```
(a \in \{a_1,\ldots,a_n\}) \Longleftrightarrow ((a=a_1) \lor \ldots \lor (a=a_n)) מתקיים \{a_1,\ldots,a_n\} מתקיים איברים:
                                                                                                       \Sigma^* = igcup_{i=0}^\infty \Sigma^i סימון: תהא \Sigma קבוצה אזי
                טענה: תהא S\subseteq \Sigma^* אזי קיימת ויחידה F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i}	o \Sigma^*\mid i\in I\} ותהא ווחא B\subseteq \Sigma^* אזי קיימת ויחידה \Sigma
                                                                                                                                         .B \subseteq S \bullet
                                                                                                                         .F סגורה להפעלת S
                                                    S\subseteq A אזי F אזי הפעלת סגורה סגורה B\subseteq A עבורה A\subseteq \Sigma^* אזי \bullet
אינדוקציה מבנית: תהא F=\{f_i: \left(\Sigma^*\right)^{n_i}	o \Sigma^*\mid i\in I\} ותהא ותהא B\subseteq \Sigma^* מינימלית מגנית: תהא
                                                                                                                    .B \subseteq X_{B,F} להפעלת F
                              \Sigma אזי F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} 	o \Sigma^* \mid i \in I\} ותהא B\subseteq \Sigma^* אזי קבוצה תהא באינדוקציה מבנית: תהא
                             B אזי אוי F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} 	o \Sigma^* \mid i \in I\} ותהא ותהא B\subseteq \Sigma^* אזי קבוצה תהא באינדוקציה מבנית: תהא
X_{B,F} = \bigcap \{Y \subseteq \Sigma^* \mid (B \subseteq Y) \land (F \; טענה: תהא F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i \in I\} ותהא B \subseteq \Sigma^* ותהא אזיי
```

 $X_{B,F}\subseteq Y$  אזי איזי איזי עבורה  $B\subseteq Y$  אזי אבינדוקציה מבנית: יהי עולם  $\Sigma$  ותהא  $Y\subseteq \Sigma^*$  סגורה להפעלת

Y אזי אולם  $B\subseteq Y$  אזי הפעלת להפעלת להפעלת סגורה אזי אינווריאנטה: יהי עולם בותהא אינווריאנטה:

 $.(p\left(0\right)\land(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n\right)\Longrightarrow p\left(n+1\right)))\Longrightarrow(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n\right))$  מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על  $\mathbb{N}$  אזי

על F אזי ( $a_i \in B$ ) מתקיים ( $a_i \in B$ ) מתקיים ( $a_i \in B$ ) שבורה על ידי הפעלת  $a_i = a$  וכן לכל  $(\{a_1,\ldots,a_{i-1}\}$ תלק מ־

.(aימת סדרת יצירה ל־ $(a \in X_{B,F})$  אזי אירה ל־ $a \in \Sigma^*$  יהי

 $X_{B,F} = igcup_{i=1}^\infty \left\{ a \in \Sigma^* \mid n$  מסקנה:  $a \}$  בעלת סדרת יצירה באורך

 $\Sigma = \{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow,(,)\} \cup \{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$  :עולם תחשיב הפסוקים:

 $a\in\Sigma^*$  יהי תחשיב הפסוקים אזי יהי ביטוי:

אזי  $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$  אזי

- $.\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)"$  •
- $.\lor (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1\lor\omega_2)"$  •
- $:\Longrightarrow (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \Longrightarrow \omega_2)" \bullet$ 
  - $\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)" \bullet$

 $\mathsf{WFF} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow\}}$  : קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק

 $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  עבורו  $p \in \mathsf{WFF}$  פסוק אטומי/יסודי:

(") ונגמר עם "(") מתחיל עם אזי  $p \in \mathsf{WFF}$  יהי טענה: יהי  $p \in \mathsf{WFF}$  אזי אזי ( $p \in \mathsf{WFF}$ 

 $q_1(q_2 \notin \mathsf{WFF}$  אזי  $q_1,q_2 \in \mathsf{WFF}$  מסקנה: יהיו

משפט הקריאה היחידה: יהי אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה: יהי

- . פסוק אטומיlpha
- $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$  •
- $\alpha = (\beta \lor \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$  •
- $\alpha = (\beta \Longrightarrow \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$ 
  - $\alpha = (\neg \beta)$  עבורו  $\beta \in \text{WFF}$  •

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי  $\Sigma$  תחשיב הפסוקים ויהי  $lpha\in\Sigma^*$  ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת היהי לבדיקה האם  $.\alpha \in \mathsf{WFF}$ 

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .¬ .1
- $.\land,\lor$  .2
- .⇒ .3

T, true :אמת:

.F, false :שקר:

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

 $.TT_{\circ}$  אזי טבלת האמת של  $\circ \in \{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow\}$  סימון: תהא

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	p	$q \lor p$	
true	true	true	
true	false	true	
false	true	true	
false	false	false	

q	p	$q \Longrightarrow p$	
true	true	true	
true	false	false	
false	true	true	
false	false	true	

q

true

false

false

true

q	p	$q \Longrightarrow p$	
true	true	true	
true	false	false	
false	true	true	
false	false	true	

 $v:\{p_i\} o \{F,T\}$  השמה: פונקציה

המוגדרת  $\overline{v}: \mathsf{WFF} \to \{F,T\}$  השמה אזי פונקציה השמה לפסוק: תהא השמת ערך אמת לפסוק:

 $q \wedge p$ 

true

false

false

p

true

false

true

q

true

true

false

false

- $.\overline{v}\left(p
  ight)=v\left(p
  ight)$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- $.\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$  אזי  $\bullet$
- $.\overline{v}(\beta \circ \gamma) = TT_{\circ}(\overline{v}(\beta), \overline{v}(\gamma))$  יהיו אזי פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה אזי •

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=T$  עבורה עבורה אזי איי השמה מספקת מסוק: תהא עבורה עבורה מספקת מספקת

 $v \models \alpha$  אזי v מסופקת על ידי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  השמה ותהא v

 $v \not\models \alpha$  אזי אזי אזי מסופקת על ידי א אזי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  אזי השמה v השמר סימון:

המוגדרת Var : WFF  $o \mathcal{P}\left(\{p_i\}\right)$  פונקציה פונקציה בפסוק:

- .Var  $(p) = \{p\}$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- . $\operatorname{Var}(\neg \alpha) = \operatorname{Var}(\alpha)$  אזי •
- . $\operatorname{Var}(\beta \circ \gamma) = \operatorname{Var}(\beta) \cup \operatorname{Var}(\gamma)$  אזי פעולה בינארית פעולה פעולה פעולה  $\beta, \gamma$  יהיי •

 $.\overline{v_1}(lpha)=\overline{v_2}(lpha)$  אזי  $orall p\in {
m Var}(lpha).v_1(p)=v_2(p)$  עבורה  $lpha\in {
m WFF}$  אוי  $v_1,v_2$  איז  $v_1,v_2$  איז

 $.TT_{lpha}$  אזי ניתן לייצג את lpha על ידי  $lpha\in {
m WFF}$  מסקנה: יהי

 $TT=TT_{lpha}$  עבורו קיים  $lpha\in$  WFF מערכת קשרים שלמה עבורה לכל עבורה אמת אבורה לכל עבורה קבוצה קבוצה  $K\subseteq\{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow\}$ .טענה:  $\{\land, \lor, \neg, \Longrightarrow\}$  שלמה פונקציונלית

. טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה עבורה עבורה אזי אזי א שלמה פונקציונלית. מערכת קשרים עבורה אזי אזי א

 $v \models \alpha$  עבורו קיימת השמה v המקיימת  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  עבורו פסוק

 $v \models \alpha$  עבורו לכל השמה v מתקיים  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  טאוטולוגיה: פסוק

 $\models \alpha$  טאוטולוגיה אזי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  טימון: יהי

 $\models (\neg \alpha)$  עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  סתירה: פסוק

 $ar{v}(lpha)=ar{v}(eta)$  מתקיים שקולים: פסוקים  $lpha,eta\in\mathsf{WFF}$  עבורם לכל השמה

 $\alpha \equiv \beta$  שקולים אזי  $\alpha, \beta \in WFF$  סימון: יהיו

 $v \models \alpha$  מתקיים  $\alpha \in \Gamma$  מתקיים עבורה לכל עבורה קיימת השמה עבורה לכל  $\Gamma \subseteq WFF$ 

