```
a*b=*(a,b) אזי א איז פעולה A שימון: תהא A קבוצה ותהא A פעולה בינארית
                                            עבורו e \in G עבורה איי*: G 	imes G 	o G עבורה קיים *: G 	imes G 	o G
                                          a*(b*c)=(a*b)*c מתקיים a,b,c\in G אסוציאטיביות: לכל
                                                         a*e=e*a=a מתקיים a\in G איבר יחידה: לכל
                                              a*b=e=b*a עבורו b\in G קיים a\in G לכל לכל • איבר הופכי:
                                                   S(X) = \{f: X \to X \mid הפיכה f\} הפינה אזי קבוצה אזי
                                                                    (S(X), \circ) אזי קבוצה אזי תהא X קבורת התמורות:
                                                            טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.
                                                                                   S_n = S\left([n]
ight) אזי n \in \mathbb{N} סימון: יהי
                                                                                       |S_n|=n! אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                         (\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight),\cdot) אזי n\in\mathbb{N} שדה ויהי \mathbb{F} שדה יהי אזי n\in\mathbb{N}
                                                  . מענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי n\in\mathbb{N} אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.
                                                             \mathbb{F},+ אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\} אזי החבורות החיבוריות: יהי
                                                                        A^*=A^{\times}=A\setminus\{0\} אזי A\subset\mathbb{C} סימון: תהא
                                                                \mathbb{F}(\mathbb{F},\cdot) אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{O}^*,\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*\} אזי יהי
                                                                             .(\{x\}, Id) אזי (החבורה הטריוואלית: יהי א
                                         (x\sim_n y)\Longleftrightarrow (n|\,(x-y)) המוגדרת \sim_n\subseteq\mathbb{Z}^2 אזי n\in\mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                                        .C_n=\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} סימון: יהי
                           [x]_{\sim} + [y]_{\sim} = [x+y]_{\sim} הגדרה: יהי n \in \mathbb{N} אזי n \in \mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                    (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N} יהי החלוקה: חבורת שאריות
                                                         טענה: יהי n\in\mathbb{N} אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.
                                                                                        |C_n|=n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
              g*h=h*g מתקיים g,h\in G עבורה לכל חבורה (G,*) חבורה חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית:
                                                                         . טענה: יהי (S_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} אינה אבלית
                                                                    . אינה אבלית (GL_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot) אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי
                                                                               . אבלית (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N}_+ אבלית טענה: יהי
                                                                         |G| \in \mathbb{N} חבורה עבורה חבורה חבורה חבורה
                                                                    |G| \geq \aleph_0 עבורה אינסופית: חבורה חבורה אינסופית:
                                                     .ord (G)=|G| אזי חבורה סופית הא (G,*) חבורה: תהא
                                                        \operatorname{ord}\left(G
ight)=\infty אינסופית אינ חבורה תהא G חבורה: תהא
                                                                     o\left(G
ight)=\operatorname{ord}\left(G
ight) חבורה אזי (G,st
ight) סימון: תהא
                                           Hעבורה H,st_{H	imes H} אזי H\subseteq G עבורה ותהא חבורה (G,st)
                                                              a*b\in H מתקיים a,b\in H סגירות לכפל: סגירות ש
                                                               a^{-1} \in H מתקיים a \in H סגירות להופכי: לכל
                                                           e\in H אזי איבר היחידה של e אזי יהי •
                         H \leq G עבורה (H,*_{\restriction_{H \times H}}) תת־חבורה ותהא H \subseteq G אזי חבורה ותהא סימון: תהא
.(a*b^{-1}\in H מתקיים a,b\in H מתקיים (לכל H\leq G) אזי H\in \mathcal{P}\left(G\right)\setminus\left\{ \varnothing\right\} מתקיים (G,*) למה: תהא
                    A*B=\{a*b\mid (a\in A)\land (b\in B)\} סימון: תהא A,B\subseteq G חבורה ותהיינה G,*
                                     g*H=\{q\}*H אזי אוני q\in G ויהי ויהי חבורה (G,*) אזי חבורה תהא
                                                                             (n\mathbb{Z},+)<(\mathbb{Z},+) אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                     (\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot)\leq\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot
ight) שדה אזי n\in\mathbb{N} יהי ויהי n\in\mathbb{N}
                                                                      R_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\} אזי n\in\mathbb{N} דימון: יהי
```

A imes A o A פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי

 $(R_n,\cdot) \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$ אזי $n \in \mathbb{N}$ טענה: יהי $G \leq G$ טענה: תהא $G \leq G$

```
\{e\} \leq G טענה: תהא (G,*) חבורה אזי
                                                     q^n=e המקיים n\in\mathbb{N}_+ איבר פיתול: תהא q\in G חבורה אזי חבורה (G,*)
                                                                      T\left(G
ight)=\left\{g\in G\mid T\left(G
ight) איבר אזי g\} חבורה אזי ותהא \left(G,st
ight)
                                                                                       T(G) < G טענה: תהא (G, *) חבורה אבלית אזי
                                               הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.
                                               a*e=e*a=a עבורו a*e=e*a=a עבורו אזי קיים ויחיד אזי קיים ויחיד (G,*) אכל
                                               a*b=e=b*a עבורו b\in G אזי קיים ויחיד a\in G חבורה ויהי חבורה (G,*)
                                                      a^{-1}=b אזי a איבר הופכי ל־b\in G ויהי a\in G חבורה יהי חבורה (G,*) איבר הופכי
                                                                 (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} אזי a,b \in G חבורה ויהיו (G,*) טענה: תהא
                                                                               (a^{-1})^{-1} = a אזי a \in G סענה: תהא (G,*) חבורה ויהי
                                    a*b=a*c אזיי a*b=a*c עבורם a,b,c\in G חבורה ויהי חבורה (G,*) אזיי משמאל:
                                      a,b=c אזי b*a=c*a עבורם a,b,c\in G חבורה ויהי חבורה (G,*) אזי
                                                                                       g^0=e אזי g\in G חבורה ויהי (G,*) אזי
                                                              g^n=g*g^{n-1} אזי g\in G ויהי חבורה יהי חבורה (G,*) אזי הגדרה:
                                                                      g^{-n}=\left(q^{n}\right)^{-1} אזי q\in G ויהי חבורה יהי חבורה G אזי מימון: תהא
                                                                      g^{-n}=\left(q^{-1}\right)^n אזי q\in G ויהי n\in\mathbb{N} יהי חבורה G אחזי מענה: תהא
a,h'\in H אזי ולכל g,g'\in G לכל לכל (g,h)\cdot (g',h')=(g*g',h\otimes h') חבורות נגדיר המכפלה: תהיינה (G,*),(H,\otimes) חבורת המכפלה
                                                                                                                                  (G \times H, \cdot)
                                                                . חבורה הינה חבורת אזי חבורת (G,*),(H,\otimes) טענה: תהיינה
                                              .(חבורת אזי (חבורת אבלית) חבורות אזי חבורות אזי חבורות (G,*),(H,\otimes) טענה: תהיינה
                                                .(HK=KH) (H*K\leq G) אזי איזי אינה תהיינה חבורה ותהיינה חבורה ותהיינה ענה:
                                         .(H \cap K \in \{H,K\}) שענה: תהא (H \cup K \leq G) אזי H,K \leq G טענה: תהא (G,*) חבורה ותהיינה
                                           .Stab (Y)=\{\pi\in S\left(X\right)\mid \forall y\in Y.\pi\left(y\right)=y\} אזי Y\subseteq X אחר קבוצה ותהא X קבוצה ותהא
                                                                           .Stab (Y) \leq S\left(X\right) אזי Y \subseteq X אחר קבוצה תהא א קבוצה ותהא
                                    \bigcap_{i\in I}H_i\leq G אזי איזי i\in I לכל לכל H_i\leq G באשר באשר \{H_i\}_{I\in I}\subseteq \mathcal{P}\left(G
ight) אזי חבורה תהא
                                                             \mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\} אזי X \subseteq G חבורה חבורה G תהא
                                         \langle X 
angle = igcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H אזי X \subseteq G חבורה ותהא חבורה תהיקבוצה: תהא תיקבוצה על ידי תתיקבוצה:
                                                                                       \langle X \rangle \leq G אזי אזי X \subseteq G אמר: תהא חבורה חבורה מהא
                      \langle X 
angle \subseteq H אזי איזי איזי עבורה H \leq G ותהא אות חבורה תהא חבורה תהא אזי א אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי
                          \langle X 
angle = \left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \ \middle| \ (k \in \mathbb{N}) \land \left(x \in X^k
ight) \land \left(s \in \{\pm 1\}^k
ight)
ight\} אזי X \subseteq G אזי X \subseteq G אזי
                                                                \langle X 
angle = G עבורה אזי אורה איזי אורה: תהא חבורה תהא אבורה עבורה איזי אבורה עבורה
                                                               חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.
                                                                         \langle g \rangle = G המקיים g \in G המקיים עבורה עבורה עבורה מיקלית:
                                                                              \langle g \rangle = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \} אזי g \in G חבורה ויהי חבורה G אהי
                                                               g^{n+m}=g^n*g^m אזי g\in G ויהי n,m\in\mathbb{Z} חבורה יהיו
                                                                  \left(g^{n}
ight)^{m}=g^{n\cdot m} אזי g\in G ויהי היו n,m\in\mathbb{Z} חבורה יהיו
                                                   G=\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\} עבורו g\in G עבורו ציקלית) אזי (G=\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\} עבורו למה: תהא
                                                                                            מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.
                                                                     \operatorname{ord}\left(g
ight)=\operatorname{ord}\left(\left\langle g
ight
angle אזי g\in G חבורה ויהי חבורה G אינבר: תהא
                                                            .ord (g)=\min\left\{n\in\mathbb{N}_+\mid g^n=e\right\} אזי g\in G חבורה ויהי חבורה G
                                                           \operatorname{ord}\left(g
ight)=\infty אזי \operatorname{ord}\left(g
ight) עבורו g\in G חבורה ויהי G חבורה מערה:
                                g \in G טענה: תהא G = e (ord G = e) איי ord G = e באשר באשר G \in \mathcal{S} ויהי n \in \mathbb{N}_+ ויהי חבורה יהי
                                                                         . (ירים) ויהי i,n)\Longleftrightarrowו(\langle i 
angle = \mathbb{Z}_n) אזי i \in \mathbb{Z}_n ויהי n \in \mathbb{N}_+ זרים).
                                                                            . אזי H ציקלית H \leq G אזי איקלית חבורה G אזי חבורה עיקלית
```

