

מרכיבים: מרחב וקטורי \mathbb{R}^2 מעל \mathbb{R} עם הפעולות הסטנדרטיות.

סימון: נסמן את המרכיבים בעזרת \mathbb{C} .

הערה: נשתמש ב- \mathbb{C} בהתאמה $1 \mapsto (1, 0)$ וכן ההגדרה $i = (0, 1)$.

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי קיימים ויחידים $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $z = a + ib$.

מטריצה קונפורמית: $A \in M_2(\mathbb{R})$ $0 \neq A$ המקיימת $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\exists a, b \in \mathbb{R}$.

סימון: $A \in M_2(\mathbb{R})$ קונפורמית $\iff A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $O(n) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ קונפורמית}\}$.

טענה: ההעתקה $T \in \text{Hom}(\mathbb{C}, O(2))$ המוגדרת $T(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ היא איזומורפיזם.

טענה: תהא $A \in M_2(\mathbb{R})$ אזי $A \iff A$ קונפורמית $\iff A$ הפיכה ושוברת זווית.

מטריצה אנטי-קונפורמית: $A \in M_2(\mathbb{R})$ $0 \neq A$ המקיימת $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ $\exists a, b \in \mathbb{R}$.

טענה: תהא $A \in M_2(\mathbb{R})$ אזי $A \iff A$ אנטי-קונפורמית $\iff A$ הפיכה והופכת זווית.

משפט: תהא $A \in M_2(\mathbb{R})$ אזי קיימות ויחידות $B, C \in M_2(\mathbb{R})$ באשר B קונפורמית או 0 וכן C אנטי-קונפורמית או 0 עבורן $A = B + C$.

מכפלת מרכיבים: יהיו $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ אזי $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

טענה: $i^2 = -1$.

החלק הממשי: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\text{Re}(a + ib) = a$.

החלק המדומה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\text{Im}(a + ib) = b$.

הצמוד: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\overline{a + ib} = a - ib$.

הערך המוחלט: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

מספר מדומה טהור: $z \in \mathbb{C}$ עבורו $\text{Re}(z) = 0$.

מספר ממשי טהור: $z \in \mathbb{C}$ עבורו $\text{Im}(z) = 0$.

למה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי

$$\bullet \overline{\overline{z}} = z$$

$$\bullet |\overline{z}| = |z|$$

$$\bullet z\overline{z} = |z|^2$$

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

מסקנה: \mathbb{C} עם הפעולות שהוגדרו מלעיל הינו שדה.

טענה: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ אזי

$$\bullet \text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\bullet \text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$\bullet \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\bullet \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \text{ נניח כי } w \neq 0$$

$$\bullet |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\bullet \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ נניח כי } w \neq 0$$

$$\bullet -|z| \leq \text{Re}(z) \leq |z|$$

$$\bullet -|z| \leq \text{Im}(z) \leq |z|$$

טענה אי שוויון המשולש: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ אזי $|z + w| \leq |z| + |w|$.

טענה אי שוויון קושי שורץ: יהיו $z_1 \dots z_n, w_1 \dots w_n \in \mathbb{C}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^n z_i w_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\right)^{1/2}$.

מסקנה: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי

$$\bullet |z| - |w| \leq |z - w|$$

$$\bullet |a + ib| \leq |a| + |b|$$

הצגה פולרית/הצגה קוטבית: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

הארגומנט: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z| e^{i\theta}\}$.

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי קיים ויחיד $\theta \in (-\pi, \pi]$ עבורו $z = |z| \cdot e^{i\theta}$.

הארגומנט העיקרי: יהי $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ויהי $\theta \in \arg(z) \cap (-\pi, \pi]$ אזי $\text{Arg}(z) = \theta$.

הערה: יהי $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי הארגומנט העיקרי קיים ויחיד.

הערה: $\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

טענה: יהיו $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ ויהיו $r, s \geq 0$ אזי

$$\overline{r \cdot e^{i\theta}} = r \cdot e^{-i\theta} \bullet$$

$$(r \cdot e^{i\theta}) \cdot (s \cdot e^{i\phi}) = rs \cdot e^{i(\theta+\phi)} \bullet$$

מסקנה: יהיו $w, z \in \mathbb{C}$ אזי $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

טענה: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ ויהי $r > 0$ אזי $(r \cdot e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$

טענה: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ יהי $r \geq 0$ ויהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $(r \cdot e^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta}$

מסקנה נוסאת דה מואבר: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

טענה: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ יהי $r \geq 0$ ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

