פולינום: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ אזי $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$.

שיוויון פולינומים: יהיו $f\left(x\right)=\sum a_ix^i,g\left(x\right)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $\left(\forall i.a_i=b_i\right)\iff\left(f=g\right)$.

חיבור פולינומים: יהיו $f\left(x\right)=\sum a_ix^i,g\left(x\right)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $\left(f+g\right)\left(x\right)=\sum\left(a_i+b_i\right)x^i$.

כפל פולינומים: יהיו $f\left(x\right)=\sum a_ix^i,g\left(x\right)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $\left(fg\right)\left(x\right)=\sum_k\left(\sum_{m=0}^{k}a_mb_{k-m}\right)x^k$.

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}\left[x\right]=\left\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\mid a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{F}\right\}$.

משפט: ($\mathbb{F}\left[x\right]$ חוג)$\wedge$($\mathbb{F}\left[x\right]$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$).

מחלק: יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $g\in\mathbb{F}\left[x\right]\setminus\left\{0\right\}$ עבורו $\exists h\in\mathbb{F}\left[x\right].gh=f$.

סימון: יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ ויהי $g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ מחלק אזי $\left(f\vdots g\right)\wedge\left(g\mid f\right)$.

דרגה: יהי $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ פולינום אזי $\deg\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)=\begin{cases}-\infty & f=0\\ \max\left\{k\mid a_k\neq0\right\} & else\end{cases}$.

למה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $\left(\deg\left(fg\right)=\deg\left(f\right)+\deg\left(g\right)\right)\wedge\left(\deg\left(f+g\right)\leq\max\left\{\deg\left(f\right),\deg\left(g\right)\right\}\right)$.

מסקנה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]\setminus\left\{0\right\}$ אזי $\left(g\mid f\right)\implies\left(\deg\left(g\right)\leq\deg\left(f\right)\right)$.

מסקנה: יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $\left(f\in\mathbb{F}\setminus\left\{0\right\}\right)\iff\left(\frac{1}{f}\in\mathbb{F}\left[x\right]\right)$.

תחום שלמות: חוג קומוטטיבי R המקיים $\forall a,b\in R\setminus\left\{0\right\}.ab\neq0$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}\left[x\right]$ תחום שלמות.

משפט: יהיו $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ עבורם $\deg\left(g\right)\leq\deg\left(f\right)$ אזי $\exists!q,r\in\mathbb{F}\left[x\right].\left(f=gq+r\right)\wedge\left(\deg\left(r\right)\leq\deg\left(r\right)\right)$.

שארית: יהיו $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $r\in\mathbb{F}\left[x\right]$ עבורו $\left(f=gq+r\right)\wedge\left(\deg\left(r\right)\leq\deg\left(r\right)\right)$.

מנה חלקית: יהיו $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $q\in\mathbb{F}\left[x\right]$ עבורו $\left(f=gq+r\right)\wedge\left(\deg\left(r\right)\leq\deg\left(r\right)\right)$.

הערה: אם $r=0$ אזי במקום מנה חלקית נאמר מנה שלמה.

אידיאל: יהי R חוג קומוטטיבי אזי $I\subseteq R$ המקיים $\forall a\in I.\left(\forall b\in I.a+b\in I\right)\wedge\left(\forall c\in R.ca\in I\right)$.

האידיאל הנוצר: יהיו $f_1\ldots f_n\in R$ אזי $\langle f_1\ldots f_n\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{n}f_ig_i\mid g_1\ldots g_n\in R\right\}$.

טענה: יהי R חוג קומוטטיבי ויהיו $f_1\ldots f_n\in R$ אזי $\langle f_1\ldots f_n\rangle$ אידיאל.

למה: יהיו $f_1\ldots f_n\in R$ ויהי $I\subseteq R$ אידיאל המקיים $f_1,\ldots,f_n\in I$ אזי $\langle f_1\ldots f_n\rangle\subseteq R$.

אידיאל ראשי: אידיאל $I\subseteq R$ המקיים $\exists f\in R.I=\langle f\rangle$.

תחום ראשי: תחום שלמות R עבורו כל אידיאל ראשי.

משפט: יהי $I\subseteq\mathbb{F}\left[x\right]$ אידיאל אזי I ראשי.

מחלק משותף: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $g\in\mathbb{F}\left[x\right]\setminus\left\{0\right\}$ המקיים $\forall i.g\mid f_i$.

מחלק משותף מקסימלי: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $\max_{\deg}\left\{g\mid\forall i.\left(g\mid f_i\right)\right\}$.

משפט: מחלק משותף מקסימלי קיים ויחיד עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי המחלק המשותף המקסימלי הינו $\gcd\left(f_1\ldots f_n\right)$.

טענה: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}\left[x\right]$ יהי g מחלק משותף אזי $g\mid\gcd\left(f_1\ldots f_n\right)$.

משפט: היו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $\exists h_1\ldots h_n\in\mathbb{F}\left[x\right].\gcd\left(f_1\ldots f_n\right)=\sum_{i=1}^{n}h_if_i$.

אלגוריתם אוקלידס: יהיו $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ עבורם $f=pg+r$ וכן $r\neq0$ אזי $\gcd\left(f,g\right)=\gcd\left(g,r\right)$.

פולינומים זרים: $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ המקיימים $\gcd\left(f,g\right)=1$.

מסקנה: יהיו $f,g,h\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $\left(h\neq0\right)\wedge\left(h\mid fg\right)\wedge\left(\gcd\left(f,h\right)=1\right)\implies\left(h\mid g\right)$.

הפיך: יהי R תחום שלמות אזי $u\in R\setminus\left\{0\right\}$ המקיים $u\mid1$.

הגדרה: יהי R תחום שלמות אזי $R^*=\left\{u\in R\mid\left(u\mid1\right)\right\}$.

אי־פריק (א"פ): $p\in R\backslash R^{*}$ המקיים $\forall a,b\in R.\left(p=ab\right)\implies\left(a\in R^{*}\right)\vee\left(b\in R^{*}\right)$.

ראשוני: $p\in R\backslash\left\{ 0\right\}$ המקיים $\forall a,b\in R.\left(p\mid ab\right)\implies\left(p\mid a\right)\vee\left(p\mid b\right)$.

למה: יהי $p\in\mathbb{F}\left[x\right]$ א"פ אזי p ראשוני.

חברים/שקולים: $f,g\in R$ המקיימים $\exists u\in R^{*}.fu=g$.

טענה: יהיו $f,g\in R$ אזי (f,g חברים) $\iff$ ($\left(f\mid g\right)\wedge\left(g\mid f\right)$).

משפט: יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי קיימים ויחידים $p_{1}\ldots p_{n}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ א"פ עבורם $\prod p_{i}=f$.

כפולה משותפת: יהיו $f_{1}\ldots f_{n}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $g\in\mathbb{F}\left[x\right]\backslash\left\{ 0\right\}$ המקיים $\forall i.f_{i}\mid g$.

כפולה משותפת מינימלית: יהיו $f_{1}\ldots f_{n}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $\min_{\deg}\left\{ g\mid\forall i.\left(f_{i}\mid g\right)\right\}$.

משפט: כפולה משותפת מינימלית קיימת ויחידה עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_{1}\ldots f_{n}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי הכפולה המשותפת המינימלית הינה $\text{lcm}\left(f_{1}\ldots f_{n}\right)$.

טענה: יהיו $f_{1}\ldots f_{n}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ יהי g כפולה משותפת אזי $\text{lcm}\left(f_{1}\ldots f_{n}\right)\mid g$.

שורש: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $\alpha\in\mathbb{F}$ המקיים $f\left(\alpha\right)=0$.

משפט בז'ו: יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$

- נניח כי $f\left(x\right)=p\left(x\right)\left(x-\alpha\right)+r\left(x\right)$ אזי $f\left(\alpha\right)=r\left(\alpha\right)$.
- (α שורש של f) $\iff$ ($\left(x-\alpha\right)\mid f$).

ריבוי שורש: יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$ אזי $\max\left\{ k\in\mathbb{N}\mid\left(\left(x-\alpha\right)^{k}\mid f\right)\right\}$.

משפט: יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]\backslash\left\{ 0\right\}$ ויהיו $r_{1}\ldots r_{n}\in\mathbb{F}$ ריבוי שורשים שונים אזי $\sum_{i=1}^{n}r_{i}\le\deg\left(f\right)$.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אינסופי עבורו $\forall\alpha\in\mathbb{F}.f\left(\alpha\right)=g\left(\alpha\right)$ אזי $f=g$.

שדה סגור אלגברית: שדה $\mathbb{F}$ המקיים $\forall f\in\mathbb{F}_{\ge1}\left[x\right].\exists\alpha\in\mathbb{F}.f\left(\alpha\right)=0$.

