סימון: $[n]=\{1,\ldots,n\}$.

עיקרון החיבור: תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות סופיות אזי $|\biguplus_{i=1}^n A_i|=\sum_{i=1}^n|A_i|$.

עיקרון המשלים: תהיינה A,B קבוצות סופיות באשר $A\subseteq B$ אזי $|A|+|B\backslash A|=|B|$.

עיקרון הכפל: תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות סופיות זרות באשר לכל $i,j\in[n]$ מתקיים $|A_i|=|A_j|$ אזי $|\biguplus_{i=1}^n A_i|=n\cdot|A_1|$.

עיקרון הכפל: תהא A קבוצה סופית יהי $R\subseteq A^2$ יחס שקילות עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $|[x]_R|=|[y]_R|$ אזי $\forall x\in A.\left(|A|=|[x]_R|\cdot|{}^{A}/_{R}|\right)$.

עיקרון הכפל: תהא A קבוצה סופית תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(A)$ חלוקה עבורה לכל $X,Y\in\Pi$ מתקיים $|X|=|Y|$ אזי $\forall X\in\Pi.\left(|A|=|\Pi|\cdot|X|\right)$.

עיקרון החלוקה/שיקולי סימטריה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות סופיות זרות באשר לכל $i,j\in[n]$ מתקיים $|A_i|=|A_j|$ אזי $\frac{|\biguplus_{i=1}^n A_i|}{n}=|A_1|$.

תמורה/פרמוטציה: תהא A קבוצה סופית אזי פונקציה $f:A\to A$ חח"ע ועל.

טענה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $|[k]\to[n]|=n^k$.

הערה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי n^k זו ספירה עם חשיבות לסדר ועם חזרה.

עצרת: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $n!=\prod_{k=1}^n k$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $|\{f\in[n]\to[n]\mid f\ \text{חח"ע ועל}\}|=n!$.

עצרת: תהא A קבוצה אזי $A!=|\{f\in A\to A\mid f\ \text{חח"ע ועל}\}|$.

טענה: תהיינה A,B קבוצות עבורן $|A|=|B|$ אזי $A!=B!$.

טענה: $\aleph_0!=\aleph$.

חליפות: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $P(k,n)=|\{f\in[k]\to[n]\mid f\text{חח"ע}\}|$.

טענה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $P(k,n)=\frac{n!}{(n-k)!}$.

הערה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $P(n,k)$ זו ספירה עם חשיבות לסדר ובלי חזרה.

הגדרה: תהא A קבוצה ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\mathcal{P}_k(A)=\{B\in\mathcal{P}(A)\mid|B|=k\}$.

צירופים: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $C(n,k)=|\mathcal{P}_k([n])|$.

מקדם בינומי: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

טענה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $C(n,k)=\binom{n}{k}$.

הערה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $C(n,k)$ זו ספירה בלי חשיבות לסדר ובלי חזרה.

חלוקות: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $S(n,k)=|\{x\in\mathbb{N}^n\mid\sum_{i=1}^n x_i=k\}|$.

טענה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $S(n,k)=\binom{k+n-1}{k}$.

הערה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $S(n,k)$ זו ספירה בלי חשיבות לסדר ועם חזרה.

מולטי־קבוצה: תהא A קבוצה ותהא $f:A\to\mathbb{N}_+$ אזי (A,f).

עוצמה של מולטי־קבוצה: תהא (A,f) מולטי־קבוצה אזי $|(A,f)|=|A|\cdot\sum_{a\in A}f(a)$.

סימון: תהא A קבוצה ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\mathcal{P}_k^{\text{Multi}}(A)=\{(B,f)\mid(B\subseteq A)\wedge(f:B\to\mathbb{N}_+)\wedge(|(B,f)|=k)\}$.

טענה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $|\mathcal{P}_k^{\text{Multi}}([n])|=S(n,k)$.

הערה סידור עצמים בשורה: כמות האפשרויות לסדר n עצמים בשורה הינה $n!$.

הערב סידור עצמים במעגל: כמות האפשרויות לסדר n עצמים במעגל הינה $(n-1)!$.

הערה בחירה: כמות האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים הינה $\binom{n}{k}$.

הערה חלוקת כדורים לתאים: כמות האפשרויות לחלק k כדורים זהים לתוך n תאים שונים הינה $S(n,k)$.

טענה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ באשר $k\le n$ אזי $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

זהות פסקל: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k\cdot\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}\cdot n$.

טענה: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=\binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil}$.

משפט: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k}\le\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$.

משפט הבינום של ניוטון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $(a+b)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $|\{X\in\mathcal{P}([n])\mid|X|\in\mathbb{N}_{\text{even}}\}|=2^{n-1}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $|\{X\in\mathcal{P}([n])\mid|X|\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\}|=2^{n-1}$.