מסקנה שורשי יחידה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p \in \mathbb{C}_{\geq 1}[x]$ אזי קיים $x \in \mathbb{C}$ עבורו $p(x) = 0$

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{C}_{\geq 1}[x]$ אזי קיימים $a_0 \dots a_n \in \mathbb{C}$ עבורם $p(x) = a_0 \prod_{i=1}^n (x - a_i)$

הקוטב הצפוני: נסמן ב- \mathbb{R}^3 את $N = (0, 0, 1)$

ספירה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

ההמיספרה העליונה: כל הנקודות $(x, y, z) \in S^2$ המקיימות $z > 0$

ההמיספרה התחתונה: כל הנקודות $(x, y, z) \in S^2$ המקיימות $z < 0$

הטלה סטריאוגרפית: נגדיר $f: \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ כך $f(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, 1 - \frac{2}{x^2+y^2+1} \right)$

הערה: במרחב \mathbb{R}^3 נגדיר את \mathbb{C} להיות שני הצירים הראשונים, אז הטלה הסטריאוגרפית היא מבחינה מעשית $f(p) = \text{line}_{p,N} \cap S^1$

טענה: f רציפה.

טענה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי

$$(z \in S^1) \iff (f(z) = z) \bullet$$

$$(f(z)) \iff (z \text{ מחוץ ל-} S^1) \bullet$$

$$(f(z)) \iff (z \text{ בתוך } S^1) \bullet$$

טענה: f הפיכה ומתקיים $f^{-1}: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ כך $f^{-1}(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}$

סימון: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

הספירה של רימן: f ניתנת להרחבה רציפה $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ וכן $f(\infty) = N$

טענה: תהא $A \subseteq S^2 \setminus \{N\}$ אזי A מעגל (או ישר) $\iff f^{-1}[A]$ מעגל (או ישר).

מסקנה: יהי $C \subseteq S^2 \setminus \{N\}$ מעגל ויהי P מישור עבורו $C = P \cap S^2$ אזי $C = f^{-1}[C']$ (ישר) $\iff (N \in P)$

גבול: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z \in \mathbb{C}$ עבורם $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. |a_n - a| < \varepsilon$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $(a_n \rightarrow z) \iff (|a_n - z| \rightarrow 0)$

גבול אינסופי: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ עבורה $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $\forall M \in \mathbb{R}. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. M < |a_n|$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $(a_n \rightarrow \infty) \iff (|a_n| \rightarrow \infty)$

טענה: תהיינה $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהיו $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_n \rightarrow z$ וכן $b_n \rightarrow w$ אזי

$$a_n + b_n \rightarrow z + w \bullet$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow z \cdot w \bullet$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{z}{w} \text{ אזי } w \neq 0 \bullet$$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z \in \hat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_n \rightarrow z$ אזי

$$\overline{a_n} \rightarrow \overline{z} \bullet$$

$$|a_n| \rightarrow |z| \bullet$$

$$\text{Re}(a_n) \rightarrow \text{Re}(z) \bullet$$

$$\text{Im}(a_n) \rightarrow \text{Im}(z) \bullet$$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $(a) \iff (\text{Re}(a), \text{Im}(a))$ מתכנסות.

מסקנה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $(a) \iff (a \text{ מתכנסת}) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N. |a_n - a_m| < \varepsilon)$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $|a_n| \rightarrow 0$ אזי $a_n \rightarrow 0$

מסקנה: תהיינה $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ באשר a חסומה וכן $b_n \rightarrow 0$ אזי $a_n b_n \rightarrow 0$

הערה: מכאן והלאה הסימון \mathbb{F} יתאר שדה מבין \mathbb{R}, \mathbb{C} וכאשר נאמר כי \mathcal{U} פתוחה הכוונה היא ביחס לשדה.

