# מתמטיקה בדידה 2 (0368-1119)

רון גולדמן

# תוכן העניינים

# מבוא לקומבינטוריקה ותורת הגרפים

# מבוא לקומבינטוריקה

## שיטות ספירה בסיסיות

**הגדרה.** יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נסמן

$$[n] = \left\{ i \in \mathbb{N}^+ \,|\, i \leq n \right\}$$

טענה (**עקרון הכפל**). תהא $A$ קבוצה. אם קיימות קבוצות $A_1, \ldots, A_n$ כך שמתקיים $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ אזי

$$|A| = |A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

**הגדרה.** נאמר שהקבוצות $A_1, \ldots, A_n$ **זרות בזוגות** אם

$$\forall i \neq j. A_i \cap A_j = \emptyset$$

טענה (**עקרון החיבור**). תהא $A$ קבוצה. אם קיימות $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות זרות בזוגות כך ש-$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ אזי

$$|A| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

**הגדרה.** תהא $A$ קבוצה. פונקציית זיווג $f \in A \to A$ נקראת **תמורה** (permutation; פרמוטציה) של $A$.

**הגדרה.** תהא $A$ קבוצה מעוצמה $n \in \mathbb{N}$. מספר התמורות של $A$ תסומן $\boldsymbol{n!}$ ($n$ עצרת).

טענה. יהי $n \in \mathbb{N}$.

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

**הגדרה.** יהיו $k \leq n \in \mathbb{N}$. נגדיר את $\boldsymbol{n}$ **בחר** $\boldsymbol{k}$ להיות

$$\binom{n}{k} \triangleq \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

טענה. יהי $n \in \mathbb{N}$. מספר הדרכים לבחור $n \geq k \in \mathbb{N}$ איברים מתוך $[n]$ הוא

| חזרות / חשיבות לסדר | כן | לא |
|---|---|---|
| אסור | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $\binom{n}{k}$ |
| מותר | $n^k$ | $\binom{k+n-1}{k}$ |

טענה. לכל $k \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{\ell+n-1}{\ell} = \binom{k+n}{k}$$

## זהויות קומבינטוריות

טענה. לכל $k \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

טענה. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

טענה. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

טענה. לכל $k \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

**משפט (הבינום של ניוטון).** לכל $n \in \mathbb{N}$ ו-$a, b \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

טענה **(זהות פסקל)**. לכל $n \in \mathbb{N}^+$ ו-$n \geq k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

טענה **(מקל ההוקי של פסקל)**. לכל $n, k \in \mathbb{N}$ כך ש-$k \leq n$ מתקיים:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

## עקרון שובך היונים

**משפט (עקרון שובך היונים).** יהי $n \in \mathbb{N}^+$. אם $f : [n+1] \to [n]$ אז $f$ לא חח"ע.
במילים, אם שמים $n+1$ יונים ב-$n$ שובכים אז יהיה שובך עם לפחות 2 יונים.

**משפט (עקרון שובך היונים המוכלל).** יהיו $m > n \in \mathbb{N}^+$. אם $f : [m] \to [n]$ אז

$$\exists k \in [m] \,.\, |f[\{k\}]| \geq \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$$

במילים, אם שמים $m > n$ יונים ב-$n$ שובכים אז יהיה שובך המכיל לפחות $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ יונים.

# עקרון ההכלה וההדחה

**משפט (עיקרון ההכלה וההדחה).** לכל קבוצות $A, B$ מתקיים

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

וגם לכל $A, B \subseteq U$

$$\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = |U| - (|A| + |B|) + |A \cap B|$$

**הגדרה.** תהינה $A_1, \ldots, A_n \subseteq U$ קבוצות

$$\bigcap_{i \in \emptyset} \{\emptyset\} \triangleq \emptyset$$
$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i \triangleq U$$

**משפט (נוסחת ההכלה וההדחה הכללית).** לכל $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות מתקיים

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} \left|\bigcap_{j \in S} A_j\right|$$

וגם לכל $A_1, \ldots, A_n \subseteq U$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} \left|\bigcap_{j \in S} A_j\right|$$

**משפט (נוסחת ההכלה וההדחה הסימטרית).** לכל $A_1, \ldots, A_n$ שוות עוצמה מתקיים

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left|\bigcap_{j \in [k]} A_j\right|$$

וגם לכל $A_1, \ldots, A_n \subseteq U$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \left|\bigcap_{j \in [k]} A_j\right|$$

**הגדרה.** תהינא $n, k \in \mathbb{N}$ כך ש-$k \leq n$. **מספר סטירלינג מהסוג השני** $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ הוא מספר החלוקות הלא הריקות של $[n]$ ל-$k$ תאים.