טענה: $(\mathbb{Q},+)$ אינה נ"ס.

```
q*H אזי q\in G ויהי ויהי H< G אזי חבורה תהא
                                                                     g ימני אזי קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי של קוסט ימני אזי G
                                                                gH אזי אוי ממאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי
                                                         Hg=gH אזי g\in G ויהי ויהי H\leq G אחר חבורה אבלית תהא
                                                         (gH)^{-1}=Hg^{-1} אזי g\in G ויהי H\leq G מסקנה: תהא
                                                     (gH=H) \Longleftrightarrow (g \in H) אזי g \in G ויהי ויהי H \leq G טענה: תהא
                                                     (Hg=H) \Longleftrightarrow (g\in H) אזי g\in G ויהי H\leq G טענה: תהא
                                                                 G/H = \{gH \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G חבורה תהא
                                                                A_H \setminus G = \{Hg \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G איזי G
                                                                      G משפט: תהא G חבורה ותהא H \leq G חבורה חבורה משפט:
                                   (g_1H=g_2H)\Longleftrightarrow \left(g_2^{-1}g_1\in H
ight) אזי g_1,g_2\in G ויהיו H\leq G טענה: תהא G חבורה תהא
                                                                       .eH אזי אזי H \leq G הקוסט הטריוואלית: תהא
                                             G:H]=|G/H| אזי H\leq G אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא
                                                                      G:H]=|_Hackslash_G| אזי H\leq G טענה: תהא G חבורה ותהא
                                                    \operatorname{ord}(G) = \operatorname{ord}(H) \cdot [G:H] אזי H < G סענה: תהא G חבורה סופית ותהא
                                                        .ord (H) \left| \mathrm{ord} \left( G \right) \right. אזי אזי חבורה סופית ותהא H \leq G משפט לגראנז': תהא
                                                                   .ord (g) | \mathrm{ord} \, (G) אזי g \in G מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי
                                            G:K]=[G:H]\cdot [H:K] אזי איזי H\leq G חבורה תהא חבורה G איזי ותהא
                            G=\langle q \rangle מתקיים g\in G\setminus \{e\} אזי לכל ord G=p מתקיים חבורה חבורה G מתקיים מסקנה: יהי
                                                      אזי G אזי G אזי G אזי G אזי G אזי G אזי אזי G אזי G אזי מסקנה: יהי
                                 n^{p-1}\equiv 1\mod p אזי \gcd(n,p)=1 באשר n\in\mathbb{N} ויהי p\in\mathbb{P} ויהי מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי
                                                   |HK| = rac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|} אזי חבורות חבורה H,K \leq G למה: תהא
\operatorname{ord}(K)=p וכן \operatorname{ord}(H)=p באשר H,K\leq G אזי לכל ותהא G=p חבורה באשר G ותהא חבורה באשר אזי לכל
                                                                                                                   K=H מתקיים
                                                                (S_n/\mathsf{Stab}(1)) \cap (S_\mathsf{Stab}(1) \setminus S_n) = \{\mathsf{Stab}(1)\} אזי n \in \mathbb{N}_{\geq 3} יהי n \in \mathbb{N}_{\geq 3}
                                                            HqK אזי g \in G ויהי H, K < G אזי חבורה תהיינה
                                                   G טענה: תהא G חלוקה של H,K \leq G טענה: תהא חבורה ותהיינה
                                                                    המקיימת \varphi:G	o H אזי חבורות G,H המקיימת הומומורפיזם:
                                                                                          .arphi\left(e_{G}
ight)=e_{H} :שימור איבר יחידה
                                                                .\varphi\left(a\cdot b\right)=\varphi\left(a\right)\cdot\varphi\left(b\right)מתקיים a,b\in Gלכל לכל • שימור כפל
                                                                     .arphi\left(g^{-1}
ight)=arphi\left(g
ight)^{-1} מתקיים g\in G שימור הופכי: לכל
.(arphi\left(a\cdot b^{-1}
ight)=arphi\left(a
ight)\cdotarphi\left(b
ight)^{-1} מתקיים a,b\in G מתקיים a,b\in G אזי arphi אזי arphi הומומורפיזם) אזי מענה: תהיינה
             \ker(\varphi)=\{g\in G\mid \varphi(g)=e_H\} אזי הומומורפיזם \varphi:G	o H חבורות ויהי חבורות G,H הומומורפיזם: תהיינה
                                                                    למה: תהיינה G,H חבורות ויהי G,H חבורות למה:
                                                                                                                \operatorname{Im}(\varphi) \leq H \bullet
                                                                                                                \ker(\varphi) < G \bullet
                                                                                            (\ker(\varphi) = \{e_G\}) \iff (y \text{"nn } \varphi) \bullet
           \psi\circ \varphi אוווות היינה \psi:H	o K הומומורפיזם הומומורפיזם אזי הומומורפיזם אי\psi:G	o H הומומורפיזם סענה: תהיינה
```

H*q אזי $q\in G$ ויהי H< G אזי חבורה תהא

טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם. $g\in G$ לכל g(g)=e המוגדרת $g\in G$ לכל g(g)=e הינה הומומורפיזם. טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא $g\in G$ חבורה אזי $g\in G$ אזי $g\in G$ הינו הומומורפיזם. $g\in G$ טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא $g\in G$ חבורה ותהא $g\in G$ אזי $g\in G$ אזי $g\in G$ הינו הומומורפיזם. $g\in G$ טענה: יהי $g\in G$ שזי מעל $g\in G$ אזי $g\in G$ אזי $g\in G$ המוגדרת $g\in G$ לכל $g\in G$ לכל $g\in G$ אזי $g\in G$ המוגדרת $g\in G$ המוגדרת $g\in G$ לכל $g\in G$

 $\operatorname{ord}(\varphi(q))|\operatorname{ord}(q)$ אזי $q\in G$ אויי הומומורפיאם ויהי $g\in G$ אויי היינה G,H טענה: תהיינה

```
ho:S_n	o \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}
ight) אזי n\in\mathbb{N} הינה הומומורפיזם. 
ho:S_n	o \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}
ight)
                                                                                     \det\left(
ho\left(\sigma
ight)
ight)\in\left\{\pm1
ight\} אזי \sigma\in S_n ותהא n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                              \operatorname{sign} = \det \circ 
ho המוגדרת \operatorname{sign} : S_n 	o \{\pm 1\} אזי n \in \mathbb{N} המוגדרת סימן של תמורה: יהי
                                                                                                   מסקנה: יהי אזי sign אזי n\in\mathbb{N} יהי יהי
                                                  \operatorname{sign}(\sigma)=rac{\prod_{i< j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i< j}(i-j)} אזי \sigma\in S_n אווי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא \sigma\in S_n אווי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא n\in\mathbb{N} אווי n\in\mathbb{N} אווי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא
                                                                                     A_n = \ker\left(\operatorname{sign}
ight) אזי n \in \mathbb{N} חבורת התמורות הזוגיות: יהי
                                                                                                                     A_n \leq S_n אזי n \in \mathbb{N} טענה: יהי
                                                                    arphi:G	o H איזומורפיזם הפיך חבורות אזי חבורות היינה תהיינה איזומורפיזם: תהיינה
                                                                                          G \cong H אזי איזומורפיות איזומר G,H סימון: תהיינה
                                                          . למה: תהיינה G,H חבורות ויהי \varphi:G	o H ויהי חבורות מהיינה למה: תהיינה מיינה למה:
               למה: תהיינה \psi\circ \varphi איזומורפיזם איז \psi:H	o K איזומורפיזם ויהי \phi:G	o H איזומורפיזם איז למה: תהיינה
                                                                                   \mathcal{A} טענה: תהא \mathcal{A} קבוצה של חבורות אזי יחס שקילות על
                                                                                                                    .C_n\cong R_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
.arphi=\psi אזי arphi_S=\psi_{
estriction_S} חבורות תהא אזי arphi_S=\psi באשר באשר אזי arphi=G ויהיו ויהיו arphi=G באשר באשר באשר באשר באשר אזיי מענה:
                                                                    .arphi:G	o H מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם תהיינה
                                                                        arphi:G	o H אפימורפיזם על אזי הומומורפיזם G,H חבורות אפימורפיזם:
                                                                                    arphi:G	o G אוטומורפיזם: תהא חבורה אזי איזומורפיזם: תהא
                                                                      .Aut (G)=\{\varphi:G	o G\mid סימון: תהא G חבורה אזי \{\varphi\} אוטומורפיזם
                                                                                                   חבורה (Aut (G), \circ) חבורה G חבורה טענה:
                                                                                                                         K = C_2 \times C_2 חבורת קליין:
                                                                                                                     טענה: חבורת קלייו הינה אבלית.
                                                                                                                    טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.
                                                                                                        .C_4טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־
                              c_{q}\left(x
ight)=gxg^{-1} המוגדרת c_{q}:G	o G אזי g\in G לכל לכל תהא חבורה תהא פונקציית הצמדה:
                                                                                          . טענה: תהא G אוטומורפיזם אזי g \in G טענה: תהא אוטומורפיזם מענה:
                               \varphi=c_a המקיים פנימי: תהא g\in G עבורו קיים \varphi:G\to G אוטומורפיזם אוטומר תהא חבורה מיים פנימי: תהא
                                                                                             \operatorname{Inn}\left(G\right)=\left\{c_g\mid g\in G\right\} סימון: תהא חבורה אזי
                                             .c_{a}\left( H
ight) =H מתקיים g\in G מתקיים אזי חבורה אזי חבורה אזי חבורה מורמלית: תה
                                                                                    H \unlhd G נורמלית אזי H \subseteq G חבורה ותהא חבורה G נורמלית
                                                                                                       טענה: תהא G חבורה ותהא H \leq G טענה:
                                                                                                                                            .H \triangleleft G \bullet
                                                                                                           g^{-1}Hg=H מתקיים g\in G לכל
                                                                                                           .qHq^{-1}=H מתקיים q\in G לכל
                                                                                                              .qH=Hg מתקיים g\in G לכל
```

