```
המקיימת \mathcal{F}\subseteq 2^\Omega המקיימת תהא \Omega המקיימת
                                                                                                                                                                  \Omega \in \mathcal{F} \bullet
                                                                                                                                                   \forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \bullet
                                                                                                                  .\bigcup E \in \mathcal{F} בת מנייה מתקיים E \subseteq \mathcal{F} לכל
                                                                                                                                 \varnothing\in\mathcal{F} אזי \sigma אלגברה אזי\sigma למה: תהא
                                                                                          A \cap E \in \mathcal{F} אזי אזי B \subset \mathcal{F} בת מנייה אזי \sigma
                                                                                             \Omega מעל מעל הינה אלגברה מעל \mathcal F הינה אלגברה מעל מעל \sigma
         \mu\left(\biguplus_{i=1}^nB_i
ight)=\sum_{i=1}^n\mu\left(B_i
ight) פונקציה אדטיבית: פונקציה \mu:\mathcal{A}	o\mathbb{R} המקיימת לכל בונקציה ארטיבית: פונקציה \mu:\mathcal{A}	o\mathbb{R}
                                                                                        . אדטיבית \mu:\mathcal{F} 	o [0,\infty] אזי אלגברה תהא אדטיבית אלגברה אלגברה אזי
       \mu(igoplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) מתקיים מתקיים אזרות \{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A} המקיימת לכל \mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R} המקיים פונקציה \sigma-אדטיבית: פונקציה
                                                                             . אדטיבית: תהא \sigma \mu:\mathcal{F} 	o [0,\infty] אזי מידה על \sigma אדטיביה: תהא
                                                                                                             (\Omega, \mathcal{F}) אזי \Omega אזי מרחב מדיד: תהא \sigma \mathcal{F} אזי מרחב
                                                                                                          E \in \mathcal{F} אזי \Omega אזי אזירה: תהא \sigma אזי האזי מדידה: אזי
                                                                                .\mu\left(arnothing
ight)=0 אזי \exists E\in\mathcal{F}.\mu\left(E
ight)>0 המקיימת \mathcal{F} המקיימת \mu מידה על
                                                                                                         . אדטיבית \mu אזי \mathcal F אזי מעל \sigma־אלגברה מעל מידה \mu
                                                                             \mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right) אזי A\subseteq B עבורן A,B\in\mathcal{F} למה: תהא \mu מידה ותהיינה
                                                                                             סדרת קבוצות מונוטונית: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A}:\mathbb{N} 
ightarrow \mathcal{A} אזי
                                                                                                               \forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1} שונוטונית עולה חלש: •
                                                                                                              \forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n מונוטונית יורדת חלש: •
                                                                                   \sup\left(A
ight)=igcup_{i=0}^{\infty}A_{i} אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A} קבוצה ותהא
                                                                                   \inf\left(A
ight)=igcap_{i=0}^{\infty}A_{i} אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A} קבוצה ותהא
                                                          \limsup_{n	o\infty}A_n=igcap_{n=0}^\inftyigcup_{i=n}^\infty A_i אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא קבוצה ותהא אזי לייון: תהא
                                                          \liminf_{n	o\infty}A_n=igcup_{n=0}^\inftyigcap_{i=n}^\infty A_i אזי איזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא קבוצה ותהא A:\mathbb{N}	o\mathcal{A}
        \lim_{n \to \infty} A_n = \liminf_{n \to \infty} A_n אזי \lim\inf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n עבורה A: \mathbb{N} \to \mathcal{A} אזי A: \mathbb{N} \to \mathcal{A}
                  \lim_{n \to \infty} \mu\left(A_n
ight) = \mu\left(B
ight) אזי \lim_{n \to \infty} A_n = B עבורה A: \mathbb{N} 	o \mathcal{F} ותהא לגברה \sigma־אלגברה מעל מידה מעל
                                                              (\Omega, \mathcal{F}, \mu) אזי איזי \mathcal{F} מידה \mu מידה מעל \Omega ותהא א אלגברה \sigmaראלגברה אלגברה
                                                   \mathbb{P}\left(\Omega
ight)=1 המקיימת \mathcal{F}:\mathcal{F}	o[0,\infty] האי מידה \sigma אזי מידה מעל \sigma המקיימת מידת הסתברות: תהא
                                                                                         מרחב הסתברות: מרחב מידה (\Omega, \mathcal{F}, \mu) עבורו \mu מידת הסתברות.
                                                                                                        \Omega אזי אזי \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} מרחב הסתברות אזי \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}
                                                                                                             E \in \mathcal{F} מרחב הסתברות אזי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מאורע: יהי
                                                                                                      \mathcal{F} אזי אחב הסתברות מרחב (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) יהי
A+b\subseteq (0,1] באשר b\in (0,1] אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות b\in (0,1] עבורו לכל A\subseteq (0,1] עבורו לכל
                                                                                                                                                          \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A+b)
                                                                  . טענה: לכל מרחב הסתברות ((0,1],2^{(0,1]},\mathbb{P}) לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.
                                                                                      . \forall x \in A. \exists arepsilon > 0. \, (x-arepsilon, x+arepsilon) \subseteq A עבורה עבורה אבוצה פתוחה: A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                                                            קבוצה סגורה: A\subseteq\mathbb{R} עבורה A^{\mathcal{C}} פתוחה.
                                                                 \Omega מעל \sigma הינה \sigma הינה הינה חינה מעל מעל מעל מעל בראות מעל \sigma
   \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i כל ה\sigma־אלגבראות מעל \mathbb{R} המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי \{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} כל ה\sigma-אלגבראות מעל מעל אויינה בורלית מעל
                                                                                                                                                   B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} :קבוצה בורלית
```

אלגברה: תהא  $\Omega$  קבוצה אזי  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  המקיימת

. | או סופית מתקיים  $E\subseteq\mathcal{F}$  לכל סופית סופית

 $A \cap E \in \mathcal{F}$  אוזי סופית אזי ההא למה: תהא אלגברה ותהא למה:

