C^m-יריעה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^m\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי $C^\omega\left(A,B\right)=\{f:A\to B\mid f \text{ אנליטית מקומית}\}$.

יריעה אנליטית k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f:G\to\mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

עקומה: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה חד־מימדית.

משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה דו־מימדית.

היפר־משטח/על־משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה $n-1$ מימדית.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה היפר־משפט חלק.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות עבורן $\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}_\alpha$ יריעה לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m-יריעה k-מימדית ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r\in C^m\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $r\left(G\right)=\mathcal{M}$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r\in C^1\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה לכל $x\in G$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_r\left(x\right)\right)=k$.

הומאומורפיזם: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f\in C\left(A,B\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C\left(B,A\right)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r:G\to A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\{\mathcal{U}_\alpha\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ עבורן $\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן קיימות $\{G_\alpha\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^k\right)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha\subseteq C^m\left(G_\alpha,\mathbb{R}^n\right)$ עבורן $r_\alpha\left(G_\alpha\right)=\mathcal{U}_\alpha$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{U}$ המקיימת $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים כי $\{\nabla f_i\left(x\right)\}$ בת"ל.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1\ldots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי ($\{f_1\ldots f_{n-k}\}$ מערכת משוואות רגולרית)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{U}$ עבורו $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{\left(f_1\cdots f_{n-k}\right)}\left(x\right)\right)=n-k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m-יריעה k-מימדית ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{M}=\{\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)=0\}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\right\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $(0,0,0)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה אזי $f:I\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f\left(t,\rho\right)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\cos(\rho)\\ \gamma_1(t)\sin(\rho)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(\gamma\right)$ אזי משפט הסיבוב f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(f\right)$.

הטלה סטריאוגרפית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ נגדיר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n$ כך $f\left(x\right)=-\frac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\|x\|^2-1}{2}\right)$.

טורוס: משטח הסיבוב של $\mathbb{S}^1$.

סימון: נסמן טורוס בעזרת $\mathbb{T}^2$.

קו־אוריינטציה של יריעה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח אזי $N\in C\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{M}.\left(\left|N\left(x\right)\right|=1\right)\wedge\left(N\left(x\right)\perp x\right)$.

למה: טבעת מוביוס אינו משטח קו־אוריינטבילי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^3$ אזי $a\times b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_1b_1\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\left(u\times v\right)\perp v$ וכן $\left(u\times v\right)\perp u$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\left(u\in\operatorname{span}\left(v\right)\right)\iff\left(u\times v=0\right)$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\det\left(u,v,u\times v\right)=\left\|u\times v\right\|^2\geq0$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\left|v\times u\right|=\left\|v\right\|\left\|u\right\|\sin\left(\angle\left(v,u\right)\right)$.

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ממימד k: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה המקיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן קיים $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם עבורו $f\left(A\right)=f\left(\mathcal{U}\right)\cap\left(\mathbb{R}^k\times\left\{0_{n-k}\right\}\right)$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה אזי פרדיקט P עבורו לכל $a\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה P מתקיימת על $A\cap\mathcal{U}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ התב"ש
- $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית.
- $\mathcal{M}$ מקומית גרף של פונקציה $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל־$\mathbb{R}^k$.

מסקנה: תהא $r:G\to\mathbb{R}^n$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a\in G$ קיימת סביבה $W\subseteq\mathbb{R}^n$ של $\left(a,0_{n-k}\right)$ וקיים דיפאומורפיזם $s:W\to s\left(W\right)$ עבורו $s_{\restriction_{W\cap\left(G\times0_{n-k}\right)}}=r$.

הערה: יריעה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq A$ אזי ($\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־A)$\iff$($\forall x\in\mathcal{U}.\exists r>0.B_r\left(x\right)\cap A\subseteq\mathcal{U}$).

קבוצה קשירה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל־A מתקיים $\mathcal{U}\in\left\{A,\varnothing\right\}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי (A קשירה)$\iff$(לא קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset A$ פתוחות יחסית ל־A עבורן $A\in\left\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\right\}$).

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $f:A\to B$ אזי (f רציפה)$\iff$(לכל $\mathcal{U}\subseteq B$ פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי $f^{-1}\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה יחסית ל־A).

מפה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^k$ הפיכה עבורה $\varphi\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטריזציה טובה אזי $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$.

אטלס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קבוצה של מפות $\mathcal{A}$ עבורה $\bigcup\left\{\mathcal{C}_1\mid\mathcal{C}\in\mathcal{A}\right\}=\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $r:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\left(r\left(\mathcal{U}\right),r^{-1}\right)$ מפה.

המרחב הפרוייקיבי: יהי $n\geq2$ אזי $\mathbb{RP}^n=\left\{vv^T\mid v\in\mathbb{S}^n\right\}$.

טענה: יהי $n\geq2$ אזי $\mathbb{RP}^n\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ יריעה n מימדית.

העתקת מעבר: תהיינה $\left(\mathcal{U}_1,\varphi_1\right),\left(\mathcal{U}_2,\varphi_2\right)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ המוגדרת $\varphi_{1,2}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$.

טענה: תהיינה $\left(\mathcal{U}_1,\varphi_1\right),\left(\mathcal{U}_2,\varphi_2\right)$ מפות ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $\varphi_i\left(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\right)$ פתוחה עבור $i\in\left\{1,2\right\}$.

טענה: תהיינה $\left(\mathcal{U}_1,\varphi_1\right),\left(\mathcal{U}_2,\varphi_2\right)$ מפות ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $\varphi_{1,2}$ דיפאומורפיזם.

פונקציה C^α מיריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α.

הערה: נניח כי $\mathcal{M}$ יריעה C^α אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ הינה לכל היותר מדרגת חלקות C^α.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ אזי (f הינה C^α)$\iff$(קיים אטלס $\left\{\left(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קיים ל־$\mathcal{M}$ אטלס.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $\dim\left(\mathcal{M}\right)=k$.

