```
המקיימת \mathcal{F}\subseteq 2^\Omega המקיימת תהא \Omega המקיימת
                                                                                                                                                                 \Omega \in \mathcal{F} \bullet
                                                                                                                                                  \forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \bullet
                                                                                                                 .\bigcup E \in \mathcal{F} בת מנייה מתקיים E \subseteq \mathcal{F} לכל
                                                                                                                                 \varnothing\in\mathcal{F} אזי \sigma אלגברה אזי '\sigma
                                                                                          A \cap E \in \mathcal{F} אזי אזי B \subset \mathcal{F} בת מנייה אזי \sigma
                                                                                             \Omega מעל מעל הינה אלגברה מעל \mathcal F הינה אזי \mathcal F הינה מעל מעל משפט: תהא
         \mu\left(\biguplus_{i=1}^nB_i
ight)=\sum_{i=1}^n\mu\left(B_i
ight) פונקציה אדטיבית: פונקציה \mu:\mathcal{A}	o\mathbb{R} המקיימת לכל פונקציה \mu:\mathcal{A}	o\mathbb{R}
                                                                                        . אדטיבית \mu:\mathcal{F} 	o [0,\infty] אזי אלגברה תהא אדטיבית אלגברה אלגברה אזי
       \mu(igoplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) מתקיים מתקיים אזרות \{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A} המקיימת לכל \mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R} המקיים פונקציה \sigma-אדטיבית: פונקציה
                                                                             . אדטיבית: תהא \sigma \mu:\mathcal{F} 	o [0,\infty] אזי מידה על \sigma אדטיביה: תהא
                                                                                                            (\Omega, \mathcal{F}) אזי \Omega אזי מרחב מדיד: תהא \sigma \mathcal{F} אזי מרחב
                                                                                                         E \in \mathcal{F} אזי \Omega אזי \sigma אזי \sigma הרא \sigma
                                                                               .\mu\left(arnothing
ight)=0 אזי \exists E\in\mathcal{F}.\mu\left(E
ight)>0 המקיימת \mathcal{F} המקיימת \mu מידה על
                                                                                                         . אדטיבית \mu אזי \mathcal F אזי מעל \sigma־אלגברה מעל מידה \mu
                                                                             \mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right) אזי A\subseteq B עבורן A,B\in\mathcal{F} למה: תהא \mu מידה ותהיינה
                                                                                             סדרת קבוצות מונוטונית: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A}:\mathbb{N} 
ightarrow \mathcal{A} אזי
                                                                                                               \forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1} שונוטונית עולה חלש: •
                                                                                                             \forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n מונוטונית יורדת חלש: •
                                                                                  \sup\left(A
ight)=igcup_{i=0}^{\infty}A_{i} אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A} קבוצה ותהא
                                                                                   \inf\left(A
ight)=igcap_{i=0}^{\infty}A_{i} אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A} קבוצה ותהא
                                                          \limsup_{n	o\infty}A_n=igcap_{n=0}^\inftyigcup_{i=n}^\infty A_i אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא קבוצה ותהא אזי לייון: תהא
                                                          \liminf_{n	o\infty}A_n=igcup_{n=0}^\inftyigcap_{i=n}^\infty A_i אזי איזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא קבוצה ותהא A:\mathbb{N}	o\mathcal{A}
        \lim_{n \to \infty} A_n = \liminf_{n \to \infty} A_n אזי \lim\inf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n עבורה A: \mathbb{N} \to \mathcal{A} אזי A: \mathbb{N} \to \mathcal{A}
                  \lim_{n \to \infty} \mu\left(A_n
ight) = \mu\left(B
ight) אזי \lim_{n \to \infty} A_n = B עבורה A: \mathbb{N} 	o \mathcal{F} ותהא לגברה \sigma־אלגברה מעל מידה מעל
                                                              (\Omega, \mathcal{F}, \mu) אזי איזי \mathcal{F} מידה \mu מידה מעל \Omega ותהא א אלגברה \sigmaראלגברה אלגברה
                                                   \mathbb{P}\left(\Omega
ight)=1 המקיימת \mathcal{F}:\mathcal{F}	o[0,\infty] האי מידה \sigma אזי מידה מעל \sigma המקיימת מידת הסתברות: תהא
                                                                                         מרחב הסתברות: מרחב מידה (\Omega, \mathcal{F}, \mu) עבורו \mu מידת הסתברות.
                                                                                                        \Omega אזי אזי \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} מרחב הסתברות אזי \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}
                                                                                                             E \in \mathcal{F} מרחב הסתברות אזי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מאורע: יהי
                                                                                                      \mathcal{F} אזי אחב הסתברות מרחב (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) יהי
A+b\subseteq (0,1] באשר b\in (0,1] אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות b\in (0,1] עבורו לכל A\subseteq (0,1] עבורו לכל
                                                                                                                                                         \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A+b)
                                                                  . טענה: לכל מרחב הסתברות ((0,1],2^{(0,1]},\mathbb{P}) לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.
                                                                                     . \forall x \in A. \exists arepsilon > 0. \, (x-arepsilon, x+arepsilon) \subseteq A עבורה עבורה אבוצה פתוחה: A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                                                            קבוצה סגורה: A\subseteq\mathbb{R} עבורה A^{\mathcal{C}} פתוחה.
                                                                \Omega מעל \sigma הינה \sigma הינה הינה חינה מעל מעל מעל מעל בראות מעל \sigma
   \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i כל ה\sigma־אלגבראות מעל \mathbb{R} המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי \{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} כל ה\sigma-אלגבראות מעל מעל אויינה בורלית מעל
                                                                                                                                                  B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} :קבוצה בורלית
```

אלגברה: תהא  $\Omega$  קבוצה אזי  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  המקיימת

