```
. שהינה דו־מימדית \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n משטח: יריעה
                                                                                                                               . מימדית n-1 שהינה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מימדית מימדית מיפר־משטח/על־משטח:
                                                                                                                                                                       . טענה: \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n הינה היפר־משפט חלק\mathbb{S}^n
                                                                                                                                                          הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.
יריעה לכל \mathcal{M}\cap\mathcal{U}_{lpha} אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_{lpha} פתוחות עבורן פתוחות לכל אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M} וכן \mathcal{M} יריעה לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                                                                          .(\alpha \in \Lambda
                                                               (יריעה), אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (בורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} יריעה) קיימת סביבה x \in \mathcal{M} יריעה), יריעה אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (\mathcal{M} \cap \mathcal{U} יריעה).
                   עבורה r\in C^m (G,\mathbb{R}^n) אני פתוחה אזי G\subseteq\mathbb{R}^k מימדית ותהא T־יריעה T-יריעה T-יריעה T-יריעה ארייריעה ארייריעה פרמטריזציה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                 .r(G) = \mathcal{M}
       \operatorname{Lank}\left(\mathcal{D}_{r}\left(x
ight)
ight)=k מתקיים x\in G מתקיים עבורה לכל r\in C^{1}\left(G,\mathbb{R}^{n}
ight) פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית: תהא
                                                            f^{-1}\in C\left(B,A
ight) הפיכה עבורה f\in C\left(A,B
ight) אזי אזי B\subseteq\mathbb{R}^{m} ותהא A\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                        . פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית r:G	o A שהינה הומאומורפיזם. פתוחה אזי פרמטריזציה ותהא מובה: תהא A\subseteq\mathbb{R}^n שהינה הומאומורפיזם.
וכן קיימות \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha עבורן ביחס ל־\mathcal{M} עבורן קיימות (קיימות קיימות יריעה) אזי אזי \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי אזי (\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha) פתוחות ביחס ל־\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי (\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha) פתוחות ביחס ל־
                                              \mathcal{U}_{lpha}\left(G_{lpha}
ight)=\mathcal{U}_{lpha} עבורן r_{lpha}\subseteq C^{m}\left(G_{lpha},\mathbb{R}^{n}
ight) טובות טובות פרמטריזציות פרמטריזציות עבורן קיימות פרמטריזציות פרמטריזציות טובות אנדי \left\{G_{lpha}\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{k}
ight)
                           . עבורה \mathcal{M}\cap\mathcal{U} בעלת פרמטריזציה טובה) אזי (\mathcal{M} יריעה) אזי אזי (\mathcal{M} יריעה) אזי אזי \mathcal{M}\in\mathbb{R}^n אזי אזי (\mathcal{M} יריעה) אזי אזי (מכל
(f_1\dots f_{n-k})\,(x)=0 המקיימת x\in\mathcal{U} עבורה לכל עבורה אזי \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית:
                                                                                                                                                                                                  מתקיים כי \{\nabla f_i(x)\} בת"ל.
עבורו x\in\mathcal{U} עבורו (לכל איזי איזי אויית משוואות אויf_1\dots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורו פתוחה תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית
                                                                                                                          . Grank \left(\mathcal{D}_{\left(f_{1}\dots f_{n-k}\right)}\left(x
ight)
ight)=n-k מתקיים \left(f_{1}\dots f_{n-k}
ight)\left(x
ight)=0
                              תיאלית מערכת משוואות רגולרית: תהא מערכת משוואות רגולרית: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k מימדית ותהא מימדית משוואות רגולרית: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n משוואות רגולרית:
                                                                                                                                             \{(f_1\dots f_{n-k})=0\}=\mathcal{M} עבורה \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                   .(לכל \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n בעלת הצגה סתומה רגולרית) קיימת סביבה עבורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי (לכל
                                                                                    \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\} אליפסואיד: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי a,b,c\in\mathbb{R} טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\}
                                                                                 \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} אזי a,b,c\in\mathbb{R} היפרבולואיד דו־יריעתי: יהינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                                                                                  .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} אזי \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1
ight\} אזי .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\} טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                               f(t,
ho)=egin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(
ho) \\ \gamma_1(t)\sin(
ho) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} המוגדרת f:I	imes(0,2\pi)	o\mathbb{R}^3 עקומה אזי \gamma:I	o(0,\infty)	imes\mathbb{R} המוגדרת
טענה משטחי סיבוב: תהא f אזי משפט הסיבוב \gamma עקומה עבורה \gamma פרמטריזציה טובה של \gamma:I 	o (0,\infty) 	imes \mathbb{R} אזי משפט הסיבוב
                                                                                                                                                                                                \operatorname{Im}(f) פרמטריזציה טובה של
                                                                                                                                                                                                 \mathbb{S}^1 טורוס: משטח הסיבוב של
                                                                                                                                                                                               .\mathbb{T}^2 סימון: נסמן טורוס בעזרת
```

עבורה לכל $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וכן קיימת סביבה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וכן קיימת של C^m

יריעה חלקה xימת סביבה \mathcal{O} של xוכן קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת עבורה לכל $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל

יריעה אנליטית x-מימת סביבה \mathcal{O} של xוכן קיימת עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ פיימת איימת $x\in\mathcal{M}$ עבורה לכל איימת $x\in\mathcal{M}$ פיימת סביבה $x\in\mathcal{M}$

. עבורה על קואורדינטות עד כדי פרמוטציה של עבורה $\Gamma_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ עבורה $f \in C^m \left(G, \mathbb{R}^{n-k} \right)$

עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עבורה $f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$. $C^\omega\left(A,B\right)=\{f:A o B\mid$ עד מקומית מקומית $f\}$ אנליטית אזי f

 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ שהינה חד־מימדית. $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$

עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ אנליטית מקומית עבורה $f:G o\mathbb{R}^{n-k}$

```
\forall x \in \mathcal{M}. (|N\left(x
ight)| = 1) \land (N\left(x
ight) \perp x) המקיימת N \in C\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right) עבורו קיימת \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n משטח אוריינטבילי: משטח
                                                                                                                             למה: טבעת מוביוס אינו משטח אוריינטבילי.
                                                                                                  . יריעה דו־מימדית אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} יריעה דו־מימדית טענה: תהא
                                                          טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.
                                                                        . טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M} אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.
                                                                                                    a	imes b=\left(egin{array}{ll} a_2b_3-a_3b_2\ a_3b_1-a_1b_3\ a_1b_2-a_1b_1 \end{array}
ight) אזי a,b\in\mathbb{R}^3 יהיו
                                                                                                         (u	imes v)\perp u וכן (u	imes v)\perp v אזי u,v\in\mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                    (u \times v = 0) \Longleftrightarrow (u \in \mathrm{span}\,(v)) אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                  \det(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 > 0 אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיי
                                                                                                    |v \times u| = \|v\| \|u\| \sin (\angle (v,u)) אזי u,v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיי
וכן קיים אוכן A\subset \mathcal{U} סביבה המקיימת על \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n עבורה איימת \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n סביבה המקיימת איים קבוצה ניתנת ליישור על A\subset\mathcal{U}
                                                                                         f(A) = f(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}) דיפאומורפיזם עבורו f: \mathcal{U} \to \mathcal{V}
עבורה P מתקיימת עבורה עבורה פרידיקט עבורה לכל עבורה U \subset \mathbb{R}^n קיימת סביבה A \subset \mathbb{R}^n עבורה על
                                                                                                                                                                                   A \cap \mathcal{U}
                                                                                                                            משפט: תהא k\in\mathbb{N}_+ ויהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n התב"ש
                                                                                                                                                     .יריעה k־מימדית \mathcal{M}
                                           . עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. עד כדי f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}
ight) איז פונקציה של פונקציה \mathcal{M}
                                                                                                       r:\mathbb{R}^k 	o \mathbb{R}^n מקומית בעלת פרמטריזציה שובה \mathcal{M}
                                                                                       \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^k	o\mathbb{R} מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית \mathcal{M}
                                                                                                     \mathbb{R}^{k}- מקומית ניתנת ליישור על אידי דיפאומורפיזם ל\mathcal{M}
מסקנה: תהא W\subseteq\mathbb{R}^n של (a,0_{n-k}) של וקיים דיפאומורפיזם a\in G קיימת סביבה אזי לכל r:G	o\mathbb{R}^n וקיים דיפאומורפיזם
                                                                                                                             .s_{\restriction_{W\cap\left(G\times0_{n-k}\right)}}=rעבורו s:W\rightarrow s\left(W\right)
                                                                                                        הערה: יריעה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.
                                         \mathcal{U}=W\cap A פתוחה עבורה עבורה אזי W\subseteq\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזי אזי A\subseteq\mathbb{R}^d אזי מתוחה יחסית:
                                           \mathcal{U}=W\cap A סגורה עבורה אזי W\subset\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזי A\subset\mathbb{R}^d אזי אזי סגורה סגורה סגורה אזי
                                     (\forall x \in \mathcal{U}. \exists r > 0.B_r(x) \cap A \subseteq \mathcal{U}) \Longleftrightarrow (Aט פתוחה ביחס שפט: תהא \mathcal{U} \subseteq A ותהא ותהא \mathcal{U} \subseteq A אזי (\mathcal{U} \subseteq A
                                          \mathcal{U}\in\{A,\varnothing\} מתקיים Aל מתקיים לכל \mathcal{U}\subset A פתוחה לכל עבורה לכל מתקיים A\subset\mathbb{R}^d מתקיים
                     \mathcal{U},\mathcal{U}\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית ל-A עבורן לא קיימות ל-א קשירה) אזי (A\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי (A\subseteq\mathbb{R}^d אזי לא קיימות
פתוחה f^{-1}(\mathcal{U}) פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי f אזי f:A\to B אוי מענה: תהיינה A,B\subseteq\mathbb{R}^d פתוחה יחסית ל־A,B\subseteq\mathbb{R}^d
                                                                                                                                                                           (Aיחסית ל
arphi^{-1} וכן פתוחה arphi פתוחה יריעה arphi:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^k החסית ותהא שפה: תהא יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה איריעה איריעה איריעה מימדית מחחה יחסית ותהא
                                                                                                                                                 (\mathcal{U}, \varphi) אזי טובה טובה פרמטרזיציה
                                                 .\bigcup \{\mathcal{C}_1 \mid \mathcal{C} \in \mathcal{A}\} = \mathcal{M} עבורה עבורה אזי קבוצה אזי קבוצה יריעה יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אטלס:
            . מפה. (r(\mathcal{U}),r^{-1}) אזי r(\mathcal{U}) אזי רגולרית של r(\mathcal{U}) מפה. \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מיטענה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n איזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מפה.
                                                                                                    \mathbb{RP}^n = \{vv^T \mid v \in \mathbb{S}^n\} אזי n \geq 2 יהי הפרוייקיבי: יהי מרחב הפרוייקיבי:
                                                                                                          . יריעה n מימדית יהיn>2 יריעה n>2 יריעה אזי יהי
                                            arphi_{1.2}=arphi_2\circarphi_1^{-1} המוגדרת arphi_{1.2}:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^k מפות אזי מפות (\mathcal{U}_1,arphi_1), (\mathcal{U}_2,arphi_2) המיינה העתקת מעבר:
                                  a_i \in \{1,2\} טענה: תהיינה \varphi_i (\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) פתוחה מפות ותהא A \subseteq \mathbb{R}^k מפות ותהא מפות (\mathcal{U}_1,\varphi_1), (\mathcal{U}_2,\varphi_2)
                                                             . פתוחה אזי arphi_{1,2} דיפאומורפיזם מפות ותהא A\subseteq\mathbb{R}^k מפות ותהא מפות (\mathcal{U}_1,arphi_1),(\mathcal{U}_2,arphi_2)
C^{lpha} פונקציה C^{lpha} מתקיים כי \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n עבורה לכל מפה \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n מיריעה: תהא \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n יריעה
                                                                C^lpha אזי f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^m הינה לכל היותר מדרגת חלקות הערה: נניח כי \mathcal{M} יריעה C^lpha אזי
עבורו \mathcal{M} של \{(\mathcal{U}_lpha,arphi_lpha)\}_{lpha\in\Lambda} יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m ותהא f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m של \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה איינה: תהא
                                                                                                                                               \alpha \in \Lambda לכל C^{\alpha} הינה f \circ \varphi^{-1}
                                                                                                  . אטלס \mathcal{M}יריעה אזי קיים אזי יריעה איריעה איריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אטלס.
```

