פעולה בינארית: פונקציה $*:A\times A\to A$ ונסמן $a*b:=*\left(\left\langle a,b\right\rangle \right)$.

אגודה: תהא G קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $\left\langle G,*\right\rangle$ המקיימת

- אסוציטיביות/קיבוציות: $\forall a,b,c\in A.a*\left(b*c\right)=\left(a*b\right)*c$.

מונואיד: אגודה $\left\langle G,*\right\rangle$ המקיימת

- איבר יחידה: $\exists e\in A.\forall g\in G.e*g=g*e=g$.

סימון: איבר יחידה של $\left\langle G,*\right\rangle$ הוא e_{G}.

חבורה: מונואיד $\left\langle G,*\right\rangle$ המקיימת

- איבר הופכי/נגדי: $\forall g\in G.\exists h\in A.g*h=h*g=e_{G}$.

סימון: איבר הופכי של a הוא a^{-1}.

טענה: איבר יחידה הוא יחיד, איבר הופכי הוא יחיד.

חזקה: $a^{n}=\begin{cases} a*a^{n-1} & n>0\\ e_{G} & n=0\\ a^{-1}*a^{n+1} & n<0 \end{cases}$.

טענה: $\left(a^{n}\right)^{k}=a^{nk}$, $a^{n+k}=a^{n}\cdot a^{k}$.

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: $\forall a,b\in A.a*b=b*a$.

הגדרה: $GL_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ היא קבוצת המטריצות ההפיכות ב־$M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$.

טענה: $\left\langle GL_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right\rangle$ חבורה לא אבלית.

הגדרה: נגדיר $S_{A}=A\underset{onto}{\overset{1-1}{\to}}A$, נסמן $S_{n}=S_{\left[n\right]}$.

טענה: $\left\langle S_{n},\circ\right\rangle$ חבורה לא אבלית.

סדר: תהא G חבורה סופית אזי $o\left(G\right)=\text{ord}\left(G\right)=\left|G\right|$.

הגדרה: יהיו $\left\langle G,\cdot\right\rangle ,\left\langle H,\cdot\right\rangle$ חבורות אזי $\left\langle G\times H,\cdot\right\rangle$ באשר $\left\langle g_{1},h_{1}\right\rangle \cdot\left\langle g_{2},h_{2}\right\rangle =\left\langle g_{1}g_{2},h_{1}h_{2}\right\rangle$.

הגדרה: $\mathbb{Z}_{n}=\left\{ 0,\ldots,n-1\right\}$.

טענה: $\left\langle \mathbb{Z}_{n},+\right\rangle$ חבורה באשר $a+b=a+b\mod n$.

חבורת קליין: $\left\langle \mathbb{Z}_{2}\times\mathbb{Z}_{2},+\right\rangle$.

טענה: $\forall a,b,c\in G.a*b=a*c\implies b=c$.

חבורה ציקלית/מעגלית: חבורה G המקיימת $\exists g\in G.G=\left\{ g^{n}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

טענה: $\mathbb{Z}_{n}$ ציקלית.

סימון: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\left\langle g\right\rangle =\left\{ g^{n}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

טענה: $\left\langle \left\langle g\right\rangle ,\cdot_{\upharpoonright_{\left\langle g\right\rangle }}\right\rangle$ חבורה.

סדר: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $o\left(g\right)=\text{ord}\left(g\right)=\min\left(n\in\mathbb{N}_{+}\mid g^{n}=e\right)$.

טענה: $\text{ord}\left(g\right)=\left|\left\langle g\right\rangle \right|$.

הגדרה: יהיו G,H חבורות

- הומומורפיזם: $\varphi:G\to H$ המקיימת $\varphi\left(xy\right)=\varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right)$.
- מונומורפיזם/שיכון: $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם חח"ע.
- אפימורפיזם: $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם על.
- איזומורפיזם: $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם הפיך.
- אוטומורפיזם: איזומורפיזם עבורו $G=H$.

סימון: $G\hookrightarrow H$ קבוצת השיכונים בקבוצה $G\to H$.

הגדרה: $Aut\left(G\right)$ קבוצת האוטומורפיזם בקבוצה $G\to G$.

טענה: $\left\langle Aut\left(G\right),\circ\right\rangle$ חבורה.