**הגדרה.** תהא $A$ קבוצה. נאמר ש-$a \in A$ היא **נקודת שבת** של $f \in A \to A$ אם $f(a) = a$.

**הגדרה.** יהי $n \in \mathbb{N}$. מספר התמורות על $[n]$ ללא נקודות שבת הוא $\boldsymbol{D_n}$.

טענה. יהי $n \in \mathbb{N}$, אזי:

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \begin{cases} \left\lceil \frac{n!}{e} \right\rceil & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \left\lfloor \frac{n!}{e} \right\rfloor & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$$

## נוסחאות נסיגה

**הגדרה.** יהיו $c_1,\ldots,c_r\in\mathbb{R}$. נוסחת נסיגה מהצורה

$$f\left(n\right)=c_1f\left(n-1\right)+\ldots+c_rf\left(n-r\right)$$

נקראת **נוסחת נסיגה הומוגנית מסדר $r$ עם מקדמים קבועים**.
**הפולינום האופייני** של נוסחת הנסיגה מוגדר על ידי $p\left(x\right)=x^r-c_1x^{r-1}-\ldots-c_r$

**משפט.** תהא

$$f\left(n\right)=c_1f\left(n-1\right)+\ldots+c_rf\left(n-r\right)$$

נוסחת נסיגה הומוגנית מסדר $r$ עם מקדמים קבועים.
אם שורשי הפולינום האופייני $\alpha_1,\ldots,\alpha_r\in\mathbb{R}$ הם **שונים**. אז לכל $a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{R}$ הביטוי

$$a_1\alpha_1^n+\ldots+a_r\alpha_r^n$$

מקיים את נוסחת הנסיגה.
אם בנוסף נתונים $r$ תנאי התחלה $f\left(0\right),\ldots,f\left(r-1\right)$ אז קיימים $a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{R}$ יחידים.

# מבוא לתורת הגרפים

## מושגים בסיסיים

**הגדרה.** **גרף לא מכוון ופשוט** הוא זוג סדור $G=\left(V,E\right)$ כאשר $E\in\mathcal{P}\left(V\right)$ מקיימת:

$$E\subseteq\left\{A\subseteq V\,||A|=2\right\}$$

הערה.

- $V$ סופית.
- $E$ יכולה להיות ריקה.
- אם $e=\left\{v_1,v_2\right\}\in E$ נאמר שהקשת $e$ **נוגעת** או **חלה** על **צמתי הקצה** או **הקצוות** $v_1,v_2$. נאמר גם ש-$v_1,v_2$ **שכנים** או **סמוכים**.
- **הדרגה** של צומת $v\in V$, המסומנת ב-$d\left(v\right)$ או $\deg\left(v\right)$ או $d_v$ היא מספר השכנים של $v$.

**הגדרה.** יהי $G=\left(V,E\right)$ גרף. כאשר מגדירים סדר ל-$V=\left\{v_1,\ldots,v_{|V|}\right\}$, **מטריצת השכנויות** של $G$ היא המטריצה $M\in\left\{0,1\right\}^{|V|\times|V|}$ שמוגדרת באופן הבא:

$$\forall i,j\in\left[|V|\right].\;m_{ij}=\begin{cases}1 & \left\{v_i,v_j\right\}\in E\\0 & \left\{v_i,v_j\right\}\notin E\end{cases}$$

**הגדרה.** יהי $n\in\mathbb{N}$. נגדיר $V_n=\left[n\right]$ אז:

1. גרף **שרוך** הוא גרף מהצורה

$$P_n=\left(V_n,E_n\right)$$

כאשר

$$E_n = \{\{i, i+1\} \,|i \in [n-1]\,\}$$

2. גרף **מעגל** הוא גרף מהצורה

$$C_n = (V_n, E_n)$$

כאשר

$$E_n = \{\{i, i+1\} \,|i \in [n-1]\,\} \cup \{\{n, 1\}\}$$

3. הגרף **השלם** או **הקליקה** הוא הגרף

$$K_n = (V_n, E_n)$$

כאשר

$$E_n = \{\{i, j\} \,|i, j \in [n] \wedge i \neq j\,\}$$

4. הגרף **הריק** הוא הגרף

$$G_n = (V_n, E_n)$$

כאשר $E_n = \emptyset$.

5. גרף **כוכב** הוא גרף מהצורה

$$S_n = (V_n, E_n)$$

כאשר

$$E_n = \{\{1, k+1\} \,|k \in [n-1]\,\}$$

**הגדרה.** יהי $G = (V, E)$ גרף. **הגרף המשלים** של $G$ מוגדר להיות

$$G^c \triangleq \left(V, E^{'}\right)$$

כאשר

$$E^{'} = \{\{u, v\} \,|u, v \in V \wedge u \neq v \wedge \{u, v\} \notin E\,\}$$

טענה. יהי $n \in \mathbb{N}$. אם $K_n$ הגרף השלם על $n$ צמתים, ו-$G_n$ הגרף הריק אזי

$$G_n^c = K_n \wedge K_n^c = G_n$$

טענה. בכל גרף עם לפחות שני צמתים יש שני צמתים עם אותה דרגה.

טענה. מספר הקשתות המקסימלי בגרף בעל $n \in \mathbb{N}$ צמתים הוא $\binom{n}{2}$.