המשפט היסודי של האלגברה: $\mathbb{C}$ שדה סגור אלגברית.

משפט: יהי $f\in\mathbb{R}\left[x\right]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{C}$ אזי $\left(f\left(\overline{\alpha}\right)=0\right)\iff\left(f\left(\alpha\right)=0\right)$.

מסקנה: יהי $f\in\mathbb{R}\left[x\right]$ אזי קיימים $p_{1}\ldots p_{n}\in\mathbb{R}\left[x\right]$ לינאריים וכן $q_{1}\ldots q_{m}\in\mathbb{R}\left[x\right]$ ממעלה שנייה ללא שורש ממשי המקיימים $f=\prod p_{i}\prod q_{i}$.

משפט: יהי $f=\sum a_{i}x^{i}\in\mathbb{Z}\left[x\right]$ המקיים $\gcd\left(a_{0}\ldots a_{n}\right)=1$ וכן $a_{n}a_{0}\ne0$ ויהי $\alpha=\frac{p}{q}$ עבור $\gcd\left(p,q\right)=1$

- $\left(f\left(\alpha\right)=0\right)\implies\left(p\mid a_{0}\right)\wedge\left(q\mid a_{n}\right)$.
- $\left(\alpha\ne1\right)\implies\left(\left(p-q\right)\mid f\left(1\right)\right)$.
- $\left(\alpha\ne-1\right)\implies\left(\left(p+q\right)\mid f\left(-1\right)\right)$.

קריטריון אייזנשטיין: יהי $f=\sum a_{i}x^{i}\in\mathbb{Z}\left[x\right]$ המקיים $\gcd\left(a_{0}\ldots a_{n}\right)=1$ וכן $a_{n}a_{0}\ne0$ ויהי $p\in\mathbb{P}$ עבורו $\left(\gcd\left(a_{n},p\right)=1\right)\wedge\left(\forall0\le i\le n-1.p\mid a_{i}\right)\wedge\left(p^{2}\nmid a_{0}\right)$ אזי f אינו פריק מעל $\mathbb{Q}\left[x\right]$.

נגזרת: יהי $f=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $f'=\sum_{i=1}^{n}ia_{i}x^{i-1}$.

סימון: נגדיר $\mathcal{D}:\mathbb{F}\left[x\right]\to\mathbb{F}\left[x\right]$ כך $\mathcal{D}\left(f\right)=f'$.

טענה: ($\mathcal{D}$ ט"ל)$\wedge\left(\mathcal{D}\left(fg\right)=g\mathcal{D}\left(f\right)+f\mathcal{D}\left(g\right)\right)$.

שורש פשוט: שורש שהריבוי שלו 1.

שורש מרובה: שורש שהריבוי שלו גדול מ־1.

משפט: יהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$ שורש אזי (α שורש מרובה) $\iff$ (α שורש של f').

מאפיין שדה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)=\min\left\{ m\in\mathbb{N}\mid m\cdot1=0\right\}$ ואם אינו מוגדר אזי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)=0$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה המקיים $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)=0$ אזי (α שורש מריבוי r של f) $\Longleftarrow$ (α שורש מריבוי $r-1$ של f').

סימון: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי הצורה הקנונית היא $A_{\text{can}}^{\mathbb{F}}$.

אופרטור לינארי/loop closed: $\varphi\in\text{Hom}(L)$.

loop open: $\varphi\in\text{Hom}(\mathcal{L},\mathcal{M})$.

סימון: $\text{GL}(n,\mathbb{F})=\{A\in M_n(\mathbb{F})\mid |A|\neq 0\}$.

מטריצות דומות: $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $\exists C\in\text{GL}(n,\mathbb{F}).B=C^{-1}AC$.

ערך עצמי (ע"ע): יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי $\lambda\in\mathbb{F}$ עבורו $\exists v\in L\backslash\{0\}.\varphi(v)=\lambda v$.

הספקטרום: יהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{Spec}_{\mathbb{F}}(A)=\{\lambda\in\mathbb{F}\mid A \text{ ע"ע של } \lambda\}$.

וקטור עצמי (ו"ע): יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי $0\neq v\in V$ עבורו $\exists\lambda\in\mathbb{F}.\varphi(v)=\lambda v$.

תת מרחב עצמי (מ"ע): יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע אזי $L_\lambda=\{v\in L\mid\varphi(v)=\lambda v\}$.

למה: ($L_\lambda\subseteq L$ תמ"ו)$\wedge(L_\lambda=\ker(\varphi-\lambda I))$.

בסיס עצמי: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי בסיס $\mathcal{B}$ המורכב מוקטורים עצמיים של φ.

העתקה לכסינה: $\varphi\in\text{Hom}(L)$ עבורה קיים בסיס $\mathcal{B}$ המקיים $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ אלכסונית.

משפט: יהי L מ"ו נ"ס ויהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי (φ ניתן ללכסון) $\Longleftrightarrow$ (קיים בסיס עצמי ל־L).

הערה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה אזי A_{can} צורה אלכסונית.

למה: יהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ שונים אזי $\bigoplus_{i=1}^{n}L_{\lambda_i}$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ בעל $\lambda_1,\ldots,\lambda_{\dim(L)}$ ע"ע שונים אזי φ ניתן ללכסון.

פולינום אופייני: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A(x)=\det(xI-A)$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A\in\mathbb{F}[x]$.

למה: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ ויהיו $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ בסיסים אזי $p_{[\varphi]_{\mathcal{B}_1}}(x)=p_{[\varphi]_{\mathcal{B}_2}}(x)$.

פולינום אופייני: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $p_\varphi(x)=p_{[\varphi]_{\mathcal{B}}}(x)$.

פולינום מתוקן: $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $a_n=1$.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי (p_φ פולינום מתוקן)$\wedge(\deg(p_\varphi)=\dim(L))$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ עבורו $p_\varphi=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ אזי

- $a_{n-1}=-\text{trace}(A)$.
- $a_0=(-1)^n\det(A)$

למה: תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $(p_A=p_{A^t})\wedge(p_{AB}=p_{BA})$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{trace}(AB)=\text{trace}(BA)$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $(\lambda\in\text{Spec}(A))\iff(p_A(\lambda)=0)$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ יהי $x\in\mathbb{F}^n$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי (x ו"ע של ע"ע λ) $\Longleftrightarrow(x\in\ker(\lambda I-A))$.

חיבור מרוכב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,c,d\in L$ אזי $\langle a,b\rangle+_{\mathbb{C}}\langle c,d\rangle=\langle a+c,b+d\rangle$.

כפל מרוכב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,c,d\in L$ אזי $\langle a,b\rangle\cdot_{\mathbb{C}}\langle c,d\rangle=\langle ac-bd,ad+bc\rangle$.

מירכוב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $L_{\mathbb{C}}=\langle L^2,+_{\mathbb{C}},*_{\mathbb{C}}\rangle$.

סימון: יהי $\langle a,b\rangle\in L_{\mathbb{C}}$ אזי $a+ib=\langle a,b\rangle$.

טענה: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $L_{\mathbb{C}}$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $\alpha+i\beta$ ע"ע עבור ו"ע $u+iv$ אזי $(Au=\alpha u-\beta v)\wedge(Av=\beta u+\alpha v)$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ באשר $A_{\text{can}}^{\mathbb{C}}=\text{Diag}(\lambda_1\ldots\lambda_m,\alpha_1+i\beta_1\ldots\alpha_\ell+i\beta_\ell)$ אזי

$$A_{\text{can}}^{\mathbb{R}}=\text{Diag}\left(\lambda_1\dots\lambda_m,\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ -\beta_1 & \alpha_1\end{smallmatrix}\right)\dots\left(\begin{smallmatrix}\alpha_\ell & \beta_\ell\\ -\beta_\ell & \alpha_\ell\end{smallmatrix}\right)\right)$$

מסקנה : תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עם ו"ע $u_1+iv_1,\dots,u_\ell+iv_\ell$ אזי $u_1\dots u_\ell,v_1\dots v_\ell$ בסיס קנוני מעל $\mathbb{R}$.

ריבוי גאומטרי : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_g\left(\lambda\right)=\dim\left(L_\lambda\right)$.

ריבוי אלגברי : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_a\left(\lambda\right)=\max\left(n\in\mathbb{N}\mid\left(\left(x-\lambda\right)^n|f_A\left(x\right)\right)\right)$.

למה : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_g\left(\lambda\right)\le r_a\left(\lambda\right)$.

מסקנה : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ לכסין מעל $\mathbb{F}$) $\iff$ ($p_\varphi\left(x\right)$ מתפרק לגורמים לינאריים)$\wedge$(לכל ע"ע $r_g\left(\lambda\right)=r_a\left(\lambda\right)$).

