

טענה:  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

תת-קבוצה סגורה ביחס לחיבור חיסור וכפל: קבוצה  $S \subseteq \mathbb{R}$  עבורה לכל  $a, b \in S$  מתקיים  $a + b \in S$  וכן  $a - b \in S$  וכן  $ab \in S$ .  
טענה:  $\mathbb{Z}$  סגורה ביחס לחיבור חיסור וכפל.

קבוצה המקיימת את האי־שוויון היסודי של תורת המספרים: קבוצה  $S \subseteq \mathbb{R}$  המקיימת  $S \cap (0, 1] = \{1\}$ .  
טענה:  $\mathbb{Z}$  מקיימת את האי־שוויון היסודי של תורת המספרים.

טענה: תהא  $S \subseteq \mathbb{R}$  המקיימת את האי־שוויון היסודי של תורת המספרים וכן סגורה ביחס לחיבור חיסור וכפל אזי  $S = \mathbb{Z}$ .  
מסקנה עיקרון הסדר הטוב על הטבעיים: תהא  $S \subseteq \mathbb{N}$  באשר  $S \neq \emptyset$  אזי  $\min(S)$  קיים.

טענה: תהא  $S \subseteq \mathbb{Z}$  חסומה מלרע באשר  $S \neq \emptyset$  אזי  $\min(S)$  קיים.

מסקנה: תהא  $S \subseteq \mathbb{Z}$  חסומה מלעיל באשר  $S \neq \emptyset$  אזי  $\max(S)$  קיים.

מסקנה:  $\mathbb{Z}$  אינה חסומה מלרע וכן אינה חסומה מלעיל.

מסקנה עיקרון האינדוקציה: יהי  $P$  פרידיקט מעל  $\mathbb{N}$  באשר  $P(0)$  וכן לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $P(n) \implies P(n+1)$  אזי  $P(m)$  לכל  $m \in \mathbb{N}$ .

טענה עיקרון האינדוקציה החזקה: יהי  $P$  פרידיקט מעל  $\mathbb{N}$  באשר  $P(0)$  וכן לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $P(n+1) \implies (\forall m < n. P(m))$  אזי  $P(k)$  לכל  $k \in \mathbb{N}$ .

מספר מתחלק במספר: יהי  $b \in \mathbb{Z}$  אזי  $a \in \mathbb{Z}$  עבורו קיים  $c \in \mathbb{Z}$  המקיים  $b = ac$ .

סימון: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  באשר  $b$  מתחלק ב־ $a$  אזי  $a|b$ .

סימון: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  באשר  $b$  אינו מתחלק ב־ $a$  אזי  $a \nmid b$ .

טענה: יהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $a|0$ .

טענה: יהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $1|a$  וכן  $-1|a$ .

טענה: יהיו  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  באשר  $a|b$  וכן  $a|c$  אזי לכל  $c, d \in \mathbb{Z}$  מתקיים  $a|(db + ec)$ .

טענה: יהיו  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  באשר  $a|b$  וכן  $a|c$  אזי  $a|b$ .

טענה: יהיו  $a, b \in \mathbb{N}$  באשר  $a|b$  אזי  $a \leq b$ .

טענה: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $((a|b) \wedge (b|a)) \iff (a \in \{\pm b\})$ .

טענה חלוקה עם שארית: יהי  $d \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי קיימים ויחידים  $q, r \in \mathbb{Z}$  באשר  $0 \leq r < d$  וכן  $a = qd + r$ .

מנה של חלוקה: יהי  $d \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $q, r \in \mathbb{Z}$  חלוקה עם שארית של  $a$  ב־ $d$  אזי  $q$ .

שארית של חלוקה: יהי  $d \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $q, r \in \mathbb{Z}$  חלוקה עם שארית של  $a$  ב־ $d$  אזי  $r$ .

מסקנה: יהי  $d \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $q, r \in \mathbb{Z}$  חלוקה עם שארית של  $a$  ב־ $d$  אזי  $(r = 0) \iff (d|a)$ .

החלק השלם/ערך שלם תחתון: יהי  $x \in \mathbb{R}$  אזי  $[x] = \max((-\infty, x] \cap \mathbb{Z})$ .

מסקנה: יהי  $d \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $q, r \in \mathbb{Z}$  חלוקה עם שארית של  $a$  ב־ $d$  אזי  $q = \lfloor \frac{a}{d} \rfloor$ .

טענה: תהא  $H \leq \mathbb{Z}$  אזי קיים ויחיד  $d \in \mathbb{N}$  עבורו  $H = d\mathbb{Z}$ .

טענה: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ .

מחלק משותף מירבי: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $d \in \mathbb{N}$  עבורו  $d\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ .

סימון: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  ויהי  $d \in \mathbb{N}$  המחלק המשותף המירבי של  $a, b$  אזי  $\gcd(a, b) = d$ .

סימון: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $\gcd(a, b) = \gcd(b, a)$ .

טענה: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $\gcd(a, b) | a$  וכן  $\gcd(a, b) | b$ .

מסקנה: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי קיימים  $n, m \in \mathbb{Z}$  עבורם  $\gcd(a, b) = na + mb$ .

טענה: יהיו  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  באשר  $c|a$  וכן  $c|b$  אזי  $c|\gcd(a, b)$ .

טענה: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  באשר  $\{a, b\} \neq \{0\}$  אזי  $\gcd(a, b) = \max\{d \in \mathbb{Z} \mid (d|a) \wedge (d|b)\}$ .

טענה: יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  ויהי  $d \in \mathbb{N}$  באשר  $d|a$  וכן  $d|b$  וכן קיימים  $n, m \in \mathbb{Z}$  עבורם  $d = na + mb$  אזי  $\gcd(a, b) = d$ .

מחלק משותף מירבי: יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי  $d \in \mathbb{N}$  עבורו  $d\mathbb{Z} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{Z}$ .

סימון: יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  ויהי  $d \in \mathbb{N}$  המחלק המשותף המירבי של  $a_1 \dots a_n$  אזי  $\gcd(a_1 \dots a_n) = d$ .

טענה: יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי  $\gcd(a_1 \dots a_n) | a_i$  לכל  $i \in [n]$ .

מסקנה: יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי קיים  $m \in \mathbb{Z}^n$  עבורו  $\gcd(a_1 \dots a_n) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot a_i$ .

טענה: יהיו  $a_1 \dots a_n, d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d|a_i$  לכל  $i \in [n]$  אזי  $d|\gcd(a_1 \dots a_n)$ .

מספרים זרים: מספרים  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  המקיימים  $(a_1 \dots a_n) = 1$ .

**מספר פרמה:**  $F_k = 2^{2^k} + 1$  יהי  $k \in \mathbb{N}$  אזי

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  אזי  $F_{k+1} - 2 = \prod_{i=0}^k F_i$

**מסקנה:** יהיו  $n, k \in \mathbb{N}$  שונים אזי  $(F_k, F_n) = 1$

**טענה:** יהי  $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי קיים ויחיד  $k \in \mathbb{N}$  וקיים ויחיד  $d \in \{0, \dots, b-1\}^k$  באשר  $d_k > 0$  המקיים  $n = \sum_{i=1}^k d_i b^i$

**ייצוג ספרתי בבסיס:** יהי  $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  יהיו  $n, k \in \mathbb{N}$  ויהי  $d \in \{0, \dots, b-1\}^k$  באשר  $d_k > 0$  וכן  $n = \sum_{i=1}^k d_i b^i$  אזי  $(n)_b = d$

**הערה:** כאשר לא כתוב בסיס בייצוג נתייחס לבסיס עשרוני.

**טענה:** יהי  $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\text{len}((n)_b) = \lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$

**מספר הביטים לייצוג מספר:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\text{len}((n)_2)$

**הערה:** בסיבוכיות של אלגוריתמים מספריים נתייחס לסיבוכיות כפונקציה של אורך המספר בבינארי.

**טענה:** קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  המחשב חיבור מספרים בסיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}(n)$

**טענה:** קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  המחשב כפל מספרים בסיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}(n^2)$

**אלגוריתם קרטסובה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  ויהיו  $a, b \in \{0, 1\}^n$  אזי

**Function KaratsubaMult( $a, b$ ):**

```
if  $n = 1$  then return  $a_1 \cdot b_1$ 
 $\alpha \leftarrow (a_1 \dots a_{\frac{n}{2}}); \quad \beta \leftarrow (a_{\frac{n}{2}+1} \dots a_n)$ 
 $\gamma \leftarrow (b_1 \dots b_{\frac{n}{2}}); \quad \delta \leftarrow (b_{\frac{n}{2}+1} \dots b_n)$ 
 $A \leftarrow \text{KaratsubaMult}(\alpha, \gamma)$ 
 $B \leftarrow \text{KaratsubaMult}(\beta, \delta)$ 
 $C \leftarrow \text{KaratsubaMult}(\alpha + \beta, \gamma + \delta)$ 
return  $B \cdot 2^n + (C - B - A) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + A$ 
```

**טענה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{N}$  אזי  $(\text{KaratsubaMult}((a)_2, (b)_2))_{10} = ab$

**טענה:** סיבוכיות הריצה של KaratsubaMult הינה  $\mathcal{O}(n^{\log_2(3)})$

**טענה קולי-טוקי:** קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  המחשב כפל מספרים בסיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}(n \log(n))$

**למה:** יהיו  $a, b, q \in \mathbb{Z}$  אזי  $\gcd(a, b) = \gcd(a + qb, b)$

**אלגוריתם אוקלידס:** יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי

**Algorithm EuclidGCD( $a, b$ ):**

```
if  $(a < 0) \vee (b < 0) \vee (|a| < |b|)$  then
    return EuclidGCD( $\max\{|a|, |b|\}, \min\{|a|, |b|\}$ )
if  $b = 0$  then return  $a$ 
 $(q, r) \leftarrow \text{RemainderDiv}(a, b)$ 
return EuclidGCD( $b, r$ )
```

**טענה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $\text{EuclidGCD}(a, b) = \gcd(a, b)$

**טענה:** סיבוכיות הריצה של EuclidGCD הינה  $\mathcal{O}(n^2)$

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(-1)^k F_{k-1} \cdot F_{k+1} + (-1)^{k+1} F_k F_k = 1$

**טענה:** קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  המחשב  $\gcd$  בסיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}(n \log^2(n))$

**כפולה משותפת מזערית:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי  $d \in \mathbb{N}$  עבורו  $d\mathbb{Z} = \bigcap_{i=1}^n a_i \mathbb{Z}$

**סימון:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  ויהי  $d \in \mathbb{N}$  הכפולה המשותפת המזערית של  $a_1 \dots a_n$  אזי  $\text{lcm}(a_1 \dots a_n) = d$

**סימון:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי  $[a_1 \dots a_n] = \text{lcm}(a_1 \dots a_n)$

**טענה:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי  $a_i | \text{lcm}(a_1 \dots a_n)$  לכל  $i \in [n]$

**טענה:** יהיו  $a_1 \dots a_n, m \in \mathbb{Z}$  באשר  $a_i | m$  לכל  $i \in [n]$  אזי  $\text{lcm}(a_1 \dots a_n) | m$

**טענה:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  אזי  $\text{lcm}(a_1 \dots a_n) = \min \{m \in \mathbb{N}_+ \mid \forall i \in [n]. (a_i | m)\}$

**למה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  באשר  $a \neq 0$  אזי  $(a|b) \iff (\frac{b}{a} \in \mathbb{Z})$

**למה:** יהיו  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  אזי  $(a|b) \iff (ac|bc)$

**טענה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{N}_+$  אזי  $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$

**טענה:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי  $[a_1, \dots, a_n] = [|a_1|, \dots, |a_n|]$ .

**מספרים זרים:** מספרים  $a, b \in \mathbb{Z}$  המקיימים  $(a, b) = 1$ .

**מסקנה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  זרים אזי  $[a, b] = |ab|$ .

**טענה:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי  $[a_1 \dots a_n] = [a_1 \dots a_{n-1}, a_n]$ .

**מספר ראשוני:** מספר  $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  עבורו לכל  $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  מתקיים  $ab \neq p$ .

