

כדור פתוח: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$

כדור סגור: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $\bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$

ספירה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$

תיבה פתוחה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j < x_j < b_j\}$

תיבה סגורה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\bar{\Pi}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j \leq x_j \leq b_j\}$

נקודה פנימית: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $x \in M$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq M$

פנים של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\text{int}(M) = \overset{\circ}{M} = \{x \in M \mid M \text{ נקודה פנימית של } x\}$

קבוצה פתוחה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $M = \overset{\circ}{M}$

נקודה חיצונית: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in M$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \cap M = \{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\partial M = \{x \in M \mid M \text{ נקודת שפה של } x\}$

קבוצה סגורה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M \subseteq M$

סגור של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\bar{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(x \text{ נקודה חיצונית של } M) \iff (x \text{ נקודה פנימית של } M^c)$

מסקנה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ פתוחה}) \iff (M^c \text{ סגורה})$

קבוצה חסומה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r > 0. M \subseteq B_r(0)$

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ קבוצות פתוחות עבורן } A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ מתקיים } \exists B \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda). A \subseteq \bigcup_{n \in B} I_n)$

סימון: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{(k)} = a(k)$

גבול: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L \in \mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{(k)} - L\| = 0$ אזי $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)} = L$

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x \rightarrow a}$ וכן $\lim_{x \rightarrow a}$

משפט: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b \right) \iff \left(\forall j \in [n]. a_j^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b_j \right)$

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $(a \text{ מתכנסת}) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a^{(m)} - a^{(p)}\| < \varepsilon)$

מסקנה: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $(a \text{ מתכנסת}) \iff \left(\forall j \in [n]. \forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a_j^{(m)} - a_j^{(p)}\| < \varepsilon \right)$

משפט בולצאנו וויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת-סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } a \in K^{\mathbb{N}} \text{ קיימת תת-סדרה } a^{(k_i)} \text{ המקיימת } \lim_{i \rightarrow \infty} a^{(k_i)} \in K)$

הערה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ נחשוב על f כקטור של פונקציות $f = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ כאשר $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$

גבול: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $L \in \mathbb{R}^m$ אזי

- היינה: אם $(f(x^{(k)}) \rightarrow L) \implies (x^{(k)} \rightarrow a) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אזי $\forall x \in A^{\mathbb{N}}.$
- קושי: אם $\|f(x) - L\| < \varepsilon \implies \|x - a\| < \delta \implies \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in A \setminus \{a\}.$ אזי $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי $a \in A$ עבורה $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

סימון: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $B \subseteq A$ אזי $(f \text{ רציפה נקודתית עבור כל } b \in B) \iff (f \in C(B))$

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $B \subseteq A$ אזי $(f \in C(b)) \iff (f_1, \dots, f_m \in C(b))$

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהינה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ וכן $B \subseteq \mathbb{R}^m$ אזי $f : A \rightarrow B$ הפיכה עבורה f, f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ כך $\gamma(t) = (1-t)a + tb$

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל- b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל- b אזי $[a, b] = \text{Im}(\gamma)$

קבוצה קמורה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a, b \in M. [a, b] \subseteq M$.

טענה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a), \overline{B}_r(a)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x, y \in M$ קיימת מסילה $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ המקיימת $\gamma(0) = x$ וכן $\gamma(1) = y$.
תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_{\leq \aleph_0}(\mathbb{R}^n)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\bigcup \mathcal{A} = M$.

תכונת דרבו: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת לכל $a, b \in A$ עבורן $f(a) < f(b)$ מתקיים $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ קשירה ותהא $f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט וירשטראס: תהא $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ אזי קיימים $x, y \in \mathcal{K}$ עבורם $f(\mathcal{K}) = [f(x), f(y)]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ המקיימת

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in \mathcal{M}. \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

טענה: תהא $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R}^m)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל \mathbb{R} אזי $v : L \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה לכל $a \in L$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\bullet (v(a) \geq 0) \wedge ((v(a) = 0) \iff (a = 0))$$

$$\bullet \text{הומוגניות: } v(\lambda a) = |\lambda| \cdot v(a)$$

$$\bullet \text{אי שיוויון המשולש (אש"מ): } v(a + b) \leq v(a) + v(b)$$

טענה: תהא $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c > 0$ עבורו $v(x) \leq c \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

טענה: תהא $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי $v \in C(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהא $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c > 0$ עבורו $v(x) \leq c \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

נורמות שקולות: $v, \eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a, b > 0$ המקיימים $a \cdot \eta \leq v \leq b \cdot \eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי $\|\cdot\|, v$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $v, \rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמות ותהא $x \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $(\rho(x^{(k)}) \rightarrow 0) \iff (v(x^{(k)}) \rightarrow 0)$.