טענה. מספר הגרפים על $n \in \mathbb{N}$ צמתים הוא $2^{\binom{n}{2}}$.

טענה. מספר הגרפים על $n \in \mathbb{N}$ צמתים בעלי $k \in \mathbb{N}$ קשתות הוא $\binom{\binom{n}{2}}{k}$.

**משפט.** יהי $G=(V,E)$ גרף. אזי
$$2\left|E\right|=\sum_{v\in V}\deg\left(v\right)$$

**מסקנה (למת לחיצות הידיים).** בכל גרף יש מספר זוגי של צמתים עם דרגה אי-זוגית.

## מסלולים, מעגלים וקשירות

**הגדרה.** יהא $G=(V,E)$ גרף, ויהיו $u,v\in V$. **מסלול** מ-$u$ ל-$v$ ב-$G$ הוא סדרה של צמתים $p=(u=v_0,v_1,v_2,\dots,v_m=v)\in V^{m+1}$ כך שלכל $i\in\{0\}\cup[m-1]$ מתקיים $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$.
**אורך המסלול** מוגדר כמספר הקשתות במסלול ($m$ לעיל).

טענה. יהא $G=(V,E)$ גרף, ויהי $v\in V$. אז $v$ מסלול(ריק) מאורך $0$ ב-$G$.

טענה. יהא $G=(V,E)$ גרף ויהיו $u,v\in V$. אם $\{u,v\}\in E$ אז $(u,v)\in V^2$ מסלול באורך $1$ ב-$G$.

**הגדרה.** יהא $G=(V,E)$ גרף ויהי $m\in\mathbb{N}$. מסלול $p=(v_0,\dots,v_m)\in V^{m+1}$ ב-$G$ נקרא **פשוט בצמתים** אם הוא לא חוזר על אותה צומת יותר מפעם אחת. כלומר לכל $i\neq j\in\{0\}\cup[m]$ מתקיים $v_i\neq v_j$.

טענה. יהא $G=(V,E)$ גרף ויהי $v\in V$. אז המסלול הריק $v$ פשוט בצמתים.

**הגדרה.** יהא $G=(V,E)$ גרף ויהי $m\in\mathbb{N}$. מסלול $p=(v_0,\dots,v_m)\in V^{m+1}$ ב-$G$ נקרא **פשוט בקשתות** אם אף קשת לא מופיעה בו יותר מפעם אחת. כלומר לכל $i\neq j\in\{0\}\cup[m]$ $\{v_i,v_{i+1}\}\neq\{v_j,v_{j+1}\}$.

**הגדרה.** יהא $G=(V,E)$ גרף ויהיו $u,v\in V$. **המרחק** בין $u$ ו-$v$ הוא אורך המסלול הקצר ביותר ביניהם, או "$\infty$" במידה ואין מסלול בין $u$ וְ-$v$.

**הגדרה.** יהא $G=(V,E)$ גרף. $G$ נקרא **קשיר** אם בין כל זוג צמתים קיים מסלול.

**הגדרה.** יהא $G=(V,E)$ גרף ויהי $m\in\mathbb{N}$. מסלול $p=(v_0,v_1,\dots,v_m)\in V^{m+1}$ נקרא **מעגל** אם $m>0$ וְ-$v_0=v_m$.
מעגל נקרא **פשוט בצמתים** אם כל הצמתים $v_0,\dots,v_{m-1}$ שונים זה מזה.

הערה. מעגל פשוט אינו מסלול פשוט.

**משפט.** יהא $G=(V,E)$ גרף. אם $G$ קשיר אז $|E|\geq|V|-1$.

**הגדרה.** יהא $G=(V,E)$ גרף. $G'=\left(V',E'\right)$ יקרא **תת גרף** של $G$ אם הוא גרף ומתקיים $V'\subseteq V$ וגם $E'\subseteq E$.
נאמר ש-$G'$ הוא **גרף מושרה** מ-$V'$ אם $V'\subseteq V$ וגם $E'=\left\{\{u,v\}\in E\,\middle|\,u,v\in V'\right\}$.

**הגדרה.** יהי $G=(V,E)$ גרף. **רכיב קשירות** של $G$ הוא תת גרף קשיר מקסימלי ב-$G$.

**הגדרה.** **עץ** הוא גרף קשיר וחסר מעגלים.

**הגדרה.** **יער** הוא גרף חסר מעגלים.

**הגדרה.** צומת עם דרגה $1$ ביער נקרא **עלה**.

**הגדרה.** יהי $G=(V,E)$ גרף ויהי $v\in V$. אם $\deg(v)=0$ אז $v$ נקרא **צומת מבודד**.

**משפט.** אם $G=(V,E)$ יער אז $|E|\leq|V|-1$.

**למה.** אם מסירים קשת מיער אז מספר רכיבי הקשירות גדל.

**משפט.** בכל יער עם קשת אחת לפחות קיימים שני עלים.

**משפט.** אם $G=(V,E)$ עץ אז $|E|=|V|-1$.

טענה. אם $G=(V,E)$ קשיר וגם $|E|=|V|-1$ אז $G$ עץ.