גבול: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה תהא $a \in \mathbb{F}_1$ תהא $A \in \mathbb{F}_2$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$ עבורה

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \iff \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall z \in \mathcal{U} \setminus \{a\}. |z - a| < \delta \implies |f(z) - A| < \varepsilon$$

משפט היינה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה אזי $(\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A) \iff (\forall b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}. (b_n \rightarrow a) \implies (f(b_n) \rightarrow A))$

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה ותהינה $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$ באשר $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ וכן $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = B$ אזי

$$\lim_{z \rightarrow a} (f + g)(z) = A + B \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} (fg)(z) = AB \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(z) = \frac{A}{B} \quad \text{נניח } B \neq 0 \text{ אזי}$$

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}$ פתוחה ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ באשר $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ אזי

$$\lim_{z \rightarrow a} \overline{f(z)} = \overline{A} \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |A| \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(A) \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(A) \quad \bullet$$

גבול אינסופי: תהא $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ויהי $a \in \mathbb{C}$

• שאיפה לאינסוף בנקודה: אם $\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}. |z - a| < \delta \implies M < |f(z)|$ אזי $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

• שאיפה לנקודה באינסוף: אם $\forall \varepsilon > 0. \exists R > 0. \forall z \in \mathbb{C}. R < |z| \implies |f(z) - a| < \varepsilon$ אזי $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a$

• שאיפה לאינסוף באינסוף: אם $\forall M > 0. \exists R > 0. \forall z \in \mathbb{C}. R < |z| \implies M < |f(z)|$ אזי $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$

פונקציה רציפה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה יהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$ המקיימת $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

נגזרת: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$ אזי $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$

פונקציה הולומורפית: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה אזי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה על כל \mathcal{U}

מסקנה: כל מניפולציות הנגזרת של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

הערה: תהא $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ נסמן $u + iv = f$ עבור $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ אזי f גזירה $\iff (v, u)$ גזירות.

למה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה אזי $(f' = 0) \iff (\exists c \in \mathbb{C}. f = c)$

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a)$

מסקנה משוואות קושי-רימן: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה אזי $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \right)$

הגדרה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ דיפרנציאבילית אזי

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \bullet$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \bullet$$

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ גזירה אזי $(f \text{ הולומורפית}) \iff \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \right)$

טענה: תהא $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ אזי f גזירה $\iff (\exists c \in \mathbb{R}. f = c)$

משפט: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ אזי f גזירה ברציפות $\iff \left((u, v \in C^1(\mathcal{U})) \wedge \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right)$

לפליסיאן: תהא $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים אזי $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

פונקציה הרמונית: $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה פעמיים המקיימת $\Delta g = 0$

טענה: תהא $f \in C^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ אזי u, v הרמוניות.

פונקציה צמודה הרמונית: תהא $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $u + iv$ הולומורפית.

טענה: תהא $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ צמודה הרמונית ל- u אזי u צמודה הרמונית ל- $(-v)$.

טענה: יהי $\sum_{i=0}^n a_i z^i \in \mathbb{C}[z]$ אזי $\sum_{i=1}^n a_i i z^{i-1} = \left(\sum_{i=0}^n a_i z^i \right)'$

טענה: יהי $f \in \mathbb{R}[z]$ אזי $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

התכנסות טור: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ עבורה $\sum_{i=0}^n a_n$ מתכנסת.

התכנסות נקודתית: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ויהי $a \in \mathbb{C}$ אזי $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$ עבורה $f_n(a)$ מתכנסת.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$ אזי $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ עבורה

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall x \in \mathcal{U}. \forall n > N. |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$ אזי f מתכנסת במ"ש $\iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N. \forall z \in \mathcal{U} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon)$.

טענה מבחן M של וויירשטראס להתכנסות: תהא $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$ ותהא $M \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ וכן

$\forall x \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \leq M_n$ אזי $\sum_{i=0}^n u_i$ מתכנסת בהחלט ובמ"ש.

טענה: תהא $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ותהא $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$ עבורה $f_n \in C(\mathcal{U})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ וכן $f_n \xrightarrow{u} g$ אזי $g \in C(\mathcal{U})$.

טור חזקות: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ סדרה ויהי $b \in \mathbb{C}$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-b)^i$.

משפט אבל: יהי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ המקיים

• הטור מתכנס בהחלט על $|z| < R$.

• יהי $0 \leq \rho < R$ אזי הטור מתכנס במ"ש על $|z| < \rho$.

• יהי $|z| > R$ אזי $\sum a_n z^n$ לא מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ טור חזקות אזי הפונקציה $\sum a_n z^n$ הולומורפית על $|z| < R$ ובפרט $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i)' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1}$

משפט קושי-הדמר: יהי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ טור חזקות ויהי R רדיוס ההתכנסות אזי $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

טענה: יהיו $g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ פתרונות של המד"ר $(f'(z) = f(z)) \wedge (f(0) = 1)$ אזי $g = h$.

פונקציה מעריכית: נגדיר $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ להיות פתרון של המד"ר $(f'(z) = f(z)) \wedge (f(0) = 1)$.