סימון: נניח כי G,H חבורות איזומורפיות אזי $G\cong H$.

טענה: $\cong$ הוא יחס שקילות.

טענה: אם $G\cong H$ אזי (G ציקלית) $\iff$ (H ציקלית).

הגדרה: תהא $\left\langle G,*\right\rangle$ חבורה אזי $\left\langle G^{op},\cdot\right\rangle$ חבורה באשר $g\cdot h=h*g$.

טענה: $G\cong G^{op}$.

טענה: יהי φ הומומורפיזם אזי ($\varphi\left(e\right)=e$)$\wedge$($\varphi\left(g^{-1}\right)=\varphi\left(g\right)^{-1}$).

תת חבורה: תהא $\left\langle G,*\right\rangle$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי החבורה $\left\langle H,*_{\restriction_{H}}\right\rangle$.

סימון: אם H תת חבורה של G אזי $H\leq G$.

בוחן תת חבורה: תהא G חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי $H\leq G$ אמ"מ

- $e\in H$
- $\forall a,b\in H.ab\in H$.
- $\forall a\in H.a^{-1}\in H$.

למה: $e_{G}=e_{H}\implies H\leq G$.

טענה: $G\leq G$, $\left\{ e_{G}\right\} \leq G$.

טענה: יהיו G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי $\mathrm{Im}\left(\varphi\right)\leq H$.

הגדרה: תהא G חבורה יהי $g\in G$ ויהיו $A,B\subseteq G$

- מחלקה שמאלית: $gA=\left\{ ga\mid a\in A\right\}$.
- מחלקה ימנית: $Ag=\left\{ ag\mid a\in A\right\}$.
- $AB=\left\{ ab\mid a\in A\wedge b\in B\right\}$.
- $A^{-1}=\left\{ a^{-1}\mid a\in A\right\}$.

טענה: יהיו $H\leq G$ חבורות אזי $HH=H$, $H^{-1}=H$, $\forall h\in H.hH=Hh=H$.

הצמדה: יהיו $H\leq G$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $gHg^{-1}\leq G$.

סימון: $H^{g}=gHg^{-1}$.

למה: יהיו $H\leq G$ ויהיו $g_{1},g_{2}\in G$ התב"ש

- $g_{1}H=g_{2}H$.
- $g_{1}H\subseteq g_{2}H$.
- $g_{1}H\cap g_{2}H\neq\varnothing$.
- $g_{1}\in g_{2}H$.
- $g_{2}^{-1}g_{1}\in H$.

מנה: $G/H=\left\{ gH\mid g\in G\right\}$.

אינדקס: $\left[G:H\right]=\left|G/H\right|$.

משפט לגראנז': יהיו $H\leq G$ חבורות סופיות אזי $\left|G\right|=\left|H\right|\cdot\left[G:H\right]$.

מסקנה: $\left|H\right|\mid\left|G\right|$, $\left[G:H\right]\mid\left|G\right|$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g\in G$ אזי $\mathrm{ord}\left(g\right)\mid\mathrm{ord}\left(G\right)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי ($\operatorname{ord}(G)$ ראשוני) $\Longleftarrow$ (G ציקלית).

מסקנה: תהא G חבורה מסדר p ראשוני אזי $G \cong \mathbb{Z}_p$.

טענה: אם G ציקלית אינסופית אזי $G \cong \mathbb{Z}$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי חבורה H המקיימת $\forall g \in G.gH = Hg$.

סימון: אם H תת חבורה נורמלית של G אזי $H \lhd G$.

למה: התב"ש

- $N \lhd G$.
- $\forall g \in G.gNg^{-1} = N$.
- $\forall g \in G.gNg^{-1} \subseteq N$.

טענה: אם $G \lhd N$ אזי $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ מוגדרת היטב.

חבורת המנה: אם $N \lhd G$ אזי $\langle G/H, \cdot \rangle$ חבורה.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי ($H \leq G$) $\iff$ ($H \lhd G$).

גרעין: יהיו G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.

טענה: $\ker(\varphi) \lhd G$.

טענה: יהי φ הומומורפיזם אזי (φ מונומורפיזם) $\iff$ ($\ker(\varphi) = \{e\}$).

