uגרף מכוון קשיר: גרף מכוון G עבורו לכל $u,v \in V$ לכל $u,v \in V$ איים מסלול מuuים מסלול מ־u ל־u מכוון קשיר חזק: גרף מכוון u עבורו לכל אזי $s\in V\left(G
ight)$ אזי ויהי :BFS אלגוריתם

```
function BFS(G, s):
      (d, \pi, \operatorname{color}) \leftarrow \operatorname{dict}(V(G))
      for u\in V\left( G\right) \backslash \{s\} do
            color[u] \leftarrow White
            d[u] \leftarrow \infty
           \pi[u] \leftarrow Null
      end
      color[s] \leftarrow Grey
      d[s] \leftarrow 0
      \pi[s] \leftarrow \text{Null}
      Q \leftarrow queue()
      while Q \neq \varnothing do
            u \leftarrow \mathsf{Q}.\mathsf{head}
            for v \in Neighbor(u) do
                 if color(v) = White then
                        color[v] \leftarrow Grey
                        d[v] \leftarrow d[u] + 1
                        \pi[v] \leftarrow u
                        Q.enqueue(v)
            end
            O.dequeue()
            color[u] \leftarrow Black
      end
     return (d, \pi, \text{color})
```

```
\mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) הינה BFS (G,s) טענה: יהי אזי סיבוכיות אי סיבוכיות אי s\in V\left(G
ight) הינה מענה:
                                                            \{v \in V \mid \mathtt{BFS}\left(G,s
ight).\mathsf{color}\left[v
ight] = \mathtt{Black}\} = [s]_{
ightarrow} אזי איז s \in V משפט: יהי G גרף ויהי
                                                            \delta(v,u) = \min(\{\operatorname{len}(\sigma) \mid v,u \mid v \in V \mid u,v \in V \mid u,v \in V \} סיול בין יהי
                                                           \delta\left(v,u
ight) \leq \delta\left(v,w
ight) + 1 אזי \left(w,u
ight) \in E טענה: יהי G גרף ויהיו G גרף באשר באשר
                                                       d\left[v
ight] \geq \delta\left(v
ight) מתקיים BFS \left(G,s
ight) אזי בכל שלב בהרצת אזי גרף ויהיו s,v\in V למה: יהי
              d[v_i] \leq d[v_1]+1 וכן d[v_i] \leq d[v_{i+1}] אזי מתקיים שלב בהרצת BFS (G,s) בו בהרצת G
                                                               .BFS (G,s) .d[v] = \delta\left(v,s\right) אזי אזי s,v \in V ויהיו יהי G יהי יהי מרחקים: יהי
עץ יהי C_\pi=\{(\pi\left[v\right],v)\mid v\in V_\pi\setminus\{s\}\} וכן V_\pi=\{v\in V\mid \mathtt{BFS}\left(G,s\right).\pi\left[v\right]\neq \mathtt{Null}\}\cup\{s\} נגדיר s\in V יהי S גרף ויהי S\in V יהי יהי
                                                                                                                                                   .G_{\pi} = (V_{\pi}, E_{\pi})
                                                                                                                              טענה: יהי S \in V אזי גרף איר s \in V
```

- $\deg_{G_{\pi}}^{-}(s)=0$ מתקיים
- $\deg_{G_{\pi}}^{-}\left(v
 ight)=1$ מתקיים $v\in V\left(G_{\pi}
 ight)$ •
- s,v בין ב־ G_{π} בין מסלול בי $v \in V\left(G_{\pi}\right)$ לכל
 - . הינו עץ G_{π}
- Gבין ביותר בין המסלול הקצר ביותר בין s,v בין בין G_π בין ויהי $v\in V$ ביותר בין יהי $v\in V$

מסלול אוילר: מסלול העובר על כל הקשתות בגרף.

מעגל אוילר: מסלול אוילר שהינו מעגל.

 $(\deg(v) \in \mathbb{N}_{\mathrm{even}}$ מתקיים $v \in V$ מתקיים מעגל אוילר בGטענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מעגל אוילר ב

אזי $\deg\left(u
ight)\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}}$ מתקיים מעגל אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל

```
function EulerCircle(G, v):
    \sigma \leftarrow \text{List}(E(G))
    u \leftarrow Neighbor(v)
    while u \neq v do
        \sigma.append(\{v,u\})
         G = G \setminus \{\{v, u\}\}
        u \leftarrow \text{Neighbor}(u)
    if length(\sigma) = |E(G)| then
      \mid return \sigma
    else
        w \leftarrow \{x \in V(G) \mid (\exists y \in V(G).(x,y) \in \sigma) \land (\deg(x) > 0)\}
        \sigma[w] = \text{EulerCircle}(G, w)
טענה: יהי v \in V(G) יהי ויהי ממן איים מתקיים עבורו לכל איי מתקיים ויהי עבורו לכל v \in V(G) איי היצה של מתקיים מתקיים איים מתקיים ויהי
                                                                                                                \mathcal{O}\left(|E|\right) הינה EulerCircle (G,v)
                                               . Neighbor (u) | \neq \varnothing פעילה מתקיים while כל עוד לולאת באלגוריתם EulerCircle טענה:
                . הינו מעגל אוילר. EulerCircle (G) אזי \deg (v) \in \mathbb{N}_{\mathrm{even}} מתקיים v \in V מתקיים הינו עבורו לכל
             .(\{v\in V(G)\mid \deg(v)\in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}\}=2) טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מסלול אוילר שאינו מעגל ב'
                        אזי\{v\in V\left(G
ight)\mid \deg\left(v
ight)\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}\}|=2 אלגוריתם למציאת מסלול אוילר: יהי aגרף קשיר ולא מכוון עבורו
function EulerPath(G):
    (v, u) \leftarrow \{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}
    G = G + \{\{v, u\}\}\
    \sigma = \operatorname{EulerCircle}(G, v)
    return \sigma \setminus \{v, u\}
                                                   .(לא קיים ב־G מעגל באורך אי־זוגיי) (דו־צדדיG איר מכוון אזי מכוון אזי G יהי G גרף אי
                                                                           אלגוריתם איהוי גרפים דו־צדדיים: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי
function IsBipartite(G):
    (d, \pi, \operatorname{color}) \leftarrow \operatorname{BFS}(G)
    for (v,u) \in V do
     if d(v) = d(u) then return False
    end
    return True
                                                         .(IsBipartite (G) = \text{True}) איי (G דו־צדדי) מענה: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי (G דו־צדדי)
.|\sigma|=\min\{|	au|\ |t^{-1} מסלול קצר ביותר בין קודקודים (מק"ב): יהי G גרף ויהיו s,t\in V אאי מסלול \sigma מ־s ל־t עבורו
                                                                      גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד: יהיG גרף ויהי ביותר מקצרים ביותר גרף המסלולים הקצרים ביותר
                                                                      E'=\{e\in E\mid sאזי איזי איזי E'=\{e\in E\mid sאזי היוצא מ־פ
                                                   אזי אלגוריתם למציאת גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד: יהי G גרף ויהי אלגוריתם למציאת אר
```

```
(d, \pi, \operatorname{color}) \leftarrow \operatorname{BFS}(G)
    E' \leftarrow E(G_{\pi})
    for (u,v) \in E(G) do
         if |\operatorname{height}_{G_\pi}(u) - \operatorname{height}_{G_\pi(v)}| = 1 then
          E'.append((u,v))
    end
    return (V(G), E')
                                                .(במק"ב) אזי e \in G_\pi BFS טענה: תהא אזי e \in E אזי אזי פון רמות עוקבות ביער
                                                         גריר המסלולים הקצרים ביותר בין קודקודים: יהיS,t\in V ויהיו גרף המסלולים הקצרים ביותר בין קודקודים:
                                                                   E' = \{e \in E \mid tאזי אזי E' = \{e \in E \mid tאזי אזי מ־סלול קצר ביותר היוצא מ־e\}
טענה: יהי S גרף מכוון ויהיו t בסיבוכיות אלגוריתם לחישוב גרף המסלולים הקצרים ביותר מ־t בסיבוכיות און ריצה t
                                                                                                                                      \mathcal{O}(|V| + |E|)
                                                                                                      אזי s \in V יהי גרף ויהי :DFS אלגוריתם
function DFS (G, s):
    (k,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
    color \leftarrow dict(E)
    k[s] \leftarrow 1
    \pi[s] \leftarrow \text{Null}
    for u \in V \setminus \{s\} do
        k[u] \leftarrow 0
         \pi[u] \leftarrow \text{Null}
    end
    for e \in E do
     |\operatorname{color}[e] \leftarrow \operatorname{White}
    end
    i \leftarrow 2
    v \leftarrow s
    while (\exists u \in Adj(v).color[(v,u)] = White) \lor (\pi[v] \neq Null) do
```

function ShortestPathGraph(G, s):

if $\{u \in Adj(v) \mid \operatorname{color}[(v,u)] = \operatorname{White}\} \neq \emptyset$ then $\mid w \leftarrow \{u \in Adj(v) \mid \operatorname{color}[(v,u)] = \operatorname{White}\}$

 $\begin{aligned} \operatorname{color}[(v,w)] &\leftarrow \operatorname{Black} \\ \mathbf{if} \ k[w] &= 0 \ \mathbf{then} \\ & k[w] \leftarrow i \\ & \pi[w] \leftarrow v \\ & v \leftarrow w \\ & i \leftarrow i+1 \end{aligned}$

else

return (k,π)

end

 $v \leftarrow \pi[v]$

```
O(|V|+|E|) הינה DFS (G,s) אזי סיבוכיות זמן הריצה של DFS (G,s) הינה DFS (G,s) אזי סיבוכיות זמן הריצה s\in V אזי בהרצת s\in V חזמן גילוי: יהי s\in V אוזי s\in V אזי בהרצת s,v\in V אזי בהרצת s,v\in V אזי באשר s,v\in V אזי באזי s\in V אזי באזי s\in V אזי s\in V
```

. איי עך DFS טענה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי ער מינו עץ.