טענה: $\exp(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$

מסקנה: \exp מתכנסת על \mathbb{C} .

טענה: $e^0 = 1, (e^z)' = e^z$ על כל \mathbb{C} .

מסקנה: $\exp(z) = e^z$

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{C}$ אזי $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $e^z \neq 0$

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$

קוסינוס: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

סינוס: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

מסקנה: e^z הינה $2\pi i$ -מחזורית, \cos, \sin הן 2π -מחזוריות.

טענה: על כל \mathbb{C} מתקיים $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

מסקנה: על כל \mathbb{C} מתקיים $\sin'(z) = \cos(z), \cos'(z) = -\sin(z)$

log: יהי $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי $\log(w) = \text{sols}(e^z = w)$

טענה: יהי $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי $\log(w) = \{\log|w| + i\theta \mid \theta \in \arg(w)\}$

חזקה: יהי $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ויהי $b \in \mathbb{C}$ אזי $a^b = e^{b \log a}$

ענף של arg: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום עבורו $0 \notin \mathcal{U}$ אזי $\alpha \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ המקיימת $\alpha(z) \in \arg(z) \forall z \in \mathcal{U}$.

ענף של log: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום עבורו $0 \notin \mathcal{U}$ אזי $\ell \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ המקיימת $\ell(z) \in \log(z) \forall z \in \mathcal{U}$.

ענף של $\sqrt[n]{\cdot}$: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי $\rho \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ המקיימת $\rho(z) \in \sqrt[n]{z} \forall z \in \mathcal{U}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום עבורו $0 \notin \mathcal{U}$ אזי (קיים ענף של \arg על \mathcal{U}) \iff (קיים ענף של \log על \mathcal{U}).

טענה: בתחום $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ לא קיים ענף של \log .

טענה: יהי $\ell : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ענף של \log אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z) = \frac{1}{z}$

טענה: יהי $\ell : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ענף של $\sqrt[n]{\cdot}$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z) = \frac{1}{n\ell(z)^{n-1}}$

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי (קיים ענף של \log על \mathcal{U}) \iff (קיים ענף של $\sqrt[n]{\cdot}$ על \mathcal{U}).

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום עבורו $0 \notin \mathcal{U}$ אזי (קיים ענף של $\sqrt[n]{\cdot}$ על \mathcal{U}) \iff (קיים ענף של \log על \mathcal{U}).

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ ענף של $\log(1+z)$ בתחום $|z| < 1$.

אינטגרל: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ותהא $f \in C(I, \mathbb{C})$ אזי $\int_I f(t) dt = \int_I u(t) dt + i \int_I v(t) dt$

טענה: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ותהא $f \in C(I, \mathbb{C})$ אזי $|\int_I f(t) dt| \leq \int_I |f(t)| dt$

מסילה: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma \in C(I, \mathbb{C})$

מסילה חלקה למקוטעין: מסילה γ אשר חלקה עד כדי מספר סופי של נקודות ובהן קיימות נגזרות חד-צדדיות מכל סדר.

אינטגרל מסילתי: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע ותהא $\gamma \in C^1(I, \mathbb{C})$ מסילה ותהא $f \in C(\gamma(I), \mathbb{C})$ אזי $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_I f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

רפרמטריזציה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסילה ותהא $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ רציפה ועולה עבורה $\varphi(c) = a$ וכן $\varphi(d) = b$ אזי $\gamma \circ \varphi$

טענה: תהא $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ מסילה ותהא $\gamma \circ \varphi$ רפרמטריזציה גזירה ברציפות אזי $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz$

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסילה אזי $-\gamma : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$ המוגדרת $-\gamma(t) = \gamma(-t)$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$.

סכום מסילות: תהיינה $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ מסילות אזי $(\sum \gamma_i)(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & t \in [a_0, a_1] \\ \vdots \\ \gamma_n(t) & t \in [a_n, a_{n+1}] \end{cases}$ מסילה.

מסקנה: תהיינה $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ מסילות אזי $\int_{\sum \gamma_i} f(z) dz = \sum \int_{\gamma_i} f(z) dz$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת $\gamma(a) = \gamma(b)$.

סימון: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסילה סגורה אזי $\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$.

אינטגרל לפי אורך קשת: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_I f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$.

הערה: מקובל מאוד גם הסימון $\int_{\gamma} f(z) ds = \int_{\gamma} f(z) |dz|$.