 $.
ho\left(\sigma
ight)\cdot v=\left(egin{array}{c} v_{\sigma(1)}\ dots\ v_{\sigma(n)} \end{array}
ight)$ אזי $v\in\mathbb{R}^n$ ויהי $\sigma\in S_n$ תהא $n\in\mathbb{N}$ אזי $n\in\mathbb{N}$

 $.g^{-1}Hg\subseteq H$ מתקיים $g\in G$ לכל • $.H\subseteq g^{-1}Hg$ מתקיים $g\in G$ לכל •

 $\operatorname{Inn}(G) \unlhd \operatorname{Aut}(G)$ טענה: תהא G חבורה אזי

 $H \triangleleft G$ אזי G:H = 2 באשר $H \triangleleft G$ אזי חבורה תהא

K char G אופיינית אזי $K \leq G$ חבורה ותהא חבורה G אופיינית

 $K \subseteq G$ אזי אזי K char G אזי חבורה חבורה מסקנה: תהא

 $arphi\left(K
ight)=K$ מתקיים $arphi\in\mathrm{Aut}\left(G
ight)$ עבורה לכל $K\leq G$ מתקיים חבורה אזי G

 $G/H = H \setminus G \bullet$

```
.(gN)*(hN)=(g*h)\,N כך *:G/N	imes G/N	o G/N	o G/N נגדיר N	ext{ } 	extstyle G נגדיר (G,*) חבורה ותהא
                                                                                  (G/N,*) אזי אזי N \lhd G חבורה ותהא חבורת (G,*) אזי
                                                                            . חבורה המנה הינה חבורת אזי חבורת המנה הינה חבורה R אזי חבורת המנה הינה חבורה
                                                    q\left(g
ight)=gN המוגדרת q:G	o G/N אזי איזי N	olember G חבורה תהא
                                                                                 טענה: תהא G חבורה תהא N \lhd G ותהא G העתקת המנה אזי
                                                                                                                             הינה הומומורפיזם. q
                                                                                                                                      .\ker(q) = N \bullet
                        (H=\ker(arphi) עבורו arphi:G	o G עבור אוטומורפיזם אוטומורפיז אזי אזי אזי אזי אזי H\leq G עבורה ותהא חבורה תהא
                                                                                                                    \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                G/\ker(arphi)\cong \mathrm{Im}\,(arphi) הומומורפיזם האיזומורפיזם איזי תהיינה G,H חבורות ויהי האיזומורפיזם אזי
                                                                                 טענה: תהא חבורה אין בדיוק אזי מתקיים מתקיים מחבאים מחבים G
                                                                                                                                             G \cong \mathbb{Z} \bullet
                                                                                                                   G \cong \mathbb{Z}_n עבורו n \in \mathbb{N} פיים
                                                                                                            |G/\mathcal{Z}(G)| \notin \mathbb{P} טענה: תהא G חבורה אזי
                                          G \cong H 	imes K אזי אH \cap K = \{e\} וכן וכן HK = G באשר באשר H, K \unlhd G אזי חבורה ויהיו
                                                                  \mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n	imes\mathbb{Z}_m אוים אזי n,m\in\mathbb{N} יהיו הסיני: יהיו
טענה: יהי p\in \mathbb{P} תהא p\in M אזי H\neq M אזי אזי אווי היהי אוכן מאינדקס M מאינדקס אזי מאינדקס M באשר אווי אזי M
                                                                                                                                                p^2 | \text{ord} (G)
                                            חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H,K חבורות ויהי arphi : K 	o {\sf Aut}\,(H) חבורת המכפלה החצי ישרה:
                                               (H \times K, \cdot) איז k, k' \in K לכל h, h' \in H לכל (h, k) \cdot (h', k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')
                                  H 
ightarrow G איי חבורות ויהי G : K 
ightarrow H חבורות ויהי חבורות ויהי G : K 
ightarrow H חבורות ויהי
                                                            . הינה חבורה H \rtimes_{\omega} K אזי \varphi: K \to \operatorname{Aut}(H) חבורות ויהי חבורה H, K
                        H 
ightarrow_{arphi} K \cong H 
ightarrow K אזי איזי k \in K לכל \varphi\left(k\right) = \mathrm{Id}_{H} כך \varphi: K 
ightarrow \mathrm{Aut}\left(H\right) חבורות נגדיר חבורות נגדיר
                                        .Aff (\mathbb{F})=\{f:\mathbb{F}	o\mathbb{F}\mid\exists a\in\mathbb{F}^{	imes}\ (\exists b\in\mathbb{F}\ (\forall x\in\mathbb{F}\ (f\ (x)=ax+b)))\} יהי שדה אזי
                                                                                                           טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי (Aff (\mathbb{F}), \circ) טענה: יהי
                    Aff(\mathbb{F})\cong\mathbb{F}
times_{arphi}\mathbb{F}^{	imes} אזי b\in\mathbb{F} אזי אזי a\in\mathbb{F}^{	imes} לכל arphi(a) לכל arphi(a) לכל arphi(a) אזי arphi(a) אזי arphi(a)
                                  . Iso (P)=\{arphi:\mathbb{R}^2	o\mathbb{R}^2\mid (מצולע משוכלל אזי arphi)\wedge (arphi(P)=P)\} איזומטריה מצולע משוכלל משוכלל אזי
                                                     D_n = \operatorname{Iso}(P) אזי קודקודים אוי משוכלל משוכלל משוכלל יהי יהי יהי יהי יהי יהי מצולע משוכלל בעל
                                                                                                            . חבורה (D_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי
                          .\langle X\mid \varphi_1\ldots \varphi_n
angle=\{x\in \langle X
angle\mid igwedge_{i=1}^n arphi_i(x)\} אזי על X איזי \varphi_1\ldots \varphi_n ויהיו קבוצה ויהיו תהא
                                                                          D_n\cong\left\langle r,s\mid s^2=e,r^n=e,srs=r^{-1}
ight
angle אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} טענה: יהי
                                                                                                                                משפט: יהי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} אזי
                             D_n אוי של החבורות הנורמליות אזי \{D_n,\langle sr,r^2\rangle,\langle s,r^2\rangle\}\cup\{H\leq\langle r\rangle\} אזי אזי n\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}} אם •
```

 $K \lhd G$ אזי איר char H ותהא $H \lhd G$ אזי G חבורה תהא

 $\mathcal{Z}\left(G
ight) riangleq G$ טענה: תהא G חבורה אזי

 $A_n riangleleft S_n$ אזי $n \in \mathbb{N}$ טענה: יהי

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ פשוטה. $\mathrm{SL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $n\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ פשוטה.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}
ight)$ חבורה.

 $\mathcal{Z}\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{F}
ight)
ight)\cong\left(\mathbb{F},+
ight)$ טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי

 $\mathcal{Z}\left(G
ight)=\left\{g\in G\mid \forall h\in G.gh=hg
ight\}$ מרכז של חבורה G חבורה אזי