 $v \models \Gamma$  אזי אוי השמה על ידי השמה קבוצה קבוצה קבוצה  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ 

 $v \models \alpha$  מתקיים  $v \models \Gamma$  מתקיים אוי איי איי איי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  מתקיים עבורו  $v \models \alpha$  מתקיים עבורו לכל השמה  $v \models \alpha$ 

 $\Gamma \models \alpha$  אזי מ־ $\Gamma$  אזי סמנטית מבע פסוק נובע אויהי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  אזי ריהי

טענה: יהיו  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$  אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \bullet$
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \bullet$ 
  - $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \bullet$
  - $.(\alpha \lor \beta) \equiv (\beta \lor \alpha) \bullet$
  - $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \bullet$
  - $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \bullet$ 
    - $\neg (\neg \alpha) \equiv \alpha \bullet$
  - $\neg (\alpha \land \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor (\neg \beta) \bullet$
  - $\neg (\alpha \lor \beta) \equiv (\neg \alpha) \land (\neg \beta) \bullet$

```
\Gamma \models (\neg \alpha) אזי \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta וכן \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta אזי \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} אזי \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} טענה: תהא
                                                                                                                                                                                    (\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta)) אזי (\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}) טענה: יהיו
                                                                                                                                                                                   אטומי אטומי פסוק פסוק p ויהי \alpha, \varphi \in \mathsf{WFF} יהיו הצבת פסוק אטומי אזי
                                                                                                                                                                                                                                                     \alpha (\varphi/p) = \varphi אז \alpha = p אם •
                                                                                                                                                                                                  \alpha\left(\varphi/p\right)=\alpha אזי \alpha
eq p אטומי וכן lpha
                                                                                                                                                                    \alpha(\varphi/p) = \neg \beta(\varphi/p) אזי \alpha = \neg \beta עבורו \beta \in \text{WFF}
                                                        lpha\left(arphi/p
ight)=eta\left(arphi/p
ight)\circ\gamma\left(arphi/p
ight) אז lpha=eta\circ\gamma אם קיימים eta,\gamma\in\mathsf{WFF} וקיימת פעולה בינארית eta
                                                                                                                                                                                 lpha\left(arphi/p
ight)\in\mathsf{WFF} אזי אזי p\in\mathsf{Var}\left(lpha
ight) ויהי lpha,arphi\in\mathsf{WFF} איזי
                                                                                                                        הצבת פסוקים בפסוק: יהיו p_1\dots p_n ויהיו lpha, arphi_1\dots arphi_n\in \mathsf{WFF} היהיו יהיו
                                                                                                                                                                               lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=arphi_{i} אזי i\in\left[n
ight] עבור lpha=p_{i}
                                                                                                                                  lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=lpha אז אז i\in\left[n
ight] לכל לכל lpha
eq p_{i} אם lpha פסוק אטומי וכן
                                                                                                        lpha \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) = 
eg eta \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) אם קיים eta \in \mathsf{WFF} עבורו lpha = \neg eta אזי lpha = \neg eta
lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=eta\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)\circ אם קיימים eta,\gamma\in שולה בינארית עבורה lpha=eta\circ\gamma אם קיימים eta,\gamma\in
                                                                                                                                                                                                                                                                           \gamma \left( \varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n \right)
\overline{v}\left(lpha\left(arphi/p
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אזי v'\left(p_{j}
ight)=\left\{egin{array}{ll} v^{(p_{j})} & i
eq j \ \overline{v}(arphi) & i
eq j \end{array}
ight. השמה נגדיר השמה v אחזי v' אזי v'\left(p_{j}
ight)=\left\{egin{array}{ll} v^{(p_{j})} & i
eq j \ \overline{v}(arphi) & i
eq j \end{array}
ight. השמה נגדיר השמה v' החזי הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו v' היי v' היהיו v' יהיו v' החזי הערכוני שמות: טענה: יהיו v' היי v' היהיו v'
                                                                                                                                                                             \overline{v}\left(lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אא v'\left(p_{j}
ight)=\left\{egin{array}{c} v(p_{j}) & j
otin \ \overline{v}(arphi_{j}) & j
otin \ \overline{
            טאוטולוגיה. \alpha\left(\varphi_1/p_1\ldots\varphi_n/p_n\right) אזי מסקנה: יהי \alpha\left(\varphi_1/p_1\ldots\varphi_n/p_n\right) טאוטולוגיה יהיו \varphi_1\ldots\varphi_n\in WFF ייהיו יהיו
                                                                                                                                                                                   .NNF = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}} :NNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                                                                                  lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{NNF} אזי קיים אזי משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF}
                                                                                                                                                                                                                                 Conj = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}} יימון:
                                                                                                                                                                                                                                    .DNF = X_{\mathrm{Conj},\{\vee\}} :DNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                                                                                   lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m DNF} אזי קיים lpha\in {
m WFF} אזי יהי
                                                                                                                                                                                                                                  Disj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\lor\}} יימון:
                                                                                                                                                                                                                                       .CNF = X_{\mathrm{Disj},\{\wedge\}} :CNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                                                                                   lpha\equiv eta עבורו אזי קיים פיים eta\in \mathrm{CNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF}
                                                   A\subseteq N אזי A\subseteq U_{n-1}^\infty אזי A\subseteq U_{n-1}^\infty אזי אלפבית תהא אוי A\subseteq N תהא A\subseteq N תהא אלפבית הוכחה: יהי C
                                                                                                                                   הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.
                                                                                                                                                       N מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                                                                        A אזי אונחה מערכת הוכחה מערכת (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                                                                    .F אזי אוכחה מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה מללי היסק של מערכת הוכחה
                                                                                                                                                                         X_{A,F} אזי המשפטים: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                                                                                                        \displaystyle \mathop{.}^{\vdash}_{\varsigma} \varphi אזי משפט \varphi \in Nיהי הוכחה מערכת מערכת מערכת S
                                                                              (\Sigma,N,A,F,\Gamma) אזי \Gamma\subseteq N מערכת הוכחה מרכת (\Sigma,N,A,F) מערכת הנחה בעלת הנחות: תהא
                                                                                   X_{A \cup \Gamma,F} איז הנחות היכיחות היכיחות מהנחות: תהא (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי
```

טענה: תהא  $\varphi \in N$ ויהי הוכחה מערכת מערכת S

 $\Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ יכיח אזי  $\varphi \in N$  הנחות ויהי הנכחה תהיינה מערכת מערכת מערכת הוכחה  $\Gamma \subseteq N$ 

 $(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor \beta \bullet$ 

 $.\gamma \models \alpha$  מתקיים  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  למה: יהי  $\gamma \in \mathsf{WFF}$  סתירה אזי לכל

 $\Gamma \models \beta$  אזי  $\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta$  וכן  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$  עבורם  $\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}$  ויהיו  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  עבורם ענה: תהא

- $\Gamma \vdash_S \varphi$  אזי  $\Delta \subseteq \Gamma$  ותהא עבורה  $\varphi$  עבורה עבורה  $\Delta \subseteq N$  אזי מונוטוניות: תהא  $\Delta \vdash_S \varphi$  עבורה עבורה  $\Delta \vdash_S \varphi$  אזי עבורה עבורה  $\Delta \vdash_S \varphi$  עבורה עבורה  $\Gamma \vdash_S \varphi$  אזי עבורה עבורה  $\Gamma \vdash_S \varphi$  אזי עבורה עבורה פרנזיטיביות: תהיינה  $\Phi \vdash_S \varphi$  באשר  $\Phi \vdash_S \varphi$  וכן לכל עבורה עב

arphi מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי  $arphi\in N$  יכיח אזי סדרת יצירה של מערכת הוכחה: תהא

 $f: rac{x_1...x_n}{y}$  אאי  $f(x_1,\dots,x_n)=y$  כלל היסק המקיים כלל היסק ויהי אזי  $f\in F$  אאי מערכת הוכחה אזי S מערכת הוכחה אזי (Ponens Modus): תהא ( $\Sigma,N,A,F$ ) מערכת הוכחה אזי מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

- $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$  אלפבית:
  - $N = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$  :נוסחאות:
    - אקסיומות:
    - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$

$$A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$$

$$.A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$
 -

 $.F = \{MP\}$  כללי היסק:

אזי HPC־טענה: יהיו lpha,eta נוסחאות ב־

 $\begin{matrix} . \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \alpha) \bullet \\ . \vdash_{\mathrm{HPC}} ((\neg \alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta)) \bullet \\ . \{\neg \alpha\} \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet \\ . \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet \end{matrix}$ מסקנה: יהיו  $\alpha, \beta$  נוסחאות ב־HPC באשר  $\alpha, \beta$ 

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון ⊢ הוא במערכת HPC.