מקדם מולטינומי: יהיו $n,k_1\ldots k_\ell\in\mathbb{N}$ באשר $\sum_{i=1}^{\ell}k_i=n$ אזי $\binom{n}{k_1,\ldots,k_\ell}=\frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_\ell!}$.

אלפבית: עולם הדיון.

טענה: יהיו $\ell,n\in\mathbb{N}$ ויהיו $k_1\ldots k_\ell\in\mathbb{N}$ באשר $\sum_{i=1}^{\ell}k_i=n$ אזי $\binom{n}{k_1,\ldots,k_\ell}=\left\{f:[n]\to[\ell]\mid\forall i\in[\ell].f^{-1}\left[\{i\}\right]=k_i\right\}$.

נוסחת המולטינום: יהיו $\ell,n\in\mathbb{N}$ ויהיו $x_1\ldots x_\ell\in\mathbb{R}$ אזי $(x_1+\ldots+x_\ell)^n=\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^\ell\\ \sum_{i=1}^{\ell}k_i=n}}\left(\binom{n}{k_1,\ldots,k_\ell}\prod_{i=1}^{\ell}x_i^{k_i}\right)$.

עצרת נופלת: יהי $r\in\mathbb{R}$ ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $r^{\underline{k}}=\prod_{i=0}^{k-1}(r-i)$.

מקדם בינומי מוכלל: יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}$.

הבינום השלילי: יהיו $x,y,\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $(x+y)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^ky^{\alpha-k}$.

טענה: תהיינה A,B קבוצות אזי $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

נוסחת ההכלה וההדחה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ותהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות אזי $\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{\varnothing\neq I\subseteq[n]}\left((-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|\right)$.

נוסחת ההכלה וההדחה הסימטרית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ותהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות עבורן לכל $k\in[n]$ ולכל $I,J\in\mathcal{P}_k([n])$ מתקיים $\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|=\left|\bigcap_{i\in J}A_i\right|$ אזי $\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left|\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right|\right)$.

נקודת שבת: תהא A קבוצה ותהא $f:A\to A$ פונקציה אזי $a\in A$ עבורה $f(a)=a$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\{f:[n]\to[n]\mid \text{תמורה } f\}\right|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}$.

עיקרון שובך היונים: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ותהא $f:[n+1]\to[n]$ אזי קיימים $i,j\in[n+1]$ שונים עבורם $f(i)=f(j)$.

עיקרון שובך היונים המוכלל: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ ותהא $f:[m]\to[n]$ אזי קיים $i\in[n]$ עבורו $\left|f^{-1}\left[\{i\}\right]\right|\geq\left\lceil\frac{m}{n}\right\rceil$.

פונקציית מידה: פונקציה $\mu:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$ באשר $\mu(A)$ זה "השטח" של A.

הערה: $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^2$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\leq\mu(B)$.

שובך היונים הגאומטרי: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהיינה $A_1,\ldots,A_m\subseteq A$ קבוצות עבורן $\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)>\mu(A)$ אזי קיימים $i,j\in[m]$ שונים עבורם $A_i\cap A_j\neq\varnothing$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה באשר $|A|\leq\aleph_0$ אזי $\mu(A)=0$.

טענה: תהא $\mathcal{U}$ קבוצה ותהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq\mathcal{U}$ קבוצות אזי $\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i^{\mathcal{C}}\right|=|\mathcal{U}|+\sum_{\varnothing\neq I\subseteq[n]}\left((-1)^{|I|}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|\right)$.

מספר קטלן: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$.

מסקנה: $C_0=C_1=1$.

סימון: תהיינה A,B קבוצות יהי $k\in\mathbb{N}_+$ תהא $f:A\to B^k$ תהא $i\in[k]$ ויהי $a\in A$ אזי $f_i(a)=(f(a))_i$.

מסלול חוקי על הסריג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $f:[n]\to\mathbb{N}^2$ עבורו לכל $i\in[n]$ מתקיים כי $f(i+1)\in\left\{\langle f_1(i)+1,f_2(i)\rangle,\langle f_1(i),f_2(i)+1\rangle\right\}$.

מסלולים חוקיים בין נקודות על הסריג: יהיו $a,b\in\mathbb{N}^2$ אזי $\text{Path}(a,b)=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{f:[n]\to\mathbb{N}^2\mid(\text{מסלול חוקי על הסריג } f)\wedge(f(1)=a)\wedge(f(n)=b)\right\}$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{N}^2$ אזי $\text{PC}(a,b)=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{f\in\text{Path}(a,b)\mid\exists i\in[n].f_1(i)<f_2(i)\right\}$.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{PC}(\langle0,0\rangle,\langle n,n\rangle)=\text{Path}(\langle0,0\rangle,\langle n-1,n+1\rangle)$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{N}^2$ אזי $\text{PB}(a,b)=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{f\in\text{Path}(a,b)\mid\forall i\in[n].f_1(i)\geq f_2(i)\right\}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{PB}(\langle0,0\rangle,\langle n,n\rangle)=C_n$.