 $\ker\left(arphi
ight) ext{\leq } G$ אזי אוי הומומורפיזם arphi:G o H הבורות ויהי

 $H \in \{\{e\},G\}$ מתקיים $H \unlhd G$ עבורה עבורה עבורה משוטה: חבורה

```
\mathcal{H}\left(\mathbb{F}_{2}\right)\cong D_{4} :טענה
arphi(k)=c_k כך arphi:K	o Aut (H) ונגדיר ווכן H\cap K=\{e\} וכן באשר H\subseteq G יהי יהי ויהי א כך יהי הבורה יהי ווכן איי יהי ווכן באשר ווכן איי
                                                                                                        .G\cong H
times_{arphi}K איז k\in K
                             D_n\cong C_n איזי k\in K לכל arphi(k)=c_k כך arphi:C_2	o {
m Aut}\,(C_n) ונגדיר ונגדיר n\in \mathbb{N}_{\geq 2} יהי
                                                                                                                    .K \unlhd A_4 טענה:
                                                חבורה G_0 \dots G_n \leq G וקיימות אפיים עבורה קיים עבורה עבורה אבורה מתירה: חבורה עבורה עבורה אחבורה מתירה:
                                                                                                     G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                                    i \in [n] לכל G_{i-1} \unlhd G_i
                                                                                                 .i \in [n] אבלית לכל G_i/G_{i-1}
                                                                                        G פתירה אבלית אזי G פתירה.
                                                           . אינה פתירה מינה אזי G אינה אבלית אזי G חבורה פשוטה באשר אינה חבורה מענה:
                                                                                                 משפט: יהי S_n אזי n \in [4] פתירה.
                                            חבורה G_0 \dots G_n \leq G וקיימות וקיים עבורה עבורה עבורה עבורה G המקיימות חבורה נילפוטנטית:
                                                                                                    G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                                     i \in [n] לכל G_{i-1} \lhd G
                                                                                         i \in [n] לכל G_i/G_{i-1} \le \mathcal{Z}\left(G/G_{i-1}
ight) •
                                                                                   טענה: תהא G חבורה נילפוטנטית אזי G פתירה.
                                 H/(H\cap N)\cong (HN)/N אאיN\unlhd G ותהא H\subseteq G משפט האיזומורפיזם השני: תהא G חבורה תהא
                                                       N/K \unlhd G/N אזי K \le N באשר N, K \unlhd G טענה: תהא
                        C_{N}(G/K)/(N/K) אזי K \leq N משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה G באשר
    משפט ההתאמה: תהא \Phi:\{H\leq G\mid N\leq H\}	o \{H\mid H\leq G/N\} משפט ההתאמה: תהא חבורה ותהא M\subseteq G אזי קיימת
                                                                     \Phi\left(K
ight) 	riangleq G/N מתקיים N \leq K המקיימת K 	riangleq G
                                                  G/K \cong \Phi(G)/\Phi(K) מתקיים N \leq K המקיימת א לכל לכל לכל פשמרת מנות: לכל המקיימת \bullet
                                               G/N פשוטה). איי איי איי איי מקסימלית) פוורה ותהא M \lhd G איי מהא מקסימלית פשוטה).
                   המקיימת f:G	imes X	o T המקיימת קבוצה אזי פונקציה הא G המקיימת המאלית של חבורה על קבוצה: תהא
                                                                                           f(e,x)=x מתקיים x\in X •
                                                          f(g \cdot h, x) = f(g, f(h, x)) מתקיים x \in X ולכל g, h \in G
                                                                     הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.
                                  f\left(g,x
ight)=g. אזי אי G פעולה על f:G	imes X	o X פרובה ותהא קבוצה ותהא G
                                            G \curvearrowright X = \{f: G 	imes X 	o X \mid Gפעולה איי קבוצה איי חבורה ותהא חבורה מימון: תהא
                                                  f אזי f(g,x)=gx כך f\in G\curvearrowright G אזי חבורה נגדיר חבורה משמאלית: תהא
                                                                          . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.
                                                  f אזי f(g,x)=xg^{-1} כך f\in G\curvearrowright G אזי חבורה מגדיר תהא
                                                                            . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.
                                                             . הפעולה את g.xונסמן על פועלת פועלת כי המאר והלאה מכאן הערה: מכאן הלאה את והלאה מערה
                        \operatorname{orb}_{lpha}(x)=\{q.x\mid q\in G\} אזי x\in X איזי lpha\in G\curvearrowright X מסלולים: תהא lpha קבוצה תהא
                                            .o\left(x
ight)=\mathrm{orb}\left(x
ight) אזי x\in X ויהי א מונר הפועלת על חבורה חבורה חבורה G אזי קבוצה תהא
                   .o\left(x
ight)=X המקיים x\in X המקיים f\in G\curvearrowright X מעולה טרנזיטיבית: תהא
                          \operatorname{Stab}_G(x)=\{g\in G\mid g.x=x\} איי X\in X ויהי ווהי חבורה הפועלת על מייצב: תהא G חבורה הפועלת על מייצב:
             \operatorname{Fix}_X(g) = \{x \in X \mid g.x = x\} אוסף נקודות השבת: תהא G חבורה תהא G חבורה הפועלת על G ויהי
                                            \operatorname{Stab}_G(x) \leq G אזי x \in X ויהי א ויהי X חבורה הפועלת על חבורה X אזי חבורה מענה:
                  x \in X מתקיים x \in X מתקיים x \in X מנולה חופשית: תהא x \in X חבורה ותהא x \in X מבורה לכל
                                         lpha\left(g
ight)\in S\left(X
ight) אזי g\in G ויהי lpha\in G\curvearrowright X אמי קבוצה תהא למה: תהא
             .arphi_{lpha}\left(g
ight)\left(x
ight)=lpha\left(g,x
ight) המוגדרת arphi_{lpha}:G	o S\left(X
ight) אזי lpha\in G\curvearrowright X המוגדרת תהא
```

 D_n אט אזי $n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של $n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ אם $n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$

```
lpha_{\omega}\left(q,x
ight)=arphi\left(q
ight)(x) חבורה תהא A קבוצה ויהי G הומומורפיזם אזי איlpha_{\omega}:G	imes X	o G חבורה תהא המוגדרת מהיהי
                                                                     . פעולה lpha_{arphi} אזי אזי איזי הומומורפיזם arphi:G	o S\left(X
ight) פעולה. תהא
                                   .|o\left(x
ight)|=[G:\mathsf{Stab}_{G}\left(x
ight)] איז x\in X איז חבורה הפועלת על X ויהי אוז קבוצה תהא X קבוצה תהא
                |\{o\left(x
ight)\mid x\in X\}|=rac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}_{X}\left(g
ight)| אזי איני חבורה חבורה G חבורה חבורה חבורה אזי תהא למה של ברנסייד:
                         lpha (g,g'H)=gg'H המוגדרת lpha \in G \curvearrowright G/H אזי lpha \in G \curvearrowright G/H הפעולה על הקוסטים השמאליים: תהא
                                                    . טענה: תהא G חבורה ותהא H \leq G אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.
               עבורן קיימת (\alpha,\beta)\in (G\curvearrowright X)	imes (G\curvearrowright Y) חבורה אזי חבורה G חבורות תהיינה X,Y עבורן קיימת עפולות. תהיינה
                                                                       x\in X ולכל g\in G לכל F\left(lpha\left(g,x
ight)
ight)=eta\left(g,F\left(x
ight)
ight) ולכל המקיימת F:X	o Y
טענה: תהא o\left(x
ight)=X עבורו אזי טענה: lpha\in G\curvearrowright X אזי הפעולה על הקוסטים תהא קבוצה תהא אזי הפעולה על מענה:
                                                                                                                                                 \alphaאקווריאנטית ל־G/_{Stab_G(x)} אקווריאנטית ל-
עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים אזי קיימת H \leq G טרנזיטיבית אזי מסקנה: תהא מסקנה ותהא מחבורה ותהא מסקנה: תהא מסקנה: תהא מסקנה ותהא אויים חבורה ותהא מסקנה:
                                                                                                                                                                                            .\alphaאקווריאנטית ל
                                                                   X טענה: תהא \{o\left(x\right)\mid x\in X\} אזי אוי חבורה חבורה G חלוקה של
                                  .o\left(x
ight)=X מתקיים x\in X אוי לכל אזי טרנזיטיבית מסקנה: תהא חבורה תהא חבורה ותהא מסקנה: תהא
                                        אזי p\in\bigcup_{i=1}^n arphi_i\,(P	imes\{0\}) ותהא של \mathbb{R}^3 ותהא arphi_i=1,\ldots,arphi_n אזי מצולע משוכלל יהיו
                                                                                                                                     .Poly (p) = |\{\varphi_i (P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i (P \times \{0\})\}|
עבורן \mathbb{R}^3 עבורה איזומטריות איזומטריות עבורה פיים מצולע משוכלל אוני: קבוצה קמורה לא אניחה איזומטריות עבורה קיים מצולע משוכלל אוני: קבוצה קמורה לא אניחה איזומטריות עבורה קיים מצולע משוכלל
                                                                                                                                .\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i\left(P \times \{0\}\right) :פאות איזומטריות: •
                                                                .Poly (v_1)=\operatorname{Poly}(v_2) מתקיים v_1,v_2\in K פודקודים לכל קודקודים יהה כמות:
עבורן \mathbb{R}^3 עבורן arphi_1\ldotsarphi_n של און אפלטוני: יהי K\subseteq\mathbb{R}^3 גוף אפלטוני אזי און אפלטוני און אייני אי
                                                                                                                      באשר P\subseteq\mathbb{R}^2 באשר \partial K=\bigcup_{i=1}^n \varphi_i\left(P	imes\{0\}\right)
                                                 . Iso (P)=\{arphi:\mathbb{R}^3	o\mathbb{R}^3\mid (מימון: יהי K\subseteq\mathbb{R}^3 גוף אפלטוני אזי K\subseteq\mathbb{R}^3 איזומטריה יהי אוי גוף אפלטוני אזי
            \operatorname{Iso}_{+}(P)=\left\{arphi:\mathbb{R}^{3}	o\mathbb{R}^{3}\mid(גוף אפלטוני אזי K\subseteq\mathbb{R}^{3} איזומטריה משמרת אוריינטציה אוף אפלטוני אזי K\subseteq\mathbb{R}^{3} היהי אוריינטציה אוריינטציה אזי
                                            \{n,\operatorname{Poly}(k)\} אזי קודקוד v\in K פאות ויהי n\in\mathbb{N} גוף אפלטוני גוף אפלטוני בעל אזי K\subseteq\mathbb{R}^3 הגדרה סימון שלפלי: יהי
                                                                                                                                                 הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.
                                                                                                                      \{5,3\} בעל סימון שלפלי בעל אפלטוני אפלטוני אפלטוני בעד בעל אפלטוני אפלטוני
                                                                                                                                             \operatorname{Iso}_+(D) \cong A_5 טענה: יהי D דודקהדרון אזי
                                                                                                                                  .ord (Iso<sub>+</sub> (D)) = 60 מסקנה: יהי דודקהדרון אזי
                                                                        G\cong H עבורה H\leq S\left( X
ight) וקיימת אוי קיימת חבורה אזי קיימת חבורה X עבורה אזי קיימת משפט קיילי:
                                                                           G\cong H עבורה H\leq S\left(\mathbb{N}
ight) אזי קיימת H\leq S\left(\mathbb{N}
ight) אזי סיל H\leq S\left(\mathbb{N}
ight) אזי סילנה: תהא
                                                   .ord (g)=p עבורו g\in G אזי קיים g\in G עבורו p\in \mathbb{P} עבורו וויהי p\in \mathbb{P}
                                     .ord (H)=p אזי קיימת H\leq G אזי קיימת עבורה p|\operatorname{ord}(G) עבורו עבורה p\in\mathbb{P} אין ציקלית עבורה G
                                                                                                        G \cong S_3 או G \cong \mathbb{Z}_6 אזי G \cong G או מענה: תהא
                                                                                     lpha\left(g,h
ight)=c_{q}\left(h
ight) המוגדרת lpha\in G\curvearrowright G חבורה אזיlpha\in G
                                                                                                                             h^g=g^{-1}hg אזי h,g\in G סימון: תהא
                                                                                                                       a.h^{g\cdot k}=\left(h^g
ight)^k אזי a,h,k\in G טענה: תהא
                                                                                          A[h] = \{ghg^{-1} \mid g \in G\} אזי איי חבורה חבורה G חבורה תהא
                                                                                   a(h) = o(h) אזי h \in G טענה: תהא h \in G אזי עם פעולת ההצמדה ויהי
                                                                                                                          G אזי \{[h]\mid h\in G\} חלוקה של חבורה מסקנה: תהא
                                                                               .C_G\left(h
ight)=\left\{g\in G\mid gh=hg
ight\} אזי איר חבורה חבורה G חבורה תהא איבר: תהא
                                                                    .C_{G}\left(h
ight)=\mathrm{Stab}_{G}\left(h
ight) אזי איזי ההצמדה עם פעולת פעולת מצויידת עם פעולת חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי
                                                                                                                               .C_{G}\left( h
ight) \leq G אזי h\in G חבורה ויהי חבורה G
```