נורמת ℓ_p : עבור $p \in \mathbb{N}_+$ נגדיר נורמה $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\|v\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_∞ : נגדיר נורמה $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $a \in (0, 1)$ אזי $\gamma'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $a \in (0, 1)$ אזי $\gamma'(a) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(a) \\ \vdots \\ \gamma'_m(a) \end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה קיימת $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ המקיימת $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$.

סימון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a \in \mathcal{U}$ אזי $f \in \mathcal{D}(a)$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f \in \mathcal{D}(a) \implies f \in C(a)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\text{grad} f(a) = [L]_{\text{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f(a) = \text{grad} f(a)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hx_i) - f(a)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\nabla f(a))_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a))$ קיימת לכל i $\nRightarrow f \in \mathcal{D}(a)$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ המקיימת $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $(f \in \mathcal{D}(a)) \iff (\forall i \in \{1 \dots m\}. f_i \in \mathcal{D}(a))$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\mathcal{D}_f(a) = \begin{pmatrix} -\nabla f_1(a) - \\ \vdots \\ -\nabla f_m(a) - \end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $(\mathcal{D}_f(a))_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהייה $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי

• אם $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $f \in C(a)$.

• אם $f, g \in \mathcal{D}(a)$ אזי $cf, f + g \in \mathcal{D}(a)$.

• $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \implies (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$.

• תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \implies (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום אזי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ וכן $\mathcal{D}_f \in C(\mathcal{U})$.

סימון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות אזי $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ אזי $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U})$ $\forall i \in [m]. \forall j \in [n]$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ עבורה $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U})$ $\forall i \in [m]. \forall j \in [n]$ אזי $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי $(f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)) \iff (\forall i \in [m]. \forall j \in [n]. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U}))$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \mathcal{D}_f(a) \cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום אזי $(\mathcal{U}$ קשירה מסילתית) $\iff (\mathcal{U}$ קשירה פוליגונית).

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$.

טענה: תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \implies (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$.

מסקנה: תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$.

סימון: תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $i \in \{1 \dots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ גזירה אזי $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהיו $i, j \in \{1 \dots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ גזירה אזי $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_j})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$.

משפט: תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ יהיו $i, j \in \{1 \dots n\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^1(\mathcal{U})$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

סימון: יהי $K \in \mathbb{N}^n$ אזי $|K| = \sum_{i=1}^n K_i$ וכן $\partial x^K = \partial x_1^{K_1} \dots \partial x_n^{K_n}$.

מסקנה: יהי $K \in \mathbb{N}^n$ תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_f \in C^k(\mathcal{U})$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{|K|} f}{\partial x^K}(a)$.

טענה: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\|Av\|_{\text{st}} \leq \|A\|_{\text{st}} \cdot \|v\|_{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ תחומים תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהייה $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ עבורן $f \in \mathcal{D}(a)$ וכן $g \in \mathcal{D}(f(a))$ אזי

$\mathcal{D}_{g \circ f}(a) = \mathcal{D}_g(f(a)) \cdot \mathcal{D}_f(a)$ וכן $g \circ f \in \mathcal{D}(a)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid (x \in \mathcal{U}) \wedge (f(x) = y)\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $c \in \mathbb{R}$ אזי $\Pi_c = \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) = c\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי

$$y - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i)$$

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $N_a = (-\nabla f(a), 1)$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a) \perp \Pi_{f(a)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ אזי

• נקודת מינימום מקומי: $a \in \mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה \mathcal{O} המקיימת $\forall x \in \mathcal{O}. f(x) \geq f(a)$.

• נקודת מקסימום מקומי: $a \in \mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה \mathcal{O} המקיימת $\forall x \in \mathcal{O}. f(x) \leq f(a)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f(a) = 0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי

• נקודת מינימום מקומי: $a \in \mathcal{U}$ עבורה לכל $i \in [m]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_i .

• נקודת מקסימום מקומי: $a \in \mathcal{U}$ עבורה לכל $i \in [m]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_i .