טענה: יהיו $H \leq G$ חבורות אזי $(H \lhd G) \implies ([G : H] = 2)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\left(\bigcap_{i=1}^n N_i \lhd G\right) \implies (\forall i \in [n].N_i \lhd G)$.

טענה: יהיו $H \leq G$, $N \lhd G$ אזי $(HN \leq G) \wedge (NH \leq G)$.

מסקנה: יהיו $N, H \lhd G$ אזי $HN \lhd G$.

טענה: יהיו $H_1, H_2 \leq H$ סופיות אזי $|H_1H_2| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|}$.

משפט האיזומורפיזם הראשון: יהי $\varphi : G \to K$ הומומורפיזם אזי $G/\ker(\varphi) \cong \operatorname{Im}(\varphi)$.

הגדרה: $C = \{e^{2\pi ix} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

טענה: $\langle C, \cdot \rangle$ חבורה.

הגדרה: יהי $\langle A, * \rangle$ מונואיד אזי $A^\times = \{a \in A \mid \exists h \in A.a * h = h * a = e_A\}$.

מסקנה: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C$, $\mathbb{C}^\times/C = \mathbb{R}^\times$.

הגדרה: $SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid \det(A) = 1\}$.

טענה: $SL_n(\mathbb{R}) \lhd GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times$.

ההעתקה הקנונית: יהיו $N \lhd G$ חבורות אזי $\pi : G \to G/N$ המוגדרת $\pi(g) = gN$.

טענה: π אפימורפיזם.

משפט ההומומורפיזם: יהי $\varphi : H \to H$ הומומורפיזם ותהא $N \leq \ker(\varphi)$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi^* : G/N \to H$ המקיים $\varphi^* \circ \pi = \varphi$.

מסקנה: $(\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Im}(\varphi^*)) \wedge$($\varphi^*$ חח"ע) $\iff$ ($\ker(\varphi) = N$).

משפט האיזומורפיזם השני: יהיו G, H, N חבורות המקיימות $H \leq G$, $N \lhd G$, $HN \lhd G$ אזי $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

טענה: יהיו G, H, N חבורות המקיימות $H \leq G$, $N \lhd G$ אזי $H \cap N \lhd H$.

תת חבורה יוצרת: תהא G חבורה ותהא $A \subseteq G$ אזי $\langle A \rangle = \{e\} \cup \bigcup_{n=0}^\infty \left\{\prod_{i=1}^n a_i \mid a \in (A \cup A^{-1})^n\right\}$.

טענה: $\langle A \rangle$ היא תת חבורה.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת $A \subseteq G$ סופית המקיימת $\langle A \rangle = G$.

מחזור/חישוקון/ציקלוס באורך k : תמורה π המקיימת $\pi\left(b\right)=\begin{cases} b & b\notin\left\langle a_{1},\dots,a_{k}\right\rangle \\ a_{\left(\iota i\in\left[k\right].b=a_{i}\right)+1\mod k} & else \end{cases}$.

סימון : $\pi=\left(a_{1}\dots a_{k}\right)$.

חילוף/היפוך//חישוקון : מחזור מאורך 2.

למה : תהא $\sigma\in S_{n}$ אזי קיימים ויחידים $\left\{ \pi_{1}\dots\pi_{r}\right\}$ מחזורים זרים מאורך גדול מ־1 המקיימים $\sigma=\prod_{i=1}^{r}\pi_{i}$.

טענה : תהא $\sigma\in S_{n}$ אזי קיימים $\left\{ \pi_{1}\dots\pi_{r}\right\}$ חילופים המקיימים $\sigma=\prod_{i=1}^{r}\pi_{i}$.

משפט : נניח כי $\prod_{i=1}^{m}p_{i}=\prod_{i=1}^{\ell}\pi_{i}$ בעבור p_{i},π_{i} חילופים אזי $\ell=m\mod 2$.

סימון : תהא $\sigma\in S_{n}$ מכפלה של k חילופים אזי $\text{sgn}\left(\sigma\right)=\text{sign}\left(\sigma\right)=\left(-1\right)^{k}$.

טענה : $\text{sign}:S_{n}\to\left\{ \pm1\right\}$ הומומורפיזם.