פונקציה C^{α} בין יריעות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה ℓ־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ הינה C^{α}.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''\right)$ אזי $g\circ f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}''\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי (f הינה C^{α})$\iff$(לכל $p\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ של p עבורה קיימת $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ המקיימת $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$).

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ אזי (f הינה C^{α})$\iff$(לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ של $\mathcal{M}$ ולכל מפה $\left(\mathcal{V},\psi\right)$ של $\mathcal{M}'$ מתקיים כי $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^{α}).

דיפאומורפיזם C^{α}: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה f הפיכה וכן $f,f^{-1}\in C^{\alpha}$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות דיפאומורפיות אזי $\dim\left(\mathcal{M}\right)=\dim\left(\mathcal{M}'\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהיינה $\left(\mathcal{U},\varphi\right),\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפות באשר $\mathcal{U},\mathcal{V}$ סביבות של p אזי $\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)=\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)$.

המרחב המשיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi(p)}\left(\varphi^{-1}\right)\right)$.

הערה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\subseteq\mathbb{R}^{n}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $\dim\left(T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\right)=\dim\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{ f=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\ker\left(\mathcal{D}_{p}\left(f\right)\right)$.

וקטור מהירות: תהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}$.

טענה: תהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}\left(t\right)\in T_{\gamma(t)}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\left\{ \dot{\gamma}\left(0\right)\mid\left(\gamma\in C^{1}\left(\left(-\varepsilon,\varepsilon\right),\mathcal{M}\right)\right)\wedge\left(\gamma\left(0\right)=p\right)\right\}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהיינה $\gamma_{1},\gamma_{2}:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ מסילות המקיימות $\gamma_{i}\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma_{i}}\left(0\right)=v$ אזי $\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}\right)\right)\left(0\right)$.

נגזרת של פונקציה בין יריעות: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}f:T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\to T_{f(p)}\left(\mathcal{M}'\right)$ המוגדרת $\left(\mathcal{D}_{p}f\right)\left(v\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma\right)\right)\left(0\right)$ עבור מסילה $\gamma:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma}\left(0\right)=v$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}f$ העתקה לינארית.

משפט כלל השרשרת: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right)=\mathcal{D}_{f(p)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_{p}f\right)\left(v\right)=\mathcal{D}_{p}\left(f\right)\cdot v$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{ F=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית עבור סביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\mathrm{span}\left(\left\{ \nabla F_{1}\left(p\right),\ldots,\nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\} ^{\perp}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $\left\{ \mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_{1}\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_{k}\right)\right\}$ בסיס של $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

הערה: נגדיר את $\left\{ \mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_{1}\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_{k}\right)\right\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p תהא $\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}'$ באשר $\mathcal{V}$ סביבה של $f\left(p\right)$ אזי $\left[\mathcal{D}_{p}f\right]_{i,j}=\frac{\partial\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)_{i}}{\partial x_{j}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ באשר $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של p וכן $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$ אזי $\mathcal{D}_{p}f=\left(\mathcal{D}_{p}g\right)_{\restriction T_{p}(\mathcal{M})}$.

נגזרת כיוונית: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_{v}f=\mathcal{D}_{p}f\left(v\right)$.

טענה: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה בסביבה של p ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_{v}f=\sum_{i=1}^{k}v_{i}\cdot\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_{i}}$.

טענה: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}=L_{v}f$.

וקטור נורמל: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\}$ עבורו $v\perp T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

וקטור נורמל יחידה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי וקטור נורמל $v\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\}$ עבורו $\left\Vert v\right\Vert =1$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{ f=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $\frac{\nabla f(p)}{\left\Vert \nabla f(p)\right\Vert }$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $\{f=0\}$ הצגה סתומה רגולרית של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא Γ_f הצגה כגרף בסביבה של p אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p),-1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^2}}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא Γ_f הצגה כגרף של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},-1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

מכפלה מצולבת: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי $v_1\times\ldots\times v_{n-1}=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\det\begin{pmatrix}(v_1)_1 & \cdots & (v_{n-1})_1\\ \vdots & & \vdots\\ (v_1)_{i-1} & \cdots & (v_{n-1})_{i-1}\\ (v_1)_{i+1} & \cdots & (v_{n-1})_{i+1}\\ \vdots & & \vdots\\ (v_1)_n & \cdots & (v_{n-1})_n\end{pmatrix}e_i$.

הערה: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי בצורה לא פורמלית מתקיים $v_1\times\ldots\times v_{n-1}=\det\begin{pmatrix}e_1 & | & & |\\ \vdots & v_1 & \cdots & v_{n-1}\\ e_n & | & & |\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.

דטרמיננטת גראם: יהיו $v_1\ldots v_m\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Gamma(v_1\ldots v_m)=\det\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_m\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle v_m,v_1\rangle & \cdots & \langle v_m,v_m\rangle\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי

- לכל $i\in[n-1]$ מתקיים $v_1\times\ldots\times v_{n-1}\perp v_i$.
- $\|v_1\times\ldots\times v_{n-1}\|=\sqrt{\Gamma(v_1\ldots v_{n-1})}$.
- $\det(v_1\times\ldots\times v_{n-1},v_1,\ldots,v_{n-1})\geq 0$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא r פרמטריזציה טובה בסביבה של p אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}(p)\times\ldots\times\frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}(p)$ וקטור נורמל ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא r פרמטריזציה טובה של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}\times\ldots\times\frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

סימון: תהא $f\in C^\infty(\mathcal{M})$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f)$.