 $\Omega \in \mathcal{F} \bullet$ 

 $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \bullet$ 

 $\varnothing \in \mathcal{F}$  אלגברה אזי  $\mathcal{F}$  אלגברה

```
\mathfrak{B}_{(0,1]}=\{B\cap(0,1]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}: (0,1] אלגברה בורלית מעל\sigma
                                                                               A(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i-a_i\right)\mid B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i,b_i\right)
ight\} אזי B\in\mathfrak{B} מידת לבג: תהא
                                                                                                                . מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות מרחב ((0,1],\mathfrak{B}_{(0,1]},\lambda) :
                                                                                                                                       A:=\mathbb{R} מרחב אחיד על A:=\mathbb{R} עבור A:=\mathbb{R} אזי
\sigma(\mathcal{T})=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i אזי \mathcal{T} אזי אויי המכילות מעל \Omega המכילות מעל \Omega המכילות את \mathcal{T} אזיי \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega ותהיינה \mathcal{T} ותהיינה \mathcal{T} בל ה\sigma-אלגברה נוצרת:
                                                                                            \mathcal{T} אזי \sigma(\mathcal{T}) אזי אלגברה הלגברה הנוצרת: תהא \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega אזי אלגברה הנוצרת
                                                               נסמן lpha+1 נסמן, לכל סודר עוקב \mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\} נסמן לכל סודר עוקב \Omega נסמן lpha+1
באשר \sigma\left(\mathcal{T}
ight)=\mathcal{F}_{\omega_{1}} איי איז \mathcal{F}_{\lambda}=igcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha} נסמן \lambda נסמן \mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{igcap_{n=1}^{\infty}A_{n}\mid A_{n}\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}
                                                                                                                                             . הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה \omega_1
    . orall A \in \sigma \left( \mathcal{T} 
ight). \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A אזי orall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A טענה: תהא orall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A ויהיו \mathcal{T} \subseteq 2^\Omega ויהיו
                            A : \mathcal{A} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1} [B] \in \mathcal{F} עבורה X: \Omega \to \mathbb{R} אזי משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות אזי
                                                                                                 A : \forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.arphi^{-1}\left[B
ight] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} המקיימת arphi: \mathbb{R} 	o \mathbb{R} בונקציה מדידה בורל:
                            \mathbb{P}_X\left(B
ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B
ight]
ight) כך \mathfrak{P}_X:\mathfrak{B}_\mathbb{R}	o\mathbb{R} מרחב הסתברות ויהי X:\Omega	o\mathbb{R} מ"מ נגדיר מ"מ נגדיר מ"מ מרחב
                                                        . מרחב הסתברות (\mathbb{R},\mathfrak{B}_\mathbb{R},\mathbb{P}_X) מייה מ"מ אזי X:\Omega 	o \mathbb{R} ויהי מחבר הסתברות (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות יהי
                                                                                                                                          טענה: תהא A,B\subseteq\mathbb{R} ותהיינה f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} אזי
                                                                                                                                                  f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \bullet
                                                                                                                                                  f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \bullet
                                                                                                                                                                       f^{-1}[A^{\mathcal{C}}] = f^{-1}[A]^{\mathcal{C}} \bullet
                                       \mathbb{R} טענה: יהי \{E\subseteq\mathbb{R}\mid X^{-1}\left[E
ight]\in\mathcal{F}\} אזי X:\Omega	o\mathbb{R} אזי מרחב מדיד ותהא מעל מענה: יהי
                                   (\forall t \in \mathbb{R}.X^{-1} \, [(-\infty,t)] \in \mathcal{F}) \Longleftrightarrowמשפט: יהי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות ותהא X:\Omega \to \mathbb{R} אזי ותהא
        \sigma(X)=\sigma\left(\left\{X^{-1}\left[B
ight]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}
ight\}
ight) אזי \left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}
ight) אזי \sigma(X)=\sigma(X) מ"מ על מרחב הסתברות \sigma(X)=\sigma(X)
                                                                                                                          (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) טענה: יהיו X,Y מ"מ על מרחב הסתברות מ"מ אזי
                                                                                                                                                                        יהי cX אזי c\in\mathbb{R} מ"מ. ullet
                                                                                                                                                                                         .מ"מ X+Y
                                                                                                                                                                                               .מ"מ XY
                                                                                                                                       מ"מ. f\circ X אזי (\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu) מ"מ. \bullet
                                                                                                          . פתוחה f^{-1}\left[\mathcal{U}
ight] פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R} פתוחה f\in C\left(\mathbb{R}
ight) פתוחה \mathcal{U}
```

 $F_X(t)=\mathbb{P}\left(X\leq t
ight)$  המקיימת המטברת (פה"מ): יהיX מ"מ על מרחב הסתברות ( $\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$ ) אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$  המקיימת מטברת (פה"מ): יהי

למה: תהא  $\mathcal{F}\subseteq 2^\Omega$  סגורה להפרשים וסגורה לחיתוכים סופיים עבורה  $\Omega\in\mathcal{F}_0$  ותהא חבוצה עבורה להפרשים וסגורה לגבולות

. supp  $(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid \forall \varepsilon>0.\mathbb{P}\,(t-\varepsilon< X< t+\varepsilon)>0\}$  תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי מ"מ אזי supp  $(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid \forall \varepsilon>0.\mathbb{P}\,(t-\varepsilon< X< t+\varepsilon)>0\}$  טענה: יהי X מ"מ אזי ואי הקבוצה הסגורה המינימלית ב־ $\mathbb{R}$  עבורה supp (X)

 $\mathbb{R}$  טענה:  $\sigma$ ־אלגברה בורלית הינה  $\sigma$ ־אלגברה מעל

 $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$  מסקנה: תהא  $f\in C\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי איי  $f\in C\left(\mathbb{R}
ight)$ 

 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$  טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות

 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$  משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עבורם

 $(\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y) \Longleftrightarrow (F_X = F_Y)$  מיימ אזי X,Y טענה: יהיו

 $\mathbb{P}\left(X=t
ight)>0$  אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי  $t\in\mathbb{R}$  המקיים  $A_X=\{t\in\mathbb{R}\mid X$  אטום של  $t\}$  אטום יהי X מ"מ אזי אוי קבוצת האטומים: יהי t

 $\lim_{t \to \infty} F_X\left(t\right) = 1$  •  $\lim_{t \to -\infty} F_X\left(t\right) = 0$  • מונוטונית עולה.  $F_X$  •

 $\lim_{t\to a^+} F_X(t) = F_X(a) \bullet$ 

 $\sigma\left(\mathcal{F}_{0}
ight)\subset\mathcal{F}$  אזי אינסופיים עבורה  $\mathcal{F}_{0}\subset\mathcal{F}$ 

 $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{F}$  אוי הפתוחות אזי המכילה את את המכילה מעל המכילה אזי  $\sigma$ 