תמורה זוגית/איזוגית : תהא $\sigma\in S_{n}$ אזי ($\text{sign}\left(\sigma\right)=1\iff\sigma$ זוגית)$\wedge$($\text{sign}\left(\sigma\right)=-1\iff\sigma$ איזוגית).

סימון : $A_{n}=\left\{ \sigma\in S_{n}\mid\text{sign}\left(\sigma\right)=1\right\}$.

טענה : $A_{n}\lhd S_{n}$, $\left|A_{n}\right|=\frac{\left|S_{n}\right|}{2}$.

מסקנה : $\left[S_{n}:A_{n}\right]=2$, $S_{n}/A_{n}\cong\left\{ \pm1\right\}$.

טענה : יהיו $G\lhd N$ חבורות ותהא $G\le H\le N$ חבורה אזי ($N\lhd H$)$\wedge$($H/N\le G/N$).

משפט האיזומורפיזם השלישי : יהיו $G\lhd N$ חבורות חבורות אזי $\varphi:\left\{ H\mid N\le H\le G\right\} \to\left\{ H\mid H\le G/N\right\}$ המוגדרת $\varphi\left(H\right)=H/N$ איזומורפיזם.

מסקנה : יהיו $G\lhd N$ חבורות ויהיו $N\le A_{1}\dots A_{n}\le G$ חבורות

- $A_{1}\le A_{2}\iff A_{1}/N\le A_{2}/N$.
- $\bigcap_{i=1}^{n}\left(A_{i}/N\right)=\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_{i}\right)/N$.
- $A_{1}\lhd A_{2}\iff A_{1}/N\lhd A_{2}/N$.
- $A_{1}\lhd A_{2}\implies{}^{\left(A_{2}/N\right)}/_{\left(A_{1}/N\right)}\cong A_{2}/A_{1}$.

הלמה של צנהאוס/למת הפרפר : יהיו $A_{1}\lhd A\le G$, $B_{1}\lhd B\le G$

- $A_{1}\left(A\cap B_{1}\right)\lhd A_{1}\left(A\cap B\right)\le G$.
- $B_{1}\left(A\cap B\right)/B_{1}\left(A_{1}\cap B\right)\cong A_{1}\left(A\cap B\right)/A_{1}\left(A\cap B_{1}\right)$.

תת חבורת האלכסון : תהא G חבורה אזי $\Delta=\left\{ \left\langle g,g\right\rangle \mid g\in G\right\}$.

טענה : $\Delta\cong G$, ($\Delta\lhd G^{2}$) $\iff$ (G אבלית).

קומוטטור : תהא G חבורה ויהיו $g,h\in G$ אזי $\left[g,h\right]=ghg^{-1}h^{-1}$.

טענה : g,h מתחלפים $\iff\left[g,h\right]=e$.

תת חבורת הקומוטטור : תהא G חבורה אזי $G'=\left\{ \left[g,h\right]\mid g,h\in G\right\}$.

טענה : $G'\lhd G$.

טענה : יהיו $G\lhd N$ חבורות אזי (G/N אבלית) $\iff$ ($G'\le N$).

טענה : יהיו $H\le G$ חבורות סופיות באשר H היחידה בעלת סדר $\left|H\right|$ אזי $H\lhd G$.

המרכז של חבורה : תהא G חבורה אזי $Z\left(G\right)=\left\{ g\in G\mid\forall h\in G.hg=gh\right\}$.

טענה : $Z\left(G\right)\lhd G$.

המרכז של איבר : תהא G חבורה ויהי $a\in G$ אזי $C_{G}\left(a\right)=\left\{ g\in G\mid aga=g\right\}$.

טענה : $C_{G}\left(a\right)\le G$.

מסקנה : $Z\left(G\right)=G\iff G$ אבלית $\iff G'=\left\{ e\right\}$.

הנורמליזטור/המשמר: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $N_G\left(g\right)=\left\{h\in G\mid hgh^{-1}=g\right\}$.

טענה: $N_G\left(g\right)\le G$.

הנורמליזטור/המשמר של חבורה: יהיו $H\le G$ חבורות אזי $N_G\left(H\right)=\left\{g\in G\mid gHg^{-1}=H\right\}$.

טענה: $a\in Z\left(G\right)\iff N_G\left(a\right)=G$.