סימון: תהיינה $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^k\binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in C^\infty(\mathcal{M})$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha(f\cdot g)=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^k\\|\beta|\le|\alpha|}}\binom{\alpha}{\beta}(\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta}g)$.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה אזי $D:C^\infty(\mathcal{U})\to C^\infty(\mathcal{U})$ המקיימת $\mathcal{D}(f)(x)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^k\\|\alpha|\le m}}a_\alpha(x)\cdot(\partial^\alpha f)(x)$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $D:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ על $\mathcal{M}$ באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית מתקיים $\mathcal{D}(f\circ\varphi^{-1})(x)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^k\\|\alpha|\le m}}a_\alpha(x)\cdot(\partial^\alpha(f\circ\varphi^{-1}))(x)$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

שדה וקטורי C^m: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ עבורה $v(p)\in T_p(\mathcal{M})$ לכל $p\in\mathcal{M}$ וכן לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מתקיים כי $x\mapsto\mathcal{D}_x\varphi(v(x))$ העתקה C^m.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי $L_v:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$ המוגדרת $L_v(f)(x)=L_{v(x)}(f)$ הינה אופרטור דיפרנציאלי.

תומך: תהא $f\in C(\mathcal{M})$ אזי $\text{supp}(f)=\overline{\{x\in\mathcal{M}\mid f(x)\neq0\}}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה אזי $C_C^\infty(\mathcal{U})=\{f\in C^\infty(\mathcal{U})\mid \text{supp}(f)\ \text{קומפקטית}\}$.

אופרטור מקומי: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $L:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה ולכל $f,g\in C_C^\infty$ עבורן $f_{\restriction\mathcal{U}}=g_{\restriction\mathcal{U}}$ מתקיים $L(f)_{\restriction\mathcal{U}}=L(g)_{\restriction\mathcal{U}}$.

הגדרה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^\infty(\mathcal{W})$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\|f\|_{W,n}=\sup_{\substack{x\in w\\|\alpha|\le n}}\|(\partial^\alpha f)(x)\|$.

טענה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^\infty(\mathcal{W})$ תהא $x\in\mathcal{W}$ עבורה $(\partial^\alpha f)(x)=0$ לכל $|\alpha|\le n$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $\delta\in(0,\varepsilon)$ וכן $g\in C^\infty(\mathcal{W})$ עבורה

- $g_{\restriction B_{\frac{\delta}{2}}(x)}=0$.
- $g_{\restriction\mathcal{W}\backslash B_\delta(x)}=0$.
- $\|f-g\|_{W,n}<\varepsilon$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^k\binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

משפט פיטרה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $L:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$ לינארית התב"ש

- L אופרטור מקומי.
- לכל $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ מתקיים $\text{supp}\left(L\left(f\right)\right)\subseteq\text{supp}\left(f\right)$.
- L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה יהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $x\in\mathcal{V}$ אזי קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{W}}$ קומפקטית וכן קיים $n\in\mathbb{N}$ וכן $C>0$ עבורם לכל $f\in C_{C}^{\infty}\left(\mathcal{W}\backslash\left\{ x\right\} \right)$ מתקיים $\left\Vert Lf\right\Vert _{\mathcal{W},0}\le C\left\Vert f\right\Vert _{\mathcal{W},n}$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה יהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ פתוחה עבורה קיימים $n\in\mathbb{N}$ וכן $C>0$ עבורם לכל $f\in C_{C}^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ מתקיים $\left\Vert Lf\right\Vert _{\mathcal{W},0}\le C\left\Vert f\right\Vert _{\mathcal{W},n}$ אזי L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n.

משפט פירוק יחידה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי $\left\{ \mathcal{U}_{\alpha}\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח של X אזי קיימות $\left\{ \rho_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן
- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le\rho_{i}\le1$.
- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\text{supp}\left(\rho_{i}\right)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $\left|\left\{ i\in\mathbb{N}\mid\rho_{i}\left(\mathcal{W}\right)\neq0\right\} \right|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}\left(x\right)=1$.

מסקנה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה ויהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי אזי L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $X\subseteq\mathcal{M}$ ויהי $\left\{ \mathcal{U}_{\alpha}\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח ב־$\mathcal{M}$ של X אזי קיימות $\left\{ \rho_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורן
- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le\rho_{i}\le1$.
- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\text{supp}\left(\rho_{i}\right)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\left|\left\{ i\in\mathbb{N}\mid\rho_{i}\left(\mathcal{W}\right)\neq0\right\} \right|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}\left(x\right)=1$.

מקבילון: יהיו $v_{1}\ldots v_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Pi\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{k}t_{i}v_{i}\mid\forall i\in\left[k\right].t_{i}\in\left[0,1\right]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $v_{1}\ldots v_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Vol}_{k}\left(\Pi\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\right)=\sqrt{\Gamma\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)}$.

טענה: יהיו $v_{1}\ldots v_{k}\in\mathbb{R}^{k}$ אזי
- $\text{Vol}_{k}\left(\left(\begin{smallmatrix}v_{1}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right),\ldots,\left(\begin{smallmatrix}v_{k}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right)\right)=\left|\det\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\right|$.
- תהא $T\in O\left(n\right)$ אזי $\text{Vol}_{k}\left(Tv_{1},\ldots,Tv_{k}\right)=\text{Vol}_{k}\left(v_{1},\ldots,v_{k}\right)$.

קבוצה זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $\varphi\left(E\cap\mathcal{U}\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית יהי $\left\{ \left(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha}\right)\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ אטלס של $\mathcal{M}$ ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ אזי (E זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$)$\iff$(לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי $\varphi_{\alpha}\left(E\cap\mathcal{U}_{\alpha}\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^{k}$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהיינה $\left\{ E_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}\right)$ זניחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}$ זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}$.

קבוצת נקודות האי־רציפות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אזי $B_{f}=\left\{ x\in\mathcal{M}\mid x\text{ אינה רציפה על }f\right\}$.

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה
- f חסומה.
- $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטי.
- B_{f} זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן על יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{E}$ אינטגרבילית רימן על $\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי (E מדידה ז'ורדן ב־$\mathcal{M}$)$\iff$($\varphi\left(E\right)$ מדידה ז'ורדן ב־$\mathbb{R}^{k}$).

פונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית וכן קיימת מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ עבורה $\text{supp}\left(f\right)\subseteq\mathcal{U}$.

קבוצה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $A\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{A}$ נוחה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה $\left\{ \left(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i}\right)\right\}$ של $\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}_{i}$ נוחה לכל $i\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימות $f_{1}\ldots f_{n}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה $r_{i}:G_{i}\to\mathcal{M}$ פרמטריזציות טובות באשר $G_{i}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ וכן $i\in\left\{ 1,2\right\}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי

$$\int_{G_{1}}\left(f\circ r_{1}\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r_{1}\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r_{1}\right)\right)}\text{d}q=\int_{G_{2}}\left(f\circ r_{2}\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r_{2}\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r_{2}\right)\right)}\text{d}q.$$

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_G\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r\right)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r\right)\right)}\mathrm{d}q$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_G\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)}\mathrm{d}q$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}=\left\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid\left(\operatorname{supp}\left(f\right)\subseteq\mathcal{U}\right)\wedge\left(\text{נוחה ואינטגרבילית רימן }f\right)\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R_{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\ldots f_n,g_1\ldots g_m:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^n f_i$ וכן $f=\sum_{i=1}^m g_i$ אזי $\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{M}}f_i=\sum_{i=1}^m\int_{\mathcal{M}}g_i$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\ldots f_n:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^n f_i$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{M}}f_i$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R\left(\mathcal{M}\right)=\left\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid\text{אינטגרבילית רימן }f\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R\left(\mathcal{M}\right)$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R\left(\mathcal{M}\right)\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $f\in R\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}f\mathrm{dVol}_k$.

מיצוי ז'ורדן של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\left(E_i\right)_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}\right)$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\bigcup_{i=1}^\infty E_i=\mathcal{M}$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר B_f זניחה אזי אם קיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות סגורות $\left(E_i\right)_{i=1}^\infty$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\lim_{i\to\infty}\int_{E_i}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}=L$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=L$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f\in R\left(\mathcal{M}\right)$ אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $\left(E_i\right)_{i=1}^\infty$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\int_{\mathcal{M}}f=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{M}}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}$.

נפח של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\mathrm{Vol}_k\left(\mathcal{M}\right)=\int_{\mathcal{M}}1$.

מפות זרות: מפות $\left(\mathcal{U},\varphi\right),\left(\mathcal{V},\psi\right)$ עבורן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

טענה: תהיינה $\left\{\left(\mathcal{U}_i,\varphi_i\right)\right\}_{i=1}^n$ מפות זרות בזוגות על $\mathcal{M}$ תהא $S\subseteq\mathcal{M}$ זניחה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\restriction_{\mathcal{M}\backslash\left(S\cup\left(\biguplus_{i=1}^n\mathcal{U}_i\right)\right)}=0$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{U}_i}f$.

אינטגרל קווי מסוג ראשון: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\operatorname{Im}\left(\gamma\right)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אזי $\int_\gamma f\mathrm{dVol}_1$.

סימון: תהא $\gamma\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\mathrm{Length}\left(\gamma\right)=\lim_{m\to\infty}\sup_{a=t_0<\ldots<t_m=b}\sum_{i=1}^m\left\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\right\|$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\mathrm{Length}\left(\gamma\right)=\int_a^b\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|\mathrm{d}t$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Length}\left(\mathcal{M}\right)=\mathrm{Vol}_1\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית ותהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה אזי $\mathrm{Length}\left(\mathcal{M}\right)=\mathrm{Length}\left(\gamma\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\mathrm{Length}\left(\Gamma_f\right)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'\left(t\right)\right)^2}\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $r,\theta\in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ נגדיר $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}^2$ כך $\gamma\left(t\right)=\left(r\left(t\right)\cos\left(\theta\left(t\right)\right),r\left(t\right)\sin\left(\theta\left(t\right)\right)\right)$ אזי $\left\|\gamma'\right\|=\sqrt{r^2+r'}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Area}\left(\mathcal{M}\right)=\mathrm{Vol}_2\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^3$ יריעה דו־מימדית ותהא $r:G\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה באשר $G\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\mathrm{Area}\left(\mathcal{M}\right)=\int_G\left|\frac{\partial r}{\partial x_1}\left(x\right)\times\frac{\partial r}{\partial x_2}\left(y\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{Area}\left(\Gamma_f\right)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x,y\right)\right\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

טענה: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\det\left(I+uv^T\right)=1+\left\langle u,v\right\rangle$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ אזי $\mathrm{Vol}_k\left(\Gamma_f\right)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x\right)\right\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ ותהא $\alpha:\Gamma_f\to\mathbb{R}$ באשר $\alpha\left(x\right)$ הזווית בין הנורמל של Γ_f בנקודה x לבין ציר e_{k+1} אזי $\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x\right)\right\|^2}=\frac{1}{\cos\left(\alpha\left(x\right)\right)}$.

משפט ארכימדס: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}\left(\mathcal{M}\right)=2\pi h$.

מסקנה: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}\left(\mathcal{M}\right)=2\pi hR$.

קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים מקבילים אזי $P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\max\{d(x,H_1),d(x,H_2)\}\le d(H_1,H_2)\}$.

רוחב קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים אזי $\text{Width}(P_{H_1,H_2})=d(H_1,H_2)$.

רוחב גוף: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\text{Width}(K)=\inf_{\{K\subseteq P\mid P\text{ קורה}\}}(\text{Width}(P))$.

משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $\text{Width}(K)\le\sum_{i=1}^m\text{Width}(P_i)$.

רוחב יחסי של קורה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ותהא P קורה אזי $\text{Width}_K(P)=\inf_{m\in\mathbb{R}_+}\{m\in\mathbb{R}_+\mid\exists a\in\mathbb{R}^n.K\subseteq m\cdot P+a\}$.