**סימון:**  $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ראשוני}\}$ .

**מספר פריק:** מספר  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  באשר  $m \notin \mathbb{P}$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ויהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  באשר  $p|ab$  אזי  $(p|a) \vee (p|b)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  עבורו לכל  $a, b \in \mathbb{Z}$  אם  $n|ab$  אז  $(n|a) \vee (n|b)$  אזי  $n \in \{0, \pm 1\} \cup (\pm \mathbb{P})$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ויהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  באשר  $p \mid \prod_{i=1}^n a_i$  אזי קיים  $i \in [n]$  המקיים  $p|a_i$ .

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  אזי קיים  $p \in \mathbb{P}$  המקיים  $p|n$ .

**אלגוריתם הנפה של ארטוסתנס:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  אזי

**Algorithm EratosthenesSieve( $N$ ):**

```
A ← ⟨True | n ∈ [1, ..., N]⟩; A1 = False
for i ∈ [1, ..., N] do
    if Ai = True then
        j ← 1
        while i + 2j ≤ N do
            Ai+2j = False
            j ← j + 1
        end
    end
end
return {i ∈ [N] | Ai = True}
```

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\text{EratosthenesSieve}(N) = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq N\}$ .

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  אזי סיבוכיות הריצה של  $\text{EratosthenesSieve}(N)$  הינה  $\mathcal{O}\left(\left(\sum_{p \in \mathbb{P}_{\leq N}} \frac{1}{p}\right) \cdot N\right)$ .

**טענה אטקין-ברנסטיין:** קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  עבורו  $\mathcal{A}(N) = \mathbb{P}_{\leq N}$  לכל  $N \in \mathbb{N}_+$  וכן  $\mathcal{A}$  רץ בסיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}(N)$ .

**משפט היסודי של האריתמטיקה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי קיימים ויחידים  $p_1 \dots p_k \in \mathbb{P}$  באשר  $p_i < p_{i+1}$  לכל  $i \in [k-1]$  המקיימים

$$n = \prod_{i=1}^k p_i$$

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $e_p(n) = \max\{m \in \mathbb{N} \mid (p^m|n)\}$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $p^{e_p(n)} || n$ .

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{e_p(n)}$ .

**מסקנה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $e_p(mn) = e_p(m) + e_p(n)$ .

**מסקנה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(m|n) \iff (\forall p \in \mathbb{P}. e_p(m) \leq e_p(n))$ .

**מסקנה:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(a_1 \dots a_n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{e_p(a_i) \mid i \in [n]\}}$ .

**מסקנה:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $[a_1 \dots a_n] = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{e_p(a_i) \mid i \in [n]\}}$ .

**מסקנה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(m, n) \iff (p|n \text{ וכן } p|m \text{ ללא קיים } p \in \mathbb{P})$ .

**משפט אוקלידס:**  $|\mathbb{P}| = \aleph_0$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי קיים  $b \in \mathbb{N}$  עבורו  $\{b+i \mid i \in \{0, \dots, n\}\} \cap \mathbb{P} = \emptyset$ .

**השערה הראשוניים התאומים:** יהי  $N \in \mathbb{N}$  קיים  $p \in \mathbb{P}$  באשר  $p \geq N$  וכן  $p+2 \in \mathbb{P}$ . השערה פתוחה

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  אזי  $\prod_{p \in \mathbb{P}_{\leq n}} p \leq 4^{n-1}$ .

**ראשוני סופי ז'רמן:** ראשוני  $p \in \mathbb{P}$  המקיים  $2p+1 \in \mathbb{P}$ .

**טענה:**  $|\mathbb{P} \cap (4\mathbb{N}+3)| = \aleph_0$ .

**טענה:**  $|\mathbb{P} \cap (4\mathbb{N}+1)| = \aleph_0$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  יהי  $a \in \mathbb{Z}$  תהא  $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  העתקת המנה ויהי  $r \in \mathbb{N}$  שארית החלוקה של  $a$  ב- $n$  אזי  $\pi(a) = r + n\mathbb{Z}$ .

**מודולו:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $(a \bmod n) = a + n\mathbb{Z}$ .

**מספרים שקולים תחת מודולו:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a, b \in \mathbb{Z}$  עבורם  $(a \bmod n) = (b \bmod n)$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a, b \in \mathbb{Z}$  שקולים מודולו  $n$  אזי  $a \equiv b \pmod n$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $(n | (a - b)) \iff (a \equiv b \pmod n)$ .

**טענה:** יהיו  $n, r \in \mathbb{N}_+$  באשר  $r | n$  ויהיו  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  באשר  $r | \alpha, \beta$  אזי  $\left(\frac{\alpha}{r} \equiv \frac{\beta}{r} \pmod{\frac{n}{r}}\right) \iff (\alpha \equiv \beta \pmod n)$ .

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  באשר  $a \equiv c \pmod n$  וכן  $b \equiv d \pmod n$  אזי  $a + b \equiv c + d \pmod n$ .

**הגדרה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $(a + b \bmod n) = ((a \bmod n) + (b \bmod n))$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  חבורה אבלית.

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  ויהיו  $a_0 \dots a_k \in \{0, \dots, 9\}$  אזי  $(2 | a) \iff (2 | a_0)$ .

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  ויהיו  $a_0 \dots a_k \in \{0, \dots, 9\}$  אזי  $(3 | a) \iff (3 | (\sum_{i=0}^k a_i))$ .

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  ויהיו  $a_0 \dots a_k \in \{0, \dots, 9\}$  אזי  $(5 | a) \iff (5 | a_0)$ .

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  ויהיו  $a_0 \dots a_k \in \{0, \dots, 9\}$  אזי  $(7 | a) \iff (7 | (5a_0 + \sum_{i=1}^k 10^{i-1} a_i))$ .

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  ויהיו  $a_0 \dots a_k \in \{0, \dots, 9\}$  אזי  $(9 | a) \iff (9 | (\sum_{i=0}^k a_i))$ .

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  ויהיו  $a_0 \dots a_k \in \{0, \dots, 9\}$  אזי  $(11 | a) \iff (11 | (\sum_{i=0}^k (-1)^i a_i))$ .

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהיו  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  באשר  $a \equiv c \pmod n$  וכן  $b \equiv d \pmod n$  אזי  $ab \equiv cd \pmod n$ .

**הגדרה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $(a \cdot b \bmod n) = ((a \bmod n) \cdot (b \bmod n))$ .

**הערה:** אלא אם כן נאמר אחרת חוג הינו חוג חילופי בעל יחידה.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  חוג.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \iff (n \in \mathbb{P})$ .

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  באשר  $a \equiv b \pmod n$  אזי  $(a, n) = (b, n)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $((a, n) = 1) \iff ((a \bmod n) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)$ .

**אלגוריתם הופכי בחבורת שאריות החלוקה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $(a, n) = 1$  אזי

**Algorithm InverseMod( $n, a$ ):**

$(b, c) \leftarrow \text{ExtendedEuclidGCD}(a, n) \quad // \quad ba + cn = \text{gcd}(a, n)$

$(q, r) \leftarrow \text{RemainderDiv}(b, n)$

**return**  $r$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $(a, n) = 1$  אזי  $\text{InverseMod}(n, a) = (a \bmod n)^{-1}$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = \{(i \bmod p) \mid i \in \{0, \dots, p-1\}\}$ .

**פונקציית אויילר:** נגדיר  $\varphi : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}$  כך  $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$ .

**טענה:** יהיו  $p_1 \dots p_k \in \mathbb{P}$  שונים ויהיו  $e_1 \dots e_k \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\varphi(\prod_{i=1}^k p_i^{e_i}) = \prod_{i=1}^k (p_i^{e_i} - p_i^{e_i-1})$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ראשוני עבורו קיים  $n \in \mathbb{N}_+$  המקיים  $\varphi(n) = 2p$  אזי  $p$  ראשוני סופי זרמן.

**משפט אויילר:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $(a, n) = 1$  אזי  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ .

**משפט הקטן של פרמה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $p \nmid a$  אזי  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $a^p \equiv a \pmod p$ .

**מספרים זרים בזוגות:** מספרים  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  המקיימים  $(a_i, a_j) = 1$  לכל  $i, j \in [n]$ .

**טענה:** יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  זרים בזוגות אזי  $[a_1, \dots, a_n] = \prod_{i=1}^n a_i$ .

**הגדרה:** יהי  $m \in \mathbb{N}_+$  ויהיו  $a, v \in \mathbb{Z}^n$  באשר  $v_i \equiv a_i \pmod{m_i}$  לכל  $i \in [n]$  אזי  $v \equiv a \pmod m$ .

**הגדרה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי נגדיר  $1^n \in \mathbb{N}^n$  כך  $(1^n)_i = 1$  לכל  $i \in [n]$ .

**משפט השאריות הסיני:** יהיו  $m_1 \dots m_n \in \mathbb{N}_+$  זרים בזוגות ויהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$

• קיים  $s \in \mathbb{Z}$  המקיים  $1^n s \equiv a \pmod m$ .