טענה. יהי $G=(V,E)$ גרף. $G$ הוא עץ אם ורק אם הוא חסר מעגלים מקסימלי בקשתות.

טענה. יהי $G=(V,E)$ גרף. $G$ הוא עץ אם ורק אם הוא קשיר מינימלי בקשתות.

**הגדרה.** יהי $G=(V,E)$ גרף. **מעגל אוילר** ב-$G$ הוא מעגל פשוט בקשתות שעובר בכל הקשתות ב-$G$.

**משפט (אוילר).** בגרף קשיר $G=(V,E)$ קיים מעגל אוילר אם ורק אם הדרגה של כל $v\in V$ היא זוגית.

**למה.** יהי $G=(V,E)$ גרף קשיר ויהי $\emptyset\neq S\subset V$. אז קיים $v\in V\setminus S$ כך ש-$u\in S$ ו-$\{u,v\}\in E$.

**למה.** יהי $G=(V,E)$ גרף בעל דרגות זוגיות. אז כל $v\in V$ בעל דרגה חיובית משתתף במעגל פשוט בקשתות.

**הגדרה.** יהי $G=(V,E)$ גרף. **מעגל המילטוני** ב-$G$ הוא מעגל פשוט בצמתים שעובר בכל צומת ב-$V$.

**הגדרה.** גרף $G=(V,E)$ הוא **המילטוני** אם הוא מכיל מעגל המילטוני.

**משפט (דיראק).** יהי $G=(V,E)$ גרף. אם לכל $v\in V$ מתקיים $\deg(v)\geq\left\lceil\frac{|V|}{2}\right\rceil$ אז $G$ המילטוני.

# נושאים נבחרים

# נוסחת קיילי ומשפט קירכהוף

**הגדרה.** **עץ פורש** של גרף קשיר $G$ הוא תת גרף קשיר של $G$ המכיל את כל צמתי $G$ ושאין בו מעגלים.

**הגדרה.** נסמן את מספר העצים הפורשים של הגרף המלא על $n$ צמתים ב-$T_n$.

**משפט (קיילי).** $T_n=n^{n-2}$.

## הוכחה באמצעות זיווג

הוכחה. נתאר זיווג $\varphi$ בין קבוצת העצים הפורשים כך ששני צמתים בעץ "מסומנים" - אחד בכחול ואחד באדום לבין קבוצת הפונקציות $[n]\to[n]$. בחירת צומת כחול וצומת אדום תיעשה ב-$n^2$ דרכים כאשר מאפשרים לאותו צומת להיבחר ולכן נסיק:

$$n^2T_n=n^n$$

תהא $f:[n]\to[n]$, ניתן לתאר את $f$ ע"י גרף **מכוון** $G=([n],E)$ כאשר $E=\{(k,f(k))\,|k\in[n]\}$.
נסתכל על המעגלים בלי "הזנבות", נסמן את הצמתים המשתתפים במעגלים ב-$C$ ונצמצם את $f$ ל-$C$.
נגדיר את העץ הפורש המזווג $T$ עם צמתים כחול ואדום לפי השורה התחתונה, כלומר לפי $f|_C$ כאשר $\min(C)$ ייצבע בכחול ו-$\max(C)$ ייצבע באדום. את שאר הצמתים נעתיק לפי הגרף המכוון אך ללא הכיוונים:

$$(T=\{\{f(m),f(n)\}\,|m\in C\wedge n=\min(\{k\in C\,|m<k\})\}\cup\{\{m,f(m)\}\,|m\in[n]\setminus C\},B=\min(C),R=\max(C))$$

בכדי לחשב את $\varphi^{-1}$ נבחין כי הצמתים על המסלול הקצר ביותר מהצומת הכחול לאדום יושבים על מעגלים, ובעצם $f|_C$ זה הצמצום המקסימלי של $f$ המשרה זיווג. לכן

$$f|_C^{-1}(B)=\min(C)$$
$$f|_C^{-1}(\iota v\in N(B))=\min(C\setminus\{\min(C)\})$$
$$\vdots$$

כאשר $N(B)$ קבוצת השכנים של $B$ במסלול הארוך (בוודאות יש אחד שם כי המסלול הוא יחיד), ממשיכים כך עד לחישוב $f|_C$, ואז משלימים את החישוב תוך שימוש בזנבות שהן לכל דבר ועניין בעצם מכוונים, שכן הצומת על המסלול אליו הזנבות מחוברים "משרה כיווניות". ■

## הוכחה באמצעות נוסחת נסיגה

**הגדרה.** **יער פורש** של גרף $G$ הוא תת גרף של $G$ המכיל את כל צמתי $G$ ושאין בו מעגלים.

**הגדרה.** עבור $k \in [n]$ נסמן ב-$T_{n,k}$ את מספר **היערות הפורשים** בעלי $k$ רכיבי קשירות בדיוק בהם כל אחד מהצמתים $1,\ldots,k$ מוכל ברכיב קשיר משלו.