השערת באנג: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^m\text{Width}_K(P_i)$. השערה פתוחה

טענה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי עבורו $K=-K$ ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^m\text{Width}_K(P_i)$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\ne0$ אזי $\varphi^{-1}(t)$ על־משטח.

טענה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\ne0$ וכן $\varphi(\mathcal{V})=(a,b)$ ותהא $p\in\mathcal{V}$ אזי קיים $\delta>0$ עבורו לכל $f\in R(V_\delta(p))$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית מתקיים $\int_{B_\delta(p)}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\text{dVol}_{n-1}(x)\,\text{dt}$.

משפט נוחסאת קו־שטח: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\ne0$ וכן $\varphi(\mathcal{V})=(a,b)$ ותהא $f\in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\text{dVol}_{n-1}(x)\,\text{dt}$.

גרדיאנט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $u\in T_x(\mathcal{M})$ עבורו $\langle u,v\rangle=L_v\varphi(x)$ לכל $v\in T_x(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי הגרדיאנט של φ בנקודה x הוא $\nabla_x\varphi$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של $x\in\mathcal{M}$ ותהא $\psi\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ באשר $\psi_{\restriction_{\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}}=\varphi_{\restriction_{\mathcal{U}}}$ אזי $\nabla_x\varphi=\text{Proj}_{T_x(\mathcal{M})}(\nabla_x\psi)$.

משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\ne0$ וכן $\varphi(\mathcal{M})=(a,b)$ ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\text{dVol}_{n-1}(x)\,\text{dt}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R}^k)$ באשר $\text{rank}(\mathcal{D}_x\varphi)=k$ ותהא $f\in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_{\varphi(\mathcal{V})}\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\sqrt{\det\left((\mathcal{D}_x\varphi)\cdot(\mathcal{D}_x\varphi)^T\right)}}\text{dVol}_{n-1}(x)\,\text{dt}$.

טענה: תהא $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהא $A\in O(n+1)$ אזי $\int_{\mathbb{S}^n}f(x)\,\text{dVol}_n=\int_{\mathbb{S}^n}f(Ax)\,\text{dVol}_n$.

טענה: יהי $r>0$ אזי $\text{Vol}_n(r\cdot\mathbb{S}^n)=r^n\cdot\text{Vol}_n(\mathbb{S}^n)$.

טענת שטח פנים של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

טענת נפח של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_n(B_1(0))=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{M})=\left\{v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k\mid\mathcal{M}\text{ שדה וקטורי }C^\alpha\text{ מעל }v\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה C^α ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}\in\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ ולכל $i\in[k]$ מתקיים כי $\left\langle v(x),\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}(x)\right\rangle$ הינה C^α).

טענה: יהי v שדה וקטורי על $\mathcal{M}$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$($v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k$ הינה C^α).

שדה וקטורי C^m מעל תת־קבוצה: תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ אזי $v:A\to\mathbb{R}^k$ עבורה $v(x)\in T_x(\mathcal{M})$ וכן לכל $p\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ וקיים $u\in\mathfrak{X}^m(\mathcal{U})$ עבורו $u_{\restriction_{A\cap\mathcal{U}}}=v_{\restriction_{A\cap\mathcal{U}}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ ותהא $v:A\to\mathbb{R}^k$ אזי (v שדה וקטורי C^α מעל A)$\Longleftrightarrow$(קיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה ב־$\mathcal{M}$ וקיימת $u\in\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$ עבורה $u_{\restriction_{\mathcal{U}}}=v$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ אזי $\nabla\varphi\in\mathfrak{X}^0(\mathcal{M})$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ על־משטח קשיר אזי ($\mathcal{M}$ בעל 0 קו־אוריינטציות)$\vee$($\mathcal{M}$ בעל 2 קו־אוריינטציות).

שטף: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{M}}\langle F(x),N(x)\rangle\,\text{dVol}_{n-1}(x)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהיו $F_1,F_2\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורם F_1,F_2 שדות וקטוריים דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{\alpha F_1+\beta F_2}(\mathcal{M})=\alpha\text{Flux}_{F_1}(\mathcal{M})+\beta\text{Flux}_{F_2}(\mathcal{M})$.

טענה: יהיו $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים זרים עד כדי קבוצה זניחה בעלי קו־אוריינטציה N_1,N_2 בהתאמה ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2)=\text{Flux}_F(\mathcal{M}_1)+\text{Flux}_F(\mathcal{M}_2)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח בעל קו־אוריינטציה N ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M},N)=\text{Flux}_F(\mathcal{M},-N)$.

דיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(F)(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ נגדיר $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ כך $f(x)=F(x)$ אזי $\text{div}(F)(x)=\text{trace}(\mathcal{D}_x(f))$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $A\in\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{div}(A\circ F)(A^{-1}x)=\text{div}(F)(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(f\cdot F)=f\cdot\text{div}(F)+\langle\nabla f,F\rangle$.

לפלסיאן: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f=\text{div}(\nabla f)$.

סימון: תהא $x\in\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Cube}_\ell(x)=\{Q\subseteq\mathbb{R}^n\mid(x\in Q)\wedge(\text{של } Q \text{ הוא } \ell \text{ אורך הצלע})\wedge(Q \text{ קובייה})\}$.

הערה: תהא $x\in\mathbb{R}^n$ ויהי $Q\in\text{Cube}_\ell(x)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial Q)=\sum\text{Flux}_F(E_i)$ באשר $\{E_i\}$ פאות Q עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני ל־Q.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(F)(x)=\lim_{\substack{Q\in\text{Cube}_\ell(x)\\ \ell\to 0}}\frac{1}{\text{Vol}_n(Q)}\text{Flux}_F(\partial Q)$.

נקודת שפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $x\in\partial\mathcal{U}$ עבורה קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של x וקיימת $f\in C^1(\mathcal{W},\mathbb{R})$ עבורה $\nabla_x f\neq 0$ וכן $f(x)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{f<0\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}=\{x\in\partial\mathcal{U}\mid x \text{ נקודת שפה חלקה}\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה תהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{W},\mathbb{R})$ באשר $\mathcal{W}$ סביבה של x המקיימת $\nabla_x f\neq 0$ וכן $f(x)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{f<0\}$ אזי $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של x עבורה $\mathcal{W}\cap\partial\mathcal{U}$ היפר־משטח.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־$\partial\mathcal{U}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ יריעה.