מסקנה : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ לכסין ויהיו $\lambda_1\dots\lambda_n$ ע"ע אזי בצורה הקנונית כל λ_i מופיע $r_a\left(\lambda\right)$ פעמים.

מסקנה : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ לכסין אזי הצורה האלכסונית יחידה עד כדי תמורת האיברים על האלכסון.

הגדרה : יהי $p\left(x\right)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$ ותהא $A\in M_m\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $p\left(A\right)=\sum_{i=0}^n a_iA^i$.

למה : יהי $\mathcal{B}$ בסיס של L ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left[f\left(\varphi\right)\right]_{\mathcal{B}}=f\left(\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}\right)$.

פולינום מינימלי : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $m_\varphi=\min_{\deg}\left(p\in\mathbb{F}\left[x\right]\mid p\left(\varphi\right)=0\right)$.

הערה : הפולינום המינימלי הינו מתוקן.

משפט : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $m_\varphi\left(x\right)$ קיים ויחיד.

משפט : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי $p\in\mathbb{F}\left[x\right]$ המקיים $p\left(\varphi\right)=0$ אזי $m_\varphi|p$.

טענה : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left\{p\in\mathbb{F}\left[x\right]\mid p\left(\varphi\right)=0\right\}$ אידיאל של $\mathbb{F}\left[x\right]$.

מסקנה : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left\langle m_\varphi\right\rangle=\left\{p\in\mathbb{F}\left[x\right]\mid p\left(\varphi\right)=0\right\}$.

משפט קיילי המילטון : תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $p_A\left(A\right)=0$.

מסקנה : תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $m_A|p_A$.

למה : יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהי λ ע"ע אזי $m_\varphi\left(\lambda\right)=0$.

מסקנה : תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $p_A\mid m_A^n$.

משפט הפירוק הפרימרי : תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהיו $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ זרים אזי
$\ker\left(\left(f\circ g\right)\left(\varphi\right)\right)=\ker\left(f\left(\varphi\right)\right)\oplus\ker\left(g\left(\varphi\right)\right)$.

מסקנה : תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ ויהיו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}\left[x\right]$ זרים בזוגות אזי $\ker\left(\prod f_i\left(\varphi\right)\right)=\bigoplus\ker\left(f_i\left(\varphi\right)\right)$.

משפט : תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו $\lambda_1\neq\ldots\neq\lambda_k$ כל הע"ע אזי (A לכסינה) $\iff$ ($m_A\left(x\right)=\prod_{i=1}^k\left(x-\lambda_i\right)$).

למה : תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ לכסינה עבורה $p_A\left(x\right)=\prod\left(x-\lambda_i\right)$ ויהי $g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $p_{g(A)}\left(x\right)=\prod\left(x-g\left(\lambda\right)\right)$.

הגדרה : תהא $G\left(x\right)$ אנליטית עבורה $G\left(x\right)=\sum_{k=0}^\infty a_kx^k$ מתכנס בתחום $|x|<R$ אזי $G\left(A\right)=\sum_{k=0}^\infty a_kA^k$.

למה : תהא $G\left(x\right)$ אנליטית עבורה $G\left(x\right)=\sum_{k=0}^\infty a_kx^k$ מתכנס בתחום $|x|<R$ ותהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ לכסינה עם ע"ע $\lambda_1\dots\lambda_n$ המקיימים $\forall i\in\left[n\right].\left|\lambda_i\right|<R$

- הטור $G\left(A\right)$ מתכנס.
- $\text{Spec}\left(F\left(A\right)\right)=\left\{F\left(\lambda\right)\mid\lambda\in\text{Spec}\left(A\right)\right\}$.
- $\left(A_{\text{can}}=C^{-1}AC\right)\implies\left(F\left(A\right)_{\text{can}}=C^{-1}F\left(A\right)C=F\left(A_{\text{can}}\right)\right)$.

לכסון סימולטני : $\varphi,\psi\in\text{Hom}\left(L\right)$ לכסינות המקיימות קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}},\left[\psi\right]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

למה : תהא A מטריצת בלוקים אלכסונית לכסינה אזי כל בלוק לכסין.

משפט : יהיו $\varphi,\psi\in\text{Hom}\left(L\right)$ לכסינות אזי (φ,ψ לכסינות סימולטנית) $\iff$ $\left(\varphi\psi=\psi\varphi\right)$.

תת מרחב אינווריאנטי/שמור: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי תמ"ו $M\subseteq L$ המקיים $\varphi(M)\subseteq M$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי $M\subseteq L$ תת מרחב איווריאנטי אזי $\varphi_{\restriction_M}$ ט"ל.

למה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $\{0\},L,\ker(\varphi),\operatorname{Im}(\varphi)$ איווריאנטים.

משפט: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי L_λ איווריאנטי.

למה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי M איווריאנטי אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[\varphi_{\restriction M}]_{\mathcal{B}} & P\\ & A\end{pmatrix}$.

משפט: יהיו $L=\bigoplus_{i=1}^{k}L_i$ איווריאנטים אזי קיים בסיס $\mathcal{B}_1\ldots\mathcal{B}_k$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}=\operatorname{Diag}\left(\left[\varphi_{\restriction L_1}\right]_{\mathcal{B}_1},\ldots,\left[\varphi_{\restriction L_k}\right]_{\mathcal{B}_k}\right)$.

מטריצה דו אלכסונית: $A\in M_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mu_{n-1}\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

תיבת/בלוק ג'ורדן: יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$.

צורת/מטריצת ג'ורדן: יהיו $\lambda_1\ldots\lambda_n\in\mathbb{F}$ וכן $k_1\ldots k_n$ אזי $\operatorname{Diag}(J_{k_1}(\lambda_1)\ldots J_{k_n}(\lambda_n))$.

משפט ג'ורדן: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ עבורו $p_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ מטריצת ג'ורדן.

טענה: צורת ג'ורדן מוגדרת באופן יחיד עדי כדי תמורת תיבות ג'ורדן.

הערה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ בעלת צורת ג'ורדן אזי A_{can} צורת ג'ורדן.

מסקנה: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A,B דומות) $\iff$ ($A_{\text{can}}=B_{\text{can}}$).

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי A^t דומה אל A.

דרגת נילפוטנטיות: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\eta(A)=\min(n\in\mathbb{N}\mid A^n=0)$.

טענה: יהי $n\geq 2$ אזי ($J_n(\lambda)$ אינה לכסינה)$\wedge$($\eta(J_n(\lambda))=n$).

מסקנה: יהי $n\geq 2$ אזי $m_{J_n(\lambda)}=(x-\lambda)^n=p_{J_n(\lambda)}(x)$.

מרחב עצמי מוכלל: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי μ ע"ע אזי $L_\mu^{(k)}=\ker(\varphi-\mu I)^k$.

למה: $L_\mu=L_\mu^{(1)}\subseteq\ldots\subseteq L_\mu^{(r_g(\lambda))}=L$.

למה: $L_\mu^{(i)}$ אינבריאנטי ביחס אל φ.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\dim\left(L_\mu^{(k)}\right)\leq r_a(\mu)$.

למה: נניח כי $p_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)^{k_i}$ עבור $\lambda_1\neq\ldots\neq\lambda_n$ אזי $L=\bigoplus_{i=1}^{n}L_{\lambda_i}^{(k_i)}$.

בלתי תלוייה ביחס לתת מרחב: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ אזי $v_1\ldots v_k\in L$ המקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^k.\left(\sum\alpha_i v_i\in M\implies\alpha=0\right)$.

קריבסיס: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ אזי $\max_{|A|}\{A\subseteq L\mid M \text{ בלתי תלוייה ביחס אל } A\}$.

טענה: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ עם בסיס $\mathcal{B}$ אזי קו־בסיס $\mathcal{C}$ הוא השלמה לבסיס של L.

למה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ יהי μ ע"ע יהי $k\in\mathbb{N}_+$ ויהיו $e_1\ldots e_m$ קו־בסיס של $L_\mu^{(k)}$ ביחס אל $L_\mu^{(k-1)}$
- $(\varphi-\mu I)(e_1)\ldots(\varphi-\mu I)(e_m)\in L_\mu^{(k-1)}$.
- $(\varphi-\mu I)(e_1)\ldots(\varphi-\mu I)(e_m)$ בלתי תלויים ביחס אל $L_\mu^{(k-2)}$.

למה: תהא $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ עבורה $[\varphi]_B=\operatorname{Diag}(I(\lambda_1)\ldots I(\lambda_k))$ באשר $I(\lambda_i)=\operatorname{Diag}\left(J_{k_1^i}(\lambda_i)\ldots J_{k_{n_i}^i}(\lambda_i)\right)$
- כל הע"ע של φ הם $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.
- $r_a(\lambda_i)=\sum_{j=1}^{n_i}k_j^i$.
- $r_g(\lambda_i)=n_i$.
- הריבוי של λ_i בפולינום המינימלי הוא $\max\left(k_1^i,\ldots,k_{n_i}^i\right)$.

