פונקציה קדומה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\iff(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^{n}|\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\ldots t_n\}$ המקיימות $\forall i\in\{1\ldots n\}.t_i\in[x_{i-1},x_i]$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-L|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f(t)\,dt$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,d\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a,b])=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid \text{אינטגרבילית רימן } f\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot dt=c(b-a)$.

טענה: $D(x)\notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f\in R([a,b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}\text{ נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{ נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי $\omega(f,J)=\sup_{x,y\in J}(f(x)-f(y))$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה ויהי $x_0\in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\iff(\lim_{\delta\to0}\omega(f,[x_0-\delta,x_0+\delta])=0)$.

משפט : תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}\left(I\right).\omega\left(f,I\right)<\varepsilon)$.

תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right)\Delta x_{i}$.

מסקנה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

למה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{2}=\Pi_{1}\cup\{p\}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

מסקנה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{2}=\Pi_{1}\cup\{p_{1}\ldots p_{m}\}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

טענה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\ge\overline{I}\left(f\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קריטריון דרבו משופר : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט : $C\left(\left[a,b\right]\right)\subseteq R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

סימון : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $f_{\restriction_{\left[a,b\right]}}\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $\left(f\in R\left(\left[b,c\right]\right)\right)\wedge\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

משפט : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in\left[a,d\right]$ עבורה $f\in R\left(\left[a,d\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$.

משפט : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$. $\forall b\in\left(a,c\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$. $\forall b\in\left(a,c\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

טענה : תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה : נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$ אזי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$.

מסקנה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט : תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קבוצה ממידה אפס : $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\left\{ \left(a_{i},b_{i}\right)\right\} _{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_{i},b_{i}\right)$ וכן $\sum\left(b_{i}-a_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה : תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\left|A\right|\le\aleph_{0}$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה : תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה : תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_{A}}=g_{\restriction_{A}}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

מסקנה : תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_{i} & x\in\{b_{1}\ldots b_{m}\}\\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_{a}^{c}f\left(x\right)dx=\int_{a}^{c}g\left(x\right)dx$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,c])$ ויהי $b\in(a,c)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $f\geq 0$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ המקיימות $g\leq f$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $m\leq f\leq M$ אזי $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b|f|\leq\sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R([a,b])$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ אזי $F\in C([a,b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $0\leq g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(x_0)\int_a^b g(x)\,dx$.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0\leq g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int_a^{x_0}g(x)\,dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)\,dx$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ אזי $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ יהיו $x_1\ldots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]|_a^b=f(b)-f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

הלמה של בונה: תהא $\substack{f\in C([a,b])\\ f\in C^1((a,b))}$ עבורה $(f'\geq 0)\vee(f'\leq 0)$ ותהא $g\in C([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int_a^{x_0}g(x)\,dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)\,dx$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ עם פיתוח טיילור P_n סביב a אזי $R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\substack{\varphi\in[a,b]^{[\alpha,\beta]}\\ \varphi\in C^1([\alpha,\beta])}$ המקיימת $\substack{\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=-\int_0^{2\pi}f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,dx\right|\leq\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1}(k-2n)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^m\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^m\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty).f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b].f\in R([a,b])$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.(a<b)\implies(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R([a,c])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R\left(I\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{I}\mid\int_{I}f\text{ קיים וסופי}\right\}$.

הערה: מכאן כל המשפטים יהיו חד צדדים ימינה אך תקפים לכל סוגי הקטעים עם שינויים קלים.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\left\{ \infty\right\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{\omega}\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\int_{a}^{\omega}f+\beta\int_{a}^{\omega}g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהי $c\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{a}^{c}f+\int_{c}^{\omega}f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_{a}^{\omega}f\geq\int_{a}^{\omega}g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$. $\forall x\in\left[a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\lim_{b\to\omega}F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f'g=\lim_{b\to\omega}\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{\omega}fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $\underset{\varphi\in C^{1}\left(\left[c,\eta\right)\right)}{\varphi\in\left[a,\omega\right)^{\left[c,\eta\right)}}$ המקיימת $\underset{\lim_{b\to\eta}\varphi\left(b\right)=\omega}{\varphi\left(c\right)=a}$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{c}^{\eta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$. $\forall b\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f\right.$ מתכנס$\left.\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in\left(a,\omega\right).\forall b_{1},b_{2}\in\left[B,\omega\right).\left|\int_{b_{1}}^{b_{2}}f\right|<\varepsilon\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$. $\forall b\in\left(a,\omega\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$. $\forall b\in\left(a,\omega\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ אינו מתכנס אך $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_{a}^{\omega}f\right|\leq\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$.

טענה: תהא $0\leq f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$. $\forall b\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt\right.$ חסומה על $\left.\left[a,\omega\right)\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\leq f\leq g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימות $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$. $\forall b\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\leq f\leq g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימות $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$. $\forall b\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_{a}^{\omega}g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\leq f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\left(\int_{1}^{\infty}f<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\leq f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^{\infty}f\left(n\right)\leq\int_{1}^{\infty}f\leq\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:\left(1,\infty\right)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$.

טענה: $\lim_{s\to1^{+}}\zeta\left(s\right)\left(s-1\right)=1$.

משפט אבל: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)\cap R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $f\in C^{1}\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_{a}^{\omega}fg<\infty$.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_{a}^{x}g$ חסומה ותהא $f\in C^{1}\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $\int_{a}^{\omega}fg<\infty$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\leq n!\leq\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^{n}}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

שאיפה נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^{I}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in I.\lim_{n\to\infty}f_{n}\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

סימון: $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{\text{p.w.}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in C\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in R\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in R\left(I\right)\right)$.
- גבול האינטגרל: נניח $\underset{\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in R\left(I\right)}{f\in R\left(I\right)}$ אזי $\left(\int_{I}f=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\int_{I}f_{n}=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_{n} גזירה אזי $\left(f'\left(x\right)=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f_{n}'\left(x\right)=L\right)$.

שאיפה במידה שווה (במ"ש) : יהי I קטע מוכלל תהא $g \in \mathbb{R}^I$ ויהי $f \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0\right) \iff \left(f_n \xrightarrow{\text{uniform}} g\right)$.

סימון : $\left(f_n \xrightarrow{\text{unifom}} f\right) \iff \left(f_n \overset{\text{u}}{\to} f\right)$.

טענה : תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\left(f_n \overset{\text{u}}{\to} f\right) \iff (\forall \varepsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}.\forall x \in A.\forall n > N.\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

חסומה במידה אחידה : $f_n \in \mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M \in \mathbb{R}.\forall n \in \mathbb{N}.\forall x \in I.\, |f_n(x)| \leq M$.

למה : תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M \in \mathbb{R}$ עבורן $\left(g_n \overset{\text{u}}{\to} g\right) \wedge \left(f_n \overset{\text{u}}{\to} f\right)$ אזי $f_n g_n \overset{\text{u}}{\to} fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה : תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ אזי $\left(\exists f \in \mathbb{R}^I.f_n \overset{\text{u}}{\to} f\right) \iff (\forall \varepsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}.\forall n,m > N.\forall x \in I.\, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$.

משפט : תהיינה $f_n \in C(I)$ עבורן $f_n \overset{\text{u}}{\to} f$ אזי $f \in C(I)$.