אורך מסילה: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} |dz|$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} (f+g)(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz| + \int_{\gamma} g(z) |dz|$.

טענה: תהא γ מסילה ותהא $\varphi \circ \gamma$ רפרמטריזציה אזי $\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz|$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$.

מסקנה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסילה אזי $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left(\int_{\gamma} |dz| \right) \max_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)|$.

אינטגרל על פי צמוד: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} f(z) d\bar{z} = \int_I \overline{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt$.

הגדרה: תהא γ מסילה אזי

$$\bullet \int_{\gamma} f(z) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} f(z) d\bar{z} \right)$$

$$\bullet \int_{\gamma} f(z) dy = \frac{1}{2i} \left(\int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) d\bar{z} \right)$$

טענה: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma} f(z) dz = \left(\int_{\gamma} u(x, y) dx - \int_{\gamma} v(x, y) dy \right) + i \left(\int_{\gamma} u(x, y) dy - \int_{\gamma} v(x, y) dx \right)$.

הערה: מהמשוואה מעיל ניתן לחשוב על כך שמתקיים $dz = dx + i dy$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ותהא $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $g' = f$ אזי לכל מסילה $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ מתקיים

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

משפט קושי למלבן: יהי $R \subseteq \mathbb{C}$ מלבן סגור תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה עבורה $R \subseteq \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$.

משפט קושי למלבן משופר: יהי $R \subseteq \mathbb{C}$ מלבן סגור תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה עבורה $R \subseteq \mathcal{U}$ יהיו $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \subseteq R \setminus \partial R$ ותהא

$$f : \mathcal{U} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ הולומורפית עבורה לכל } i \in [k] \text{ מתקיים } \lim_{z \rightarrow \zeta_i} (z - \zeta_i) f(z) = 0$$

למה: תהא מסילה $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ סגורה חלקה למקוטעין ותהא $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ אזי קיים $k \in \mathbb{Z}$ עבורו $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i k$.

מספר הליפופים: תהא מסילה $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ סגורה חלקה למקוטעין ותהא $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ אזי מספר הליפופים של γ סביב a

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

ענף של $\log(f)$: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\ell \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ המקיימת $\forall z \in \mathcal{U}. \ell(z) \in \log(f(z))$.

ענף של $\sqrt[n]{f}$: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\rho \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ המקיימת $\forall z \in \mathcal{U}. \rho(z) \in \sqrt[n]{f(z)}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ הולומורפית ויהי $\ell : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ענף של $\log(f)$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $\ell : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ ענף של $\sqrt[n]{f}$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z) = \frac{f'(z)}{n\ell(z)^{n-1}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ אזי

$$\bullet (n(f \circ \gamma, 0) = 0) \iff \gamma \text{ מסילה סגורה גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים}$$

$$\bullet (n(f \circ \gamma, 0) \in n\mathbb{Z}) \iff \gamma \text{ מסילה סגורה גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים}$$

טענה: תהא $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ נגדיר $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ כך $F(t) = \int_{\alpha}^t f(\tau) d\tau$ אזי F גזירה וכן $\frac{dF}{dt} = f$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ עבורה לכל γ סגורה מתקיים $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ אזי f בעלת קדומה.

למה: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק תהא $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי קיימת $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית המקיימת $F' = f$.

משפט קושי לדיסק: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ מסילה סגורה אזי $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

משפט קושי לדיסק משופר: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח יהיו $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \subseteq D$ תהא $f : D \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה

$$\text{לכל } i \in [k] \text{ מתקיים } \lim_{z \rightarrow \zeta_i} (z - \zeta_i) f(z) = 0 \text{ ותהא } \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \text{ מסילה סגורה אזי } \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

טענה: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ מסילה סגורה ויהי $a \in \mathbb{C} \setminus D$ אזי $n(\gamma, a) = 0$.

טענה: תהא $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ מסילה ויהיו $a, b \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ לא נחתכת עם γ אזי $n(\gamma, a) = n(\gamma, b)$.

משפט נוסחת האינטגרל של קושי: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ מסילה סגורה תהא $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $n(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$ אזי $a \in D \setminus \gamma([\alpha, \beta])$.

מסקנה משפט הערך הממוצע: יהי $r > 0$ ויהי $a \in \mathbb{C}$ ותהא $f : B_a(r) \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$.

סימון: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ מסילה סגורה תהא $(\gamma([\alpha, \beta]), \mathbb{C})$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $F_n(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n} d\zeta$ כך $F_n : D \rightarrow \gamma([\alpha, \beta])$.