 $\dim\left(\mathcal{M}\right)=k$ יריעה k־מימדית אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ סימון: תהא

```
p של p של p\in \mathbb{R}^n של p\in \mathcal{M} פיימת סביבה p\in \mathcal{M} של אז p\in \mathcal{M} של p\in \mathcal{M} של p\in \mathcal{M}
                                                                                                                                                                       .(g_{
estriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}=f המקיימת g\in C^{lpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)
 \mathcal{M}' של \mathcal{M} ולכל מפה \mathcal{M}' של \mathcal{M} ולכל מפה אזי (\mathcal{U}, \varphi) של אזי (\mathcal{U}, \varphi) של \mathcal{M}' אזי (f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}' ולכל מפה \mathcal{M}, \mathcal{M}' יריעות ותהא
                                                                                                                                                                                  מתקיים כי \psi \circ f \circ \varphi^{-1} הינה \psi \circ f \circ \varphi^{-1}.
                                                             f,f^{-1}\in C^lpha וכן הפיכה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' עבורה אזי \mathcal{M},\mathcal{M}' הפיכה וכן: תהיינה ביצאומורפיזם
                                                                                                       \dim\left(\mathcal{M}
ight)=\dim\left(\mathcal{M}'
ight) אזי דיפאומורפיות יריעות איינה \mathcal{M},\mathcal{M}' מסקנה: תהיינה
                             טענה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}־מימדית תהא p\in\mathcal{M} ותהיינה p\in\mathcal{M} סביבות של \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n ספות באשר \mathcal{M}
                                                                                                                                                                     \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)
                                        ותהא p\in\mathcal{M} מפה באשר \mathcal{U} סביבה של מפרחב המשיק: תהא p\in\mathcal{M} יריעה \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n יריעה אזי \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n ותהא
                                                                                                                                                                                         T_{p}(\mathcal{M}) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\omega^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)
                                                                                                \dim\left(T_p\left(\mathcal{M}
ight)
ight)=\dim\left(\mathcal{M}
ight) אזי p\in\mathcal{M} יריעה ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי תהא
                                                                                                                               \dot{\gamma}=rac{d\gamma}{dt} אזי C^1 מסילה \gamma:(a,b)	o \mathcal{M} אזי וקטור מהירות:
                                                                                                                           \dot{\gamma}\left(t
ight)\in T_{\gamma\left(t
ight)}\left(\mathcal{M}
ight) אזי C^{1} מסילה \gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathcal{M} איזי
               T_p\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{\dot{\gamma}\left(0
ight)\mid\left(\gamma\in C^1\left(\left(-arepsilon,arepsilon
ight),\mathcal{M}
ight)
ight)\wedge\left(\gamma\left(0
ight)=p
ight)
ight\} אזי p\in\mathcal{M} אזי p\in\mathcal{M} יריעה M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה
\gamma_{i}\left(0
ight)=p מסילות המקיימות \gamma_{1},\gamma_{2}:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o\mathcal{M} ותהיינה ותהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא ותהא p\in\mathcal{M} תהא
                                                                                                                                      \left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0
ight)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}\right)\right)\left(0
ight) אזי \dot{\gamma}_{i}\left(0
ight)=v וכן
\mathcal{D}_p f: T_p\left(\mathcal{M}
ight) 	o T_{f(p)}\left(\mathcal{M}'
ight) אזי f \in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p \in \mathcal{M} ותהא יריעות: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא
                                        \dot{\gamma}\left(0
ight)=v וכן \gamma\left(0
ight)=p המקיימת \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} אבור מסילה \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} וכן
                                                               . אוי \mathcal{D}_p f אוי f \in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}') ותהא p \in \mathcal{M} העתקה העתקה לינארית. תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' איי
                                            משפט כלל השרשרת: תהיינה M,\mathcal{M}',\mathcal{M}'' יריעות תהא f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}') יריעות תהא M,\mathcal{M}',\mathcal{M}'' משפט כלל השרשרת: תהיינה
                                                                                                                                                                                     \mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right) = \mathcal{D}_{f(p)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)
                                                      \mathcal{D}_{p}f\left(v
ight)=\mathcal{D}_{p}\left(f
ight)\cdot v אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעות תהא \mathcal{M},\mathcal{M}' מסקנה:
                                                טענה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n סענה: תהא
                                                                                                                                                    T_{p}\left(\mathcal{M}\right) = \operatorname{span}\left(\left\{\nabla F_{1}\left(p\right), \dots, \nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\}^{\perp}\right)
\left\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{1}
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{k}
ight)
ight\} יריעה תהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} יריעה תהא
                                                                                                                                                                                                                 T_{p}\left(\mathcal{M}\right) בסיס של
                                                               T_p(\mathcal{M}) איות הבסיס הסטנדרטי של \{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_1\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_k\right)\} הערה: נגדיר את
 (\mathcal{V},\psi) עתהא p \in \mathcal{U} סביבה של באשר \mathcal{M}ים מפה בי\mathcal{M} מפה תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא f \in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}') מפה בי\mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא
[\mathcal{D}_p f]_{i,j} = rac{\partial \left(\psi \circ f \circ arphi^{-1}
ight)_i}{\partial x_j} אזי f\left(p
ight) א אי f\left(p
ight) באשר \mathcal{M}' מפה ב־\mathcal{M}' באשר \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יריעה תהא \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m יריעה תהא \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m יריעה תהא \mathcal{M}' \subseteq \mathbb{R}^m יריעה תהא
                                                                                                                                           \mathcal{D}_p f = \left(\mathcal{D}_p g\right)_{\restriction_{T_p(\mathcal{M})}} אזי g_{\restriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}} = f וכן p טביבה של
                                                                                           L_vf=\mathcal{D}_pf\left(v
ight) אזי v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) ותהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אזי איזי
                     L_vf=\sum_{i=1}^k v_i\cdot rac{\partial \left(f\circ arphi^{-1}
ight)}{\partial x_i} אאי v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) מפה בסביבה של p מפה בסביבה של f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אאי f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) טענה: תהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) ותהא v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) אאי f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight)
                                                                       v \perp T_p\left(\mathcal{M}
ight) עבורו v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} אזי על־משטח על־משטח על־משטח על־משטח על־משטח אזי יהי
                                          \|v\|=1 עבורו v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} אזי וקטור נורמל עבורו על־משטח על־משטח על־משטח על־משטח עבורו M\subseteq\mathbb{R}^n אזי וקטור נורמל יחידה: יהי
טענה: יהי M\subseteq\mathbb{R}^n אזי p\in\mathcal{M} וקטור נורמל יחידה וקטור יהי יהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n על־משטח תהא ותהא ותהא ותהא p\in\mathcal{M} ותהא
```

pטענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא אזי $p\in\mathcal{M}$ ותהא אזי $p\in\mathcal{M}$ ותהא אזי בסביבה של $p\in\mathcal{M}$ אזי אזי בסביבה של $p\in\mathcal{M}$ ותהא

עבורה $f:\mathcal{M} o\mathcal{M}'$ יריעה $f:\mathcal{M} o\mathcal{M}'$ יריעה $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזיי

 $g\circ f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}'')$ אזי $g\in C^{lpha}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$ ותהא $f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ איזי יריעות תהא $f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ייענה:

 $.C^{lpha}$ הינה $f:\mathcal{M}
ightarrow\mathbb{R}^{m}$

$$v_1 imes \dots imes v_{n-1} = \sum_{i=1}^n \left(-1
ight)^{i+1} \det \begin{pmatrix} (v_1)_1 & \dots & (v_{n-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{i-1} & \dots & (v_{n-1})_{i-1} \\ (v_1)_{i+1} & \dots & (v_{n-1})_{i+1} \end{pmatrix} e_i$$
 איז $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ מכפלה מצולבת: יהיו $v_1 imes \dots imes v_{n-1} = \det \begin{pmatrix} e_1 & | & | \\ \vdots & v_1 & \dots & (v_{n-1})_n \end{pmatrix}$ מענה: יהיו $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ איז מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.
$$\Gamma\left(v_1 \dots v_m\right) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \langle v_1, v_m \rangle \end{pmatrix}$$
 איז $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ מענה: יהיו $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ איז $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ מענה: יהיו $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ איז $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ מענה: יהיו

- $v_1 imes \dots imes v_{n-1} \perp v_i$ מתקיים $i \in [n-1]$ לכל
 - $||v_1 \times \ldots \times v_{n-1}|| = \sqrt{\Gamma(v_1 \ldots v_{n-1})} \bullet$
 - $\det (v_1 \times \ldots \times v_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}) \ge 0 \bullet$

p נורמל ל־p וקטור נורמל $\frac{\partial r}{\partial x_1} imes \dots imes \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ איזי שענה: יהי יהי $p \in \mathcal{M}$ ותהא וקטור נורמל ל־ $p \in \mathcal{M}$

 $\partial^{lpha}f=rac{\partial^{|lpha|}}{\partial x^{lpha}}\left(f
ight)$ אזי $lpha\in\mathbb{N}^{k}$ ותהא $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי

 $.\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i}{\beta_i} \text{ אזי } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^k \text{ סימון: תהיינה } .$ $.\partial^\alpha \left(f \cdot g\right) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^k \\ |\beta| \leq |\alpha|}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \left(f\right) \partial^{\alpha-\beta} \left(g\right) \text{ אזי } \alpha \in \mathbb{N}^k \text{ ותהא } f, g \in C^\infty \left(\mathcal{M}\right)$ טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f, g \in C^\infty \left(\mathcal{M}\right)$ ותהא

 $\overline{\mathcal{U}}$ באשר \mathcal{M} על \mathcal{M} על מפה לכל מפה לינארית עבורה לינארית אזי $D:C^\infty(\mathcal{M}) o C^\infty(\mathcal{M})$ על אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי חלקות. a_{α} וכן $m\in\mathbb{N}$ עבור שבור $\mathcal{D}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(x)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{k}\\|\alpha|\leq m}}a_{\alpha}\left(x\right)\cdot\partial^{\alpha}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(x)$ עבור שבור חלקות.