. סענה: תהא φ_{lpha} אזי $lpha\in G\curvearrowright X$ הומומורפיזם חבורה תהא G חבורה תהא מענה:

 $\mathcal{Z}\left(G
ight) = igcap_{g \in G} C_G\left(g
ight)$ טענה: תהא G חבורה אזי

. אופיינית מאל חבורה $\mathcal{Z}\left(G\right)$ אופיינית חבורה G

```
\operatorname{PGL}_n\left(\mathbb{F}
ight)=\operatorname{GL}_n(\mathbb{F})/\mathcal{Z}(\operatorname{GL}_n(\mathbb{F})) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} שדה ויהי \mathbb{F} שדה ויהי
                                                          |G|=p^n אזי חבורה n\in\mathbb{N} עבורה קיים n\in\mathbb{N} אזי חבורה אזי חבורה יהי
                                                                             \mathcal{Z}\left(G
ight)
eq \left\{e
ight\} אזי p חבורת־G ותהא ותהא p\in\mathbb{P} משפט: יהי
                                                                         . אבלית G אזי אזי p\in\mathbb{P} אזי מסקנה: יהי p\in\mathbb{P} אזי מסקנה:
                                                                             . נילפוטנטית G אזי G ותהא חבורת G ותהא ותהא p\in\mathbb{P}
תת־חבורתp סילו: יהי p\in\mathbb{P} יהיו m,k\in\mathbb{N} באשר m,k\in\mathbb{N} אזי p\in\mathbb{P} באשר אזי p\in\mathbb{P}
                                                                                                                             |H| = p^k
|K| \leq |H| מתקיים
                   (p \not\mid [G:H] וכן pרבורה H) חבורה H אזי ווענה: יהי H \subseteq G אזי ותהא H \subseteq G אזי וכן H \subseteq G תהא
                                \operatorname{Syl}_p\left(G
ight)=\{H\leq G\mid G סימון: יהי p\in\mathbb{P} ותהא חבורה סופית אזי ווהא H\} חבורה סופית אזי
                                                                      .n_{p}=\left|\mathrm{Syl}_{p}\left(G\right)\right| אזי חבורה חבורה Gותהא ותהא יהי יהי יהי יהי
                                                          . p \not\mid \binom{p^n \cdot m}{p^n} אזי \gcd(p,m)=1 באשר n,m \in \mathbb{N}_+ ויהיו p \in \mathbb{P} למה: יהי
                    G משפט סילו הראשון: יהי H תת־חבורה סופית אזי קיימת H \leq G ותהא חבורה סופית חבורה סופית אזי קיימת
                                                                              n_p \geq 1 יהי סופית חבורה חבורה p \in \mathbb{P} יהי מסקנה:
                                      N_G\left(H
ight)=\left\{g\in G\mid gHg^{-1}=H
ight\} אזי אוי חבורה תהא חבורה: תהא חבורה: תהא
                                                        H \subseteq N_G\left(H
ight) וכן N_G\left(H
ight) \subseteq G אזי H \subseteq G חבורה ותהא חבורה G
תבורות־p-סילו |G|=p^k\cdot m חבורות חבורה G תהא \gcd(p,m)=1 באשר באשר היינה p\in\mathbb{P} יהיו למה: יהי
                                                                                                   .H \nsubseteq N_G(K) אזי H \neq K באשר
gHg^{-1}=K עבורו g\in G אוי קיים g\in G עבורו תהיינה H,K תת־חבורה סופית חבורה סופית תהא
                        (n_p=1)\Longleftrightarrow (H\unlhd G) מסקנה: יהי H מחבורה סופית ותהא ותהא H תת־חבורה סופית חבורה מוקרה אזי
y \in Y ולכל g \in G אזי אינווריאנטית/שמורה לפעולה: תהא G קבוצה ותהא קבוצה חבורה הפועלת על אזי אינווריאנטית/שמורה לפעולה:
                                                                                                                     g,y \in Y מתקיים
\mathcal{O}\subseteq X שנה (קיימת G שמורה)\Longrightarrow (קיימת G שזי עבורה הפועלת על X ותהא על X ותהא אזי חבורה הפועלת על אזי סטענה:
                                                                                                                   .(Y = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} o(x))
                    טענה: יהי g \in G תהא lpha חבורה סופית ונגדיר lpha \in G \curvearrowright \mathrm{Syl}_p(G) כך lpha \in G אזי lpha טרנזיטיבית. lpha
למה: יהי R וכן H\in R וכן H\in R וכן הינה H\in Syl_p(G) אזי סילו תהא H\leq G תת־חבורה תהא חבורה אזי H\in R
                                                                                                                     |R| \equiv 1 \mod p
                                                        n_p \equiv 1 \mod p אזי סופית חבורה G ותהא ותהא אוי יהי יהי משפט מילו השלישי: יהי
                        n_p|m אזי אזי |G|=p^k\cdot m חבורה באשר G ותהא \gcd(p,m)=1 באשר באשר m,k\in\mathbb{N} יהיי p\in\mathbb{P} יהי
                                                                          n_p|\mathrm{ord}\,(G) יהי p\in\mathbb{P} ותהא חבורה חבורה אזי p\in\mathbb{P}
                                                                          מסקנה משפטי סילו: יהי p\in\mathbb{P} ותהא חבורה סופית אזי
```

 $\sum_{g\in C}rac{1}{|C_G(g)|}=1$ אזי $\{[h]\mid h\in G\}$ משפט משוואת מחלקות הצמידות: תהא חבורה סופית ותהא $C\subseteq G$ קבוצת נציגים של

למה: יהי $\beta=(m_{1,1}\cdots m_{1,\ell_1})\circ\ldots\circ(m_{b,1}\cdots m_{b,\ell_b})$ באשר $lpha,eta\in S_n$ תהיינה $n\in\mathbb{N}_+$ למה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$

 $H=A_n$ אזי $\pi\in H$ אזי שלוש בגודל שלוש מעגל π עבורה קיים עבורה $H\unlhd A_n$ אזי ותהא ותהא למה: יהי

 $\mathbb{FP}=(\mathbb{F}^2\setminus\{0\})/R$ אזי $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{F}^2\setminus\{0\}\;\middle|\;\exists\lambda\in\mathbb{F}^ imes\;(x=\lambda y)
ight\}$ אזי היישר הפרויקטיבי: יהי

 $G/\mathcal{Z}(G)\cong \mathrm{Inn}\,(G)$ טענה: תהא G חבורה אזי

. פשוטה A_5

.למה: A_6 פשוטה

 $|[q]|=[G:C_{G}\left(q
ight)]$ אזי $q\in G$ מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי

 $\alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(m_{1,1}) \dots \alpha(m_{1,\ell_1})) \circ \dots \circ (\alpha(m_{b,1}) \dots \alpha(m_{b,\ell_b}))$

 $\mathcal{Z}\left(\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight)
ight)=\{\lambda I_n\mid\lambda\in\mathbb{F}^{ imes}\}$ אזי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ שענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{>5}$ אזי משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{>5}$