• לכל  $y \in \mathbb{Z}$  המקיים  $1^n y \equiv a \pmod m$  מתקיים  $\text{sols}_{\mathbb{Z}}(1^n x \equiv a \pmod m) = \{y + k \prod_{i=1}^n m_i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**אלגוריתם פתרון למערכת משוואות מודולרית:** יהיו  $m_1 \dots m_n \in \mathbb{N}_+$  זרים בזוגות ויהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$

**Algorithm** ModEquationSys( $m_1 \dots m_n, a_1 \dots a_n$ ):

```

for  $i \in [n]$  do
     $M_i \leftarrow \prod_{j \in [n] \setminus \{i\}} m_j$ 
     $N_i \leftarrow \text{InverseMod}(m_i, M_i)$ 
end
return  $\sum_{i=1}^n a_i M_i N_i$ 

```

**טענה:** יהיו  $m_1 \dots m_n \in \mathbb{N}_+$  זרים בזוגות ויהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי  $a \equiv \mathbf{1}^n \cdot \text{ModEquationSys} \pmod{m}$

**טענה:** יהיו  $m_1 \dots m_n \in \mathbb{N}_+$  ויהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  אזי (קיים  $x \in \mathbb{Z}$  המקיים  $x \equiv a \pmod{m}$ )  $\iff (1^n x \equiv a \pmod{m})$  (לכל  $i, j \in [n]$  מתקיים  $a_i \equiv a_j \pmod{(m_i, m_j)}$ )

**משפט השאריות הסיני:** יהיו  $m_1 \dots m_n \in \mathbb{N}_+$  זרים בזוגות אזי  $\mathbb{Z}/(\prod_{i=1}^n m_i) \mathbb{Z} \simeq \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  אזי  $k = \frac{1}{2}n \cdot \varphi(n)$   $\sum_{\gcd(k, n)=1} k$

**פונקציה כפלית:** פונקציה  $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  עברה לכל  $n, m \in \mathbb{N}$  באשר  $(n, m) = 1$  מתקיים  $f(nm) = f(n)f(m)$

**טענה:**  $\varphi$  פונקציה כפלית.

**טענה:** תהא  $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  כפלית באשר  $f \neq 0$  אזי  $f(1) = 1$

**טענה:** תהייה  $f, g: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  כפליות באשר לכל  $p \in \mathbb{P}$  ולכל  $k \in \mathbb{N}$  מתקיים  $f(p^k) = g(p^k)$  אזי  $f = g$

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}_+$  ונגדיר  $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $f(n) = \gcd(n, k)$  אזי  $f$  כפלית.

**טענה:** תהא  $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  כפלית אזי  $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת  $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$  הינה כפלית.

**פונקציית סכום המחלקים:** נגדיר  $\sigma: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}$  כך  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$

**מסקנה:**  $\sigma$  פונקציה כפלית.

**מספר מושלם:** מספר  $n \in \mathbb{N}$  המקיים  $\sigma(n) = 2n$

**טענה:** יהיו  $n, d \in \mathbb{N}_+$  תהא  $G$  חבורה ציקלית מסדר  $n$  ויהי  $g \in G$  יוצר של  $G$  אזי  $(g^d = 1) \iff (n|d)$

**טענה:** יהיו  $n, d \in \mathbb{N}_+$  תהא  $G$  חבורה ציקלית מסדר  $n$  ויהי  $g \in G$  יוצר של  $G$  אזי  $\text{ord}(g^d) = \frac{n}{(n, d)}$

**טענה:** יהיו  $d, n \in \mathbb{N}_+$  באשר  $d|n$  ותהא  $G$  חבורה ציקלית מסדר  $n$  אזי  $\varphi(d) = |\{a \in G \mid \text{ord}(a) = d\}|$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ותהא  $G$  חבורה ציקלית מסדר  $n$  אזי  $\{a \in G \mid a \text{ יוצר של } G\} = \{g^d \mid (d, n) = 1\}$

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ותהא  $G$  חבורה ציקלית מסדר  $n$  אזי  $|\{g^d \mid (d, n) = 1\}| = \varphi(n)$

**מסקנה:** יהיו  $d, n \in \mathbb{N}_+$  באשר  $d|n$  ותהא  $G$  חבורה ציקלית מסדר  $n$  אזי  $|\{a \in G \mid a^d = 1\}| = d$

**מסקנה:** יהיו  $d, n \in \mathbb{N}_+$  ותהא  $G$  חבורה ציקלית מסדר  $n$  אזי  $|\{a \in G \mid a^d = 1\}| = (n, d)$

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ותהא  $G$  חבורה מסדר  $n$  אזי  $(G \text{ ציקלית}) \iff (|G| \mid d \mid \text{מתקיים } |\{a \in \mathbb{Z}_n \mid a^d = 1\}| \leq d)$

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

**מסקנה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ותהא  $G \leq \mathbb{F}^\times$  סופית אזי  $G$  ציקלית.

**שורש פרימיטיבי:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $g \in \mathbb{Z}$  עבורו  $\langle g \pmod{n} \rangle = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי (קיים שורש פרימיטיבי מודולו  $n$ )  $\iff (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  חבורה ציקלית).

**טענה:** יהיו  $n, k \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  אזי  $a^k$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$   $\iff (1 = \varphi(k, \varphi(n)))$

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  באשר קיים שורש פרימיטיבי מודולו  $n$  אזי  $\varphi(\varphi(n)) = |\{g \in [n-1] \mid \langle g \pmod{n} \rangle = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\}|$

**למה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $\varphi(p-1) = |\{g \in [p-1] \mid \langle g \pmod{p} \rangle = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\}|$

**משפט:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי קיים שורש פרימיטיבי מודולו  $p$ .

**מסקנה משפט וילסון:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  באשר  $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$  אזי  $n \in \mathbb{P}$

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  תהא  $G$  חבורה מסדר  $n$  ויהי  $g \in G$  יוצר של  $G$   $\iff (g \text{ יוצר של } G) \iff (g^{\frac{n}{q}} \neq 1 \text{ באשר } q|n \text{ מתקיים } q \neq 1)$

**למה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ויהי  $m \in [p-1]$  אזי  $p \mid \binom{p}{m}$

**למה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ראשוני יהי  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $a^{p^k} \equiv 1 + ap^{k-1} \pmod{p^k}$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ראשוני ויהי  $k \in \mathbb{N}_+$  אזי  $C_{p^{k-1}(p-1)} \simeq (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ראשוני ויהי  $k \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^\times$  ציקלית.

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$  אזי קיימים ויחידים  $\alpha \in \{0, 1\}$  וכן  $\beta \in \{0, \dots, 2^{k-2}\}$  עבורם  $a \equiv (-1)^\alpha 5^\beta \pmod{2^k}$ .

**מסקנה:** יהי  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}$  אזי  $(\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z})^\times \simeq C_2 \times C_{2^{k-2}}$ .

**משפט:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  יהיו  $k, m \in \mathbb{N}$  והיו  $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{N}_+$  ויהיו  $p_1 \dots p_m \in \mathbb{P}$  שונים באשר  $n = 2^k \cdot \prod_{i=1}^m p_i^{e_i}$  אזי

• אם  $k \leq 1$  אז  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \simeq \prod_{i=1}^m C_{p_i^{e_i-1}(p_i-1)}$

• אם  $k \geq 2$  אז  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \simeq C_2 \times C_{2^{k-2}} \times \prod_{i=1}^m C_{p_i^{e_i-1}(p_i-1)}$

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  ציקלית  $\iff (n \in \{2, 4\}) \vee (n \in \mathbb{P}_{>2} \text{ וקיים } p \in \mathbb{P}_{>2} \text{ עבורו } k \in \mathbb{N}_+ \text{ עבורו } \{p^k, 2p^k\})$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $a$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  אזי

• אם  $a^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$  אז לכל  $k \in \mathbb{N}_+$  מתקיים כי  $a$  פרימיטיבי מודולו  $p^k$ .

• אם  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$  אז לכל  $k \in \mathbb{N}_+$  מתקיים כי  $a + p$  פרימיטיבי מודולו  $p^k$ .

**שארית ריבועית:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $a \in \mathbb{Z}$  המקיים  $a \not\equiv n$  וכן קיים  $x \in \mathbb{Z}$  עבורו  $x^2 \equiv a \pmod{n}$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $a \in \mathbb{Z}$  שארית ריבועית מודולו  $n$   $\{a \in \mathbb{Z} \mid n \mid a\}$   $\text{QR}_n =$

**אי-שארית ריבועית:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $a \in \mathbb{Z}$  המקיים  $a \not\equiv n$  וכן  $a$  אינו שארית ריבועית מודולו  $n$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{P}$  אזי  $a \in \mathbb{Z}$  אי-שארית ריבועית מודולו  $n$   $\{a \in \mathbb{Z} \mid n \mid a\}$   $\text{QNR}_n =$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  יהי  $g$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  והיו  $a, r \in \mathbb{Z}$  באשר  $a \not\equiv p$  וכן  $a \equiv g^r \pmod{p}$  אזי

$(r \in \mathbb{Z}_{\text{even}}) \iff (a \in \text{QR}_p)$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  אזי  $|\text{QR}_p| = |\text{QNR}_p| = \frac{p-1}{2}$ .

**סמל לז'נדר:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & a \in \text{QR}_p \\ -1 & a \in \text{QNR}_p \end{cases}$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  והיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  אזי  $\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$

**הגדרה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $\left(\frac{a \pmod{p}}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  אזי  $|\text{sols}(x^2 = a)| = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$

**למה גאוס:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  תהא  $p \subseteq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  באשר  $S \cap (-S) = \emptyset$  וכן  $S \cup (-S) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  ויהי  $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  אזי

$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{|aS \cap (-S)|}$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  אזי  $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  אזי  $\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & p \pmod{8} \in \{1, 7\} \\ -1 & p \pmod{8} \in \{3, 5\} \end{cases}$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  אזי  $\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} 0 & p=3 \\ 1 & p \pmod{12} \in \{1, 11\} \\ -1 & p \pmod{12} \in \{5, 7\} \end{cases}$

**למה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $a \in \mathbb{N}_+$  באשר  $p \nmid a$  אזי  $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} (\lfloor \frac{ip}{a} \rfloor - \lfloor \frac{(2i-1)p}{2a} \rfloor)}$

**למה:** יהי  $a \in \mathbb{N}_+$  והיו  $p, q \in \mathbb{P}_{>2}$  באשר  $p \equiv \pm q \pmod{4a}$  אזי  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{a}{q}\right)$

**משפט חוק ההדדיות הריבועית:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}_{>2}$  אזי  $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \cdot \left(\frac{q}{p}\right)$

**מסקנה:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}_{>2}$  אזי  $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-q}{p}\right)$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  אזי  $\left(\frac{5}{p}\right) = \begin{cases} 0 & p=5 \\ 1 & p \pmod{5} \in \{1, 4\} \\ -1 & p \pmod{5} \in \{2, 3\} \end{cases}$

**מספר חסר ריבועים:** מספר  $N \in \mathbb{Z}$  עבורו לכל  $p \in \mathbb{P}$  מתקיים  $p^2 \nmid N$

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}_+$  ויהיו  $p_1 \dots p_k \in \mathbb{P}_{>2}$  שונים אזי  $|\text{QR}_{\prod_{i=1}^k p_i}| = \frac{1}{2^k} \varphi\left(\prod_{i=1}^k p_i\right)$

**סמל יעקובי:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  והיו  $p_1 \dots p_k \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $\left(\frac{a}{\prod_{i=1}^k p_i}\right) = \prod_{i=1}^k \left(\frac{a}{p_i}\right)$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  והיו  $m, k \in \mathbb{Z}$  באשר  $m \equiv k \pmod{n}$  אזי  $\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{k}{n}\right)$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  ויהי  $m \in \mathbb{Z}$  אזי  $\left(\frac{m}{n}\right) = 0 \iff ((m, n) > 1)$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  והיו  $a, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)$

**טענה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $\left(\frac{a}{nm}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \cdot \left(\frac{a}{m}\right)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  ויהי  $m \in \mathbb{Z}$  עבורו  $(m, n) = 1$  וכן קיים  $a \in \mathbb{Z}$  המקיים  $m \equiv a^2 \pmod n$  אזי  $\left(\frac{m}{n}\right) = 1$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  ויהי  $m \in \mathbb{Z}$  באשר  $(m, n) = 1$  אזי (קיים  $a \in \mathbb{Z}$  עבורו  $m \equiv a^2 \pmod n$ )  $\iff$  לכל  $p \in \mathbb{P}$  המקיים  $p|n$  מתקיים  $\left(\frac{m}{p}\right) = 1$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  אזי  $\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ .

