```
a*b=*(a,b) אזי א איז פעולה A שימון: תהא A קבוצה ותהא A פעולה בינארית
                                            עבורו e \in G עבורה איי*: G 	imes G 	o G עבורה קיים *: G 	imes G 	o G
                                          a*(b*c)=(a*b)*c מתקיים a,b,c\in G אסוציאטיביות: לכל
                                                         a*e=e*a=a מתקיים a\in G איבר יחידה: לכל
                                              a*b=e=b*a עבורו b\in G קיים a\in G לכל לכל • איבר הופכי:
                                                   S(X) = \{f: X \to X \mid הפיכה f\} הפינה אזי קבוצה אזי
                                                                    (S(X), \circ) אזי קבוצה אזי תהא X קבורת התמורות:
                                                            טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.
                                                                                   S_n = S\left([n]
ight) אזי n \in \mathbb{N} סימון: יהי
                                                                                       |S_n|=n! אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                         (\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight),\cdot) אזי n\in\mathbb{N} שדה ויהי \mathbb{F} שדה יהי אזי n\in\mathbb{N}
                                                  . מענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי n\in\mathbb{N} אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.
                                                             \mathbb{F},+ אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\} אזי החבורות החיבוריות: יהי
                                                                        A^*=A^{\times}=A\setminus\{0\} אזי A\subset\mathbb{C} סימון: תהא
                                                                \mathbb{F}(\mathbb{F},\cdot) אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{O}^*,\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*\} אזי יהי
                                                                             .(\{x\}, Id) אזי (גון אוי החבורה הטריוואלית: יהי
                                         (x\sim_n y)\Longleftrightarrow (n|\,(x-y)) המוגדרת \sim_n\subseteq\mathbb{Z}^2 אזי n\in\mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                                        .C_n=\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} סימון: יהי
                           [x]_{\sim} + [y]_{\sim} = [x+y]_{\sim} הגדרה: יהי n \in \mathbb{N} אזי n \in \mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                     (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N} יהי החלוקה: חבורת שאריות
                                                         טענה: יהי n\in\mathbb{N} אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.
                                                                                        |C_n|=n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
              g*h=h*g מתקיים g,h\in G עבורה לכל חבורה (G,*) חבורה חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית:
                                                                         . טענה: יהי (S_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} אינה אבלית
                                                                    . אינה אבלית (GL_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot) אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי
                                                                               . אבלית (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N}_+ אבלית טענה: יהי
                                                                         |G| \in \mathbb{N} חבורה עבורה חבורה חבורה חבורה
                                                                    |G| \geq \aleph_0 עבורה אינסופית: חבורה חבורה אינסופית:
                                                     .ord (G)=|G| אזי חבורה סופית הא (G,*) חבורה: תהא
                                                        \operatorname{ord}\left(G
ight)=\infty אינסופית אינ חבורה תהא G חבורה: תהא
                                                                     o\left(G
ight)=\operatorname{ord}\left(G
ight) חבורה אזי (G,st
ight) סימון: תהא
                                           Hעבורה H,st_{H	imes H} אזי H\subseteq G עבורה ותהא חבורה (G,st)
                                                              a*b\in H מתקיים a,b\in H סגירות לכפל: סגירות ש
                                                               a^{-1} \in H מתקיים a \in H סגירות להופכי: לכל
                                                           e\in H אזי איבר היחידה של e אזי יהי •
                         H \leq G עבורה (H,*_{\restriction_{H \times H}}) תת־חבורה ותהא H \subseteq G אזי חבורה ותהא סימון: תהא
.(a*b^{-1}\in H מתקיים a,b\in H מתקיים (לכל H\leq G) אזי H\in \mathcal{P}\left(G\right)\setminus\left\{ \varnothing\right\} מתקיים (G,*) למה: תהא
                    A*B=\{a*b\mid (a\in A)\land (b\in B)\} סימון: תהא A,B\subseteq G חבורה ותהיינה G,*
                                     g*H=\{q\}*H אזי אוני q\in G ויהי ויהי חבורה (G,*) אזי חבורה תהא
                                                                              (n\mathbb{Z},+)<(\mathbb{Z},+) אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                     (\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot)\leq\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot
ight) שדה אזי n\in\mathbb{N} יהי ויהי n\in\mathbb{N}
                                                                      R_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\} אזי n\in\mathbb{N} דימון: יהי
```

