יריעה C^m-k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^m\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי $C^\omega\left(A,B\right)=\left\{f:A\to B\mid f\text{ אנליטית מקומית}\right\}$.

יריעה אנליטית k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f:G\to\mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

עקומה: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה חד־מימדית.

משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה דו־מימדית.

היפר־משטח/על־משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה $n-1$ מימדית.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה היפר־משטח חלק.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות עבורן $\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}_\alpha$ יריעה לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה־C^m-k-מימדית ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r\in C^m\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $r\left(G\right)=\mathcal{M}$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r\in C^1\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה לכל $x\in G$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_r\left(x\right)\right)=k$.

הומאומורפיזם: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f\in C\left(A,B\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C\left(B,A\right)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r:G\to A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ עבורן $\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן קיימות $\left\{G_\alpha\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^k\right)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha\subseteq C^m\left(G_\alpha,\mathbb{R}^n\right)$ עבורן $r_\alpha\left(G_\alpha\right)=\mathcal{U}_\alpha$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{U}$ המקיימת $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים כי $\left\{\nabla f_i\left(x\right)\right\}$ בת"ל.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1\ldots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי ($\left\{f_1\ldots f_{n-k}\right\}$ מערכת משוואות רגולרית)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{U}$ עבורו $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{\left(f_1\cdots f_{n-k}\right)}\left(x\right)\right)=n-k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה־C^m-k-מימדית ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{M}=\left\{\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)=0\right\}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\right\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $(0,0,0)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma:I\to\left(0,\infty\right)\times\mathbb{R}$ עקומה אזי $f:I\times\left(0,2\pi\right)\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f\left(t,\rho\right)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\cos(\rho)\\\gamma_1(t)\sin(\rho)\\\gamma_2(t)\end{pmatrix}$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma:I\to\left(0,\infty\right)\times\mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(\gamma\right)$ אזי משפט הסיבוב f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(f\right)$.

טורוס: משטח הסיבוב של $\mathbb{S}^1$.

סימון: נסמן טורוס בעזרת $\mathbb{T}^2$.

משטח אוריינטבילי: משטח $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורו קיימת $N\in C\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{M}.\left(\left|N\left(x\right)\right|=1\right)\wedge\left(N\left(x\right)\perp x\right)$.

למה: טבעת מוביוס אינו משטח אוריינטבילי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^3$ אזי $a\times b=\left(\begin{smallmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{smallmatrix}\right)$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\left(u\times v\right)\perp v$ וכן $\left(u\times v\right)\perp u$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\left(u\in\text{span}\left(v\right)\right)\Longleftrightarrow\left(u\times v=0\right)$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\det\left(u,v,u\times v\right)=\left\Vert u\times v\right\Vert^2\geq0$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\left|v\times u\right|=\left\Vert v\right\Vert\left\Vert u\right\Vert\sin\left(\angle\left(v,u\right)\right)$.

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ממימד k: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן קיים $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם עבורו $f\left(A\right)=f\left(\mathcal{U}\right)\cap\left(\mathbb{R}^k\times\left\{0_{n-k}\right\}\right)$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה אזי פרידיקט P עבורו לכל $a\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה P מתקיימת על $A\cap\mathcal{U}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ התב"ש
- $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית.
- $\mathcal{M}$ מקומית גרף של פונקציה $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל־$\mathbb{R}^k$.

מסקנה: תהא $r:G\to\mathbb{R}^n$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a\in G$ קיימת סביבה $W\subseteq\mathbb{R}^n$ של $\left(a,0_{n-k}\right)$ וקיים דיפאומורפיזם $s:W\to s\left(W\right)$ עבורו $s\restriction_{W\cap\left(G\times0_{n-k}\right)}=r$.

הערה: יריעה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq A$ אזי ($\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־A)$\Longleftrightarrow$($\forall x\in\mathcal{U}.\exists r>0.B_r\left(x\right)\cap A\subseteq\mathcal{U}$).