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$  אזי HPC משפט הדידוקציה: תהיינה העל HPC משפט הדידוקציה: תהיינה היינה מעל

.Ded  $(\Gamma)=\{lpha\in N\mid\Gamma\vdashlpha\}$  אזי איז  $\Gamma\subseteq N$  ותהא ותהא מערכת הוכחה S

 $\vdash ((\neg (\neg \alpha)) \Longrightarrow \alpha)$  אזי HPC טענה: תהא  $\alpha$  נוסחה מעל

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

 $\left(\Gamma \vdash_{\mathsf{LPC}} lpha
ight) \Longrightarrow \left(\Gamma \models lpha
ight)$  אזי איף HPC משפט הנאותות: תהיינה הנחות מעל

אזי HPC אזי  $lpha,eta,\gamma$  נוחסאות מעל HPC אזי הנחות מעל

$$.((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$$

אזי HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה רהיינה הדיכוטומיה: חנחת מעל

$$((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \land (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$$

 $\Gamma \not\models \alpha$  המקיימת S נוסחה מעל עקבית: תהא מערכת הנחות מעל קבוצת הנחות אזי  $\Gamma$  אזי אזי מערכת הוכחה מעל קבוצת הנחות מעל אזי  $\Gamma$ מתא מעל S הנחחה מעל  $\alpha$  הינחה  $\beta$  אזי ( $\Gamma$  אינה עקבית) הנחחה מעל S הוחח מעל  $\beta$  הנחחה מעל  $\beta$  הינחה מעל מענה:

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל S אזי ( $\Gamma$  עקבית) אוי (לכל  $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \Delta$  סופית מתקיים כי  $\Delta$  עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מעל  $\Delta$  עבורה לכל  $\Delta$  קבוצת הנחות עקבית מעל  $\gamma$  קבוצת הנחות עקבית מעל מקסימלית: תהא מערכת הוכחה  $\gamma$  $\Gamma = \Delta$  מתקיים  $\Gamma \subseteq \Delta$  מתקיים S

 $.lpha\in\Gamma$  אזי די HPC אוי אוי HPC איזי מקסימלית מעל מקסימלית מעל מקסימלית עקבית מקסימלית מעל אזי  $\Gamma\vdash lpha$  איזי די ותהא

 $(\alpha \in \Gamma) \lor (\neg \alpha \in \Gamma)$  אזי HPC טענה: תהא  $\alpha$  נוסחה מעל אקבית מקסימלית מעל אקבית מקסימלית מעל

אזי HPC אזי מעל תוחת עקבית מקסימלית מעל אורר אזי מקסימלית עקבית הנחות עקבית קבוצת הנחות עקבית הנחות עקבית אזי חדיינה  $\Gamma$ 

$$(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg \alpha \in \Gamma) \lor (\beta \in \Gamma))$$

אזי  $\Gamma$  ספיקה. אזי  $\Gamma$  ספיקה אזי  $\Gamma$  ספיקה עקבות הנחות עקבית הנחות עקבית הנחות עקבית חדא

 $\Gamma \subset \Delta$  אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מעל HPC איזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית  $\Delta$ 

ספיקה. אזי  $\Gamma$  אזי HPC איזי קבוצת הנחות קבוצת הנחות סענה: תהא

מסקנה: תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות מעל HPC מסקנה: תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות מעל

 $\left(\Gamma \mathrel{\mathop{\models}} \alpha\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \mathrel{\mathop{\models}} \alpha\right)$  אזי אוי HPC משפט השלמות: תהיינה הנחות מעל

 $(\Gamma dashlpha) \Longleftrightarrow (\Gamma dashlpha)$  אזי איר HPC מסקנה: תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל

משפט הקומפקטיות: תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות מעל HPC אזי אז ( $\Gamma$  ספיקה) שפיקה  $\Delta$  ספיקה ספיקה).

.Ass  $(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \to \{F,T\} \mid v \models \Gamma\}$  אזי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  תהא

 $\{p_i\} \to \{F,T\}$  טענה: הקבוצה  $\{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$  הינה טופולוגיה על

. הינה קומפקטית.  $\{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$  הינה הטופולוגיה

```
קבarphi_G:E	o \mathsf{WFF} אזי אזי (v,u)\in E יהגדרה: יהי f:V	o \mathsf{WFF} תהא מכוון תהא
                                                                                                           .\varphi_G((v,u)) = "f(v) \Longrightarrow f(u)"
           . (סענה: יהי G) אזי G ספיקה אזי (G) טענה: יהי G) טענה: יהי G ספיקה וותהא אזי (G) טענה: יהי G
                     (סופי G' סופי G' סופי G' סופי G' הינו G הינו G הינו G הינו G' מסקנה: יהי
                      .(סטענה: סטופי G' סופי G' סופי G' סופי אר הינו G' בביע) איז איז מכוון אזי היי G גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי ביע
                            K=\operatorname{Ass}\left(\Gamma\right) המקיימת \Gamma\subseteq\operatorname{WFF} המקיימת א עבורה K\subseteq\left\{ p_{i}
ight\} 
ightarrow\left\{ F,T
ight\} המקיימת אדירה:
                                                                                                                                   טענה: Ø גדירה.
                                                                                                                 . גדירה \{p_i\} \rightarrow \{F,T\} גדירה טענה
                                                                                                               . גדירה \{v\} השמה \{v\} גדירה לכל
                                                                                   טענה: קיימת K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}
ightarrow\{F,T\}
ight) שאינה גדירה.
                                                                          K_{\text{finite}} = \left\{ v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid \left| v^{-1} \left( \{T\} \right) \right| < \aleph_0 \right\} שימון:
                                                                                                                       .טענה K_{
m finite} אינה גדירה
K=\operatorname{Ass}\left(\Gamma
ight) סופית המקיימת סופי: קבוצה אימור K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) עבורה קיימת סופית המקיימת אינה אינה באופן סופי.
                                                                                            משפט: תהא K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) התב"ש
                                                                                                                 . גזירה וכו K^{\mathcal{C}} גדירה K
                                                                                                                    . גדירה באופו סופיKullet
                                                                                                            . גדירה על ידי פסוק יחיד K ullet
                      .(\{c_i\in\Sigma\mid i\in\mathbb{N}\}\,,\{R_{n,i}\subseteq\Sigma^n\mid i,n\in\mathbb{N}\}\,,\{f_{n,i}\subseteq\Sigma^n	o\Sigma\mid i,n\in\mathbb{N}\}) מילון: יהי צ אלפבית אזי
                                                                                            .C מילון אזי (C,R,F) מילון אזי במילון
```

 $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{"(",")"\}, \{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\}, \{\forall, \exists\}, \sigma\}$  מילון אזי  $\sigma$  מילון אזי  $\sigma$  אלפבית ויהי אלפבית ויהי לוגיקה מסדר ראשון: יהי

R סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי סימני פונקציה במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי

 $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  משתנים בלוגיקה מסדר ראשון:  $\{"(",")"\}$ 

 $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  כמתים בלוגיקה מסדר ראשון:

משתנה. t סימן קבוע. t

 $.\forall (\alpha, x) = "\forall x \alpha" \bullet$  $.\exists (\alpha, x) = "\exists x \alpha" \bullet$ 

. נוסחה אטומית lpha

מילון סופי: יהי  $\Sigma$  אלפבית אזי מילון  $\sigma$  בעל מספר סופי של סימנים.

בה. בה איי המילון אזי המילון לוגיקה מסדר האשון: תהא בה לוגיקה מסדר האשון אזי המילון בה.