. | או סופית מתקיים  $E\subseteq\mathcal{F}$  לכל סופית סופית

 $A \cap E \in \mathcal{F}$  אוזי סופית אזי האא אלגברה ותהא למה: תהא

 $\Omega \in \mathcal{F} \bullet$ 

 $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \bullet$ 

 $\varnothing \in \mathcal{F}$  אלגברה אזי  $\mathcal{F}$  אלגברה

```
\mathfrak{B}_{(0,1]}=\{B\cap(0,1]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}: (0,1] אלגברה בורלית מעל\sigma
                                                                               A(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i-a_i\right)\mid B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i,b_i\right)
ight\} אזי B\in\mathfrak{B} מידת לבג: תהא
                                                                                                                 . מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות מרחב ((0,1],\mathfrak{B}_{(0,1]},\lambda) :
                                                                                                                                       A: (A, \mathfrak{B}_A, \lambda) אזי A\subseteq \mathbb{R} מרחב אחיד על
\sigma(\mathcal{T})=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i אזי \mathcal{T} אזי אויי המכילות מעל \Omega המכילות מעל \Omega המכילות את \mathcal{T} אזיי \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega ותהיינה \mathcal{T} ותהיינה \mathcal{T} בל ה\sigma-אלגברה נוצרת:
                                                                                            \mathcal{T} אזי \sigma(\mathcal{T}) אזי אלגברה הלגברה הנוצרת: תהא \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega אזי אלגברה הנוצרת
                                                               נסמן lpha+1 נסמן, לכל סודר עוקב \mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\} נסמן לכל סודר עוקב \Omega נסמן lpha+1
באשר \sigma\left(\mathcal{T}
ight)=\mathcal{F}_{\omega_{1}} איי איז \mathcal{F}_{\lambda}=igcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha} נסמן \lambda נסמן \mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{igcap_{n=1}^{\infty}A_{n}\mid A_{n}\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}
                                                                                                                                             . הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה \omega_1
    . orall A \in \sigma \left( \mathcal{T} 
ight). \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A אזי orall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A טענה: תהא orall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A ויהיו \mathcal{T} \subseteq 2^\Omega ויהיו
                            A : \mathcal{A} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1} [B] \in \mathcal{F} עבורה X: \Omega \to \mathbb{R} אזי משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות אזי
                                                                                                  A : \forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.arphi^{-1}\left[B
ight] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} המקיימת arphi: \mathbb{R} 	o \mathbb{R} בונקציה מדידה בורל:
                            \mathbb{P}_X\left(B
ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B
ight]
ight) כך \mathfrak{P}_X:\mathfrak{B}_\mathbb{R}	o\mathbb{R} מרחב הסתברות ויהי X:\Omega	o\mathbb{R} מ"מ נגדיר מ"מ נגדיר מ"מ מרחב
                                                        . מרחב הסתברות (\mathbb{R},\mathfrak{B}_\mathbb{R},\mathbb{P}_X) מייה מ"מ אזי X:\Omega 	o \mathbb{R} ויהי מחבר הסתברות (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות יהי
                                                                                                                                          טענה: תהא A,B\subseteq\mathbb{R} ותהיינה f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} אזי
                                                                                                                                                   f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \bullet
                                                                                                                                                  f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \bullet
                                                                                                                                                                        f^{-1}[A^{\mathcal{C}}] = f^{-1}[A]^{\mathcal{C}} \bullet
                                       \mathbb{R} טענה: יהי \{E\subseteq\mathbb{R}\mid X^{-1}\left[E
ight]\in\mathcal{F}\} אזי X:\Omega	o\mathbb{R} אזי מרחב מדיד ותהא מעל מענה: יהי
                                   (\forall t \in \mathbb{R}.X^{-1} \, [(-\infty,t)] \in \mathcal{F}) \Longleftrightarrowמשפט: יהי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות ותהא X:\Omega \to \mathbb{R} אזי ותהא
        \sigma(X)=\sigma\left(\left\{X^{-1}\left[B
ight]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}
ight\}
ight) אזי \left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}
ight) אזי \sigma(X)=\sigma(X) מ"מ על מרחב הסתברות \sigma(X)=\sigma(X)
                                                                                                                           (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) טענה: יהיו X,Y מ"מ על מרחב הסתברות מ"מ אזי
                                                                                                                                                                        יהי cX אזי c\in\mathbb{R} מ"מ. ullet
                                                                                                                                                                                          .מ"מ X+Y
                                                                                                                                                                                               .מ"מ XY
                                                                                                                                       מ"מ. f\circ X אזי (\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu) מ"מ. \bullet
                                                                                                          . פתוחה f^{-1}\left[\mathcal{U}
ight] פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R} פתוחה f\in C\left(\mathbb{R}
ight) פתוחה \mathcal{U}
```

 $F_X(t)=\mathbb{P}\left(X\leq t
ight)$  המקיימת המטברת (פה"מ): יהיX מ"מ על מרחב הסתברות ( $\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$ ) אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$  המקיימת מטברת (פה"מ): יהי

למה: תהא  $\mathcal{F}\subseteq 2^\Omega$  סגורה להפרשים וסגורה לחיתוכים סופיים עבורה  $\Omega\in\mathcal{F}_0$  ותהא חבוצה עבורה להפרשים וסגורה לגבולות

. supp  $(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid \forall \varepsilon>0.\mathbb{P}\,(t-\varepsilon< X< t+\varepsilon)>0\}$  תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי מ"מ אזי supp  $(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid \forall \varepsilon>0.\mathbb{P}\,(t-\varepsilon< X< t+\varepsilon)>0\}$  טענה: יהי X מ"מ אזי ואי הקבוצה הסגורה המינימלית ב־ $\mathbb{R}$  עבורה supp (X)

 $\mathbb{R}$  טענה:  $\sigma$ ־אלגברה בורלית הינה  $\sigma$ ־אלגברה מעל

 $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$  מסקנה: תהא  $f\in C\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי איי  $f\in C\left(\mathbb{R}
ight)$ 

 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$  טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות

 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$  משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עבורם

 $(\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y) \Longleftrightarrow (F_X = F_Y)$  מיימ אזי X,Y טענה: יהיו

 $\mathbb{P}\left(X=t
ight)>0$  אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי  $t\in\mathbb{R}$  המקיים  $A_X=\{t\in\mathbb{R}\mid X$  אטום של  $t\}$  אטום יהי X מ"מ אזי אוי קבוצת האטומים: יהי t

 $\lim_{t \to \infty} F_X\left(t\right) = 1$  •  $\lim_{t \to -\infty} F_X\left(t\right) = 0$  • מונוטונית עולה.  $F_X$  •

 $\lim_{t\to a^+} F_X(t) = F_X(a) \bullet$ 

 $\sigma\left(\mathcal{F}_{0}
ight)\subset\mathcal{F}$  אזי אינסופיים עבורה  $\mathcal{F}_{0}\subset\mathcal{F}$ 

 $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{F}$  אוי הפתוחות אזי המכילה את את המכילה מעל המכילה אזי  $\sigma$ 