A איז  $\{E\cap A\mid E\in\mathcal{F}\}$  איז אונברה מעל  $\Omega$  ותהא הינה  $\sigma$  אלגברה מעל  $\sigma$  איז אינה: תהא  $\sigma$ 

```
משתנה מקרי בציף: משתנה מקרי A < b עבורו קיימת פונקציית צפיפות עבורה לכל a < b מתקיים משתנה מקרי משתנה מקרי A
                                                                                                                                            \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx
                                                                                                      X סימון: יהי א מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של
                                                                                                       .(\mathbb{P}\left(X\in A_X\right)=0)\Longleftrightarrowטענה: יהי X מ"מ אזי (X רציף)
                                                                0 < \mathbb{P}\left(X \in A_X
ight) < 1 הערה: לא כל משתנה מקרה הוא בדיד או רציף, ובמקרה הא
                                                                                                                                                  טענה: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                                                                                                    \mathbb{P}\left(X=t
ight)=0 יהי t\in\mathbb{R} יהי •
                                                                                                                                         .F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) \, \mathrm{d}x \bullet
                                                                      .F_{X}^{\prime}\left(a
ight)=f_{X}\left(a
ight) אזי f_{X}\in C\left(a
ight) עבורה a\in\mathbb{R} עבורה מ"מ רציף ותהא X
                  .F_{X}\left(x_{n}
ight)=p המקיים x_{n}\in\mathbb{R} אזי אזי p\in\left(0,1
ight) ויהי ויהי F_{X}=1 עולה ממש עד אשר עד אשר אשר ויהי ויהי F_{X}
                                                        x_p = \sup \{t \mid F_X(t) \leq p\} אזי p \in (0,1) עולה ויהי עבורו F_X מ"מ עבורו היים: יהי יהי
טענה: תהא \lim_{x \to \infty} F\left(x
ight) = 1 מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה \lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 1 וכן \lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 1 איז קיים מ"מ X על
                                                                                                                          F_X = F עבורו (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות
                         אזי \lim_{x \to \infty} F\left(x\right) = 1 וכן \lim_{x \to -\infty} F\left(x\right) = 0 אזי אונוטונית עולה רציפה מימין עבורה F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} אזי F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}
                                                                                                                                            X^{\star}(s) = \sup\{t \mid F(t) \leq s\}
                 טענה: תהא \lim_{x	o\infty}F\left(x
ight)=1 וכן \lim_{x	o-\infty}F\left(x
ight)=0 מיימ על הציפה מימין עבורה F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} וכן F:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
                                                                                                                                                             .((0,1),\mathfrak{B}_{(0,1)},\lambda)
       .F_{X^\star}=F אזי \lim_{x	o\infty}F\left(x
ight)=1 וכן \lim_{x	o\infty}F\left(x
ight)=0 איזי אונוטונית עולה רציפה מימין עבורה F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה
                  \mathbb{P}\left(X_n=k
ight) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}\left(X=k
ight) אזי k \in \mathbb{N} אזי מ"מ יהי X \sim \mathrm{Poi}\left(\lambda
ight) מ"מ יהי X_n \sim \mathrm{Bin}\left(n, rac{\lambda}{n}
ight) יהי \lambda > 0 יהי \lambda > 0
t אמן, עד אמן שקרו שקרו שקרו בלתי תלויים מספר את סופר את המ"מ המ"מ כך אלכל אוליים שקרו עד אמן כך אלכל אוליך t\in\mathbb{R}_+ כך שלכל אוליים שקרו עד אמן מספר האירועים בלתי תלויים שקרו עד אמן אוליך פואסון: משתנים מקריים בלתי תלויים שקרו עד אמן
                                                                     . בפרט אירועים ליחידת ממוצע אירועים \lambda באשר אN_{t+s}-N_s\sim\operatorname{Poi}\left(\lambda t\right) וכן וכן N_0=0
                                                   \mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a
ight)=\mathbb{P}\left(X>b
ight) אזי a,b>0 ויהיו X\sim \mathrm{Exp}\left(\lambda
ight) יהי \lambda>0 יהי \lambda>0
                     X\sim 	ext{Exp}\left(\lambda
ight) עבורו איי קיים \lambda>0 איי קיים \forall a,b>0.\mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a
ight)=\mathbb{P}\left(X>b
ight) עבורו
                                                           \operatorname{Exp}\left(\lambda\right) אמן מתפלג ופעים ליחידת אמן עם קצב \lambda מופעים ליחידת מתפלג של סענה: הזמן הבינמופעי של
                                                   .f_{arphi\circ X}\left(t
ight)=rac{f_X\left(arphi^{-1}(t)
ight)}{arphi'(arphi^{-1}(t))} אזירה אזי arphi על, עולה ממש וגזירה אזי arphi:\mathbb{R}	o\mathbb{R} ותהא arphi:\mathcal{R}	o\mathbb{R}
                                              f_{arphi\circ X}\left(t
ight)=-rac{f_X\left(arphi^{-1}(t)
ight)}{arphi'\left(arphi^{-1}(t)
ight)} איז מ"מ רציף ותהא arphi:\mathbb{R}	o\mathbb{R} על, יורדת ממש וגזירה אזי מ"מ רציף ותהא
                                                                                           X^{-} = \min \{X, 0\} , X^{+} = \max \{X, 0\} מ"מ אזי מ"מ אזי
                                                                                               \mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{c \in A_{X}} c \cdot \mathbb{P}\left(X = c\right) אזי בדיד מ"מ Xיהי יהי תוחלת: יהי
                                                                                                       \mathbb{E}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[X^{+}
ight]+\mathbb{E}\left[X^{-}
ight]טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי
                                                                                                      משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו שוני. מימ סופי.
                                               A : \mathbb{R} אזי משתנה מקרי סימטרי: יהי A \in \mathbb{R} אזי מ"מ A \in \mathbb{R} אזי מ"מ A \in \mathbb{R} משתנה מקרי סימטרי: יהי
                                                                       \mathbb{E}\left[X
ight]=a אזי a\in\mathbb{R} אינטגרבילי סימטרי מ"מ בדיד מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מיים a\in\mathbb{R}
                                         \mathbb{E}\left[aX+b
ight]=a\mathbb{E}\left[X
ight]+b טענה לינאריות התוחלת: יהיו a,b\in\mathbb{R} ויהי a,b\in\mathbb{R} טענה לינאריות
                                                                                        X < X משתנה מקרי שולט: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט על אם משתנה מקרי שולט:
                                                                                 \mathbb{E}\left[X
ight]>\mathbb{E}\left[Y
ight] אזי בדידים אזי X>Y יהיו אינה מונוטוניות התוחלת: יהיו
                                                                                                                                                        תוחלת: יהי X מ"מ אזי
                                                                                          \mathbb{E}[X^+] = \sup \{ \mathbb{E}[Y] \mid (0 \le Y \le X^+) \land (מ"מ בדיד Y) \} \bullet
                                                                                   \mathbb{E}[X^-] = -\sup\{\mathbb{E}[Y] \mid (0 \le Y \le -X^-) \land (מ"מ בדיד Y)\}
```

 $|A_X| \leq leph_0$  טענה: יהיX מ"מ אזי

 $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-] \bullet$ 

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו  $\mathbb{E}\left[X
ight]$  סופי.