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_f(a) = 0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי $a \in \mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_f(a) = 0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $\frac{\partial^k f}{\partial x^V} a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{D}_{(a,b)}^k f = \sum_{|V|=k} \binom{k!}{V_1, \dots, V_n} \prod_{i=1}^n (a_i - b_i)^{V_i} \frac{\partial^k f}{\partial x^V}$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{D}_{(a,b)}^k f = \left(\sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^k$
משפט טיילור: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ עבורה $f \in C^{k+1}(\mathcal{U})$ תהא $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x \in \mathcal{O}$ אזי קיים $c \in [x, a]$ עבורו $f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \mathcal{D}_{(x,a)}^i f(a) + \frac{1}{(k+1)!} \mathcal{D}_{(x,a)}^{k+1} f(c)$
הסינא: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $(H_f)_{i,j} = f''_{x_i, x_j}$
טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c \in [x, a]$ עבורו $f(x) = f(a) + (x-a)^t H_f(c) (x-a)$

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ קריטית אזי

- $(H_f(a)) \Leftarrow$ (חיובית ממש) \Leftarrow (נקודת מינימום).
- $(H_f(a)) \Leftarrow$ (שלילית ממש) \Leftarrow (נקודת מקסימום).
- $(\det(H_f(a)) \neq 0) \wedge$ (לא אחד מהמקרים מלעיל) \Leftarrow (אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום תהא $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ קריטית אזי

- $((\det(H_f(a)) > 0) \wedge (f''_{x,x}(a) > 0)) \Leftarrow$ (נקודת מינימום).
- $((\det(H_f(a)) > 0) \wedge (f''_{x,x}(a) < 0)) \Leftarrow$ (נקודת מקסימום).
- $(\det(H_f(a)) \neq 0) \wedge$ (לא אחד מהמקרים מלעיל) \Leftarrow (אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ אזי $a \in \mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det(H_f(a)) \neq 0$

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום תהא $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a) \neq 0$ אזי קיימים $I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1 \in I_x$ וכן $a_2 \in I_y$ וקיימת $f \in C^1(I_x, I_y)$ עבורה לכל $(x, y) \in I_x \times I_y$ מתקיים $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום תהא $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a) \neq 0$ יהיו $I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1 \in I_x$ וכן $a_2 \in I_y$ ותהא $f \in C^1(I_x, I_y)$ עבורה לכל $(x, y) \in I_x \times I_y$ מתקיים $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$ אזי $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ על I_x

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום תהא $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a) \neq 0$ יהיו $I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1 \in I_x$ וכן $a_2 \in I_y$ ותהא $f \in C^1(I_x, I_y)$ עבורה לכל $(x, y) \in I_x \times I_y$ מתקיים $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$ אזי $f(x) \in C^k(I_x, I_y)$

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_{x_{n+1}}(a) \neq 0$ אזי קיימים $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}, I_y \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i \in [n]$ מתקיים $a_i \in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1} \in I_y$ וקיימת $f \in C^k(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, I_y)$ עבורה לכל $(x, y) \in (\prod_{i=1}^n I_{x_i}) \times I_y$ מתקיים $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_{x_{n+1}}(a) \neq 0$ יהיו $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}, I_y \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i \in [n]$ מתקיים $a_i \in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1} \in I_y$ ותהא $f \in C^1(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, I_y)$ עבורה לכל $(x, y) \in (\prod_{i=1}^n I_{x_i}) \times I_y$ מתקיים $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$ אזי $f(x) \in C^1(I_{x_1}, \dots, I_{x_n}, I_y)$ על $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$

סימון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ אזי $\mathcal{D}_f(a) = \begin{pmatrix} F'_x(a) & F'_y(a) \end{pmatrix}_{m \times (n+m)}$

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}, I_{y_1}, \dots, I_{y_m} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i \in [n]$ מתקיים $a_i \in I_{x_i}$ ולכל $j \in [m]$ מתקיים $a_{j+n} \in I_{y_j}$ וקיימת $f \in C^k(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, \prod_{j=1}^m I_{y_j})$ עבורה לכל $(x, y) \in (\prod_{i=1}^n I_{x_i}) \times (\prod_{j=1}^m I_{y_j})$ מתקיים $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a)$ הפיכה יהיו $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}, I_{y_1}, \dots, I_{y_m} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i \in [n]$ מתקיים $a_i \in I_{x_i}$ ולכל $j \in [m]$ מתקיים $a_{j+n} \in I_{y_j}$ ותהא $f \in C^k(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, \prod_{j=1}^m I_{y_j})$ עבורה לכל $(x, y) \in (\prod_{i=1}^n I_{x_i}) \times (\prod_{j=1}^m I_{y_j})$ מתקיים $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$ אזי $\mathcal{D}_f(x) = -F'_y(x, f(x))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$ על $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $\nabla F(a) \neq 0$ אזי משוואת המשטח המשיק לגרף ב- a הינו $\sum_{i=1}^n F'_{x_i}(a)(x_i - a_i) = 0$

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ עבורה $F(a) = 0$ וכן $F'_y(a)$ הפיכה אזי משוואת המשטח המשיק לגרף ב- a הינו $\sum_{i=1}^n F'_{x_i}(a)(x_i - a_i) = 0$

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ הפיכה עבורה $f^{-1} \in C^1(\mathcal{V}, \mathcal{U})$

דיפאומורפיזם C^k : יהיו $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ הפיכה עבורה $f^{-1} \in C^k(\mathcal{V}, \mathcal{U})$

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על \mathcal{O} .