אזי DFS אזי G_{π} יורי ארף ויהי יהי יהי יהי יער DFS קשתות ביחס לריצת

- $.e\in E\left(G_{\pi}
 ight)$ עבורה $e\in E\left(G
 ight)$ קשתות עץ: קשת •
- G_{π} ביער של של הינו אב וכן $u,v)\notin E\left(G_{\pi}
 ight)$ עבורה $(u,v)\in E\left(G\right)$ הינו אב של קשתות קדמיות: $u,v)\in E\left(G\right)$
- G_{π} עבורה $u,v
 otin (u,v) \notin E(G_{\pi})$ עבורה $(u,v) \in E(G)$ הינו אב של u ביער v
 - . שאינה קשת עץ או קדמית או שאינה $e\in E\left(G\right)$ שאינה קשת \bullet

 G_{π} או עץ אזי u או צאצא v או בגרף בגרף u אזי קשת u אזי אוי צאצא של גרף (וותהא Gיהי יהי יהי קשת אזי u אוי ווהא א

מסקנה: יהי G גרף אזי אזי אזי לא מכוון אזי גרף הוצות חוצות מסקנה:

אלגוריתם DFS בעל זמני נסיגה: יהי אלגוריתם

```
function DFS(G):
      (k, f, \pi, \text{color}, \text{low}) \leftarrow \text{dict}(V)
     for u \in V do
          k[u] \leftarrow 0
           \pi[u] \leftarrow \text{Null}
           color \leftarrow White
           \mathsf{low} \leftarrow \infty
     end
     i \leftarrow 0
     for s \in V do
          if k[s] = 0 then
            | DFS-VISIT(s, k, f, \pi, i)
     end
     return (k, f, \pi, low)
function DFS-VISIT(u, k, f, \pi, color, low, i):
     color[u] \leftarrow Gray
     i \leftarrow i + 1
     k[u] \leftarrow i
     for v \in Adj(u) do
          if (\operatorname{color}[v] = \operatorname{Gray}) \wedge (v \neq \pi[u]) then
            |\log[u] \leftarrow \min(\log[u], k[v])
           else if color[v] = White then
                \pi[v] \leftarrow u
                DFS-VISIT(v, k, f, \pi, \text{color}, \text{low}, i)
                low[u] \leftarrow min(low[u], low[v])
     end
     color[u] \leftarrow Black
     i \leftarrow i + 1
     f[u] \leftarrow i
```

.DFS (G) אזי f אזי $s \in V(G)$ ארף ויהי G גרף ויהי

 $v,u \in V$ איז ($v,u \in V$ טענה: Gray Path Lemma: יהיע $v,u \in V$ יהיע יהיע: Gray Path Lemma: יאנה

(f[v] < k[u])טענה: יהיו $v,u \in V$ אזי אזי (u,v) קשת חוצה

משפט הסוגריים: יהי G גרף ויהיו אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט משפט הסוגריים:

- $.G_{\pi}$ וכן אינם צאצא־אב ביער $[k\left(u
 ight),f\left(u
 ight)]\cap [k\left(v
 ight),f\left(v
 ight)]=arnothing$ מתקיים \bullet
 - $.G_{\pi}$ ביער ע צאצא u וכן ו $[k\left(u
 ight),f\left(u
 ight)]\subset[k\left(v
 ight),f\left(v
 ight)]$ פתקיים •
 - $.G_{\pi}$ מתקיים u צאצא v וכן ו $[k\left(u
 ight),f\left(u
 ight)]\supset[k\left(v
 ight),f\left(v
 ight)]$ פתקיים •

משפט המסלול הלבן: יהי G גרף ויהיו $u,v\in V$ אזי ויהיו אזי ($u,v\in V$ באלגוריתם ביער המסלול הלבן: יהי $u,v\in V$ אזי ($u,v\in V$ אזי ל־ $u,v\in V$).

גרף מכוון אציקלי: גרף מכוון G בו לא קיים מעגל.

 $u\prec v$ אזי אוי $(u,v)\in E$ אם $u,v\in V$ אם לכל על המקיים סדר על אזי יחס אזי אזי $u,v\in V$ אזי אזי יחס סדר

(G) משפט: יהי G גרף מכוון אזי (G אציקלי) אניקלי) משפט: יהי G גרף מכוון אזי

```
(G^-משפט: יהי G גרף מכוון אזי G אציקלי) אציקלי) משפט: יהי G גרף מכוון אזי
                                             .G משרה מיון טופולוגי המתקבלת מהרצת DFS (G) המתקבלת אזי אזי אזי איקלי אזי מכוון אציקלי אזי היי
                                                        \left. \left| G/_{\overrightarrow{G}} \right| < \left| G-\{v\}/_{\overrightarrow{G-\{v\}}} \right| עבורו v \in V\left(G\right) אז גרף מכוון אזי G אז מנתק: יהי G גרף מכוון ויהי v \in V אזי v \in V אזי v \in V קשת אחורית.
                                                                    .DFS (G) בהרצת low גרף אזי G ביותר: יהי G בהרצת המוקדם ביותר
                                                                       אלגוריתם למציאת כל הקודקודים המנתקים: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי
function Detachable Vertices (G):
     s \leftarrow V
     (k, f, \pi, \text{low}) \leftarrow \text{DFS}(G, s)
     A \leftarrow \operatorname{set}(V)
     if |Adj_{G_{\pi}}(s)| \neq 1 then
     A.append(s)
     for u \in V \backslash \{s\} do
         if \forall v \in children(u).low[v] \geq k[u] then
           A.append(u)
     end
     \mathbf{return}\ A
                               \mathcal{O}(|V|+|E|) הינה Detachable Vertices (G) טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות זמן הריצה של
                                         סענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי Detachable Vertices (G) יהינה קבוצת כל הקודקודים המנתקים.
וכן uכי מסלול מ־u גרף מכוון אזי קבוצה C\subseteq V מקסימלית בגודלה עבורה לכל u גרף מכוון אזי קבוצה אי מקסימלית בגודלה עבורה לכל
                                                                                                                                                   u^-ט ל־u^-
                                              G^T=(V,E') אזי E'=\{(v,u)\mid (u,v)\in E\} אזי גרף מכוון נגדיר הופבי/משוחלף: יהי
                                                          (G^T) אזי (G^T) אזי (G^T) אזי איי רף מכוון ותהא אזי ((G^T) אזי רף מכוון ותהא אזי מכוון ותהא
                                                                אלגוריתם קוסראג'ו־שריר למציאת רכיבים קשירים היטב: יהי G גרף מכוון אזי
function SCC(G):
     (k, f, \pi) \leftarrow \text{DFS}(G)
     /* In the next line, in the main loop of DFS we go through the vertices in decreasing order of f[u]
                                                                                                                                                       */
     (k', f', \pi') \leftarrow \text{DFS}(G^T)
     A \leftarrow \operatorname{set}(\operatorname{set}(V))
     for v \in V do
         A.append \left( \left[ v \right]_{\overbrace{\left( G^T \right)_{\pi}}} \right)
     end
    return A
   .G^{*}=\left(\operatorname{SCC}\left(G
ight),E^{*}
ight) אזי E^{*}=\left\{ \left(A,B
ight)\in\operatorname{SCC}\left(G
ight)^{2}\mid\exists u\in A.\exists v\in B.\left(u,v
ight)\in E
ight\} אזי אזי G גרף הרכיבים: יהי
                                                                                             אלגוריתם למציאת גרף הרכיבים: יהיG גרף מכוון אזי
```

 $\mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight)$ איז קיים אלגוריתם לבדיקת קיום מיון טופולוגי בסיבוכיות זמן ריצה G גרף מכוון אזי קיים אלגוריתם לבדיקת קיום מיון טופולוגי בסיבוכיות זמן ריצה

```
E^* \leftarrow \operatorname{set}((V^*)^2)
     for (u,v) \in E do
          \begin{aligned} &(u,v) \in L \text{ do} \\ &\text{if } [v] \xrightarrow[G_{\pi}^T]{} \neq [u] \xrightarrow[G_{\pi}^T]{} \text{ then} \\ & \Big| E^*.\text{append} \left( \left( [v] \xrightarrow[G_{\pi}^T]{}, [u] \xrightarrow[G_{\pi}^T]{} \right) \right) \end{aligned} 
     end
     return (V^*, E^*)
                                                                                                                     למה: יהי G גרף מכוון אזי G^st אציקלי.
                                                                                                                        אזי U\subseteq V אזי גרף ותהא G יהי
                                                                                                                .k\left( U
ight) =\min_{u\in U}\left( k\left[ u
ight] 
ight) זמן גילוי: •
                                                                                                             f(U) = \max_{u \in U} (f[u]) זמן נסיגה: •
                                          f\left(C_{2}
ight) < f\left(C_{1}
ight) אזי אזי \left(C_{1},C_{2}
ight) \in E\left(G^{st}
ight) באשר רק"ה באשר רק"ה מכוון יהיו היי G גרף מכוון יהיו
                                f\left(C_{2}
ight)>f\left(C_{1}
ight) אזי אזי \left(C_{1},C_{2}
ight)\in E\left(\left(G^{T}
ight)^{*}
ight) באשר רק"ה באשר רק"ה באשר רק"ה אזי מסקנה: יהי G גרף מכוון יהיו
                                                                          (C\in \operatorname{SCC}(G))אזי (C\cap G)הא(C\cap G)אזי ויהי (C\cap G)אזי משפט: יהי (C\cap G)אזי ויהי
                                                                                                G^* = \text{KosarajuSharir}(G) אזי גרף מכוון אזי G גרף מכוון אזי
                                                                    \exists v \in V. \exists s \in S. s 	o v המקיימת S \subseteq V הכוון אזי גרף מכוון אזי יהי
                                                                                      אלגוריתם למציאת קבוצת מוצא מינימלית: יהי G גרף מכוון אזי
function MinimalOriginSet(G):
     A \leftarrow \operatorname{set}(V(G))
     G^* \leftarrow \text{ComponentGraph}(G)
     for C \in V(G^*) do
          v \leftarrow \{u \in C \mid \nexists w \in V(G) \backslash C.(w,u) \in E(G)\}
          A.append(v)
     end
     return A
                                                                         . קבוצת מוצא מינימלית MinimalOriginSet (G) אזי מכוון אזי G יהי הי G גרף מכוון אזי
                                   \mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) הינה MinimalOriginSet (G) טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות זמן הריצה של
\mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) איז קיים אלגוריתם הבודק האם קיים הילוך \sigma העובר על S\subseteq V איז קיים אלגוריתם הבודק האם \sigma
                                                                                               (G,w) אזי w:E	o\mathbb{R} גרף ותהא G אזי איי w:E
                                                 .V\left( T
ight) =V\left( G
ight) עץ וכן ער באשר איי תת־גרף אזי תת־גרף אזי זהי T\leq G איי תת־גרף קשיר לא מכוון איי תת־גרף
                                           .w\left(T
ight) = \sum_{e \in E\left(T
ight)} w\left(e
ight) אזי פורש עץ פורש משקל אמכוון ויהי קשיר לא מכוון אזי Gיהי יהי Gיהי
      w\left(T
ight)=\min\left\{ w\left(S
ight)\mid G עץ פורש מינימלי (עפ"מ): יהי G גרף קשיר לא מכוון אזי עץ פורש T\leq G עבורו אזי עץ פורש זהי G יהי
                                                                      A,B\subseteq V\left(G\right) אזי A\uplus B=V\left(G\right) עבורם A,B\subseteq V\left(G\right) אזי אזי A
                          E\left(A,B
ight)=\{(u,v)\in E\left(G
ight)\mid (u\in A)\wedge (v\in B)\} אחת החתך אזי A,B ברף ויהי A,B ברף ויהי
                                                           . בעל מעגל יחיד T+\{e\} אזי e\in E\left(G\right)ackslash E\left(T
ight) בעל מעגל יחיד יהי T\leq G יחיד.
עץ T+\{e_1\}-\{e_2\} עץ פורש תהא עץ פורש e_2\in E (T+\{e_1\}) ותהא ותהא ותהא e_1\in E (G) עץ פורש תהא עץ פורש תהא
                                                                                                                                                                פורש.
                                                            . טענה: יהי T-\{e\} אזי e\in E\left(T
ight) עץ פורש ועה עצים. T\leq G יהינו יער עצים.
                      [v]_{\overbrace{T-\{e\}}},V\left(G
ight)\setminus\left[v\right]_{\overbrace{T-\{e\}}} אזי v\in V\left(G
ight) ויהי e\in E\left(T
ight) חתך של T\leq G מסקנה: יהי T\leq G
                                                           אלגוריתם גנרי למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי
```