משפט: $C_n=\sum_{i=1}^{n}(C_{i-1}\cdot C_{n-i})$.

סדרות מאוזנות: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\text{BS}(n)=\left\{f:[2n]\to\{0,1\}\mid\left(\left|f^{-1}\left[\{0\}\right]\right|=\left|f^{-1}\left[\{1\}\right]\right|\right)\wedge\left(\forall k\in[n].\left|\left(f_{\restriction_{[k]}}\right)^{-1}(\{0\})\right|\leq\left|\left(f_{\restriction_{[k]}}\right)^{-1}(\{1\})\right|\right)\right\}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $|\text{BS}(n)|=C_n$.

מצולע קמור: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורו לכל $a,b\in K$ ולכל $t\in[0,1]$ מתקיים כי $ta+(1-t)b\in K$.

מצולע קעור: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ שאינו קמור.

קבוצת סידון: קבוצה $A\subseteq\mathbb{N}$ עבורה לכל $a,b,c,d\in A$ מתקיים $a+b\neq x+y$.

סימון: אם $f:A\to B$ חח"ע נסמן $f:A\overset{1-1}{\to}B$.

סימון: אם $f:A\to B$ על נסמן $f:A\xrightarrow[\text{onto}]{}B$.

משפט ארדש סקרש: יהיו $a,b\in\mathbb{N}$ ותהא $f:[a\cdot b+1]\to\mathbb{R}$ חח"ע אזי אחד מהבאים מתקיים

- קיימים $k_1<\ldots<k_{a+1}$ כך ש־ $f_{\restriction\{k_1,\ldots,k_{a+1}\}}$ מונוטונית עולה.
- קיימים $k_1<\ldots<k_{b+1}$ כך ש־ $f_{\restriction\{k_1,\ldots,k_{b+1}\}}$ מונוטונית יורדת.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ אזי $\sum_{i=0}^{n}x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

טענה טור הנדסי: יהי $x\in(-1,1)$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}$.

סדרה: פונקציה a המקיימת $\text{Dom}(a)=\mathbb{N}$.

סדרה ממשית: פונקציה $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

טור חזקות: תהא a סדרה ממשית אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

טור חזקות יוצרת סדרה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות אזי $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$.

טענה: יהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_{n=0}^{\infty}S(m,n)x^n$.

הגדרה גזירת טור: יהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות אזי $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$.

הגדרה אינטגרציית טור: יהי $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות אזי $\int f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

משפט: יהיו f,g טורים באשר $f(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ וכן $g(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.b_n$ אזי

- $f(x)+g(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n+b_n$.
- $f(x)-g(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n-b_n$.
- יהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $cf(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.c\cdot a_n$.
- יהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $x^mf(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\left\{\begin{smallmatrix}0 & n<m\\ a_{n-m} & \text{else}\end{smallmatrix}\right.$.
- $f(x)g(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.
- $\frac{f(x)}{1-x}$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\sum_{k=0}^{n}a_k$.

טענה: יהיו $\alpha,a,c\in\mathbb{R}$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי

- $\lambda x\in\mathbb{R}.x^m$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\left\{\begin{smallmatrix}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{smallmatrix}\right.$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.\frac{1}{1-x}$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.1$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.\frac{1}{1+x}$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.(-1)^n$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.\frac{1}{1-cx}$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.c^n$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.(1+x)^\alpha$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\binom{\alpha}{n}$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.\frac{1}{(1-x)^\alpha}$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\binom{\alpha+n-1}{n}$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.\frac{x}{(1-x)^2}$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.n$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.(-\ln(1-x))$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\left\{\begin{smallmatrix}0 & n=0\\ \frac{1}{n} & \text{else}\end{smallmatrix}\right.$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.e^{\alpha x}$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\frac{\alpha^n}{n!}$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.\cosh(\alpha x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\left\{\begin{smallmatrix}\frac{\alpha^n}{n!} & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ 0 & \text{else}\end{smallmatrix}\right.$.
- $\lambda x\in\mathbb{R}.\sinh(\alpha x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\left\{\begin{smallmatrix}\frac{\alpha^n}{n!} & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\\ 0 & \text{else}\end{smallmatrix}\right.$.

פונקציה רציונלית: יהיו $p,q\in\mathbb{R}[x]$ באשר $\exists a\in\mathbb{R}.q(a)\neq 0$ אזי $\frac{p}{q}$.

פירוק לשברים חלקיים: יהי $P\in\mathbb{C}_n[x]$ ויהיו $\alpha_1,\ldots\alpha_n\in\mathbb{C}$ אזי $A_1,\ldots A_n$ עבורם $\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x-\alpha_i}$.