פעולה משמאל: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $\pi:G\times X\to X$ המקיימת

- $\pi\left(g_1g_2,x\right)=\pi\left(g_1,\pi\left(g_2,x\right)\right)$.
- $\pi\left(e,x\right)=x$.

סימון: $\pi\left(g,x\right)=g*x$.

הגדרה: תהא G פועלת על X אזי $x_1\sim x_2\iff\exists g\in G.g*x_1=x_2$.

טענה: $\sim$ יחס שקילות על X.

הגדרה: מחלקת השקילות של $\sim$ נקראת מסלול-G.

תת חבורת המיצב של x: תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $G_x=\left\{g\in G\mid g*x=x\right\}$.

למה: נניח כי G פועלת על X

- $G_x\le G$.
- $g_2^{-1}g_1\in G_x\iff g_1*x=g_2*x$.

אורך המסלול של x: תהא G חבורה הפועלת על X אזי $\left[G:G_x\right]=\left|\left[x\right]_\sim\right|$.

למת האיפיון לתת חבורות של חבורות ציקליות: תהא $G=\left\langle a\right\rangle$ חבורה ציקלית מסדר n יהי $d|n$ אזי $\left\langle a^{\frac{n}{d}}\right\rangle$ תת החבורה היחידה של G מסדר d.

מסקנה: תהא G חבורה הפועלת על X סופית ותהא $\left\{x_1,\ldots,x_n\right\}$ מערכת נציגים מסלולי G אז $|X|=\sum_{i=1}^n\left[G:G_{x_i}\right]$.

מחלקות צמידות: תהא G חבורה סופית אזי מחלקת השקילות של פעולת ההצמדה של G על עצמה.

משוואת המחלקים: תהא $\left\{x_1\ldots x_n\right\}$ מערכת נציגים למחלקות הצמידות אזי $|G|=|Z\left(G\right)|+\sum_{i=1}^n\left[G:C_G\left(x_i\right)\right]$.

טענה: תהא G חבורה הפועלת על X אזי $\varphi:G\to S_X$ המוגדרת $\varphi\left(g\right)\left(x\right)=\pi\left(g,x\right)$ הומומורפיזם.

מסקנה: יהיו $H\le G$ חבורות נניח כי $\left[G:H\right]=n<\infty$ וגם $K=\bigcap_{g\in G}gHg^{-1}$

- $K\lhd G$.
- $K\le H$.
- G/K איזומורפית לתת חבורה של S_n.
- $(G$ סופית$)\wedge(|G|\nmid n!)\implies(K\neq\{e\})$.

חבורה פשוטה: חבורה G כך שכל התת חבורות הנורמליות שלה הן $G,\left\{e\right\}$.

מסקנה: יהיו $H\le G$ חבורות ההיח כי $|G|\nmid\left[G:H\right]!$ אזי G אינה פשוטה.

למה: A_n נוצרת על ידי המחזורים מאורך 3 ב־S_n.

טענה: יהי $n\ge5$ אם $N\lhd A_n$ מכילה מחזור מאורך 3 אזי $N=A_n$.

טענה: יהי $n\ge5$ אם $\left\{e\right\}\neq N\lhd A_n$ אזי יש מחזור מאורך 3 ב־N.

משפט: יהי $n\ge5$ אזי A_n פשוטה.

משפט קיילי: תהא G חבורה סופית מסדר n אזי G איזומורפית לתת חבורה של S_n.

מכפלה ישרה פנימית: תהא G חבורה אזי $G_1\ldots G_n$ חבורות המקיימות

- $G_i\lhd G$.
- $G_i\cap G_j=\left\{e\right\}$.

- $\prod_{i=1}^{n}G_i=G$.

סימון : אם $G_1\ldots G_n$ מכפלה ישרה פנימית של G אזי $G=G_1\oplus\ldots\oplus G_n=G_1\cdot\ldots\cdot G_n$.

מכפלה ישרה חיצונית : יהיו $G_1\ldots G_n$ חבורות אזי $G_1\times\ldots\times G_n$.

טענה : מכפלה ישרה עם פעולה איבר איבר היא חבורה.