function KosarajuSharir(G):

 $V^* \leftarrow \operatorname{SCC}(G)$

```
function MST(G, w):
       color \leftarrow dict(E)
       color \leftarrow White
       Blueless \leftarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V))
       Redless \leftarrow \mathcal{P}(\{v \rightarrow v \mid v \in V(G)\})
       while \exists e \in E.color[e] = White do
             Blueless \leftarrow \{(A,B) חתך \forall e \in E(A,B).\operatorname{color}[e] \neq \operatorname{Blue}\}
             Redless \leftarrow \{ \sigma \text{ circle in } G \mid \forall i \in [\text{len}(\sigma)].\text{color}[(\sigma[i], \sigma[i+1])] \neq \text{Red} \}
             if Blueless \neq \emptyset then
                    A \leftarrow \text{Blueless}
                    f \leftarrow \operatorname{argmin}_{e \in A^2 \cap E}(w(e))
                    color[f] = Blue
             if Redless \neq \emptyset then
                    \sigma \leftarrow \text{Redless}
                     f \leftarrow \operatorname{argmax}_{e \in \sigma}(w(e))
                    color[f] = Red
       end
      return (V, \{e \in E \mid \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue}\})
```

 $e \in E$ אזי קיימת MST (G) באיטרציה של color [a] = White עבורה ותהא $a \in E$ אזי קיימת w ותהא אפר ניתנת לצביעה.

. אות אובעת |E| צובעת MST (G) אזי w אוות מסקנה: יהי G גרף אור קשיר אוות מסקנה: יהי

עפ"מ עבורו אזי פיים MST (G) אזי בכל איטרציה אזי מכוון וממושקל אזי עפ"מ עבורו אזי זהי $T \leq G$ איים אזי ברף קשיר אזי אזי בכל איטרציה אזי בכל איטרציה אזי מכוון וממושקל

- $.e\in E\left(T
 ight)$ מתקיים color $\left[e
 ight] =$ Blue המקיימת $e\in E$ לכל
- $.e \notin E\left(T
 ight)$ מתקיים color $[e]=\mathrm{Red}$ המקיימת $e \in E$ לכל

G עפ"מ של MST G עפ"מ אזי w אוי מסקנה: יהי עפ"ה גרף קשיר א מכוון וממושקל

אזי w אזי מכוון וממושקל אזי יהי G אזי מינימלי: אזי למציאת עץ פורש מינימלי: אזי אלגוריתם פרים למציאת אזי אוי

```
\begin{array}{c} \operatorname{color} \leftarrow \operatorname{dict}(E) \\ U \leftarrow \operatorname{set}(V) \\ \operatorname{color} \leftarrow \operatorname{White} \\ r \leftarrow V \\ U.\operatorname{append}(r) \\ \text{while } U \neq V \text{ do} \\ & \quad \quad | \quad (u,v) \leftarrow \operatorname{argmin}_{e \in U \times (V \setminus U)}(w(e)) \\ & \quad \quad \operatorname{color}[(u,v)] = \operatorname{Blue} \\ U.\operatorname{append}(v) \\ & \quad \quad | \quad \operatorname{for } w \in U \text{ do} \\ & \quad \quad | \quad \operatorname{if } (w,v) \in E \text{ then} \\ & \quad \mid \quad \operatorname{color}[(w,v)] = \operatorname{Red} \\ & \quad \operatorname{end} \\ & \quad \operatorname{end} \\ & \quad \operatorname{end} \end{array}
```

return $(V, \{e \in E \mid \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue}\})$

function Prim's Algorithm (G, w):

. עשית כמו באלגוריתם Prim'sAlgorithm (G) טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי כל צביעת קשת באלגוריתם G עפ"מ של Prim'sAlgorithm (G) אזי w אזי מסקנה: יהי w גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי w אוון w אזי w אזי w אוון w אזי w אזי w אזי w אזי w אוון w אזי w אזי w אזי w אזי w אזי w אזי w אוון w אוון w אוון w אזי w אזי w אזי w אזי w אוון w אוון

משפט: ערימת מינימום בסיבוכיות אז ערימת ערימת את Prim'sAlgorithm (G) אז ניתן לממש אז ניתן וממושקל אז ערימת מינימום בסיבוכיות אז ניתן לממש אז G יהי $\mathcal{O}\left(|E|\log|V|\right)$

 $\mathcal{O}\left(|E|+|V|\log|V|\right)$ בסיבוכיות זמן ריצה Prim'sAlgorithm (G) אזי ניתן לממש אזי ניתן לממש אזי ניתן לממש אזי מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל אזי W אזי ניתן פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל למציאת עץ פורש מינימלי: יהי

```
\begin{array}{l|l} \textbf{function Kruskal'sAlgorithm}(G,w) : \\ & \operatorname{color} \leftarrow \operatorname{dict}(E) \\ & L \leftarrow \operatorname{sort}(E) \text{ // Sort is done by } w \text{ from small to big.} \\ & \textbf{for } (u,v) \in L \text{ do} \\ & | & \textbf{if } \exists \sigma \in \{u \rightarrow v\}. \forall i \in [n]. \operatorname{color}(\sigma(i)) = \operatorname{Blue \ then} \\ & | & \operatorname{color}[e] = \operatorname{Red} \\ & & \textbf{else} \\ & | & \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue} \\ & \textbf{end} \\ & \textbf{return } (V, \{e \in E \mid \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue}\}) \end{array}
```

. נעשית כמו באלגוריתם הגנרי. אזי כל צביעת אזי כל צביעת אזי אזי כל צביעת אזי אזי כל צביעת אזי אזי כל צביעת אזי אזי כל צביעת שנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי w אזי אזי לאזי אזי w גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי w אזי לדעם אזי w גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי לדעם אזי w אזי לדעם אזי w אזי לדעם אזי w אזי לדעם אזי w אזי לדעם אזי w אזי כל צביעת קשיר לא מכוון וממושקל w אזי כל צביעת קשת באלגוריתם הגנרי.

עם Union-Find עם Kruskal'sAlgorithm (G) אי איי ניתן לממש איי ניתן עם איי ניתן עם איי ניתן איי ניתן עם עם U גרף קשיר לא מכוון וממושקל w איי ניתן לממש איי ניתן U וכן סיבוכיות אמן ווממושקל $\mathcal{O}\left(|E|\log|V|\right)$.

אלגוריתם w באשר באשר אזי הרף קשיר אוי יהי הי G אלגוריתם מינימלי: יהי שלגוריתם מינימלי: יהי שלגוריתם מינימלי

function Borůvska's Algorithm (G, w):

```
 \begin{array}{l} \operatorname{Trees} \leftarrow \operatorname{set}(\operatorname{set}(G)) \\ \operatorname{for} \ v \in V \ \operatorname{do} \\ \mid \ \operatorname{Trees.append}(\{v\}) \\ \operatorname{end} \\ \operatorname{while} \ | Trees| \neq 1 \ \operatorname{do} \\ \mid \ (u,v) \leftarrow \operatorname{argmin}_{(u,v) \in V(T) \times V(G)}(w((u,v))) \\ \mid \ S \leftarrow \{S \in Tree \mid u \in V(S)\} \\ \mid \ S \leftarrow S + T + \{(u,v)\} \\ \mid \ \operatorname{Trees.Remove}(T) \\ \mid \ \operatorname{end} \\ \operatorname{end} \\ A \leftarrow \operatorname{Trees} \\ \operatorname{return} \ A \end{array}
```

 $\mathcal{O}\left(|E|\log|V|\right)$ הינה Borůvska'sAlgorithm (G) איז סיבוכיות און חח"ע איז סיבוכיות שבע w באשר הינה משפט און וממושקל $T \leq G$ משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w באשר w חח"ע איז קיים ויחיד און וחיד הרף קשיר לא מכוון וממושקל האון וממושקל שבאשר ווחיד און איז קיים ויחיד האון וממושקל שבאשר שבער האון וממושקל האון וממושקל שבאשר ווחיד האון וממושקל שבאשר און וממושקל שבאשר און איז קיים ויחיד האון וממושקל שבאשר שבאשר און וממושקל שבאשר האון וממושקל שבאשר שבא האון וממושקל שבאשר און וממושקל שבאשר שבא האון וממושקל שבא האון וממושקל שבאשר שבא האון וממושקל שבא האון וממושקל שבא האון וממושקל שבא האון וממושקל שבאשר שבא האון וממושקל שבא האון וממושל שבא האון וממושל און וממושל און וממושל שבא האון וממושל און וממושל אוון וממושל און וממושל און וממושל אוון וממושל און וממושל אוון וממושל אוון וממו