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  אזי  $\left(\frac{-1}{n}\right) = \begin{cases} 1 & n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  אזי  $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ .

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  אזי  $\left(\frac{2}{n}\right) = \begin{cases} 1 & n \pmod{8} \in \{1, 7\} \\ -1 & n \pmod{8} \in \{3, 5\} \end{cases}$ .

**טענה חוק ההדדיות:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  אזי  $\left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)$ .

**אלגוריתם לחישוב סמל יעקובי:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  ויהי  $m \in \mathbb{Z}$  אזי

**Algorithm JacobiSymbol( $m, n$ ):**

```

if  $m = 0$  then return 0
if  $n = 1$  then return 1
if  $m < 0$  then return  $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \text{JacobiSymbol}(-m, n)$ 
if  $m \in \mathbb{N}_{\text{even}}$  then return  $(-1)^{\frac{n^2-1}{8} \cdot e_2(m)} \cdot \text{JacobiSymbol}(\frac{m}{2^{e_2(m)}}, n)$ 
if  $m < n$  then return  $(-1)^{\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \cdot \text{JacobiSymbol}(n, m)$ 
 $(q, r) \leftarrow \text{RemainderDiv}(m, n)$ 
return  $\text{JacobiSymbol}(r, n)$ 

```

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  ויהי  $m \in \mathbb{Z}$  אזי  $\text{JacobiSymbol}(m, n) = \left(\frac{m}{n}\right)$ .

**טענה:** סיבוכיות הריצה של JacobiSymbol הינה  $\mathcal{O}(n^3)$ .

**טענה:** קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  המחשב סמל יעקובי בסיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}(n \log^2(n) \log \log(n))$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $p \nmid a$  אזי (קיימים  $x, y \in \mathbb{Z}$  זרים עבורם  $p|x^2 + ay^2$ )  $\iff \left(\frac{-a}{p}\right) = 1$ .

**טענה:**  $|\mathbb{P} \cap (3\mathbb{N} + 1)| = \aleph_0$ .

**מספר ריבוע שלם:** מספר  $n \in \mathbb{Z}$  עבורו קיים  $m \in \mathbb{Z}$  המקיים  $n = m^2$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{Z}$  ריבוע שלם אזי  $n = \square$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \setminus \{1\}$  באשר  $n = \square$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $(a, n) = 1$  אזי  $\left(\frac{a}{n}\right) = 1$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \setminus \{1\}$  באשר  $n \neq \square$  אזי קיים  $a \in \mathbb{Z}$  עבורו  $\left(\frac{a}{n}\right) = -1$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \setminus \{1\}$  באשר  $n \neq \square$  אזי  $\left|\left\{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \mid \left(\frac{x}{n}\right) = 1\right\}\right| = \frac{1}{2}\varphi(n)$ .

**טענה:**  $|\mathbb{P} \cap (5\mathbb{N} - 1)| = \aleph_0$ .

**אלגוריתם חזקה מודולורית:** אלגוריתם  $\mathcal{A}$  עבורו לכל  $N, m \in \mathbb{N}_+$  ולכל  $a, m \in [N-1]$  מתקיים  $\mathcal{A}(N, a, m) = (a^m \pmod N)$ .

**אלגוריתם כפל איטרטיבי:** יהי  $\mathcal{A}$  אלגוריתם כפל מספרים יהי  $N \in \mathbb{N}$  יהיו  $m_0 \dots m_k \in \{0, 1\}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  אזי

**Algorithm ModIteratedSquaring $[\mathcal{A}](N, a, m)$ :**

```

 $a_0 \leftarrow a$ 
 $r \leftarrow a_0^{m_0}$ 
for  $i \in [1, \dots, k]$  do
     $a_i \leftarrow \mathcal{A}(a_{i-1}, a_{i-1}) \pmod N$ 
    if  $m_i = 1$  then  $r \leftarrow \mathcal{A}(r, a_i) \pmod N$ 
end

```

**טענה:** יהי  $\mathcal{A}$  אלגוריתם כפל מספרים יהיו  $N, m \in \mathbb{N}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  אזי  $\text{ModIteratedSquaring}[\mathcal{A}](N, a, (m)_2) = (a^m \pmod N)$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{A}$  אלגוריתם כפל מספרים ויהיו  $N, m \in \mathbb{N}$  אזי סיבוכיות הריצה של ModIteratedSquaring הינה

$\mathcal{O}(\log(m) \cdot \text{Time}(\mathcal{A})(\log_2(N)))$ .

**מסקנה:** יהיו  $N, m \in \mathbb{N}$  אזי סיבוכיות הריצה של  $\text{ModIteratedSquaring}[\text{NaiveMul}]$  הינה  $\mathcal{O}(\log(m) \cdot \log^2(N))$ .



**מסקנה:** יהיו  $N, m \in \mathbb{N}$  אזי סיבוכיות הריצה של  $\text{ModIteratedSquaring}[\text{CooleyTukeyMul}]$  הינה  $\mathcal{O}(\log(m) \cdot \log(N) \log \log(N) \log \log \log(N))$ .  
**אלגוריתם חלוקה ניסיונית:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  אזי

```

Algorithm TrialDivision( $N$ ):
  for  $i \in [1, \dots, \sqrt{N}]$  do
     $(q, r) \leftarrow \text{RemainderDiv}(N, i)$ 
    if  $r = 0$  then return False
  end
  return True

```

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(N \in \mathbb{P}) \iff (\text{TrialDivision}(N) = \text{True})$ .

**טענה:** סיבוכיות הריצה של TrialDivision הינה  $\mathcal{O}(2^{\frac{N}{2}})$ .

**אלגוריתם מבחן פרמה:** יהי  $\mathcal{A}$  אלגוריתם חזקה מודולרית יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in [N-1]$  אזי

```

Algorithm FermatPrimalityTest[ $\mathcal{A}$ ]( $N; a$ ):
  if  $\mathcal{A}(N, a, N-1) = 1$  then return True
  return False

```

**טענה:** סיבוכיות הריצה של  $\text{FermatPrimalityTest}[\text{ModIteratedSquaring}[\text{NaiveMul}]]$  הינה  $\mathcal{O}(n^3)$ .

**טענה:** סיבוכיות הריצה של  $\text{FermatPrimalityTest}[\text{ModIteratedSquaring}[\text{CooleyTukeyMul}]]$  הינה  $\mathcal{O}(n^2 \log(n) \log \log(n))$ .

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{P}$  אזי  $\mathbb{P}_{a \leftarrow [N-1]}(\text{FermatPrimalityTest}(N; a) = \text{True}) = 1$ .

**מספר קרמייקל:** מספר פריק  $N \in \mathbb{N}_+$  עבורו לכל  $a \in \mathbb{Z}$  המקיים  $(a, N) = 1$  מתקיים  $a^{N-1} \equiv 1 \pmod{N}$ .

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  פריק באשר  $N$  אינו מספר קרמייקל אזי  $\mathbb{P}_{a \leftarrow [N-1]}(\text{FermatPrimalityTest}(N; a) = \text{False}) > \frac{1}{2}$ .

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  אזי  $\text{FermatPrimalityTest}(F_k; 2) = \text{True}$ .

**השערה:** לא קיים  $k \in \mathbb{N}_{>5}$  עבורו  $F_k \in \mathbb{P}$ . השערה פתוחה

**השערה:**  $|\{k \in \mathbb{N} \mid F_k \notin \mathbb{P}\}| = \aleph_0$ . השערה פתוחה

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{N}$  אזי  $(N \text{ קרמייקל}) \iff (N \text{ פריק חסר ריבועים וכן לכל } p \in \mathbb{P} \text{ המקיים } p|N \text{ מתקיים } p-1|N-1)$ .

**מסקנה:** יהי  $k \in \mathbb{N}$  עבורו  $6k+1, 12k+1, 18k+1 \in \mathbb{P}$  אזי  $(6k+1) \cdot (12k+1) \cdot (18k+1)$  מספר קרמייקל.

**השערה:**  $|\{k \in \mathbb{N} \mid 6k+1, 12k+1, 18k+1 \in \mathbb{P}\}| = \aleph_0$ . השערה פתוחה

**משפט אלפורד-גרנוויל-פומרנץ:**  $|\{N \in \mathbb{N}_+ \mid N \text{ מספר קרמייקל}\}| = \aleph_0$ . לא הוכח בקורס

**משפט אלפורד-גרנוויל-פומרנץ:** החל ממקום מסויים לכל  $x \in \mathbb{N}$  מתקיים  $|\{N < x \mid N \text{ מספר קרמייקל}\}| > x^{\frac{2}{5}}$ . לא הוכח בקורס

**משפט אדווש:** קיים  $c > 0$  עבורו החל ממקום מסויים לכל  $x \in \mathbb{N}$  מתקיים

$|\{N < x \mid N \text{ מספר קרמייקל}\}| < x \cdot \exp\left(\frac{-c \cdot \log(x) \cdot \log \log \log(x)}{\log \log(x)}\right)$ . לא הוכח בקורס

**אלגוריתם מבחן סולובאי-סטרסן:** יהי  $\mathcal{A}$  אלגוריתם חזקה מודולרית יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in [N-1]$  אזי

```

Algorithm SolovayStrassenPrimalityTest[ $\mathcal{A}$ ]( $N; a$ ):
  if  $N = 2$  then return True
  if  $(N < 2) \vee (2|N)$  then return False
   $s \leftarrow \text{JacobiSymbol}(a, N)$ 
  if  $(s \neq 0) \wedge (\mathcal{A}(N, a, \frac{N-1}{2}) = (s \bmod N))$  then
    return True
  return False

```

**טענה:** סיבוכיות הריצה של  $\text{SolovayStrassenPrimalityTest}[\text{ModIteratedSquaring}[\text{NaiveMul}]]$  הינה  $\mathcal{O}(n^3)$ .

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in [N-1]$  המקיים  $\text{SolovayStrassenPrimalityTest}(N; a) = \text{True}$  אזי  $\text{FermatPrimalityTest}(N; a) = \text{True}$ .

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{P}$  אזי  $\mathbb{P}_{a \leftarrow [N-1]}(\text{SolovayStrassenPrimalityTest}(N; a) = \text{True}) = 1$ .

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  פריק אזי  $\mathbb{P}_{a \leftarrow [N-1]}(\text{SolovayStrassenPrimalityTest}(N; a) = \text{False}) > \frac{1}{2}$ .

**אלגוריתם מבחן מילר-רבין:** יהי  $\mathcal{A}$  אלגוריתם חזקה מודולרית יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{N}_{<N}$  אזי

**טענה:** סיבוכיות הריצה של  $\text{MillerRabinPrimalityTest}[\text{ModIteratedSquaring}[\text{NaiveMul}]]$  הינה  $\mathcal{O}(n^3)$ .