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}(f(x)) = \mathcal{D}_f(x)^{-1}$ על \mathcal{O} .

טענה: יהיו $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $A \subseteq \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

$$\bullet (A \text{ פתוחה}) \iff (f(A) \text{ פתוחה}).$$

$$\bullet (A \text{ סגורה}) \iff (f(A) \text{ סגורה}).$$

$$\bullet (A \text{ קומפקטית}) \iff (f(A) \text{ קומפקטית}).$$

$$\bullet \text{ אם } \partial A \subseteq \mathcal{U} \text{ אזי } \partial(f(A)) = f(\partial A).$$

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום אזי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת לכל $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f(\tilde{\mathcal{U}})$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ עבורה $\text{rank}(\mathcal{D}_f(a)) = m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על \mathcal{O} .

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $g \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ אזי $a \in \mathcal{U}$ המקיימת $g(a) = 0$ וכן $\nabla f(a) \in \text{span}\{\nabla g_i(a)\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $g \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ המקיימת $g(a) = 0$ וכן $\{\nabla g_i(a)\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\text{sols}(g) \cap \mathcal{O}$ נקודה קריטית של f בתנאי $g = 0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $g \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ נגדיר $L \in C^1(\mathcal{U} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ כך $L(x_1 \dots x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1 \dots x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1 \dots x_n)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $g \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g = 0 \iff (a, \lambda)$ עבורה $\lambda \in \mathbb{R}^m$ נקודה קריטית של L .

דרגה של פונקציה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ אזי $\text{rank}(f(a)) = \text{rank}(\mathcal{D}_f(a))$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ עבורה $\forall x \in \mathcal{U}. \text{rank}(f(x)) = k$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a קיימת $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}$ סביבה של $f(a)$ קיימים דיפאומורפיזמים $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ וכן $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$ וקיימת $\mathcal{W} \subseteq \varphi(\mathcal{O})$ סביבה של $\varphi(a)$ עבורם $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ על \mathcal{W} .

הלמה של הדמר: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה קמורה של 0 יהי $p \geq 1$ ותהא $f \in C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ עבורה $f(0) = 0$ אזי קיימת $g \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ עבורה $g(0) = \nabla f(0)$ וכן $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x)$.

הלמה של מורס: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^3(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a וגם $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של 0 וכן דיפאומורפיזם $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$ המקיים $(f \circ g)(x) - f(a) = \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2$.

תיבה סגורה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $P_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j \leq x_j \leq b_j\}$.

תיבה מנוונת: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ עבורם $\exists i \in [n]. a_i = b_i$ אזי $P_{a,b}$.

חלוקה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ לכל $i \in [n]$ תהינה $\{t_i^0, \dots, t_i^{\ell_i}\}$ חלוקה של $[a_i, b_i]$ אזי $\{\prod_{i=1}^n [t_i^{m_i}, t_i^{m_i+1}] \mid \forall i \in [n]. m_i \in [\ell_i - 1]\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $V(P) = \text{Vol}(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $\{A_1, \dots, A_k\}$ חלוקה של P אזי $\text{Vol}(P) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(A_i)$.

הערה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ עבורם $P_{a,b}$ תיבה מנוונת אזי $\text{Vol}(P_{a,b}) = 0$.

סכום רימן: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi = \{A_1, \dots, A_k\}$ חלוקה ויהי $x^{(j)} \in A_j$ אזי $S(f, \Pi, \{x^{(i)}\}) = \sum_{j=1}^k f(x^{(j)}) \text{Vol}(A_j)$.

קוטר קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $d(M) = \sup_{x,y \in M} \|x - y\|$.

מדד העדינות: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi = \{A_1, \dots, A_k\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi) = \max_{i \leq k} d(A_i)$.

אינטגרליות רימן: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\int_P f(x) dx = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S(f, \Pi, \{x^{(j)}\})$.

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית רימן אזי $f \in R(P)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f \in R(P)$ אזי f חסומה על P .