 $t=f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight)$  עבורם  $t_{1}\dots t_{n}$  ושמות עצם  $f_{i,n}$  שמון פונקציה ullet

 $\{R_{n,i}\left(t_1\dots t_n
ight)\mid (i,n\in\mathbb{N})\land ($ נסחאות אטומיות: יהי  $\sigma$  מילון אזי  $t_1\dots t_n)\}$  שמות עבס  $X_{\{R_{n,i}(t_1\dots t_n)\mid (i,n\in\mathbb{N})\land (u,u\in\mathbb{N})\},\{\land,\lor,\neg,\Longrightarrow,\forall,\exists\}}$  משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\alpha$  נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\alpha$ 

 $\alpha = (\beta \circ \gamma)$  עבורן  $\beta, \gamma$  וכן פעולה פיימות ויחידות נוסחאות  $\beta, \gamma$  וכן פעולה בולינארית  $\bullet$ 

lpha="Qxeta עבורם Q עבורם אוכן משתנה eta וכן משתנה eta וכן כמת יחידה נוסחה אוכן פעם: אוכן אוכן דער אוכן אינה אופשי בשם עצם: נגדיר אוכן  $t\} o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}\right)$  כך דע

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי  $\sigma$  מילון ויהי שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה לשמות עצם:

 $X_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i|i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}|i,n\in\mathbb{N}\}}$  שמות עצם מעל מילון: יהי  $\sigma$  מילון

מילון יחסי: יהי  $\Sigma$  אלפבית אזי מילון  $\sigma$  חסר סימני פונקציה.

 $\{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\}$  :קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון

אזי  $\alpha \in \sigma$  אזי משתנה ותהא  $\sigma$  מילון יהי מילון יהי מילון יהי

 $\alpha = "(\neg \beta)$  שבורה  $\beta$  עבורה נוסחה  $\beta$ 

```
. \mathrm{FV} \left( c 
ight) = arnothing יהי c \in \sigma יהי •
                                                                    FV(x) = \{x\} משתנה אזי x \in \sigma יהי
\operatorname{FV}(f(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \operatorname{FV}(t_i) איי איי פונקציה איי f \in \sigma ייהיו שמות עצם ויהי t_1 \dots t_n
```

כך FV :  $\{arphi \mid \sigma \mid \sigma$  נוסחה במילון  $arphi \} o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}
ight)$  כך כך

- $\operatorname{FV}(R(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \operatorname{FV}(t_i)$  אזי יחס אזי ויהי  $R \in \sigma$  יהיו שמות עצם ויהי  $t_1 \dots t_n$ 
  - $\mathsf{FV}(\neg \varphi) = \mathsf{FV}(\varphi)$  נוסחה אזי  $\varphi$  נוסחה •
- $\operatorname{FV}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{FV}(\varphi) \cup \operatorname{FV}(\psi)$  אזי אזי פעולה פעולה פעולה יהי  $\varphi, \psi$  נוסחאות ויהי
  - $\operatorname{FV}(Qx\varphi)=\operatorname{FV}(\varphi)\setminus\{x\}$  עבורם Q עבור משתנה x יהי משתנה  $\varphi$  יהי נוסחה  $\varphi$

 $\mathrm{FV}\left(arphi
ight)=arphi$  עבורה עבורה: נוסחה לוסחה כנוסחה

סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .∀,∃ .1
- .¬ .2
- $.\land,\lor$  .3
- .⇒ .4

וכן  $n\in\mathbb{N}$  חח"ע לכל  $R:\{R_{n,i}\} o D^n$  חח"ע וכן  $C:\{c_i\} o D$  ותהא חח"ע לכל  $D
eq \emptyset$  וכן  $.(D,C\left(c_{0}
ight),\ldots,R\left(R_{2,0}
ight),\ldots,f\left(f_{0,0}
ight))$  אזי  $F:\left\{ f_{n.i}
ight\} 
ightarrow\left(D^{n}
ightarrow D
ight)$ 

D אזי  $\sigma$  אזי מבנה על מבנה: יהי  $\sigma$  מילון ויהי מילון מבנה:

 $D^M=D$  אזי אזי מבנה על  $\sigma$  בעל תחום D אזי מילון ויהי  $\sigma$  מילון יהי

 $(C\left(c_{0}
ight),\ldots,R\left(R_{2,0}
ight),\ldots,f\left(f_{0,0}
ight))$  אזי מבנה על מבנה יהי מבנה: יהי מבנה: יהי מילון ויהי מבנה על מ  $.f_{n,i}^{M}=F\left(f_{n,i}
ight)$  וכן  $R_{n,i}^{M}=R\left(R_{n,i}
ight)$  וכן אזי  $c_{i}^{M}=C\left(c_{i}
ight)$  אזי  $\sigma$  מבנה על  $\sigma$  אזי מבנה על  $\sigma$  $v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\} o D^M$  אזי  $\sigma$  מבנה M מבנה M מילון ויהי מילון יהי

השמה v החותהא היהי מבנה על מבנה מילון יהי  $\sigma$  מילון יהי  $\sigma$  מילון יהי מילון יהי מילון יהי

- $\overline{v}\left(c_{i}
  ight)=c_{i}^{M}$  יהי  $c_{i}\in\sigma$  סימן קבוע אזי  $c_{i}\in\sigma$
- $.\overline{v}\left(x_{i}
  ight)=v\left(x_{i}
  ight)$  יהי  $x_{i}\in\sigma$  משתנה אזי •
- $ar{x}(f(t_1\dots t_n))=f^M\left(\overline{x}(t_1)\dots\overline{x}(t_n)
  ight)$  יהיו שמות עצם ויהי  $f\in\sigma$  סימן פונקציה אזי  $t_1\dots t_n$

 $\forall x \in \mathsf{FV}\left(t\right).v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right)$  שם עצם עבורו t שם אם תהיינה  $v_1,v_2$  תהיינה  $\sigma$  משפט משפט התלות הסופית: יהי  $\sigma$  מילון יהי  $.\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t)$  אזי

> השמה אזי נגדיר איזי ויהי  $d\in D^M$  מבנה איזי יהי a משתנה ויהי a משתנה על a מבנה על מבנה על השמה מתוקנת: יהי a $v\left[d/x_{j}
> ight](x_{i})=\left\{egin{array}{ll} v(x_{i})&i
> eq j\\ d&{
> m else} \end{array}
> ight.$ ערך אמת לנוסחה: יהי  $\sigma$  מילון יהי M מבנה על  $\sigma$  ותהא יהי מילון יהי

- $.(\overline{v}\left(R\left(t_{1}\dots t_{n}
  ight))=T)\Longleftrightarrow\left(\left(\overline{v}\left(t_{1}
  ight),\dots,\overline{v}\left(t_{n}
  ight)
  ight)\in R^{M}
  ight)$  יהיו שמות עצם ויהי  $R\in\sigma$  סימן יחס אזי ויהי  $t_{1}\dots t_{n}$ 
  - $.\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$  נוסחה אזי •
  - $.\overline{v}\left(lpha\circeta
    ight)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(lpha
    ight),\overline{v}\left(eta
    ight)
    ight)$  אזי קשר בינארי אזי פשר מוסחאות ויהי lpha,eta
    - $.(\overline{v}\left(\exists x arphi
      ight) = T) \Longleftrightarrow \left(\exists d \in D^M\left(\overline{v\left[d/x
      ight]}\left(arphi
      ight) = T
      ight)
      ight)$  תהא arphi נוסחה אזי arphi
    - $.(\overline{v}\,(\forall xarphi)=T)\Longleftrightarrow\left(orall d\in D^M\left(\overline{v\,[d/x]}\,(arphi)=T
      ight)
      ight)$  נוסחה אזי arphi

 $\forall x \in \mathsf{FV}(t).v_1(x) = v_2(x)$  משפט התלות הסופית: יהי  $\sigma$  מילון יהי M מבנה על  $\sigma$  תהיינה  $v_1,v_2$  השמות ותהא  $.\overline{v_1}\left(\varphi\right) = \overline{v_2}\left(\varphi\right)$  אזי

 $.\overline{v}\left(arphi
ight)=T$  עבורה על מילון מבנה על מילון מילון מבנה אזי נוסחה מפיקה מבנה: יהי מבנה על מילון

 $M,v\models arphi$  אזי אזי מבנה על מילון  $\sigma$  תהא תהא  $\sigma$  השמה ותהא  $\sigma$  מבנה על מילון יהי

 $M,v \models \varphi$  מבנה ותהא v השמה עבורם  $M,v \models \varphi$  מילון תהא  $v \models \sigma$  מבנה ותהא v השמה עבורם  $\sigma$ 