שדה וקטורי $v\left(p
ight)\in T_{p}\left(\mathcal{M}
ight)$ עבורה $v\left(p
ight)\in T_{p}\left(\mathcal{M}
ight)$ עבורה עבורה אזי $v:\mathcal{M}\to \bigcup_{p\in\mathcal{M}}T_{p}^{|\alpha|\leq m}$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אכן וכן לכל מפה כי \mathcal{M} $.C^{m}$ העתקה $x \mapsto \mathcal{D}_{x} \varphi \left(v \left(x \right) \right)$

 הינה $L_v\left(f
ight)(x)=L_{v(x)}\left(f
ight)$ המוגדרת $L_v:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ הינה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ המוגדרת $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אופרטור דיפרנציאלי.

.supp $(f)=\overline{\{x\in\mathcal{M}\mid f\left(x\right)\neq0\}}$ אזי $f\in C\left(\mathcal{M}\right)$ תומך: תהא

 $.C_{C}^{\infty}\left(\mathcal{U}
ight)=\left\{ f\in C^{\infty}\left(\mathcal{U}
ight)\mid$ קומפקטית supp $(f)\}$ פתוחה אזי $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ יריעה ותהא \mathcal{M}

 $f_{
ewline} = g_{
ewline}$ עבורן $f,g \in C_C^\infty$ פתוחה ולכל עבורה לכל עבורה $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ עבורה לכל עבורן עבורן אזי $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$ עבורן עבורן עבורן אופרטור מקומי: תהא $L(f)_{\mid_{\mathcal{U}}} = L(g)_{\mid_{\mathcal{U}}}$ מתקיים

 $\|f\|_{W,n}=\sup_{\substack{x\in w\\|lpha|\leq n}}\|(\partial^{lpha}f)\left(x
ight)\|$ אזי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}
ight)$ פתוחה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה תהא

 α טענה: תהא $\alpha \leq n$ פתוחה תהא $\alpha \leq n$ ויהי $\alpha \leq n$ עבורה עבורה $\alpha \leq n$ עבורה $\alpha \leq n$ אזי קיימת $\alpha \in \mathcal{W}$ אזי קיימת $\alpha \in \mathcal{W}$ איזי קיימת עבורה $q \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ וכן $\delta \in (0, \varepsilon)$

- $g_{\uparrow_{\mathcal{W}}\setminus B_{\delta}(x)}^{2} = 0 \bullet$
- $\|f-g\|_{W,n}<\varepsilon$

 $oxed{a}_{eta}(lpha)=\prod_{i=1}^kinom{lpha_i}{eta_i}$ אוי $lpha,eta\in\mathbb{N}^k$ סימון: יהיו

משפט פיטרה: תהא לינארית ותהא $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ יריעה ותהא יריעה ותהא

- .אופרטור מקומי L
- .supp $(L(f)) \subseteq \text{supp}(f)$ מתקיים $f \in C^{\infty}(\mathcal{M})$
 - . אופרטור דיפרנציאלי L

x סביבה של $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ אזי קיימת $x\in\mathcal{V}$ אזי מקומי ותהא אופרטור לינארי $L:C^\infty(\mathcal{V}) o C^\infty(\mathcal{V})$ סביבה של $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$ $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \leq C\,\|f\|_{\mathcal{W},n}$ מתקיים $f\in C_C^\infty\left(\mathcal{W}ackslash\{x\}\right)$ עבורה עבור וכן $n\in\mathbb{N}$ וכן $n\in\mathbb{N}$ וכן $m\in\mathbb{N}$

וכן $n\in\mathbb{N}$ פתוחה עבורה קיימים $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ פתוחה לינארי אופרטור לינארי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right) o C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ פתוחה עבורה איימים $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$.n מסדר דיפרנציאלי אופרטור אזי $\|Lf\|_{\mathcal{W},0}\leq C\,\|f\|_{\mathcal{W},n}$ מתקיים מחדר לכל לכל עבורם לכל C>0

עבורן $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathbb{R}^n
ight)$ אזי קיימות של X אזי קיימות אויהי ויהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן $X\subseteq\mathbb{R}^n$

 $0 \le \rho_i \le 1$ מתקיים $i \in \mathbb{N}$ •

- .supp $(\rho_i)\subseteq\mathcal{U}_\alpha$ עבורו $\alpha\in\Lambda$ קיים $i\in\mathbb{N}$ •
- $\{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i(\mathcal{W}) \neq 0\} \in \mathbb{N}$ עבורה $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה סביבה פתוחה $x \in X$ לכל
 - $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}\left(x\right)=1$ מתקיים $x\in X$ לכל •

. אופרטור דיפרנציאלי אופרטור לינארי מקומי אזי $L:C^\infty\left(\mathcal{V}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{V}
ight)$ אופרטור אופרטור דיפרנציאלי פתוחה על פתוחה ויהי

עבורן $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי קיימות X של \mathcal{M} כיסוי פתוח כיסוי $\{\mathcal{U}_lpha\}_{lpha\in\Lambda}$ ויהי $X\subseteq\mathcal{M}$ ויהי איי פתוח ב־ \mathcal{M}

- $0 \le \rho_i \le 1$ מתקיים $i \in \mathbb{N}$ •
- .supp $(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$ עבורו $\alpha \in \Lambda$ קיים $i \in \mathbb{N}$ •
- $|\{i\in\mathbb{N}\mid
 ho_i(\mathcal{W})
 eq 0\}|\in\mathbb{N}$ עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה פתוחה סביבה פיימת סביבה פתוחה $x\in X$
 - $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_i(x)=1$ מתקיים $x\in X$ לכל •

 $\Pi\left(v_1\dots v_k
ight)=\left\{\sum_{i=1}^k t_i v_i\mid orall i\in [k]\ . t_i\in [0,1]
ight\}$ אזי $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$ מקבילון: יהיו $\operatorname{Vol}_k\left(\Pi\left(v_1\dots v_k
ight)
ight)=\sqrt{\Gamma\left(v_1\dots v_k
ight)}$ אזי $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^n$ נפח מקבילון: יהיו

- $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^k$ טענה: יהיו $v_k\in\mathbb{R}^k$ אזי $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^k$.Vol v_k .V
- $\operatorname{Vol}_k\left(Tv_1,\ldots,Tv_k\right)=\operatorname{Vol}_k\left(v_1,\ldots,v_k\right)$ אזי $T\in O\left(n\right)$ תהא

זניחה $arphi(E\cap\mathcal{U})$ מתקיים כי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אניחה אזי ליריעה: תהא ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אייריעה אזי ליריעה אניחה ביחס ליריעה: תהא