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1, \dots, A_n\}$ חלוקה אזי $\bar{S}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{P_j} (f) \text{Vol}(P_j)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1, \dots, A_n\}$ חלוקה אזי $\underline{S}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{P_j} (f) \text{Vol}(P_j)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה ויהי $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי

$$\underline{S}(f, \Pi) \leq S(f, \Pi, \{x^{(i)}\}) \leq \bar{S}(f, \Pi)$$

טענה: תהא P תיבה תהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהינה $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ חלוקות אזי $\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \underline{S}(f, \Pi_2) \leq \bar{S}(f, \Pi_2) \leq \bar{S}(f, \Pi_1)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1, Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_2)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}(f) = \inf_{\Pi \text{ חלוקה}} \overline{S}(f, \Pi)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}(f) = \sup_{\Pi \text{ חלוקה}} \underline{S}(f, \Pi)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{\Sigma}(f, \Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה אזי $(f \in R(P)) \iff (\underline{I}(f) = \overline{I}(f))$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f \in R(P)$ חסומה אזי $\int_P f = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי $\lambda > 0$ אזי $\text{Vol}(P_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \text{Vol}(P_{a, b})$.

טענה: יהיו $P_1 \dots P_n$ תיבות עבורן לכל $i \neq j$ מתקיים $\text{int}(P_i) \cap \text{int}(P_j) = \emptyset$ וכן $\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי

$$\text{Vol}(\bigcup_{i=1}^n P_i) = \sum_{i=1}^n \text{Vol}(P_i)$$

מסקנה: יהיו $P_1 \dots P_n$ תיבות ותהא $P \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $\text{Vol}(P) \leq \sum_{i=1}^n \text{Vol}(P_i)$.

טענה: יהיו P_1, P_2 תיבות אזי $P_1 \cap P_2$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}(P \setminus \text{int}(P)) = 0$.

קבוצה זניחה: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E \subseteq \bigcup_{i=0}^\infty P_i$ וכן $\sum_{i=0}^\infty \text{Vol}(P_i) < \varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid E \text{ זניחה}\}$.

טענה: $\emptyset \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, יהי $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\{a\} \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=0}^\infty$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^\infty E_i \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(E \text{ זניחה}) \iff (\forall \varepsilon > 0$ קיימות תיבות $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $\text{int}(P_i) \subseteq E$ וכן $\sum_{i=0}^\infty \text{Vol}(P_i) < \varepsilon$).

מסקנה: תהא $E \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E \subseteq \bigcup_{i=0}^\infty \text{int}(P_i)$ וכן $\sum_{i=0}^\infty \text{Vol}(P_i) < \varepsilon$.

טענה: תהא $E \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ ותהא $A \subseteq E$ אזי $A \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה לא מנוונת אזי $P \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

מסקנה: תהא $M \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{int}(M) = \emptyset$.

טענה: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה ותהא $f \in C(P, \mathbb{R})$ אזי $\Gamma_f \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{n+1})$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ אזי $\Gamma_f \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{n+1})$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\{C_i\}_{i=0}^\infty$ בעלות אורך צלע 2^{-e_i} עבור $e_i \in \mathbb{N}$ עבורן לכל $i \neq j$ מתקיים

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^\infty C_i \text{ וכן } \text{int}(P_i) \cap \text{int}(P_j) = \emptyset$$

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1} \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, קבוצת קנטור זניחה.

תנודה של פונקציה בנקודה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $a \in A$ ותהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\omega(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, B_\delta(a) \cap A)$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $a \in A$ ותהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $(f \text{ רציפה על } a) \iff (\omega(f, a) = 0)$.

למה של קנטור: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית יהי $M > 0$ ותהא $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $\forall k \in K. \omega(f, k) \leq M$ אזי

$$\forall x \in K. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \omega(f, B_\delta(x) \cap K) < \omega_0 + \varepsilon$$

כמעט לכל: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי " ψ מתקיים כמעט על כל A " אם קיימת $E \subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים

$$\text{לכל } E \setminus A.$$

סימון: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $B_{f, \varepsilon} = \{x \in P \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$.

למה: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $B_{f, \varepsilon}$ קומפקטית.

למה: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי

$$\left\{ A \in \Pi \mid \left(A \cap B_{f, \frac{1}{k}} \neq \emptyset \right) \wedge \left(\omega(f, A) \geq \frac{1}{2k} \right) \right\}$$

קריטריון לבג לאינטגרליות רימן בתיבה: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה ותהא $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה אזי $(f \text{ רציפה כמעט על כל } P)$

$$\iff (f \in R(P)).$$

קבוצה מדידת ז'ורדן: $E \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה עבורה ∂E זניחה.

טענה: תהיינה $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי

$$\bullet \partial E_1 \text{ סגורה.}$$

$$\bullet \partial(E_1 \setminus E_2), \partial(E_1 \cup E_2), \partial(E_1 \cap E_2) \subseteq \partial E_1 \cup \partial E_2$$

סימון: $J(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid E \text{ ז'ורדן}\}$.

מסקנה: תהיינה $A, B \in J$ אזי $A \setminus B, A \cup B, A \cap B \in J$.

פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$ כד $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\chi_A \in C(\text{int}(A))$ וכן $\chi_A \in C(\mathbb{R}^n \setminus A)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $A \subseteq P$ חסומה ותהא $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $f \cdot \chi_A \in R(P)$ אזי

$$\int_A f = \int_P f \cdot \chi_A$$

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה תהיינה $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבות סגורות עבורן $A \subseteq P_1, P_2$ ותהא $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ אזי

$$(f \cdot \chi_A \in R(P_1)) \iff (f \cdot \chi_A \in R(P_2)) \bullet$$

$$\bullet \int_{P_1} f \cdot \chi_A = \int_{P_2} f \cdot \chi_A$$

מידה/נפח של תיבה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Vol}(A) = \int_A dx = V(A)$.

משפט: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהיינה $f, g \in R(A)$ אזי

$$\bullet \int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g \text{ וכן } af + bg \in R(A) \text{ אזי } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{נניח כי } f \geq 0 \text{ אזי } \int_A f \geq 0$$

$$\bullet \text{נניח כי } f \geq g \text{ אזי } \int_A f \geq \int_A g$$

$$\bullet \text{נניח כי } m \leq f \leq M \text{ אזי } m \text{Vol}(A) \leq \int_A f \leq M \text{Vol}(A)$$

טענה: תהיינה $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהא $f \in R(A) \cap R(B)$ אזי $f \in R(A \cap B)$ וכן $f \in R(A \cup B)$.

מסקנה: תהיינה $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$ עבורן $\text{Vol}(A \cap B) = 0$ אזי $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A \in J(\mathbb{R}^n)$ תחום ותהא $f \in C(A, \mathbb{R})$ אזי $\int_A f = f(c) \text{Vol}(A)$ $\exists c \in A$.

טענה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ ויהי $f \in R(A)$ אזי $|f| \in R(A)$ וכן $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

טענה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהיינה $f, g \in R(A)$ כמעט על כל A אזי $\int_A f = \int_A g$.

משפט: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\int_A f = \int_{\text{int}(A)} f = \int_{\bar{A}} f$.

טענה: תהיינה $A_1 \dots A_k \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\bigcup_{i=1}^k A_i, \bigcap_{i=1}^k A_i \in J(\mathbb{R}^n)$.

מסקנה: תהיינה $A_1 \dots A_k \in J(\mathbb{R}^n)$ עבורן לכל $i \neq j$ מתקיים $\text{Vol}(A_i \cap A_j) = 0$ אזי $\text{Vol}(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(A_i)$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $(A + a \in J(\mathbb{R}^n)) \iff (A \in J(\mathbb{R}^n))$.

מסקנה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}(A) = \text{Vol}(A + a)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu : J(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu([0, 1]^n) = 1$ אזי $\nu = \text{Vol}$.

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה אזי $T(A)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $T(\partial A) = \partial(T(A))$.

מסקנה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ זניחה וחסומה אזי $T(E)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Vol}(T(A)) = \text{Vol}(A)$ וכן $T(A) \in J(\mathbb{R}^n)$.

משפט פוביני: תהיינה $P \subseteq \mathbb{R}^n, Q \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f \in R(P \times Q)$ עבורה $\iint_{P \times Q} f$ קיים אזי

$$\iint_{P \times Q} f = \int_P \int_Q f(x, y) dy dx = \int_Q \int_P f(x, y) dx dy = \int_P \int_Q f(x, y) dy dx$$

מסקנה: תהיינה $P \subseteq \mathbb{R}^n, Q \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f \in R(P \times Q)$ אזי $\int_Q \int_P f(a, y) dy$ קיים כמעט לכל $a \in P$.

מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_1, \varphi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ תהא $A = \{(x, y) \in B \times \mathbb{R} \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ ותהא $f \in R(A)$ אזי

$$\int_A f = \int_B \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

מסקנה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ תהא $A \subseteq \prod_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\}) \in J(\mathbb{R}^{n-1})$ כמעט לכל $y \in P_n$ ובפרט

$$\text{Vol}(A) = \int_{P_n} \text{Vol}(A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\})) dy$$

שטח: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $S(D) = \iint_D dx dy$.

מסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי $m(D) = \iint_D \rho(x, y) dx dy$.

מומנט מסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי

$$\bullet M_x(D) = \iint_D y \cdot \rho(x, y) dx dy \text{ מומנט מסה לפי ציר } x$$

$$\bullet M_y(D) = \iint_D x \cdot \rho(x, y) dx dy \text{ מומנט מסה לפי ציר } y$$

מרכז המסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_y(D)}{m(D)}, \frac{M_x(D)}{m(D)}\right)$.

נפח: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ אזי $V(E) = \iiint_E dx dy dz$.

מסה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי $m(E) = \iiint_E \rho(x, y, z) dx dy dz$.