 $.\overline{v}\left(arphi
ight)=T$  מתקיים arphi מבנה לכל T עבורה לכל עבורה לכל T מתקיים v השמה v השמה v השמה v מתקיים מתקיים מתקיים  $M,v\models\Gamma$  אזי M מבנה על מילון  $\sigma$  תהא  $v\models\Gamma$  השמה ותהא  $\sigma$  קבוצת נוסחאות ספיקה ב

 $M,v\models arphi$  מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה M והשמה v עבורם מילון אזי נוסחה מיים מבנה

ימודל של (M,v) אז (M,v) מילון תהא  $\sigma$  מילון תהא  $\sigma$  נוסחה עבורה לותהא  $\sigma$  מילון תהא  $\sigma$  מילון תהא  $\sigma$  מילון נחחאות נוסחאות נוסחאות ותהא  $\Gamma \models \varphi$  אזי  $\varphi \models \Omega$ .

```
\{\varphi\} \stackrel{t}{\models} \psi וכן \{\psi\} \stackrel{t}{\models} \varphi עבורן \{\psi\} \stackrel{t}{\models} \varphi וכן \{\psi\} \stackrel{t}{\models} \phi נוסחאות \{\psi\} \stackrel{t}{\mapsto} \phi וכן \{\psi\} \stackrel{t}{\mapsto} \phi וכן \{\psi\} \stackrel{t}{\mapsto} \phi
                               .arphi מבנה על \sigma ולכל \sigma השמה מתקיים (M,v)־מודל אזי נוסחה עבורה לכל \sigma מבנה על \sigma ולכל עבורה מבנה על מילון אזי נוסחה מילון אזי נוסחה לכל של מבנה על מבנה על מבנה על מילון אזי נוסחה מילון אזי נוסחה לכל של מבנה על מבנה על
                                                                                                                                                                                                                                                                 \stackrel{\iota}{\models} \varphi יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה t־תקפה אזי \sigma
                                                                                 M,v\models arphi מתקיים מתקיים עבורה לכל עבורה לכל מילון \sigma אזי מילון מילון מבנה: יהי
                                                                                                                                                                                     M\models arphi אזי M מבנה על מילון \sigma ותהא \sigma נוסחה נכונה ב־M
                                                                                                                                                                            M\models arphi עבורו M עבורו \sigma מילון תהא \sigma נוסחה אזי מבנה \sigma
                        M\models arphi מתקיים arphi
                                                                                                                                                 M \models \Gamma אזי מבנה על מילון נוסחאות נוסחאות וותהא קבוצת מילון מילון מילון מילון יהי M
                                                                                                                                                           M\models arphi עבורו עבורה קיים מבנה M עבורו מילון אזי נוסחה \varphi מילון אזי מילון אזי נוסחה עבורה קיים מבנה
\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi אזי \varphi אזי \sigma מילון תהא \Gamma אז אזי \sigma מילון יהי \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma נוסחאות ותהא \varphi נוסחה עבורה אם \sigma
                                                                                                                                                \{arphi\} \stackrel{v}{\models} \psi וכן \{\psi\} \stackrel{v}{\models} \varphi עבורן \{\psi\} \stackrel{v}{\models} \varphi וכן אזי נוסחאות מילון מילון מילון אזי נוסחאות מילון אוני נוס
                                                                                                 .arphi נוסחה \sigma מתקיים M מבנה על \sigma מתקיים \sigma מילון אזי נוסחה \sigma עבורה לכל
                                                                                                                                                                                                                                                              \stackrel{\circ}{\models} \varphi יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה v־תקפה אזי מילון: יהי
                                                                                                                                                                                   .ig( \stackrel{v}{\models} arphi ig) \Longleftrightarrow ig( \stackrel{t}{\models} arphi ig) מסקנה: יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה אזי \exists x arphi תקפה וכן \forall x arphi תקפה. \forall x arphi מילון ותהא \varphi נוסחה תקפה אזי \exists x arphi
                                                                                                                                                                                                            .
הפה. \varphi אזי תקפה א<br/> \forall x\varphiתקבורה עבורה \varphi נוסחה מילון יה<br/>י\sigmaיהי יהי
                                                                                                                \left(\Gamma \stackrel{t}{\models} \varphi\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi\right) יאזי נוסחה ק נוסחאות ותהא ק נוסחה פסוק: יהי \sigma מילון אזי נוסחה \varphi עבורה \varphi עבורה \varphi
                                                                                                                    .\Big(\Gamma \stackrel{t}{\models} arphi\Big) \Longleftarrow \Big(\Gamma \stackrel{v}{\models} arphi\Big) אזי נוסחה אזי קבוצת פסוקים פסוקים ותהא מילון תהא מילון מילון מילון פסוקים ותהא
                                                                .(\Gamma 
otin 
abla \varphi) הינה \Gamma \cup \{\varphi\} הינה \Gamma \cup \{\varphi\} מילון תהא קבוצת נוסחאות ותהא \varphi נוסחה אזי ותהא \sigma מילון תהא \sigma
                                                                                                                   .(עקפה) (\varphi \Longleftrightarrow \psi))\Longleftrightarrow(סענה: יהי \sigma מילון ותהיינה \varphi, \psi נוסחאות אזי (\varphi, \psi הן דשקולות)
                                                                              עבורה G:D^M 	o D^N אזי איזומורפיזם בין מבנים: יהי \sigma מילון ויהיו איזומורפיזם מעל מבנים: יהי מילון ויהיו
```

- $.G\left(c^{M}
  ight)=c^{N}$  מתקיים  $c\in\sigma$  לכל סימן קבוע
- $G\left(f^{M}\left(a_{1}\ldots a_{n}
  ight)
  ight)=f^{N}\left(G\left(a_{1}
  ight)\ldots G\left(a_{n}
  ight)
  ight)$  מתקיים  $a_{1}\ldots a_{n}\in D^{M}$  ולכל  $f\in\sigma$  ולכל סימן פונקציה  $f\in\sigma$
- .  $\left(\left(a_1\dots a_n\right)\in R^M\right)\Longleftrightarrow \left(\left(G\left(a_1\right)\dots G\left(a_n\right)\right)\in R^N\right)$  מתקיים  $a_1\dots a_n\in D^M$  ולכל  $R\in\sigma$  יחס סימן יחס סימן לכל סימן מתקיים מתקיים מתקיים היים מתקיים מתקיים מתקיים היים אולכל סימן יחס א

N-M מ"ל מ"ל מיזומורפיים איזומורפיים: יהי  $\sigma$  מילון אזי מבנים אM,N מעל מעל מילון איזי יהי מילון איזי מבנים איזומורפיים: יהי

 $(M\models\varphi)\Longleftrightarrow (N\models\varphi)$  אזי פסוק אזי  $\sigma$  ויהי מעל מבנים איזומורפיים מבנים מבנים מעל מילון יהיו מילון יהיו

.= עזרת היחס ונסמן את ונסמן ול $^M=\mathrm{Id}_M$  נגדיר ולכל מבנה מילון בעל יחס שיוויון ול דו־מקומי אזי לכל מבנה ול מבנה מילון בעל יחס שיוויון ול

הצבת שם עצם בשם עצם: יהיו r,s שמות עצם ויהי x משתנה אזי

s[r/x] = s אם s סימן קבוע אזי

- s[r/x]=r אזי s=x אם s=x
- $s\left[r/x
  ight]=s$  אם s
  eq x משתנה אזי
- $s\left[r/x
  ight]=f\left(t_1\left[r/x
  ight]\ldots t_n\left[r/x
  ight]
  ight)$  אם  $s=f\left(t_1\ldots t_n
  ight)$  אם  $s=f\left(t_1\ldots t_n
  ight)$

הצבת שם עצם בנוסחה: תהא  $\varphi$  נוסחה יהי r שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- $arphi\left[r/x
  ight]=R\left(t_{1}\left[r/x
  ight]\ldots t_{n}\left[r/x
  ight]
  ight)$  איז  $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
  ight)$  אם ullet
  - $\varphi[r/x] = \neg(\alpha[r/x])$  אז  $\varphi = \neg\alpha$  אם •
  - $.arphi\left[r/x
    ight]=lpha\left[r/x
    ight]\circeta\left[r/x
    ight]$  אם  $arphi=lpha\circeta$  אז  $arphi=lpha\circeta$ 
    - $\varphi[r/x] = \forall x \alpha$  אזי  $\varphi = \forall x \alpha$  אם •
    - $.arphi\left[r/x
      ight]=\exists xlpha$  אזי  $arphi=\exists xlpha$  •
  - $.arphi\left[r/x
    ight]=orall y\left(lpha\left[r/x
    ight]
    ight)$  אם  $arphi=orall y\left(lpha\left[r/x
    ight]
    ight)$  באשר  $arphi=\gamma$
  - $.arphi\left[r/x
    ight]=\exists y\left(lpha\left[r/x
    ight]
    ight)$  אזי x
    eq y באשר  $arphi=\exists ylpha$  .