 $(\mathcal{M}$ לכל ביחס ל־E) אזי ($E\subseteq\mathcal{M}$ אותהא \mathcal{M} ותהא אטלס של אטלס איזי יהי \mathcal{M} ־מימדית יהי יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אטלס איזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ איזי איזי איזי איזיים אי $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי $arphi_{lpha}\left(E\cap\mathcal{U}_{lpha}
ight)$ זניחה מ

 \mathcal{M} טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי אניחה ביחס ל־ $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}
ight)$ אניחה איריעה יריעה ותהיינה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$

 \mathcal{M} טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של

 $A_f=\{x\in\mathcal{M}\mid x$ אינה רציפה על אינה $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$ יריעה ותהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אינה רציפה אינה ראיברפות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$

עבורה $f:\mathcal{M} o \mathbb{R}$ יריעה אזי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא

- .חסומה $f \bullet$
- $\operatorname{supp}(f)$ סומפקטי.
- \mathcal{M} זניחה ביחס ל־ $B_f \bullet$

M יריעה אזי $\mathbb{1}_E$ עבורה $\mathbb{1}_E$ אינטגרבילית יריעה: תהא יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אינטגרבילית יריעה:

 $arphi\left(E
ight)$ טענה: תהא $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי ($\overline{E}\in\mathcal{U}$ מפה ותהא מפה ותהא מפה $\mathcal{U},arphi$ מפה ז'ורדן ב־ \mathcal{M} מדידה ז'ורדן ב־ \mathbb{R}^k).

 $\mathrm{supp}\,(f)\subseteq\mathcal{U}$ עבורה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אינקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה \mathcal{M} . נוחה. $\mathbb{1}_A$ עבורה $A\subseteq\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ נוחה. תהא

 $.i\in\mathbb{N}$ טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה $\{(\mathcal{U}_i,arphi_i)\}$ של $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ נוחה לכל \mathcal{M}

מסקנה: תהא ליות ואינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות ואינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות רימן $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן $f = \sum_{i=1}^n f_i$ עבורן

וכן $G_i\subseteq\mathbb{R}^k$ באשר איניות טובות פרמטרזיציות וכה תהיינה $G_i:G_i\to\mathcal{M}$ פרמטרזיציות טובות באשר איניה שענה: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $i\in\{1,2\}$

 $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}\left(f\circ r
ight)\left(q
ight)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r
ight)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r
ight)
ight)}\mathrm{d}q}$ אזי

מסקנה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ אינטגרבילית רימן מסקנה: $\iint_{\mathcal{M}} f = \int_{G} \left(f \circ r\right) \left(q\right) \cdot \sqrt{\Gamma\left(rac{\partial r}{\partial x_{1}} \ldots rac{\partial r}{\partial x_{k}}
ight)} \mathrm{d}q}$ אזי

 $R_{\mathcal{U}}=\{f:\mathcal{M} o\mathbb{R}\mid(\mathrm{supp}\,(f)\subseteq\mathcal{U})\wedge(\mathsf{pridential})$ נוחה ואינטגרבילית מפה $(\mathcal{U},arphi)$ מפה אזי $(\mathcal{U},arphi)$ מפה מיינון: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא

. יריעה ערחב $R_{\mathcal{U}}$ מפה אזי מרחב לינארי. מרחב לינארי. תהא \mathcal{M} יריעה ותהא

. מסקנה: תהא הינו פונקציונל מפה הינו מפה אזי הינו מפה אזי יריעה ותהא יריעה ותהא מסקנה: תהא מסקנה: תהא אוי

```
טענה: תהא M יריעה תהא f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} אינטגרבילית רימן ותהיינה f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} יריעה תהא f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז f: \mathcal{M} = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{M}} f_i = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{M}} g_i אזי f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} אינטגרבילית רימן ותהיינה f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} אינטגרבילית רימן ותהיינה f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} אינטגרבילית רימן f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} אינטגרבילית רימן f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} ווחות ואינטגרבילית רימן f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז איז f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז איז f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז איז f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} איז איז ווחדן של יריעה: תהא f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} יריעה איז יורדן f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} יריעה איז יורדן f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} יריעה איז יורדן f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} יריעה ותהא f: \mathcal{M} \to \mathbb{R} יריעה f:
```

 $\bigcup_{i=1}^\infty E_i=\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי אזי ($E_i)_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}
ight)$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}^n$ באשר \mathcal{M} ניחה אזי אם קיים $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{M}=\mathcal{M}$ של \mathcal{M} מתקיים $\mathcal{M}=\mathcal{M}$ מתקיים $\mathcal{M}=\mathcal{M}$ של \mathcal{M} מתקיים $\mathcal{M}=\mathcal{M}$ של \mathcal{M} מתקיים \mathcal{M} מתקיים \mathcal{M} מתקיים \mathcal{M} של \mathcal{M} מתקיים \mathcal{M}

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא איז לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות איז תהא $f\in R\left(\mathcal{M}\right)$ של $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ איז לכל מיצוי ז'ורדן איז לכל $f\in R\left(\mathcal{M}\right)$ של $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ איז לכל מיצוי ז'ורדן $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ איז לכל מיצוי ז'ורדן איז ז'ורדן איז לכל מיצוי ז'ורדן איז ז'ורדן איז ז'ורדן איז ז'ורדי ז'ורדן איז ז'ורדי ז'ורדן איז ז'ורדן איז ז'ורדן איז ז'ורדי ז'ור

. $\operatorname{Vol}_k\left(\mathcal{M}
ight)=\int_{\mathcal{M}}1$ איי אזי Rיריעה יריעה יריעה: תהא יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$

 $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=arnothing$ עבורן $\left(\mathcal{U},arphi
ight),\left(\mathcal{V},\psi
ight)$ מפות זרות: מפות מפות

טענה: תהיינה $f|_{\mathcal{M}\setminus (S\cup (m{ extbf{H}}_{i=1}^n u_i))}=0$ מפות זרות מות א אזי אניחה ותהא $S\subseteq \mathcal{M}$ תהא תהא את מפות זרות בזוגות על $f:\mathcal{M}\to \mathbb{R}$ אניחה ותהא $f:\mathcal{M}\to \mathbb{R}$ עבורה $f:\mathcal{M}\to \mathbb{R}$ מפות זרות בזוגות על $f:\mathcal{M}\to \mathbb{R}$ אניחה ותהא ותהא $f:\mathcal{M}\to \mathbb{R}$ עבורה וועה בזוגות על $f:\mathcal{M}\to \mathbb{R}$ אויי וועה בזוגות על $f:\mathcal{M}\to \mathbb{R}$

.Length $(\gamma)=\lim_{m\to\infty}\sup_{a=t_0<\ldots< t_m=b}\sum_{i=1}^m\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\|$ אזי $\gamma\in C\left([a,b]\,,\mathbb{R}^n\right)$... $\gamma\in C\left([a,b]\,,\mathbb{R}^n\right)$

. Length $(\gamma)=\int_{a}^{b}\|\gamma'\left(t\right)\|\,\mathrm{d}t$ איי $\gamma\in C^{1}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^{n}\right)$ איי מענה: תהא

.Length $(\mathcal{M})= ext{Vol}_1\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי אזי חד־מימדית יריעה יריעה \mathcal{M} יריעה אזי