קבוצה קשירה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל־A מתקיים $\mathcal{U}\in\left\{A,\varnothing\right\}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי (A קשירה)$\Longleftrightarrow$(לא קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset A$ פתוחות יחסית ל־A עבורן $A\in\left\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\right\}$).

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $f:A\to B$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\mathcal{U}\subseteq B$ פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי $f^{-1}\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה יחסית ל־A).

מפה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^k$ הפיכה עבורה $\varphi\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטריזציה טובה אזי $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$.

אטלס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קבוצה של מפות $\mathcal{A}$ עבורה $\bigcup\left\{\mathcal{C}_1\mid\mathcal{C}\in\mathcal{A}\right\}=\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $r:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\left(r\left(\mathcal{U}\right),r^{-1}\right)$ מפה.

העתקת מעבר: תהיינה $\left(\mathcal{U}_1,\varphi_1\right),\left(\mathcal{U}_2,\varphi_2\right)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ המוגדרת $\varphi_{1,2}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$.

טענה: תהיינה $\left(\mathcal{U}_1,\varphi_1\right),\left(\mathcal{U}_2,\varphi_2\right)$ מפות ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $\varphi_i\left(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\right)$ פתוחה עבור $i\in\left\{1,2\right\}$.

טענה: תהיינה $\left(\mathcal{U}_1,\varphi_1\right),\left(\mathcal{U}_2,\varphi_2\right)$ מפות ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $\varphi_{1,2}$ דיפאומורפיזם.

פונקציה C^α מיריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α.

הערה: נניח כי $\mathcal{M}$ יריעה C^α אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ הינה לכל היותר מדרגת חלקות C^α.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ אזי (f הינה C^α)$\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\left\{\left(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קיים ל־$\mathcal{M}$ אטלס.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\dim\left(\mathcal{M}\right)=k$.

פונקציה C^α בין יריעות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה ℓ־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ הינה C^α.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''\right)$ אזי $g\circ f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}''\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(לכל $p\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ של p עבורה קיימת $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ המקיימת $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$).

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ של $\mathcal{M}$ ולכל מפה $\left(\mathcal{V},\psi\right)$ של $\mathcal{M}'$ מתקיים כי $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^{α}).

דיפאומורפיזם C^{α}: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה f הפיכה וכן $f,f^{-1}\in C^{\alpha}$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות דיפאומורפיות אזי $\dim\left(\mathcal{M}\right)=\dim\left(\mathcal{M}'\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהיינה $\left(\mathcal{U},\varphi\right),\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפות באשר $\mathcal{U},\mathcal{V}$ סביבות של p אזי $\text{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)=\text{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)$.

המרחב המשיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\text{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $\dim\left(T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\right)=\dim\left(\mathcal{M}\right)$.

וקטור מהירות: תהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}$.

טענה: תהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}\left(t\right)\in T_{\gamma\left(t\right)}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\left\{ \dot{\gamma}\left(0\right)\mid\left(\gamma\in C^{1}\left(\left(-\varepsilon,\varepsilon\right),\mathcal{M}\right)\right)\wedge\left(\gamma\left(0\right)=p\right)\right\}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהיינה $\gamma_{1},\gamma_{2}:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ מסילות המקיימות $\gamma_{i}\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma}_{i}\left(0\right)=v$ אזי $\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}\right)\right)\left(0\right)$.

נגזרת של פונקציה בין יריעות: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}f:T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\to T_{f\left(p\right)}\left(\mathcal{M}'\right)$ המוגדרת $\left(\mathcal{D}_{p}f\right)\left(v\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma\right)\right)\left(0\right)$ עבור מסילה $\gamma:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma}\left(0\right)=v$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}f$ העתקה לינארית.