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא  $\varphi$  נוסחה משתנה משתנה שם עצם חופשי להצבה שו

r אזי שם עצם  $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight)$  אוי שם אם ullet

- lphaאזי שם עצם r באשר אוי שם עצם אזי שם אזי שם arphi
- etaוכן ב־lpha וכן הצבה השר lpha אם עצם אזי שם עצם אזי שם עצם lpha אם lpha
- x אזי שם עצם אזי חופשי ב־ $\varphi=\forall y \alpha$  אם אינו מופיע אינו מופיע אינו פיע יכך אינו פיע
- x אינ שם עצם אינ חופשי ב־ $\varphi=\exists y$  אס אינ מופיע אינ מופיע אינ מופיע אינ  $\varphi=\exists y$
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$  וכן  $\alpha$ ב וכן הצבה ב־שט עצם r אזי שם עצם  $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$  וכן  $\varphi = \forall y \alpha$
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$  וכן  $\alpha$ וכן הצבה ב־ $\alpha$  אזי שם עצם r אזי שם עצם אזי אזי  $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$  וכן  $\varphi = \exists y \alpha$

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר  $f:\{$ וסחאות $\}
ightarrow \mathcal{P}\left(\{x_i\}
ight)$  כך

- $.f\left(arphi
  ight)=arphi$  אזי  $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
  ight)$  אם
  - $f(\varphi) = f(\alpha)$  אז  $\varphi = \neg \alpha$  שם •
- $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$  אזי  $\varphi = \alpha \circ \beta$  אם
  - $f(\varphi)=f(\alpha)\cup\{x\}$  אזי  $\varphi=\forall x\alpha$  אם •
  - $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$  אזי  $\varphi = \exists y \alpha$  אם  $\bullet$

למה: תהא  $\varphi$  נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי (r חופשי להצבה ב־ $\varphi$ (לכל  $y\in \mathrm{FV}(r)$  לא נוצר מופע קשור חדש עבור  $y\in \mathrm{FV}(r)$  ב־ $(\varphi[r/x])$ .

 $v\left[\overline{v}(r)/x
ight](y)=\left\{egin{array}{ll} v(y) & x
eq y \\ \overline{v}(r) & ext{else} \end{array}
ight.$  שם עצם יהי x משתנה ויהי x שם עצם אזי נגדיר השמה s יהי s

 $.\overline{v}\left(s\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(s
ight)$  אזי שם עצם אזי משתנה משתנה x משתנה יהי שם עצם אזי משתנה יהי מ

 $\overline{v}\left(arphi\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(arphi
ight)$  אזי arphi אזי משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־arphi אזי arphi נוסחה יהי z משתנה ויהי

 $\overline{v}\left(arphi
ight)=\overline{v\left[v(x)/y
ight]}\left(arphi\left[y/x
ight]
ight)$  אזי arphi אזי משתנה ויהי y משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה בarphi אזי

טענה שינוי שם משתנה: תהא  $\varphi$  נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־ $\varphi$  אזי

- $(\exists x\varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi [y/x])) \bullet$
- $.(\forall x\varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi [y/x])) \bullet$

 $X_{\{arphi|}$  נוסחה חסרת כמתים PNF: אפורה הנורמלית יוסחה ויסרת נוסחה PNF הצורה הנורמלית

מסקנה: תהא  $\varphi$  נוסחה אזי (Q בצורת PNF) (קיימת נוסחה  $\alpha$  חסרת כמתים וכן  $\alpha$  משתנים וכן בצורת  $\varphi$  בצורת ( $\varphi=Q_1x_1\dots Q_nx_n\alpha$ 

טענה: תהיינה  $arphi,\psi$  נוסחאות אזי

- $(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)) \bullet$
- $(\exists x (\varphi \lor \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \lor (\exists x \psi)) \bullet$
- $.((\forall x\varphi)\lor\psi)\equiv^t(\forall x\,(\varphi\lor\psi))$  אזי  $x\notin\mathrm{FV}\,(\psi)$  תהא
- $.((\exists x\varphi) \land \psi) \equiv^t (\exists x (\varphi \land \psi))$  אזי  $x \notin FV(\psi)$  תהא
  - $(\neg (\forall x\varphi)) \equiv^t (\exists x (\neg \varphi)) \bullet$
  - $.(\neg (\exists x\varphi)) \equiv^t (\forall x (\neg \varphi)) \bullet$

 $arphi arphi \equiv^t lpha$  עבורה PNF משפט: תהא arphi נוסחה אזי קיימת נוסחה משפט

 $arphi=orall x_1\ldotsorall x_n$  המקיימת החסות אוניברסלי: פסוק arphi עבורו קיימת נוסחה החסרת כמתים באשר החסרת אוניברסלי: פסוק עבורו קיימת נוסחה החסרת כמתים באשר

 $x= \exists x_1 \ldots \exists x_n$  המקיימת FV  $(lpha) = \{x_1 \ldots x_n\}$  מסוק lpha עבורו קיימת נוסחה lpha חסרת כמתים באשר

 $(\sigma \cup \{c\})$  ספיקה מעל  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  ויהי סימן קבוע  $c \notin \sigma$  אזי אזי  $c \notin \sigma$  אזי סימן תהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  נוסחה מעל סימן קבוע

 $\sigma\cup\{a_1\dots a_n\}$  סקולמיזציה למילון: יהי  $\sigma$  מילון ויהיו $\sigma 
otan a_1\dots a_n 
otan \sigma$  סימני קבועים ופונקציות אזי

 $a_1\dots a_n$  איזי  $\sigma$  מילון ויהי  $\{a_1\dots a_n\}$  סקולמיזציה של סימני קבועים ל $\sigma\cup\{a_1\dots a_n\}$ 

 $a_1\dots a_n$  אזי  $\sigma$  מילון ויהי  $a_1\dots a_n$  סקולמיזציה של פונקציות ל־ $\sigma$  אזי מילון ויהי

סענה: תהא  $\forall y_n \ (\varphi \left[f^{(y_1...y_n)/x}\right]))$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_n \ (\varphi \left[f^{(y_1...y_n)/x}\right])$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_n \ (\varphi \left[f^{(y_1...y_n)/x}\right])$ 

 $\varphi$ ) עבורו  $\sigma'$  מעל מילון  $\psi$  באשר  $\psi$  באשר שוניברסלי פסוק אוניברסלי  $\varphi$  מעל מילון  $\varphi$  באשר באשר שמיקט. באשר שמיק).

המקיים WFF המקבל מוסחה הסרת משתנים וכמתים arphi מעל מילון ללא שיוויון ומחזיר פסוק המקבל נוסחה הסרת משתנים וכמתים arphi

- $\alpha$  ספיק) ספיק) ספיק).
- .(טאוטולוגיה) מקפה  $\varphi$  (תקפה) •

```
למה: תהא \varphi נוסחה חסרת משתנים וכמתים המורכבת מיחסים lpha_1 \ldots lpha_k נגדיר השמה של v\left(p_i
ight) = (M \models lpha_i) כך עוסחה חסרת משתנים וכמתים המורכבת מיחסים
                                                                                                       (M \models \psi) \iff (\overline{v} (\text{FOLWFF} (\psi)) = T)
                                                                                                          שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.
                                                                                מבנה M מילון ללא שיוויון אזי מבנה \sigma מילון המקיים
                                                                                  a \in D^M לכל a \in D^M לכל a \in D^M לכל
                                                                                            \alpha^M \neq \beta^M יהיו \alpha, \beta שמות עצם שונים אזי \alpha, \beta
                                                            בן־מנייה. D^M אזי אזי \sigma מבנה הרברנד של מבנייה ויהי ויהי M מבנייה מיקנה: יהי מיקנה
                                       D^M = \{ \varphi \mid \sigmaם משתנים ב־ס חסר מעם לכתוב לכתוב כי ניתן לכתוב כי ניתן לכתוב הרברנד נובע כי ניתן לכתוב שם או
                                                                     \sigma על M על מסקנה: יהי \sigma מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד
```