פונקציה יוצרת מעריכית: תהא $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$.

כלל/נוסחת נסיגה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

סדרה נוצרת מכלל נסיגה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\mathbb{R}^i\to\mathbb{R}$ נוסחת נסיגה אזי סדרה a עבורה לכל $n\geq i$ מתקיים $a_n=f(a_{n-1},\ldots a_{n-i})$.

עומק הרקורסיה/נוסחאת הנסיגה: יהי $i\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נוסחת נסיגה אזי $k\in[n]$ מינימלי עבורו קיימת $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(x_1\ldots x_n)=g(x_1\ldots x_k)$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$.

הערה: מכאן והלאה נניח כי כל נוסחאות הנסיגה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הן מעומק n.

תנאי התחלה: יהי f כלל נסיגה עם עומק $n\in\mathbb{N}$ אזי $p\in\mathbb{R}^n$.

בעיית התחלה: יהי f כלל נסיגה עם עומק $i\in\mathbb{N}$ ויהי $p\in\mathbb{R}^i$ תנאי התחלה אזי סדרה ממשית a עבורה $a_n=p_n$ לכל $n\in[i]$ וכן $a_n=f(a_{n-1},\ldots a_{n-i})$ לכל $n>i$.

סדרת פיבונאצ'י: $F_0=0$ וכן $F_1=1$ וכן $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

נוסחת נסיגה לינארית: נוסחת נסיגה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $\alpha_1\dots\alpha_{n+1}\in\mathbb{R}$ המקיימים $f(x)=\left(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\right)+\alpha_{n+1}$.

נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית: נוסחת נסיגה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $\alpha_1\dots\alpha_n\in\mathbb{R}$ המקיימים $f(x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i$.

הפולינום האופייני: תהא $f:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ נוסחת נסיגה הומוגנית באשר $f(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i$ אזי $p_f(x)=x^n-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i x^i$.

משפט קיום ויחידות פתרון לבעיית נסיגה לינארית הומוגנית: תהא $f:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ נוסחת נסיגה הומוגנית ויהי $p\in\mathbb{R}^{n-1}$ תנאי התחלה אזי קיים ויחיד פתרון לבעיית ההתחלה.

משפט פתרון לבעיית ההתחלה: תהא $f:\mathbb{R}^{i-1}\to\mathbb{R}$ נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית ויהיו $\{\beta_1,\dots,\beta_i\}$ הפתרונות של p_f אזי קיימים $A_1\dots A_i\in\mathbb{R}$ עבורם $a_n=\sum_{j=1}^i A_j\beta_j^n$ פתרון לבעיית ההתחלה.

הערה: המשפט מלעיל הוא רק כאשר יש i פתרונות שונים ל־p_f.

משפט פתרון לבעיית ההתחלה: תהא $f:\mathbb{R}^{i-1}\to\mathbb{R}$ נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית יהיו $\{\beta_1,\dots,\beta_k\}$ הפתרונות של p_f ויהי $r:[k]\to[i]$ באשר $r(j)$ הריבוי של β_j בפתרונות של p_f אזי קיימים $A_1\dots A_i\in\mathbb{R}$ עבורם $a_n=\sum_{j=1}^k\sum_{\ell=0}^{r(j)-1}n^\ell A_j\beta_j^n$ פתרון לבעיית ההתחלה.

מסקנה: הסדרה $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ הינה פתרון לבעיית ההתחלה של סדרת פיבונאצ'י.

יחס הזהב: $\phi=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

טענה: $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

משפט: תהנה $S_0,\dots,S_k\subseteq\mathbb{N}$ נסמן ב־a_n את מספר הפתרונות של $n=\sum_{i=0}^k x_i$ בעבור $x_i\in S_i$ אזי $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n=\prod_{i=1}^k\left(\sum_{\ell=0}^\infty\mathbb{1}_{S_i}(\ell)x^\ell\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{N}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $p_A(n)=\left|\bigcup_{i=1}^n\left\{a\in A^i\;\middle|\;\left(\sum_{j=1}^i a_i=n\right)\wedge\left(a\text{ עולה}\right)\right\}\right|$.

מספר החלוקות של מספר: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $p(n)=p_{\mathbb{N}}(n)$.

מספר החלוקות השונות של מספר: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $p_{\text{dist}}(n)=\left|\bigcup_{i=1}^n\left\{a\in\mathbb{N}^i\;\middle|\;\left(\sum_{j=1}^i a_i=n\right)\wedge\left(a\text{ עולה ממש}\right)\right\}\right|$.

מספר החלוקות האי־זוגיות של מספר: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $p_{\text{odd}}(n)=p_{\mathbb{N}_{\text{odd}}}(n)$.