A איזי  $\{E\cap A\mid E\in\mathcal{F}\}$  איזי חינה מעל  $\Omega$  ותהא הינה  $\sigma$ ־אלגברה מעל  $\sigma$  הינה  $\sigma$ -אלגברה מעל

```
משתנה מקרי בציף: משתנה מקרי A < b עבורו קיימת פונקציית צפיפות עבורה לכל a < b מתקיים משתנה מקרי משתנה מקרי A
                                                                                                                                          \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx
                                                                                                     X סימון: יהי א מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של
                                                                                                      .(\mathbb{P}\left(X\in A_X\right)=0)\Longleftrightarrowטענה: יהי X מ"מ אזי (X רציף)
                                                                0 < \mathbb{P}\left(X \in A_X
ight) < 1 הערה: לא כל משתנה מקרה הוא בדיד או רציף, ובמקרה הא
                                                                                                                                                טענה: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                                                                                                  \mathbb{P}\left(X=t
ight)=0 יהי t\in\mathbb{R} יהי •
                                                                                                                                        .F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) \, \mathrm{d}x \bullet
                                                                     .F_{X}^{\prime}\left(a
ight)=f_{X}\left(a
ight) אזי f_{X}\in C\left(a
ight) עבורה a\in\mathbb{R} עבורה מ"מ רציף ותהא X
                  .F_{X}\left(x_{n}
ight)=p המקיים x_{n}\in\mathbb{R} אזי אזי p\in\left(0,1
ight) ויהי ויהי F_{X}=1 עולה ממש עד אשר עד אשר אשר ויהי ויהי F_{X}
                                                       x_p = \sup \{t \mid F_X(t) \leq p\} אזי p \in (0,1) עולה ויהי עבורו F_X מ"מ עבורו הי"מ מ"מ אזי יהי
טענה: תהא \lim_{x \to \infty} F\left(x
ight) = 1 מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה \lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 1 וכן \lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 1 איז קיים מ"מ X על
                                                                                                                         F_X = F עבורו (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות
                        אזי \lim_{x \to \infty} F\left(x\right) = 1 וכן \lim_{x \to -\infty} F\left(x\right) = 0 אזי אונוטונית עולה רציפה מימין עבורה F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} אזי F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}
                                                                                                                                           X^{\star}(s) = \sup\{t \mid F(t) \leq s\}
                 טענה: תהא \lim_{x	o\infty}F\left(x
ight)=1 וכן \lim_{x	o-\infty}F\left(x
ight)=0 מיימ על הציפה מימין עבורה F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} וכן F:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
                                                                                                                                                           .((0,1),\mathfrak{B}_{(0,1)},\lambda)
       .F_{X^\star}=F אזי \lim_{x	o\infty}F\left(x
ight)=1 וכן \lim_{x	o\infty}F\left(x
ight)=0 איזי אונוטונית עולה רציפה מימין עבורה F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} משפט: תהא
                  \mathbb{P}\left(X_n=k
ight) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}\left(X=k
ight) אזי k \in \mathbb{N} אזי מ"מ יהי X \sim \mathrm{Poi}\left(\lambda
ight) מ"מ יהי X_n \sim \mathrm{Bin}\left(n, rac{\lambda}{n}
ight) יהי \lambda > 0 יהי \lambda > 0
t אמן, עד אמן שקרו שקרו שקרו בלתי תלויים מספר את סופר את המ"מ המ"מ כך אלכל אוליים שקרו עד אמן כך אלכל אוליך t\in\mathbb{R}_+ כך שלכל אוליים שקרו עד אמן מספר האירועים בלתי תלויים שקרו עד אמן אוליך פואסון: משתנים מקריים בלתי תלויים שקרו עד אמן
                                                                    . בפרט אירועים ליחידת ממוצע באשר אN_{t+s}-N_s\sim \mathrm{Poi}\left(\lambda t
ight) וכן וכן N_0=0
                                                  \mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a
ight)=\mathbb{P}\left(X>b
ight) אזי a,b>0 ויהיו X\sim \mathrm{Exp}\left(\lambda
ight) יהי \lambda>0 יהי \lambda>0
                     X\sim 	ext{Exp}\left(\lambda
ight) עבורו איי קיים \lambda>0 איי קיים \forall a,b>0.\mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a
ight)=\mathbb{P}\left(X>b
ight) עבורו
                                                          \operatorname{Exp}\left(\lambda\right) אמן מתפלג ופעים ליחידת אמן עם קצב \lambda מופעים ליחידת מתפלג של סענה: הזמן הבינמופעי של
                                                   .f_{arphi\circ X}\left(t
ight)=rac{f_X\left(arphi^{-1}(t)
ight)}{arphi'(arphi^{-1}(t))} אזירה אזי arphi על, עולה ממש וגזירה אזי arphi:\mathbb{R}	o\mathbb{R} ותהא arphi:\mathcal{R}	o\mathbb{R}
                                              f_{arphi\circ X}\left(t
ight)=-rac{f_X\left(arphi^{-1}(t)
ight)}{arphi'\left(arphi^{-1}(t)
ight)} איז מ"מ רציף ותהא arphi:\mathbb{R}	o\mathbb{R} על, יורדת ממש וגזירה אזי מ"מ רציף ותהא
                                                                                          X^{-} = \min \{X, 0\} ,X^{+} = \max \{X, 0\} מ"מ אזי מ"מ אזי
                                                                                              \mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{c \in A_{X}} c \cdot \mathbb{P}\left(X = c\right) אזי בדיד מ"מ Xיהי יהי תוחלת: יהי
                                                                                                      \mathbb{E}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[X^{+}
ight]+\mathbb{E}\left[X^{-}
ight]טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי
                                                                                                     משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו שוני. מימ סופי.
                                               A : \mathbb{R} אזי משתנה מקרי סימטרי: יהי A \in \mathbb{R} אזי מ"מ A \in \mathbb{R} אזי מ"מ A \in \mathbb{R} משתנה מקרי סימטרי: יהי
                                                                      \mathbb{E}\left[X
ight]=a אזי a\in\mathbb{R} אינטגרבילי סימטרי מ"מ בדיד מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מיים a\in\mathbb{R}
                                         \mathbb{E}\left[aX+b
ight]=a\mathbb{E}\left[X
ight]+b טענה לינאריות התוחלת: יהיו a,b\in\mathbb{R} ויהי a,b\in\mathbb{R} טענה לינאריות
                                                                                       X < X משתנה מקרי שולט: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט על אם משתנה מקרי שולט:
                                                                                \mathbb{E}\left[X
ight]>\mathbb{E}\left[Y
ight] אזי בדידים אזי X>Y יהיו אינה מונוטוניות התוחלת: יהיו
                                                                                                                                                      תוחלת: יהי X מ"מ אזי
                                                                                         \mathbb{E}[X^+] = \sup \{ \mathbb{E}[Y] \mid (0 \le Y \le X^+) \land (מ"מ בדיד Y) \} \bullet
                                                                                  \mathbb{E}[X^-] = -\sup\{\mathbb{E}[Y] \mid (0 \le Y \le -X^-) \land (מ"מ בדיד Y)\}
```

 $|A_X| \leq leph_0$  טענה: יהיX מ"מ אזי

 $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-] \bullet$ 

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו  $\mathbb{E}\left[X
ight]$  סופי.