**Algorithm** MillerRabinPrimalityTest $[\mathcal{A}](N; a)$ :

```

if  $N = 2$  then return True
if  $(N < 2) \vee (2 \mid N)$  then return False
 $\alpha_0 \leftarrow \mathcal{A}(N, a, \frac{N-1}{2^{e_2(N-1)}})$ 
for  $i \in [1, \dots, e_2(N-1)]$  do
     $\alpha_i \leftarrow \mathcal{A}(N, \alpha_{i-1}, 2)$ 
    if  $\alpha_i = -1$  then return True
    if  $\alpha_i \neq 1$  then return False
end
return True

```

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{P}$  אזי  $\mathbb{P}_{a \leftarrow \mathbb{N}_{<N}}(\text{MillerRabinPrimalityTest}(N; a) = \text{True}) = 1$

**משפט רבין:** יהי  $N \in \mathbb{N}$  פריק אזי  $|\{a \in \mathbb{N}_{<N} \mid \text{MillerRabinPrimalityTest}(N; a) = \text{True}\}| \leq \frac{\varphi(N)}{4}$

**מסקנה:** יהי  $N \in \mathbb{N}$  פריק אזי  $\mathbb{P}_{a \leftarrow \mathbb{N}_{<N}}(\text{MillerRabinPrimalityTest}(N; a) = \text{False}) > \frac{3}{4}$

**טענה:** יהי  $k \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  באשר  $2k+1, 4k+1 \in \mathbb{P}$  אזי

$|\{a \in \mathbb{N}_{<(2k+1) \cdot (4k+1)} \mid \text{MillerRabinPrimalityTest}((2k+1) \cdot (4k+1); a) = \text{True}\}| = \frac{\varphi((2k+1) \cdot (4k+1))}{4}$

**טענה:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in [N-1]$  המקיים  $\text{MillerRabinPrimalityTest}(N; a) = \text{True}$  אזי

$\text{SolovayStrassenPrimalityTest}(N; a) = \text{True}$

**אלגוריתם לייצור מספרים ראשוניים:** יהי  $\mathcal{A}$  אלגוריתם חזקה מודולרית יהיו  $n, k \in \mathbb{N}_+$  ותהא  $r : \mathbb{N} \rightarrow \{2^{n-1}, \dots, 2^n\} \times \mathbb{N}^k$  באשר

$i \in \{2, \dots, k+1\}$  וכל  $c \in \mathbb{N}$  לכל  $(r(c))_i < (r(c))_1$  אזי

**Algorithm** PrimeGenerator $[\mathcal{A}](n, k; r)$ :

```

 $c \leftarrow 0$ 
while True do
     $b \leftarrow \text{True}$ 
    for  $i \in [2, \dots, k+1]$  do
         $b \leftarrow b \wedge \text{MillerRabinPrimalityTest}[\mathcal{A}]((r(c))_1; (r(c))_i)$ 
    end
    if  $b = \text{True}$  then return  $(r(c))_1$ 
     $c \leftarrow c + 1$ 
end

```

**טענה:** יהיו  $n, k \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $r$  עבורו  $\text{PrimeGenerator}(n, k; r) < 2^n$  אזי  $2^{n-1} < \text{PrimeGenerator}(n, k; r) < 2^n$

**טענה:** יהיו  $n, k \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\mathbb{E}_r[\text{Time}(\text{PrimeGenerator}[\text{ModIteratedSquaring}[\text{NaiveMul}]](n, k; r))] = \mathcal{O}(kn^4)$

**טענה:** יהיו  $n, k \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\mathbb{P}_r(\text{PrimeGenerator}(n, k; r) \in \mathbb{P}) \geq 1 - \frac{1}{4^k}$

**טענה:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}$  באשר  $q \mid 2^p - 1$  אזי  $p \equiv 1 \pmod{q}$

**טענה אויילר:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}_{>3}$  באשר  $p \equiv 3 \pmod{4}$  וכן  $q = 2p + 1$  אזי  $2^p - 1$  פריק.

**מספר מרסן:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $M_n = 2^n - 1$

**ראשוני מרסן:** ראשוני  $p \in \mathbb{P}$  עבורו קיימים  $a, n \in \mathbb{N}_+$  המקיימים  $p = a^n - 1$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ראשוני מרסן אזי קיים  $q \in \mathbb{P}$  עבורו  $p = 2^q - 1$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ראשוני מרסן אזי  $p$  הינו מספר מרסן.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  באשר  $M_n$  ראשוני אזי  $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$  מושלם.

**אלגוריתם לוקס-להמר:** יהי  $\mathcal{A}$  אלגוריתם בדיקת ראשוניות יהי  $\mathcal{B}$  אלגוריתם חזקה מודולרית ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי

**Algorithm LucasLehmer**  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] (n, 2^n - 1)$ :

```

if  $\mathcal{A}(n) = \text{False}$  then return False
 $S_0 \leftarrow 4$ 
for  $i \in [1, \dots, n - 2]$  do
   $S_i \leftarrow (\mathcal{B}(2^n - 1, S_{i-1}, 2) - 2) \bmod p$ 
end
if  $S_{n-2} = 0$  then return True
return False

```

**משפט:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $(\text{LucasLehmer}(n, 2^n - 1) = \text{True}) \iff (2^n - 1 \in \mathbb{P})$ .

**טענה:** סיבוכיות הריצה של  $\text{LucasLehmer}[\text{TrialDivision}, \text{ModIteratedSquaring}[\text{NaiveMul}]]$  הינה  $\mathcal{O}(n^3)$ .

**טענה:** סיבוכיות הריצה של  $\text{LucasLehmer}[\text{TrialDivision}, \text{ModIteratedSquaring}[\text{CooleyTukeyMul}]]$  הינה  $\mathcal{O}(n^2 \log(n) \log \log(n))$ .

**טענה:**  $2^{136276841} - 1 \in \mathbb{P}$ .

**הגדרה:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  אזי  $\tilde{\mathcal{O}}(n^\alpha) = \mathcal{O}(n^\alpha) \cdot \text{poly}(\log(n))$ .

**משפט אגרוול-קאל-סקסנה:** קיים אלגוריתם דטרמיניסטי AKS לבדיקת ראשוניות בעל סיבוכיות ריצה  $\tilde{\mathcal{O}}(n^6)$ .

**הצפנה סימטרית:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  ותהינה  $E, D : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^n$  באשר  $D(E(p, k), k) = p$  לכל  $p, k \in \mathbb{F}_2^n$  אזי  $(E, D)$ .

**הצפנה אסימטרית:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  יהיו  $k_e, k_d \in \mathbb{F}_2^m$  ותהינה  $E, D : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^m \rightarrow \mathbb{F}_2^n$  באשר  $D(E(p, k_e), k_d) = p$  לכל  $p \in \mathbb{F}_2^n$  אזי  $(E, D, k_e, k_d)$ .

**בעיית הפירוק:** יהי  $N \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\text{IFP}(N) = (p_1, \dots, p_k)$  באשר  $\prod_{i=1}^k p_i = N$  וכן  $p_i \in \mathbb{P}$  לכל  $i \in [k]$ .

**טענה נפת שדות המספרים:** קיים  $c > 0$  עבורו קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  לבעיית הפירוק בעל סיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}\left(\exp\left(c \cdot n^{\frac{1}{3}} \cdot \log^{\frac{2}{3}}(n)\right)\right)$ .

**הצפנת RSA:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}$  יהיו  $e, d \in \mathbb{N}$  באשר  $(e, \varphi(pq)) = 1$  וכן  $(e, \varphi(pq)) = 1$  ונגדיר  $A : \mathbb{F}_2^* \times \mathbb{F}_2^* \rightarrow \mathbb{F}_2^*$  כך  $A(c, (M, a)) = c^a \bmod M$  אזי  $(A, A, (pq, e), (pq, d))$ .

**טענה:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}$  ותהא  $(M, M, k_e, k_d)$  הצפנת RSA אזי  $(M, M, k_e, k_d)$  הינה הצפנה אסימטרית.

**טענה:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}$  ותהא  $(M, M, k_e, k_d)$  הצפנת RSA אזי  $\text{Time}(M) = \mathcal{O}(\log^3(pq))$ .

**משפט:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}$  תהא  $(M, M, k_e, k_d)$  הצפנת RSA ותהא  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  חשיבה בזמן אזי (קיים יריב  $\mathcal{A}^M$  בעל כוח חישובי

$\tilde{\mathcal{O}}(T)$  המקיים  $\mathcal{A}^M(1^n) = k_d \iff \mathcal{A}^{M(\cdot, k_e)}(1^n) = \text{IFP}(N)$  בעל כוח חישובי  $\tilde{\mathcal{O}}(T)$  המקיים  $\mathcal{A}^M(1^n) = k_d$ ).

**לוגריתם דיסקרטי:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהי  $g$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  ויהי  $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  אזי  $a \in \mathbb{N}_{<p}$  באשר  $a = g^x \bmod p$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהי  $g$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  ויהי  $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  ויהיו  $x, y \in \mathbb{N}_{<p}$  לוגריתמים דיסקרטיים של  $a$  מודולו  $p$  בבסיס  $g$  אזי  $x = y$ .

**בעיית הלוגריתם הדיסקרטי:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהי  $g$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  ויהי  $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  באשר  $\text{DLP}(p, g, a) = x$  אזי  $x \in \mathbb{N}_{<p}$  הינו הלוגריתם הדיסקרטי של  $a$  מודולו  $p$  בבסיס  $g$ .

**טענה נפת שדות המספרים:** קיים  $c > 0$  עבורו קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  ל-DLP באשר לכל  $p \in \mathbb{P}$  מתקיים כי  $\mathcal{A}$  בעל סיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}\left(\exp\left(c \cdot \log^{\frac{1}{3}}(p) \cdot \log^{\frac{2}{3}}(p)\right)\right)$ .

**פרוטוקול תקשורת דיפי-הלמן:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ויהי  $g$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  אזי נגדיר פרוטוקול תקשורת בעל מפתחות פרטיים

כך  $\Pi_{\text{DiffieHellman}}$

**Communication Protocol**  $\Pi_{\text{DiffieHellman}}(p, g)$ :

```

A draws  $x \in [p - 1]$ 
A sends  $(g^x \bmod p)$  as  $K_A$ 
B draws  $y \in [p - 1]$ 
B sends  $(g^y \bmod p)$  as  $K_B$ 
A calculates  $K_{BA} \leftarrow (K_B)^x$ 
B calculates  $K_{AB} \leftarrow (K_A)^y$ 

```

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהי  $g$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  ויהיו  $K_{AB}, K_{BA}$  באשר  $\Pi_{\text{DiffieHellman}}(p, g) = (K_{AB}, K_{BA})$  אזי  $K_{AB} = K_{BA}$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהי  $g$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  תהא  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  חשיבה בזמן עבורה קיים יריב  $\mathcal{A}$  בעל כוח חישובי  $\tilde{\mathcal{O}}(T)$  המקיים  $\mathcal{A} = \text{DLP}$  אזי קיים יריב  $\mathcal{B}$  בעל כוח חישובי  $\tilde{\mathcal{O}}(T)$  המקיים  $\mathcal{B}(p, g, g^x \bmod p, g^y \bmod p) = g^{xy} \bmod p$ .