משפט אוילר: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $p_{\text{odd}}(n)=p_{\text{dist}}(n)$.

גרף מכוון: תהא V ותהא $E\subseteq V^2$ אזי $\langle V,E\rangle$.

גרף לא מכוון: תהא V ותהא $E\subseteq\mathcal{P}_2(V)$ אזי $\langle V,E\rangle$.

קודקודים/צמתים: יהי $\langle V,E\rangle$ גרף אזי $V(G)=V$.

קשתות/צלעות: יהי $\langle V,E\rangle$ גרף אזי $E(G)=E$.

לולאה: יהי G גרף מכוון ויהי $v\in V(G)$ אזי $\langle v,v\rangle\in E(G)$.

גרף פשוט: גרף מכוון חסר לולאות.

הערה: בקורס מדובר רק על גרפים לא מכוונים אלא אם כן מצויין אחרת.

גרף שרוך: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\langle[n],\{\{k,k+1\}\mid k\in[n-1]\}\rangle$.

גרף מעגל: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n=\langle[n],\{\{k,k+1\}\mid k\in[n-1]\}\cup\{\{0,n\}\}\rangle$.

גרף n־צדדי: יהי $n\in\mathbb{N}$ תהיינה $V_1\dots V_n$ קבוצות זרות אזי גרף $\langle\biguplus_{i=1}^n V_i,E\rangle$ עבורו לכל $e\in E$ קיימים $i,j\in[n]$ שונים עבורם $|e\cap V_i|=|e\cap V_j|=1$.

גרף n־צדדי מלא: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהיינה $V_1\dots V_n$ קבוצות זרות אזי $K_{|V_1|,\dots,|V_n|}=\left\langle\biguplus_{i=1}^n V_i,\bigcup_{i=1}^n\bigcup_{j=i+1}^n\{\{v,u\}\mid(v\in V_i)\wedge(u\in V_j)\}\right\rangle$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהיינה $V_1\dots V_n$ קבוצות זרות אזי $K_{|V_1|,\dots,|V_n|}$ גרף n־צדדי.

קליקה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי K_n.

קבוצת השכנים: יהי G גרף ויהי $v\in V(G)$ אזי $N_G(v)=\{u\in V(G)\mid\{u,v\}\in E(G)\}$.

דרגה: יהי G גרף ויהי $v\in V(G)$ אזי $\deg(v)=d_G(v)=|N(v)|$.

קודקוד מבודד: יהי G גרף אזי $v\in V(G)$ עבורו $d(v)=0$.

עלה: יהי G גרף אזי $v\in V(G)$ עבורו $d(v)=1$.

טענה: יהי G גרף אזי $\forall v\in V(G).0\le d(v)\le|V(G)|-1$.

נוסחת לחיצות הידיים: יהי G גרף אזי $2|E(G)|=\sum_{v\in V(G)}(d(v))$.

תת־גרף: יהי G גרף אזי גרף T עבורו $(V(T)\subseteq V(G))\wedge(E(T)\subseteq E(G)\cap\mathcal{P}_2(V(T)))$.

סימון: יהי G גרף ויהי T תת־גרף של G אזי $T\lhd G$.

תת־גרף נפרש: יהי G גרף ותהא $U \subseteq V(G)$ אזי $G[U] = \langle U, \mathcal{P}_2(U) \cap E(G) \rangle$.

גרף משלים: יהי G גרף אזי $\overline{G} = \langle V(G), \mathcal{P}_2(V(G)) \backslash E(G) \rangle$.

טיול: יהי G גרף ויהיו $v, u \in V(G)$ אזי $a \in V(G)^n$ באשר $a_1 = v$ וכן $a_n = u$ וכן $\forall i \in [n-1] . \{a_i, a_{i+1}\} \in E(G)$.

אורך טיול: יהי G גרף ויהי $\sigma \in V(G)^n$ טיול אזי $\ell(\sigma) = n - 1$.

מסלול: יהי G גרף אזי טיול σ עבורו לכל $i, j \in [\ell(\sigma)]$ שונים מתקיים $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\} \neq \{\sigma_j, \sigma_{j+1}\}$.

תת־מסלול: יהי G גרף ויהי $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ מסלול אזי $\langle a_i, \ldots, a_j \rangle$ עבור $i, j \in [n]$ באשר $i < j$.

מעגל: יהי G גרף ויהי $v \in V(G)$ אזי מסלול בין v ל־v.

מסלול פשוט: יהי G גרף אזי מסלול σ עבורו כל תת־מסלול של σ אינו מעגל.

מעגל פשוט: מעגל $\langle a_1, \ldots, a_n, a_1 \rangle$ המקיים $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ מסלול פשוט.