 $\mathbb{E}\left[X
ight] \geq \mathbb{E}\left[Y
ight]$  מ"מ אזי  $X \geq Y$  טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו

 $\mathbb{E}\left[aX+b
ight]=a\mathbb{E}\left[X
ight]+b$  אינטגרבילי איז  $a,b\in\mathbb{R}$  ויהי  $a,b\in\mathbb{R}$  טענה לינאריות התוחלת: יהיו

 $\mathbb{P}\left(X\in A_X
ight)=1$  משתנה מקרי משתנה משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי

 $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x
ight)\mathrm{d}x=1$  וכן  $f\geq0$  וכן המקיימת למקוטעין רציפה למקוטעין רציפה למקוטעין וכן רציפה למקוטעין פונקציית אפיפות:

```
\mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{-\infty}^{\infty}tf_{X}\left(t
ight)\mathrm{d}t מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                          F_Y \geq F_X משתנה מקרי שולט סטוכסטית: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט סטוכסטית על אם
                                                                                  X טענה: יהיו X,Y מ"מ עבורם Y = 1 אזי אוי \mathbb{P}(Y < X) = 1 מ"מ עבורם X,Y טענה: יהיו
                                                                                                                                                                           טענה: יהיו X,Y מ"מ
                                                                                                                   \mathbb{E}\left[Y\right] \leq \mathbb{E}\left[X\right] אזי Y אט סטוכסטית שולט X •
                                                                                                                                  \mathbb{E}\left[Y
ight] \leq \mathbb{E}\left[X
ight] אזי \mathbb{P}\left(Y \leq X
ight) = 1 אם ullet
                                                                                                                                   \mathbb{E}\left[X+Y\right]=\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[Y\right] :חיבוריות
                                                                 \mathbb{P}\left(X\geq b
ight)\leq rac{\mathbb{E}[X]}{b} אזי b>0 אינטגרבילי ויהי X\geq 0 מ"מ אינטגרבילי יהי
                                         \mathbb{E}\left[arphi\circ X
ight]=\sum_{c\in A_X}arphi\left(c
ight)\cdot\mathbb{P}\left(X=c
ight) אינ מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא arphi מדידה בורל אזי
                                                                 \mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(t\right)f_{X}\left(t\right)\mathrm{d}t אזי למקוטעין עיפה רציפה ותהא ערביף ותהא מ"מ מ"מ אזי מינה: יהי ענה:
                                                                                                                           \mathbb{E}\left[X
ight] = \int_{0}^{1} X^{\star}\left(t
ight) \mathrm{d}t טענה: יהי X מ"מ חסום אזי
                                                                                                \mathbb{E}\left[X
ight]=\lim_{arepsilon	o0}\int_0^{1-arepsilon}X^\star\left(t
ight)\mathrm{d}t טענה: יהי X מ"מ חסום מלרע אזי \mathbb{E}\left[X
ight]=\lim_{arepsilon	o0}\int_{0+arepsilon}^1X^\star\left(t
ight)\mathrm{d}t אזי אזי חסום מלעיל אזי מ"מ חסום מלעיל אזי
                                                                                                    .\operatorname{Var}\left(X
ight)=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)^{2}
ight] שונות: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי
                                                                                                             \sigma\left(X
ight)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X
ight)} אינטגרבילי אזי מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מיטיית תקן: יהי
                                                                                                       .Var (X)=\mathbb{E}\left[X^2
ight]-\mathbb{E}^2\left[X
ight] אזי מ"מ אינטגרבילי איזי מ"מ מ"מ אינטגרבילי
                                                                                  .\operatorname{Var}\left(aX+b\right)=a^{2}\operatorname{Var}\left(X\right) אזי a,b\in\mathbb{R} ויהיו מ"מ אינטגרבילי מ"מ X מ"מ
                                 \mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}\left[X
ight]|\geq a
ight)\leq rac{	ext{Var}(X)}{a^2} אזי a>0 אזי מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי a>0
                                                                    M_{X}\left(t
ight)=\mathbb{E}\left[e^{tX}
ight] המוגדרת M_{X}:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R} מ"מ אזי X יהי היי מומנטים: יהי
                                                                 M_{X}^{(n)}\left(0
ight)=\mathbb{E}\left[X^{n}
ight] אזי M_{X}\in C^{n}\left(I
ight) וכן 0\in I אזי קטע עבורו מ"מ מ"מ ויהי X
                                    n\in\mathbb{N} מתכנס לכל \mathbb{E}\left[\left|X
ight|^{n}
ight] אזי אזי I מתכנס לכל וכן וכן 0\in I וכן שנה: יהי X מ"מ ויהי מ"מ ויהי
                                                M_X\left(t
ight)=\sum_{n=0}^{n}rac{t^n\mathbb{E}[X^n]}{n!} אזי \left(-arepsilon,arepsilon
ight) איז \left(-arepsilon,arepsilon
ight) איז איז \left(-arepsilon,arepsilon
ight) עבורו M_X\left(t
ight) קיים וסופי על
\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i כל ה\sigma־אלגבראות מעל \mathbb{R}^n המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי \{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} כל ה\sigma-אלגבראות מעל מעל מעל החינה בורלית מעל
                                 A : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} משתנה מקרי X: \Omega \to \mathbb{R}^n עבורה הסתברות אזי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב היי משתנה מקרי מימדי: יהי
             X: \Omega \to \mathbb{R}^n. משפט: יהי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות ותהא X: \Omega \to \mathbb{R}^n אזי X: \Omega \to \mathbb{R}^n משפט: יהי
                    \mathbb{P}_X\left(B
ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B
ight]
ight) כך \mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}	o\mathbb{R}^n סימון: יהי \Omega	o\mathbb{R}^n כך על היי \Omega	o\mathbb{R}^n מרחב הסתברות ויהי
                                              . מרחב הסתברות (\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n},\mathbb{P}_X) מ"מ איז X:\Omega 	o \mathbb{R}^n מרחב הסתברות (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות ייהי
                                         המקיימת F:\mathbb{R}^n 	o [0,1] אזי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מ"מ n־מימדי איז מ"מ משותפת: יהי X מ"מ משותפת: יהי איז מ"מ מ
                                                                                                                                               F_X(t) = \mathbb{P}\left(X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n\right)
                                                                                                                                                     טענה: יהי (X,Y) מ"מ דו־ערכי אזי
                                                                                                                              \lim_{k \to -\infty} F_{X,Y}\left(k,\ell
ight) = 0 יהי \ell \in \mathbb{R} יהי
                                                                                                                              \lim_{\ell \to -\infty} F_{X,Y}(k,\ell) = 0 אזי k \in \mathbb{R} יהי
                                                                                                                                           \lim_{\ell \to \infty} \lim_{k \to \infty} F_{X,Y}(k,\ell) = 1 \bullet
                                                                   \lim_{k\to p^+}\lim_{\ell\to q^+}F_{X,Y}\left(k,\ell
ight)=F_{X,Y}\left(p,q
ight) אזי p,q\in\mathbb{R} רציפות מימין: יהיו
F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{2}
ight)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{1}
ight)\geq F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{1}
ight)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{2}
ight) איזי \ell_{1}<\ell_{2} איזי אויך איזי אוים מ"מ דו־ערכי ויהיו k_{1}<\ell_{2} וכך k_{1}<\ell_{2} איזי איזי מ"מ דו־ערכי ויהיו
                                                                                          \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ X,Y
```