 $\mathbb{E}\left[X
ight] \geq \mathbb{E}\left[Y
ight]$  מ"מ אזי  $X \geq Y$  טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו

 $\mathbb{E}\left[aX+b
ight]=a\mathbb{E}\left[X
ight]+b$  אינטגרבילי איז  $a,b\in\mathbb{R}$  ויהי  $a,b\in\mathbb{R}$  טענה לינאריות התוחלת: יהיו

 $\mathbb{P}\left(X\in A_X
ight)=1$  משתנה מקרי משתנה משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי

 $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x
ight)\mathrm{d}x=1$  וכן  $f\geq0$  וכן המקיימת למקוטעין רציפה למקוטעין רציפה למקוטעין וכן רציפה למקוטעין פונקציית אפיפות:

```
\mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{-\infty}^{\infty}tf_{X}\left(t
ight)\mathrm{d}t מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                        F_Y \geq F_X משתנה מקרי שולט סטוכסטית: יהיו X,Y מ"מ אזי א שולט סטוכסטית על אם משתנה מקרי שולט מטוכסטית:
                                                                                X טענה: יהיו X,Y מ"מ עבורם Y = 1 אזי אוי \mathbb{P}(Y < X) = 1 מ"מ עבורם X,Y טענה: יהיו
                                                                                                                                                                       טענה: יהיו X,Y מ"מ
                                                                                                                \mathbb{E}\left[Y\right] \leq \mathbb{E}\left[X\right] אזי Y אט סטוכסטית שולט X •
                                                                                                                               \mathbb{E}\left[Y
ight] \leq \mathbb{E}\left[X
ight] אזי \mathbb{P}\left(Y \leq X
ight) = 1 אם ullet
                                                                                                                                \mathbb{E}\left[X+Y\right]=\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[Y\right] :חיבוריות
                                                                \mathbb{P}\left(X\geq b
ight)\leq rac{\mathbb{E}[X]}{b} אזי b>0 אינטגרבילי ויהי X\geq 0 מ"מ אינטגרבילי יהי
                                        \mathbb{E}\left[arphi\circ X
ight]=\sum_{c\in A_X}arphi\left(c
ight)\cdot\mathbb{P}\left(X=c
ight) אינ מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא arphi מדידה בורל אזי
                                                               \mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(t\right)f_{X}\left(t\right)\mathrm{d}t אזי למקוטעין עיפה רציפה ותהא ערביף ותהא מ"מ מ"מ אזי מינה: יהי ענה:
                                                                                                                        \mathbb{E}\left[X
ight] = \int_{0}^{1} X^{\star}\left(t
ight) \mathrm{d}t טענה: יהי X מ"מ חסום אזי
                                                                                             \mathbb{E}\left[X
ight]=\lim_{arepsilon	o0}\int_0^{1-arepsilon}X^\star\left(t
ight)\mathrm{d}t טענה: יהי X מ"מ חסום מלרע אזי \mathbb{E}\left[X
ight]=\lim_{arepsilon	o0}\int_{0+arepsilon}^1X^\star\left(t
ight)\mathrm{d}t אזי אזי חסום מלעיל אזי מ"מ חסום מלעיל אזי
                                                                                                 .\operatorname{Var}\left(X
ight)=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)^{2}
ight] שונות: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי
                                                                                                          \sigma\left(X
ight)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X
ight)} אינטגרבילי אזי מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מיטיית תקן: יהי
                                                                                                    .Var (X)=\mathbb{E}\left[X^2
ight]-\mathbb{E}^2\left[X
ight] אזי מ"מ אינטגרבילי איזי מ"מ מ"מ אינטגרבילי
                                                                                .\operatorname{Var}\left(aX+b\right)=a^{2}\operatorname{Var}\left(X\right) אזי a,b\in\mathbb{R} ויהיו מ"מ אינטגרבילי מ"מ X
                                 \mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}\left[X
ight]|\geq a
ight)\leq rac{	ext{Var}(X)}{a^2} אזי a>0 אזי מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי a>0
                                                                  M_{X}\left(t
ight)=\mathbb{E}\left[e^{tX}
ight] המוגדרת M_{X}:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R} מ"מ אזי X יהי היי מומנטים: יהי
                                                               M_{X}^{(n)}\left(0
ight)=\mathbb{E}\left[X^{n}
ight] אזי M_{X}\in C^{n}\left(I
ight) וכן 0\in I אזי קטע עבורו מ"מ מ"מ ויהי X
                                   n\in\mathbb{N} מתכנס לכל \mathbb{E}\left[\left|X
ight|^{n}
ight] אזי אזי I מתכנס לכל וכן וכן 0\in I וכן שנה: יהי X מ"מ ויהי מ"מ ויהי
                                               M_X\left(t
ight)=\sum_{n=0}^{n}rac{t^n\mathbb{E}[X^n]}{n!} אזי \left(-arepsilon,arepsilon
ight) איז \left(-arepsilon,arepsilon
ight) איז איז \left(-arepsilon,arepsilon
ight) עבורו M_X\left(t
ight) קיים וסופי על
\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i כל ה\sigma־אלגבראות מעל \mathbb{R}^n המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי \{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} כל ה\sigma-אלגבראות מעל מעל מעל החינה בורלית מעל
                                 A : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} משתנה מקרי X: \Omega \to \mathbb{R}^n עבורה הסתברות אזי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב היי משתנה מקרי מימדי: יהי
             X: \Omega \to \mathbb{R}^n. משפט: יהי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות ותהא X: \Omega \to \mathbb{R}^n אזי X: \Omega \to \mathbb{R}^n משפט: יהי
                    \mathbb{P}_X\left(B
ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B
ight]
ight) כך \mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}	o\mathbb{R}^n סימון: יהי \Omega	o\mathbb{R}^n כך על היי \Omega	o\mathbb{R}^n מרחב הסתברות ויהי
                                             . מרחב הסתברות (\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n},\mathbb{P}_X) מ"מ איז X:\Omega 	o \mathbb{R}^n מרחב הסתברות (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות ייהי
                                        F_X(t) = \mathbb{P}\left(X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n\right)
                                                                                                                                                 טענה: יהי (X,Y) מ"מ דו־ערכי אזי
                                                                                                                           \lim_{k \to -\infty} F_{X,Y}\left(k,\ell
ight) = 0 יהי \ell \in \mathbb{R} יהי
                                                                                                                           \lim_{\ell \to -\infty} F_{X,Y}(k,\ell) = 0 אזי k \in \mathbb{R} יהי
                                                                                                                                       \lim_{\ell \to \infty} \lim_{k \to \infty} F_{X,Y}(k,\ell) = 1 \bullet
                                                                  \lim_{k\to p^+}\lim_{\ell\to q^+}F_{X,Y}\left(k,\ell
ight)=F_{X,Y}\left(p,q
ight) אזי p,q\in\mathbb{R} רציפות מימין: יהיו
F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{2}
ight)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{1}
ight)\geq F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{1}
ight)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{2}
ight) איזי \ell_{1}<\ell_{2} איזי אויך איזי אוים מ"מ דו־ערכי ויהיו k_{1}<\ell_{2} וכך k_{1}<\ell_{2} איזי איזי מ"מ דו־ערכי ויהיו
                                                                                        \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ X,Y
```