מומנט מסה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי

$$\bullet M_{xy}(E) = \iiint_E z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \text{ מומנט מסה לפי המישור } \{z = 0\}$$

• מומנט מסה לפי המישור $\{y=0\}$: $M_{xz}(E) = \iiint_E y \cdot \rho(x, y, z) \, dx dy dz$

• מומנט מסה לפי המישור $\{x=0\}$: $M_{yz}(E) = \iiint_E x \cdot \rho(x, y, z) \, dx dy dz$

מרכז המסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$

מקבילון: יהיו $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Par}(v_1 \dots v_n) = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \forall i \in [n]. \alpha_i \in [0, 1]\}$

טענה: יהיו $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ אזי מתקיים $\text{Vol}(\text{Par}(v_1 \dots v_n)) = \left| \det \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \right|$

תומך: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\}}$

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם ותהא $E \subseteq A$ אזי

• $(E \text{ זניחה}) \iff (\varphi(E) \text{ זניחה}).$

• $((\text{Vol}(\varphi(E)) = 0) \wedge (\overline{\varphi(E)} \subseteq B)) \iff ((\text{Vol}(E) = 0) \wedge (\overline{E} \subseteq A))$

• $((\varphi(E) \text{ זורדן}) \wedge (\overline{\varphi(E)} \subseteq B)) \iff ((E \text{ זורדן}) \wedge (\overline{E} \subseteq A))$

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R(B)$ אזי $(f \circ \varphi) | \det \mathcal{D}_\varphi | \in R(A)$

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R(B)$ אזי $(f \circ \varphi) | \varphi' | \in R(A)$ ובפרט

$$\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\varphi'| \, dt$$

דיפאומורפיזם אלמנטרי: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות אזי $\varphi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם עבורו קיימת $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת

$$\varphi(x) = (x_1, \dots, \psi(x_i), \dots, x_n)$$

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא $f \in R(B)$ אזי

$$\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) | \det \mathcal{D}_\varphi(t) | \, dt$$

טענה: תהיינה $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהיו $\varphi: B \rightarrow C, \psi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם אלמנטריים ותהא $f \in R(A)$ אזי

$$\int_C f = \int_A f((\varphi \circ \psi)(t)) | \det \mathcal{D}_{\varphi \circ \psi}(t) | \, dt$$

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם ויהי $a \in A$ אזי קיימת $\mathcal{O} \subseteq A$ סביבה של a וכן

$$\psi_1 \dots \psi_m \text{ דיפאומורפיזם אלמנטריים עבורם } \varphi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_m \text{ על } \mathcal{O}$$

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R(B)$ אזי

$$\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) | \det \mathcal{D}_\varphi(t) | \, dt$$

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם תהא $E \subseteq A$ עברה $\overline{E} \subseteq A$ ותהא $f \in R(\varphi(E))$ אזי

$$\int_{\varphi(E)} f = \int_E f(\varphi(t)) | \det \mathcal{D}_\varphi(t) | \, dt \text{ ובפרט } (f \circ \varphi) | \det \mathcal{D}_\varphi | \in R(E)$$

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi: A \rightarrow B$ תהיינה $E \subseteq A, S \subseteq B$ זניחות עבורן $A \setminus E, S \setminus B$ פתוחות וכן

$$\varphi(A \setminus E) = S \setminus B \text{ כמו כן } \varphi \text{ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על } A \setminus E \text{ ותהא } f \in R(S) \text{ אזי } (f \circ \varphi) | \det \mathcal{D}_\varphi | \in R(A \setminus E)$$

$$\text{ובפרט } \int_B f = \int_{A \setminus E} f(\varphi(t)) | \det \mathcal{D}_\varphi(t) | \, dt$$

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi: A \rightarrow B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E \subseteq A, S \subseteq B$ זניחות עבורן

$$A \setminus E, S \setminus B \text{ פתוחות וכן } \varphi(A \setminus E) = S \setminus B \text{ כמו כן } \varphi \text{ דיפאומורפיזם על } A \setminus E \text{ ותהא } f \in R(S) \text{ אזי } (f \circ \varphi) | \det \mathcal{D}_\varphi | \in R(A)$$

$$\text{ובפרט } \int_B f = \int_A f(\varphi(t)) | \det \mathcal{D}_\varphi(t) | \, dt$$

קואורדינטות קוטביות/פולריות: יהי $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ אזי $(\rho, \phi) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi]$ עבורן $x = \rho \cos(\phi)$ וכן $y = \rho \sin(\phi)$

טענה: תהא $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי $| \det \mathcal{D}_\varphi(t) | = \rho$

קואורדינטות גליליות: יהי $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ אזי $(\rho, \phi, z) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi] \times \{z\}$ עבורן $x = \rho \cos(\phi)$ וכן $y = \rho \sin(\phi)$