משפט : תהא G חבורה ויהיו $G_1\ldots G_n\le G$ חבורות התב"ש

-
  - $G=\langle G_1,\ldots,G_n\rangle$.
  - $\forall i\in[n].G_i\lhd G$.
  - $\forall i\in[n].G_i\cap\langle G_j\mid j\neq i\rangle=\{e\}$.
-
  - $G=\langle G_1,\ldots,G_n\rangle$.
  - $\forall i\neq j.\forall x\in G_j.\forall y\in G_i.xy=yx$.
  - $\prod_{i=1}^{n}x_i=\prod_{i=1}^{n}y_i$ באשר $x_i,y_i\in G_i$ אזי $x_i=y_i$.
- $G\cong G_1\times\ldots\times G_n$.

מסקנה : (מכפלה ישרה פנימית) $\cong$ (מכפלה ישרה חיצונית).

טענה : תהא G חבורה סופית ויהיו $G_1\ldots G_n\lhd G$ חבורות בעלי סדרים זרים המקיימים $|G|=\prod_{i=1}^{n}|G_i|$ אזי $G=\langle G_1,\ldots,G_n\rangle$.

מסקנה : יהי $m\in\mathbb{N}_+$ ונניח כי $m=\prod_{i=1}^{k}p_i^{n_i}$ פירוק לראשוניים אזי $\mathbb{Z}_m=\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}}\cdot\ldots\cdot\mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$.

סדרה נורמלית מאורך m : תהא G חבורה סופית אזי $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ המקיימת $\{e\}=G_0\lhd\ldots\lhd G_m=G$.

סדרות שקולות : $\{G_i\}_{i=0}^{m}$, $\{H_i\}_{i=0}^{m}$ סדרות נורמליות של G המקיימות $\exists\sigma\in S_n.\forall i\in[n].G_i/G_{i-1}=H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)-1}$.

עידון : תהא $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ סדרה אזי סדרה $\{H_i\}_{i=0}^{n}$ המקיימת $\forall i\in\{0,\ldots,m\}.\exists j\in\{i,\ldots,n\}.G_i=H_j$.

משפט שרייר : לכל שתי סדרות נורמליות של אותה חבורה קיימים עידונים שקולים.

מסקנה : לכל שתי סדרות נורמליות של אותה חבורה קיימים עידונים שקולים ללא חזרות.

סדרת הרכב : תהא G חבורה אזי סדרה נורמלית ללא חזרות שכל עידון שלה מכיל חזרות.

משפט ז'ורדן הלדר : תהא G חבורה סופית אזי כל שתי סדרות הרכב של G שקולות.

נורמלית מקסימלית : תהא G חבורה אזי $G\neq H\lhd G$ עבורה $R\lhd H\implies R\lhd G$.

למה : תהא $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ סדרה נורמלית ללא חזרות של G התב"ש

- $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ סדרת הרכב.
- G_{i-1} נורמלית מקסימלית ב־G_i.
- G_i/G_{i-1} פשוטה.

חבורה פתירה : חבורה סופית G בעלת סדרת הרכב $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ כך שהחבורה G_i/G_{i-1} אבלית.

למה : תהא G חבורה סופית ותהא $K\lhd G$ אזי (G פתירה) $\iff$ (G/K, K פתירות).

חבורת p : יהי p מספר ראשוני אזי G חבורה המקיימת $\exists n\in\mathbb{N}_+.\mathrm{ord}(G)=p^n$.

למה : יהיו G,H חבורות p אזי ($R\le G$ חבורת p)$\wedge$($G\times H$ חבורת p).

משפט : תהא $G\neq\{e\}$ חבורת p אזי $Z(G)\neq\{e\}$.

מסקנה : יהי p ראשוני ותהא G חבורה אזי ($\mathrm{ord}(G)=p^2$) $\Longleftarrow$ (G אבלית).

למה : תהא G חבורת p ותהא $H\le G$ חבורה אזי $H\le N_G(H)$.

תת חבורה מירבית: תהא G חבורה אזי $H \le G \ne H$ עבורה $R \le H \implies R \le G$.

מסקנה: תהא G חבורת p ותהא $H \le G$ תת חבורה מירבית אזי

- $H \lhd G$.
- $[G:H]=p$.
- קיימת ל־G סדרת הרכב $\{G_i\}_{i=0}^{m}$ כך שהחבורה G_i/G_{i-1} ציקלית מסדר p.