 $\mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{0}^{\infty}\left(1-F_{X}\left(t
ight)
ight)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\left(0-F_{X}\left(t
ight)
ight)\mathrm{d}t$ טענה נוסחת הזנב: יהי

פונקציית התפלגות מצטברת שולית: יהי מצטברת מצטברת אזי פונקציית התפלגות מצטברת אולית: יהי

 $(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)\Longleftrightarrow (F_X=F_Y)$  אזי X,Y מענה: יהיו מ"מ n־מימדיים אזי X,Y

 $.F_X(t) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(t,y) \bullet$ 

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי  $X_i$  מ"מ חד־מימדי משתנה מקרי שולי: יהי X מ"מ  $\alpha$ ־מימדי אזי  $X_i$ 

 $.F_Y(t) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,t) \bullet$ 

 $\mathbb{.P}\left(X=a\right)>0$ עבורו  $a\in\mathbb{R}^{n}$  אזי מ"מ T מ"מ מ"מ יהי איום: יהי איום

 $A_X = \{t \in \mathbb{R}^n \mid X$  אטום של אזי t מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ אזי קבוצת האטומים: יהי

```
F_X\left(a
ight)=\int_{-\infty}^{a_{p(n)}}\dots\int_{-\infty}^{a_{p(n)}}f_X\left(x_1\dots x_n
ight)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n עבורה אזי p:[n]	o [n] תמורה אזי p:[n]	o [n] אזי f_X\in X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X ותהא f_X\in C\left(a\right) עבורה f_X עבורה f_X עבורה f_X אזי f_X אזי f_X אזי f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X ותהא f_X עבורה f_X עבורה f_X אזי f_X אזי f_X מ"מ f_X מ"מ f_X וותהא f_X אונים f_X עבורה f_X עבורה f_X עבורה f_X עבורה f_X אזי f_X פרי f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X מ"מ f_X פרי f_X מ"מ f
                                                                                                                                                                                                       i \in [n] טענה: יהי X מ"מ ח־מימדי רציף אזי מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ
                                                                                                                                                                                                                                   פונקציית צפיפות שולית: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                       f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,y) \, \mathrm{d}y \quad \bullet
f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t) \, \mathrm{d}x \quad \bullet
                                                                                                                                                              \mathbb{P}\left(X\in B
ight)=\int_{B}f_{X} אזי B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}} ותהא רציף ותהא T מ"מ T מ"מ מ"מ מ"מ מימדי רציף ותהא
                                                                                                                                                                        A : \forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.arphi^{-1}\left[B
ight] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} המקיימת arphi: \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} בורל:
                                                                                                                               f_{X+Y}\left(s
ight)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,s-x
ight)\mathrm{d}x מסקנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי
                                                                                                                                                                 טענה: יהי X מ"ם המימדי ותהא \varphi:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} בורלית רציפה למקוטעין אזי מינה: יהי
                                                                                                                                                                                     \mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(x_{1} \dots x_{n}\right) f_{X}\left(x_{1} \dots x_{n}\right) dx_{1} \dots dx_{n}
                                                                   .Cov [X,Y]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)\left(Y-\mathbb{E}\left[Y
ight]
ight)
ight] אותו מרחב הסתברות אזי משותפת: יהיו X,Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות אזי
                                                                                                                                   . Cov [X,Y]=0 משתנים בלתי מתואמים: X,Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות מתואמים:
                                                                                .
ho_{X,Y}=rac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)} מקדם מתאם: יהיו X,Y מ"מ אזי X,Y משפט אי־שיוויון קושי־שוורץ: יהיו X,Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי X,Y יהיו X,Y יהיו X,Y משפט אי־שיוויון קושי־שוורץ: יהיו
                                \left(\mathbb{E}\left[XY
ight]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2
ight]\mathbb{E}\left[Y^2
ight]
ight) \Longleftrightarrow \left(\exists c \in \mathbb{R}. \mathbb{P}\left(Y=cX
ight)=1
ight) מסקנה: יהיו X,Y מים בעלי מומנט ראשון ושני אזי

ho_{X,Y} \in [-1,1] מסקנה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     מסקנה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                                                                                                                                                                                               (\rho_{XY} = 1) \iff (\exists a > 0. \exists b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet
                                                                                                                                                                                         (\rho_{X,Y} = -1) \iff (\exists a < 0. \exists b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet
                                                                                                                                                                                                    \mathbb{C}[X,Y]=\mathbb{E}\left[XY
ight]-\mathbb{E}\left[X
ight]\mathbb{E}\left[Y
ight] מ"מ אזי X,Y מ"מ אזי יהיו
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                .Cov[X, X] = Var[X] \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                                                                       .Cov[X,Y] = Cov[Y,X] \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                                                 .Cov[aX + b, Y] = aCov[X, Y] \bullet
                                                                                                                                                                                                              .Cov [\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^m Y_i] = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m \mathrm{Cov}\left[X_i, Y_i\right]   

   ...
orall k \in [n]. B_k \in \sigma(X_k) המקיימים בלתי מקריים בלתי מיימים מחד־מימדיים עבורם לכל מאורעות אמשתנים מקריים בלתי תלויים: \{X_i\}_{i=1}^n משתנים מקריים בלתי תלויים:
                                                                                                                                                                                                                                                                                   \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_{i}
ight)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(B_{i}
ight) מתקיים
                                                                                           . מ"מ ב"ת \{g_i\left(X_i\right)\}_{i=1}^n מ"מ בורל אזי בורל מדידות מוקציות (\{g_i\}_{i=1}^n מ"מ ב"ת מ"מ ב"ת מענה: יהיו
                                                                                                               (F_{X_1...X_n}\left(x_1\ldots x_n
ight)=\prod_{i=1}^nF_{X_i}\left(x_i
ight)ב"ת) ב"ת איז \{X_i\}_{i=1}^n מענה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^n מינה: יהיו
                                                                                           (f_{X_1...X_n}\left(x_1\dots x_n
ight) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}\left(x_i
ight)ב"ת) ב"ת בציפים אזי איי אוינה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^n מ"מ רציפים אזי לענה:
f_{X_1...X_n}\left(x_1\dots x_n
ight)=\prod_{i=1}^ng_i\left(x_i
ight) מ"מ רציפים ותהיינה אי־שליליות רציפות אי־שליליות רציפות מקוועין מ"מ רציפים ותהיינה \left\{g_i
ight\}_{i=1}^n אי־שליליות רציפות מקוועין המקיימות אי־שליליות רציפים ותהיינה ותהיינה מיינה ותהיינה ו
                                                                                                                                                                                         \mathbb{E}\left[XY\right]=\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]אינטגרביליים אינ ב"ת מ"מ ב"ת מ"מ ב"ת מ"מ למה: יהיו
```