- טענה: יהי  $v\left(x_{i}
  ight)=t_{i}$  מבנה הרברנד מעל  $\sigma$  ותהא ותהא מבנה מבנה מבנה מבנה מעלה:
- $ar{x}(r)=r\left[t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n
  ight]$  אזי FV  $(r)=\{x_1\ldots x_n\}$  שם עצם באשר יהי  $(M,v\models\varphi)\Longleftrightarrow (M\models\varphi\left[t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n\right])$  אזי FV  $(\varphi)=\{x_1\ldots x_n\}$  נוסחה באשר •
  - . עבורו g עבורו g ספיקה) פיקה) ספיקה) פיקה אזי (g עבורו g טפיקה) ספיקה) פיקה) פיקה) פיקה
- . תקפה)  $\varphi$  [s/x] מחקפה איז (קיים שם עצם סגור איז (s-1) מחקפה) מקפה) פיסוק איז (s-1) מחקפה פיסוק איז מקפה).
  - . (מתקיים כי  $\varphi[s/x]$  ספיקה) מתקיים כי ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה אזי  $\varphi$
- $\varphi[s/x]$  מתקיים כי g מתקיים לכל שם עצם חסר משתנים אזי (קפה) אזי  $\varphi[s/x]$  תקפה).

משפט  $\varphi$ ( $\varphi$ ) ספיק פסוק אוניברסלי אזי ( $\varphi$  ספיק ספיק במבנה הרברנד). משפט מילון ויהי

אזי FV  $(arphi)=\{x_1\dots x_n\}$  מופעי בסיס: תהא arphi נוסחה חסרת כמתים באשר

.GroundInstance  $(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma}$  GroundInstance  $(\varphi)$  אוניברסליים אוניברסליים אזי קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי

טענה: תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים סגורים וכמתים אזי ( $\Gamma$  ספיקה) ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- . ספיקה Γ •
- ספיקה במבנה הרברנד.  $\Gamma$
- .ספיקה GroundInstance  $(\Gamma)$
- ספיקה במבנה הרברנד. GroundInstance  $(\Gamma)$

משפט הקומפקטיות: יהי  $\sigma$  מילון ללא שיוויון תהא קבוצת נוחסאות ותהא מילון נוסחה אזי משפט הקומפקטיות:

- . (מ ספיקה) לכל  $\Delta\subseteq \Gamma$  סופית  $\Delta$  ספיקה).  $\Delta$  ספיקה) לכל  $\Delta\subseteq \Gamma$  ספיקה) לכל ( $\Gamma\models \varphi$ ).  $\Delta\subseteq \Gamma$  (קיימת  $\Delta\subseteq \Gamma$ ).
- $\Delta\subseteq \Gamma$  סופית עבורה ( $\Gamma\models \varphi$ ). ( $\Gamma\models \varphi$ )

(y)טענה: יהיו (x,y) משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות (x,y) מעל (x,y) משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות (x,y)עבורם  $t_1 \dots t_n$  נוסחה ללא כמתים מעל  $\sigma$  אזי ( $\pi$ תקפה) שמות עצם סגורים  $\varphi$  נוסחה ללא כמתים מעל  $\sigma$  אזי ( $\pi$ תפה) שמות עצם סגורים  $\varphi$ תקפה).  $\varphi[t_1/x] \vee \ldots \vee \varphi[t_n/x]$ 

 $a \in D^H$  עבורו עבורו עבורו לכל עבורו לכל איים שם עצם איים שם עצם מעל מעל מעל מעל מעל מיים מבנה הנקין: יהי  $\sigma$  מיילון איי מבנה H

הערה: ניתן להגדיר מילון ומבנה לא בני־מנייה.

משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי  $\sigma$  מילון בן־מנייה ותהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  אזי  $(\varphi)$  ספיקה) $(\varphi)$ קיים מבנה בן־מנייה M מעל  $\sigma$ 

אזי לכל  $\varphi$  משפט האיז מעל  $\sigma$  באשר פיקה ב־M מילון בן־מנייה היי מילון באשר משפט מילון באשר מילון בן־מנייה היי משפט מילון באשר מילון באשר מילון בא מילון בי .M'בסיקה כי מתקיים  $\sigma$  מעל מעוצמה M'מעונה ולכל מבנה אינסופית עוצמה אינסופית מעוצמה M'

משקנה: יהי  $\sigma$  מילון בן־מנייה ותהא  $\kappa$  עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  מעל  $\sigma$  המקיימת

 $(|M| = \kappa) \iff (M \models \Gamma)$ 

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

.VALID =  $\{\varphi \mid (\sigma \text{ tidn } \varphi) \land (\sigma$  מילון אזי  $\{\varphi \mid (\sigma \varphi) \land (\sigma \varphi) \land (\sigma \varphi) \}$  מילון אזי

 $ext{NALID} \in \mathcal{RE}$  משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי  $\sigma$  מילון אזי

 $^{\prime}$  אור. אור אור אורינג: HALT  $<_m$  אורינג:

.VALID  $\notin \mathcal{R}$  מסקנה:

בעזרת  $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$  את ניתן לרצף אזי האם צבועה צבע שלהם צבועה בעלי צלע מאורך  $R_1 \dots R_n$  בעזית הריצוף: יהיו ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

עבורה  $f:\mathbb{N}^2 o [n]$  אזי  $R:[n]^2 imes \{ ext{left, right, above, below}\} o \{ ext{yes, no}\}$  עבורה  $n\in\mathbb{N}_+$  יהי

- $R\left(f\left(egin{array}{c}n\\m\end{array}
  ight),f\left(egin{array}{c}n-1\\m\end{array}
  ight),$  left) = yes מתקיים  $n\in\mathbb{N}_{+}$  ולכל  $m\in\mathbb{N}$ 
  - $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n+1\\m\end{smallmatrix}\right),\mathrm{right}\right)=\mathrm{yes}$  מתקיים  $m,n\in\mathbb{N}$  לכל
- $R\left(f\left(egin{array}{c}n\\m+1\end{array}
  ight),f\left(egin{array}{c}n\\m+1\end{array}
  ight),$  above) = yes מתקיים  $n\in\mathbb{N}_{+}$  ולכל  $m,n\in\mathbb{N}$ 
  - $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n\\m-1\end{smallmatrix}\right),$ below)= yes מתקיים  $n\in\mathbb{N}$  ולכל  $m\in\mathbb{N}_{+}$  לכל

.TILING =  $\{(n,R,f) \mid R$  שימון:  $\{f\}$  פתרון לבעיית הריצוף עבור

.VALID  $\leq_m$  TILING :משפט

.TILING  $otin \mathcal{R}$  מסקנה:

יחס דו־מקומי המקיים  $E \in \sigma$  מילון אזי  $\sigma$  מילון יחס דו־מקומי יחס מילון יחס מילון יחס מילון יחס מילון יחס מילון

- $\forall x (E(x,x))$  רפלקסיבי:
- $\forall x \forall y (E(x,y) \Longrightarrow E(y,x))$  : סימטרי:
- $. \forall x \forall y \forall z \left( \left( E\left( x,y \right) \wedge E\left( y,z \right) \right) \Longrightarrow E\left( x,z \right) \right) :$  טרנזיטיבי:
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
  ight)
  ight) \Longrightarrow E\left(f\left(x_1 \ldots x_n
  ight), f\left(y_1 \ldots y_n
  ight)
  ight)
  ight)$  סימן פונקציה מתקיים  $f \in \sigma$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
  ight)\right) \Longrightarrow \left(R\left(x_1 \ldots x_n\right) \Longleftrightarrow R\left(y_1 \ldots y_n\right)\right)\right)$  סימן יחס מתקיים  $\theta \in \mathcal{S}$  לכל  $\theta \in \mathcal{S}$

הערה: במקום שיוויון  $\sigma$  ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן  $\sigma_E$  את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

מעל  $\sigma_E$  מעל מבנה  $M_E$  מבנה אזי מבנה M מבנה על שיוויון ויהי מילון יהי מילון יהי מילון מחלקות קונגרואנציה:

- $.D^{M'}=D^{M}/E \bullet$
- $.f^{M'}\left([a_1]_E\,,\ldots,[a_n]_E
  ight)=\left[f^M\,(a_1\ldots a_n)
  ight]_E$  מתקיים לכל סימן פונקציה לכל סימן פונקציה ש
  - $R^{M'}\left([a_1]_E,\ldots,[a_n]_E
    ight) \Longleftrightarrow R^M\left(a_1\ldots a_n
    ight)$  מתקיים  $R\in\sigma$  לכל סימן יחס  $R\in\sigma$

 $\sigma'$  משפט:  $\phi$  מעל מילון  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון מחזיר נוסחה חסרת שיוויון  $\sigma$  מעל מילון עם שיוויון  $\psi$  באשר  $\psi$  באשר  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון עם שיוויון  $\phi$  ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון  $\psi$  באשר  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון עבורו ( $\phi$  ספיק).