משפט: יהי G גרף ויהיו $v_1, v_2 \in V(G)$ אזי

- (קיים מסלול פשוט מ־v_1 ל־v_2)$\Longleftrightarrow$(קיים טיול מ־v_1 ל־v_2).
- (קיים מעגל פשוט מ־v_1 ל־v_1)$\Longleftrightarrow$(קיים מעגל מ־v_1 ל־v_1).

משפט: יהי G גרף חסר מעגלים אזי $|E(G)| < |V(G)|$.

למה: יהי G גרף חסר מעגלים אזי קיימים $v, u \in V(G)$ שונים כך ש־v, u עלים.

יחס הקשירות: יהי G גרף אזי $\underset{G}{\rightarrow} \subseteq V(G)^2$ עבורו לכל $u, v \in V(G)$ מתקיים (קיים טיול מ־v ל־u)$\Longleftrightarrow$($v \underset{G}{\rightarrow} u$).

טענה: יהי G גרף אזי $\underset{G}{\rightarrow}$ יחס שקילות.

רכיב קשירות: יהי G גרף אזי $[v]_{\underset{G}{\rightarrow}}$ עבור $v \in V(G)$.

מסקנה: יהי G גרף ויהי $K \in V(G)/_{\underset{G}{\rightarrow}}$ אזי $\forall v \in K . d_{G[K]}(v) = d_G(v)$.

גרף קשיר: גרף G עבורו $\left| V(G)/_{\underset{G}{\rightarrow}} \right| = 1$.

הגדרה: יהי G גרף ותהא $F \subseteq \mathcal{P}_2(V(G))$ אזי $G + F = \langle V(G), E(G) \cup F \rangle$.

הגדרה: יהי G גרף ותהא $F \subseteq \mathcal{P}_2(V(G))$ אזי $G - F = \langle V(G), E(G) \backslash F \rangle$.

טענה: יהי G גרף ויהיו $v, u \in V(G)$ אזי

1. $\left(v \underset{G}{\rightarrow} u \right) \Longrightarrow \left([v]_{\underset{G}{\rightarrow}} = [v]_{\underset{G+\{\{v,u\}\}}{\longrightarrow}} \right)$.
2. $\left(\neg \left(v \underset{G}{\rightarrow} u \right) \right) \Longrightarrow \left([v]_{\underset{G}{\rightarrow}} \uplus [u]_{\underset{G}{\rightarrow}} = [v]_{\underset{G+\{\{v,u\}\}}{\longrightarrow}} \right)$.

מסקנה: יהי G גרף אזי $|V(G)| - |E(G)| \leq \left| V(G)/_{\underset{G}{\rightarrow}} \right|$.

מסקנה: יהי G גרף עבורו $|V(G)| - 1 > |E(G)|$ אזי G לא קשיר.

מסקנה: יהי G גרף קשיר אזי $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

טענה: יהי G גרף חסר מעגלים אזי $|E(G)| \leq |V(G)| - 1$.

עץ: גרף T באשר T קשיר וחסר מעגלים.

טענה: יהי G גרף ויהי $K \in V(G)/_{\underset{G}{\rightarrow}}$ אזי K עץ.

מסקנה: יהי T עץ אזי $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

עץ פורש: יהי G גרף אזי עץ $\langle V(G), F \rangle$ באשר $F \subseteq E(G)$.

יער: גרף T באשר T חסר מעגלים.

קשיר מינימלי: גרף G עבורו לכל $e \in E(G)$ מתקיים כי $G - \{e\}$ אינו קשיר.

חסר מעגלים מקסימלי: גרף G עבורו לכל $v, u \in V(G)$ מתקיים כי $G + \{\{v, u\}\}$ בעל מעגל.

משפט העצים: יהי G גרף התב"ש

- G עץ.
- (G חסר מעגלים)$\wedge$($|E(G)| = |V(G)| - 1$).
- (G קשיר)$\wedge$($|E(G)| = |V(G)| - 1$).
- G קשיר מינימלי.
- G חסר מעגלים מקסימלי.
- בין כל שני קודקודים ב־G קיים מסלול יחיד.

גרף מישורי: גרף G באשר G בעל דיאגרמה בה כל קשתות הגרף אינן נחתכות.

הגדרה: יהי G גרף אזי $\Delta\left(G\right)=\max\left(d_{G}\left(v\right)\mid v\in V\left(G\right)\right)$.

הגדרה: יהי G גרף אזי $\delta\left(G\right)=\min\left(d_{G}\left(v\right)\mid v\in V\left(G\right)\right)$.

מסלול המילטוני/המילטון: יהי G גרף אזי מסלול פשוט σ עבורו לכל $v\in V\left(G\right)$ מתקיים $v\in\sigma$.

מעגל המילטוני/המילטון: יהי G גרף אזי מעגל פשוט σ עבורו לכל $v\in V\left(G\right)$ מתקיים $v\in\sigma$.