. Length $(\mathcal{M})=$ Length (γ) יאיה טובה אזי $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ ותהא ותהא יריעה איריעה יריעה ענה: תהא \mathcal{M}

> . Length $(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'\left(t
> ight)
> ight)^2}\mathrm{d}t$ אא $f\in C^1\left(\mathcal{U}
> ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$

 $\|\gamma'\|=\sqrt{r^2+r'}$ אאי $\gamma\left(t
ight)=\left(r\left(t
ight)\cos\left(heta\left(t
ight)
ight),r\left(t
ight)\sin\left(heta\left(t
ight)
ight)
ight)$ כך $\gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathbb{R}^2$ אאי $\gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathbb{R}^2$ אאי $\gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathbb{R}^2$ איז $\gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathbb{R}^2$ א $\gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathbb{R}^2$ איז $\gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathbb$

טענה: תהא טובה באשר פרמטריזציה ותהא ותהא ותהא דו־מימדית יריעה דו־מימדית יריעה אזי יריעה $M\subseteq\mathbb{R}^3$ אזי אזי

.Area $(\mathcal{M}) = \int_{G} \left| \frac{\partial r}{\partial x_{1}} (x) \times \frac{\partial r}{\partial x_{2}} (y) \right| dxdy$

. Area $(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|\nabla f\left(x,y\right)\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ מסקנה: תהא

 $\det\left(I+uv^T
ight)=1+\langle u,v
angle$ אזי $u,v\in\mathbb{R}^n$ טענה: תהיינה

. $\operatorname{Vol}_k\left(\Gamma_f
ight)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|
abla f\left(x
ight)
ight\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא

 α עענה: תהא α (x) באשר α : $\Gamma_f o \mathbb{R}$ ותהא α (x) ותהא α בנקודה α ותהא α בנקודה α בנקו

 P_1 בין P_2 בין P_1 ל־ P_2 אזי השטח הכלוא על \mathbb{S}^2 בין P_1 ל־ P_2 אזי היוי P_1, P_2 מישורים מקבילים במרחק P_2 החותכים את P_1, P_2 ויהי P_2 השטח הכלוא על P_2 בין P_1 ל־ P_2 אזי הרבימדס: יהיו P_1, P_2 מישורים מקבילים במרחק P_2 החותכים את P_1, P_2 ויהי P_2 השטח הכלוא על P_2 בין P_1 ל־ P_2 אזי הרבימדס:

 $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין $R\cdot\mathbb{S}^2$ השטח הכלוא על פיסקנה: יהיו אזי מסקנה: יהיו אורים מקבילים במרחק $R\cdot\mathbb{S}^2$ החותכים את $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי אורים מקבילים במרחק החותכים את $R\cdot\mathbb{S}^2$ אזי היוו במרחק אזיי מסקנה: יהיו

 $.P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \max\{d\left(x,H_1
ight),d\left(x,H_2
ight)\}\leq d\left(H_1,H_2
ight)\}$ איי מקבילים איי היפר־משטחים היפר־משטחים איי $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$. Width $(P_{H_1,H_2})=d\left(H_1,H_2
ight)$ היפר־משטחים איי $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ רוחב קורה: יהיו

. Width $(K)=\inf_{\{K\subseteq P\mid$ קמור $P\}}$ (Width (P)) גוף קמור אזי אוף אווי אוי יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ יהי

רוחב יחסי של קורה: יהי ההי אוף קמור גוף אוף יהי יהי קורה: יהי אזי של דוחב רוחב יחסי של קורה: יהי

.Width $_K(P) = \inf_{m \in \mathbb{R}_+} \{ m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists a \in \mathbb{R}^n . K \subseteq m \cdot P + a \}$