G עפ"מ של Borůvska's Algorithm Gי איז w באשר ש באשר ש מכוון וממושקל ש באשר איז לא מכוון וממושקל ש

 $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n$ עפ"מ בעלי משקליי קשתות כולל כפילויות יהי $S \leq G$ עפ"מ בעלי משקליי קשתות כולל כפילויות $i \in [n]$ לכל $i \in [n]$ איזי $i \in [n]$ לכל $i \in [n]$ לכל $i \in [n]$

w אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי המכיל מספר מקסימלי של קשתות מקבוצה מסוימת: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל ותהא $F\subseteq E$ אזי

```
\omega \leftarrow (V(G) \rightarrow \mathbb{R})
    m \leftarrow \min(\{|w(e_1) - w(e_2)| \mid (e_1, e_2 \in E) \land (w(e_1) \neq w(e_2))\}
    for e \in E do
        if e \in F then
          \omega(e) \leftarrow w(e)
        else
          | \omega(e) \leftarrow w(e) + \varepsilon
    end
    return Kruskal'sAlgorithm(G, \omega)
                                         w^{-1} עפ"מ ביחס אזי T עפ"מ אזי T עפ"מ ביחס ל־\omega באלגוריתם ביחס די עפ"מ ביחס ל־T עפ"מ ביחס ל
                                                                     wעפ"מ ב־G ביחס עפ"מ ב־G אזי PrioritizeMST (G,w) אזי אזי די מסקנה: תהא
                                                    אזי i \in [n] לכל s_i < f_i באשר בעיית שיבוץ המשימות: יהיו יהיו s_i < f_i באשר
                                                                             \max\left\{|A|\mid (A\subseteq\left\{[s_1,f_i]\right\}_{i=1}^n)\wedge (\forall I,J\in A.I\cap J=\varnothing)\right\}
                                אזי i \in [n] אזי אינוריתם חמדן לבעיית שיבוץ המשימות: יהיו יהיו s_i < f_i באשר באשר אזי אלגוריתם אזי
function ActivitySelectionProblem(s_1, \ldots, s_n, f_1, \ldots, f_n):
    F \leftarrow \operatorname{list}([s_1, f_1], \dots, [s_n, f_n])
    /* In the next line, we put all the parameters in F and sort it based on f_i
                                                                                                                                              */
    F \leftarrow \operatorname{sort}(\{f_1, \dots, f_n\})
    X \leftarrow \operatorname{list}([s_1, f_1], \dots, [s_n, f_n])
    X \leftarrow \varnothing
    for k \in [1, \ldots, n] do
        if X = \emptyset then
          X.append(L[k])
         else if L[k] \cap X.last = \emptyset then
          X.append(L[k])
    end
    return X
     \mathcal{O}(n\log(n)) הינה ActivitySelectionProblem אי סיבוכיות זמן הריצה של s_i < f_i באשר הינה s_1 \ldots s_n, f_1 \ldots f_n \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                 עבורו X^* באיטרציה פתרון לבעיה אכניים באיטרציה ב־ActivitySelectionProblem משפט: לכל באיטרציה ה־k \in [n]
                                                                                                           ([s_i, f_i] \in X^*) \iff ([s_i, f_i] \in X)
                    תבוץ המשימות. פערון לבעיית שיבוץ המשימות. אזי אזי אזי האיז אזי המשימות בוא האיז המשימות באשר אזי האיז אזיית באשר אזי האיז אזיית באשר אזיית המשימות.
            .\ell=1 בורו גרף הוא \ell הכוונה היא "אורך הקשת" ובכך אנו "מכלילים" גרף ללא משקל בתור גרף עבורו הקשת" ובכך אנו
                                                                         \ell(\sigma) = \min\{\ell(\tau) \mid 	au \in \{s 	o t\}\} מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ממושקל \ell ויהיו s,t \in V אזי מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי
למה: יהיו t קשת השייכת למעגל שלילי אזי קיים מסלול לt וכן כל מסלול מ־t לא עובר דרך קשת השייכת למעגל שלילי אזי קיים מסלול למה:
                                                                                                                      tל־s פשוט קצר ביותר בין
למה: יהיו sעבורם קיים מסלול מיsלי לכן קיים מסלול מיsל לכל אזי לא קיים מסלול מיsלמה: יהיו
                                                                                                                      tל־ל s פשוט קצר ביותר בין
                                                            .\delta_{\ell}\left(s,t
ight)=\inf_{\sigma\in\left\{ s	o t
ight\} }\ell\left(\sigma
ight) אזי s,t\in V ויהיו \ell גרף ממושקל גרף יהי
                                              . משקל ביחס ביחס במרחק ברור שמדובר במרחק אזי נסמן \delta=\delta_\ell אזי נסמן למשקל יהי הירה: יהי ממושקל אזי נסמן
s-מסלול בו עץ פורש בו כל מסלול ממושקל s \in V אזי s \in V איזי מוצא (SSSP): יהי s \in V בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא
                                                                                                               Gל־ע הינו מסלול קצר ביותר בי
                              .\delta_{\ell}\left(u,v
ight) \leq \delta_{\ell}\left(u,w
ight) + \delta_{\ell}\left(w,v
ight) אזי u,v,w \in V למה אי־שיוויון המשולש: יהי
```

למה תר־מסלול קצר ביותר: יהי σ מסלול קצר ביותר ויהי $i\in \mathrm{len}\,(\sigma)$ אזי σ מסלול קצר ביותר: יהי σ

function PrioritizeMST(G, w, F):

```
function BellmanFord(G, \ell, s):
     (d,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
     d[s] \leftarrow 0
     for u \in V do
          d[u] \leftarrow \infty
          \pi[u] \leftarrow \text{None}
     end
     (c,i) \leftarrow 1
     while (i \leq |V|) \wedge (c > 0) do
          c \leftarrow 0
          for (u,v) \in E do
           c \leftarrow c + \text{Relax}(\ell, d, u, v)
           end
         i \leftarrow i + 1
     if c > 0 then c \leftarrow 1
     return c
function Relax(\ell, d, u, v):
     if d[v] > d[u] + \ell(u, v) then
          d[v] \leftarrow d[u] + \ell(u, v)
          \pi[v] \leftarrow u
          return 1
     return 0
```

 $.\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[u
ight] + \ell\left((u,v)
ight)$ אזי מסקנה: יהיו $\delta\left(s,u
ight) \leq d\left[u
ight]$ בריצת BellmanFord מתקיים $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ וכן בריצת $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ מתקיים $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ מתקיים $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$

Relax נקבל כי לכל Relax מתקיים מתקיים אזי לאחר כל רצף פעולות פעולות אזי אזי לאחר כי רצף פעולות אזי למה: יהי $\delta\left(s,v\right)\leq d\left[v\right]$ מתקיים $\delta\left(s,v\right)< d\left[v\right]$ מתקיים $v\in V$

 $d\left[v
ight]=\infty$ מסקנה: יהיו $s,v\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים מחקנים אזי לאחר כל רצף פעולות $s,v\in V$ מסקנה: יהיו $s,v\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים מחקנה: יהיו $d\left[v
ight]=\delta\left(s,v
ight)$ מתקיים $d\left[v
ight]=\delta\left(s,v
ight)$ אזי לאחר כל רצף פעולות $s,v\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים $d\left[s
ight]=0$ ויהי $s,t\in V$ מסלול אזי לאחר הפעלת הרצף $d\left[s
ight]=0$ נקבל כי $d\left[s
ight]=0$ מחלול אזי לאחר הפעלת הרצף $d\left[s
ight]=0$ נקבל כי $d\left[s
ight]=0$ נקבל כי $d\left[s
ight]=0$ מחלול אזי לאחר הפעלת הרצף $d\left[s
ight]=0$ נקבל כי $d\left[s
ight]=0$ נקבל כי $d\left[s
ight]=0$ מחלול אזי לאחר הפעלת הרצף $d\left[s
ight]=0$ ניינו אווי לאחר הפעלת הרצף $d\left[s
ight]=0$ מחלול אזי לאחר הרצף $d\left[s
ight]=0$ מחלול אזי לאחר הרצף $d\left[s
ight]=0$ מחלול אונים מונים מו

וכן i<|V| אשר ניתן לא הראשית מהלולאה שלילי מיז אזיי שלילי איז מהלולאה הראשית כאשר אליו מיז אליו מיז אליו מיז אליו אשר ניתן אלילי אשר ניתן אלילי אשר ניתן להגיע אליו מיז מחזיר $s\in V$ מתקיים $t\in V$ מתקיים מעגל מחזיר $t\in V$

וכן i=|V| יוצא מהלולאה הראשית מעגל אליו מיs אזי אליו מיs אזי אליו אשר ניתן מעגל שלילי אשר אליו אליו מיזיר $s\in V$ מחזיר 1.

מסקנה: יהי $s \in V$ אזי

- (sיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־) BellmanFord) •
- .($d\left[v
 ight]=\delta\left(s,v
 ight)$ מתקיים ($c\in V$ איז ריים ($c\in V$ מתקיים ($c\in V$ איז ריים ($c\in V$ איז ריים ($c\in V$ מתקיים ($c\in V$ איז ריים ($c\in V$ וכן $c\in V$ אוו ($c\in V$ וכן $c\in V$ וכן

אזי C מעגל שלילי. BellmanFord באיזשהו שלב של הרצת מעגל בעץ S מעגל בעץ ויהי $S \in V$

. אינ עץ BellmanFord אינ עץ האיי מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מיs איז עץ $s \in V$ למה: יהי

מכיל מעגל שלילי. BellmanFord אזי מיs אזי אי שלילי אשר מעגל שלילי מעגל שלילי אשר ייח אליו מי $s\in V$

.SSSP מסקנה: יהי BellmanFord אזי $s \in V$ מסקנה: יהי

 $\mathcal{O}\left(|E|\cdot|V|
ight)$ בעל סיבוכיות זמן ריצה BellmanFord משפט: יהי

```
הערה: נניח כי SSSP אזי קיים אלגוריתם אזי קיים פוכיות אוכן \ell:E \to \mathbb{Z} בסיבוכיות אוכן הערה: \mathcal{O}\left(|E|\log^2(|V|)\log(|V|\cdot W)\log\log(|V|)\right)
```