קבוצה חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial\mathcal{U}=\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$.

קבוצה בעלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\text{Vol}_n((\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})+B_\varepsilon^n(0))=0$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ עבורה $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f)$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}:\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ נורמל יחידה.

קו־אוריינטציה חיצונית קנונית לשפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $N:\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ באשר $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f)$ מתקיים $N_{\restriction_{\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}}=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

שטף: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ בעלת שפה כמעט חלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\partial\mathcal{U}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U})=\text{Flux}_F(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})$.

למה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ יהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ ותהא $A\in\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Flux}_{A\circ F}(A\cdot\mathcal{M})=\text{Flux}_F(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $r>0$ תהא $g\in C^1(B_r(a),\mathbb{R})$ באשר $\frac{\partial g}{\partial x_i}\neq 0$ לכל $i\in[n]$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathbb{R}^n)$ באשר $\text{supp}(F)\subseteq B_r(a)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\{g<0\})=\int_{\{g<0\}}\text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})<\infty$ תהא $a\in\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיים $r>0$ עבורו לכל $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיים $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ולכל $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ המקיים $\text{supp}(F)\subseteq B_r(a)$ מתקיים $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U})=\int_{\mathcal{U}}\text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה וחלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U})=\int_{\mathcal{U}}\text{div}(F)$.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ויהי $\varepsilon>0$ אזי $X+B_\varepsilon(0)$ מדידה ז'ורדן.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית אזי קיים $C\in\mathbb{R}$ עבורו לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ המקיימת

- $0\le\psi\le 1$.
- $\psi_{\restriction_{X+B_\varepsilon(0)}}=1$.
- $\psi_{\restriction_{\mathbb{R}^n\backslash(X+B_{3\varepsilon}(0))}}=0$.
- לכל $i\in[n]$ מתקיים $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right|\le\frac{C}{\varepsilon}$.

משפט הדיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U})=\int_{\mathcal{U}}\text{div}(F)$.

טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})<\infty$ ויהי N נורמל חיצוני ל־$\mathcal{U}$ אזי $\text{Vol}_n(\mathcal{U})=\frac{1}{n}\int_{\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}\langle x,N\rangle\,\text{dVol}_{n-1}(x)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ תהיינה $f,g\in C^1\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\int_{\mathcal{U}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\cdot g\right)=\int_{\partial\mathcal{U}}\left(f\cdot g\cdot\langle N,v\rangle\right)-\int_{\mathcal{U}}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\right)$.

טענה נוסחאות גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $u,v:\mathcal{W}\to\mathbb{R}$ אזי

1. נניח כי u הינה C^2 אזי $\int_G\Delta u=\int_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial N}$.
2. נניח כי v הינה C^2 וכן u הינה C^1 אזי $\int_G\langle\nabla u,\nabla v\rangle=-\int_G u\cdot\Delta v+\int_{\partial G}u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.
3. נניח כי u,v הן C^2 אזי $\int_G\left(u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u\right)=\int_{\partial G}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial N}\right)$.

אנרגיית דיריכלה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_G\|\nabla v\|^2$.

מסקנה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_G\|\nabla v\|^2=-\int_G v\cdot\Delta v+\int_{\partial G}v\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.

פונקציה הרמונית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $u\in C^2\left(G,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $\Delta u=0$.

טענה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי

- $\mathrm{Flux}_{\nabla u}\left(\partial G\right)=0$.
- נניח כי $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}}=0$ אזי u קבועה מקומית ב־G.
- נניח כי $u_{\restriction_{\partial G}}$ קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב־G.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $⨍_{\mathcal{U}}f=\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{U})}\int_{\mathcal{U}}f$.

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=⨍_{\partial B_r(a)}u$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=⨍_{B_r(a)}u$.

טענה: תהא $f\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Delta f\left(a\right)=\lim_{r\to0}\frac{2n}{r^2}\left(⨍_{\partial B_r(a)}f-f\left(a\right)\right)$.

מסקנה עקרון המקסימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\max\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

מסקנה עקרון המינימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\min\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

משפט ליוביל: תהא $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי u קבועה.

מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלעיל אזי u קבועה.

טענה אינטגרל פואסון: יהי $n\ge3$ תהא $u\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ באשר $\mathrm{supp}\left(u\right)$ קומפקטי ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $u\left(a\right)=\frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})(n-2)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta u(x)}{|x-a|^{n-2}}\mathrm{d}x$.

משפט גרעין פואסון: תהא $u:\overline{B_1^n\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר $u_{\restriction_{B_1^n(0)}}$ הרמונית אזי לכל $a\in B_1^n\left(0\right)$ מתקיים $u\left(a\right)=\frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u\left(x\right)\cdot\frac{1-\|a\|^2}{\|x-a\|^n}\mathrm{dVol}_{n-1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^2\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}\right)$ אזי $u:\overline{B_1^n\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $u\left(x\right)=\frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y\right)\cdot\frac{1-\|x\|^2}{\|y-x\|^n}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y\right)$ הינה הרמונית וכן $u_{\restriction_{\mathbb{S}^{n-1}}}=f$.

המרחב הדואלי: יהי V מ"ו ממשי אזי $V^*=\mathrm{Hom}\left(V,\mathbb{R}\right)$.

סימון: יהי V מ"ו ממשי יהי $\{e_1\dots e_n\}$ בסיס של V ויהי $i\in[n]$ אזי $e_i^*:V\to\mathbb{R}$ המוגדרת $e_i^*\left(e_j\right)=\delta_{i,j}$.