משפט כלל השרשרת: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right)=\mathcal{D}_{f\left(p\right)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_{p}f\right)\left(v\right)=\mathcal{D}_{p}\left(f\right)\cdot v$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{ F=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית עבור סביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\text{span}\left(\left\{ \nabla F_{1}\left(p\right),\ldots,\nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\} ^{\perp}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $\left\{ \mathcal{D}_{\varphi\left(p\right)}\varphi^{-1}\left(e_{1}\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi\left(p\right)}\varphi^{-1}\left(e_{k}\right)\right\}$ בסיס של $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

הערה: נגדיר את $\left\{ \mathcal{D}_{\varphi\left(p\right)}\varphi^{-1}\left(e_{1}\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi\left(p\right)}\varphi^{-1}\left(e_{k}\right)\right\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p תהא $\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}'$ באשר $\mathcal{V}$ סביבה של $f\left(p\right)$ אזי $\left[\mathcal{D}_{p}f\right]_{i,j}=\frac{\partial\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)_{i}}{\partial x_{j}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ באשר $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של p וכן $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$ אזי $\mathcal{D}_{p}f=\left(\mathcal{D}_{p}g\right)_{\restriction T_{p}\left(\mathcal{M}\right)}$.

נגזרת כיוונית: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_{v}f=\mathcal{D}_{p}f\left(v\right)$.

טענה: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה בסביבה של p ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_{v}f=\sum_{i=1}^{k}v_{i}\cdot\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_{i}}$.

וקטור נורמל: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\}$ עבורו $v\perp T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

וקטור נורמל יחידה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי וקטור נורמל $v\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\}$ עבורו $\left\Vert v\right\Vert =1$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{ f=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $\frac{\nabla f\left(p\right)}{\left\Vert \nabla f\left(p\right)\right\Vert }$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא Γ_{f} הצגה כגרף בסביבה של p אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1}},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n}},1\right)}{\sqrt{1+\left\Vert \nabla f\left(p\right)\right\Vert ^{2}}}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מכפלה מצולבת: יהיו $v_{1}\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $v_{1}\times\ldots\times v_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\left(-1\right)^{i+1}\det\begin{pmatrix}\left(v_{1}\right)_{1} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{1}\\ \vdots & & \vdots\\ \left(v_{1}\right)_{i-1} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{i-1}\\ \left(v_{1}\right)_{i+1} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{i+1}\\ \vdots & & \vdots\\ \left(v_{1}\right)_{n} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{n}\end{pmatrix}e_{i}$.

הערה: יהיו $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי בצורה לא פורמלית מתקיים $v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \det \begin{pmatrix} e_1 & | & & | \\ \vdots & v_1 & \dots & v_{n-1} \\ e_n & | & & | \end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.

דטרמיננטת גראם: יהיו $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Gamma(v_1 \dots v_m) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \dots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי

- לכל $i \in [n-1]$ מתקיים $v_1 \times \dots \times v_{n-1} \perp v_i$.
- $\|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\Gamma(v_1 \dots v_{n-1})}$.
- $\det(v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}) \geq 0$.

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p \in \mathcal{M}$ ותהא r פרמטריזציה בסביבה של p אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ וקטור נורמל ל־p.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $D : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ לינארית עבורה לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ על $\mathcal{M}$ באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית מתקיים $\mathcal{D}(f \circ \varphi^{-1})(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^k \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \cdot \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f \circ \varphi^{-1})(x)$ עבור $m \in \mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

שדה וקטורי C^m: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $v : \mathcal{M} \to \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p(\mathcal{M})$ עבורה $v(p) \in T_p(\mathcal{M})$ וכן לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ מתקיים כי $x \mapsto \mathcal{D}_x \varphi(v(x))$ העתקה C^m.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי $L_v : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ המוגדרת $L_v(f)(x) = L_{v(x)}(f)$ הינה אופרטור דיפרנציאלי.

תומך: תהא $f \in C(\mathcal{M})$ אזי $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \neq 0\}}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה אזי $C_C^\infty(\mathcal{U}) = \{f \in C^\infty(\mathcal{U}) \mid \text{קומפקטית } \operatorname{supp}(f)\}$.

אופרטור מקומי: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $L : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ עבורה לכל $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה ולכל $f, g \in C_C^\infty$ עבורן $f_{\restriction \mathcal{U}} = g_{\restriction \mathcal{U}}$ מתקיים $L(f)_{\restriction \mathcal{U}} = L(g)_{\restriction \mathcal{U}}$.

סימון: תהא $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ ותהא $\alpha \in \mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f)$.