אליים שליליים מעגל מכוון חסר מעגלים יהי יהי G יהי מעגלים מעגלים במשקל בגרף מכוון מעגלים שליליים אזי אלגוריתם לבדיקת קיום מעגל במשקל

```
\begin{array}{c|c} \text{function IsZeroCircle}(G,\ell) \text{:} \\ V \leftarrow V \uplus \{s\} \\ \text{for } v \in V \backslash \{s\} \text{ do} \\ \mid E \leftarrow E \cup \{(s,v)\} \\ \mid \ell((s,v)) \leftarrow 0 \\ \text{end} \\ (c,d,\pi) \leftarrow \text{BellmanFord}(G,\ell,s) \\ \text{for } e \in E \text{ do} \\ \mid \text{if } d(v) \neq d(u) + \delta(u,v) \text{ then} \\ \mid E \leftarrow E \backslash \{(s,v)\} \\ \text{end} \\ \text{if } \exists \text{ circle } C \in G \text{ then return True return False} \\ \end{array}
```

sטענה: בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה נקבל את גרף מק"ב מ"ב. $\ell\left(C\right)=0$ אזי O ווsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה קיים מעגל O אזי O ווsZeroCircle אזי O בגרף. אזי בריצת בריצת ענה: יהי O מעגל עבורו O אזי בריצת O אזי בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה נקבל כי O בגרף. מסקנה: יהי O גרף מכוון חסר מעגלים שליליים אזי O בעל מעגל ממשקל O ווינה O בעל מעגל מכוון חסר מעגלים שליליים אזי סיבוכיות זמן הריצה של IsZeroCircle הינה O מכוון אציקלי ויהי O אזי אזי מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף מכוון אציקלי: יהי O מכוון אציקלי ויהי O אזי

```
function SSSP-DAG(G, \ell, s):
    (d,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
    d[s] \leftarrow 0
    for u \in V do
         d[u] \leftarrow \infty
         \pi[u] \leftarrow \text{None}
    end
    /* Knuth'sAlgorithm is an algorithm to compute a topological sorting.
                                                                                                                                                      */
    f \leftarrow \text{Knuth'sAlgorithm}(G)
    for i \in [1, ..., |V|] do
         for v \in Adj(f(i)) do
          Relax((f(i), v))
         end
    end
    return (d,\pi)
```

טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s\in V$ אזי SSSP-DAG (G) פתרון לבעיית SSSP-DAG (G) אזי $s\in V$ טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s\in V$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של SSSP-DAG (G) הינה (|E|+|V|). אלגוריתם דייקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף ללא משקלים שליליים: יהי S גרף מכוון עבורו $\ell\geq 0$ ויהי S אזי

```
d[s] \leftarrow 0
    for u \in V do
         d[u] \leftarrow \infty
         \pi[u] \leftarrow \text{None}
    end
     Q.insert((s, d[s]))
    while Q \neq \varnothing do
         u \leftarrow Q.\min
         for v \in Adj(u) do
             if d[v] = \infty then
                  \pi[v] \leftarrow u
                  d[v] \leftarrow d[u] + \ell(u, v)
                  Q.insert((v, d[v]))
              else if d[u] + \ell(u, v) < d[v] then
                  \pi[v] \leftarrow u
                   d[v] \leftarrow d[u] + \ell(u, v)
                  Q.decrease-key((v, d[v]))
         end
    end
    return (d,\pi)
                                                   d\left[u
ight]=\delta\left(s,u
ight) אזי מרקה מ־Dijkstra למה: יהיו אזי אזי אזי אזי מרוב בריצת למה: יהיו
                                                                             \ell \geq 0 כאשר SSSP משפט: יהי היי אוי משפט: אזי אזי משפט משפט יהי
                  \mathcal{O}\left(|E|+|V|\cdot\log\left(|V|
ight)
ight) איז ניתן לממש את Dijkstra אי בסיבוכיות אמן איז ניתן לממש את s \in V משפט: יהי
D_{u,v}=\delta\left(u,v
ight) מתקיים u,v\in V אזי D\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) אזי אזי A גרף מכוון וממושקל: יהי (APSP) מתקיים בעיית כל המסלולים הקצרים
                                   \Pi(\Pi_{u,v},v)\in\sigma מ־ע ל־\sigma מ"ע מ\sigma מ"ע מיע מסלול קצר א קיים מסלול קצר ביותר \Pi\in M_{|V|}(V) וכן
                                                                                                 p:V	o\mathbb{R} אזי גרף אזי G יהי פוטנציאל: יהי
מתקיים (u,v)\in E מתקיימים u,v\in V מונקציית משקל מונקציית פונקציית פונקציית פונקציית פונקציית משקל מותאמת: תהא
                                                                                                        \ell_p((u,v)) = \ell((u,v)) + p(u) - p(v)
                          \ell_p(\sigma)=\ell\left(\sigma
ight)+p\left(s
ight)-p\left(t
ight) אזי ל־ז אזי s,t\in V משפט: תהא s,t\in V משפט: תהא s,t\in V משפט: תהא
(מסלול קצר ביותר ביחס ל־t מסלול מיs ויהי מסקנה: s ויהי היו וויהי t מסלול מסלול מסקנה: תהא t פונקציית פוטנציאל יהיו וויהי s,t\in V ויהי
                                                                                                                                   ביותר ביחס ל־(\ell_p).
                                                                        \ell_p\left(\sigma
ight)=\ell\left(\sigma
ight) מסקנה: תהא מונקציית פוטנציאל ויהי מסקנה פונקציית פונקציית פוטנציאל ויהי
                                            .\delta_{\ell}\left(s,t
ight)=\delta_{\ell_{p}}\left(s,t
ight)-p\left(s
ight)+p\left(t
ight) אזי s,t\in V מסקנה: תהא p פונקציית פוטנציאל ויהיו
                                    \ell_p \geq 0 בורה p עבורה פוטנציאל פיזבילית: יהי p גרף מכוון וממושקל \ell אזי פונקציית פוטנציאל פיזבילית: יהי
          משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל \emptyset אזי (קיימת פונקציית פוטנציאל פיזבילית)(G) מצוייד עם \emptyset חסר מעגלים שליליים).
```

אלגוריתם למציאת פונקציית פוטנאציל פיזבילית: יהי G גרף מכוון וממושקל אזי

function Dijkstra (G, ℓ, s) : $\begin{array}{c|c} Q \leftarrow \text{heap}((V, \text{int})) \\ (d, \pi) \leftarrow \text{dict}(V) \end{array}$

```
function FeasiblePotential(G, \ell):
     G' \leftarrow G \uplus \{s\}
     for v \in V(G) do
          E(G') \leftarrow E(G') \cup \{(s,v)\}
          \ell((s,v)) \leftarrow 0
     end
     c \leftarrow \text{BelmanFord}(G', \ell, s)
     if c=1 then return None
     p \leftarrow (V(G) \rightarrow \mathbb{R})
     for v \in V(G) do
      p(v) \leftarrow \delta(s, v)
     end
     return p
                                                                                                                        טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל \ell אזי
                                                               .(None מחזיר FeasiblePotential (G,\ell)) בעל מעגל שלילי בעל מעגל מעגל \ell מצוייד עם G
           פחזיר פונקציית פוטנציאל פיזבילית). FeasiblePotential (G,\ell) פיזבילית פוטנציאל פיזבילית פוטנציאל פיזבילית). \ell
                                                                 אלגוריתם ג'ונסון לבעיית כל המסלולים הקצרים: יהי G גרף מכוון וממושקל אזי
function Johnson (G, \ell):
     p \leftarrow \text{FeasiblePotential}(G, \ell)
     if p = None then return None
     \ell_p \leftarrow (E \to \mathbb{R})
     for (u,v) \in E do
      \ell_p((u,v)) = \ell((u,v)) + p(u) - p(v)
     end
     (D_{\ell_p}, D_{\ell}) \leftarrow M_{|V|}(\mathbb{R})
     \Pi \leftarrow M_{|V|}(E)
     for v \in V do
          (d,\pi) \leftarrow \text{Dijkstra}(G,\ell_p,v)
          /* Here D and \Pi will be simplified, to get a solution to APSP as needed we can modify a bit Dijkstra's
               algorithm to calculate D and \Pi on the way to get constant time for this assignment.
          D_v \leftarrow d
         \Pi_v \leftarrow \pi
     end
     for (u,v) \in E do
          D_{\ell}((u,v)) = D_{\ell_p}((u,v)) - p(u) + p(v)
     return (D,\Pi)
                                                                       .
APSP משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל אזי אזי \ell אזי וממושקל משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל
                 \mathcal{O}\left(|E|\,|V|+|V|^2\log\left(|V|
ight)
ight) הינה אינה אינה של הריצה של אזי סיבוכיות און וממושקל א אזי סיבוכיות אמן הריצה של הינה G
                                            A\stackrel{'}{*}B\in M_{m	imes k}\left(\mathbb{F}
ight) אזי B\in M_{n	imes k}\left(\mathbb{F}
ight) ותהא ותהא A\in M_{m	imes n}\left(\mathbb{F}
ight) באשר :Min Plus מכפלת
                                                                                                                         (A * B)_{i,j} = \min_{k=1}^{n} (A_{i,k} + B_{k,j})
                                                                \mathcal{O}\left(n^3
ight) אינ סיבוכיות אמן הריצה של A*B\in M_n\left(\mathbb{F}
ight) הינה טענה: תהיינה
                                                                                A*B*C=(A*B)*C אזי A,B,C\in M_n(\mathbb{F})טענה: תהיינה
                                                                .\delta_k(s,v) = \min\{\ell(\sigma) \mid (\sigma \in \{s \to v\}) \land (|\sigma| \le k)\} אזי s,v \in V סימון: יהיו
                                                                             .\delta_{k}\left(s,v
ight)=\min_{u\in V}\left(\delta_{k-1}\left(s,v
ight)+\ell\left(u,v
ight)
ight) אזי s,v\in V טענה: יהיו
                                                          v\in V לכל (\delta_{k}\left(s
ight))_{v}=\delta_{k}\left(s,v
ight) באשר \delta_{k}\left(s
ight)\in M_{1	imes |V|}\left(\mathbb{R}
ight) לכל s\in V סימון: יהי
L_{u,v} = \left\{egin{array}{ll} 0 & u=v \\ \ell((u,v)) & (u 
eq v) \land ((u,v) \in E) \\ \infty & (u 
eq v) \land ((u,v) 
eq E) \end{array} 
ight. מתקיים u,v \in V מתקיים באשר לכל L \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}\right) אזי L \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}\right) אזי באשר לכל יהי
                                                          .\delta_{k}\left(s
ight)=\delta_{k-1}\left(s
ight)st L אזי אמטקנה: המשקל ותהא ותהא L\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) ותהא s\in V מסקנה: יהי
```