טענה: יהי V מ"ו ממשי ויהי $\{e_1\dots e_n\}$ בסיס של V אזי $\{e_1^*\dots e_n^*\}$ בסיס של V^*.

המרחב הקו־משיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_p\left(\mathcal{M}\right)^*$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_p^*\left(\mathcal{M}\right)=T_p\left(\mathcal{M}\right)^*$.

קו־וקטורים: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in T_p^*\left(\mathcal{M}\right)$.

1־תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega:\mathcal{M}\to\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ המקיימת $\omega\left(x\right)\in T_x^*\left(\mathcal{M}\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω 1־תבית דיפרנציאלית על $\mathcal{M}$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\omega_x=\omega\left(x\right)$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\omega_x\left(u\right)=\langle v\left(x\right),u\rangle$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

סימון: תהא $f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}f:\mathcal{M}\to\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ המוגדרת $\left(\mathrm{d}f\right)_x\left(v\right)=\frac{\partial f}{\partial v}\left(x\right)$.

טענה: תהא $f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}f$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}\left(f\cdot g\right)=f\cdot\mathrm{d}g+g\cdot\mathrm{d}f$.

הטלה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $i\in[n]$ אזי $q_{i}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $q_{i}\left(u\right)=u_{i}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $x_{i}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $x_{i}=q_{i}\circ\varphi$.

מערכת קואורדינטות מקומיות על יריעה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\left\{ x_{1}\ldots x_{k}\right\}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in[n]$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}=\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial q_{i}}$.

הערה: מטרת הסימונים מלעיל הינה לאפשר קואורדינטות $x_{1}\ldots x_{k}$ על $\mathcal{M}$ כמו ב־$\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $i\in[n]$ אזי $\mathrm{d}x_{i}$ 1־תבנית דיפרנציאלית ב־$\mathcal{U}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $i\in[n]$ אזי $\frac{\partial}{\partial x_{i}}=\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial q_{i}}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i\in[n]$ ויהי $p\in\mathcal{U}$ אזי $\mathrm{d}x_{i}|_{p}=\mathrm{d}x_{i}\left(p\right)$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $x\in\mathcal{U}$ אזי $\left\{ \mathrm{d}x_{1}|_{x},\ldots,\mathrm{d}x_{k}|_{x}\right\}$ בסיס של $T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i\in[n]$ ויהי $x\in\mathcal{U}$ אזי $\mathrm{d}x_{1}|_{x}=\left(\frac{\partial}{\partial x_{i}}\right)^{*}$.

1־תבנית דיפרנציאלית C^{m}: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי 1־תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ של $\mathcal{M}$ ולכל $f_{1}\ldots f_{k}\in\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ באשר $\omega=\sum_{i=1}^{k}f_{i}\cdot\mathrm{d}x_{i}$ מתקיים $f_{1}\ldots f_{k}\in C^{m}\left(\mathcal{U}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא ω 1־תבנית דיפרנציאלית אזי $(\omega\in C^{m})\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\left\{ \left(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha}\right)\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו לכל $\alpha\in\Lambda$ ולכל $f_{1}\ldots f_{k}\in\mathcal{U}_{\alpha}\to\mathbb{R}$ באשר $\omega=\sum_{i=1}^{k}f_{i}\cdot\mathrm{d}x_{i}$ מתקיים $f_{1}\ldots f_{k}\in C^{m}\left(\mathcal{U}_{\alpha}\right)$).

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)=\left\{ \omega\mid\mathcal{M}\text{ על }C^{\infty}\text{ 1־תבנית דיפרנציאלית }\omega\right\}$.

טענה: תהא $f\in C^{m+1}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{k}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_{i}}\cdot\mathrm{d}x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in C^{m+1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\mathrm{d}f$ הינה 1־תבנית דיפרנציאלית C^{m}.

משיכה לאחור (pull back): תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $N\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $F\in C^{1}\left(M,N\right)$ אזי $F^{*}:\Omega^{1}\left(N\right)\to\Omega^{1}\left(M\right)$ המוגדרת $F^{*}\left(\omega,x,v\right)=\omega_{F(x)}\left(\mathcal{D}_{x}\left(F\right)\cdot v\right)$.

סימון: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $N\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $F\in C^{1}\left(M,N\right)$ אזי $\left(F_{\omega}^{*}\right)_{x}\left(v\right)=F^{*}\left(\omega,x,v\right)$.

אינטגרל קווי מסוג שני: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega=\int_{a}^{b}\omega_{\gamma(t)}\left(\gamma'\left(t\right)\right)\mathrm{d}t$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\int_{\gamma}:\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין תהא $\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega=\int_{\gamma\circ\psi}\omega$.

העתקה לינארית שומרת אוריינטציה: העתקה $\varphi\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\det\left(\left[\varphi\right]_{\mathrm{st}}\right)>0$.

דיפאומורפיזם שומר אוריינטציה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי דיפאומורפיזם $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ עבורו $\mathcal{D}_{x}\left(f\right)$ שומרת אוריינטרציה לכל $x\in\mathcal{U}$.

אוריינטציה של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $O:\mathcal{M}\to\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $O\left(x\right)$ בסיס של $T_{x}\left(\mathcal{M}\right)$ לכל $x\in\mathcal{M}$ וכן $O_{1}\ldots O_{k}$ רציפות למקוטעין.

האוריינטציה הסטנדרטית של מסילה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $O:\mathrm{Im}\left(\gamma\right)\to\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ המוגדרת $O\left(x\right)=\dot{\gamma}\left(\gamma^{-1}\left(x\right)\right)$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי האוריינטציה הסטנדרטית של γ הינה אוריינטציה של $\mathrm{Im}\left(\gamma\right)$.

