$  אזי  $f\in R(S)$  ותהא על Aackslash E כמו כן  $\varphi$  כמו כן  $\varphi$  כמו כן  $\varphi(Aackslash E)=Sackslash B$  פתוחות וכן  $\int_{B}f=\int_{A}f\left( arphi\left( t
ight) 
ight) \left| \det\mathcal{D}_{arphi}\left( t
ight) 
ight| \mathrm{d}t$  ובפרט

 $y = \rho \sin{(\phi)}$  וכן  $x = \rho \cos{(\phi)}$  עבורן  $(\rho, \phi) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi]$  אזי  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  וכן  $|\det\mathcal{D}_{arphi}\left(t
ight)|=
ho$  אזי לפולריות אוקלידיות מקואורדינטות מעבר מקואורדינטות ענה:  $arphi:\mathbb{R}^{2}
ightarrow\mathbb{R}^{2}$ 

 $y=
ho\sin{(\phi)}$  אזי  $x=
ho\cos{(\phi)}$  עבורן  $(
ho,\phi,\iota)\in(0,\infty] imes[0,2\pi] imes\{z\}$  אזי  $(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$  יהי יהי  $|\det\mathcal{D}_{arphi}\left(t
ight)|=
ho$  אזי אגליליות אוקלידיות מקואורדינטות מעבר מקואורדינטות ענה:  $arphi:\mathbb{R}^{2} o\mathbb{R}^{2}$ 

וכך  $x=
ho\sin\left( heta\right)\cos\left(\phi
ight)$  עבורן עבורן  $(
ho,\phi, heta)\in\left(0,\infty
ight] imes\left[0,2\pi
ight] imes\left[0,\pi
ight]$  אזי עבורן  $(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$  יהי  $z = \rho \cos(\theta)$  וכן  $y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$ 

 $|\det \mathcal{D}_{\omega}(t)|=
ho^2\sin{( heta)}$  אזי לכדוריות אוקלידיות מעבר מקואורדינטות מעבר מקואורדינטות מעבר  $arphi:\mathbb{R}^2 o\mathbb{R}^2$ 

. Vol  $(E)=2\pi\iint_S 
ho$ ליליות אזי אזי איז בקואורדינטות סיבוב S סיבוב איב פיבוב אזי ההא אור איז אזי איז איז איז איז איז איז אינה. מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה S סביב  $E\subseteq\mathbb{R}^3$  תהא  $f\leq g$  עבורן  $f,g:[a,b] o\mathbb{R}$  סביב ציר אזי

 $.Vol(E) = \pi \int_{a}^{b} (g^{2}(x) - f^{2}(x)) dx$ 

 $\operatorname{Vol}(E)=2\pi R_c\cdot\operatorname{Vol}(S)$  יהי  $S\subseteq\mathbb{R}^2$  יהי  $S\subseteq\mathbb{R}^2$  מרכז המסה של S ותהא משפט פאפוס: תהא  $S\subseteq\mathbb{R}^2$  יהי