הגדרה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^\infty(\mathcal{W})$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\|f\|_{W,n} = \sup_{\substack{x \in w \\ |\alpha| \leq n}} \|(\partial^\alpha f)(x)\|$.

טענה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^\infty(\mathcal{W})$ תהא $x \in \mathcal{W}$ עבורה $(\partial^\alpha f)(x) = 0$ לכל $|\alpha| \leq n$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\delta \in (0, \varepsilon)$ וכן $g \in C^\infty(\mathcal{W})$ עבורה

- $g_{\restriction B_{\frac{\delta}{2}}(x)} = 0$.
- $g_{\restriction \mathcal{W} \setminus B_\delta(x)} = 0$.
- $\|f - g\|_{W,n} < \varepsilon$.

סימון: יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

משפט פיטרה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $L : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ לינארית התב"ש

- L אופרטור מקומי.
- לכל $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ מתקיים $\operatorname{supp}(L(f)) \subseteq \operatorname{supp}(f)$.
- L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $x \in \mathcal{V}$ אזי קיימת $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{W}}$ קומפקטית וכן קיים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_C^\infty(\mathcal{W} \setminus \{x\})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \leq C \|f\|_{\mathcal{W},n}$.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ פתוחה עבורה קיימים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_C^\infty(\mathcal{W})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \leq C \|f\|_{\mathcal{W},n}$ אזי L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n.

משפט פירוק יחידה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ כיסוי פתוח של X אזי קיימות $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ עבורן

- לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leq \rho_i \leq 1$.
- לכל $i \in \mathbb{N}$ קיים $\alpha \in \Lambda$ עבורו $\operatorname{supp}(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$.
- לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $|\{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i(\mathcal{W}) \neq 0\}| \in \mathbb{N}$.
- לכל $x \in X$ מתקיים $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i(x) = 1$.

מסקנה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ויהי $L : C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי אזי L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $X \subseteq \mathcal{M}$ ויהי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ כיסוי פתוח ב־$\mathcal{M}$ של X אזי קיימות $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty \subseteq C^\infty(\mathcal{M})$ עבורן

- לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leq \rho_i \leq 1$.
- לכל $i \in \mathbb{N}$ קיים $\alpha \in \Lambda$ עבורו $\operatorname{supp}(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$.

- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\left|\left\{i\in\mathbb{N}\mid\rho_i\left(\mathcal{W}\right)\neq0\right\}\right|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_i\left(x\right)=1$.

מקבילון: יהיו $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Pi\left(v_1\dots v_k\right)=\left\{\sum_{i=1}^{k}t_iv_i\mid\forall i\in\left[k\right].t_i\in\left[0,1\right]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_k\left(\Pi\left(v_1\dots v_k\right)\right)=\sqrt{\Gamma\left(v_1\dots v_k\right)}$.

טענה: יהיו $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^k$ אזי
- $\text{Vol}_k\left(\left(\begin{smallmatrix}v_1\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right),\dots,\left(\begin{smallmatrix}v_k\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right)\right)=\left|\det\left(v_1\dots v_k\right)\right|$.
- תהא $T\in O\left(n\right)$ אזי $\text{Vol}_k\left(Tv_1,\dots,Tv_k\right)=\text{Vol}_k\left(v_1,\dots,v_k\right)$.

קבוצה זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $\varphi\left(E\cap\mathcal{U}\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^k$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית יהי $\left\{\left(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ אטלס של $\mathcal{M}$ ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ אזי (E זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$(לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי $\varphi_\alpha\left(E\cap\mathcal{U}_\alpha\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^k$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהיינה $\left\{E_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}\right)$ זניחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}$.

קבוצת נקודות האי־רציפות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אזי $B_f=\left\{x\in\mathcal{M}\mid x\text{ אינה רציפה על }f\right\}$.

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה
- f חסומה.
- $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטי.
- B_f זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן על יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_E$ אינטגרבילית רימן על $\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי (E מדידה ז'ורדן ב־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$($\varphi\left(E\right)$ מדידה ז'ורדן ב־$\mathbb{R}^k$).

פונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית וכן קיימת מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ עבורה $\text{supp}\left(f\right)\subseteq\mathcal{U}$.