 $\mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{0}^{\infty}\left(1-F_{X}\left(t
ight)
ight)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\left(0-F_{X}\left(t
ight)
ight)\mathrm{d}t$ טענה נוסחת הזנב: יהי

פונקציית התפלגות מצטברת שולית: יהי מצטברת מצטברת אזי אזי פונקציית התפלגות מצטברת התפלגות מצטברת אולית:

 $(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)\Longleftrightarrow (F_X=F_Y)$  אזי X,Y מענה: יהיו מ"מ n־מימדיים אזי X,Y

 $.F_X(t) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(t,y) \bullet$ 

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי  $X_i$  מ"מ חד־מימדי משתנה מקרי שולי: יהי X מ"מ  $\alpha$ ־מימדי אזי  $X_i$ 

 $.F_Y(t) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,t) \bullet$ 

 $\mathbb{.P}\left(X=a\right)>0$ עבורו  $a\in\mathbb{R}^{n}$  אזי מ"מ T מ"מ מ"מ יהי איום: יהי איום

 $A_X = \{t \in \mathbb{R}^n \mid X$  אטום של אזי t מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ אזי קבוצת האטומים: יהי

```
F_X\left(a
ight)=\int_{-\infty}^{a_{p(n)}}\dots\int_{-\infty}^{a_{p(n)}}f_X\left(x_1\dots x_n
ight)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n עבורה אזי p:[n]	o [n] תמורה אזי p:[n]	o [n] אזי f_X\in X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X ותהא f_X\in C\left(a\right) עבורה f_X עבורה f_X עבורה f_X אזי f_X אזי f_X אזי f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X ותהא f_X עבורה f_X עבורה f_X אזי f_X אזי f_X מ"מ f_X מ"מ f_X וותהא f_X אונים f_X עבורה f_X עבורה f_X עבורה f_X עבורה f_X אזי f_X פרי f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X פרי f_X מ"מ f
                                                                                                                                                                                                           i \in [n] טענה: יהי X מ"מ ח־מימדי רציף אזי מ"מ מ"מ מ"מ מ
                                                                                                                                                                                                                                       פונקציית צפיפות שולית: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                            f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,y) \, \mathrm{d}y \quad \bullet
f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t) \, \mathrm{d}x \quad \bullet
                                                                                                                                                                 \mathbb{P}\left(X\in B
ight)=\int_{B}f_{X} אזי B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}} ותהא רציף ותהא T מ"מ T מ"מ מ"מ מ"מ מימדי רציף ותהא
                                                                                                                                                                           A : \forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.arphi^{-1}\left[B
ight] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} המקיימת arphi: \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} בורל:
                                                                                                                                 . טענה: יהי \varphi\left(X\right) מזידה בורל מדידה \varphi:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}ותהא חד־מימדי מ"מ מ"מ מ"מ מימר יהי ענה: יהי מימדי מימדי ותהא
                                                                                                                                                             f_{X+Y}\left(s
ight)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,s-x
ight)\mathrm{d}x מסקנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי
                                                                                                                                                                    טענה: יהי X מ"ם המימדי ותהא \varphi:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} בורלית רציפה למקוטעין אזי מינה: יהי
                                                                                                                                                                                        \mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x_{1} \dots x_{n}\right) f_{X}\left(x_{1} \dots x_{n}\right) dx_{1} \dots dx_{n}
                                                                    .Cov [X,Y]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)\left(Y-\mathbb{E}\left[Y
ight]
ight)
ight] אותו מרחב הסתברות משותפת: יהיו X,Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות אזי
                                                                                                                                      . Cov [X,Y]=0 משתנים בלתי מתואמים: X,Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות מתואמים:
                                                                                 .
ho_{X,Y}=rac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)} מקדם מתאם: יהיו X,Y מ"מ אזי X,Y משפט אי־שיוויון קושי־שוורץ: יהיו X,Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי X,Y יהיו X,Y יהיו X,Y משפט אי־שיוויון קושי־שוורץ: יהיו
                                 \mathbb{E}\left[XY
ight]^2=\mathbb{E}\left[X^2
ight]\mathbb{E}\left[Y^2
ight]
ight)\Longleftrightarrow (\exists c\in\mathbb{R}.\mathbb{P}\left(Y=cX
ight)=1
ight) מסקנה: יהיו X,Y מים בעלי מומנט ראשון ושני אזי

ho_{X,Y} \in [-1,1] מסקנה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           מסקנה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                                                                                                                                                                                                   (\rho_{X|Y} = 1) \iff (\exists a > 0. \exists b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet
                                                                                                                                                                                            (\rho_{X,Y} = -1) \iff (\exists a < 0. \exists b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet
                                                                                                                                                                                                        \mathbb{C}[X,Y]=\mathbb{E}\left[XY
ight]-\mathbb{E}\left[X
ight]\mathbb{E}\left[Y
ight] מ"מ אזי X,Y מ"מ אזי יהיו
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     .Cov[X, X] = Var[X] \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                                                                            .Cov[X, Y] = Cov[Y, X] \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                                                      .Cov[aX + b, Y] = aCov[X, Y] \bullet
                                                                                                                                                                                                                  .Cov [\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^m Y_i] = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m \mathrm{Cov}\left[X_i, Y_i\right]   

   ...
orall k \in [n]. B_k \in \sigma(X_k) המקיימים בלתי מקריים בלתי מיימים מחד־מימדיים עבורם לכל מאורעות אמשתנים מקריים בלתי תלויים: \{X_i\}_{i=1}^n משתנים מקריים בלתי תלויים:
                                                                                                                                                                                                                                                                                        \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_{i}
ight)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(B_{i}
ight) מתקיים
                                                                                            . מ"מ ב"ת \{g_i\left(X_i\right)\}_{i=1}^n מ"מ בורל אזי בורל מדידות מוקציות (\{g_i\}_{i=1}^n מ"מ ב"ת מ"מ ב"ת מענה: יהיו
                                                                                                                 (F_{X_1...X_n}\left(x_1\dots x_n
ight)=\prod_{i=1}^nF_{X_i}\left(x_i
ight)ב"ת) ב"ת איז \{X_i\}_{i=1}^n מענה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^n מינה: יהיו
                                                                                            (f_{X_1...X_n}\left(x_1\dots x_n
ight) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}\left(x_i
ight)ב"ת) ב"ת בציפים אזי איי אוינה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^n מ"מ רציפים אזי לענה:
f_{X_1...X_n}\left(x_1\dots x_n
ight)=\prod_{i=1}^ng_i\left(x_i
ight) מ"מ רציפים ותהיינה אי־שליליות רציפות אי־שליליות רציפות מקוועין מ"מ רציפים ותהיינה \left\{g_i
ight\}_{i=1}^n אי־שליליות רציפות מקוועין המקיימות אי־שליליות רציפים ותהיינה ותהיינה מיינה ותהיינה ו
                                                                                                                                                                                            \mathbb{E}\left[XY\right]=\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]אינטגרביליים אינ ב"ת מ"מ ב"ת מ"מ ב"ת מ"מ ב"ת מ"מ ב
```