• $\left|\left\{ j \mid k_j^i \geq r \right\}\right| = \dim\left(\ker\left((T-\lambda_i I)^r\right)\right) - \dim\left(\ker\left((T-\lambda_i I)^{r-1}\right)\right)$.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ וכן $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $J_n(a+ib, a-ib)_{\text{can}}^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \ddots & \\ & & \ddots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & & & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{2k \times 2k}$.

למה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ וכן $\mu \in \mathbb{F}$ אזי $J_n(\mu)^m = \begin{pmatrix} \mu^m & n\mu^{m-1} & \binom{m}{2}\mu^{m-2} & & \\ & \mu^m & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \binom{m}{2}\mu^{m-2} \\ & & & \mu^m & m\mu^{m-1} \\ & & & & \mu^m \end{pmatrix}$.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ וכן $\mu \neq 0$ אזי $J_n(\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & -\mu^{-2} & \mu^{-3} & & \\ & \mu^{-1} & -\mu^{-2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mu^{-3} \\ & & & \mu^{-1} & -\mu^{-2} \\ & & & & \mu^{-1} \end{pmatrix}$.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ וכן $\mu \in \mathbb{F}$ אזי $\exp(J_n(\mu)) = e^{\mu} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & \frac{1}{1!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & 1 & \frac{1}{1!} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$.

מכפלה פנימית ממשית (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $(\cdot,\cdot) : L^2 \to \mathbb{R}$ המקיימת

- סימטריות: $\forall a, b \in L. (a,b) = (b,a)$.
- דו־ליניאריות: $\forall a, b, c \in L. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. (\alpha a + \beta b, c) = \alpha(a,c) + \beta(b,c)$.
- חיוביות: $\forall a \in L. (a,a) \geq 0$.
- חיוביות ממש: $\forall a \in L. ((a,a) = 0) \iff (a = 0)$.

מכפלה פנימית מרוכבת (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $(\cdot,\cdot) : L^2 \to \mathbb{C}$ המקיימת

- הרמיטיות: $\forall a, b \in L. (a,b) = \overline{(b,a)}$.
- ליניאריות: $\forall a, b, c \in L. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. (\alpha a + \beta b, c) = \alpha(a,c) + \beta(b,c)$.
- חיוביות: $\forall a \in L. (a,a) \in \mathbb{R}_+$.
- חיוביות ממש: $\forall a \in L. ((a,a) = 0) \iff (a = 0)$.

מרחב אוקלידי: $(L, +, *, (\cdot,\cdot))$ באשר ($(L, +, *)$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$)$\wedge$($(\cdot,\cdot)$ מכפלה פנימית ממשית).

מרחב אוניטרי: $(L, +, *, (\cdot,\cdot))$ באשר ($(L, +, *)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$)$\wedge$($(\cdot,\cdot)$ מכפלה פנימית מרוכבת).

מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ): (מרחב אוניטרי)$\vee$(מרחב אוקלידי).

מימוש: יהי $\langle L, +, \cdot \rangle$ מרחב אוניטרי אזי $\langle L_{\mathbb{R}}, +, \cdot \rangle$.

משפט: יהי L מרחב אוניטרי אזי ($L_{\mathbb{R}}$ מ"ו)$\wedge$($(a,b)_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}(a,b)$ מ"פ על $L_{\mathbb{R}}$).

למה: יהי L מרחב אוניטרי אזי $\dim_{\mathbb{R}}(L_{\mathbb{R}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(L)$.

הגדרה: יהיו $a, b \in \mathbb{C}^n$ נגדיר $(a,b)_{\text{st}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$.

הגדרה: יהיו $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ נגדיר $(A,B)_{\text{st}} = \operatorname{trace}\left(A^t \overline{B}\right)$.

הגדרה: יהיו $f, g \in C_{\mathbb{C}}([\alpha, \beta])$ נגדיר $(f,g)_{\text{st}} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\overline{g(x)}dx$.

משפט קושי שוורץ: יהי L ממ"פ ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a,b)^2 \leq (a,a) \cdot (b,b)$.

טענה: יהיו $a, b \in L$ אזי $(a \in \operatorname{span}(b)) \iff \left((a,b)^2 = (a,a) \cdot (b,b)\right)$.

נורמה/אורך: יהי $a \in L$ אזי $\|a\| = \sqrt{(a,a)}$.

זווית: יהיו $a,b \in L\backslash\{0\}$ אזי $\alpha \in [0,\pi]$ עבורה $\cos(\alpha) = \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|}$.

סימון: יהיו $a,b \in L\backslash\{0\}$ אזי $\widehat{ab}$ הזווית בין a,b.

מרחק: יהיו $a,b \in L$ אזי $\text{dist}(a,b) = \|a-b\|$.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $a,b \in L$ ויהי λ סקלר
- $(\|a\| \geq 0) \wedge ((\|a\| = 0) \iff (a = 0))$.
- $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $|\|a\| - \|b\|| \leq \|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $a,b \in L\backslash\{0\}$
- $-1 \leq \cos\left(\widehat{ab}\right) \leq 1$.
- $\left(\cos\left(\widehat{ab}\right) = 1\right) \iff (\exists t > 0.b = ta)$.
- $\left(\cos\left(\widehat{ab}\right) = -1\right) \iff (\exists t < 0.b = ta)$.

וקטורים ניצבים/אורתוגונליים (א"ג): $a,b \in L$ המקיימים $(a,b) = 0$.

סימון: יהיו a,b ניצבים אזי $a \perp b$.

משפט פיתגורס: יהיו $a,b \in L$ אזי $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \iff a \perp b$.

למה: יהי L ממ"פ ויהיו $a,b,c \in L$
- סימטריות: $\text{dist}(a,b) = \text{dist}(b,a)$.
- חיוביות: $\text{dist}(a,b) \geq 0$.
- חיוביות ממש: $(\text{dist}(a,b) = 0) \iff (a = b)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\text{dist}(a,b) \leq \text{dist}(a,c) + \text{dist}(c,b)$.

שחזור מכפלה פנימית מנורמה: יהי L ממ"פ ויהיו $a,b \in L$
- L מרחב אוקלידי אזי $(a,b) = \frac{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}{4}$.
- L מרחב אוניטרי אזי $(a,b) = \frac{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}{4} + i\frac{\|a+ib\|^2 - \|a-ib\|^2}{4}$.

מרחב בעל נורמה: יהי L מ"ו נ"ס אזי $\upsilon : L \to \mathbb{R}$ המקיימת
- $(\upsilon(a) \geq 0) \wedge ((\upsilon(a) = 0) \iff (a = 0))$.
- $\upsilon(\lambda a) = |\lambda| \cdot \upsilon(a)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon(a+b) \leq \upsilon(a) + \upsilon(b)$.

טענה: יהי L ממ"פ אזי L מרחב בעל נורמה.

שיוויון המקבילית: נורמה υ המקיימת $\forall a,b \in L.\upsilon(a+b)^2 + \upsilon(a-b)^2 = 2\left(\upsilon(a)^2 + \upsilon(b)^2\right)$.

משפט: יהי L מרחב בעל נורמה υ אזי (υ מקיימת שיוויון המקבילית) $\iff$ (υ משרה מכפלה פנימית).

טענה: מעל $C([\alpha,\beta])$ הנורמה $\upsilon(f) = \max_{x\in[\alpha,\beta]} |f(x)|$ אינה מושרת ממכפלה פנימית.

מטריצת גראם: יהי L ממ"פ ויהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי $G(a_1 \ldots a_k) \in M_k(\mathbb{C})$ כך $(G(a_1 \ldots a_k))_{i,j} = (a_i, a_j)$.

מטריצה הרמיטית: $A \in M_n(\mathbb{C})$ המקיימת $A^t = \overline{A}$.

טענה: יהי L ממ"פ ויהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי $G(a_1 \ldots a_k)^t = \overline{G(a_1 \ldots a_k)}$.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי $G(a_1 \ldots a_k)^t = G(a_1 \ldots a_k)$.

משפט: יהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי ($a_1 \ldots a_k$ בת"ל) $\iff (\det(G(a_1 \ldots a_k)) \neq 0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{B} \subseteq L$ בסיס אזי $\det G(\mathcal{B}) \neq 0$.

וקטורים אורתונורמלים (א"נ) : $L \ni a_1 \ldots a_n$ המקיימים $(a_i, a_j) = \delta_{i,j}$.