 $|C_G(k)|=|C_G(h)|$ אזי $k=ghg^{-1}$ באשר g,h,k ויהיו חבורה G אחי

 $\mathcal{Z}\left(G
ight)=igcup\{[g]\mid(g\in G)\wedge(|[g]|=1)\}$ טענה: תהא G חבורה סופית אזי

```
.n_p \equiv 1 \mod p .3
                                                                  H=\langle\pi
angle עבורו \pi\in S_p אזי קיים p־מעגל H=p באשר באשר H\leq S_p ותהא p\in\mathbb{P} יהי
                                                                                                                       (p-1)! \equiv -1 \mod p אזי p \in \mathbb{P} מסקנה משפט ווילסון: יהי
                                                             טענה: יהיו p \in p אזי q \neq 1 \mod p וכן p < q אזי q \in \mathbb{P} אזי q \neq 1 \mod p וכן אזי p \in p באשר
                                                                                                  G \cong D_p או G \cong C_{2p} אזי אזי חבורה מסדר G אותהא p \in \mathbb{P}_{>2} יהי
                                                     N_G\left(N_G\left(P
ight)
ight)=N_G\left(P
ight) אזי אזי P\leq G ותהא ווהא אונה: תהא P
                                         g\in A ולכל n\in\mathbb{Z} לכל g^n=ng וכן x\in A לכל -x=x^{-1} וכן ולכל e_A=0 ולכל תהא
אזי g,h\in\prod_{i\in I}G_i לכל לכל (g\cdot h)_i=g_i\cdot h_i חבורות נגדיר אזי ולכל ותהיינה קבוצה ותהיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה וולכל ולכל ולכל וולכל וו
                                                                                                                                                                                                           (\prod_{i\in I}G_i,\cdot)
                                                                                                   . חבורה \prod_{i\in I}G_i אזי חבורות \{G_i\mid i\in I\} חבורה חבוצה I אחבורה טענה:
                                                                                           חבורות אזי \{G_i \mid i \in I\} חבורות אזי קבוצה תהיעני: תהא חבורות אזי
                                                                                                                            .\bigoplus_{i\in I} G_n = \left\{ g \in \prod_{i\in I} G_i \mid |\{i \in I \mid g_i \neq e_{G_i}\}| \in \mathbb{N} \right\}
G_i\cap\left(igoplus_{j
eq i}G_i
ight)=\{e\} באשר אשר \{G_i\unlhd G\mid i\in I\} חבורת סכום ישר פנימי: חבורה G עבורה קיימת קבוצה I באשר באשר באשר
                                                                                                                                                                              G = \bigoplus_{i \in I} G_n לכל i \in I לכל
                                                                                                                                הערה: נקרא לחבורת סכום ישר חיצוני חבורת סכום ישר.
                                                                                        \bigoplus_{i\in I}G_n\leq\prod_{i\in I}G_i טענה: תהא \{G_i\mid i\in I\} חבורות אזי קבוצה ותהיינה
                                                                                                                                                       T\left(G
ight)=G אבורה G עבורה פיתול:
                                                                                                                                T\left(G
ight)=\left\{ e
ight\} אבורה לכל חבורה פיתול: חבורה חסרת פיתול:
                                                                                                                                    טענה: תהא A חבורה אבלית אזי A/T(A) חסרת פיתול.
                                                                                                                                    G/H אזי H \subseteq G טענה: תהא G חבורה נ"ס ותהא
                                                                                Gמסקנה: תהיינה G,H,Kוליס), חבורות באשר G\cong H	imes K מסקנה: תהיינה
                                                                                                                                           \bigoplus_X \mathbb{Z} אזי קבוצה אזי תהא X קבוצה אזי חופשית:
                                                                 X אזי אוי חופשית חבורה אבלית חופשית: תהא קבוצה ותהא אוי חבורה אבלית חופשית אזי אוי אוי בסיס
                                                              |X| אזי חופשית אבלית חבורה אבלית חבורה אבלית ותהא אזי אוער תהא אזי אוי אוי אוי אזי אבלית חופשית.
                              x\mapsto e_x כך X כדיס אזי נשכן בצורה בסיס א בתוך בתוך החבורה האבלית החופשית עם בסיס כך הערה.
arphi:igoplus_X\mathbb{Z}	o G משפט התכונה האוניברסלית: תהא f:X	o G חבורה ותהא חבורה תהא קבוצה תהא קבוצה תהא
                                                                                                                                                                        x \in X לכל \varphi(x) = f(x) עבורו
\psi:F	o B משפט תכונת ההרמה: תהא \varphi:A	o B חבורה אבלית חופשית תהיינה A,B חבורה אבלית חופשית חופשית היינה
                                                                                                              .arphi\circ\hat{\psi}=\psi עבורו \hat{\psi}:F	o A הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם
                                           A \cong B \oplus A/B אזי אזי A/B אבלית ותהא A \subseteq B \subseteq A אבלית ותהא חופשית אזי A
                                                                                          משפט: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי A אבלית חופשית עם בסיס סופי.
                                                                                                 A\cong\mathbb{Z}^k עבורו k\in\mathbb{N} קיים אזי פיתול מסקנה: תהא אבלית נ"ס וחסרת מסקנה:
                                                                                                                                       למה: תהא A חבורת פיתול אבלית נ"ס אזי A סופית.
                                                                                                                                                                              משפט: תהא A אבלית נ"ס אזי
                                                                                                                                                                                 A \cong A/T(A) \oplus T(A) \bullet
                                                                                                                                                              A/T(A)\cong \mathbb{Z}^k עבורו k\in \mathbb{N} סיים
```

 $A\cong\mathbb{Z}^k\oplus B$ עבורם אבלית וקיים B וקיים חבורה אבלית פיימת אזי קיימת אבלית נ"ס אזי אבלית אבלית מסקנה:

 $G_p = \{x \in G \mid p| \mathrm{ord}\,(x)\}$ אזי $p \in \mathbb{P}$ חבורה ויהי G חבורה אזי

 $A_p \leq A$ אזי $p \in \mathbb{P}$ אזי A חבורה A טענה: A חבורה A אזי ענה: A חבורה A חבורה A אזי A חבורה A משפט גאוס: תהא A אבלית סופית אזי $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$ אזי חפית A אבלית סופית A אזי A אזי A אזי A אבלית סופית ויהי A אזי A

G באשר H תת־חבורה־G סילו של H באשר H

. סופית $T\left(A\right) ullet$

 $.qHq^{-1}=K$ עבורו $q\in G$ אזי קיים $q\in G$ עבורו של p סילו של p תת־חבורות־q עבורו .2

```
A=igoplus \left\{ P\leq A\mid \exists p\in \mathbb{P}\left(P\in \operatorname{Syl}_p\left(A
ight)
ight)
ight\} מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי
עבורם a_1\dots a_{n+1}\in\mathbb{N} יהי n\in\mathbb{N} אזי קיימים a_1\dots a_{n+1}\in A חבורה אבלית מסדר p^n ויהיו p^n ויהיו
                                                                                           a_i \not\equiv 0 \mod p וכן קיים i \in [n+1] וכן קיים \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0
                                 טענה: תהא G אבלית ותהא G התב"ש
                                                                                            A+B=G וכן B\cap A=\{e\} עבורה B\leq G פיימת •
                                            a=a+b עבורם b\in B וקיים ויחיד a\in A קיים לכל g\in G עבורם לכל B\leq G
                                           . העתקת המנה 
u:G \to G/A באשר 
u\circ \varphi = \mathrm{Id}_{G/A} עבורו 
\varphi:G/A \to G העתקת המנה.
                                                                                                                                      \pi:G	o A קיימת נשג \sigma
                                                       (A\cong \mathbb{Z}^k/G) עבורם G<\mathbb{Z}^k וקיימת k\in \mathbb{N} טענה: תהא A אבלית אזי (A\cong \mathbb{Z}^k/G) עבורם A
                                                    .ord (g) \in \{1,p\} מתקיים g \in G אזי חבורה איזי חבורה p \in \mathbb{P} יהי יהי יהי
משפט המבנה לחבורות־p אזי קיים ויחיד k\in\mathbb{N} יהי יהי אבליות סופית בעלת סופית המבנה לחבורות־p אזי יהי ויחיד ווקיימים ווקיימים משפט המבנה לחבורות־p אזי קיים ויחיד ווקיימים
                                  A\cong igoplus_{i=1}^k C_{p^{n_i}} עבורם \sum_{i=1}^k n_i=n וכן i\in [k-1] לכל n_{i+1}\leq n_i באשר n_1\ldots n_k\in \mathbb{N}_+ ויחידים
באשר m_1 \dots m_k \in \mathbb{N}_+ באשר ויחיד אבליות משפט המיון לחבורות אבליות סופיות: תהא א אבלית סופית אזי קיים ויחיד ויחיד אבליות סופיות:
                                                                                                        A\congigoplus_{i=1}^k C_{m_i} עבורם i\in[k-1] לכל m_i|m_{i+1}
וקיימים i\in [k-1] לכל p_i\leq p_{i+1} באשר באשר p_1\dots p_k\in \mathbb{P} קיימים ויחידים אזי קיים ויחיד אבלית סופית אזי קיים ויחידים
                                                                                                               A\cong igoplus_{i=1}^k C_{n_i^{t_i}} עבורם t_1\dots t_k\in\mathbb{N} ויחידים
                                                                    A\cong B אזי אA\oplus C\cong B\oplus C מסקנה: תהיינה A,B,C אבליות סופיות מסקנה
                                                                         A \cong B אזי A \oplus A \cong B \oplus B מסקנה: תהיינה A, B אזי A \oplus B \oplus B
                                                                                                 . ציקלית אזי A טופית אזי A \leq \mathbb{F}^{\times} שדה ותהא \mathbb{F} יהי מסקנה: יהי
                                                                                                                               . מסקנה: יהי p\in\mathbb{P} אזי ציקלית.
                                                                  C \cong A/B עבורה C \leq A אזי קיימת אזי חופית ותהא אבלית סופית ותהא אזי קיימת A
                                                                                                     \chi:A	o\mathbb{S}^1 קרקטר: תהא A אבלית אזי הומומורפיזם
                                                                   .\hat{A} = \left\{\chi: A \to \mathbb{S}^1 \;\middle|\; \text{קרקטר} \;\chi\right\} קרקטת אבלית חבורה A תהא תהא הדואלית: תהא
                                                                                                                                  .C_n\cong\widehat{C_n} אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                                                               \widehat{A 	imes B} = \hat{A} 	imes \hat{B} אזי סענה: תהיינה A,B אבליות סופיות אזי
                                                                                                                    A\cong \hat{A} מסקנה: תהא A אלבית סופית אזי
                                                   U(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=\{a\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\mid\exists b\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\ (a\cdot b=1)\} אזי n\in\mathbb{N} ויהי p\in\mathbb{P}\setminus\{2\} יהי יהי
                                                                                                . ציקלית U\left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}
ight) אזי n\in\mathbb{N} ויהי p\in\mathbb{P}ackslash\left\{2
ight\} ציקלית.
                                                                                                   T\cong igoplus_{p\in \mathbb{P}} T_p משפט גאוס: תהא T חבורת פיתול אזי
                   \mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight)=\left\{rac{k}{p^{n}}\ \middle|\ (n\in\mathbb{N})\wedge\left(k\in\{0,\ldots,p^{n}-1\}
ight)
ight\} סימון: יהי p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P} מגדיר p\in\mathbb{P} גדיר p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P} מגדיר p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P}
                                                                \mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight) אזי p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight) חבורה. \mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight)\cong\left\{2^{\pi i\cdot rac{k}{p^{n}}}\;\middle|\;(n\in\mathbb{N})\wedge(k\in\{0,\ldots,p^{n}-1\})
ight\} אזי p\in\mathbb{P} אזי p\in\mathbb{P}
                                                                                                                                       \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\congigoplus_{n\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight) :טענה
                                a\cdot b=a איבר מתחלק במספר: תהא b\in G חבורה אבלית ויהי a\in S אזי חבורה אבלית חבורה אבלית חבורה אבלית ויהי
```