 $\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x_1,\dots,x_n
ight)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=1$  וכן  $f\geq 0$  וכן המקיימת  $f:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}$  רציפה  $f:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}$  רציפה משתנה  $a_i< b_i$  המקיימות  $a_i< b_i$  מתקיים  $a_i< b_i$  מתקיים משתנה מקרי רציף:  $a_i$  מ"מ  $a_i$ 

 $|A_X| < \aleph_0$  טענה: יהיX מ"מn־מימדי אזי

 $\mathbb{P}\left(X\in A_X
ight)=1$  משתנה מקרי בדיד: X מ"מ X משתנה מקרי בדיד:

 $. orall a \in A_X. \mathbb{P}_X \left( a 
ight) = \mathbb{P} \left( X = a 
ight)$ טענה: יהי X מ"מ n־מימדי בדיד אזי

.( $\mathbb{P}(X\in A_X)=0$ ) טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי (X רציף) טענה: יהי X מ"מ n־מימדי ויהי  $a\in\mathbb{R}^n$  אזי a

 $(i \in [n]$  טענה: יהי X מ"מ בדיד לכל  $X_i$  מ"מ בדיד לכל  $X_i$  טענה: יהי X מ"מ בדיד לכל

 $\mathbb{P}(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ 

 $.F_X\left(a
ight)=\int_{-\infty}^{a_n}\ldots\int_{-\infty}^{a_1}f_X\left(x_1\ldots x_n
ight)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$  טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף אזי

```
M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) מסקנה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^n מים מים ב"ת בעלי מומנט שני אזי
                                        \{X_i\}_{i=1}^n סטטיסטיי הסדר: יהיו באוסף מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי מ"מ ב"ת שווי התפלגות מ"מ מ"מ ב"ת שווי התפלגות הסדר: יהיו
                                                                                                                                                                         טענה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^n מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי
                                                                                                                                .F_{X_{(k)}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left( \binom{n}{i} \cdot F_{F_{X_1}}(t)^i \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-i} \right) \bullet
                                                                                                                                 f_{X_{(k)}}(t) = n \cdot f_{X_1}(t) \cdot F_{X_1}(t)^{k-1} \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-k} \bullet
                                                                                                   \overline{X_n} = rac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i ממוצע מדגמי: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי
                                                                                                                         \mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight]=\mathbb{E}\left[X_1
ight] אזי התפלגות מ"מ ב"ת שווי מ"מ \left\{X_i
ight\}_{i=1}^\infty יהיו
                                                                                                                                 .
Var \overline{[X_n]} 	o 0 אזי התפלגות שווי מ"מ ב"ת מ"מ מ"מ אזי \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                                                                                      התכנסות משתנים מקריים: יהיו \left\{X_i\right\}_{i=1}^\infty יהיו מקריים: התכנסות משתנים מקריים: יהיו
                   .\left(X_{n}\overset{D}{\longrightarrow}X\right)\Longleftrightarrow\left(orall t\in\mathbb{R}.\left(F_{X}\in C\left(\left\{ t
ight\} 
ight)
ight)\Longrightarrow\left(F_{X_{n}}\left(t
ight)\underset{n\rightarrow\infty}{\longrightarrow}F_{X}\left(t
ight)
ight)
ight) התכנסות בהתפלגות:
                                                                      \left(X_n \overset{p}{\to} X\right) \Longleftrightarrow \left(orall arepsilon > 0.\mathbb{P}\left(|X_n - X| \ge arepsilon
ight) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0
ight) התכנסות בהסתברות:
                                           \left(X_{n} \xrightarrow{a.s.} X\right) \Longleftrightarrow \left(\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X_{n}\left(\omega\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} X\left(\omega\right)
ight\}
ight) = 1\right) התכנסות כמעט תמיד:
                                                  .ig(X_n \xrightarrow{a.s.} Xig) \Longrightarrow ig(X_n \xrightarrow{p} Xig) \Longrightarrow ig(X_n \xrightarrow{D} Xig)טענה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ ויהי \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                                                \overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight] \stackrel{p}{	o} 0 עבורם \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ מ"פרים הגדולים: מ"מ
                                              \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{b_n} 	o 0 אזי א\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{b_n} < \infty וכן b_n \uparrow \infty וכן a_n \geq 0 אזי a_n, b_n סדרות עבורן a_n, b_n סדרות עבורן a_n, b_n וכן a_n \geq 0 אזי a_n \geq 0 אזי a_n \geq 0 מסקנה: יהיו a_n \neq 0 מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 מסקנה: יהיו a_n \neq 0 מ"כ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 מסקנה: יהיו
                                                                                      \limsup A_n = \{A_n \text{ פעמים } \} אזי אינסוף פעמים A: \mathbb{N} 	o \mathcal{A} ותהא הבוצה תהא \mathcal{A}
                                                                          .\liminf A_n = \{A_n \text{ מסענה: תהא } A: \mathbb{N} 	o \mathcal{A} אזי החל ממקום מסויים \mathcal{A}
                  .\left(X_n \xrightarrow{a.s.} X
ight) \Longleftrightarrow (orall arepsilon > 0.\mathbb{P}\left(\limsup\left\{|X_n - X| \geq arepsilon
ight\}
ight) = 0
ight)טענה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ ויהי \{X_i\}_{i=1}^\infty
      \mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_i
ight)=igcap_{i\in I}\mathbb{P}\left(A_i
ight) סופית מתקיים I\subseteq\mathbb{N} המקיימים כי לכל המקיימים לכל אורעות בלתי מאורעות האורעות \{A_n\}_{n=1}^\infty
                                                                                                                                                   טענה הלמה של בורל־קנטלי: יהיו מאורעות אזי \left\{A_n