**הצפנת ElGamal:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהי  $g$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  יהי  $x \in \mathbb{N}_{<p}$  ונגדיר  $E, D : \mathbb{F}_2^* \times \mathbb{F}_2^* \rightarrow \mathbb{F}_2^*$  כך

• יהי  $y \in \mathbb{N}_{<p}$  אזי  $E(c, (\alpha, \beta, \gamma)) = ((c \cdot \gamma^y) \bmod \alpha, \beta^y \bmod \alpha)$

•  $D((c_1, c_2), (\alpha, \beta, \gamma)) = (c_1 \cdot c_2^{-\gamma}) \bmod \alpha$

אזי  $(E, D, (p, g, g^x \bmod p), (p, g, x))$

**טענה:** יהי  $f \in \mathbb{R}[x]$  באשר  $\deg(f) = 3$  וכן  $f$  בעל שורש מרובה אזי  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = f(x)\}$  אינה יריעה חד-מימדית גזירה.

**עקום אליפטי:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה באשר  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  ויהי  $f \in \mathbb{F}[x]$  באשר  $\deg(f) = 3$  וכן  $f$  בעל שורשים פשוטים מעל  $\mathbb{F}$  אזי  $\{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \mid y^2 = f(x)\} \cup \{\infty\}$

**סימון:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה באשר  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  ויהי  $E$  עקום אליפטי מעל  $\mathbb{F}$  אזי  $E/\mathbb{F}$

**טענה:** יהי  $E/\mathbb{R}$  עקום אליפטי אזי  $E \setminus \{\infty\}$  יריעה חד-מימדית חלקה.

**הגדרה שיקוף:** יהי  $E$  עקום אליפטי ותהא  $P \in E$

• אם  $P = \infty$  אזי  $-P = P$

• אם  $P = (x, y)$  אזי  $-P = (x, -y)$

**טענה:** יהי  $E$  עקום אליפטי ויהי  $P \in E$  אזי  $-P \in E$  וכן  $-(-P) = P$

**טענה:** יהי  $E$  עקום אליפטי ותהינה  $P, Q \in E \setminus \{\infty\}$  באשר  $P \neq \pm Q$  אזי  $(\text{line}_{P,Q} \setminus \{P, Q\}) \cap E \neq \emptyset$

**טענה:** יהי  $E$  עקום אליפטי ותהא  $P \in E \setminus \{\infty\}$  באשר  $P \neq -P$  אזי  $(T_P(E \setminus \{\infty\}) \setminus \{P\}) \cap E \neq \emptyset$

**הגדרה חיבור:** יהי  $E$  עקום אליפטי ותהינה  $P, Q \in E$

• אם  $\infty \in \{P, Q\}$  אזי  $P + Q = \infty$

• אם  $\infty \notin \{P, Q\}$  אזי  $P + Q = \infty$  וכן  $P = -Q$

• אם  $\infty \notin \{P, Q\}$  וכן  $P \neq \pm Q$  תהא  $R \in (\text{line}_{P,Q} \setminus \{P, Q\}) \cap E$  אזי  $P + Q = -R$

• אם  $\infty \notin \{P, Q\}$  וכן  $P = Q$  וכן  $P \neq -Q$  תהא  $R \in ((T_P(E \setminus \{\infty\})) \setminus \{P\}) \cap E$  אזי  $P + Q = -R$

**טענה:** יהי  $E$  עקום אליפטי ותהינה  $P, Q \in E$  אזי  $P + Q = Q + P$

**טענה:** יהי  $E$  עקום אליפטי ותהינה  $P, Q, R \in E$  אזי  $(P + Q) + R = P + (Q + R)$

**מסקנה:** יהי  $E$  עקום אליפטי אזי  $(E, +)$  חבורה אבלית.

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $E/\mathbb{F}_p$  עקום אליפטי המוגדר על ידי  $f$  אזי  $|E| = p + 1 + \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \left(\frac{f(x)}{p}\right)$

**משפט האסה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $f \in \mathbb{F}_p[x]$  באשר  $\deg(f) = 3$  וכן  $f$  בעל שורשים פשוטים מעל  $\mathbb{F}_p$  אזי  $2\sqrt{p} \leq \left|\sum_{x \in \mathbb{F}_p} \left(\frac{f(x)}{p}\right)\right| \leq 2\sqrt{p}$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $E/\mathbb{F}_p$  עקום אליפטי אזי  $p + 1 - 2\sqrt{p} \leq |E| \leq p + 1 + 2\sqrt{p}$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  אזי קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  המחשב חיבור נקודות על עקום אליפטי מעל  $\mathbb{F}_p$  בסיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}(\log^2(p))$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  המחשב הכפלת נקודה על עקום אליפטי מעל  $\mathbb{F}_p$  ב- $n$  בסיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}(\log(n) \cdot \log^2(p))$

**בעיית הלוגריתם הדיסקרטי בעקומים אליפטיים:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  יהי  $E/\mathbb{F}_p$  עקום אליפטי יהי  $G \in E$  ויהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי

$\text{ECDLP}(p, E, G, nG) = n$

**טענה:** קיים אלגוריתם  $\mathcal{A}$  ל- $\text{ECDLP}$  באשר לכל  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  מתקיים כי  $\mathcal{A}$  בעל סיבוכיות ריצה  $\mathcal{O}(\sqrt{p})$

**פרוטוקול תקשורת דיפי-הלמן בעקומים אליפטיים:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  יהי  $E/\mathbb{F}_p$  עקום אליפטי המוגדר על ידי  $f$  ויהי  $G \in E \setminus \{\infty\}$  אזי נגדיר פרוטוקול תקשורת בעל מפתחות פרטיים  $\Pi_{\text{DiffieHellman}}^{\text{EC}}$  כך

**Communication Protocol  $\Pi_{\text{DiffieHellman}}^{\text{EC}}(p, f, G)$ :**

$A$  draws  $x \in [p-1]$   
 $A$  sends  $xG$  as  $K_A$   
 $B$  draws  $y \in [p-1]$   
 $B$  sends  $yG$  as  $K_B$   
 $A$  calculates  $K_{BA} \leftarrow x \cdot K_B$   
 $B$  calculates  $K_{AB} \leftarrow y \cdot K_A$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  יהי  $E/\mathbb{F}_p$  עקום אליפטי המוגדר על ידי  $f$  ויהי  $G \in E \setminus \{\infty\}$  ויהיו  $K_{AB}, K_{BA}$  באשר  $\Pi_{\text{DiffieHellman}}^{\text{EC}}(p, g) = K_{AB} = K_{BA}$  אזי  $(K_{AB}, K_{BA})$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהי  $g$  שורש פרימיטיבי מודולו  $p$  תהא  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  חשיבה בזמן עבורה קיים יריב  $\mathcal{A}$  בעל כוח חישובי  $\tilde{O}(T)$  המקיים  $\mathcal{B}(p, f, G, xG, yG) = xyG$  המקיים  $\tilde{O}(T)$  בעל כוח חישובי  $\mathcal{A} = \text{ECDLP}$

**פונקציית ספירת הראשוניים:** נגדיר  $\pi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$  כך  $\pi(x) = |\mathbb{P}_{\leq x}|$ .

**פונקציות אסימפטוטיות:** פונקציות  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימות  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

**סימון:** תהייה  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אסימפטוטיות אזי  $f \sim g$ .

**פונקציה חסומה אסימפטוטית:** תהא  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ .

**סימון:** תהייה  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  באשר  $f$  חסומה אסימפטוטית על ידי  $g$  אזי  $f \lesssim g$ .

**טענה:** תהייה  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $(f \lesssim g) \iff \left( \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} \geq 1 \right)$ .

**טענה:** תהייה  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $(f \lesssim g) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists x \in \mathbb{R}. \forall y > x. (f(y) \leq (1 + \varepsilon)g(y)))$ .

**טענה:** תהייה  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $(f \sim g) \iff ((f \lesssim g) \wedge (g \lesssim f))$ .

**הערה:** בקורס זה  $\log = \ln$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\pi(2n) - \pi(n) \leq \frac{\log(4) \cdot n}{\log(n)}$ .

**משפט צ'בישב:**  $\pi(x) \lesssim \frac{\log(4) \cdot x}{\log(x)}$ .

**מסקנה:**  $\sum_{p \in \mathbb{P}_{\leq x}} \log(p) \lesssim \log(4) \cdot x$ .

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n+1}$ .

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $e_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$ .

**למה:** יהי  $x \in \mathbb{R}$  אזי  $2 \lfloor x \rfloor - 2 \lfloor 2x \rfloor \leq 1$ .

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $\log_p \left( \binom{2n}{n} \right) \leq \log_p(2n)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\pi(2n) \geq \frac{\log(2) \cdot 2n}{\log(2n)} - 2$ .

**משפט צ'בישב:**  $\pi(x) \gtrsim \frac{\log(2) \cdot x}{\log(x)}$ .

**טענה:** תהא  $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{P}$  הפיכה ושומרת סדר אזי קיים  $\alpha \in (0, 1]$  וקיים  $\beta \in \mathbb{R}_{\geq 1}$  עבורם לכל  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  מתקיים

$$\alpha n \log(n) \leq f(n) \leq \beta n \log(n)$$

**משפט סכימה בחלקים/נוסחת אבל:** יהי  $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$  תהא  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  ותהא  $f \in C^1([1, x], \mathbb{R})$  אזי

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_{\leq x}} (a_n \cdot f(n)) = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}_{\leq x}} a_n \right) \cdot f(x) - \int_1^x \left( \sum_{n \in \mathbb{N}_{\leq t}} a_n \right) \cdot f'(t) dt$$

**למה:**  $\log(n!) = n \cdot \log(n) + \mathcal{O}(n)$ .

**טענה:**  $\log(n!) = n \cdot \log(n) - n + \mathcal{O}(\log(n))$ .

**משפט מרטנס:**  $\sum_{p \in \mathbb{P}_{\leq x}} \frac{\log(p)}{p} = \log(x) + \mathcal{O}(1)$ .

**משפט מרטנס:** קיים  $c > 0$  עבורו  $\sum_{p \in \mathbb{P}_{\leq x}} \frac{1}{p} = \log \log(x) + c + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log(x)}\right)$ .

**משפט:** קיים  $K > 0$  עבורו  $\prod_{p \in \mathbb{P}_{\leq x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{K}{\log(x)}$ .

**מסקנה:** קיים  $c > 0$  עבורו לכל  $n \in \mathbb{N}_+$  מתקיים  $\varphi(n) \geq c \cdot \frac{n}{\log \log(n)}$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\text{lcm}(1, \dots, n) \geq 2^{n-2}$ .

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\pi(n) \geq \frac{\log(2) \cdot n}{\log(n)} - \frac{2 \log(2)}{\log(n)}$ .