**משפט.** $T_{n,k} = k \cdot n^{n-k-1}$

הוכחה. נבחין כי אם לצומת $1$ יש $\ell$ שכנים אז הסרתו תותיר אותנו עם $k-1$ צמתים ו-$k-1+\ell$ רכיבים.
על כן

$$\forall n \geq k \geq 1 . T_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} T_{n-1,k-1+\ell}$$

בנוסף

$$\forall n > 0 . T_{n,0} = 0$$
$$T_{0,0} \triangleq 1$$

כל שנותר כעת הוא להוכיח את המשפט באינדוקציה על $n$ לכל $k \leq n \in \mathbb{N}$ תוך שימוש בנוסחת הנסיגה.

בסיס: עבור $n=1$, אם $k=0$ אז $T_{1,0} = 0 = 0 \cdot 1^{1-0-1}$. עבור $k=1$ מתקיים $T_{1,1} = \sum_{\ell=0}^{0} \binom{1-1}{\ell} T_{1-1,1-1+\ell} = T_{0,0} = 1 = 1 \cdot 1^{1-1-1}$.

צעד: נניח כי לכל $n-1 \geq m \in \mathbb{N}$ מתקיים $T_{n-1,m} = m \cdot (n-1)^{n-m-2}$, אז לכל $n \geq k \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\begin{aligned}
T_{n,k} &= \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} T_{n-1,k-1+\ell} = \sum_{\ell=0}^{n-k} \binom{n-k}{\ell} (k-1+\ell) \cdot (n-1)^{n-1-k+1-\ell-1} \\
\left[j \triangleq n-k-\ell\right] &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (n-1-j) \cdot (n-1)^{j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (n-1)^{j} - \sum_{j=1}^{n-k} \binom{n-k}{j} j (n-1)^{j-1} \\
[\text{Binomial Theorom}] &= n^{n-k} - (n-k) \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{j} (n-1)^{j} \\
&= n^{n-k} - (n-l) n^{n-1-k} = k \cdot n^{n-1-k}
\end{aligned}$$

■

**מסקנה.** אז לפי המשפט לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים **משפט קיילי**:

$$T_n = T_{n,1} = 1 \cdot n^{n-1-1} = n^{n-2}$$

# הוכחה באמצעות אלגברה לינארית

**הגדרה.** בהינתן גרף קשיר ולא מכוון $G$ נסמן ב-$T\left(G\right)$ את מספר העצים הפורשים של $G$.

**הגדרה.** בהינתן גרף לא מכוון $G=\left(V,E\right)$ נגדיר מטריצה $B\in\left\{0,1\right\}^{|V|\times|E|}$ באופן הבא:

$$\forall v\in V,e\in E.B_{v,e}\triangleq\begin{cases}1 & v\in e\\ 0 & v\notin e\end{cases}$$

**הגדרה.** לכל גרף לא מכוון $G=\left(V,E\right)$ מהמטריצה $B$ נגדיר מטריצה $C\in\left\{-1,0,1\right\}^{|V|\times|E|}$ בה בכל עמודה נחליף באופן שרירותי את אחד ה-1-ים ל-$-1$. נסמן את קבוצת הבחירה לכל עמודה ב-$U_e$ (אם אין 1 בעמודה אז $U_e=\emptyset$), אז

$$\forall v\in V,e\in E.C_{v,e}\triangleq\begin{cases}B_{v,e} & v\notin U_e\\ -B_{v,e} & v\in U_e\end{cases}$$

**הגדרה.** לכל גרף לא מכוון $G=\left(V,E\right)$ נגדיר $M\triangleq CC^{T}\in\left\{-1,0,1\right\}^{|V|\times|V|}$.

טענה. יהי גרף לא מכוון $G=\left(V,E\right)$.

1. $M$ היא מטריצה סימטרית.
2. לכל $v\in V$ מתקיים $M_{v,v}=d_v$.

הוכחה.

1. מתקיים
$$M^{T}=\left(CC^{T}\right)^{T}=\left(C^{T}\right)^{T}C^{T}=CC^{T}=M$$

2. מתקיים
$$\begin{aligned}M_{v,v}=\left(CC^{T}\right)_{v,v} & =\sum_{e\in E}C_{v,e}\left(C^{T}\right)_{e,v}\\ & =\sum_{e\in E}\left(C_{v,e}\right)^{2}\\ & =\sum_{e\in E}B_{v,e}\end{aligned}$$
כל קשת שמכילה את $v$ יוצאת ממנה ולכן
$$M_{v,v}=\sum_{e\in E}B_{v,e}=d_v$$

■

**הגדרה.** תהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. לכל $j \in [n]$ נגדיר את $\boldsymbol{A_j}$ באופן הבא:

$$\forall i, k \in [n-1] \,.\, (A_j)_{i,k} \triangleq \begin{cases} A_{i,k} & i, k < j \\ A_{i+1,k} & i \geq j, k < j \\ A_{i,k+1} & i < j, k \geq j \\ A_{i+1,k+1} & i, k \geq j \end{cases}$$

**הגדרה.** תהינא $A \in \mathbb{F}^{r \times c}$ ו-$C \subseteq [c]$. נגדיר את **המטריצה המושרית מ-$\boldsymbol{A}$ על עמודות $\boldsymbol{C}$** ב- $\boldsymbol{A_C}$ שמוגדרת כמטריצה $r \times |C|$ כך שהיא $A$ ללא העמודות שלא ב-$C$.