. (ספיקה) $\iff$  (ספיקה) משפט: תהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות מעל  $\sigma$  עם שיוויון אזי  $\Gamma$ 

 $\Delta$  סופית G סופית (לכל G ספיקה) משפט הקומפקטיות: יהי G מילון עם שיוויון תהא קבוצת נוחסאות ותהא קבוצת נוחסאות ותהא ספיקה).

עבורו מבנה אזי מבנה  $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$  עבורו: יהי יהי מבנה אזי מבנה אזי מבנה

- $c_1^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}=1$  וכן  $c_0^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}=0$  וכן  $D^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}=\mathbb{N}$ 
  - $.f_{+}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\left(a,b\right) = a + b \bullet$
  - $f_{\times}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a,b) = a \times b \bullet$
  - $.((a,b) \in R^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}) \iff (a>b) \bullet$

.AT =  $\{\alpha \mid (\mathcal{M}_{\mathbb{N}} \models \alpha) \land (\mathsf{FV}(\alpha) = \varnothing)\}$  אזי  $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$  מילון יהי מילון

 $M_\mathbb{N}$  וכן  $M \models$  AT אינו איזומורפי ל $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$  וכן אינו איזומורפי ל $M \models$  AT מודל לא סטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון איזי  $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$  איזי מענה: יהי M מודל לא סטדנרטי של הטבעיים איזי  $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_+\}$ 

. Gen :  $\frac{\alpha}{\forall x\alpha}$  אזי נוסחה מילון ותהא  $\sigma$  יהי כלל ג'ן: יהי כלל

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי  $\sigma$  מילון חסר שיוויון אזי

- $.\Sigma=\sigma$  :אלפבית
- $N=X_{\{t\mid \text{ver}\ t\},\{\neg,\Longrightarrow,\forall\}}$  נוסחאות: •

- אקסיומות:
- $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$  -
- $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$  -
  - $A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$  -
- $A_4 = ((orall x lpha) \Longrightarrow lpha \, [t/x])$  יהי איי חופשי להצבה במקום x ב־מ
  - $A_5 = ((\forall x \, (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow (\forall x \beta)))$ אזי  $x \notin FV(\alpha)$  יהי -
    - $.F = \{ MP, Gen \}$  כללי היסק:

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

 $(\Gamma \buildrel e^v) \Longrightarrow (\Gamma \buildrel e^v)$  אזי אור נוסחה מעל ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל אור הניתנה  $\Gamma$  הנחות תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל אור רוב אור איי וויינן עהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל  $\Gamma$  הנחות מעל  $\Gamma$  בשר אויינן עלא שיוויון עהיינה  $\Gamma$  בשר אויינן על באשר אויינה אויינה  $\Gamma$  באשר אויינה  $\Gamma$  באשר אויינה  $\Gamma$  הנחות מעל  $\Gamma$  וועהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל  $\Gamma$  ווער ביז אזי ווער על משתנה חופשי ביז אזי וויינון אויינה  $\Gamma$  הנחות מעל  $\Gamma$  ווער ביז אזי ווער של משתנה חופשי ביז אויינה  $\Gamma$  הנחות מעל בער הנחות מעל פריער משתנה חופשי ביז אויינה שיינה וויינה וויינה וויינה וויינה של הנחות מעל פריער משתנה חופשי ביז אויינה וויינה שיינה וויינה וו

על משתנה חופשי ב־ $\alpha$  אזי ( $\alpha\Longrightarrow\beta$ ) אזי ( $\alpha\Longrightarrow\beta$ ) אזי למשתנה חופשי ב- $\alpha$  אזי ( $\alpha\Longrightarrow\beta$ ) אזי ( $\alpha\Longrightarrow\beta$ ) וכן בהוכחות משפט הדידוקציה: תהיינה  $\alpha$  הנחות מעל HC ותהיינה  $\alpha$  ותהיינה  $\alpha$  וחסאות מעל HC עבורן וור  $\alpha$  וכן בהוכחות לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב- $\alpha$  אזי  $\alpha$  אזי קבוצת נוסחאות  $\alpha$  מעל  $\alpha$  עבורה לכל פסוק  $\alpha$  מעל  $\alpha$  מתקיים מעל  $\alpha$  מתקיים באשר  $\alpha$  מילונים באשר  $\alpha$  באשר  $\alpha$  אזי קבוצת נוסחאות  $\alpha$  מעל  $\alpha$  מעל  $\alpha$  מעל  $\alpha$  מתקיים

 $\Gamma\subseteq \Delta$  המקיימת  $\Sigma$  המקיימת  $\sigma$  עקבית יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית אזי קיים מילון  $\sigma\subseteq \Sigma$  וקיימת עקבית אזי קיים מילון ותהא

 $\Gamma \cup \{ \neg \varphi \, [c/x] \}$  יהי  $\sigma$  מילון תהא עקבית עקבית עקבית באשר  $\sigma \neq \sigma$  פסוק וכן  $\sigma \neq \sigma$  ויהי  $\sigma \neq \sigma$  טימן קבוע אזי  $\sigma \neq \sigma$  עקבית מעל  $\sigma \in \sigma$ 

 $\Gamma\subseteq \Delta$  משפט הנקין: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית אזי קיים מילון  $\sigma\subseteq \Sigma$  וקיימת של עקבית אזי קיים מילון עבורה  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית אזי קיים מילון עבורה אזי קיים מילון  $\sigma\subseteq \Sigma$  וקיימת של מעל  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית  $\sigma$  מילון ותהא  $\sigma$  עקבית אזי קיים מילון  $\sigma$  וקיימת  $\sigma$  וקיימת  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית  $\sigma$ 

 $ig((t_1\dots t_n)\in R^Mig)\Longleftrightarrow$  עבורו מעל  $\sigma$  עבור מבנה ההרברנד מעל מבנה המקיימת את תכונת המקיימת את עצם M מבנה ההרברנד מעל G עבורו G עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין יהי G ולכל שמות עצם G ולכל שמות עצם G ולכל שמות עצם G ולכל שמות עצם G ולכל סימן יחס G ולכל שמות עצם G ולכל שמות עצם

 $M\models\Gamma$ עבורו מבנה מיים היים הנקין אזי תכונת את את שלמה שלמה עקבית עקבית מיים מיים מיים יהי יהי מסקנה: יהי שלמה שלמה שלמה מסקנה או מסקנה

 $\left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$  אזי ( $\Gamma \overset{v}{\models} \alpha$ ) אזי ( $\Gamma \overset{v}{\models} \alpha$ ) אזי ( $\Gamma \overset{v}{\models} \alpha$ ).  $\Gamma \overset{v}{\models} \alpha$  משפט השלמות של גדל: יהי  $\Gamma \overset{v}{\mapsto} \alpha$  מילון ללא שיוויון תהיינה  $\Gamma \overset{v}{\mapsto} \alpha$  ותהא  $\Gamma \overset{v}{\mapsto} \alpha$  נוסחה מעל  $\Gamma \overset{v}{\mapsto} \alpha$  מבנה: יהי  $\Gamma \overset{v}{\mapsto} \alpha$  מבנה: יהי  $\Gamma \overset{v}{\mapsto} \alpha$  מסקנה:  $\Gamma \overset{v}{\mapsto} \alpha$  מסקנה:  $\Gamma \overset{v}{\mapsto} \alpha$ 

טענה: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים התב"ש

- . Th  $(M)=\operatorname{Th}\left(N\right)$  מתקיים מתקיים M,N המספקים לכל •
  - לכל פסוק  $\varphi$  מתקיים ( $(\neg \varphi) \lor (\Gamma \vdash (\neg \varphi))$ ).