תת חבורת p סילו: יהי p ראשוני ותהא G חבורה סופית המקיימת $p|\,|G|$ אזי $P \le G$ תת חבורת p מקסימלית עבורה $|P|\,|\,|G|$.

משפט קושי: יהי p ראשוני ותהא G חבורה סופית אזי $p|\,|G| \implies \exists g \in G.\mathrm{ord}\,(g)=p$.

המשפט הראשון של סילו: תהא G חבורה סופית ויהי $p|\,|G|$ ראשוני אזי קיימת ל־G תת חבורה p סילוב.

משפט: יהי $p|\,|G|$ ותהא $H \le G$ חבורת p אזי H תת חבורה של חבורת p סילוב.

המשפט השני של סילו: יהיו $H,N \le G$ תת חבורות p סילוב אזי $\exists g \in G.H=gNg^{-1}$.

מסקנה: נניח כי $n_p=1$ אזי תת חבורת p סילו היא נורמלית.

סימון: כמות תת חבורות p סילוב הוא n_p.

המשפט השלישי של סילו: $n_p \equiv 1 \mod p$, $n_p|\,[G:P]$.

למה: יהיו $N \lhd G$ חבורות סופיות ונניח כי P חבורת p סילו אזי

- $P \cap N$ חבורת p סילו ב־N.
- PN/N חבורת p סילו ב־G/N.

טענה: תהא G חבורה מסדר pq בעבור $p<q$ ראשוניים אזי

- G פתירה.
- $(q \nmid p-1) \implies$ (G ציקלית).

הערה: $\langle G,\cdot\rangle$ היא חבורה עם כפל מוכלל $\prod$, $\langle A,+\rangle$ היא חבורה עם חיבור מוכלל $\sum$.

תת חבורת הפיתול: תהא A חבורה אבלית אזי $A^t=\{a \in A \mid \mathrm{ord}\,(a)<\infty\}$.

חבורת פיתול: חבורה אבלית A המקיימת $A^t=A$.

חבורה חסרת פיתול: חבורה אבלית A המקיימת $A^t=\{e\}$.

למה: תהא A חבורה אבלית

- $A^t \le A$.
- A/A^t חסרת פיתול.
- אם A חבורת פיתול חילופית נוצרת סופית אז A סופית.

סדרה תלויה לינארית (ת"ל): סדרה $a \in A^n$ עבורה $\exists k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\} . \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = 0$.

- בלתי תלויה לינארית (בת"ל).

בסיס: תהא A חבורה אבלית אזי $v \in A^n$ בת"ל המקיימת $\forall a \in A.\exists \alpha \in \mathbb{Z}^n . \sum \alpha_i v_i = a$.

חבורה חופשית: חבורה אבלית בעלת בסיס.

משפט: תהא F חבורה חופשית עם בסיס $v \in F^n$ ותהא A חבורה אבלית עם $a \in A^n$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi : F \to A$ המקיים $\forall i \in [n] . \varphi(v_i)=a_i$.

למה: תהא A חבורה אבלית אינסופית ויהי $v \in A^n$ אזי (v בסיס) $\iff ((\bigoplus_{i=1}^{n} \langle v_i \rangle = A) \wedge (\forall i \in [n] . \langle v_i \rangle \cong \mathbb{Z}))$.

מסקנה: תהא A חבורה אבלית אינסופית אזי (A חופשית) $\iff (A \cong \mathbb{Z}^n)$.

משפט: תהא A חבורת חסרת פיתול אבלית אזי (A נ"ס) $\iff$ (A חופשית).

משפט: תהא A חבורה אבלית ויהיו $v_1 \dots v_n$ בסיס, $u_1 \dots u_k$ סדרת יוצרים אזי $n \le k$.

מסקנה: יהיו B_1, B_2 בסיסים של חבורה חופשית A אזי גודל הבסיסים שווה.

דרגה של חבורה: תהא A חבורה חופשית אזי $\text{rank}\left(A\right)$ הוא גודל הבסיס של A.

משפט החבורות החלקיות של תת חבורה חופשית: יהיו $H \le A$ חבורות באשר A חבורה חופשית מדרגה n אזי H חופשית.