**קבוע אוילר-מסקרוני:** נגדיר  $\gamma \in \mathbb{R}$  כך  $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$ .

**טענה:**  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) - \log(n) \right)$ .

**משפט מרטנס:**  $\prod_{p \in \mathbb{P}_{\leq x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log(x)}$ . לא הוכח בקורס

**טענה:** יהי  $c \in \mathbb{R}$  אזי אם  $c \geq 1$  אז  $\pi(x) \lesssim \frac{c \cdot x}{\log(x)}$ .

**טענה:** יהי  $c \in \mathbb{R}$  אזי אם  $c \leq 1$  אז  $\pi(x) \gtrsim \frac{c \cdot x}{\log(x)}$ .

**מסקנה:** יהי  $c \in \mathbb{R}$  אזי אם  $c = 1$  אז  $\pi(x) \sim \frac{c \cdot x}{\log(x)}$ .

**משפט המספרים הראשוניים:**  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ . לא הוכח בקורס

**טענה:** יהי  $\varepsilon > 0$  אזי קיים  $N \in \mathbb{N}$  עבורו לכל  $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$  מתקיים  $[n, (1 + \varepsilon)n] \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$ .

**האינטגרל הלוגריתמי:** נגדיר  $\text{Li} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$ .

**טענה:**  $\text{Li}(x) = \frac{x}{\log(x)} + \frac{x}{\log^2(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3(x)}\right)$ .

**מסקנה:**  $\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$ .

**טענה:** יהי  $m \in \mathbb{N}$  אזי  $\text{Li}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(m-1)! \cdot x}{\log^m(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^{m+1}(x)}\right)$ .

**משפט אדמר-דה-לה-וואלה-פוסן:** קיים  $c > 0$  עבורו  $\pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}\left(x \cdot \exp\left(-c \cdot \sqrt{\log(x)}\right)\right)$ . לא הוכח בקורס

$$\text{מסקנה: } \pi(x) = \frac{x}{\log(x)} + \frac{x}{\log^2(x)} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3(x)}\right)$$

**משפט וינוגרדוב:** יהי  $\varepsilon > 0$  אזי  $\pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}\left(x \cdot \exp\left(-\log^{\frac{2}{3}+\varepsilon}(x)\right)\right)$  לא הוכח בקורס

**השערת רימן (RH):**  $\pi(x) = \text{Li}(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x} \cdot \log(x))$  השערה פתוחה

**סימון:** יהי  $m \in \mathbb{N}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי נגדיר  $\pi_{m,a} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$  כך  $\pi_{m,a}(x) = |\mathbb{P}_{\leq x} \cap (m\mathbb{N} + a)|$

**סימון:** יהי  $m \in \mathbb{N}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $\pi_{m,a}(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} |\mathbb{P}_{\leq x} \cap (m\mathbb{N} + a)|$

**טענה:** יהי  $m \in \mathbb{N}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $(m, a) > 1$  אזי  $\pi_{m,a}(\infty) \leq 1$

**משפט דיריכלה:** יהי  $m \in \mathbb{N}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $(a, m) = 1$  אזי  $\pi_{m,a}(\infty) = \infty$  לא הוכח בקורס

**משפט דה-לה-ואלה-פוסן/המספרים הראשוניים בסדרות חשבוניות:** יהי  $m \in \mathbb{N}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $(a, m) = 1$  אזי

$$\pi_{m,a}(x) \sim \frac{x}{\varphi(m) \cdot \log(x)} \quad \text{לא הוכח בקורס}$$

**מסקנה:** יהי  $m \in \mathbb{N}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $(a, m) = 1$  אזי  $\pi_{m,a}(x) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \text{Li}(x)$

**השערת רימן המוכללת (GRH):** יהי  $m \in \mathbb{N}$  ויהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $(a, m) = 1$  אזי  $\pi_{m,a}(x) = \frac{1}{\varphi(m)} \text{Li}(x) + \mathcal{O}(\sqrt{x} \cdot \log(x))$

השערה פתוחה

**משפט:** אם GRH אז קיים  $c > 0$  עבורו לכל  $N \in \mathbb{N}_+$  מתקיים  $\text{MillerRabinPrimalityTest}(N; a) = \text{True} \iff (N \in \mathbb{P})$  לכל

$(a \leq c \log^2(N))$  לא הוכח בקורס

**מסקנה:** אם GRH אז קיים אלגוריתם דטרמיניסטי  $\mathcal{A}$  לבדיקת ראשוניות בעל בסיבוכיות ריצה  $\tilde{O}(n^4)$ .

**משוואה דיופנטית:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  ויהי  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  אזי  $f = 0$

**טענה:** יהי  $f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  ויהי  $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  באשר  $\text{sols}_{\mathbb{Z}_N}(f = 0) = \emptyset$  אזי  $\text{sols}_{\mathbb{Z}}(f = 0) = \emptyset$

**משפט מטיאסביץ':**  $\{\langle f \rangle \mid (f \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]) \wedge (\text{sols}_{\mathbb{Z}}(f = 0) \neq \emptyset)\} \notin \mathcal{R}$

**פולינום הומוגני בשני משתנים:** יהי  $R$  חוג אזי  $f \in R[x, y]$  עבורו קיים  $n \in \mathbb{N}$  וקיים  $a \in R^{n+1}$  עבורם  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i y^{n-i}$

**משוואה דיופנטית הומוגנית בשני משתנים:** יהי  $f \in \mathbb{Z}[x, y]$  הומוגני אזי  $f = 0$

**טענה:** יהי  $f \in \mathbb{Z}[x, y]$  אזי  $(f \text{ הומוגני}) \iff \text{לכל } x, y, \lambda \in \mathbb{R} \text{ מתקיים } f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\deg(f)} \cdot f(x, y)$

**טענה:** יהי  $f \in \mathbb{Z}[x, y]$  הומוגני והיו  $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  באשר  $f(a, b) = 0$  אזי  $f\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right) = 0$

**פתרון מצומצם/פרימיטיבי:** יהי  $f \in \mathbb{Z}[x, y]$  הומוגני אזי  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  באשר  $f(a, b) = 0$  וכן  $f(a, b) = 1$

**טענה:** יהי  $f \in \mathbb{Z}[x, y]$  הומוגני ויהי  $\zeta \in \mathbb{Z}^{n+1}$  באשר  $f = \sum_{i=0}^n \zeta_i x^i y^{n-i}$  אזי

•  $\text{sols}_{\mathbb{Z}}(f = 0) = \{(da, db) \mid (d \in \mathbb{Z}) \wedge (f = 0 \text{ פתרון פרימיטיבי של } f = 0)\}$

• לכל פתרון פרימיטיבי  $(a, b)$  של  $f = 0$  מתקיים  $a|\zeta_0$  וכן  $b|\zeta_n$

**משוואה דיופנטית במשתנה אחד:** יהי  $f \in \mathbb{Z}[x]$  אזי  $f = 0$

**מסקנה:** יהי  $f \in \mathbb{Z}[x]$  יהי  $\zeta \in \mathbb{Z}^{n+1}$  באשר  $f = \sum_{i=0}^n \zeta_i x^i$  ויהי  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  באשר  $(a, b) = 1$  וכן  $f\left(\frac{a}{b}\right) = 0$  אזי  $a|\zeta_0$  וכן  $b|\zeta_n$

**מסקנה:** יהי  $f \in \mathbb{Z}[x]$  יהי  $\zeta \in \mathbb{Z}^{n+1}$  באשר  $f = \sum_{i=0}^n \zeta_i x^i$  ויהי  $m \in \mathbb{Z}$  באשר  $f(m) = 0$  אזי  $m|\zeta_0$

**משוואה דיופנטית לינארית בשני משתנים:** יהי  $f \in \mathbb{Z}_{\leq 1}[x, y]$  אזי  $f = 0$

**טענה:** יהיו  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  אזי  $(a, b) | c \iff (\text{sols}_{\mathbb{Z}}(ax + by = c) \neq \emptyset)$

**טענה:** יהיו  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  ויהי  $(\alpha, \beta) \in \text{sols}_{\mathbb{Z}}(ax + by = c)$  אזי  $\left\{ \left( \alpha + \frac{m \cdot b}{(a,b)}, \beta - \frac{m \cdot a}{(a,b)} \right) \mid m \in \mathbb{Z} \right\} = \text{sols}_{\mathbb{Z}}(ax + by = c)$

**טענה:** יהיו  $a_1 \dots a_n, b \in \mathbb{Z}$  אזי  $(a_1, \dots, a_n) | b \iff (\text{sols}_{\mathbb{Z}}(\sum_{i=1}^n a_i x_i = b) \neq \emptyset)$

**משוואה דיופנטית ריבועית בשני משתנים:** יהי  $f \in \mathbb{Z}_{\leq 2}[x, y]$  אזי  $f = 0$

**טענה:** יהי  $f \in \mathbb{Z}_{\leq 2}[x, y]$  אזי קיימים  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbb{Q}$  עבורם אחד מהבאים מתקיים

• לכל  $x, y \in \mathbb{Z}$  מתקיים  $f(\alpha x + \beta y + \gamma, \delta x + \varepsilon y + \zeta) = y - x^2$

• קיימים  $a, d \in \mathbb{Z}$  עבורם לכל  $x, y \in \mathbb{Z}$  מתקיים  $f(\alpha x + \beta y + \gamma, \delta x + \varepsilon y + \zeta) = x^2 - dy^2 - a$

**טענה:**  $\text{sols}_{\mathbb{Z}}(y = x^2) = \{(m, m^2) \mid m \in \mathbb{Z}\}$

**טענה:** יהי  $a \in \mathbb{Z}$  אזי  $(a = \square) \iff (\text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 = 0) \neq \emptyset)$

**מסקנה:** יהי  $a \in \mathbb{Z}$  באשר  $a = \square$  אזי  $\text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 = 0) = \{\pm\sqrt{a}\}$

**טענה:** יהי  $a \in \mathbb{Z}$  ויהי  $d \in \mathbb{Z}_{<0}$  אזי  $\left\{ \left( s \cdot \sqrt{a + dy^2}, y \right) \mid (s \in \{\pm 1\}) \wedge \left( -\sqrt{\left| \frac{a}{d} \right|} \leq y \leq \sqrt{\left| \frac{a}{d} \right|} \right) \right\} = \text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = a)$

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(d = \square) \iff (\text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = 0) \setminus \{(0, 0)\} \neq \emptyset)$

**מסקנה:** יהי  $d \in \mathbb{N}_+$  באשר  $d = \square$  אזי  $\left\{ \left( sm \cdot \sqrt{d}, rm \right) \mid (s, r \in \{\pm 1\}) \wedge (m \in \mathbb{Z}) \right\} = \text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = 0)$

**טענה:** יהי  $a \in \mathbb{Z}$  ויהי  $d \in \mathbb{N}_+$  באשר  $d = \square$  אזי  $\text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = a) = \bigcup_{\substack{(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \\ a=uv}} \text{sols}_{\mathbb{Z}}\left(\begin{cases} x-\sqrt{d}y=u \\ x+\sqrt{d}y=v \end{cases}\right)$

**משוואת פל:** יהי  $d \in \mathbb{N}_+$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $x^2 - dy^2 = 1$ .

**משוואת פל מוכללת:** יהי  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ויהי  $d \in \mathbb{N}_+$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $x^2 - dy^2 = a$ .