השערת האנג: יהי $K\subseteq \bigcup_{i=1}^m \mathrm{Width}_K\left(P_i\right)$ אזי השערת אזי קורות קומפקטי ויהיו ויהיו ויהיו אזי ויהי $P_1\dots P_m$ קורות פתוחה

```
. היפר־משטח arphi^{-1}(t) אזי 
abla arphi 
eq 0 באשר 
abla arphi \in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) היפר־משטח פתוחה תהא 
abla \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n אזי
טענה: יהי p\in\mathcal{V} אזי קיים \delta>0 באשר \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) אזי קיים \delta>0 עבורו לכל \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) אזי קיים \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R})
.\int_{B_{\delta}(p)}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) ותהא \varphi\left(\mathcal{V}
ight)=(a,b) ותהא \varphi\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}
ight) ותהא \varphi\in \mathbb{R}^{n} ותהא \varphi\in \mathbb{R}^{n}
                                                                                                                                                                   \int_{\mathcal{V}}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t אונים אוי supp (f)
v\in T_x\left(\mathcal{M}
ight) לכל \langle u,v
angle=L_varphi\left(x
ight) עבורו עבורו u\in T_x\left(\mathcal{M}
ight) אזי x\in\mathcal{M} ותהא arphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n לכל
                                                     .
abla_xarphi הוא arphi אזי הגרדיאנט של arphi בנקודה x\in\mathcal{M} ותהא arphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R}) יריעה תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי הגרדיאנט של
 \psi_{ert_{\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}}=arphi_{ert_{\mathcal{U}}} באשר באשר \psi\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) ותהא x\in\mathcal{M} טענה: תהא \varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) באשר באשר \psi\in\mathcal{C}^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) טענה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                                     .\nabla_x \varphi = \operatorname{Proj}_{T_x(\mathcal{M})}(\nabla_x \psi) אזי
ותהא arphi\left(\mathcal{M}
ight)=(a,b) וכן 
ablaarphi\neq0 באשר arphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה תהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} וכן משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא
\int_{\mathcal{M}}f=\int_a^b\int_{arphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) באשר f\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא f\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר \varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}^k
ight) באשר \varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}^k
ight) באשר \varphi\in R^n
                                                                                                                                                                                          \int_{\mathcal{V}} f = \int_{\varphi(\mathcal{V})} \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\sqrt{\det\left((\mathcal{D}_x\varphi)\cdot(\mathcal{D}_x\varphi)^T\right)}}} \mathrm{dVol}_{n-1}(x) \, \mathrm{d}t .Vol_n(r\cdot\mathbb{S}^n) = r^n\cdot\mathrm{Vol}_n(\mathbb{S}^n) אזי r>0 אונה: יהי
                                                                                                                                                                                                           \operatorname{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}
ight)=rac{2\pi^{rac{n}{2}}}{\Gamma\left(rac{n}{2}
ight)} :טענה שטח פנים של ספרה
                                                                                                                  \mathfrak{X}^lpha\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{v:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^k\mid\mathcal{M} מעל C^lpha מעל v שדה וקטורי v שדה אזי \mathcal{M} יריעה אזי \mathcal{M} יריעה \mathcal{M} ותהא \mathcal{M} ותהא \mathcal{M} מפה אזי \mathcal{M} מפה מענה: תהא \mathcal{M} יריעה \mathcal{M} יריעה
                              . (C^lpha אזי (v(x),rac{\partial arphi^{-1}}{\partial x_i}(x)) אזי אזי (v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M}) הינה (\mathcal{U},arphi) ולכל ולכל מפה (\mathcal{U},arphi) אזי (v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})).
                                                                                                                                     (C^{lpha}) הינה v:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^kיהינה v:\mathcal{M} אזי (v:\mathcal{M} הינה v:\mathcal{M}
\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} פיימת סביבה v\left(x
ight)\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) עבורה v\left(x
ight)\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) אזי A\subseteq\mathcal{M} אזי אזי A\subseteq\mathcal{M} אזי לכל תת־קבוצה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                      u_{\upharpoonright_{A\cap\mathcal{U}}}=v_{\upharpoonright_{A\cap\mathcal{U}}} עבורו u\in\mathfrak{X}^{m}\left(\mathcal{U}
ight) וקיים
וקיימת A\subseteq\mathcal{U} פתוחה בA\subseteq\mathcal{U} מעל (A מעל מעל C^lpha מעל v:A	o\mathbb{R}^k ותהא ותהא A\subseteq\mathcal{M} ותהא A\subseteq\mathcal{U} ותהא אזי v:A	o\mathbb{R}^k אזי A\subseteq\mathcal{U} ותהא
                                                                                                                                                                                                                                                                       u_{
abla 
u} = v עבורה u \in \mathfrak{X}^{lpha}\left( \mathcal{U} 
ight)

abla arphi \in \mathfrak{X}^0\left(\mathcal{M}
ight) אזי arphi \in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה ותהא יריעה ותהא \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                     .(אוריינטציות) על־משטח קשיר אזי \mathcal{M} בעל 0 אוריינטציות) על־משטח קשיר אזי \mathcal{M} על־משטח קשיר אזי (\mathcal{M}
                                               עבורו F שדה וקטורי דרך M אזי F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) אוריינטציה של אוריינטציה של אוריינטציה על־משטח תהא אוריינטציה של M\subset\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                                                                                                                        .Flux_{F}\left(\mathcal{M}\right)=\int_{\mathcal{M}}\left\langle F\left(x\right),N\left(x\right)\right
angle dVol_{n-1}\left(x\right)
M אזי דרך שדות וקטוריים F_1,F_2 עבורם F_1,F_2\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) ויהיו של אוריינטציה של אוריינטציה אוריינטציה של אויהיו
                                                                                                                                                                                                          .Flux_{\alpha F_1 + \beta F_2}(\mathcal{M}) = \alpha Flux_{F_1}(\mathcal{M}) + \beta Flux_{F_2}(\mathcal{M})
 F עבורו F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) על־משטחים ארים עד כדי קבוצה אניחה בעלי אוריינטציה אויהיM_1,M_2\subseteq\mathbb{R}^n עבורו
                                                                                                                          \operatorname{Flux}_F(M_1 \cup \mathcal{M}_2) = \operatorname{Flux}_F(\mathcal{M}_1) + \operatorname{Flux}_F(\mathcal{M}_2) אזי \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 דרה וקטורי דרך
                                                                    עבורו F שדה וקטורי דרך M\subseteq\mathbb{R}^n אזי אוריינטציה אורינטציה אוריינטציה אורינטציה אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה אוריינטצייט איינטצייט איינט איינט איינטצייט איינט איינט איינטצייט איינט איינט איינט איינט איינט איינט איינטצ
                                                                                                                                                                                                                                                         .Flux_F(\mathcal{M}, N) = Flux_F(\mathcal{M}, -N)
                                                                                                                         .\operatorname{div}\left(F
ight)(x)=\sum_{i=1}^{n}rac{\partial F_{i}}{\partial x_{i}}\left(x
ight) אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי מהא
                         \mathrm{div}\left(F
ight)(x)=\mathrm{trace}\left(\mathcal{D}_{x}\left(f
ight)
ight) אזי f\left(x
ight)=F\left(x
ight) כך f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{n} אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} נגדיר
                                                       \operatorname{div}\left(A\circ F
ight)\left(A^{-1}x
ight)=\operatorname{div}\left(F
ight)\left(x
ight) אזי A\in\operatorname{GL}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) ותהא F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי A\in\operatorname{GL}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)
                                                          \operatorname{div}\left(f\cdot F
ight)=f\cdot\operatorname{div}\left(F
ight)+\left\langle 
abla f,F
ight
angle אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) ותהא ותהא F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי
```

 $1 \le \sum_{i=1}^m$ Width $K(P_i)$ אזי אוי איך קמור קומפקטי עבורו אויהיו איזי איזי אויהיו איזי אויר קומפקטי עבורו אזי $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m P_i$ קורות עבורן איזי

 $\operatorname{div}\left(F
ight)\left(x
ight)=\lim_{\substack{Q\in\operatorname{Cube}_{\ell}\left(x
ight)\\ell o 0}}\frac{1}{\operatorname{Vol}_{n}\left(Q
ight)}\operatorname{Flux}_{F}\left(\partial Q
ight)$ אזי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא

.Cube $_\ell(x)=\{Q\subseteq\mathbb{R}^n\mid (x\in Q)\land (\ell \text{ min }Q \text{ be})\land (k$ הוא אזי $\{Q\}$ קובייה) (k) אורך הצלע של (k)

עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני Flux $_F(\partial Q)=\sum$ Flux $_F(E_i)$ איז ע $Q\in ext{Cube}_\ell(x)$ ויהי $x\in\mathbb{R}^n$ באשר $\{E_i\}$ באשר

 $\Delta f=\sum_{i=1}^nrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\Delta f=\mathrm{div}\left(
abla f
ight)$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U}
ight)$ פענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$

.Q-b

```
עבורה f\in C^1(\mathcal{W},\mathbb{R}) פביבה של x\in\partial\mathcal{U} נקודת שפה חלקה: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה אזי x\in\partial\mathcal{U} עבורה קיימת
                                                                                                                                    \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\} וכן f(x) = 0 וכן \nabla_x f \neq 0
                                                                                         \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}=\{x\in\partial\mathcal{U}\mid סימון: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה אזי מין: על פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n
f(x)=0 פימון: תהא \mathcal{V}_xf
eq 0 פתוחה תהא \mathcal{V}_xf
eq 0 ותהא f\in C^1(\mathcal{W},\mathbb{R}) ותהא x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n באשר
                                                                                                                               .Smooth\mathcal{U}(x) = (\mathcal{W}, f) אזי \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\} וכן
                               . סענה: תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n פתוחה ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי קיימת x \in \partial^{\mathrm{sm}} \mathcal{U} פתוחה ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n סביבה של
                                                                                                                    \partial \mathcal{U}טענה: תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n פתוחה אזי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                                        יריעה. \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} יריעה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה.
```

 $\mathcal{AU}=\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}$ עבורה עבורה פתוחה פתוחה קבוצה חלקה:

 $\lim_{arepsilon o 0} rac{1}{arepsilon} {
m Vol}_n \left((\partial \mathcal{U} ackslash \partial^{
m sm} \mathcal{U}) + B^n_arepsilon \left(0
ight)
ight) = 0$ עבורה עלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$

. נורמל יחידה $rac{
abla f}{\|
abla f\|}:\mathcal{W}\cap\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} o\mathbb{R}^n$ אזי ההא איי איי בורה עבורה $x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}$ נורמל יחידה. $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ נורמל יחידה. אוריינטציה חיצונית קנונית לשפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $N:\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} o\mathbb{R}^n$ עבורה לכל

 $.N_{
estriction_{\mathcal{W}\cap\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}}}=rac{
abla f}{\|
abla f\|}$ מתקיים Smooth $_{\mathcal{U}}\left(x
ight)=\left(\mathcal{W},f
ight)$