**משפט (קושי-בינה).** תהי $A$ מטריצה $r \times c$ ו-$B$ מטריצה $c \times r$ כך ש-$r \leq c$. אז

$$\det(AB) = \sum_{\substack{C \subseteq [c] \\ |C| = r}} \det(A_C) \det\left(\left(B^T\right)_C\right)$$

**משפט (קירכהוף).** יהא $G = (V, E)$ גרף קשיר. לכל $v \in V$ מתקיים

$$T(G) = \det M_v$$

הוכחה. מכיוון ש-$M = CC^T$ אז את $M_v$ ניתן לרשום כ-$M_v = C_v C_v^T$, לכן

$$\begin{aligned} \det M_v &= \det\left(C_v C_v^T\right) \\ &= \sum_{\substack{F \subseteq E \\ |F| = n-1}} \det\left((C_v)_F\right)^2 \end{aligned}$$

על כן ההוכחה תושלם אם נראה כי

$$\det (C_v)_F = \begin{cases} \pm 1 & \text{קשתות } F \text{ פורשות עץ ב-} G \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

מצד אחד, אם $F$ לא פורשות את $G$ אז קיים רכיב קשירות בתת גרף זה שאינו מכיל את $v$.
נבחין כי במקרה זה סכום השורות של כל רכיב קשירות זה ב-$(C_v)_F$ שווה לאפס שהרי כל עמודה מתאימה לקשת: אם הקשת נמצאת ברכיב אז ה-$\pm 1$ יתבטלו, ואם הקשת לא נמצאת העמודה היא עמודת אפסים. לכן $\det (C_v)_F$.
מצד שני, אם $F$ פורשות עץ אז קיים עלה $u \neq v$.
כלומר קיימת שורה מתאימה לעלה זה, שבה כל הכניסות פרט לאחת היא אפס, והכניסה הנותרת היא $\pm 1$. נפתח את הדטרמיננטה לפי שורה זו. נבחין כי המטריצה שנותרנו איתה לאחרת הסרת השורה $u$ והעמודה המתאימה (לקשת היחידה שחלה על $u$) מתאימה שוב לעץ, הפעם על $n-2$ צמתים. נמשיך בתהליך זה של פיתוח הדטרמיננטה לפי העלה הנוכחי, ובכל שלב נכפול את הביטוי הקיים ב-$\pm 1$. לכן $\det (C_v)_F = \pm 1$. ∎

**מסקנה.** עבור הגרף המלא על $n$ צמתים, לכל $v \in V$ מתקיים

$$M_v = \begin{pmatrix} n-1 & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & n-1 \end{pmatrix}$$

לכן לפי **משפט קירכהוף** מתקיים **משפט קיילי**:

$$T_n = \det M_v = n^{n-2}$$

# תורת ראמזי

**הגדרה.** יהא $K_n = (V, E)$ הגרף השלם על $n \in \mathbb{N}$ צמתים. **צביעת קשתות** $K_n$ בשני צבעי כחול ואדום היא פונקציה $c : E \to \{B, R\}$.

נאמר שהגרף השלם יחד עם הצביעה הוא **$k$-ראמזי** אם כל תת-גרף בעל $k \in \mathbb{N}$ צמתים אינו מונוכרומטי, כלומר מכיל לפחות קשת אחת מכל צבע.

**הגדרה.** לכל $2 \leq s, t \in \mathbb{N}$ נסמן ב-$R = R(s,t)$ את המספר הקטן ביותר כך שכל צביעה בקשתות של $K_R$ בשני צבעים - כחול ואדום אינה $s$-ראמזי או אינה $t$-ראמזי.

**משפט (ראמזי / ארדש-סקרש).** יהיו $2 \leq s, t \in \mathbb{N}$. אזי

$$R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$$

טענה. יהיו $2 \leq s, t \in \mathbb{N}$. אזי

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1)$$

הוכחה. נראה שאם מספר הצמתים הוא $\overbrace{R(s-1,t)}^{A} + \overbrace{R(s,t-1)}^{B}$ אז כל צביעה בשני צבעים של $K_{A+B}$ מכילה $K_s$ כחול או $K_t$ אדום.
נבחין כי לא ייתכן שלצומת נתון יש לכל היותר $A-1$ שכנים כחולים ולכל היותר $B-1$ שכנים אדומים. אכן, במקרה כזה מספר שכניו $\geq A-1+B-1 = A+B-2$, אך יש לו $A+B-1$ שכנים ולכן זו סתירה.
נניח בה"כ שיש לצומת $v \in [n]$ כחול כלשהו לפחות $A$ שכנים כחולים. מהגדרת $A$ או שיש $K_t$ אדום בשכונה של $v$, או שיש $K_{s-1}$ כחול בשכונה של $v$ שיחד עם $v$ משרה $K_s$ כחול.
אם $v$ אדום נקבל את אותה מסקנה ולכן סיימנו. ■