מסקנה : יהיו $a_1 \ldots a_n \in L$ אורתונורמלים אזי $G(a_1 \ldots a_n) = I_n$.

מסקנה : יהיו $a_1 \ldots a_n \in L$ אורתונורמליים אזי $a_1 \ldots a_n$ בת"ל.

משפט : יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ([a]_{\mathcal{B}})_i \overline{([b]_{\mathcal{B}})_j} (\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)$.

מסקנה : יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a,b) = [a]_{\mathcal{B}}^t G(\mathcal{B}) \overline{[b]_{\mathcal{B}}}$.

משפט : יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים ותהא C מטריצת מעבר בין הבסיסים אזי $G(\mathcal{D}) = C^t G(\mathcal{B}) \overline{C}$.

מטריצות חופפות : $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $\exists C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) . C^t B C = A$.

מסקנה : יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים למרחב אוקלידי אזי $G(\mathcal{B}), G(\mathcal{D})$ חופפות.

בסיס דואלי : יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי בסיס $\mathcal{D}$ המקיים $(\mathcal{D}_i, \mathcal{B}_j) = \delta_{i,j}$.

סימון : יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $\mathcal{B}^*$ בסיס דואלי.

משפט : יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהי $a \in L$

- $\mathcal{B}^*$ קיים ויחיד.
- $\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B}$.
- $a = \sum_{i=1}^{n} (a, \mathcal{B}_i^*) \mathcal{B}_i$.

למה : יהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי קיימים $e_1 \ldots e_m \in L$ אורתונורמליים עבורם $\mathrm{span}\{a_1 \ldots a_k\} = \mathrm{span}\{e_1 \ldots e_m\}$.

אורתונורמליזציית גראם שמידט : יהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ בת"ל נגדיר $\mathrm{GS}(a_1 \ldots a_k) = \{e_1 \ldots e_k\}$ כך

- $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$.
- לכל $2 \le i \le k$
  - $a_i' = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i, e_j) e_j$.
  - $e_i = \frac{a_i'}{\|a_i'\|}$.

טענה : יהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ בת"ל אזי $(\mathrm{GS}(a_1 \ldots a_k)$ אורתונורמליים$) \wedge (\mathrm{span}\{\mathrm{GS}(a_1 \ldots a_k)\} = \mathrm{span}\{a_1 \ldots a_k\})$.

מסקנה : יהי L ממ"פ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ אורתונורמלי.

למה : יהי L ממ"פ יהי $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי ויהיו $a, b \in L$

- $a = \sum_{i=1}^{n} (a, \mathcal{B}_i) \mathcal{B}_i$.
- $\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ([a]_{\mathcal{B}})_i^2}$.
- $(a,b) = \sum_{i=1}^{n} ([a]_{\mathcal{B}})_i \overline{([b]_{\mathcal{B}})_i}$.
- $\mathrm{dist}(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(([a]_{\mathcal{B}})_i - ([b]_{\mathcal{B}})_i\right)^2}$.
- $\cos\left(\widehat{ab}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} ([a]_{\mathcal{B}})_i ([b]_{\mathcal{B}})_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} ([a]_{\mathcal{B}})_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ([b]_{\mathcal{B}})_i^2}}$.

מסקנה : יהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אזי $\det(G(a_1 \ldots a_k)) \ge 0$.

מסקנה : יהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ בת"ל אזי $\det(G(a_1 \ldots a_k)) > 0$.

מקבילון : יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ בת"ל אזי $P(a_1 \ldots a_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \mid \forall i \in [k] . \lambda_i \in [0,1] \right\}$.

נפח מקבילון : יהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ בת"ל אזי $\mathrm{Vol}(P(a_1 \ldots a_k)) = \sqrt{\det(G(a_1 \ldots a_k))}$.

למה : יהיו $a_1 \ldots a_k \in L$ אורתוגונליים אזי $\mathrm{Vol}(P(a_1 \ldots a_k)) = \prod_{i=1}^{k} \|a_i\|$.

למה : יהי $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי יהי $\mathcal{D}$ בסיס ותהא C מטריצת מעבר אזי $\mathrm{Vol}(P(\mathcal{D})) = |\det(C)|$.

אורנטציייה : יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים ותהא C מטריצת מעבר אזי $\mathrm{sign}(\det(C))$.

מטריצה אורתוגונלית : יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים אורתונורמליים במרחב אוקלידי אזי מטריצת המעבר C.

מטריצה אוניטרית: היו $\mathcal{B},\mathcal{D}$ בסיסים אורתונורמליים במרחב אוניטרי אזי מטריצת המעבר C.

משפט: תהא $C\in M_n(\mathbb{R})$ אזי (C אורתוגונלית) $\iff (C^tC=I)$.

משפט: תהא $C\in M_n(\mathbb{C})$ אזי (C אוניטרית) $\iff \left(C^t\overline{C}=I\right)$.

סימון: $O(n)=\{A\in M_n(\mathbb{R})\mid A^tA=I\}$.

סימון: $U(n)=\left\{A\in M_n(\mathbb{C})\mid A^t\overline{A}=I\right\}$.

משפט: תהא $C\in O(n)\cup U(n)$ אזי $|\det(C)|=1$.

משפט: תהא $C\in M_n(\mathbb{R})$ אזי (עמודות C בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$) $\iff (C\in O(n))$.

משפט: תהא $C\in M_n(\mathbb{C})$ אזי (עמודות C בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$) $\iff (C\in U(n))$.

מטריצות אורתוגונליות מיוחדות: $SO(n)=\{A\in O(n)\mid \det(A)=1\}$.

מטריצות אוניטריות מיוחדות: $SU(n)=\{A\in U(n)\mid \det(A)=1\}$.

משפט: ($\langle O(n),\cdot\rangle$ חבורה)$\wedge$($\langle SO(n),\cdot\rangle$ חבורה)$\wedge$($\langle U(n),\cdot\rangle$ חבורה)$\wedge$($\langle SU(n),\cdot\rangle$ חבורה).

משלים ניצב: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו אזי $M^\perp=\{a\in L\mid \forall b\in M.\,(a,b)=0\}$.

משפט: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו אזי ($M^\perp$ תמ"ו)$\wedge\left(M\oplus M^\perp=L\right)$.

למה: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו

- $\left(M^\perp\right)^\perp=M$.
- $\dim\left(M^\perp\right)=\dim(L)-\dim(M)$.
- $(M+U)^\perp=M^\perp\cap U^\perp$.
- $(M\cap U)^\perp=M^\perp+U^\perp$.

מרחק: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו ויהי $a\in L$ אזי $\operatorname{dist}(a,M)=\inf\{\operatorname{dist}(a,b)\mid b\in M\}$.

סימון: יהי $a\in L$ אזי $a_M\in M$, $a_\perp\in M^\perp$ היחידים שמקיימים $a=a_\perp+a_M$.

הטלה אורתוגונלית: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו אזי $\operatorname{pr}_M\in\operatorname{Hom}(L,M)$ המוגדרת $\operatorname{pr}_M(a)=a_M$.

משפט: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו ויהי $a\in L$

- $\operatorname{dist}(a,M)=\|a_\perp\|$.
- $\operatorname{dist}(a,a_M)=\min\{\operatorname{dist}(a,b)\mid b\in M\}$.
- $\forall b\in M\backslash\{a_M\}.\operatorname{dist}(a,b)>\operatorname{dist}(a,a_M)$.
- $\operatorname{dist}(a,M)=\sqrt{\frac{\det(G(a,\mathcal{B}))}{\det(G(\mathcal{B}))}}$.

משפט: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו ויהיו $a,b\in L$ אזי $(a,b)=(a_M,b_M)+(a_\perp,b_\perp)$.

למה: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\dim_{\mathbb{R}}(L)=\dim_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}})$.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי אזי $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ מכפלה פנימית מעל $L_{\mathbb{C}}$.

משפט אויילר־פורייה־פרסבל: $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

פונקציונל ליניארי: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f\in\operatorname{Hom}(V,\mathbb{F})$.

המרחב הדואלי: $V^*=\operatorname{Hom}(V,\mathbb{F})$.

הגדרה: יהי L ממ"פ על $\mathbb{F}$ ויהי $a\in L$ אזי $\varphi_a:L\to\mathbb{F}$ המוגדרת $\varphi_a(b)=(b,a)$.

למה: יהי L ממ"פ ויהי $a\in L$ אזי $\varphi_a\in L^*$.

משפט: יהי L ממ"פ נ"ס אזי $f:L\to L^*$ המוגדרת $f(a)=\varphi_a$ חח"ע ועל.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי נ"ס אזי $f:L\to L^*$ המוגדרת $f(a)=\varphi_a$ העתקה הפיכה.