**הגדרה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \mathbb{Z} + \sqrt{d} \cdot \mathbb{Z}$ .

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  חוג.

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ויהיו  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$  באשר  $\alpha + \beta\sqrt{d} = \gamma + \delta\sqrt{d}$  אזי  $\alpha = \gamma$  וכן  $\beta = \delta$ .

**העתקת המקדמים:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  אזי נגדיר  $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{Z}^2$  כך  $\varphi(\alpha + \beta\sqrt{d}) = (\alpha, \beta)$ .

**מסקנה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ותהא  $\varphi$  העתקת המקדמים אזי  $\varphi$  חח"ע ועל.

**הערה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  נשכן את  $\mathbb{Z}^2$  בתוך  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  כך  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta\sqrt{d}$ .

**הצמדה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ויהיו  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  אזי  $\overline{\alpha + \beta\sqrt{d}} = \alpha - \beta\sqrt{d}$ .

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ויהיו  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  אזי  $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$  וכן  $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$  וכן  $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$ .

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ויהי  $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  אזי  $(\overline{\alpha} = \alpha) \iff (\alpha \in \mathbb{Z})$ .

**מסקנה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ונגדיר  $f : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  כך  $f(x) = \overline{x}$  אזי  $f$  הינו אוטומורפיזם חוגים.

**נורמה בחוג  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ :** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ויהי  $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  אזי נגדיר  $N : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{Z}$  כך  $N(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha}$ .

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ויהיו  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  אזי  $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$ .

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \{\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid N(\alpha) \in \{\pm 1\}\}$ .

**מסקנה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}_{<0}$  אזי  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times = \begin{cases} \{\pm 1, \pm i\} & d=-1 \\ \{\pm 1\} & d<-1 \end{cases}$ .

**טענה:** יהי  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ויהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $\text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = a) = \{g \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid N(g) = a\}$ .

**מסקנה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ויהיו  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$  באשר  $\alpha^2 - d\beta^2 = a$  וכן  $\gamma^2 - d\delta^2 = b$  אזי  $(\alpha\gamma + d\beta\delta)^2 - d(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 = ab$ .

**הגדרה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  אזי נגדיר  $\text{SG} : \text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = 1)^2 \rightarrow \text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = 1)$  כך

$\text{SG}((\alpha, \beta), (\gamma, \delta)) = (\alpha\gamma + d\beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma)$ .

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  ויהיו  $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in \text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = 1)$  אזי  $\text{SG}((\alpha, \beta), (\gamma, \delta)) = (\alpha + \beta\sqrt{d})(\gamma + \delta\sqrt{d})$ .

**מסקנה:** יהי  $d \in \mathbb{Z}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $(\text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = 1), \text{SG})$  חבורה אבלית.

**הגדרה:** יהי  $d \in \mathbb{N}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]_1^\times = \{\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \mid N(\alpha) = 1\}$ .

**מסקנה:** יהי  $d \in \mathbb{N}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $\text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = 1) = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]_1^\times$ .

**הגדרה:** יהי  $d \in \mathbb{N}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]_{1+}^\times = \{\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]_1^\times \mid \alpha > 0\}$ .

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{N}$  באשר  $d \neq \square$  ויהי  $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]_1^\times$  אזי קיים יחיד  $\beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]_{1+}^\times$  וקיים יחיד  $s \in \{\pm 1\}$  עבורם  $\alpha = s\beta$ .

**מסקנה:** יהי  $d \in \mathbb{N}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]_1^\times \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{d}]_{1+}^\times \times \{\pm 1\}$ .

**סימון:** יהי  $a \in \mathbb{R}$  אזי  $[a] = a$ .

**שבר משולב:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  יהי  $a_0 \in \mathbb{R}$  ויהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}_+$  אזי  $[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}$ .

**למה:** יהי  $a_0 \in \mathbb{R}$  יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}_+$  ונגדיר  $M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  כך  $M = \prod_{i=0}^n \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  אזי  $[a_0, \dots, a_n, x] = \frac{(M)_{1,1} \cdot x + (M)_{1,2}}{(M)_{2,1} \cdot x + (M)_{2,2}}$ .

**טענה:** יהי  $a_0 \in \mathbb{R}$  יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}_+$  ונגדיר  $p_{-1}, \dots, p_n, q_{-1}, \dots, q_n \in \mathbb{R}$  כך  $\begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = \left( \prod_{i=0}^k \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  אזי

• לכל  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  מתקיים  $\frac{p_k}{q_k} = [a_0, \dots, a_k]$ .

• לכל  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  מתקיים  $\begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^k \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

• לכל  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  מתקיים  $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$  וכן  $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ .

• לכל  $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$  מתקיים  $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k+1}$ .

**טענה:** יהי  $a_0 \in \mathbb{R}$  יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}_+$  ויהי  $i \in \mathbb{N}_{\text{even}} \cap \mathbb{N}_{\leq n}$  אזי  $[a_0, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n]$  מונוטונית עולה.

**טענה:** יהי  $a_0 \in \mathbb{R}$  יהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}_+$  ויהי  $i \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \cap \mathbb{N}_{\leq n}$  אזי  $[a_0, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n]$  מונוטונית יורדת.

**שבר משולב פשוט:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  יהי  $a_0 \in \mathbb{Z}$  ויהיו  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $[a_0, \dots, a_n]$ .

**טענה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  יהי  $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$  ויהיו  $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m \in \mathbb{N}_+$  באשר  $[a_0, \dots, a_n] = [b_0, \dots, b_m]$  אזי אחד מהבאים נכון

•  $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$  לכל  $a_i = b_i$  וכן  $n = m$

•  $a_n = 1$  וכן  $b_m - 1 = a_m$  וכן  $i \in \mathbb{N}_{\leq m-1}$  לכל  $a_i = b_i$  וכן  $n = m + 1$

•  $b_m = 1$  וכן  $a_n - 1 = b_n$  וכן  $i \in \mathbb{N}_{\leq n-1}$  לכל  $a_i = b_i$  וכן  $n + 1 = m$

**טענה:** יהי  $\alpha \in \mathbb{Q}$  אזי קיים ויחיד  $n \in \mathbb{N}$  וכן קיים ויחיד  $a_0 \in \mathbb{Z}$  וכן קיימים ויחידים  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{N}_+$  באשר  $a_n > 1$  עבורם  $\alpha = [a_0, \dots, a_n]$

**שבר משולב אינסופי:** תהא  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  באשר  $a_i > 0$  לכל  $i \in \mathbb{N}_+$  אזי  $[a] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, \dots, a_n]$

**טענה:** תהא  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  באשר  $a_i \geq 1$  לכל  $i \in \mathbb{N}_+$  אזי  $[a]$  קיים.

**שבר משולב פשוט אינסופי:** תהא  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  באשר  $a_i \in \mathbb{N}_+$  לכל  $i \in \mathbb{N}_+$  אזי  $[a]$

**גלגול:** נגדיר  $f : (1, \infty) \setminus \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $f(x) = \frac{1}{x - [x]}$

**משפט:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  אזי קיים ויחיד שבר משולב פשוט אינסופי  $[a]$  המקיים  $\alpha = [a]$

**ייצוג שברי של שבר משולב פשוט אינסופי:** יהי  $[a]$  שבר משולב פשוט אינסופי ונגדיר  $p, q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  כך  $(\frac{1}{0}) \cdot (\prod_{i=0}^k (\frac{a_i}{1 \ 0})) = (\frac{p_k}{q_k})$  אזי  $(p, q)$

**מסקנה:** יהי  $[a]$  שבר משולב פשוט אינסופי והי  $(p, q)$  ייצוג שברי של  $[a]$  אזי לכל  $k \in \mathbb{N}$  מתקיים  $\frac{p_k}{q_k} = [a_0, \dots, a_k]$

**מסקנה:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  יהי  $(p, q)$  ייצוג שברי של  $\alpha$  והי  $k \in \mathbb{N}_{\text{even}}$  אזי  $\frac{p_k}{q_k} < \alpha < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$  וכן  $\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}$  וכן  $\frac{p_{k+3}}{q_{k+3}} < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$

**משפט קירוב דיפנטי:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  והי  $(p, q)$  ייצוג שברי של  $\alpha$  אזי לכל  $n \in \mathbb{N}_+$  מתקיים  $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$

**טענה:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  יהי  $(p, q)$  ייצוג שברי של  $\alpha$  והי  $n \in \mathbb{N}$  יהי  $\zeta \in \mathbb{Z}$  והי  $\xi \in \mathbb{N}$  באשר  $\xi < q_n$  אזי  $|\alpha - \frac{\zeta}{\xi}| > |\alpha - \frac{p_n}{q_n}|$

**משפט לז'נדר:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  יהי  $(p, q)$  ייצוג שברי של  $\alpha$  והי  $\zeta \in \mathbb{Z}$  והי  $\xi \in \mathbb{N}$  באשר  $|\alpha - \frac{\zeta}{\xi}| < \frac{1}{2\xi^2}$  אזי קיים  $n \in \mathbb{N}$  עבורו  $p_n = \zeta$  וכן  $q_n = \xi$

**פונקציה מחזורית החל ממקום מסוים:** יהיו  $N, T \in \mathbb{N}$  אזי פונקציה  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $a_n = a_{n+T}$  לכל  $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$

**סימון:** יהיו  $N, T \in \mathbb{N}$  ותהא  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  מחזורית בעלת מחזור  $T$  החל מ- $N$  אזי  $a_0 \dots a_{N-1} \overline{a_N \dots a_{N+T-1}} = a$

**שבר משולב פשוט מחזורי:** שבר משולב פשוט אינסופי  $[a]$  עבורו  $a$  מחזורית החל ממקום מסוים.

**מספר ריבועי:** מספר  $\alpha \in \mathbb{R}$  עבורו קיים  $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  וקיימים  $b, c \in \mathbb{Z}$  עבורם  $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

**טענה:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R}$  אזי  $\alpha$  ריבועי  $\iff (\alpha$  ריבועי)  $\iff A, B \in \mathbb{Z}$  וקיים  $d \in \mathbb{N}$  עבורם  $\alpha = \frac{B + \sqrt{d}}{A}$

**הגדרה:** יהי  $d \in \mathbb{R}$  באשר  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$  אזי  $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \mathbb{Q} + \sqrt{d} \cdot \mathbb{Q}$

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{R}$  באשר  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$  אזי  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  שדה.

**הצמדה:** יהי  $d \in \mathbb{R}$  באשר  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$  והיו  $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$  אזי  $\overline{\alpha + \beta\sqrt{d}} = \alpha - \beta\sqrt{d}$

**טענה:** יהי  $d \in \mathbb{R}$  באשר  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$  ונגדיר  $f : \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  כך  $f(x) = \overline{x}$  אזי  $f$  הינו אוטומורפיזם שדות.

**משפט:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  אזי (קיים שבר משולב פשוט מחזורי  $[a]$  עבורו  $\alpha = [a]$ )  $\iff (\alpha$  ריבועי).

**משפט לגראנז':** יהי  $d \in \mathbb{N}$  באשר  $d \neq \square$  אזי  $\text{sols}_{\mathbb{Z}}(x^2 - dy^2 = 1) \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\} \neq \emptyset$