ight\}_{n=1}^\infty
                                                                                                                                                  (\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \iff (\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty) \bullet
                                                                               .(\mathbb{P}(\limsup A_n)=1) ( \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=\infty)\wedgeמאורעות ב"ת) אורעות ב"ת ( \{A_n\}_{n=1}^{\infty}) .
X_n \xrightarrow{a.s.} X אזי אזי \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\left(|X_n-X| \geq arepsilon
ight) < \infty מסקנה: יהיו מ"מ ויהי X מ"מ עבורם לכל arepsilon > 0 מתקיים
                                                                                           .\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight]\stackrel{a.s.}{\longrightarrow}0 עבורם \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ מ"מ החזק של המספרים הגדולים:
                    .\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} 0 אזי \forall i \in \mathbb{N}.\mathbb{E}\left[X_i
ight] = 0 טענה: יהיו במידה מומנט רביעי חסום במידה מינה אחידה עבורם \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                   X_n \xrightarrow{a.s.} 0 אזי \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty וכן \forall i \in \mathbb{N}. \mathbb{E}\left[X_i\right] = 0 מסקנה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty אזי \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                                                                               \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} \sigma\left(X_{i}\right)\right) מ"מ אזי \{X_{i}\}_{i=1}^{\infty} יהיו יהיו הזנב: יהיו
                                                                                                                     A\in\mathcal{F} אוי אזיב: יהיו מאורע מיים ותהא \sigma \mathcal{F} מאורע מיים אויי יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                        \mathbb{P}\left(A
ight)\in\left\{ 0,1
ight\} איי זעב אזי מאורע מ"מ ב"ת ויהי א מ"מ ב"ת יהיו \left\{ X_{i}
ight\} _{i=1}^{\infty} יהיו יהיי
                                                                                                                                                                                         מסקנה: יהיו \left\{A_n
ight\}_{n=1}^\infty מאורעות ב"ת אזי
                                                                                                                                                .(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \iff (\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty) \bullet.(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1) \iff (\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty) \bullet
                                                                                                                                                Z\sim\mathcal{N}\left(0,1
ight) עבורו מ"מ עבורו סטנדרטית: מהתפלגות נורמלית סטנדרטית:
                                                                                                                                                                                 M_{Z}\left(t
ight)=e^{rac{t^{2}}{2}} אזי Z\sim\mathcal{N}\left(0,1
ight)טענה: יהי
                                                                                                 .\sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2
ight) אזי \sigma \in \mathbb{R}_+ ויהי Z \sim \mathcal{N}\left(0,1
ight) יטענה: יהי Z \sim \mathcal{N}\left(0,1
ight)
                                                                                                                                                         M_{Z}\left(t
ight)=e^{rac{\sigma^{2}t^{2}}{2}+\mu t} אאי Z\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^{2}
ight) מסקנה: יהי
                                            \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right) אזי X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right) משקנה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ ב"ת עבורם \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i \over \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \sim \mathcal{N}\left(0,1\right) אזי X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_i, \sigma_i^2\right) מ"סקנה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"סקנה: יהיו עבורם \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"סקנה: יהיו אויי יהיו רבורם עבורם עבורם אויי אויי יהיו רבורם עבורם עבורם מ"סקנה: יהיו רבורם עבורם עבורם עבורם רבורם עבורם עבורם עבורם רבורם עבורם עבורם רבורם רבורם עבורם רבורם רב
```

 $\operatorname{Cov}\left[X,Y
ight]=0$  טענה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי X,Y

. Var  $[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n ext{Var}\left[X_i
ight]$  איי איי מטקנה: יהיו ל $\{X_i\}_{i=1}^n$  מיים מיים מיים מיים מיים מיים איי

# התפלגויות

#### התפלגות ברנולי: יהי $p \in [0,1]$ אזי

- 1-p וסיכוי פישלון וסיכוי בעל סיכוי הצלחה אינדיקטור להצלחה בניסוי בעל הצלחה p ומיכוי כישלון
  - $\mathbb{P}\left(X=0
    ight)=1-p$  ,  $\mathbb{P}\left(X=1
    ight)=p$  :פונקציית הסתברות
    - $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ : סימון
    - $\mathbb{E}\left[X\right]=p$  :תוחלת •
    - .Var (X) = p(1-p) שונות:

## אזי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $p\in[0,1]$ אזי התפלגות בינומית:

- . ניסויי בחנולי בסיכוי הצלחה שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בסיכוי הצלחה שצלחה שצלחו ביצוע n
  - $\mathbb{P}\left(X=k
    ight)=inom{n}{k}p^{k}\left(1-p
    ight)^{n-k}$  אזי  $k\in\{0,\ldots,n\}$  יהי
    - $X \sim \text{Bin}(n,p)$ : סימון
      - $\mathbb{E}\left[X\right]=np$  :תוחלת
    - .Var (X) = np(1-p) שונות:

## אזי $r \in \mathbb{N}$ ויהי $p \in [0,1]$ אזי שלילית: יהי

- $\dots X$  :המשתנה המקרי
- $\mathbb{P}\left(X=k
  ight)=inom{k-1}{r-1}p^r\left(1-p
  ight)^{k-r}$  אזי  $k\in\mathbb{N}ackslash\left\{0\dots r-1
  ight\}$  יהי פונקציית הסתברות: יהי
  - $X\sim \mathrm{NB}\left(n,p
    ight)$  סימון:
  - $\mathbb{E}\left[X
    ight]=rac{r}{p}$  :תוחלת: Var  $(X)=rac{r(1-p)}{p^2}$  . •