 $\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x_1,\dots,x_n
ight)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=1$  וכן  $f\geq 0$  וכן המקיימת  $f:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}$  רציפה  $f:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}$  רציפה משתנה  $a_i< b_i$  המקיימות  $a_i< b_i$  מתקיים  $a_i< b_i$  מתקיים משתנה מקרי רציף:  $a_i$  מ"מ  $a_i$ 

 $|A_X| < \aleph_0$  טענה: יהיX מ"מn־מימדי אזי

 $\mathbb{P}\left(X\in A_X
ight)=1$  משתנה מקרי בדיד: X מ"מ X משתנה מקרי בדיד:

 $. orall a \in A_X. \mathbb{P}_X \left( a 
ight) = \mathbb{P} \left( X = a 
ight)$ טענה: יהי X מ"מ n־מימדי בדיד אזי

.( $\mathbb{P}(X\in A_X)=0$ ) טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי (X רציף) טענה: יהי X מ"מ n־מימדי ויהי  $a\in\mathbb{R}^n$  אזי a

 $(i \in [n]$  טענה: יהי X מ"מ בדיד לכל  $X_i$  מ"מ בדיד לכל  $X_i$  טענה: יהי X מ"מ בדיד לכל

 $\mathbb{P}(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ 

 $.F_X\left(a
ight)=\int_{-\infty}^{a_n}\ldots\int_{-\infty}^{a_1}f_X\left(x_1\ldots x_n
ight)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$  טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף אזי

```
.
Var [\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n 	ext{Var}\left[X_i
ight] איי שני איי מטקנה: יהיו ל\{X_i\}_{i=1}^n מיסקנה: יהיו
                                                    M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t) מסקנה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^n מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי
                           \{X_i\}_{i=1}^n סטטיסטיי הסדר: יהיו באוסף מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי מ"מ ב"ת שווי התפלגות מ"מ מ"מ ב"ת שווי התפלגות הסדר: יהיו
                                                                                                                  טענה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^n מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי
                                                                                       .F_{X_{(k)}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left( \binom{n}{i} \cdot F_{F_{X_1}}(t)^i \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-i} \right) \bullet
                                                                                        f_{X_{(k)}}(t) = n \cdot f_{X_1}(t) \cdot F_{X_1}(t)^{k-1} \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-k} \bullet
                                                                   \overline{X_n} = rac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i אזי אזי התפלגות מדגמי: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty ממוצע מדגמי: יהיו
                                                                                  \mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight]=\mathbb{E}\left[X_1
ight] אזי התפלגות מ"מ ב"ת שווי מ"מ \left\{X_i
ight\}_{i=1}^\infty יהיו
                                                                                       .
Var \overline{[X_n]} 	o 0 אזי התפלגות שווי מ"מ ב"ת מ"מ מ"מ אזי \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                                           התכנסות משתנים מקריים: יהיו \left\{X_i\right\}_{i=1}^\infty יהיו מקריים: התכנסות משתנים מקריים: יהיו
             .\left(X_{n}\overset{D}{\longrightarrow}X\right)\Longleftrightarrow\left(orall t\in\mathbb{R}.\left(F_{X}\in C\left(\left\{ t
ight\} 
ight)
ight)\Longrightarrow\left(F_{X_{n}}\left(t
ight)\overset{D}{\longrightarrow}F_{X}\left(t
ight)
ight)
ight) :התכנסות בהתפלגות:
                                               .\left(X_{n}\overset{p}{
ightarrow}X
ight)\Longleftrightarrow\left(orallarepsilon>0.\mathbb{P}\left(|X_{n}-X|\geqarepsilon
ight)\overset{p}{\longrightarrow}0
ight) התכנסות בהסתברות:
                             \left(X_{n} \xrightarrow{a.s.} X\right) \Longleftrightarrow \left(\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X_{n}\left(\omega\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} X\left(\omega\right)
ight\}
ight) = 1\right) התכנסות כמעט תמיד:
                                  .ig(X_n \xrightarrow{a.s.} Xig) \Longrightarrow ig(X_n \xrightarrow{p} Xig) \Longrightarrow ig(X_n \xrightarrow{D} Xig)טענה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ ויהי \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                 \overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight] \stackrel{p}{	o} 0 עבורם \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ מ"פרים הגדולים: מ"מ
                               \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{b_n} 	o 0 אזי אי \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{b_n} < \infty וכן b_n \uparrow \infty וכן a_n \geq 0 אזי a_n, b_n סדרות עבורן a_n, b_n סדרות עבורן a_n, b_n וכן a_n \geq 0 אזי a_n \geq 0 אזי a_n \geq 0 מסקנה: יהיו a_n \neq 0 מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 מסקנה: יהיו a_n \neq 0 מ"כ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 אזי a_n \neq 0 מסקנה: יהיו
            .\left(X_n \xrightarrow{a.s.} X
ight) \Longleftrightarrow (orall arepsilon > 0. \mathbb{P}\left(\limsup\left\{|X_n - X| \geq arepsilon
ight\}
ight) = 0
ight)טענה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty מינה: יהיו מ"מ ויהי
    \mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_i
ight)=igcap_{i\in I}\mathbb{P}\left(A_i
ight) סופית מתקיים I\subseteq\mathbb{N} המקיימים כי לכל \{A_n\}_{n=1}^\infty האורעות בלתי תלויים: מאורעות
                                                                                                    טענה הלמה של בורל־קנטלי: יהיו \left\{A_n
ight\}_{n=1}^\infty מאורעות אזי
                                                                                                   (\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \iff (\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty) \bullet
                                                     .(\mathbb{P}(\limsup A_n)=1) כוווי (\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=\infty) השורעות ב"ת) מאורעות ב"ת \{A_n\}_{n=1}^{\infty}) .
X_n \xrightarrow{a.s.} X אזי אזי \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}\left(|X_n-X| \geq arepsilon
ight) < \infty מחקיים arepsilon > 0 מחקנה: יהיו מ"מ ויהי \{X_i\}_{i=1}^\infty אזי אזי
                                                              \overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight] \stackrel{a.s.}{\longrightarrow} 0 עבורם \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ מ"מ החזק של המספרים הגדולים:
             .\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} 0 אזי orall i \in \mathbb{N}.\mathbb{E}\left[X_i
ight] = 0 טענה: יהיו מומנט רביעי חסום במידה אחידה עבורם אזי \{X_i\}_{i=1}^\infty אזי
                                   .\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} 0 אזי איי \sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty וכן \forall i \in \mathbb{N}.\mathbb{E}\left[X_i
ight] = 0 מסקנה: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty אזי \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                                      \bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma\left(igcup_{i=n}^{\infty}\sigma\left(X_{i}
ight)
ight) מ"מ אזי הייו \left\{X_{i}
ight\}_{i=1}^{\infty} יהיי יהיי
                                                                                A\in\mathcal{F} אזי הזיב אזי האנברת מאורע מ"מ ותהא מ"מ מאורע מי"מ איי יהיו מאורע מאורע יהיי יהיו יהיו מאורע מ
                                                 \mathbb{P}\left(A
ight)\in\left\{ 0,1
ight\} איי זעב אזי מאורע מ"מ ב"ת ויהי איי מ"מ ב"ת יהיו \left\{ X_{i}
ight\} _{i=1}^{\infty} יהיו יהיו
                                                                                                                              מסקנה: יהיו \{A_n\}_{n=1}^\infty מאורעות ב"ת אזי
                                                                                                  .(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \iff (\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty) \bullet
                                                                                                  .(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1) \iff (\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty) \bullet
                                                                                                  .Z\sim\mathcal{N}\left(0,1
ight) עבורו מ"מ עבורו סטנדרטית: מ"מ
                                                                                                                        M_{Z}\left(t
ight)=e^{rac{t^{2}}{2}} אזי Z\sim\mathcal{N}\left(0,1
ight)טענה: יהי
                                                                  \sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) אזי \sigma \in \mathbb{R}_+ ויהי Z \sim \mathcal{N}\left(0, 1\right) טענה: יהי
                                                                                                         M_Z(t)=e^{rac{\sigma^2t^2}{2}+\mu t} אזי Z\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2
ight) מסקנה: יהי
                             \sum_{i=1}^n X_i - n \mathbb{E}[X_1] \over \sum_{i=1}^n X_i - n \mathbb{E}[X_1]} \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0,1
ight) משפט הגבול המרכזי: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty משפט הגבול המרכזי: יהיו
```