איזומטריה: איזומורפיזם $\varphi\in\operatorname{Hom}(L_1,L_2)$ המקיים $\forall a,b\in L_1.\,(\varphi(a),\varphi(b))=(a,b)$.

משפט : יהיו $\varphi,\phi\in\operatorname{Hom}(L_1,L_2)$ איזומטריות יהיו $a,b\in L_1$ ותהא $\mathcal{D}\subseteq L_1$ בת"ל

- ($\varphi\circ\phi$ איזומטריה)$\wedge$(φ^{-1} איזומטריה).
- $(\|\varphi(a)\|=\|a\|)\wedge(\operatorname{dist}(\varphi(a),\varphi(b))=\operatorname{dist}(a,b))$.
- $(a\perp b\iff\varphi(a)\perp\varphi(b))\wedge\left(\widehat{a,b}=\widehat{\varphi(a),\varphi(b)}\right)$.
- $\operatorname{Vol}(P(\mathcal{D}))=\operatorname{Vol}(P(\varphi(\mathcal{D})))$.

מסקנה : יהי L ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $L,\mathbb{F}^{\dim L}$ איזומטריים.

משפט : יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי (φ איזומטריה) $\iff$ (קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}\cdot\overline{[\varphi]_{\mathcal{B}}}^t=I$).

משפט : יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ התב"ש

- φ איזומטריה.
- $\forall a\in L.\|\varphi(a)\|=\|a\|$.
- קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $\varphi(\mathcal{B})$ בסיס א"נ.

העתקה קונפורמית : יהי L מרחב אוקלידי אזי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ המקיים $\forall a,b\in L.\widehat{a,b}=\widehat{\varphi(a),\varphi(b)}$.

משפט : יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי (φ העתקה קונפורמית) $\iff$ (קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}\in O(n)$. $\exists\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$).

דטרמיננטה : יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L_1,L_2)$ איזומורפיזם ויהיו $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ בסיסים א"נ בהתאמה אזי $\det(\varphi)=\det\left([\varphi]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}\right)$.

למה : יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L_1,L_2)$ אזי $\det(\varphi)$ מוגדר היטב עד כדי אוריינטציה.

משפט : יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L_1,L_2)$ איזומורפיזם ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של L_1 אזי $\operatorname{Vol}(P(\varphi(\mathcal{B})))=|\det(\varphi)|\operatorname{Vol}(P(\mathcal{B}))$.

העתקה שומרת נפח : יהיו L_1,L_2 מרחבים אוקלידיים אזי איזומורפיזם $\varphi\in\operatorname{Hom}(L_1,L_2)$ עבורו לכל בסיס $\mathcal{B}$ של L_1 מתקיים $\operatorname{Vol}(P(\varphi(\mathcal{B})))=\operatorname{Vol}(P(\mathcal{B}))$.

מסקנה : יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L_1,L_2)$ איזומורפיזם אזי (φ שומרת על נפח) $\iff$ $(\det(\varphi)=1)$.

העתקה צמודה : יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $\phi\in\operatorname{Hom}(L)$ עבורו $\forall a,b\in L.(\varphi(a),b)=(a,\phi(b))$.

משפט : יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי העתקה צמודה קיימת ויחידה.

סימון : יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי ההעתקה הצמודה ל־φ היא φ^*.

למה : יהי L ממ"פ יהיו $\varphi,\psi\in\operatorname{Hom}(L)$ יהי λ סקלר ויהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ

- $[\varphi]_{\mathcal{B}}^*=\overline{[\varphi]_{\mathcal{B}}}^t$.
- $(\varphi^*)^*=\varphi$.
- $(\varphi+\psi)^*=\varphi^*+\psi^*$.
- $(\lambda\varphi)^*=\overline{\lambda}\varphi^*$.
- $(\varphi\psi)^*=\psi^*\varphi^*$.

מסקנה : יהי L מרחב אוקלידי אזי $f\in L^L$ המוגדרת $f(\varphi)=\varphi^*$ היא אוטומורפיזם.

משפט : $\left(\ker(\varphi)=(\operatorname{Im}(\varphi^*))^\perp\right)\wedge\left(\operatorname{Im}(\varphi)=(\ker(\varphi^*))^\perp\right)$.

משפט : יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי (φ איזומטריה) $\iff$ $(\varphi\varphi^*=I)$.

העתקה צמודה לעצמה : יהי L ממ"פ אזי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ המקיימת $\varphi=\varphi^*$.

למה : יהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ אזי $\left([\varphi]_{\mathcal{B}}=\overline{[\varphi]_{\mathcal{B}}}^t\right)\iff(\varphi=\varphi^*)$.

משפט : יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $(\forall a\in L.(\varphi(a),a)\in\mathbb{R})\iff(\varphi=\varphi^*)$.

למה : יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ המקיים $\forall a\in L.(\varphi(a),a)=0$ אזי $\varphi=0$.

למה : יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי קיימים ויחידים $\varphi_1,\varphi_2\in\operatorname{Hom}(L)$ צמודים לעצמם המקיימים $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$.

העתקה נורמלית : יהי L ממ"פ אזי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ המקיים $\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^*$.

טענה : תהא $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ נורמלית אזי (λ ע"ע של φ עם ו"ע a) $\Longleftarrow$ ($\overline{\lambda}$ ע"ע של φ^* עם ו"ע a).

טענה : תהא $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ נורמלית ויהיו $\lambda \neq \mu$ אזי $L_\lambda \perp L_\mu$.

טענה : תהא $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ נורמלית אזי (M תמ"ו φ שמור) $\Longleftarrow$ ($M^\perp$ תמ"ו φ שמור).

משפט הפירוק הספקטרלי : יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ אזי (φ לכסין בבסיס א"נ) $\iff$ $(\varphi^*\varphi = \varphi\varphi^*)$.

משפט שור : יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ אזי קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_\mathcal{B}$ משולשית עליונה.

משפט : יהי L מרחב אוקלידי ויהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ אזי (φ לכסין בבסיס א"נ) $\iff$ $(\varphi^t = \varphi)$.

מסקנה : תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית אזי קיימת $U \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית עבורה $U^{-1}AU$ אלכסונית ממשית.

למה : תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית ויהי λ ע"ע אזי $\|\lambda\| = 1$.

משפט : יהי L ממ"פ ויהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ נורמלי אזי (φ איזומטריה) $\iff$ $(\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\varphi) . \|\lambda\| = 1)$.

משפט : יהי L מרחב אוקלידי ויהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ איזומטריה אזי קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ המקיים

$$[\varphi]_\mathcal{B} = \mathrm{Diag}\left(1\ldots 1, -1 \ldots -1, \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}\right)$$

מסקנה : תהא $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ איזומטריה

- $L = \mathbb{R}$, אזי (φ שיקוף ביחס לראשית)$\vee (\varphi = I)$.
- $L = \mathbb{R}^2$, אזי (φ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית)$\vee$(φ סיבוב סביב הראשית).
- $L = \mathbb{R}^3$, אזי (φ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית)$\vee$ (φ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית)$\vee$(φ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית ושיקוף ביחס לקו ישר שאנך למישור ועובר דרך הראשית).

תבנית בילינארית (ת"ב) : יהיו L, M מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ אזי $\Phi : L \times M \to \mathbb{F}$

- לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v, u \in L$ ויהי $w \in M$ אזי $\Phi(\alpha v + \beta u, w) = \alpha\Phi(v, w) + \beta\Phi(u, w)$.
- לינאריות ברכיב שני: יהי $v \in L$ ויהיו $u, w \in M$ אזי $\Phi(v, \alpha u + \beta w) = \alpha\Phi(v, u) + \beta\Phi(v, w)$.

סימון : יהיו L, M מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $B(L, M) = \{\Phi : L \times M \to \mathbb{F} \mid \text{תבנית בילינארית } \Phi\}$.

סימון : יהי L מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $B(L) = B(L, L)$.

מטריצה מייצגת : תהא $\Phi \in B(L, M)$ ויהיו $\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M$ בסיסים אזי $\left([\Phi]_{\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M}\right)_{i,j} = \Phi\left((\mathcal{B}_L)_i, (\mathcal{B}_M)_j\right)$.

משפט : תהא $\Phi \in B(L, M)$ יהיו $\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M$ בסיסים יהי $a \in L$ ויהי $b \in M$ אזי $\Phi(a, b) = [a]^t_{\mathcal{B}_L} [\Phi]_{\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M} [b]_{\mathcal{B}_M}$.

משפט : ($B(L, M)$ מ"ו על $\mathbb{F}$)$\wedge$$(\dim(B(L, M)) = \dim(L)\dim(M))$.