#### אזי $p \in [0,1]$ אזי אומטרית: יהי

- . מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל. מספר מספרי: X
  - $\mathbb{.P}\left(X=k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}p$ אזי  $k\in\mathbb{N}_{+}$ יהי הסתברות: פונקציית הסתברות:
    - $X\sim \mathrm{Geo}\left(p\right)$  סימון: •
    - $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{1}{p}$  :תוחלת •
    - .Var  $(X)=rac{1-p}{p^2}$  :שונות:

## אזי $D,n\in\{0\ldots N\}$ ויהיו $N\in\mathbb{N}$ יהי התפלגות הייפרגאומטרית: יהי

- $\dots X$  :- המשתנה המקרי
- $\mathbb{P}(X=k)=rac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{k}}$  אזי  $k\in\{\max\{0,n+D-N\}\dots\min(n,D)\}$  פונקציית הסתברות: יהי
  - $X \sim \operatorname{HG}(N,D,n)$  : סימון

# . $\mathbb{E}\left[X ight]=rac{nD}{N}$ . תוחלת: $\mathbb{E}\left[X ight]=rac{nD}{N}$ . $\mathbb{V}$ ar $(X)=rac{nD}{N}\left(1-rac{D}{N} ight)\left(rac{N-n}{N-1} ight)$ . שונות: $N\in\mathbb{N}$ יהי $N\in\mathbb{N}$ יהי $N\in\mathbb{N}$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ אזי אזי $N\in\mathbb{N}$ איזי

- ... X :... א המשתנה המקרי: א ... X ... ... ... המשתנה המקרי: א ... X ... ... ... פונקציית הסתברות: יהי  $k\in\{0,\ldots,K\}$  אזי  $k\in\{0,\ldots,K\}$ 
  - $.X\sim \mathrm{NHG}\left(N,K,r
    ight)$  סימון:
  - . $\mathbb{E}\left[X
    ight]=rac{rK}{N-K+1}$ : תוחלת: תוחלת: Var  $(X)=\left(rac{r(N+1)K}{(N-K+1)(N-K+2)}
    ight)\left(1-rac{r}{N-K+1}
    ight)$  שונות: •

#### > 0 התפלגות פואסונית: יהי

- $\lambda$  זמן זה בפרק אירועים בפרק אמן מחן בפרק מפר האירועים האירועים מספר אירועים פרק מון המשתנה המקרי:  $\lambda$ 
  - $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}rac{\lambda^k}{k!}$  אזי  $k\in\mathbb{N}$  יהי הסתברות:
    - $.X\sim \mathrm{Poi}\left(\lambda
      ight)$  סימון: •
    - $\mathbb{E}[X] = \lambda$  :תוחלת
    - .Var  $(X) = \lambda$  שונות:

## אזי $a < b \in \mathbb{Z}$ יהיו בדידה אחידה אחידה התפלגות

- $.\{a \dots b\}$ בקבוצה נקודה של אקראית בחירה בחירה מקרי:  $\bullet$
- $\mathbb{P}\left(X=k
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{1}{b-a+1} & k\in[a,b]\cap\mathbb{Z} \ & k\in\mathbb{R} \end{array}
  ight.$ אזי אזי  $k\in\mathbb{R}$  אזי הסתברות: יהי
  - $.X \sim \mathrm{Uni}\left(\{a \dots b\}
    ight)$  סימון:
  - $\mathbb{E}\left[X
    ight]=rac{a+b}{2}$  . תוחלת:  $\mathbb{E}\left[X
    ight]=rac{a+b}{2}$  . Var  $(X)=rac{(b-a+1)^2-1}{12}$  .  $\bullet$

### אזי a < b יהיו רציפה: אחידה אחידה התפלגות

- (a,b) בחירה אקראית של נקודה בקטע X
  - b) איינ של נקודה בקטע ( $F_X(t)=egin{cases} 0 & t\leq a \\ t \leq a & t \leq a \end{cases}$  פונקציית התפלגות מצטברת:  $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$  פונקציית צפיפות:  $f_X(t)=egin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$   $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$ 
    - - $\mathbb{E}\left[X
        ight]=rac{a+b}{2}$  :תוחלת: Var  $(X)=rac{(b-a)^2}{12}$  :שונות: •

#### התפלגות מעריכית: יהי $\lambda > 0$ אזי

- . משך חיים אמן יחידות אמן משרנה משקרי: X משך חיים של המשרנה המשרנה  $\bullet$ 
  - $F_X\left(t
    ight) = \left\{egin{array}{ll} 1-e^{-\lambda t} & t\geq 0 \ 0 & t< 0 \end{array}
    ight.$  פונקציית התפלגות מצטברת:
    - $f_{X}\left(t
      ight)=\left\{egin{array}{ll} \lambda e^{-\lambda t} & t\geq0 \ 0 & t<0 \end{array}
      ight.$ פונקציית צפיפות: ullet
      - $X\sim \mathrm{Exp}\left(\lambda
        ight)$  סימון: •

      - $\mathbb{E}\left[X
        ight]=rac{1}{\lambda}$  :תוחלת: Var  $(X)=rac{1}{\lambda^2}$  :שונות: •

#### התפלגות גאמא: יהיו $n, \lambda > 0$ אזי

- $\dots X$  :המשתנה המקרי
- $F_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$  פונקציית התפלגות מצטברת:  $f_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$   $f_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$   $f_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$   $f_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rray & rray & rray \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$   $f_X\left(t
  ight)=\left(rray -rray -rra$ 
  - - - $\mathbb{E}\left[X
        ight]=rac{n}{\lambda}$  :תוחלת ullet
      - .Var  $(X)=rac{n}{\lambda^2}$  :שונות:

## אזי $\mu \in \mathbb{R}$ ויהי $\sigma \in \mathbb{R}_+$ אזי נורמלית: התפלגות

- ... X :- המשתנה המקרי: •
- $.F_{X}\left( t
  ight) =\Phi\left( rac{t-\mu}{\sigma}
  ight)$  פונקציית התפלגות מצטברת:
  - $f_X\left(t
    ight)=rac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-rac{1}{2}\left(rac{t-\mu}{\sigma}
    ight)^2}$  :פונקציית צפיפות ullet
    - $.X \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2
      ight)$  סימון:
      - $\mathbb{E}[X] = \mu$  :תוחלת
      - .Var  $(X) = \sigma^2$  :שונות