 $\operatorname{Cov}\left[X,Y
ight]=0$  טענה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי X,Y

```
תוחלת מותנית: יהי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות יהי X מ"מ ותהא \mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F} אלגברה אזי \mathbb{E}[X\mid\mathcal{F}_0] מרחב הסתברות ויהיו \mathbb{E}[\chi_A\cdot X]=\mathbb{E}[\chi_A\cdot \mathbb{E}[X\mid\mathcal{F}_0]] מרחב הסתברות ויהיו \mathbb{E}[\chi_A\cdot X]=\mathbb{E}[X\mid \sigma(Y)] מרחב הסתברות ויהיו X,Y מ"מ אזי X,Y מ"מ אזי X,Y מ"מ דו־מימדי בדיד אזי X,Y וויהי X,Y מ"מ דו־מימדי בדיד אזי X,Y מ"מ עבורו X,Y מ"מ דו־מימדי בדיד אזי X,Y מ"מ עבורו X,Y מ"מ דו־מימדי בדיד אזי X,Y מ"מ עבורו X,Y מ"מ דו־מימדי רציף אזי X,Y מ"מ עבורו X,Y מ"מ דו־מימדי רציף אזי X,Y מ"מ עבורו X,Y מ"מ דו־מימדי רציף אזי X,Y מ"מ ותהיינה X,Y מ"מ דו־מימדי רציף אזי X,Y מ"מ ותהיינה X,Y מ"מ אזי X,Y מ"מ דו־מימדי רציף אזי X,Y מ"מ ותהיינה X,Y מ"מ אזי X,Y מ"מ ותהיינה X,Y מ"מ ההחלקה: יהי X,Y מ"מ רציף ויהי X,Y מורע אזי X,Y מ"מ מע מדער ויהי X,Y מ"מ מורע אזי X,Y מ"מ ווהיינה X,Y מ"מ מורע אזי X,Y מ"מ מורם ב
```

# התפלגויות

#### התפלגות ברנולי: יהי $p \in [0,1]$ אזי

- 1-p וסיכוי פישלון וסיכוי בעל סיכוי הצלחה אינדיקטור להצלחה בניסוי בעל הצלחה p ומיכוי כישלון
  - $\mathbb{.P}\left(X=0
    ight)=1-p$  ,  $\mathbb{P}\left(X=1
    ight)=p$  :פונקציית הסתברות
    - $X \sim \mathrm{Ber}(p)$  :סימון
    - $\mathbb{E}\left[X\right]=p$  :תוחלת •
    - .Var (X) = p(1-p) שונות:

## אזי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $p \in [0,1]$ אזי התפלגות בינומית:

- . ניסויי בחנולי בסיכוי הצלחה שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בסיכוי הצלחה שצלחה שצלחו ביצוע n
  - $\mathbb{P}\left(X=k
    ight)=inom{n}{k}p^{k}\left(1-p
    ight)^{n-k}$  אזי  $k\in\{0,\ldots,n\}$  יהי
    - $X \sim \text{Bin}(n,p)$ : סימון
      - $\mathbb{E}\left[X\right]=np$  :תוחלת
    - .Var (X) = np(1-p) שונות:

## אזי $r\in\mathbb{N}$ ויהי $p\in[0,1]$ אזי שלילית: יהי

- $\dots X$  :המשתנה המקרי
- $\mathbb{P}\left(X=k
  ight)=inom{k-1}{r-1}p^r\left(1-p
  ight)^{k-r}$  אזי  $k\in\mathbb{N}ackslash\left\{0\dots r-1
  ight\}$  יהי פונקציית הסתברות: יהי
  - $X\sim \mathrm{NB}\left(n,p
    ight)$  סימון:
  - $\mathbb{E}\left[X
    ight]=rac{r}{p}$  :תוחלת: Var  $(X)=rac{r(1-p)}{p^2}$  . •