קבוצה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $A\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_A$ נוחה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה $\left\{\left(\mathcal{U}_i,\varphi_i\right)\right\}$ של $\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}_i$ נוחה לכל $i\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימות $f_1\dots f_n:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_i$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה $r_i:G_i\to\mathcal{M}$ פרמטריזציות טובות באשר $G_i\subseteq\mathbb{R}^k$ וכן $i\in\left\{1,2\right\}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{G_1}\left(f\circ r_1\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r_1\right)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r_1\right)\right)}\text{d}q=\int_{G_2}\left(f\circ r_2\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r_2\right)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r_2\right)\right)}\text{d}q$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_G\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r\right)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r\right)\right)}\text{d}q$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_G\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\dots\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)}\text{d}q$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}=\left\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid\left(\text{supp}\left(f\right)\subseteq\mathcal{U}\right)\wedge\left(\text{נוחה ואינטגרבילית רימן }f\right)\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R_{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\dots f_n,g_1\dots g_m:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_i$ וכן $f=\sum_{i=1}^{m}g_i$ אזי $\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{M}}f_i=\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{M}}g_i$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\dots f_n:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_i$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{M}}f_i$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R\left(\mathcal{M}\right)=\left\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid\text{אינטגרבילית רימן }f\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R\left(\mathcal{M}\right)$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R\left(\mathcal{M}\right)\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $f\in R\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f=\int_{\mathcal{M}} \mathrm{dVol}_k$.

מיצוי ז'ורדן של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\left(E_i\right)_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}\right)$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\mathcal{M}$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר B_f זניחה אזי אם קיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות סגורות $\left(E_i\right)_{i=1}^{\infty}$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\lim_{i\to\infty}\int_{E_i}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}=L$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=L$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f\in R\left(\mathcal{M}\right)$ אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $\left(E_i\right)_{i=1}^{\infty}$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\int_{\mathcal{M}}f=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{M}}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}$.

נפח של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\mathrm{Vol}_k\left(\mathcal{M}\right)=\int_{\mathcal{M}}1$.

מפות זרות: מפות $\left(\mathcal{U},\varphi\right),\left(\mathcal{V},\psi\right)$ עבורן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

טענה: תהיינה $\left\{\left(\mathcal{U}_i,\varphi_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ מפות זרות בזוגות על $\mathcal{M}$ תהא $S\subseteq\mathcal{M}$ זניחה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $f_{\restriction_{\mathcal{M}\setminus\left(S\cup\left(\biguplus_{i=1}^{n}\mathcal{U}_i\right)\right)}}=0$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{U}_i}f$.

סימון: תהא $\gamma\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\mathrm{Length}\left(\gamma\right)=\lim_{m\to\infty}\sup_{a=t_0<\ldots<t_m=b}\sum_{i=1}^{m}\left\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\right\|$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\mathrm{Length}\left(\gamma\right)=\int_a^b\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|\mathrm{d}t$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Length}\left(\mathcal{M}\right)=\mathrm{Vol}_1\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית ותהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה אזי $\mathrm{Length}\left(\mathcal{M}\right)=\mathrm{Length}\left(\gamma\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\mathrm{Length}\left(\Gamma_f\right)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'\left(t\right)\right)^2}\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $r,\theta\in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ נגדיר $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}^2$ כך $\gamma\left(t\right)=\left(r\left(t\right)\cos\left(\theta\left(t\right)\right),r\left(t\right)\sin\left(\theta\left(t\right)\right)\right)$ אזי $\left\|\gamma'\right\|=\sqrt{r^2+r'}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Area}\left(\mathcal{M}\right)=\mathrm{Vol}_2\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^3$ יריעה דו־מימדית ותהא $r:G\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה באשר $G\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\mathrm{Area}\left(\mathcal{M}\right)=\int_G\left|\frac{\partial r}{\partial x_1}\left(x\right)\times\frac{\partial r}{\partial x_2}\left(y\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{Area}\left(\Gamma_f\right)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x,y\right)\right\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

טענה: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\det\left(I+uv^T\right)=1+\left\langle u,v\right\rangle$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ אזי $\mathrm{Vol}_k\left(\Gamma_f\right)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x\right)\right\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ ותהא $\alpha:\Gamma_f\to\mathbb{R}$ באשר $\alpha\left(x\right)$ הזווית בין הנורמל של Γ_f בנקודה x לבין ציר e_{k+1} אזי $\frac{1}{\cos\left(\alpha\left(x\right)\right)}=\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x\right)\right\|^2}$.