A imes A o A פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי

 $(R_n,\cdot)\leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$ אזי $n\in\mathbb{N}$ טענה: יהי $G\leq G$ טענה: תהא $G\leq G$

```
הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.
                                              a*e=e*a=a עבורו a*e=e*a=a עבורו אזי קיים ויחיד אזי קיים ויחיד (G,*) אכל
                                              a*b=e=b*a עבורו b\in G אזי קיים ויחיד a\in G חבורה ויהי חבורה (G,*)
                                                     a^{-1}=b אזי ל־a\in G איבר הופכי ל־a\in G אזי חבורה יהי חבורה (a\in G) איבר הופכי
                                                               (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} אזי a,b \in G טענה: תהא (G,*) אחר טענה:
                                                                             a = a טענה: תהא a \in G טענה: תהא (G,*) חבורה ויהי
                                   a*b=a*c עבורם a,b,c\in G אזי חבורה ויהי משמאל: תהא מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא
                                     a,b=c אזי b*a=c*a עבורם a,b,c\in G אזי חבורה ויהי תהא מסקנה כלל צמצום מימין: תהא
                                                                                    g^0=e אזי g\in G חבורה ויהי (G,*) אזי
                                                            g^n=g*g^{n-1} אזי g\in G ויהי חבורה יהי חבורה (G,*) אזי הגדרה:
                                                                    g^{-n}=(g^n)^{-1} אזי g\in G ויהי n\in\mathbb{N} חבורה חבורה G אזי
                                                                    g^{-n}=\left(g^{-1}
ight)^n אזי g\in G ויהי חבורה יהי חבורה G אזי מענה: תהא
g,g'\in G ולכל g,h)\cdot (g',h')=(g*g',h\otimes h') חבורות נגדיר וולכל g,g'\in G לכל חבורת המכפלה: תהיינה וולכל חבורות נגדיר וולכל
                                                                                                                              (G \times H, \cdot)
                                                              . חבורה הינה הינה (G,*), (H,\otimes) חבורה אזי חבורת המכפלה הינה
                                             .(חבורת אזי (חבורת אבלית) חבורות אזי (חבורת אבלית) אבליות חבורות אזי (חבורת אבלית) טענה: תהיינה
                                               (HK=KH) אזי (H*K\leq G) אזי H,K\leq G טענה: תהא (G,*) חבורה ותהיינה
                                        (H \cap K \in \{H,K\}) עענה: תהא (H \cup K \leq G) אזי H,K \leq G טענה: תהא (G,*) אחריינה טענה:
                                          .Stab (Y)=\{\pi\in S\left(X\right)\mid \forall y\in Y.\pi\left(y\right)=y\} אזי Y\subseteq X אוי קבוצה ותהא X קבוצה ותהא
                                                                         .
Stab (Y) \leq S\left(X\right) אזי<br/> Y \subseteq X ותהא קבוצה תהא א קבוצה תהא אזי
                                   \bigcap_{i\in I}H_{i}\leq G אאי i\in I לכל לכל H_{i}\leq G באשר באשר \{H_{i}\}_{I\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(G
ight) אאי
                                                           \mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\} אזי X \subseteq G חבורה חבורה G הגדרה: תהא