 $D^{(k)}_{u,v}=\delta_k\left(u,v
ight)$ מתקיים $u,v\in V$ באשר לכל באשר אזי $D^{(k)}\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי אזי

```
D^{(k)}=L^k אזי מטריצת מטריצת L\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) טענה: תהא
                                                               L^k=L*\ldots*L יהי אזי מטריצת מטריצת לL\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) ותהא והי יהי יהי
                                      D^{(k)}=D^{(m)} אזי אזי k,m\geq |V|-1 וחסר מעגלים שליליים מעגלים ווחסר מכוון וממושקל טענה: יהי
                                   D_{n,v}^{(|V|)} < 0 אזי שלילי אזי במעגל שלילי ויהי עv \in V המופיע במעגל שלילי אזי \ell בעל מעגל שלילי אזי
                                                                     .APSP מסקנה: תהא L \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) מטריצת המשקל אזי וL \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight)
                                            אזי m\in\mathbb{N}_+ איי ויהי אסוציאטיבית אלגוריתם \star פעולה A\in M_n\left(\mathbb{R}\right) אזי תהא
function RepeatedSquaring (A, \star, m):
     (a_k \dots a_0) \leftarrow (m)_2 // (m)_2 denotes m in base 2.
          if a_i = 1 then
           B = B \star A
                                          .APSP פתרון לבעיית RepeatedSquaring (L,*,n) אזי מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת המשקל מיי
   \mathcal{O}\left(\left|V
ight|^{3}\log\left(\left|V
ight|
ight)
ight) הינה RepeatedSquaring (L,*,n) שענה: תהא מטריצת המשקל אזי סיבוכיות זמן הריצה של L\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}
ight)
                                               מתקיים u,v\in V באשר לכל באשר F^{(k)}\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight) אזי און ויהי ויהי אז גרף מכוון ויהי ויהי k\in\mathbb{N} אזי ([n]
                                             F_{u,v}^{(k)} = \min \left\{ \ell\left(\sigma\right) \mid \left(\sigma \in \left\{u 
ightarrow v
ight\}
ight) \wedge \left(עוברת דרך הצמתים עוברת למעט בהתחלה ובסוף \left[k\right]
F_{u,v}^{(0)}=L מתקיים u,v\in V באשר לכל באשר F^{(0)}\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת המשקל אזי
                                            F_{u,v}^{(k)}=\min\left\{F_{u,v}^{(k-1)},F_{u,k}^{(k-1)}+F_{k,v}^{(k-1)}
ight\} אזי u,v\in[n] גרף מכוון ויהיו ([n] , E) איזי איזי
                                                   אלגוריתם פלויד־וורשאל: יהי ([n]\,,E) גרף מכוון ותהא אלגוריתם פלויד־וורשאל: יהי
function FloydWarshall (n, L):
          for v \in [n] do
               if (u \neq v) \wedge (L_{u,v} < \infty) then
                 | \Pi_{u,v} \leftarrow u
                 | \Pi_{u,v} \leftarrow \text{None}
          for u \in [n] do
               for v \in [n] do
                    \begin{array}{c|c} \text{if } F_{u,k} + F_{k,v} < F_{u,v} \text{ then} \\ F_{u,v} \leftarrow F_{u,k} + F_{k,v} \end{array}
                         \Pi_{u,v} \leftarrow \Pi_{k,v}
```

 $B \leftarrow M_n(\mathbb{R})$ for $i \in [k]$ do

 $\Pi \leftarrow M_n([n])$ for $u \in [n]$ do

else

end

end

return (F,Π)

end

end end $F \leftarrow L$ for $k \in [n]$ do

end $\mathbf{return}\ B$

 $A = A \star A$

 $D^{(k)} = D^{(k-1)} * L$ אזי המשקל מטריצת מטריצת $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מסקנה: תהא

```
.APSP פתרון לבעיית FloydWarshall (n,L) איי מטריצת המשקל אזי L\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) פתרון לבעיית L\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) מטריצת היי
\mathcal{O}\left(n^3
ight) הינה FloydWarshall (n,L) מטריצת המשקל אזי סיבוכיות זמן הריצה של בL\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) הינה הינה L\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)
                                                                    (u,v) 
otin E מתקיים u,v \in I עבורה לכל עבורה אזי I \subseteq V ארף אזי יהי G מתקיים
                            \min\left(i
ight)=\max\left\{w\left(I
ight)\mid\left(I\subseteq\left[i
ight]
ight)\wedge\left( בלתי תלויה w:\left[n
ight]
ightarrow\mathbb{R}_{>0} אזי w:\left[n
ight]
ightarrow\mathbb{R}_{>0} גרף שרוך ויהי
                                                        וכן \min (1) = w \, (1) וכן \min (0) = 0 אזי w : [n] \to \mathbb{R}_{\geq 0} ורף שרוך ויהי ויהי ([n] \, , E) יהי
                                                                                                                       mis(i) = max\{w(i) + mis(i-2), mis(i-1)\}\
                                                  \mathcal{O}\left(n
ight) אזי \min\left(n
ight) אזי w:[n]	o\mathbb{R}_{\geq0} אזי ויהי אמן ריצה ([n]\,,E) מסקנה: יהי
A_{f(i)}=B_i עבורה ממש וחח"ע המקיימת f:[|B|]	o [|A|] עבורה קיימת אזי B\in \Sigma^* אזי אלפבית ותהא אלפבית ותהא
                                                                                                                                                                              i \in [|B|] לכל
                                                                                  B \lhd A ותהא B \in \Sigma^* ותהא ותהא A \in \Sigma^* אלפבית תהא אזי
\max\{|C|\mid (C\in\Sigma^*)\land (C\lhd A)\land (C\lhd B)\} איי A,B\in\Sigma^* אלפבית ותהיינה \Sigma אלפבית ארוכה ביותר (LCS): יהי
    \text{lcs } (k,\ell) = \max \left\{ |C| \mid (C \lhd (A_1,\ldots,A_k)) \land (C \lhd (B_1,\ldots,B_\ell)) \right\} \text{ איז } \ell \leq |B| \text{ איז } k \leq |A| \text{ תהא } A,B \in \Sigma^* \text{ סימון: תהיינה } A,B \in \Sigma^* \text{ outs.}   \text{lcs } (k,\ell) = \begin{cases} 0 & (k=0) \lor (\ell=0) \\ \log(k-1,\ell-1)+1 & (k,\ell>0) \land (A_k=B_\ell) \end{cases} \text{ with } A,B \in \Sigma^* \text{ outs.}   \text{outs.} \text{ max} \left\{ \log(k-1,\ell-1)+1 & (k,\ell>0) \land (A_k=B_\ell) \\ \max\{\log(k-1,\ell),\log(k,\ell-1)\} & (k,\ell>0) \land (A_k\neq B_\ell) \end{cases}   \text{lcs } \left( |A| \cdot |B| \right) \text{ in the constant of } A,B \in \Sigma^* \text{ outs.}   \text{adjets.} \text{ adjets.} \text{ in the constant of } A,B \in \Sigma^* \text{ outs.} 
\max\left\{|C|\mid (C\lhd A)\land (orall i.C_{i-1}\prec C_i)
ight\} אזי אוי A\in \Sigma^* אאי אלפבית בעל סדר היינ\Sigma אלפבית היי\Sigma אלפבית בעל סדר אותהא
                                                                                A, \operatorname{sort}(A) של LCS של בעיית של LIS טענה: תהא A \in \Sigma^* אזי בעיית
                                  .lenlis (k)=\max\left\{|X|\mid ((A_1,\ldots,A_k)) של lis סימון: תהא X)\wedge (A_k מסתיים עם X)
ight\} אזי אזי A\in\Sigma^* אזי אוי
                                                         .lenlis (k)=\max_{i\in[k-1]}\left\{ \mathrm{lenlis}\left(i\right)\mid A_{i}\prec A_{k}
ight\} וכך וכוווs (1)=1 אזי A\in\Sigma^{*} איזי A\in\Sigma^{*}
                                                            \pilis (k)=rg\max{\{	ext{lenlis}\,(i)\mid A_i\prec A_k\}} וכן \pilis (1)=	ext{None} אזי A\in\Sigma^* סימון: תהא
LIS מסקנה: תהא A \in \Sigma^* ויהי (x_{\pi 	ext{lis}(\ell)(k)}, \dots, x_{\pi 	ext{lis}(2)(k)}, x_{\pi 	ext{lis}(k)}, x_k) איי אי k = rg \max \{ 	ext{lenlis}(1), \dots, 	ext{lenlis}(|A|) \} פתרון של
                                                                                                                                              \mathcal{O}\left(\left|A
ight|^{2}
ight) בעל סיבוכיות זמן ריצה
                                                                                            .min lis (m)=\min\left\{x_k\mid 	ext{lenlis}\left(k
ight)=m
ight\} אזי A\in\Sigma^* אינון: תהא
                                                                                                                                 . עולה ממש \min lis אזי A \in \Sigma^* עולה ממש
                      \mathcal{O}\left(|A|\cdot\log\left(|A|
ight)
ight) אזי אמן ריצה (\min\operatorname{lis}\left(1
ight),\ldots,\min\operatorname{lis}\left(\ell
ight) אזי אזי (\min\operatorname{lis}\left(1
ight),\ldots,\min\operatorname{lis}\left(\ell
ight) אזי אזי (\min\operatorname{lis}\left(1
ight)
                      \operatorname{costp}(T) = \sum_{i=1}^n \left( p_i \cdot \operatorname{depth}_T(x_i) \right) אזי \{x_1 \dots x_n\} איי עץ חיפוש בינארי עץ T ויהי ויהי p_1 \dots p_n \in (0,1] איי
                         מינימלי. Costp\left(T\right) עבורו בינארי אופטימלי: יהיו p_1\dots p_n\in(0,1] אזי עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו
                   \operatorname{costp}(T) = (\sum_{i=1}^n p_i) + \operatorname{costp}(T.\operatorname{left}) + \operatorname{costp}(T.\operatorname{right}) אינה: יהיו עץ חיפוש בינארי אזי p_1 \dots p_n \in (0,1] ויהי
מסקנה: יהיו T.left, T.right מסקנה: יהיו בינארי סטטי אופטימלי פתרון לבעיית עץ ויהי T פתרון לבעיית עץ ויהי
                                                                                                                                                      חיפוש בינארי סטטי אופטימלי.
                                                                                                               .pp (i,j)=\sum_{k=i}^{j}p_{k} אזי p_{1}\dots p_{n}\in(0,1] סימון: יהיו
                  \operatorname{cp}(i,j) = \min \left\{ \operatorname{costp}(T) \mid \{x_i \dots x_j\} \; סימון: יהיו p_1 \dots p_n \in (0,1] ויהיו אזי x_1 \dots x_n אזי ויהיו
                                                              וכן \operatorname{cp}\left(i,i\right)=p_{i} וכן \operatorname{cp}\left(i,i-1\right)=0 אזי x_{1}\ldots x_{n} ויהיו p_{1}\ldots p_{n}\in\left(0,1\right] וכן
                                                                                                  .cp(i, j) = pp(i, j) + \min_{i \le k \le j} (cp(i, k - 1) + cp(k + 1, j))
                                          מסקנה אלגוריתם לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו p_1 \ldots p_n \in (0,1] ויהיו x_1 \ldots x_n אזי
```

```
function OSBST(pp):
     K, C \leftarrow \text{List}([n]^2)
     for i \leftarrow [n+1] do
      C(i, i-1) \leftarrow 0
     end
     for d \leftarrow \{0, \ldots, n-1\} do
         for i \leftarrow [n-d] do
              C(i, i+d) \leftarrow \infty
               for k \leftarrow \{i, \dots, i+d\} do
                    t \leftarrow \operatorname{pp}(i,j) + C(i,k-1) + C(k+1,j)
                    if t < C(i, j) then
                         C(i,j) \leftarrow t
                        K(i,j) \leftarrow k
              end
          end
     end
```