**משפט (ארדש-סקרש).** יהיו $r, s \in \mathbb{N}$. אז לכל סדרה של מספרים ממשיים שונים $(r-1)(s-1)+1$ לפחות אחד מהבאים מתקיים:

- קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש מאורך $r$.
- קיימת תת סדרה מונוטונית ורדת ממש מאורך $s$.

# מספרי קטלן

**הגדרה.** יהי $n \in \mathbb{N}$. מחרוזת באורך $2n$ מעל הא"ב $\{(,)\}$ (של סוגריים) נקראת **מאוזנת** אם

1. יש $n$ מופעים של ).
2. בכל רישא מספר המופעים של ) אינו עולה על מספר המופעים של ).

**הגדרה.** יהי $n \in \mathbb{N}$. מספר המחרוזות המאוזנות באורך $2n$ $C_n$ נקרא **מספר קטלן** ה-$n$-י.

**משפט.** לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

**משפט.** לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$.

הערה. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} t^{2n}\sqrt{4-t^2}dt$$

אם $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מוגדרת על ידי

$$\forall i,j \in [n]\,.\;\; c_{ij} = C_{i+j}$$

אזי

$$\det(C) = 1$$

# פונקציות יוצרות

## פונקציות יוצרות

**הגדרה.** תהא $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת מספרים. **הפונקציה היוצרת** של $a$ מוגדרת להיות

$$A(x) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

המקדם של $x^n$ ב-$A(x)$ מסומן על ידי

$$[x^n]\,A(x) \triangleq a_n$$

טענה. הפונקציה היוצרת של הסדרה $\{1\}_{n=0}^{\infty}$ היא $\frac{1}{1-x}$.

### פעולות על פונקציות יוצרות

**הגדרה.** תהא $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם $A(x)$ הפונקציה היוצרת של $a$ אז נגדיר

$$A(cx) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n (cx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n c^n)\, x^n$$

טענה. תהא $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ויהי $c \in \mathbb{R}$. אם $A(x)$ הפונקציה היוצרת של $a$ אז

$$[x^n]\,A(cx) = c^n a_n$$

**הגדרה.** תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. אם $A(x), B(x)$ הפונקציות היוצרות של $a,b$ בהתאמה נגדיר את **החיבור**

$$(A+B)(x)=A(x)+B(x)$$

טענה. תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. אם $A(x), B(x)$ הפונקציות היוצרות של $a,b$ בהתאמה אז

$$[x^n](A+B)(x)=(a+b)_n$$

**הגדרה.** אם $A(x)$ הפונקציה היוצרת של $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ אז נסמן

$$A(x)\longleftrightarrow a_n$$

או

$$A(x)\longleftrightarrow a$$

**הגדרה.** תהא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש-$A(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. נגדיר את **הנגזרת**

$$A^{'}(x)\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x^n\right)^{'}=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

טענה. תהא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש-$A(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. אזי

$$xA^{'}(x)\longleftrightarrow na_n$$

טענה. לכל $m\geq 0$ מתקיים

$$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\longleftrightarrow\binom{n}{m}$$

**הגדרה.** תהא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש-$A(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. נגדיר את **האינטגרל**

$$\int_0^x A(t)\,dt\triangleq\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

טענה. תהא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש-$A(x)$ הפונקציה היוצרת שלה. אזי

$$\int_0^x A(t)\,dt\longleftrightarrow\begin{cases}\frac{a_{n-1}}{n} & n\neq 0\\ 0 & n=0\end{cases}$$

טענה. מתקיים

$$\ln\frac{1}{1-x}\longleftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{n} & n\neq 0\\ 0 & n=0\end{cases}$$

**הגדרה.** תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות מספרים. **הקונבולוציה** $a*b$ מוגדרת לכל $n\in\mathbb{N}$ להיות

$$(a*b)_n \triangleq \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

טענה. תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות מספרים. אז $a*b=b*a$.