מסקנה: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} חליקה. $O(G) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ חליקה. $O(G) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ חבורות אבליות באשר $D(G) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ חליקה ויהי $\mathcal{G} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ חליקה אזי ($i \in I$ חליקה לכל $I \in I$ חליקה $I \in I$ חליקה. $I \in I$ חליקה. $I \in I$ חליקה. $I \in I$ חליקה.

 $n\in\mathbb{N}$ מתחלק ב־מתחלק מתקיים כי $a\in G$ עבורה לכל $a\in G$ עבורה אבלית חליקה:

חבורה מצומצמת: חבורה לכל אינה לכל עבורה עבורה $H \leq G$ חבורה חבורה חבורה מצומצמת:

טענה: תהא A אבלית תהא $B \leq A$ אבלית ויהי $f:A \to B$ אבלית ויהי אבלית אזי קיימת אוי אבלית הא אבלית ויהי אבלית ויהי אבלית ויהי $A = C \oplus B$

 $A=D\oplus K$ וכן $D\cap K=\{0\}$ באשר $K\leq A$ חליקה אזי קיימת חליקה חליקה חליקה חליקה חליקה חליקה אוי קיימת חבלית ותהא

```
[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh אזי g,h\in G חבורה חבורה G חבורה מוטטור: תהא
                                         .([g,h]=e)\Longleftrightarrow (gh=hg) אזי g,h\in G מסקנה: תהא
                                                [I+e_{i,j},I+e_{j,k}]=e_{i,k} אזי i,j,k\in[n] ויהיו n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                         I[I+e_{i,j},I+e_{j,\ell}]=I שונים אזי i,j,k,\ell\in[n] ויהיו n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                            Av=v עבורו עבורו אזי קיים ויחיד עבורו אויילר: תהא A\in \mathrm{SO}\left(3
ight) איזי קיים ויחיד
g\cdot \mathrm{Fix}\,(h)=\mathrm{Fix}\,(h) אזי(g,h]=e באשר g,h\in G באשר אזי(g,h)=g אזי(g,h)=g באשר
                                                          G[G,G]=\{[g,h]\mid g,h\in G\} הגדרה: תהא G חבורה אזי
                                                                   G' = \langle [G,G] \rangle חבורה אזי תהא תבורת הנגזרת: תהא
                    \langle X 
angle char G אזי \varphi \in \operatorname{Aut}(G) לכל לכל \varphi(X) = X עבורה X \subseteq G אזי חבורה חבורה למה: תהא
                                                                                  G' char G אזי חבורה G תהא
                                                               G^{ab}=G/G' אבליזציה של חבורה: תהא תהא איני
                                                                           G=G' אבורה מושלמת: חבורה מושלמת:
                                                            . מושלמת G אזי אוי בפוטה פשוטה לא חבורה G מושלמת טענה: תהא
                                                                               מסקנה: יהיn\in\mathbb{N}_{>5} מושלמת.
                                                                            . מושלמת SL_n\left(\mathbb{R}\right) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי יהי
                                  x=[\pi,\sigma] עבורן \pi,\sigma\in S_n אזי קיימות x\in A_n ויהי ויהי n\in\mathbb{N}_{\geq 5}
                                                                                     למה אבליזציה: תהא G חבורה אזי
                                                                                                       .אבלית G^{ab}
                   (G' < \ker(\varphi))אבלית) מתקיים G' = G \to H ולכל אפימורפיזם שלכל חבורה G' = G' = G
                                                            (G' < N) \Longleftrightarrow אבלית) אמתקיים N \triangleleft G מתקיים N \triangleleft G
         מסקנה: תהא G חבורה מושלמת תהא A חבורה אבלית ויהי \varphi:G 	o A הומומורפיזם אזי
                                                                                   .S_n'=A_n אזי n\in\mathbb{N}_+ מסקנה: יהי
                                                                               .S_n^{ab}\cong \{\pm 1\} אזי n\in \mathbb{N}_+ יהי יהי
                                                                    .{\left( {{	ext{GL}}_n}\left( {\mathbb{R}} 
ight)} 
ight)' = {	ext{SL}}_n\left( {\mathbb{R}} 
ight) אזי n \in {\mathbb{N}}_{\geq 2} יהי
                                                                       \left( \mathsf{GL}_{n}\left( \mathbb{R}
ight) 
ight) ^{ab}=\mathbb{R}^{	imes} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq2} יהי מסקנה: יהי
                                a \in \mathbb{N} לכל G^{(n+1)} = \left(G^{(n)}
ight)' וכן G^{(0)} = G לכל חבורה אזי חבורה מגזרת: תהא
                                  . מסקנה: תהא G^{(n)}=\{e\} המקיים n\in\mathbb{N} פתירה עבורה עבורה עבורה מסקנה: תהא
                                      סדרה נורמלית: תהא G חבורה ויהי n\in\mathbb{N}_+ אזי חבורה G המקיימות
                                                                                        G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                         i \in [n] לכל G_i \subseteq G_{i-1}
                                      G^{(n)}=\{e\} עבורו n\in\mathbb{N} (קיים m\in\mathbb{N} עבורו G משפט: תהא G חבורה אזי
                                                                                   טענה: יהיn\in\mathbb{N}_{\geq 2} פתירה.
                                                                      G^{(2)}=\{e\} חבורה G עבורה מטאבלית: חבורה
                        .(אבלית) אבלית עבורה G אבלית עבורה G אבלית) אבלית עבורה G אבלית) אבלית) אבלית)
                       M 
ot \leq N מתקיים N \leq G עבורה לכל M \subsetneq G חבורה אזי חבורה מקסימלית: תהא
                                                   \Phi\left(G\right)=\bigcap_{\substack{M\leq G\\ \text{ or or }M}}M אזי חבורה G תת-חבורת פרטיני: תהא
  \langle X 
angle = G מתקיים \langle X \cup \{g\} 
angle = G איבר לא־יוצר: תהא G \in G עבורו לכל g \in G עבורו לכל
```

 $A=D\oplus R$ סענה: תהא A אבלית אזי קיימת D< A חליקה וקיימת R< A מצומצמת באשר $D\cap R=\{0\}$ וכן

 $T\cong\bigoplus_I\mathbb{Z}(p^\infty)$ חבורת עבורה I חבורת אזי קיים אבלית אזי קיים או חליקה אבלית חליקה חבורת משפט: תהא

 $A=T\left(D\right)\oplus F\oplus R$ וכן $D=T\left(D\right)\oplus F$ וכן $T\left(D\right)\cap F=\{0\}$ וכן $A=D\oplus R$ משפט: תהא F חבורה אבלית חליקה חסרת פיתול אזי קיימת קבוצה I עבורה F

 $\mathbb{P}\left(xy=yx
ight)\leq rac{5}{8}$ משפט ארדש־טוראן: תהא G חבורה סופית לא אבלית אזי

 $\mathbb{P}\left(xy=yx
ight)=rac{5}{8}$ עבורה עבורה סופית לא אבלית סופית חבורה סיימת

וכן $D\cap R=\{0\}$ חסרת פיתול באשר $F\leq D$ חליקה וקיימת חליקה מצומצמת קיימת מצומצמת אזי קיימת מסקנה: תהא

טענה: תהא D אבלית חליקה אזי $T\left(D\right)$ חליקה.