מסקנה: יהיו $p_n\in(0,1]$ אזי p_n (pp) משרה פתרון לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי. $p_1\dots p_n\in(0,1]$ מסקנה: יהיו $p_1\dots p_n\in(0,1]$ אזי (OSBST (pp) בעל סיבוכיות זמן ריצה ($p_1\dots p_n\in(0,1]$ אזי $p_1\dots p_n\in(0,1]$ הערה: קיים אלגוריתם קנות' לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי בסיבוכיות זמן ריצה ($p_1\dots p_n\in(0,1]$ הערה: $p_1\dots p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_1\dots p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_2\dots p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_1\dots p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_2\dots p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_2\dots p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_2\dots p_n\in(0,1]$ אזי $p_2\dots p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_2\dots p_n\in(0,1]$

אזי $v_1 \dots v_n \geq 0$ ויהיו $W, w_1 \dots w_n > 0$ יהיו הגב: יהיו שבר תרמיל לבעיית שבר אלגוריתם אלגוריתם

```
function Fractional Knapsack (W, w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_n):
     f \leftarrow ([n] \rightarrow [0,1])
     P \leftarrow \text{List}([n] \times \mathbb{R})
     for i \leftarrow [n] do
           P(i) \leftarrow (i, \frac{v_i}{w_i})
          f(i) \leftarrow 0
     end
     P \leftarrow \operatorname{sort}(P) // Sort from high to low based on second coordinate.
     t \leftarrow 0
     i \leftarrow 1
     while (t < W) \land (i \le n) do
           j \leftarrow P(i)[0]
           if t + w_j \leq W then
                f(j) \leftarrow 1
               t \leftarrow t + w_i
                f(j) \leftarrow \frac{W-t}{m}
     end
     return f
```

```
.bknap (k,W)=\max\left\{\sum_{i\in S}v_i\mid (S\subseteq[k])\wedge\left(\sum_{i\in S}w_i\leq W\right)\right\} אזי W,w_1\dots w_n,v_1\dots v_n\geq 0 טענה: יהיו w_1\dots w_n,v_1\dots v_n\geq 0 אזי w_1\dots w_n,v_1\dots v_n\geq 0 .bknap (0,m)=0 אזי m\geq 0 .bknap (i,0)=0 אזי i\in [n] .bknap i\in [n] אזי i\in [n] אזי i\in [n] .bknap i\in [n] אזי i\in [n] מסקנה: יהיו i\in [n] אזי i\in [n] אזי חישוב i\in [n] אזי חישוב i\in [n] אזי i\in [n]
```

```
function ZeroOneKnapsack(W, w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n):
    w \leftarrow W
    S \leftarrow \operatorname{Set}([n])
    S \leftarrow \varnothing
    while (k>0) \wedge (w>0) do
         if bknap(k, w) \neq bknap(k-1, w) then
             S \leftarrow S \cup \{k\}
             k \leftarrow k - 1
             w \leftarrow w - w_k
          k \leftarrow k-1
     end
          פתרון לבעיית 0/1 פתרון לבעיית פרסOneKnapsack (W,w_1\dots w_n,v_1\dots v_n) אזי אי W,w_1\dots w_n,v_1\dots v_n\geq 0 מסקנה: יהיו
                                                        (V,E,c,s,t) אזי s,t\in V ותהיינה c>0 וממושקל מכוון וממושקל
                                                                                       c אזי זרימה אזי (V,E,c,s,t) אוי תהא פונקציית קיבולת:
                                                                                           .s אזי ארימה אדי (V,E,c,s,t) רשת הימה אזי קודקוד מקור: תהא
                                                                                              t אזי ארימה ארי רשת (V,E,c,s,t) אוי הוד קודקוד בור:
                                          עודף \chi_f:V	o\mathbb{R} אזי f:E	o\mathbb{R}_{\geq 0} רשת זרימה ותהא (V,E,c,s,t) אזי עודף זרימה: תהא
                                                                .\chi_f\left(v
ight)=\sum_{\substack{u\in V\\(u,v)\in E}}f\left((u,v)
ight)-\sum_{\substack{u\in V\\(v,u)\in E}}f\left((v,u)
ight) עבורה f:E	o\mathbb{R}_{\geq 0} רשת זרימה אזי (V,E,c,s,t) עבורה
                                                                                                                         f \leq c חסם קיבולת: •
                                                                                    \chi_f(v)=0 מתקיים v\in V\setminus\{s,t\} שימור זרם: לכל
                         . מקסימלית: תהא \chi_f(t) מקסימלית: רשת איי פונקציית ארימה איי פונקציית הארימה מהקסימלית: תהא \chi_f(t)
                                                        .t \in T וכן s \in S עבורו (S,T) איי חתך איי רשת ארימה (V,E,c,s,t) וכן ישת ירימה (s-t חתך ישת ירימה איי
                        E\left(S,T
ight)=\left\{ (u,v)\in E\mid (u\in S)\wedge (v\in T)
ight\} אזי s-t חתך ויהי ארימה ויהי רשת ארימה G רשת חוצות: תהא
                     E\left(T,S
ight)=\left\{ \left(u,v
ight)\in E\mid\left(u\in T
ight)\wedge\left(v\in S
ight)
ight\} אזי \left(S,T
ight) חתך הימה הוריות: תהא G רשת זרימה ויהי
                                                                      .c\left(S,T
ight)=\sum_{e\in E\left(S,T
ight)}c\left(e
ight) אזי s-t חתך ואי הי הי יהי
                                         f\left(S,T
ight)=\sum_{e\in E\left(S,T
ight)}f\left(e
ight)-\sum_{e\in E\left(T,S
ight)}f\left(e
ight) אזי s-t חתך אזי (S,T) אזי מני חתך: יהי
                                                                              |f|=f\left(V\setminus\{t\},\{t\}\right) אוימה: תהא f זרימה: תהא אזי
                                                                                 |f|=f\left(S,T\right) אזי s-t חתך אזי ויהי f ארימה ויהי זרימה ויהי
                                                                                             |f| = f(\{s\}, V \setminus \{s\}) איי זרימה איי f תהא
                                                                           f\left(S,T
ight)\leq c\left(S,T
ight) אזי s-t חתך אויהי ויהי זרימה ויהי f ארימה איי
                                                                 f\left(S,T
ight)=c\left(S,T
ight) עבורו f\left(S,T
ight) אזי אויה אזי f\left(S,T
ight) אזי איימה ויהי
                                                                                                                           . זרימה מקסימלית f
                                                                                 c\left((S,T)\right) \leq c\left((A,B)\right) מתקיים (A,B) s-t לכל חתך
                                              g_{\restriction_{E \setminus P}} = f_{\restriction_{E \setminus P}} עבורה g עבורה אזי פיימת פונקציית איי איי פיימת מסלול: תהא ארימה ויהי ויהי ארימה פול ניתן להגדלה פונקציית ארימה ויהי
                                                                                                                                          |f| < |g| וכן
                                                                  .s-t מסלול ניתן להגדלה עבורה לא קיים מסלול ניתן להגדלה f ארימה פונקציית זרימה מסלול ניתן
                                                              e^{-1} אזי e^{-1} \in E אבורה עבורה פכוון ותהא e \in E אזי יהי
     באשר (V, E_f, c_f, s, t) באיר זרימה היור אנטי־מקבילות ותהא f זרימה אזי רעה ווער ארימה (V, E_f, c_f, s, t) באשר
                                                                                                  .E_f = \{e \in E \mid c(e) > f(e)\} \cup E^{-1} \bullet
                                                       .c_f = \{e \in E \mid c(e) > f(e)\} \cup E^{-1} \bullet c_f(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & e \in E \\ f(e^{-1}) & e \in E^{-1} \end{cases}אזי e \in E_f אחזי הקיבולת: תהא e \in E_f פונקציית שיוריות הקיבולת: תהא
```

באשר (V, E_f, c_f, s, t) רשת זרימה בעלת קשתות אנטי־מקבילות ותהא f זרימה אזי רעה ($V, E_f, c_f, s, t)$ באשר באשר

```
.c_{f}\left(e
ight)=c\left(e
ight)-f\left(e
ight)+f\left(e^{-1}
ight) אזי e\in E אהיבולת: הקיבולת שיוריות הקיבולת: •
```

 $.E_f = \{e \in E \mid c_f(e) > 0\} \bullet$

 $.c\left((u,v)
ight)=0$ אזי (u,v)
otin E עבורם $u,v\in V$ אזי הערה: יהיו

. הינה רשת הארימה השיורית. G_f ארימה אזי הינה רשת הארימה השיורית. רשת ארימה השיורית.