                                        \langle X 
angle = igcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H איי אX \subseteq G חבורה ותהא חבורה תהקבוצה: תהא
                                                                                    \langle X 
angle < G אזי X \subseteq G אויי חבורה ותהא למה: תהא
                     \langle X 
angle \subseteq H אזי איזי איזי עבורה H \leq G ותהא אות חבורה תהא חבורה תהא אזי א אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי
                          \langle X 
angle = \left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \ \middle| \ (k \in \mathbb{N}) \land \left(x \in X^k
ight) \land \left(s \in \{\pm 1\}^k
ight)
ight\} אזי X \subseteq G איזי X \subseteq G איזי
                                                              \langle X \rangle = G עבורה אזיX \subset G חבורה תהא חבורה: תהא
                                                             חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.
                                                                       \langle g \rangle = G המקיים g \in G המקיים עבורה עבורה ציקלית: חבורה
                                                                            \langle g 
angle = \left\{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} 
ight\} אזי g \in G חבורה חבורה G למה: תהא
                                                             g^{n+m}=g^n*g^m אזי g\in G ויהי n,m\in\mathbb{Z} טענה: תהא
                                                                (g^n)^m=g^{n\cdot m} אזי g\in G ויהי n,m\in\mathbb{Z} חבורה חבורה G אסענה: תהא
                                                  G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\} עבורו g \in G עבורו ציקלית) ציקלית אזי (G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\} עבורו אזי מהא
                                                                                          . אבלית אזי G חבורה אין חבורה G אבלית מסקנה:
                                                                   .ord (g)=\operatorname{ord}\left(\langle g
angle
ight) אזי g\in G חבורה חבורה G חבורה של איבר: תהא
                                                           .ord (g)=\min\left\{n\in\mathbb{N}_+\mid g^n=e\right\} אזי g\in G חבורה ויהי חבורה G
                                                         \operatorname{ord}\left(g
ight)=\infty אזי \operatorname{ord}\left(g
ight) עבורו g\in G חבורה ויהי G חבורה מערה:
                               g \in G טענה: תהא G = e (ord G = e) איי G = G באשר G \in G טענה: תהא G = e ויהי G \in G ויהי
                                                                       . איי (i,n)ליים). איי (i,n)ליים). ויהי i\in\mathbb{Z}_n ויהי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי
                                                                          . אזי H אזי איזי איזי איקלית ותהא H < G אזי איקלית ובורה עיקלית תהא
                                                                                                                 .טענה: (\mathbb{Q},+) אינה נ"ס
                                                                      H*g אזי g\in G ויהי ויהי H\leq G אזי חבורה תהא
```