שטף: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{W}$ בעלת שפה כמעט חלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר שפה בעלת שפה כמעט חלקה תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה באשר $\operatorname{Flux}_F(\partial \mathcal{U}) = \operatorname{Flux}_F(\partial^{\operatorname{sm}}\mathcal{U})$

 $A\in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^n
ight)$ אוריינטציה של M אוריינטציה של F עבורו $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight)$ יהי של אוריינטציה של איינטציה של אוריינטציה של איינטציה של אוריינטציה של אורינטציה של אוריינטציה של אורינטציה של אוריינטציה של אורינטציה של אורינטצי .Flux $_{A\circ F}\left(A\cdot\mathcal{M}\right)=\operatorname{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}\right)$ איז

 $\operatorname{supp}\left(F
ight)\subseteq B_{r}\left(a
ight)$ באשר $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)$ ויהי $i\in\left[n
ight]$ לכל לכל באשר $g\in C^{1}\left(B_{r}\left(a
ight),\mathbb{R}
ight)$ באשר r>0 יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ יהי . Flux $_{F}\left(\partial\left\{ g<0
ight\}
ight)=\int_{\left\{ q<0
ight\} }\operatorname{div}\left(F
ight)$ איז

r>0 אזי קיים אזי פיים עם אזי עסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה אזי $a\in\partial\mathcal{U}ackslash\partial^{ ext{sm}}\mathcal{U}$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $\operatorname{SHux}_F(\partial\mathcal{U})=\int_{\mathcal{U}}\operatorname{div}\left(F
ight)$ מתקיים supp $\left(F
ight)\subseteq B_r\left(a
ight)$ המקיים $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight)$ ולכל $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ המקיים $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ אבורו לכל אזי $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight)$ אויהי תהא $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ פתוחה באשר שתוחה וחלקה תהא חלקה תהא מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $\operatorname{.Flux}_F(\partial \mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \operatorname{div}(F)$

למה: תהא $X+B_{arepsilon}(0)$ אזי ויהי arepsilon>0 קומפקטית אורדן. למה: תהא

למה: תהא $\psi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}
ight)$ קיימת $arphi\in C$ עבורו לכל $C\in\mathbb{R}$ המקיימת אזי קיים אונים למה:

- $.0 < \psi < 1 \bullet$
- $.\psi_{\uparrow_{X+B_{\varepsilon}(0)}}=1$ •
- $.\psi_{\restriction_{\mathbb{R}^n\backslash (X+B_{3\varepsilon}(0))}}=0\ \bullet$
- $\left|rac{\partial \psi}{\partial x_i}
 ight| \leq rac{C}{arepsilon}$ מתקיים $i \in [n]$ לכל

משפט $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $\mathcal{V}\odot \mathbb{R}^n$ תהא $\mathcal{V}\odot \mathbb{R}^n$ משפט הדיברגנץ: תהא שפה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה עבורה עבורה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר . Flux _F $(\partial\mathcal{U})=\int_{\mathcal{U}}\mathrm{div}\left(F\right)$ אז
י $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ יההי $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$

טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי \mathcal{U} נורמל חיצוני . $\operatorname{Vol}_n\left(\mathcal{U}\right) = \frac{1}{n} \int_{\partial^{\operatorname{sm}}\mathcal{U}} \langle x, N \rangle \operatorname{dVol}_{n-1}\left(x\right)$ ל־ \mathcal{U} אזי

פתוחה עם פתוחה אינטגרציה בחלקים: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא עומה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ $.\int_{\mathcal{U}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\cdot g
ight)=\int_{\partial\mathcal{U}}\left(f\cdot g\cdot \langle N,v
angle
ight)-\int_{\mathcal{U}}\left(f\cdot rac{\partial g}{\partial v}
ight)$ אזי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $f,g\in C^1\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight)$ תהיינה $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $G\subseteq\mathbb{R}^n$

אזי $u,v:\mathcal{W} o\mathbb{R}$ ותהיינה G ורמל חיצוני ליח נורמל יהי יהי יהי יהי ליהי באשר

- $.\int_G \Delta u = \int_{\partial G} rac{\partial u}{\partial N}$ אזי C^2 הינה u .1 .1 . $\int_G \langle \nabla u, \nabla v \rangle = -\int_G u \cdot \Delta v + \int_{\partial G} u \cdot rac{\partial v}{\partial N}$ אזי C^1 אזי C^2 הינה c וכן c הינה c וכן c הינה c וכן c הינה c
 - $\int_G (u \cdot \Delta v v \cdot \Delta u) = \int_{\partial G} \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial N} v \cdot \frac{\partial u}{\partial N} \right)$ אזי C^2 הן u, v 3.

פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא אנרגיית דיריכלה: תהא אנרגיית חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\int_G \left\| \nabla v
ight\|^2$ אזי $v \in C^2 \left(\mathcal{W}, \mathbb{R}
ight)$ ותהא ותהא $G \subseteq \mathcal{W}$ יהי יהי יהי

 $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $G\subseteq \mathbb{R}^n$ מסקנה: תהא שפה כמעט חלקה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\int_G \|
abla v \|^2 = - \int_G v \cdot \Delta v + \int_{\partial G} v \cdot rac{\partial v}{\partial N}$ אזי $v \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ ותהא Gיהי נורמל חיצוני ל $\Delta u=0$ המקיימת $u\in C^{2}\left(G,\mathbb{R}
ight)$ פתוחה אזי $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת פונקציה הרמונית: $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$ סענה: תהא $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$ תהא חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $u\in C^2(\mathcal{W},\mathbb{R})$ תהא וורמל חיצוני ל $u\in C^2(\mathcal{W},\mathbb{R})$ הרמונית אזי

- $.\mathrm{Flux}_{\nabla u}\left(\partial G\right)=0 \bullet$
- .Gנניח כי u אזי ו $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}}=0$ נניח כי •
- Gנניח כי $u_{\uparrow_{\partial G}}$ קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב- •

 $f_{\mathcal{U}}$ $f=rac{1}{ ext{Vol}(\mathcal{U})}\int_{\mathcal{U}}f$ אינטגרבילית רימן אזי $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סימון: תהא

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a\in C^2$ יהי $a\in \mathbb{R}^n$ יהי $a\in \mathbb{R}^n$ ותהא ותהא $\overline{B_r(a)}\subseteq \mathcal{W}$ פתוחה באשר $u\in C^2$ ותהא ותהא $u\in C^2$ ותהא

 $u\left(a
ight)=f_{B_{r}\left(a
ight)}$ הרמונית אזי $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight)$ ותהא $\overline{B_{r}\left(a
ight)}\subseteq\mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight)$ ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight)$ ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight)$ אזי $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight)$ ותהא

u אזי $\max\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$ וכן G באשר u הרמונית בי \overline{G} תחום ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי אזי $u:\overline{G}
ightarrow\mathbb{R}$ תחום ותהא מסקנה עקרון המקסימום: יהי

u אזי $\min\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$ וכן G וכן המינמום: יהי $u:\overline{G} o\mathbb{R}$ תחום ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום המינמום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי אזי מסקנה עקרון המינמום: יהי

. קבועה עזי אזי וחסומה וחסומה $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ קבועה משפט ליוביל: תהא

. מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$