משפט : תהא $\Phi \in B(L, M)$ ויהיו $\mathcal{B}_L, \mathcal{B}'_L, \mathcal{B}_M, \mathcal{B}'_M$ בסיסים אזי $[\Phi]_{\mathcal{B}'_L, \mathcal{B}'_M} = \left([\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}_L}_{\mathcal{B}'_L}\right)^t [\Phi]_{\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M} [\mathrm{Id}]^{\mathcal{B}_M}_{\mathcal{B}'_M}$.

דרגה : תהא $\Phi \in B(L, M)$ אזי $\mathrm{rank}(\Phi) = \mathrm{rank}\left([\Phi]_{\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M}\right)$.

למה : תהא $\Phi \in B(L, M)$ אזי $\mathrm{rank}(\Phi)$ מוגדרת היטב.

הגדרה : תהא $\Phi \in B(L, M)$ נגדיר $\Phi_1 \in \mathrm{Hom}(L, M^*)$ כך $\Phi_1(a)(b) = \Phi(a, b)$.

הגדרה : תהא $\Phi \in B(L, M)$ נגדיר $\Phi_2 \in \mathrm{Hom}(M, L^*)$ כך $\Phi_2(b)(a) = \Phi(a, b)$.

משפט : תהא $\Phi \in B(L, M)$ אזי $\mathrm{rank}(\Phi) = \mathrm{rank}(\Phi_1) = \mathrm{rank}(\Phi_2)$.

תבנית אי־מנוונת : $\Phi \in B(L, M)$ עבורה $[\Phi]$ הפיכה.

משפט : תהא $\Phi \in B(L, M)$ התב"ש

- Φ אי־מנוונת.

- Φ_1, Φ_2 איזומורפיזמים.
- $\text{rank}\left(\Phi\right) = \dim\left(M\right) = \dim\left(L\right)$.

משפט: תהא $\Phi \in B\left(L\right)$ אזי (Φ אי־מנוונת) $\iff$ $\left(\forall a \in L\setminus\{0\}.\exists b \in L.\Phi\left(a,b\right) \neq 0\right)$.

משפט: יהיו $L \neq M$ ותהא $\Phi \in B\left(L,M\right)$ באשר $\text{rank}\left(\Phi\right) = r$ אזי $\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_L,\mathcal{B}_M} = \text{Diag}\left(I_r, 0\right)$.

מסקנה: יהיו $L \neq M$ ותהא $\Phi \in B\left(L,M\right)$ באשר $\text{rank}\left(\Phi\right) = r$ אזי קיימים $\varphi_1 \ldots \varphi_r \in L^*$ וכן $\psi_1 \ldots \psi_r \in M^*$ עבורם $\Phi = \varphi_1\psi_1 + \ldots + \varphi_r\psi_r$.

למה: יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_r, \psi_1 \ldots \psi_r \in L^*$ אזי $\text{rank}\left(\varphi_1\psi_1 + \ldots + \varphi_r\psi_r\right) \leq r$.

משפט: תהא $\Phi \in B\left(L\right)$ באשר $\text{rank}\left(\Phi\right) = r$ אזי קיימים $\varphi_1 \ldots \varphi_r, \psi_1 \ldots \psi_r \in L^*$ עבורם $\Phi = \varphi_1\psi_1 + \ldots + \varphi_r\psi_r$.

תבנית ריבועית: תהא $\Phi \in B\left(L\right)$ אזי $Q : L \to \mathbb{F}$ המוגדרת $Q\left(a\right) = \Phi\left(a,a\right)$.

למה: תהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית עבור ת"ב $\Phi \in B\left(L\right)$ ויהי $a \in L$
- יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ אזי $Q\left(\lambda a\right) = \lambda^2 Q\left(a\right)$.
- יהי $b \in L$ אזי $Q\left(a+b\right) = Q\left(a\right) + Q\left(b\right) + \Phi\left(a,b\right) + \Phi\left(b,a\right)$.
- יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $Q\left(a\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,i}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,j} + \left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{j,i}\right)\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_j$.

למה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיימת ויחידה $\Phi \in B\left(L\right)$ סימטרית מתאימה לתבנית.

מסקנה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\Phi\left(a,b\right) = \frac{Q(a+b)-Q(a)-Q(b)}{2}$.

הגדרה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\left[Q\right]_{\mathcal{B}} = \left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}$.

מסקנה: תהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\left[Q\right]^t = \left[Q\right]$.

מסקנה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $Q\left(a\right) = \left[a\right]_{\mathcal{B}}^t\left[Q\right]_{\mathcal{B}}\left[a\right]_{\mathcal{B}}$.

למה: תהא $Q : L \to \mathbb{F}$ ויהיו $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ בסיסים אזי $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'} = \left(\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^t\left[Q\right]_{\mathcal{B}}\left(\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^t$.

מטריצות חופפות: $A, B \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימות $\exists C \in \text{GL}\left(n,\mathbb{F}\right).B = C^tAC$.

משפט לגראנז': יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(Q)}\alpha_i x_i^2$.

משפט: תהא $Q : L \to \mathbb{C}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(Q)} x_i^2$.

מסקנה: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C \in \text{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ עבורה $C^tAC = \text{Diag}\left(I_{\text{rank}(A)}, 0\right)$.

משפט: תהא $Q : L \to \mathbb{R}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{\text{rank}(Q)} x_i^2$.

מסקנה: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C \in \text{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ עבורה $C^tAC = \text{Diag}\left(I_p, -I_q, 0\right)$.

סיגנטורה: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי $\left(p,q\right)$ עבורם $A \underset{\text{חופפת}}{\sim} \text{Diag}\left(I_p, -I_q, 0\right)$.

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית עם סיגנטורה $\left(p,q\right)$ אזי p.

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית עם סיגנטורה $\left(p,q\right)$ אזי q.

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא $Q : L \to \mathbb{R}$ תבנית ריבועית עבורה $\left[Q\right]_{\mathcal{B}} = \text{Diag}\left(I_p, -I_q, 0\right)$ וכן $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'} = \text{Diag}\left(I_{p'}, -I_{q'}, 0\right)$ אזי $\left(p,q\right) = \left(p',q'\right)$.

מינור ראשי: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ יהי $k < n$ ויהי $B \in M_k\left(\mathbb{F}\right)$ המקיים $\left(B\right)_{i,j} = \left(A\right)_{i,j}$ אזי $\Delta_k^A = \det\left(B\right)$.

מטריצה יחידה משולשית עליונה (unitriangular upper): $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת $A = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

טענה: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ותהא $C \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה משולשית עליונה אזי $\Delta_k^{C^tAC} = \Delta_k^A$.

משפט: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ תהא $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ סימטרית עבורה $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\text{rank}(A)} \neq 0$ וכן $\Delta_{\text{rank}(A)+1}, \ldots, \Delta_n = 0$ אזי קיימת $C \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה משולשית עליונה עבורה $C^tAC = \text{Diag}\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \ldots \frac{\Delta_{\text{rank}(A)}}{\Delta_{\text{rank}(A)-1}}, 0 \ldots 0\right)$.

הגדרה: תהא $Q : L \to \mathbb{R}$ תבנית ריבועית

- **תבנית חיובית לחלוטין (תחל"ח)**: $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .Q\left(v\right)>0$.
- **תבנית אי־שלילית**: $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .Q\left(v\right)\geq0$.
- **תבנית אי־חיובית**: $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .Q\left(v\right)\leq0$.
- **תבנית שלילית לחלוטין**: $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .Q\left(v\right)<0$.

הגדרה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית
- **חיובית לחלוטין (חל"ח)**: $\forall x\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .x^{t}Ax>0$.
- **אי־שלילית**: $\forall x\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .x^{t}Ax\geq0$.
- **אי־חיובית**: $\forall x\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .x^{t}Ax\leq0$.
- **שלילית לחלוטין**: $\forall x\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .x^{t}Ax<0$.

משפט סילבסטר: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי (A חל"ח) $\iff\left(\forall i\in\left[n\right].\Delta_{i}>0\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי (A שלילית לחלוטין) $\iff\left(\forall i\in\left[n\right].\left(-1\right)^{i}\Delta_{i}>0\right)$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי (A חל"ח) $\iff$ (כל הע"ע של A חיוביים).

למה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית חל"ח אזי $\exists!B\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right).B^{2}=A$.

פירוק פולרי: תהא $D\in\mathrm{GL}\left(n,\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים ויחידים $R\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית חל"ח וכן $Q\in O\left(n\right)$ עבורם $D=QR$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C\in O\left(n\right)$ עבורה $C^{t}AC$ אלכסונית.