טענה: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ מסילה סגורה תהא $(\gamma([\alpha, \beta]), \mathbb{C})$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי

• F_n רציפה.

• F_n גזירה.

• $F'_n = n \cdot F_{n+1}$.

מסקנה: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח ותהא $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי $f \in C^\infty(D)$.

מסקנה: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $C_r \subseteq D$ מעגל סביב z אזי $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$.

מסקנה: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח ותהא $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ בעלת קדומה אזי f הולומורפית.

מסקנה משפט מוררה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ עבורה לכל $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{U}$ מתקיים $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ אזי f הולומורפית. **פונקציה שלמה:** פונקציה הולומורפית על \mathbb{C} .

משפט ליוביל: תהא $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית וחסומה אזי f קבועה.

טענה חסם קושי לנגזרת: יהי $D \subseteq \mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $C_r \subseteq D$ מעגל סביב z אזי $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \max_{C_r} |f|}{r^n}$.

מסקנה המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) \geq 1$ אזי $\exists \alpha \in \mathbb{C} . p(\alpha) = 0$.

נקודה יחודית/יחודיות/סינגולריות: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה אזי $a \in \mathcal{U}$ עבורה $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית.

נקודת יחודיות סליקה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה אזי $a \in \mathcal{U}$ יחודיות של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ עבורה קיימת הרחבה הולומורפית $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת $\forall z \in \mathcal{U} \setminus \{a\} . g(z) = f(z)$.

הערה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהא $a \in \mathcal{U}$ סליקה עבור $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי קיימת הרחבה יחידה.

משפט: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי $(\lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) = 0) \iff (a \text{ סליקה})$.

משפט טיילור: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי קיימת $f_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k + f_n(z) (z-a)^n$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי C מעגל סביב a אזי לכל $z \in C$ מתקיים $f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n (\zeta-z)} d\zeta$.

אפס: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי עבורה $a \in \mathcal{U}$ $f(a) = 0$.

אפס מסדר n : יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי עבורה $a \in \mathcal{U}$ $f^{(j)}(a) \neq 0$ $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}$ $n = \min$ **למה:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית תהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $f^{(n)}(a) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ויהי $r > 0$ עבורו $\overline{B_r(a)} \subseteq \mathcal{U}$.

אזי $f|_{B_r(a)} = 0$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $f^{(n)}(a) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ אזי $f = 0$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f \neq 0$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אפס אזי הסדר של a סופי.

אפס מבודד: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית אזי אפס $a \in \mathcal{U}$ עבורו $f(z) \neq 0$ $\forall z \in B_r(a) \setminus \{a\}$ $\exists r > 0$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f \neq 0$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אפס אזי a אפס מבודד.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהיינה $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $E \subseteq \mathcal{U}$ בעלת נקודת הצטברות ב- \mathcal{U} נניח כי $f = g$ על E אזי $f = g$ על \mathcal{U} .

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ פתוחה עבורה $f = 0$ על \mathcal{O} אזי $f = 0$ על \mathcal{U} .

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית ותהא γ מסילה עבורה $f = 0$ על γ אזי $f = 0$ על \mathcal{U} .

נקודת קוטב: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי $a \in \mathcal{U}$ יחודית של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ עבורה קיימת $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{a\}$ סביבה של a עבורה $\frac{1}{f}$ מוגדרת היטב בעלת יחודיות סליקה ב- a וכן $\frac{1}{f}(a) = 0$.

הערה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $a \in \mathcal{U}$ יחודית של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ ותהא $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{a\}$ סביבה של a עבורה $\frac{1}{f}$ מוגדרת היטב בעלת יחודיות סליקה ב- a וכן $\frac{1}{f}(a) \neq 0$ אזי a יחודית סליקה של f .

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום תהא $a \in \mathcal{U}$ יחודית של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ אזי $(\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty) \iff (a \text{ קוטב})$.

קוטב מסדר n : יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי $a \in \mathcal{U}$ קוטב של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ אשר אפס מסדר n של $\frac{1}{f}$.

קוטב פשוט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי $a \in \mathcal{U}$ קוטב מסדר 1 של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ קוטב מסדר n של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ אזי קיימת $f_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f(z) = f_n(z)(z-a)^{-n}$ על $\mathcal{U} \setminus \{a\}$.

פונקציה מרומורפית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $E \subseteq \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפית עבורה כל $a \in E$ הינה קוטב של f .