טענה: תהא $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי $| \det \mathcal{D}_\varphi(t) | = \rho$

קואורדינטות כדוריות: יהי $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ אזי $(\rho, \phi, \theta) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ עבורן $x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$ וכן $z = \rho \cos(\theta)$

$$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$$

טענה: תהא $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי $| \det \mathcal{D}_\varphi(t) | = \rho^2 \sin(\theta)$

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר z בקואורדינטות גליליות אזי $\text{Vol}(E) = 2\pi \iint_S \rho \, d\rho \, dz$

מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ עבורן $f \leq g$ תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר x אזי

$$\text{Vol}(E) = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) \, dx$$

משפט פאפוס: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ יהי $c \in \mathbb{R}^2$ מרכז המסה של S ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}(E) = 2\pi R_c \cdot \text{Vol}(S)$

באשר R_c רדיוס סיבוב c .

מיצוי זורדן: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(E_k)_{k=1}^\infty$ סדרת קבוצות מדידות זורדן עולה עבורה $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = E$

טענה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ ויהי $(E_k)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E אזי $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(E_k) = \text{Vol}(E)$.

מסקנה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ יהי $(E_k)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E ותהא $f \in R(E)$ אזי $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f = \int_E f$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ עבורם לכל $(E_k)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E מתקיים $f \in R(E_k)$ וכן $\int_E f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$ קיים ושווה אזי $\int_E f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$.

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן $(E_k)_{k=1}^\infty$ של E המקיימת $f \in R(E_k)$ וכן $\int_E f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$ קיים אזי $\int_E f$ מתכנס.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt \right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$.

משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהינה $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ עבורן $|f| \leq g$ וכן $\int_E g$ מתכנס אזי $\int_E f$ מתכנס. $(f \in R(A)) \iff (g \in R(A))$.

מסקנה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $(\int_E |f|) \iff (\int_E f)$ מתכנס.

טענה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהא $f \in R(E)$ אזי $\int_A f > \frac{1}{2} \int_E |f| - \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0, \forall A \subseteq E$.

משפט: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי-רציפות זניחה אזי $\int_E f$ מתכנס $\iff \int_E |f|$ מתכנס.

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהינה $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ עבורן $\int_E f, \int_E g$ מתכנסים אזי $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.

הערה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה E בעלת מיצוי ז'ורדן.

משפט: תהינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $\varphi: A \rightarrow B$ דיפאומורפיזם ותהא $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה לכל $E \subseteq B$ ז'ורדן וקומפקטית מתקיים $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| dt$ וכן $\int_B f$ מתכנס אזי $\int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| dt$ מתכנס.

פונקציית גאמא: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\Gamma(n) = (n-1)!$.

טענה: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma(t)$ מתכנס.

פונקציית בטא: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t, s) = \int_0^\infty x^{t-1} (1-x)^{s-1} dx$.

טענה: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t, s)$ מתכנס.

טענה: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ ותהא $t_n \in [c, d]^\mathbb{N}$ עבורה $t_n \rightarrow \ell$ אזי $f(x, t_n) \xrightarrow{u} f(x, \ell)$ $\forall x \in [a, b]$.

טענה: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ אזי $\int_a^b f(x, t) dx \in C([c, d])$.

טענה: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a, b] \times [c, d])$ אזי $\int_a^b f(x, t) dx \in C^1([c, d])$ וכן $\frac{d}{dt} \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$.

משפט: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a, b] \times [c, d])$ ותהינה $\alpha, \beta \in C^1([c, d], [a, b])$ אזי מתקיים $\frac{d}{dt} \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx \right) = f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$.

מסקנה: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t, s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$.

סימפלקס: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i \in [n]. x_i \geq 0) \wedge (\sum_{i=1}^n x_i \leq 1)\}$.

טענה נוסחת דירכלה: יהיו $p_1 \dots p_n > 0$ אזי $\int_{\Delta_n} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1} \right) dx_1 \dots dx_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n p_i)}$.

מסקנה: יהיו $p_1 \dots p_n > 0$ ויהיו $\gamma_1 \dots \gamma_n > 0$ אזי $\int_{\sum x_i^{\gamma_i} \leq 1} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1} \right) dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \gamma_i} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{p_i}{\gamma_i})}{\Gamma(1 + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\gamma_i})}$.

טענה: יהיו $p_1 \dots p_n > 0$ ותהא $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד אזי

$\int_{\Delta_n} \psi(x_1 \dots x_n) \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1} \right) dx_1 \dots dx_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n p_i)} \int_0^1 \psi(u) u^{(\sum p_i)-1} du$.