#### אזי $p \in [0,1]$ אזי אומטרית: יהי

- . מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל. מספר מספרי: X
  - $\mathbb{.P}\left(X=k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}p$ אזי  $k\in\mathbb{N}_{+}$ יהי הסתברות: פונקציית הסתברות:
    - $X\sim \mathrm{Geo}\left(p\right)$  סימון: •
    - $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{1}{p}$  :תוחלת •
    - .Var  $(X)=rac{1-p}{p^2}$  :שונות:

## אזי $D,n\in\{0\ldots N\}$ ויהיו $N\in\mathbb{N}$ יהי התפלגות הייפרגאומטרית: יהי

- $\dots X$  :- המשתנה המקרי
- $\mathbb{P}(X=k)=rac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{k}}$  אזי  $k\in\{\max\{0,n+D-N\}\dots\min(n,D)\}$  פונקציית הסתברות: יהי
  - $X\sim \mathrm{HG}\left(N,D,n
    ight)$ : סימון

# . $\mathbb{E}\left[X ight]=rac{nD}{N}$ . תוחלת: $\mathbb{E}\left[X ight]=rac{nD}{N}$ . $\mathbb{V}$ ar $(X)=rac{nD}{N}\left(1-rac{D}{N} ight)\left(rac{N-n}{N-1} ight)$ . שונות: $N\in\mathbb{N}$ יהי $N\in\mathbb{N}$ יהי $N\in\mathbb{N}$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ אזי אזי $N\in\mathbb{N}$ איזי

- ... X :... א המשתנה המקרי: א ... X ... ... ... המשתנה המקרי: א ... X ... ... ... פונקציית הסתברות: יהי  $k\in\{0,\ldots,K\}$  אזי  $k\in\{0,\ldots,K\}$ 
  - $.X\sim \mathrm{NHG}\left(N,K,r
    ight)$  סימון:
  - . $\mathbb{E}\left[X
    ight]=rac{rK}{N-K+1}$ : תוחלת: תוחלת: Var  $(X)=\left(rac{r(N+1)K}{(N-K+1)(N-K+2)}
    ight)\left(1-rac{r}{N-K+1}
    ight)$  שונות: •

#### > 0 התפלגות פואסונית: יהי

- $\lambda$  זמן זה בפרק אירועים בפרק אמן מחן בפרק מפר האירועים האירועים פרק מספר המשתנה מספר אירועים פרק מספר  $\lambda$ 
  - $\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}rac{\lambda^k}{k!}$  אזי  $k\in\mathbb{N}$  יהי הסתברות:
    - $.X\sim \mathrm{Poi}\left(\lambda
      ight)$  סימון: •
    - $\mathbb{E}[X] = \lambda$  :תוחלת
    - .Var  $(X) = \lambda$  שונות:

## אזי $a < b \in \mathbb{Z}$ יהיו בדידה אחידה אחידה התפלגות

- $.\{a \dots b\}$ בקבוצה נקודה של אקראית בחירה בחירה מקרי:  $\bullet$
- $\mathbb{P}\left(X=k
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{1}{b-a+1} & k\in[a,b]\cap\mathbb{Z} \ & k\in\mathbb{R} \end{array}
  ight.$ אזי אזי  $k\in\mathbb{R}$  אזי הסתברות: יהי
  - $.X \sim \mathrm{Uni}\left(\{a \dots b\}
    ight)$  סימון:
  - $\mathbb{E}\left[X
    ight]=rac{a+b}{2}$  . תוחלת:  $\mathbb{E}\left[X
    ight]=rac{a+b}{2}$  . Var  $(X)=rac{(b-a+1)^2-1}{12}$  .  $\bullet$

### אזי a < b יהיו רציפה: אחידה אחידה התפלגות

- (a,b) בחירה אקראית של נקודה בקטע X
  - b) איינ של נקודה בקטע ( $F_X(t)=egin{cases} 0 & t\leq a \\ t \leq a & t \leq a \end{cases}$  פונקציית התפלגות מצטברת:  $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$  פונקציית צפיפות:  $f_X(t)=egin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$   $t \in (a,b)$   $t \in (a,b)$ 
    - - $\mathbb{E}\left[X
        ight]=rac{a+b}{2}$  :תוחלת: Var  $(X)=rac{(b-a)^2}{12}$  :שונות: •

#### התפלגות מעריכית: יהי $\lambda > 0$ אזי

- . משך אים זמן יחידות אים משך המשרגע. משך חיים אל משך משרגה אמקרי: X
  - $F_X\left(t
    ight) = \left\{egin{array}{ll} 1-e^{-\lambda t} & t\geq 0 \ 0 & t<0 \end{array}
    ight.$  פונקציית התפלגות מצטברת:
    - $f_{X}\left(t
      ight)=\left\{egin{array}{ll} \lambda e^{-\lambda t} & t\geq0 \ 0 & t<0 \end{array}
      ight.$ פונקציית צפיפות: ullet
      - $X\sim \mathrm{Exp}\left(\lambda
        ight)$  סימון: •

      - $\mathbb{E}\left[X
        ight]=rac{1}{\lambda}$  :תוחלת: Var  $(X)=rac{1}{\lambda^2}$  :שונות: •

#### התפלגות גאמא: יהיו $n, \lambda > 0$ אזי

- $\dots X$  :המשתנה המקרי
- $F_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$  פונקציית התפלגות מצטברת:  $f_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$   $f_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$   $f_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$   $f_X\left(t
  ight)=\left\{egin{array}{ll} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$   $f_X\left(t
  ight)=\left(\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t< 0 \end{array}
  ight.$ 
  - - - $\mathbb{E}\left[X
        ight]=rac{n}{\lambda}$  :תוחלת ullet
      - .Var  $(X)=rac{n}{\lambda^2}$  :שונות:

## אזי $\mu \in \mathbb{R}$ ויהי $\sigma \in \mathbb{R}_+$ אזי נורמלית: התפלגות

- ... X :- המשתנה המקרי: •
- $.F_{X}\left( t
  ight) =\Phi\left( rac{t-\mu}{\sigma}
  ight)$  פונקציית התפלגות מצטברת:
  - $f_X\left(t
    ight)=rac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-rac{1}{2}\left(rac{t-\mu}{\sigma}
    ight)^2}$  :פונקציית צפיפות ullet
    - $.X \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2
      ight)$  סימון:
      - $\mathbb{E}[X] = \mu$  :תוחלת
      - .Var  $(X) = \sigma^2$  :שונות