 $\Phi\left(G
ight)=\left\{g\in G\mid$ טענה: תהא G חבורה אזי $g\}$ לא־יוצר

 $\Phi(G)$ char G אזי חבורה G מענה: תהא

. אבלית אזי G אבלית אזי $G/\mathcal{Z}(G)$ אבלית חבורה G אחבורה מענה: תהא

הרחבה של חבורה אבלית אזי חבורה K חבורה אבלית: תהא עבורה אבלית חבורה אבלית חבורה אבלית תהא או חבורה אבלית: תהא או חבורה אבלית חבורה אבל $\ker(\varphi)\cong L$ המקיים $\varphi:G o K$

 $Q \cong G/N$ וכן $N \unlhd G$ עבורה Q עבורה אזי חבורה Q חבורה ותהא Q חבורה אזי חבורה Q וכן

משפט: תהא G חבורה סופית אזי

- . מתקיים כי $H \leq G$ סופית $H \leq G$
- . מתקיים כי G/N סופית $N \subseteq G$ סופית •
- . של H סופיתם כי H סופית אכל הרחבה H סופית

משפט: תהא G חבורת פיתול אזי

- . מתקיים כי H < G מתקיים לכל
- . מתקיים כי G/N מתקיים $N \unlhd G$ פיתול •
- . פיתול H ב־M מתקיים כי H פיתול •

משפט: תהא G חבורה פתירה אזי

- . מתקיים כי H < G מתקיים H < G
- . מתקיים כי G/N פתירה $N \unlhd G$ פתירה •
- . פתירם H פתירם מתקיים כי H פתירה לכל •

 $i\in[n]$ סדרת הרכב: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי סדרה נורמלית חבורה G עבורה G $\{G_1/G_0,\ldots,G_n/G_{n-1}\}$ אזי הרכב אזי $G_0\ldots G_n\leq G$ חבורה ותהא

עבורו $H \leq G$ אזי סדרה ויהי $m \in \mathbb{N}_+$ אזי סדרה נורמלית: תהא חבורה לכל $i \in [n]$ אזי סדרה נורמלית אזי סדרה נורמלית: תהא $G_i \triangleleft H \triangleleft G_{i-1}$

(סיברה מקסימלית). סיברה (תהא $G_0 \dots G_n \subseteq G_0 \dots G_n$ סיברה נורמלית אזי סיברה (תהא $G_0 \dots G_n \subseteq G_0 \dots G_n$ סדרות הרכב שקולות: תהא חבורה m:[n] o [m] חבורה אזי עבורן הרכב הפיכה וכן הרכב הרכב שקולות: תהא חבורה אזי סדרות הרכב הרכב שקולות: תהא $i \in [n]$ לכל $G_i/G_{i-1} \cong H_{\pi(i)}/H_{\pi(i-1)}$ לכל

 $m \geq n$ עבורה $ilde{G}_0 \dots ilde{G}_m \leq G$ עבורה נורמלית אזי סדרה נורמלית חבורה ותהא עידון של סדרה תהא סדרה ותהא עידון איזי סדרה נורמלית. $i,j\in\{0\dots n\}$ לכל $ilde{G}_{i_j}=G_j$ וכן $i_n=m$ וכן $i_0=0$ באשר $i:\{0\dots n\} o\{0\dots m\}$ לכל למה למת הפרפר של זסנאוס: תהא $B \unlhd B^\star$ חבורה תהיינה $A \unlhd A^\star$ באשר $A, B, A^\star, B^\star \subseteq G$ אזי חבורה תהא זסנאוס:

- $A(B \cap B^*) \triangleleft B(A^* \cap B^*)$ וכן $A(B \cap A^*) \triangleleft A(B^* \cap A^*) \bullet$
 - $(A(B^{\star} \cap A^{\star}))/(A(B \cap A^{\star})) \cong (B(A^{\star} \cap B^{\star}))/(B(A \cap B^{\star})) \bullet$

 $ilde{G}_0\dots ilde{G}_N\leq G$ משפט העידון של שרייר: תהא G חבורה תהיינה G וכן וכן $G_0\dots G_n\leq G$ וכן חבורה תהיים עידון $ilde{H_0}\dots ilde{H}_M$ של הלי $ilde{G_0}\dots ilde{G}_N$ באשר של האר ל $ilde{H_0}\dots ilde{H}_M \leq G$ וקיים עידון של ל

משפט ז'ורדן־הולדר: תהא חבורה אזי

- . אם G סופית אזי G בעלת סדרת הרכב \bullet
- $H_0 \dots H_m$ ים כי $G_0 \dots G_n$ שקולה ל- $G_0 \dots G_n \subseteq G$ וכן וכן וכן $G_0 \dots G_n \subseteq G$

Gטענה: תהא G פתירה אזי (G בעלת סדרת הרכב) פתירה מינה:

 $G_i=H$ טענה: תהא $G_i=H$ עבורה סופית ותהא $G_i=H$ אזי קיימת סדרת הרכב עבורה $G_i=H$ טענה: תהא . אינה אזי G אינה אבלית אזי G_i/G_{i-1} עבורו עבורו $i\in [n]$ סדרת הרכב באשר הרכב באשר אינה אבלית אזי $G_0\dots G_n \leq G$ $i\in\mathbb{N}$ לכל $G^{i+1}/G^i\cong\mathcal{Z}\left(G/G^i
ight)$ מקיימת $G^{i+1}\leq G$ וכן וכן $G^0=\{e\}$ לכל תהא חבורה G חבורה אזי

. חבורה אזי הסדרה המרכזית העולה חבורה G תהא טענה:

 $i\in\mathbb{N}$ לכל $G_{i+1}=\langle [G,G_i]
angle$ וכן וכן $G_0=G$ לכל תהא חבורה מרכזית היורדת: תהא

 $G^n=G$ עבורו $n\in\mathbb{N}$ (קיים $m\in\mathbb{N}$ טענה: תהא G חבורה אזי (קיים $m\in\mathbb{N}$

 $.(G^n=G)\Longleftrightarrow (G_n=\{e\})$ אזי $n\in\mathbb{N}$ חבורה חבורה מענה: תהא

 $i\in\{0\dots n\}$ לכל $G_i\leq G^{n-i}$ אזי $n=\min\{m\in\mathbb{N}\mid G^m=G\}$ לכל לכל G

```
(G אורם הרכב של (G) גורם הרכב של (G) גורם הרכב של (G) אורם הרכב של (G) גורם הרכב של (G) גורם הרכב של (G)
וכן n=m אזי אזי \prod_{i=1}^m K_i\cong\prod_{i=1}^n H_i אטייות באשר איי פשוטות אזי וענה: H_1\dots H_n, K_1\dots K_m ותהיינה n,m\in\mathbb{N}_+ וכן
                                                                                                              i \in [n] לכל H_i \cong K_{\pi(i)} עבורה \pi \in S_n קיימת
                                                                             .t\left(e
ight)=e_{2} וכן o\left(e
ight)=e_{1} אזי e\in E\left(G
ight) ארף מכוון ותהא G גרף מכוון ותהא
                        \sigma עבורו (e,e^{-1}) מסלול מצומצם: יהי G גרף מכוון אזי מסלול \sigma עבורו לכל \sigma עבורו לכל יהי
                   \pi_1\left(G,v
ight)=\left\{\sigma\mid G^- ב־ס ל־ס מעגל מצומצום מ' אזי v\in V\left(G
ight) אזי היה מכוון ויהי היסודית של גרף: יהי G גרף מכוון ויהי
                                          . המצויידת עם שרשור מסלולים הינה \pi_1\left(G,v\right) אזי v\in V\left(G\right) אזי מכוון ויהי מכוון ייהי G גרף מכוון ויהי
                                                                        (e,e^{-1}) הערה: כאשר משרשרים מסלולים יש לצמצם תתי מסלולים מהצורה
                                                                                                                            \pi_1\left(\left(\{v\},\{(v,v)\}\right),v\right)\cong\mathbb{Z} מסקנה:
                                                                                 B_n = (\{v\}, \{(v,v,1)\dots(v,v,n)\}) אזי n \in \mathbb{N}_+ יהי יהי השושנים: יהי
                                                                                       v של עצמיות עצמיות הערה: גרף השושנים הינו מולטי ארף בעל n
                                                                                                          .F_n=\pi_1\left(B_n,v
ight) אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי חבורה חופשית: יהי
                          .Cay (G,S)=(G,\{(g,gs)\mid (g\in G)\land (s\in S)\}) גרף קיילי: תהא G חבורה ותהא א קבוצה יוצרת איזי S\subseteq G קבוצה יוצרת איזי
                                                                      V\left(G
ight) אועלת טרנזיטיבית על Aut G המקיים כי המקיים על אועלת טרנזיטיבי. גרף מכוון
                                                              \deg\left(v
ight)=\deg\left(u
ight) מתקיים v,u\in V\left(G
ight) המקיים כי לכל
                                                       . גרף טרנזיטיבי ורגולרי. רבע מענה: תהא אזי אוצרת אזי קבוצה א קבוצה ותהא אורה אS\subseteq Gותהא חבורה תהא טענה: תהא
                                                             .\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(S\cup S^{-1}\right)^{n} אזי יוצרת קבוצה ותהא חבורה ותהא חבורה מילים ביוצרים: תהא מילים מילים אזי
                                                 R = \{w \mid Sיחס ב־w\} יחס יוצרת אזי S \subseteq G חבורה ותהא חבורה מיחסים ביוצרים: תהא
תרמילה xx^{-1} מילה מצומצמת ביוצרים: תהא A \subseteq S חבורה ותהא אי פוצר אזי מילה A קבוצה יוצרת אזי מילה A חבורה ותהא אוי מילה מצומצמת ביוצרים: תהא
                                                                                                              w של w וכן לא מתקיים כי x^{-1}x תת־מילה של
                                                                       F(X) = \{w \mid Xבורה חופשית: תהא X קבוצה אזי \{w\} מילה מצומצמת ב־
                                                                          טענה: תהא X קבוצה אזי F\left( X
ight) המצויידת עם שרשור מילים הינה חבורה.
                                                x^{-1} מילים מהצורה וכן מילים מהצורה בערה: כאשר מילים מילים מילים מילים מילים מהצורה הערה:
                                  \hat{x}(\ell_1\dots\ell_n) = \left\{ egin{array}{ll} x\ell_1\dots\ell_n & x\ell_1
else \end{array} 
ight. כך \hat{x}\in X כר \hat{x}\in X כך \hat{x}\in X כך \hat{x}\in X כר \hat{x}\in X
            arphi_X=f עבורו arphi:F(X)	o G עבורו ויחיד הומומורפיזם f:X	o \hat G עבורה ותהא עבה: תהא קבוצה תהא
                                                                                      תהא R חבורה וערת אזי S\subseteq G חבורה חבורה מסקנה: תהא
                                                                                  G \cong F(S)/R מסקנה: תהא G \cong G קבוצה יוצרת אזיG \cong G מסקנה
                                                                            \langle S\mid R
angle=F(S)/R אזי יוצרת אוי קבוצה ותהא אי סימון: תהא G חבורה ותהא
```