משפט דיראק: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ ויהי G גרף באשר $V\left(G\right)=\left[n\right]$ אזי $\left(\delta\left(G\right)\geq\frac{n}{2}\right)\Longleftarrow$(קיים מעגל המילטון ב־$G$).

הגדרה: יהי G גרף ויהי $v\in V\left(G\right)$ אזי $G+\left\{ v\right\} =\left\langle V\left(G\right)\cup\left\{ v\right\} ,E\left(G\right)\right\rangle$.

הגדרה: יהי G גרף ויהי $v\in V\left(G\right)$ אזי $G-\left\{ v\right\} =\left\langle V\left(G\right)\backslash\left\{ v\right\} ,E\left(G\right)\backslash\left\{ \left\{ v,u\right\} \mid u\in V\left(G\right)\right\} \right\rangle$.

טענה: יהי T עץ ויהי $v\in V\left(T\right)$ עלה אזי $G-\left\{ v\right\}$ עץ.

גרף ממושקל: גרף G ופונקציה $f:E\left(G\right)\to\mathbb{R}$.

משפט קיילי: כמות העצים על n קודקודים הוא $n^{\left(n-2\right)}$.

מסלול אוילר: מסלול העובר על כל הקשתות בגרף.

מסלול אוילר: יהי G גרף אזי מסלול σ עבורו לכל $e\in E\left(G\right)$ מתקיים $e\in\sigma$.

מעגל אוילר: יהי G גרף אזי מעגל σ באשר σ מסלול אוילר.

משפט אוילר: יהי G גרף קשיר אזי

- (ב־G יש מעגל אוילר)$\Longleftrightarrow\left(\forall v\in V\left(G\right).d\left(v\right)\in\mathbb{N}_{\text{even}}\right)$.
- (ב־G יש מסלול אוילר)$\Longleftrightarrow\left(\left|\left\{ v\in V\left(G\right)\mid d\left(v\right)\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\right\} \right|\in\left\{ 0,2\right\} \right)$.

הומומורפיזם: יהיו G,S גרפים אזי $f:V\left(G\right)\to V\left(S\right)$ עבורה לכל $v,u\in V\left(G\right)$ מתקיים $\left(\left\{ v,e\right\} \in E\left(G\right)\right)\iff\left(\left\{ f\left(v\right),f\left(u\right)\right\} \in E\left(S\right)\right)$.

איזומורפיזם: יהיו G,S גרפים אזי הומומורפיזם $f:V\left(G\right)\to V\left(S\right)$ באשר f זיווג.

גרפים איזומורפיים: יהיו G,S גרפים ויהי $f:V\left(G\right)\to V\left(S\right)$ איזומורפיזם אזי $G\cong S$.

סימון: יהיו G,S גרפים יהי $f:V\left(G\right)\to V\left(S\right)$ איזומורפיזם יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ ויהי $\sigma\in V\left(G\right)^{n}$ אזי $f\left(\sigma\right)=\left\langle f\left(\sigma_{1}\right),\ldots,f\left(\sigma_{n}\right)\right\rangle$.

טענה: יהיו G,S גרפים ויהי $f:V\left(G\right)\to V\left(S\right)$ איזומורפיזם אזי

- $\left|V\left(G\right)\right|=\left|V\left(S\right)\right|$.
- $\left|E\left(G\right)\right|=\left|E\left(S\right)\right|$.
- לכל $v\in V\left(G\right)$ מתקיים $d_{G}\left(v\right)=d_{S}\left(f\left(v\right)\right)$.
- יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ ויהי $\sigma\in V\left(G\right)^{n}$ אזי (σ טיול ב־G) $\iff$ ($f\left(\sigma\right)$ טיול ב־S).
- (G קשיר) $\iff$ (S קשיר).

מסקנה: יהיו G,S גרפים איזומורפיים אזי

- (G עץ) $\iff$ (S עץ).
- (G חסר מעגלים) $\iff$ (S חסר מעגלים).

טענה: יהיו G,S גרפים יהי $f:V\left(G\right)\to V\left(S\right)$ איזומורפיזם יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ ויהי $\sigma\in V\left(G\right)^{n}$ אזי

- (σ מסלול ב־G)$\Longleftrightarrow$($f\left(\sigma\right)$ מסלול ב־S).
- (σ מסלול פשוט ב־G)$\Longleftrightarrow$($f\left(\sigma\right)$ מסלול פשוט ב־S).
- (σ מעגל ב־G)$\Longleftrightarrow$($f\left(\sigma\right)$ מעגל ב־S).
- (σ מעגל פשוט ב־G)$\Longleftrightarrow$($f\left(\sigma\right)$ מעגל פשוט ב־S).
- (σ מסלול אוילר ב־G)$\Longleftrightarrow$($f\left(\sigma\right)$ מסלול אוילר ב־S).
- (σ מעגל אוילר ב־G)$\Longleftrightarrow$($f\left(\sigma\right)$ מעגל אוילר ב־S).
- (σ מסלול המילטון ב־G)$\Longleftrightarrow$($f\left(\sigma\right)$ מסלול המילטון ב־S).
- (σ מעגל המילטון ב־G)$\Longleftrightarrow$($f\left(\sigma\right)$ מעגל המילטון ב־S).