**הגדרה.** תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות מספרים. אם $A(x), B(x)$ הפונקציות היוצרות של $a,b$ בהתאמה נגדיר את **הכפל**

$$(A\cdot B)(x) = A(x)\cdot B(x)$$

טענה. תהנא $a=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, b=\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרות מספרים. אם $A(x), B(x)$ הפונקציות היוצרות של $a,b$ בהתאמה אז

$$(A\cdot B)(x) \longleftrightarrow a*b$$

## חילוף מקדמים

**משפט (טיילור).** תהא $f(x)$ פונקציה יוצרת. אזי

$$f(x) \longleftrightarrow \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

**הגדרה.** לכל $x\in\mathbb{R}$ ו-$n\in\mathbb{N}$ נגדיר את **המקדם הבינומי** $\binom{x}{n}$ כך שמתקיים

$$\binom{x}{n} \triangleq \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)}{n!} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}{n!}$$

**משפט (הבינום של ניוטון).** לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$(1+x)^{\alpha} \longleftrightarrow \binom{\alpha}{n}$$

טענה. לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{2}{4^n}(-1)^{n+1} C_{n-1}$$

# השיטה הסימבולית

**הגדרה.** **מחלקה קומבינטורית** היא קבוצה $\mathcal{A}$ יחד עם **פונקצית גודל** $|\cdot|:\mathcal{A}\to\mathbb{N}$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ יש מספר סופי של איברים ב-$\mathcal{A}$ מגודל $n$. כלומר, לכל $n\in\mathbb{N}$ הקבוצה

$$\{a\in\mathcal{A} \,|\, |a|=n\}$$

סופית.

**הגדרה.** תהא מחלקה קומבינטורית $\mathcal{A}$. **יחס סימבולי** הוא משוואה מהצורה

$$\mathcal{A} = f(\mathcal{A})$$

כאשר $f$ אינה פונקציית הזהות.

**הגדרה.** **הפונקציה היוצרת** של מחלקה קומבינטורית $(\mathcal{A},|\cdot|)$ מוגדרת על ידי

$$A(x)=\sum_{a\in\mathcal{A}}x^{|a|}=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}|\{a\in\mathcal{A}\,||a|=n\}|\,x^n$$

**הגדרה (המחלקה האטומית).** $\mathcal{X}_a\triangleq\{a\}$ מחלקה המכילה אך ורק את האיבר $a$ וגודלו $|a|=1$. הפונקציה היוצרת המתאימה היא $X_a(x)=x$. בדרך כלל נסמן $\mathcal{X}_a:=a$.

**הגדרה (המחלקה $\varepsilon$).** נסמן ב-$\varepsilon$ את המחלקה המכילה איבר אחד מגודל 0.

$$\varepsilon(x)=1$$

## פעולות על מחלקות

**הגדרה.** תהינא $\mathcal{A},\mathcal{B}$ מחלקות קומבינטוריות זרות. אז $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ היא המחלקה $(\mathcal{A}\cup\mathcal{B},|\cdot|_{\mathcal{A}}\cup|\cdot|_{\mathcal{B}})$.

טענה. תהינא $\mathcal{A},\mathcal{B}$ מחלקות קומבינטוריות זרות. אז $(A+B)(x)=A(x)+B(x)$.

**הגדרה.** תהינא $\mathcal{A},\mathcal{B}$ מחלקות קומבינטוריות. אז $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ היא המחלקה $(\mathcal{A}\times\mathcal{B},|(\cdot,*)|=|\cdot|_{\mathcal{A}}+|*|_{\mathcal{B}})$.

טענה. תהינא $\mathcal{A},\mathcal{B}$ מחלקות קומבינטוריות. אז $(A\times B)(x)=A(x)\,B(x)$.

**הגדרה.** תהא $\mathcal{A}$ מחלקה קומבינטורית. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}^0\triangleq\varepsilon\\&\mathcal{A}^2\triangleq\mathcal{A}\times\mathcal{A}\\&\mathcal{A}^n\triangleq\mathcal{A}^{n-1}\times\mathcal{A}\end{aligned}$$

**הגדרה.** אם $\mathcal{A}$ מחלקה קומבינטורית כך ש-

$$\{a\in\mathcal{A}\,||a|=0\}=\emptyset$$

אז $\mathrm{SEQ}(\mathcal{A})$ היא המחלקה המוגדרת על ידי

$$\mathrm{SEQ}(\mathcal{A})\triangleq\mathcal{A}^0+\mathcal{A}^1+\mathcal{A}^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{A}^n$$

טענה. תהא $\mathcal{A}$ מחלקה קומבינטורית. אז הפונקציה היוצרת של $\mathrm{SEQ}(\mathcal{A})$ היא

$$\frac{1}{1-A(x)}$$

**הגדרה.** תהא $(\mathcal{A},|\cdot|)$ מחלקה קומבינטורית כך ש-$\{a\in\mathcal{A}\,||a|=0\}=\emptyset$.אז $\mathrm{MSet}(\mathcal{A})$ היא מחלקת המולטי קבוצות של $A$(קבוצה עם חזרות), יחד עם פונקציית הגודל:

$$|\{a_1,\ldots,a_k\}|=\sum_{i=1}^{k}|a_i|$$

טענה. תהא $\mathcal{A}$ מחלקה קומבינטורית. אם $A\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}x^{n}$ הפונקציה היוצרת של $\mathcal{A}$, אז הפונקציה היוצרת של $\mathrm{MSet}\left(\mathcal{A}\right)$ היא

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-x^{n}\right)^{A_{n}}}=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}A\left(x^{n}\right)\right)$$