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפיות באשר $g \neq 0$ אזי $\frac{f}{g}$ מרומורפית.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ הולומורפיות באשר $g \neq 0$ אזי

• (מספר האפסים של $\frac{f}{g}$) \geq (מספר האפסים של f).

• (מספר הקטבים של $\frac{f}{g}$) \geq (מספר האפסים של g).

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ מרומורפיות אזי $f+g, f \cdot g$ מרומורפיות.

יחודיות עיקרית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום אזי $a \in \mathcal{U}$ יחודיות של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ אשר אינה סליקה ואינה קוטב של f .

משפט ויירשטראס: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $a \in \mathcal{U}$ יחודיות עיקרית של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ אזי לכל $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה של a מתקיים כי $f(\mathcal{O} \setminus \{a\})$ צפופה ב- \mathbb{C} .

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ תחום ותהא $a \in \mathcal{U}$ יחודיות מבודדת של $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

• $f = 0$.

• קיים $k \in \mathbb{Z}$ עבורו לכל $h < k$ מתקיים $\lim_{z \rightarrow a} |z-a|^h |f(z)| = 0$ וכן לכל $h < k$ מתקיים $\lim_{z \rightarrow a} |z-a|^h |f(z)| = \infty$.

• לכל $h \in \mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{z \rightarrow a} |z-a|^h |f(z)| \notin \{0, \infty\}$.

בונוסים

מטריצת השכנויות: יהי G גרף על n קודקודים אזי $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ המקיים $(\{i, j\} \in E(G)) \iff (A)_{i,j} = 1$.

טענה: יהי G גרף k -רגולרי אזי A לכסינה וכן $\text{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

טענה: יהי G גרף k -רגולרי ויהי $\lambda \in \text{spec}(A)$ אזי $|\lambda| \leq k$.

טענה: יהי G גרף k -רגולרי אזי $k \in \text{spec}(A)$.

משפט: יהי G גרף k -רגולרי אזי $(r_g(k) = 1) \iff (G \text{ קשיר})$.

משפט: תהא $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת $f(z)^2 = z \forall z \in \mathbb{C}$ אזי f אינה רציפה ב- \mathbb{C} .

משפט המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) \geq 1$ אזי $\exists \alpha \in \mathbb{C} : p(\alpha) = 0$.

אפס של פולינום: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) = k$ וכן $p(z) = a \prod (z - a_i)^{\ell_i}$ אזי $\{a_i\}$.

סדר של אפס של פולינום: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) = k$ וכן $p(z) = a \prod (z - a_i)^{\ell_i}$ יהי a_i אפס ℓ_i .

פונקציה רציונלית: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ אזי $\frac{p}{q}$.

סדר של פונקציה רציונלית: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ אזי $\text{ord}\left(\frac{p}{q}\right) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$.

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ זרים ויהי $a \in \mathbb{C}$ אזי

• קוטב מסדר m של $\frac{p}{q}$ אפס של q מסדר m .

• אפס מסדר m של $\frac{p}{q}$ אפס של p מסדר m .

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ זרים אזי

• אם $\deg(p) > \deg(q)$ אזי $\frac{p}{q}$ מסדר ∞ קוטב של $\frac{p}{q}$ מסדר $\deg(p) - \deg(q)$.

• אם $\deg(p) < \deg(q)$ אזי $\frac{p}{q}$ אפס של $\frac{p}{q}$ מסדר $\deg(q) - \deg(p)$.

הגדרה: תהא $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ רציונלית אזי נרחיבה לפונקציה $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ כך

• יהי $z \in \hat{\mathbb{C}}$ קוטב של f אזי $f(z) = \infty$.

• נניח כי ∞ אפס של f אזי $f(\infty) = 0$.

• אם ∞ אינו קוטב ואינו אפס אזי $f(\infty) = \frac{a_n}{b_n}$ כאשר a_n, b_n המקדמים המובילים של הפולינומים בהתאמה.

טענה: תהא $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ רציונלית אזי $\{f \text{ אפסים של } f\} = \#\{f \text{ קטבים של } f\} = \text{ord}(f)$.

טענה: תהא $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ רציונלית ויהי $a \in \hat{\mathbb{C}}$ אזי

• $(\lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0) \iff (a \text{ אפס של } f)$.

• $(\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty) \iff (a \text{ קוטב של } f)$.