 $\{e\} \leq G$ טענה: תהא (G,*) חבורה אזי

g*H אזי $g\in G$ ויהי ויהי $H\leq G$ אחבורה תהא חבורה G אזי אזי g

```
Hq = qH אזי q \in G ויהי H < G מסקנה: תהא חבורה אבלית תהא
                                                          (gH)^{-1}=Hg^{-1} אזי g\in G ויהי H\leq G מסקנה: תהא
                                                      (gH=H)אזי (g\in H) איזי (g\in H) ויהי (g\in H) איזי חבורה תהא
                                                      (Hg=H) \Longleftrightarrow (g\in H) אזי g\in G ויהי H\leq G טענה: תהא
                                                                   G/H = \{gH \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G חבורה תהא
                                                                  H \setminus G = \{Hg \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G חבורה G
                                                                       G משפט: תהא G חבורה ותהא H \leq G חבורה חבורה משפט:
                                    .(g_1H=g_2H)\Longleftrightarrow \left(g_2^{-1}g_1\in H
ight) אזי g_1,g_2\in G ויהיו H\leq G חבורה תהא חבורה G
                                                                         .eH אזי אוי H \leq G חבורה ותהא חבורה תהא אזי אזי
                                              |G:H|=|G/H| אזי אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא חבורה ותהא H\leq G אינדקס של הת־חבורה
                                                                        G:H]=|_Hackslash_G| אזי H\leq G טענה: תהא G חבורה ותהא
                                                     \operatorname{ord}\left(G
ight)=\operatorname{ord}\left(H
ight)\cdot\left[G:H
ight] אזי H\leq G סענה: תהא חבורה סופית ותהא
                                                         .ord (H) | \mathrm{ord} \, (G) אזי H \leq G משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא
                                                                     .ord (g) | \mathrm{ord} \, (G) אזי g \in G מסקנה: תהא חבורה סופית ויהי
                                            G:K] = [G:H] \cdot [H:K] אזי איי ותהא H < G טענה: תהא חבורה תהא G:K < H
                             G=\langle g 
angle מתקיים g\in G\setminus \{e\} אזי לכל ord G=p מתקיים חבורה חבורה מסקנה: יהי
                                                       אזי G אזי G אזי G אזי G אזי G אזי סופית באשר חבורה סופית ההא g \in \mathbb{P}
                                  n^{p-1}\equiv 1\mod p אזי \gcd(n,p)=1 באשר n\in\mathbb{N} ויהי p\in\mathbb{P} יהי מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי
                                                   |HK| = rac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|} אזי חבורות חוברה H,K \leq G למה: תהא G חבורה תהא
\operatorname{ord}(K)=p וכן \operatorname{ord}(H)=p באשר H,K\leq G אזי לכל ותהא G=p חבורה באשר G ותהא G חבורה באשר אזי לכל
                                                                                                                     K=H מתקיים
                                                                  (S_n/\mathsf{Stab}(1))\cap (S_\mathsf{Stab}(1)\setminus S_n)=\{\mathsf{Stab}(1)\} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} יהי n\in\mathbb{N}_{\geq 3}
                                                              HgK אזי g\in G ויהי ויהי H,K\leq G אזי חבורה תהיינה
                                                    G טענה: תהא G חלוקה של H,K \leq G טענה: תהא חבורה ותהיינה
                                                                      המקיימת \varphi:G 	o H אזי חבורות G,H המקיימת הומומורפיזם:
                                                                                            .arphi\left(e_{G}
ight)=e_{H} :שימור איבר יחידה
                                                                 .arphi\left(a\cdot b
ight)=arphi\left(a
ight)\cdotarphi\left(b
ight) מתקיים a,b\in G שימור כפל: לכל
                                                                      .arphi\left(g^{-1}\right)=arphi\left(g
ight)^{-1} שימור הופכי: לכל g\in G מתקיים •
. (arphi\left(a\cdot b^{-1}
ight)=arphi\left(a
ight)\cdotarphi\left(b
ight)^{-1} מתקיים a,b\in G מתקיים a,b\in G אזי (arphi הומומורפיזם) אזי (לכל arphi הומומורפיזם) אזי (מינה G,H מתקיים מענה:
              \ker\left(arphi
ight)=\left\{g\in G\midarphi\left(g
ight)=e_{H}
ight\} אזי הומומורפיזם הומור מינה הבורות ויהי חבורות היינה G,H חבורות היינה אזי
                                                                      למה: תהיינה G,H חבורות ויהי \varphi:G	o H חבורות מחורפיזם אזי
                                                                                                                  \operatorname{Im}(\varphi) \leq H \bullet
                                                                                                                  \ker(\varphi) \leq G \bullet
                                                                                              (\ker(\varphi) = \{e_G\}) \iff (y \text{''nn } \varphi) \bullet
            טענה: תהיינה G,H,K חבורות יהי \varphi:G	o H הומומורפיזם ויהי \psi:H	o K הומומורפיזם היהי הומומורפיזם אזי
                                   \operatorname{ord}(\varphi(q))|\operatorname{ord}(q) אזי q\in G אויי הומומורפיאם ויהי g\in G אויי היינה G,H טענה: תהיינה
                                                                                      . סענה: תהא G חבורה אזי Id טענה: תהא
            טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא G חבורה אזי g\in G המוגדרת g\in G לכל g\in G הינה הומומורפיזם.
                                     טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא H 	imes G אזי חבורה ותהא חבורה ותהא ומומורפיזם ההכלה: הומומורפיזם החבלה
                                                    . הינו הומומורפיזם \det: \operatorname{GL}(V) 	o \mathbb{F}^* אזי \mathbb{F} מ"ו מעל V מ"ו שדה ויהי \mathbb{F} שדה משנה: יהי
```