מסקנה: תהא $Q_{1}:L\to\mathbb{R}$ תחל"ח ותהא $Q_{2}:L\to\mathbb{R}$ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $\left[Q_{1}\right]_{\mathcal{B}},\left[Q_{2}\right]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

תבנית אחד־וחצי־לינארית: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ אזי $\Psi:L\times L\to\mathbb{C}$
- **לינאריות ברכיב ראשון**: יהיו $v,u,w\in L$ אזי $\Psi\left(\alpha v+\beta u,w\right)=\alpha\Psi\left(v,w\right)+\beta\Psi\left(u,w\right)$.
- יהיו $v,u,w\in L$ אזי $\Psi\left(v,\alpha u+\beta w\right)=\overline{\alpha}\Psi\left(v,u\right)+\overline{\beta}\Psi\left(v,w\right)$.

מטריצה מייצגת: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $\left(\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,j}=\Psi\left(\mathcal{B}_{i},\mathcal{B}_{j}\right)$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית יהי $\mathcal{B}$ בסיס יהי $a\in L$ ויהי $b\in M$ אזי $\Psi\left(a,b\right)=\left[a\right]_{\mathcal{B}}^{t}\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\overline{\left[b\right]_{\mathcal{B}}}$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית ויהיו $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ בסיסים אזי $\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}'}=\left(\left[\mathrm{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{t}\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}\overline{\left[\mathrm{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}$.

דרגה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי $\mathrm{rank}\left(\Psi\right)=\mathrm{rank}\left(\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}\right)$.

למה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי $\mathrm{rank}\left(\Psi\right)$ מוגדרת היטב.

תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית: Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית המקיימת $\forall a,b\in L.\Psi\left(a,b\right)=\overline{\Psi\left(b,a\right)}$.

למה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי (Ψ הרמיטית) $\iff$ ($\left[\Psi\right]$ הרמיטית).

מסקנה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(I_{p},-I_{q},0\right)$.

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עם $\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(I_{p},-I_{q},0\right)$ אזי p.

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עם $\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(I_{p},-I_{q},0\right)$ אזי q.

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עבורה $\left[Q\right]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(I_{p},-I_{q},0\right)$ וכן $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'}=\mathrm{Diag}\left(I_{p'},-I_{q'},0\right)$ אזי $\left(p,q\right)=\left(p',q'\right)$.

למה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ הרמיטית אזי $\Delta_{1}\ldots\Delta_{n}\in\mathbb{R}$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ הרמיטית עבורה $\Delta_{1},\ldots,\Delta_{\mathrm{rank}\left(A\right)}\neq0$ וכן $\Delta_{\mathrm{rank}\left(A\right)+1},\ldots,\Delta_{n}=0$ אזי קיימת $C\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ יחידה משולשית עליונה עבורה $C^{t}A\overline{C}=\mathrm{Diag}\left(\Delta_{1},\frac{\Delta_{2}}{\Delta_{1}}\ldots\frac{\Delta_{\mathrm{rank}\left(A\right)}}{\Delta_{\mathrm{rank}\left(A\right)-1}},0\ldots0\right)$.

הגדרה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית
- **חיובית לחלוטין (חל"ח)**: $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .\Psi\left(v,v\right)>0$.
- **אי־שלילית**: $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .\Psi\left(v,v\right)\geq0$.

- אי־חיובית: $\forall v \in L\setminus\{0\}.\Psi(v,v)\le 0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v \in L\setminus\{0\}.\Psi(v,v)< 0$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית אזי (Ψ חל"ח) $\iff (\forall i\in[n].\Delta_i>0)$.

מסקנה: תהנא Ψ_1,Ψ_2 תבניות אחד־וחצי־לינאריות עבורן Ψ_1 חל"ח אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\Psi_1]_{\mathcal{B}},[\Psi_2]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

תבנית אנטי סימטרית: יהי $\operatorname{char}(\mathbb{F})\neq 2$ אזי $\Phi\in B(L)$ המקיימת $\forall a,b\in L.\Phi(a,b)=-\Phi(b,a)$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $\forall a\in L.\Phi(a,a)=0$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $[\Phi]$ אנטי סימטרית.

משפט: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\Phi]_{\mathcal{B}}=\operatorname{Diag}\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)\ldots\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right),0\ldots0\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אזי $\operatorname{rank}(A)\in\mathbb{N}_{\text{even}}$.

פולינום Pfaff: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אי־מנוונת אזי $p\in\mathbb{F}[x_1\ldots x_{n^2}]$ המקיים $\det(A)=p\left((A)_{1,1}\ldots(A)_{n,n}\right)^2$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אי־מנוונת אזי קיים פולינום pfaff.

הגדרה: $\mathbb{R}_2[x,y]=\{f\in\mathbb{R}[x,y]\mid\deg(f)=2\}$.

הגדרה: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2[x,y]$ אזי $p\sim q\iff\exists\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.q=\alpha p$.

קבוצת העקומות האלגבריות המישוריות ממעלה 2: $C_2(\mathbb{R})={}^{\mathbb{R}_2[x,y]}/_{\sim}$.

עקומה גאומטרית מישורית ממשית ממעלה 2: יהי $p\in\mathbb{R}_2[x,y]$ אזי $\operatorname{sols}(p)$.

למה: עקומה אלגברית מישורית ממעלה 2 מגדירה עקומה גאומטרית מישורית ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור $\mathbb{R}^2$: תהא $Q\in O(2)$ וכן $v\in\mathbb{R}^2$ אזי פונקציה $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת $f(u)=Qu+v$.

למה: תהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $p\in\mathbb{R}_2[x,y]$ המוגדרת $p(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$

- המטריצה המצומצמת: $A_p=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right)$.
- המטריצה המורחבת: $\widehat{A_p}=\left(\begin{smallmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{smallmatrix}\right)$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2[x,y]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי $\operatorname{Spec}(A_p)=\operatorname{Spec}(A_{p\circ f})$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2[x,y]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_{p\circ f}}\right)$.

משפט: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2[x,y]$ עבורן A_p,A_q דומות וכן $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)$ וכן $\left(\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)\neq0\right)\vee\left(\det(A_p)=\det(A_q)\neq0\right)$ אזי קיימת T תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ עבורה $p=q\circ T$.

מסקנה: תהא $C\in C_2(\mathbb{R})$ עבורה $\det\left(\widehat{A_p}\right)\neq0$ אזי קיימת תנועה ב־$\mathbb{R}^2$ עבורה C הינה אחת מהבאות

- קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$.
- אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- היפרבולה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- פרבולה: $y^2=2px$.

הגדרה: $\mathbb{R}_2[x,y,z]=\{f\in\mathbb{R}[x,y,z]\mid\deg(f)=2\}$.

הגדרה: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2[x,y,z]$ אזי $p\sim q\iff\exists\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.q=\alpha p$.

קבוצת המשטחים האלגבריים ממעלה 2: $S_2(\mathbb{R})={}^{\mathbb{R}_2[x,y,z]}/_{\sim}$.

משטח גאומטרי ממעלה 2: יהי $p\in\mathbb{R}_2[x,y,z]$ אזי $\operatorname{sols}(p)$.

למה: משטח אלגברי ממעלה 2 מגדיר משטח גאומטרי ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור $\mathbb{R}^3$: תהא $Q \in O(3)$ וכן $v \in \mathbb{R}^3$ אזי פונקציה $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת $f(u) = Qu + v$.

למה: תהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $A \in M_3(\mathbb{R})$ סימטרית תהא $B \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ ותהא $p \in \mathbb{R}_2[x,y,z]$ המוגדרת $p(v) = v^t A v + 2B^t v + c$

- המטריצה המצומצמת: $A_p = A$.
- המטריצה המורחבת: $\widehat{A_p} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & c \end{pmatrix}$.

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x,y,z]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי $\text{Spec}(A_p) = \text{Spec}(A_{p\circ f})$.

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x,y,z]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי $\det\left(\widehat{A_p}\right) = \det\left(\widehat{A_{p\circ f}}\right)$.

משפט: יהיו $p,q \in \mathbb{R}_2[x,y,z]$ עבורן A_p, A_q דומות וכן $\det\left(\widehat{A_p}\right) = \det\left(\widehat{A_q}\right)$ וכן $\left(\det\left(\widehat{A_p}\right) = \det\left(\widehat{A_q}\right) \neq 0\right) \vee \left(\det(A_p) = \det(A_q) \neq 0\right)$ אזי קיימת T תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ עבורה $p = q \circ T$.

מסקנה: תהא $S \in S_2(\mathbb{R})$ עבורה $\det\left(\widehat{A_p}\right) \neq 0$ אזי קיימת תנועה ב־$\mathbb{R}^3$ עבורה S הינה אחת מהבאות

- קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$.
- אליפסויד: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- היפרבולויד חד־יריעתי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- היפרבולויד דו־יריעתי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.
- פרבולויד אליפטי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$.
- פרבולויד היפרבולי: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$.