מסקנה: יהי $v \in A^n$ בסיס אזי קיים $k \le n$ עבורו קיימים $\varepsilon \in \mathbb{N}^k$ המקיימים $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$ וגם $\varepsilon_1 v_1 \dots \varepsilon_k v_k$ בסיס של H.

מסקנה: יהיו $H \le A$ חבורות חופשית אזי $\text{rank}\left(H\right) \le \text{rank}\left(A\right)$.

טענה: תהא $G = G_1 \times \dots \times G_n$ ונניח כי $N_i \lhd G_i$ אזי $G/\left(N_1 \cdot \ldots \cdot N_n\right) \cong G_1/N_1 \times \ldots \times G_n/N_n$.

משפט השאריות הסיני: יהיו $j, k, m \in \mathbb{N}$ ונניח כי $\gcd\left(j,k\right) = 1$, $j \cdot k = m$ אזי $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_j \oplus \mathbb{Z}_k$.

המשפט היסודי של חבורות אבליות נוצרות סופית: תהא A חבורה אבלית נ"ס אזי

- $A \cong \mathbb{Z}_{\varepsilon_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_k} \times \mathbb{Z}^r$ באשר $\varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}$.
- קיים פירוק יחיד $A \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\varepsilon_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\varepsilon_n}} \times \mathbb{Z}^r$ באשר $p_1 \dots p_n$ ראשוניים.

חבורה סבבה: חבורה G אשר $|G| = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$ פירוק לראשוניים המקיימת $n_{p_i} = 1$.

טענה: תהא G חבורה סבבה ותהא P_i תת חבורה p סילו אזי $G = P_1 \cdot \ldots \cdot P_n$.

הגדרה: יהיו $H, K \le G$ חבורות אזי $[H,K] = \{[h,k] \mid h \in H \wedge k \in K\}$.

טענה: $[H,K] \le G$.

טענה: יהיו $H, K \le G$ חבורות אזי

- $K \le H \implies [K,G] \le [H,G]$.
- $H \lhd G \iff [H,G] \le H$.
- $\left(\left(K \lhd G\right) \wedge \left(K \le H \le G\right)\right) \implies \left(H/K \le Z\left(G/K\right) \iff [H,G] \le K\right)$.

הסדרה המרכזית היורדת: תהא G חבורה אזי $\Phi_1\left(G\right) = G$, $\Phi_{i+1}\left(G\right) = [\Phi_i\left(G\right), G]$.

למה: $\Phi_{i+1} \lhd \Phi_i$.

למה: $\Phi_i/\Phi_{i+1} \le Z\left(G/\Phi_{i+1}\right)$.

הסדרה המרכזית העולה: תהא G חבורה אזי $Z_0\left(G\right) = \{e\}$, $Z_i\left(G\right)/Z_{i-1}\left(G\right) = Z\left(G/Z_{i-1}\left(G\right)\right)$.

מסקנה: $Z_1\left(G\right) = Z\left(G\right)$.

משפט: $\left(\Phi_{m+1} = \{e\}\right) \iff \left(Z_m = G\right)$.

מסקנה: $\left(\forall i \in [m] . \Phi_{i+1} \le Z_{m-i}\right) \implies \left(Z_m = G\right)$.

חבורה נילפוטנטית: חבורה G עבורה

- $\exists i \in \mathbb{N} . \Phi_i\left(G\right) = \{e\}$.
- $\exists i \in \mathbb{N} . Z_i\left(G\right) = G$.

טענה: מכפלה ישרה של חבורות נילפוטנטיות היא נילפוטנטית.

למה: תהא G נילפוטנטית ותהא $H \le G$ חבורה אזי $H \le N_G\left(H\right)$.

למת הארגומנט של פראטיני: יהיו $G \lhd K$ חבורות סופיות ותהא P תת חבורה p סילו אזי $G = K \cdot N_G\left(P\right)$.

למה: תהא G חבורה סופית ותהא P תת חבורת p סילו אזי $\left(N_G\left(H\right) = H\right) \implies \left(N_G\left(P\right) \le H \le G\right)$.

משפט: תהא G חבורה אזי (G סבבה) $\iff$ (G נילפוטנטית).