מסקנה: תהא $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ רציונלית ויהי $a \in \hat{\mathbb{C}}$ אזי

• $(a \text{ אפס של } f \text{ מסדר } k) \iff (a \text{ אפס של } \frac{1}{f} \text{ מסדר } k)$.

• $(a \text{ קוטב של } f \text{ מסדר } k) \iff (a \text{ קוטב של } \frac{1}{f} \text{ מסדר } k)$.

משפט פירוק סינגולרי: תהא $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ רציונלית אזי קיים יחיד $g \in \mathbb{C}[x]$ ללא מקדם חופשי וכן $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ רציונלית ללא קוטב

ב- ∞ עבורן $f = g + h$.

החלק הסינגולרי ב- ∞ : תהא $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ רציונלית ויהי $f = g + h$ פירוק סינגולרי אזי $g_\infty = g$.

החלק הסינגולרי ב- α : תהא $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ רציונלית נסמן $\tilde{f}(z) = f(\alpha + \frac{1}{z})$ ויהי $\tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}$ פירוק סינגולרי אזי $g_\alpha(z) = \tilde{g}\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)$.

טענה: תהא $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ רציונלית ויהי $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ קוטב אזי g_α בעלת ערך סופי על $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha\}$ וכן $g_\alpha(\alpha) = \infty$.

מסקנה: תהא $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ רציונלית ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$ קוטב אזי $f - g_\alpha$ חסרת קוטב ב- α .

משפט פירוק לשבריים חלקיים: תהא $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ רציונלית עם פירוק סינגולרי $f = g + h$ ויהיו $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$ קטבים אזי קיים

$c \in \mathbb{C}$ עבורו $f = (g + c) + \sum_{k=1}^n g_{\alpha_k}$.

הקוטב הדרומי: נסמן ב- \mathbb{R}^3 את $S = (0, 0, -1)$.

הטלה סטריאוגרפית מהדרום: נגדיר $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ כך $T(x+iy) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2+1} \right)$.
הערה: במרחב \mathbb{R}^3 נגדיר את \mathbb{C} להיות שני הצירים הראשונים, אז ההטלה הסטריאוגרפית מהדרום היא מבחינה מעשית $T(p) = \text{line}_{p,S} \cap \mathbb{S}^1$.

היטל מרקטור: נגדיר $p: [-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}] \times [-\infty, \infty] \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ רציפה כך $p(x+iy) = e^{i(x+iy)}$.
טענה: $p|_{(-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}) \times [-\infty, \infty]}$ חח"ע ועל.

פונקציה קונפורמית: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ דיפרנציאבילית עבורה לכל $a \in \mathbb{R}^2$ מתקיים כי $\mathcal{D}_f(a)$ קונפורמית.
פונקציה קונפורמית: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ דיפרנציאבילית עבורה לכל $p \in \mathbb{R}^2$ קיימת $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ עבורה $\mathcal{D}_f(p) = \begin{pmatrix} a & f_2(p)c - f_3(p)b \\ b & f_3(p)a - f_1(p)c \\ c & f_1(p)b - f_2(p)a \end{pmatrix}$.

הערה: תהא $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ קונפורמית אזי $f(p) \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(p)c - f_3(p)b \\ f_3(p)a - f_1(p)c \\ f_1(p)b - f_2(p)a \end{pmatrix}$.
טענה: תהא $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ קונפורמית ותהא $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ קונפורמית אזי $g \circ f$ קונפורמית.
טענה: p קונפורמית, T קונפורמית.

מסקנה: $T \circ p$ קונפורמית.

עיוות שטח: תהא $p \in \mathbb{R}^2$ אזי $\alpha_T(p) = \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(p) \right\| \left\| \frac{\partial T}{\partial y}(p) \right\|$.
טענה: תהא $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ אזי $\alpha_T(x, y) = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ עבורה $\gamma|_{(a,b]}, \gamma|_{[a,b)}$ חח"ע.

משפט ז'ורדן: תהא $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסילה פשוטה וסגורה אזי קיימים $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ קשירים מסילתית עבורם $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ וכן Ω_1 חסום וכן Ω_2 אינו חסום.

מסקנה: תהא γ מסילה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין ויהי Ω התחום הכלוא על ידי γ אזי מתקיים $\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - \frac{1}{2} \int_{\gamma} y dx$.
משפט: תהא γ מסילה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין ויהי Ω התחום הכלוא על ידי γ אזי $\text{Vol}(\Omega) = -\frac{i}{2} \int_{\gamma} \bar{z} dz$.