g אזי קוסט שמאלי: תהא חבורה ויהי gH קוסט שמאלי: תהא

```
sign\left(\sigma
ight)=rac{\prod_{i< j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i< j}(i-j)} אא \sigma\in S_n ותהא n\in\mathbb{N} ותהא n\in\mathbb{N} איז n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא n\in\mathbb{N} אאי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא n\in\mathbb{N} אאי
                                                                A_n = \ker\left(\operatorname{sign}
ight) אזי n \in \mathbb{N} חבורת התמורות הזוגיות: יהי
                                                                                             A_n \leq S_n טענה: יהי n \in \mathbb{N} טענה:
                                                 .arphi:G	o H חבורות אזי הומומורפיזם: תהיינה G,H איזומורפיזם:
                                                                    G \cong H אזי איזומורפיות איזומור G,H סימון: תהיינה
                                       . למה: תהיינה G,H חבורות ויהי \varphi:G	o H ויהי חבורות מהיינה למה: תהיינה מיינה חבורות ויהי
למה: תהיינה \psi\circ \varphi איזומורפיזם איז \psi:H	o K איזומורפיזם ויהי \varphi:G	o H איזומורפיזם איז למה: תהיינה
                                                              \mathcal{A} טענה: תהא \mathcal{A} קבוצה של חבורות אזי יחס שקילות על
                                                                                             .C_n\cong R_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                .arphi:G	o H מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם: תהיינה
                                                    arphi : G 	o H אפימורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם
                                                               arphi:G	o G אוטומורפיזם אזי חבורה חבורה G תהא
                                                                                                 K = C_2 \times C_2 :חבורת קליין
                                                                                             טענה: חבורת קליין הינה אבלית.
                                                                                            טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.
                                                                                 .C_4טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־
              c_g\left(x
ight)=g^{-1}xg המוגדרת הצמדה: תהא c_g:G	o G אזי איזי חבורה ויהי חבורה c_g\left(x
ight)=g^{-1}xg המוגדרת הצמדה: תהא
                                                                     . טענה: תהא G חבורה ויהי g \in G איזומורפיזם G איזומורפיזם
                            .c_{a}\left( H
ight) =H מתקיים g\in G עבורה לכל עבורה אזי H\leq G חבורה אזי תהא G
                                                               H \unlhd G נורמלית אזי H \subseteq G חבורה חבורה G חבורה H \subseteq G
                                                                                טענה: תהא G חבורה ותהא H < G
                                                                                                                  .H \triangleleft G \bullet
                                                                                    q^{-1}Hq=H מתקיים q\in G לכל
                                                                                    .qHq^{-1}=H מתקיים q\in G לכל
                                                                                      .gH=Hg מתקיים g\in G לכל
                                                                        H \unlhd G אזי אזי H \subseteq G מסקנה: תהא חבורה חבורה מסקנה
                                           \ker\left(\varphi\right) 	extlesigma G אזי אוינה G,H חבורות ויהי ויהי G 	extlesigma G 	extlesigma G חבורות ויהי
                                                                                             A_n 	riangleleft S_n אזי n \in \mathbb{N} טענה: יהי
                                                  H \in \{\{e\},G\} מתקיים H \triangleleft G עבורה לכל G חבורה פשוטה:
                                                                                           . פשוטה C_p אזי p\in\mathbb{P} פשוטה מסקנה: יהי
                                                                                    טענה: יהי n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}} פשוטה. n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}
           .(gN)*(hN)=(g*h)\,N כך *:G/N	imes G/N	o G/N נגדיר N	ext{ } \subseteq G נגדיר (G,*) חבורה ותהא M	ext{ } \subseteq G
                                                            (G/N,*) אזי N \subseteq G חבורה ותהא חבורה (G,*) אזי
                                                      . סענה: תהא G חבורה ותהא N \lhd G אזי חבורת המנה הינה חבורה.
                               q\left(g
ight)=gN המוגדרת q:G	o G/N אזי איזי N	olember G חבורה תהא
                                                           טענה: תהא חבורה תהא N \unlhd G ותהא חבורה G העתקת המנה אזי
                                                                                                   הינה הומומורפיזם. q
                                                                                                           \ker(q) = N \bullet
```

.($G=\ker\left(arphi
ight)$ עבורו arphi:G o G עבורו איז ($G=\ker\left(arphi
ight)$ איז ($G=\ker\left(arphi
ight)$ עבורו G

 $\det\left(
ho\left(\sigma
ight)
ight)\in\left\{\pm1
ight\}$ אזי $\sigma\in S_n$ ותהא $n\in\mathbb{N}$ טענה: יהי

מסקנה: יהי אזי sign אזי $n\in\mathbb{N}$ יהי יהי

y a • על.

 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_n$ אזי $n\in\mathbb{N}$ טענה: יהי

 $\operatorname{sign} = \det \circ
ho$ המוגדרת sign : $S_n o \{\pm 1\}$ אזי $n \in \mathbb{N}$ המוגדרת סימן של תמורה: יהי

 $G/\ker(arphi)\cong \mathrm{Im}\,(arphi)$ אזי איזומורפיזם איזומורפיזם חבורות ויהי חבורות ויהי חבורות ההיינה הראשון: תהיינה משפט האיזומורפיזם הראשון