היפוך אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\overline{\gamma}:[a,b]\to\mathcal{M}$ המוגדרת $\overline{\gamma}\left(t\right)=\gamma\left(a+b-t\right)$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $O:\mathrm{Im}\left(\gamma\right)\to\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ המוגדרת $O\left(x\right)=\dot{\overline{\gamma}}\left(\overline{\gamma}^{-1}\left(x\right)\right)$ הינה אוריינטציה של $\mathrm{Im}\left(\gamma\right)$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\int_{\overline{\gamma}}\omega=-\int_{\gamma}\omega$.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left([a,b]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}\omega=-\int_{b}^{a}\omega$.

שרשור מסילות: תהא $\gamma_{1}:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\gamma_{2}:[b,c]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\left(\gamma_{1}\cup\gamma_{2}\right)\left(t\right)=\begin{cases} \gamma_{1}(t) & t\in[a,b]\\ \gamma_{2}(t) & t\in(b,c] \end{cases}$.

טענה: תהא $\gamma_{1}:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין תהא $\gamma_{2}:[b,c]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי אזי $\int_{\gamma_{1}\cup\gamma_{2}}\omega=\int_{\gamma_{1}}\omega+\int_{\gamma_{2}}\omega$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר לכל $t\in[a,b]$ קיימת $\mathcal{U}$ סביבה של $\gamma\left(t\right)$ בה f הינה C^{1} אזי $\int_{\gamma}\mathrm{d}f=f\left(\gamma\left(b\right)\right)-f\left(\gamma\left(a\right)\right)$.

סימון: תהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\left\Vert \omega_{x}\right\Vert _{\infty}=\max\left\{ \omega_{x}\left(v\right)\mid\left(v\in T_{x}\left(\mathcal{M}\right)\right)\wedge\left(\left\Vert v\right\Vert =1\right)\right\}$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega\le\mathrm{Length}\left(\gamma\right)\cdot\max_{t\in[a,b]}\left\Vert \omega_{\gamma(t)}\right\Vert _{\infty}$.

הערה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ אזי ניתן לחשוב על ∂G בתור איחוד סופי זר של מסילות סגורות.

אוריינטציית רגל שמאל: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{2}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא N קו־אוריינטציה חיצונית של ∂G ותהיינה $\gamma_{1}\ldots\gamma_{m}$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup\gamma_{i}=\partial G$ אזי אוריינטציה $O:\partial G\to\mathbb{R}^{2}$ עבורה $\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{smallmatrix}\right)\cdot O\left(x\right)=-N\left(x\right)$ לכל $x\in\partial G$.

טענה פרמטריזציה נורמלית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{2}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^{1} אזי קיימות $\gamma_{1}\ldots\gamma_{m}$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup\gamma_{i}=\partial G$ וכן לכל $i\in[m]$ ולכל $t\in\mathrm{Dom}\left(\gamma_{i}\right)$ מתקיים $\left\Vert \gamma_{i}'\left(t\right)\right\Vert =1$.

משפט גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{2}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^{1} למקוטעין תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $P,Q\in C^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\int_{\partial G}\left(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right)=\int_{G}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

מסקנה נוסחת גאוס: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{2}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^{1} למקוטעין אזי $\mathrm{Area}\left(G\right)=\frac{1}{2}\int_{\partial G}\left(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\right)$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

העתקה לינארית אנטי סימטרית: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $T\in\mathrm{Hom}\left(V^{k},\mathbb{R}\right)$ עבורה לכל $u_{1}\ldots u_{k}\in V$ ולכל $i,j\in[k]$ שונים מתקיים כי $T\left(\left(\begin{smallmatrix}u_{1}\\\vdots\\u_{k}\end{smallmatrix}\right)\right)=-T\left(R_{i\leftrightarrow j}\cdot\left(\begin{smallmatrix}u_{1}\\\vdots\\u_{k}\end{smallmatrix}\right)\right)$.

הערה: יהיו $i,j\in[n]$ אזי $R_{i\leftrightarrow j}\in M_{n}\left(A\right)$ הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות i,j.

סימון: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\bigwedge^{0}V^{*}=\mathbb{R}$ וכן $\bigwedge^{k}V^{*}=\left\{ \omega\in\mathrm{Hom}\left(V^{k},\mathbb{R}\right)\mid\text{אנטי סימטרית }\omega\right\}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim\left(V\right)=n$ אזי $\det\in\bigwedge^{n}V^{*}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהיו $u_{1}\ldots u_{k}\in V$ תלויים לינארית ותהא $\omega\in\bigwedge^{k}V^{*}$ אזי $\omega\left(u_{1}\ldots u_{k}\right)=0$.

מכפלת וודג'/מכפלת יתד: יהיו $\varphi_{1}\ldots\varphi_{k}\in V^{*}$ אזי $\varphi_{1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{k}\in\bigwedge^{k}V^{*}$ באשר $\left(\varphi_{1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{k}\right)\left(u_{1}\ldots u_{k}\right)=\det\left(\left(\varphi_{i}\left(u_{j}\right)\right)_{i,j\in[k]}\right)$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהי $e_{1}\ldots e_{n}$ בסיס של V ויהי $k\in[n]$ אזי $\left\{ e_{a_{1}}^{*}\wedge\ldots\wedge e_{a_{k}}^{*}\mid1\le a_{1}<\ldots<a_{k}\le n\right\}$ בסיס של $\bigwedge^{k}V^{*}$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim\left(V\right)=n$ אזי $\bigwedge^{n}V^{*}=\mathrm{span}\left\{ \det\right\}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $k,\ell\in\mathbb{N}$ אזי קיימת ויחידה $\wedge:\bigwedge^{k}V^{*}\times\bigwedge^{\ell}V^{*}\to\bigwedge^{k+\ell}V^{*}$ עבורה $\left(\varphi_{1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{k}\right)\wedge\left(\psi_{1}\wedge\ldots\wedge\psi_{k}\right)=\varphi_{1}\wedge\ldots\wedge\varphi_{k}\wedge\psi_{1}\wedge\ldots\wedge\psi_{k}$ לכל $\varphi_{1}\ldots\varphi_{k},\psi_{1}\ldots\psi_{\ell}\in V^{*}$.