משפט ארכימדס: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}\left(\mathcal{M}\right)=2\pi h$.

מסקנה: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}\left(\mathcal{M}\right)=2\pi hR$.

קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ היפר־משטחים מקבילים אזי $P_{H_1,H_2}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\max\left\{d\left(x,H_1\right),d\left(x,H_2\right)\right\}\le d\left(H_1,H_2\right)\right\}$.

רוחב קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ היפר־משטחים אזי $\mathrm{Width}\left(P_{H_1,H_2}\right)=d\left(H_1,H_2\right)$.

רוחב גוף: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\mathrm{Width}\left(K\right)=\inf_{\left\{K\subseteq P\mid P\text{ קורה}\right\}}\left(\mathrm{Width}\left(P\right)\right)$.

משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}P_i$ אזי $\mathrm{Width}\left(K\right)\le\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Width}\left(P_i\right)$.

רוחב יחסי של קורה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ותהא P קורה אזי $\mathrm{Width}_K\left(P\right)=\inf_{m\in\mathbb{R}_+}\left\{m\in\mathbb{R}_+\mid\exists a\in\mathbb{R}^n.K\subseteq m\cdot P+a\right\}$.

השערת באנג: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Width}_K\left(P_i\right)$. השערה פתוחה

טענה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי עבורו $K=-K$ ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Width}_K\left(P_i\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ אזי $\varphi^{-1}\left(t\right)$ היפר־משטח.

טענה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi\left(\mathcal{V}\right)=\left(a,b\right)$ ותהא $p\in\mathcal{V}$ אזי קיים $\delta>0$ עבורו לכל $f\in R\left(V_\delta\left(p\right)\right)$ באשר $\mathrm{supp}\left(f\right)$ קומפקטית מתקיים $\int_{B_\delta\left(p\right)}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\left\|\nabla\varphi\left(x\right)\right\|}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x\right)\mathrm{d}t$.

משפט נוחסאת קו־שטח: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi\left(\mathcal{V}\right)=\left(a,b\right)$ ותהא $f\in R\left(\mathcal{V}\right)$ באשר $\mathrm{supp}\left(f\right)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\left\|\nabla\varphi\left(x\right)\right\|}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x\right)\mathrm{d}t$.

גרדיאנט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $u\in T_x\left(\mathcal{M}\right)$ עבורו $\left\langle u,v\right\rangle=L_v\varphi\left(x\right)$ לכל $v\in T_x\left(\mathcal{M}\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי הגרדיאנט של φ בנקודה x הוא $\nabla_x\varphi$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של $x\in\mathcal{M}$ ותהא $\psi\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ באשר $\psi_{\restriction_{\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}}=\varphi_{\restriction_{\mathcal{U}}}$ אזי $\nabla_{x}\varphi=\text{Proj}_{T_{x}\left(\mathcal{M}\right)}\left(\nabla_{x}\psi\right)$.

משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi\left(\mathcal{M}\right)=\left(a,b\right)$ ותהא $f\in R\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{a}^{b}\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\left\Vert \nabla\varphi\left(x\right)\right\Vert }\text{dVol}_{n-1}\left(x\right)\text{d}t$.

מסקנה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}^{k}\right)$ באשר $\text{rank}\left(\mathcal{D}_{x}\varphi\right)=k$ ותהא $f\in R\left(\mathcal{V}\right)$ באשר $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_{\varphi\left(\mathcal{V}\right)}\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{\det\left(\left(\mathcal{D}_{x}\varphi\right)\cdot\left(\mathcal{D}_{x}\varphi\right)^{T}\right)}}\text{dVol}_{n-1}\left(x\right)\text{d}t$.