הגדרה: תהא V קבוצה אזי $\text{Graph}\left(V\right)=\left\{ \left\langle V,E\right\rangle \mid E\subseteq\mathcal{P}_{2}\left(V\right)\right\}$.

גרף לא מסומן: תהא V קבוצה אזי $K\in{}^{\text{Graph}\left(V\right)}/_{\cong}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}\leq\left|{}^{\text{Graph}\left(\left[n\right]\right)}/_{\cong}\right|\leq2^{\binom{n}{2}}$.

צביעת קשתות: תהא A קבוצה ויהי G גרף אזי פונקציה $f:E\left(G\right)\to A$.

תת־גרף מונוכרומטי: יהי G גרף ותהא f צביעה אזי $S\triangleleft G$ עבורו $\forall e_{1},e_{2}\in E\left(S\right).f\left(e_{1}\right)=f\left(e_{2}\right)$.

מספר ראמזי: יהיו $s,t\geq 2$ אזי $R\left(s,t\right)$ הוא ה־$n\in\mathbb{N}$ המינימלי עבורו לכל צביעת קשתות $f:E\left(K_{n}\right)\to\left\{ 0,1\right\}$ מתקיים כי (קיימת ב־K_{n} קליקה K_{s} מונוכרומטית 0)$\vee$(קיימת ב־K_{n} קליקה K_{t} מונוכרומטית 1).

משפט: $R\left(3,3\right)=6$.

משפט: יהיו $s,t\geq 2$ אזי $R\left(s,t\right)=R\left(t,s\right)$.

משפט ראמזי: יהיו $s,t\geq 2$ אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $R\left(s,t\right)=n$.

הגדרה: תהא κ עוצמה ותהא V קבוצה באשר $\left|V\right|=\kappa$ אזי $K_{\kappa}=\left\langle V,\left\{ X\subseteq V\mid\left|X\right|=2\right\} \right\rangle$.

עוצמה מסוג רמזי: עוצמה κ עבורה לכל צביעת קשתות $f:E\left(K_{\kappa}\right)\to\left\{ 0,1\right\}$ קיימת ב־K_{κ} קליקה K_{κ} מונוכרומטית.

משפט קונינג: תהא $f\in\mathcal{P}_{2}\left(\mathbb{N}\right)\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי קיימת $H\subseteq\mathbb{N}$ בת־מנייה עבורה $\left|f\left[\mathcal{P}_{2}\left(H\right)\right]\right|=1$.

מסקנה: $\aleph_{0}$ הינה עוצמה מסוג רמזי.

משפט ארדש־ראדו: יהי G גרף באשר $\aleph<\left|V\left(G\right)\right|$ ותהא $f:\mathcal{P}_{2}\left(V\left(G\right)\right)\to\mathbb{N}$ אזי קיימת $B\subseteq A$ מונוכרומטית המקיימת $\aleph_{0}<\left|B\right|$.

משפט: ב־ZFC לא ניתן להוכיח ולא ניתן להפריך את קיומם של עוצמות גדולות מ־$\aleph_{0}$ מסוג רמזי.

צביעת קודקודים: יהי G גרף אזי $f:V\left(G\right)\to A$.

צביעת קודקודים חוקית: יהי G גרף אזי צביעת קודקודים $f:V\left(G\right)\to A$ עבורה לכל $v,u\in V\left(G\right)$ באשר $\left\{ v,u\right\} \in E\left(G\right)$ מתקיים $f\left(v\right)\neq f\left(u\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\{ f:\left[n\right]\to\left[n\right]\mid\text{צביעה חוקית } f\right\} =n!$.

גרף k־צביע: גרף G עבורו קיימת צביעה חוקית של G ב־k צבעים.

הערה: יהי G גרף אזי

- (G 1־צביע)$\Longleftrightarrow$($E\left(G\right)=\varnothing$).
- (G 2־צביע)$\Longleftrightarrow$(G גרף דו צדדי).

משפט: יהי G גרף אזי (G גרף דו צדדי)$\Longleftrightarrow$(אין ב־G מעגלים באורך אי־זוגי).

מספר הצביעה: יהי G גרף אזי $\chi\left(G\right)=\min\left\{ n\in\mathbb{N}\mid\text{הינו } n\text{־צביע } G\right\}$.

מסקנה: יהי G גרף שמקיים $E\left(G\right)\neq\varnothing$ אזי $2\leq\chi\left(G\right)\leq\left|V\left(G\right)\right|$.