 $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = E$  אזי  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי ז'ורדן מדידות סדרת קבוצות סדרת אזי וורדן אזי אינר  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  מיצוי ז'ורדן: תהא

```
\lim_{k	o\infty}\operatorname{Vol}\left(E_k
ight)=\operatorname{Vol}\left(E
ight) אזי E איזי E\in J\left(\mathbb{R}^n
ight) טענה: תהא E\in J\left(\mathbb{R}^n
ight) מיצוי ז'ורדן של
                                                               \lim_{k	o\infty}\int_{E_k}f=\int_Ef אזי f\in R\left(E
ight) מיצוי ז'ורדן של מיצוי מיצוי E\in J\left(\mathbb{R}^n
ight) אזי ההא מסקנה: תהא
וכן \forall k\in\mathbb{N}.f\in R מתקיים E מתקיים E מיצוי ז'ורדן של f:E	o\mathbb{R} ותהא ותהא E\subseteq\mathbb{R}^n אינטגרל לא אמיתי: תהא
                                                                                                                                                                                                              \int_E f = \lim_{k	o\infty}\int_{E_k} f קיים ושווה אזי \lim_{k	o\infty}\int_{E_k} f
טענה: תהא E\subseteq \mathbb{R}^n ומך אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן מיצוי t\in \mathbb{R} של f:E	o \mathbb{R} ותהא E\subseteq \mathbb{R}^n וכך
                                                                                                                                                                                                                                                              . קיים אזי \int_E f מתכנס \lim_{k 	o \infty} \int_{E_k} f
                                                                                                                                                                            \int_{\mathbb{R}^n}e^{-\|x\|^2}\mathrm{d}x=\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t
ight)^n=\pi^{rac{n}{2}} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי n\in\mathbb{N}_+
                                                                     משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא E\subseteq\mathbb{R}^n ותהיינה לאינטגרלים לא אמיתיים: עבורן f,g:E	o\mathbb{R} וכן
                                                                            . מתכנסים \int_{E}f,\int_{E}\left|f\right| מתכנס אזי \forall A\in\mathcal{P}\left(E\right)\cap J\left(\mathbb{R}^{n}\right).\left(f\in R\left(A\right)\right)\Longleftrightarrow\left(g\in R\left(A\right)\right)
                                                                                                                                       . מתכנס) ותהא f:E	o\mathbb{R} מתכנס) מתכנס: תהא ותהא ותהא ותהא ותהא ותהא ותהא ותהא
                                                                                                               . orall arepsilon > 0. orall A \subseteq E. \left| \int_A f \right| > rac{1}{2} \int_E |f| - arepsilon אזי f \in R\left( E 
ight) ותהא E \in J\left( \mathbb{R}^n 
ight)
\int_E |f|בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא f:E	o\mathbb{R} בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי לורדן ותהא משפט: תהא
                                                                   \int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g מתכנסים אזי \int_E f, \int_E g עבורן f,g:E	o \mathbb{R} ותהיינה E\subseteq \mathbb{R}^n טענה: תהא
                                                                                                                                                                                                                           . פתוחה E\subseteq\mathbb{R}^n מיצוי ז'ורדן פתוחה בעלת מיצוי ז'ורדן הערה:
משפט: תהיינה A,B\subseteq\mathbb{R}^n עבורה לכל E\subseteq B ז'ורדן וקומפקטית יהי להיינה G:B\to\mathbb{R} משפט: תהיינה היינה משפט
                                                                                                                                              \int_{B}f=\int_{A}f\left( arphi\left( t
ight) 
ight) \left| \det\mathcal{D}_{arphi}\left( t
ight) 
ight| \mathrm{d}t מתקיים f\in R\left( E
ight) וכן f\in R\left( E
ight) מתכנס אזי
                                                                                                                                                                                                             .\Gamma\left(t\right)=\int_{0}^{\infty}x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}xאיי היt>0יהי אמא: יהי פונקציית גאמא:
                                                                                                                                                                                                                                                     \Gamma(n)=(n-1)! אזי n\in\mathbb{N}_+ טענה: יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                          .טענה: יהי 0>0 אזי \Gamma(t) מתכנס
                                                                                                                                                                       B\left(t,s
ight)=\int_{0}^{\infty}x^{t-1}\left(1-x
ight)^{s-1}\mathrm{d}x אזי אי איז לא איית בטא: יהיו להיו בטא: יהיו
                                                            \int_a^b f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\in C\left([c,d]\right) \text{ אז } f\in C\left([a,b]\times[c,d]\right) טענה: תהא f\in C\left([a,b]\times[c,d]\right) אז f\in C\left([a,b]\times[c,d]\right) טענה: תהא f\in C\left([a,b]\times[c,d]\right) עבורה f\in C\left([a,b]\times[c,d]\right) אז f\in C\left([a,b]\times[c,d]\right)
                                                                                                                                                                                                                                                             \frac{d}{dt} \left( \int_a^b f(x,t) \, \mathrm{d}x \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} (x,t) \, \mathrm{d}x 
                                          משפט: תהא \alpha, \beta \in C^1\left(\left[c,d\right],\left[a,b\right]\right) ותהיינה \frac{\partial f}{\partial t} \in C\left(\left[a,b\right] \times \left[c,d\right]\right) אזי מתקיים \frac{d}{dt}\left(\int_{lpha(t)}^{eta(t)}f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\right) = f\left(eta\left(t\right),t\right)eta'\left(t\right) - f\left(lpha\left(t\right),t\right)lpha'\left(t\right) + \int_{lpha(t)}^{eta(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\left(x,t\right)\mathrm{d}x
                                                                                            .B\left(t,s\right) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)} ~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s>0~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~t,s=1~~\text{th}~~
                   \int \cdots \int_{\substack{x_1,\dots x_n \geq 0 \\ \sum x^{\gamma_i} < 1}} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1}\right) \mathrm{d}x_1\dots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \gamma_i} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{p_i}{\gamma_i}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\gamma_i}\right)} אזי \gamma_1\dots\gamma_n > 0 ויהיו p_1\dots p_n > 0 מסקנה: יהיו
                                                                                                                     טענה: יהיו p_1\dots p_n>0 ותהא \psi:[0,1]	o\mathbb{R} רציפה כמעט תמיד אזי \psi:[0,1]	o\mathbb{R} ותהא \psi:[0,1]	o\psi ותהא \psi:[0,1]	o\psi ותהא \int_{\Delta_n}\psi(x_1\dots x_n)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1}\right)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=\frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)}\int_0^1\psi\left(u\right)u^{(\sum p_i)-1}\mathrm{d}u
```