 G_f בגרף בגרף פסלול ניתן לשיפור :s-t בגרף פסלול ניתן באר הא ותהא $P \in \{s o t\}$ בגרף מסלול ניתן לשיפור

 $.c_{f}\left(P
ight)=\min\left\{ c_{f}\left(e
ight)\mid e\in P
ight\}$ אזי s-t מסלול ניתן מסלול ניתן זרימה אזי זרימה אזי זרימה אזי מסלול: תהא

 $e\in E\left(G
ight)$ לכל $f_P\left(e
ight)=\left\{egin{array}{ll} f(e)+c_f(P) & e\in P \\ f(e)-c_f(P) & e^{-1}\in P \end{array}
ight.$ איז f איז f ארימה ויהי f מסלול ניתן לשיפור f איז f ארימה של f וכן f וכן f ארימה ויהי f מסלול ניתן לשיפור f איז f זרימה של f וכן f וכן f וכן f ארימה ויהי f מסלול ניתן לשיפור f איז f זרימה של f וכן f

משפט: תהא f זרימה התב"ש

- Gזרימה מקסימלית ב־f
- .s-t מתקיים מסלול מיתן אינו מסלול בגרף בגרף בגרף בגרף בגרף בגרף פגרף פאינו $P \in \{s \to t\}$
 - .Gיים s-t חתך (S,T) מינימלי סיים •

 $\max\{|f|\mid$ ארימה $f\}=\min\{c\left(S,T\right)\mid$ s-t חתך $(S,T)\}$ חתר רשת ארימה מקסימלית קיבולת מינימלית: תהא רשת ארימה אזי אלגוריתם פורד־פלקרטון: תהא (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי

```
function FordFulkerson(V, E, c, s, t):
```

```
\begin{array}{l} f \leftarrow (E \rightarrow \mathbb{R}) \\ f \leftarrow 0 \\ \\ \text{while True do} \\ & \mid G_f \leftarrow \operatorname{ResidualNetwork}(G,c,s,t,f) \; / / \; \operatorname{Construct} \; \text{it like any graph.} \\ & \pi_{G_f} \leftarrow \operatorname{BFS}(G,s) \\ & \text{if } \{s \rightarrow t\} \cap \pi_{G_f} = \varnothing \; \text{then return} \; f \\ & \text{else} \\ & \mid P \leftarrow \{s \rightarrow t\} \cap \pi_{G_f} \; / / \; \text{The path is taken from} \; \pi_{G_f}. \\ & \mid f \leftarrow f_P \\ & \text{end} \end{array}
```

הערה: האלגוריתם שיטה גנרית למציאת של EdmondsKarp ובאלגוריתם במניחים שיטה גנרית למציאת מסלול ניתו לשיפור.

.FF = FordFulkerson (V,E,c,s,t) אזי אוי (V,E,c,s,t) רשת ארימה (V,E,c,s,t) אימון: תהא

 $f\left(E
ight)\subseteq\mathbb{N}$ באשר באשר אזי קיימת ארימה מקסימלית אזי קיימת ארימה באשר ער. רשת ארימה באשר אזי קיימת ארימה כווער אזי כווער אויימה באשר אויימה באשר אזי קיימת ארימה באשר אויימה באשר אזי קיימת ארימה באשר אויימה באשר אויימ

מתקיים FF מתקיים אזי בכל איטרציה אוי באשר $c(E) \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים ורימה איטרציה של (V,E,c,s,t)

- G זרימה של f
 - $f(E) \subseteq \mathbb{N} \bullet$
 - $.c_f(P) \ge 1 \bullet$

אזי $f\left(E
ight)\subseteq\mathbb{N}$ רשת באשר אוימה מקסימלית ותהא $c\left(E
ight)\subseteq\mathbb{N}$ רשת ארימה באשר ותהא $\left(V,E,c,s,t
ight)$ אזי אוימ

- FF פתרון לבעיית הזרימה המקסימלית לכל בחירת מסלולים באלגוריתם.
 - . עושה לכל היותר |f| שיפורי מסלול FF
 - .FF $(E) \subseteq \mathbb{N} \bullet$

מסקנה: תהא $f(E)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות מקסימלית באשר $f(E)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא זרימה באשר איי סיבוכיות ועד אוי סיבוכיות מסקנה: תהא $c(E)\subseteq\mathbb{N}$ רשת ארימה באשר $c(E)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא איי סיבוכיות הריצה של FF הינה $\mathcal{O}(|E||f|)$

סענה: חריצה אזי סיבוכיות או אזי סיבוכיות באשר f או זרימה מקסימלית או אזי סיבוכיות או סיבוכיות או ריימה באשר $c(E)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא או הריצה של $c(E)\subseteq\mathbb{N}$ אוי סיבוכיות או הריצה של EdmondsKarp של הינה $c(E)^2\cdot |V|$

 $|e_1\cap e_2|
eq 1$ מתקיים $e_1,e_2\in M$ עבורה לכל $M\subseteq \stackrel{
ightarrow}{E}(G)$ אזייוג: יהיG גרף לא מכווון אזי

 $rg \max \left\{ |M| \mid G$ זיווג של אייווג מקסימלי: יהי הי ארף לא מכוון אזיM זיווג מקסימלי: יהי

 $\bigcup M=V\left(G
ight)$ עבורו $M\subseteq E\left(G
ight)$ איווג מושלם: יהי G גרף לא מכוון אזי איווג

```
וכן G_L=A אזי א|e\cap A|=|e\cap B|=1 מתקיים e\in E\left(G
ight) חתך עבורו ויהי אזי (A,B) אזי א מכוון ויהי
                                                         V^{\perp}=V\left(G
ight)\cup\left\{ s,t
ight\} אזי s,t
otin V\left(G
ight) איזי לא מכוון ויהיו מימון: יהי S גרף דו־צדדי לא מכוון ויהיו
                               E^{\to}=\{\langle v,u \rangle \mid (\{v,u\} \in E(G)) \land (v \in G_L) \land (u \in G_R)\} סימון: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
                                 .E^{\perp}=(\{s\}	imes G_L)\cup E^{
ightarrow}\cup (G_R	imes \{t\}) אזי איז s,t
otin V\left(G
ight) ויהיו לא מכוון ויהיו מימון: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון ויהיו
.c_{\lceil_{E}
ightarrow}^{\perp}=\infty וכן .c_{\lceil_{(\{s\}	imes G_L)\cup(G_R	imes \{t\}\})}^{\perp}}=1 המוגדרת ב.c_{\lceil (\{s\}	imes G_L)\cup(G_R	imes \{t\}\})}^{\perp}=1 וכן היי .c_{\lceil (\{s\}	imes G_L)\cup(G_R	imes \{t\}\})}^{\perp}=1 וכן מימון: יהי .c_{\lceil (\{s\}	imes G_L)\cup(G_R	imes \{t\}\})}^{\perp}=1
                                                    G^{\perp}=\left(V^{\perp},E^{\perp},c^{\perp},s,t
ight) אזי א s,t\notin V\left(G
ight) ויהיו לא מכוון ויהיו גרף דו־צדדי לא מכוון ויהיו
                                                              אלגוריתם לבעיית זיווג מקסימלי בגרף דו־צדדי: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
function BMMF(G):
     \begin{array}{l} (s,t) \not\leftarrow V\left(G\right) \\ G^{\perp} \leftarrow (V^{\perp}, E^{\perp}, c^{\perp}, s, t) \end{array} 
     f \leftarrow \operatorname{FordFulkerson}(G^{\perp})
    return \{e \in E(G) \mid f(e) = 1\}
                                                                         . אינו זיווג מקסימלי. אווג מהטון אזי G הינו איווג מקסימלי. ארף דו־צדדי לא מכוון אזי
                                                 \mathcal{O}\left(|E|\cdot|V|
ight) אזי זמן סיבוכיות בעל אזי אזי BMMF (G) אזי מכוון אזי מריצדי ארף דו־צדדי אזי מענה: יהי
        \max\left\{|M|\mid G איווג של M
ight\}=\max\left\{|f|\mid G^\perp ארימה של s,t
otin V(G) איווג של s,t
otin V(G) איווג של s,t
otin V(G)
                                               e\cap C
eq \emptyset מתקיים e\in E מתקיים עבורה לכל עבורה אזי ממון אזי מכוון אזי C\subseteq V\left( G
ight) אזי יהי
                                             rg \min \{|C| \mid G ביסוי צמתים של C גרף לא מכוון אזי בעיית ביסוי צמתים מינימלי: יהי בעיית G
                            \max\{|M|\mid G איווג של M\}\leq \min\{|C|\mid G למה: יהי Mגרף דו־צדדי לא מכוון אזיC כיסוי צמתים של
                                                     אלגוריתם לבעיית כיסוי צמתים מינימלי בגרף דו־צדדי: יהי G גרף אלגוריתם מינימלי מינימלי מינימלי אלגוריתם לבעיית ביסוי
function BMVC(G):
    (M, s, t, G^{\perp}, f) \leftarrow \text{BMMF}(G)
     C \leftarrow V(G)
     for \{u,v\}\in M\cap (G_L\times G_R) do
         \inf\left\{\tau:s\to v \mid G_f^\perp \ \text{ מסלול בגרף } \tau\right\} \neq \varnothing \text{ then } \mid C\leftarrow C\cup\{v\}
          \mid C \leftarrow C \cup \{u\}
     end
     return C
                                                                           . אינו כיסוי צמתים BMVC (G) אזי לא מכוון אזי דו־צדדי ארף דו־צדדי אינו מענה: יהי
                                                          |\mathrm{BMVC}\,(G)| = |M| איווג מקסימלי איזי M איוון ויהי לא מכוון ויהי הרף דו־צדדי לא מכוון ויהי
                                                               . מסקנה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי BMVC (G) אזי לא מינימלי גרף דו־צדדי מינימלי
                         \max\{|M|\mid G משפט: יהי M\}=\min\{|C|\mid G איווג של Cל כיסוי צמתים של M\}=\min\{|C|\mid G איווג של
                       .DP_{s,t} = \max \{n \in \mathbb{N} \mid t^{-t} גרף מכוון ויהיו s,t \in V אזי לקיימים n מסלולים זרים בקשתות מ־s,t \in V איזי איזי s,t \in V
         (V,E,1,s,t) אזי s,t\in V רשת 3/1: יהי
                                                         \mathrm{DP}_{s,t} = \max\left\{|f| \mid \mathsf{O/1} \text{ ברשת ברשת } f \right\} אזי s,t \in V טענה: יהי
```

uעבורו מ־u עבורו אזי $u,v\in G$ קיימים u מסלולים ארים בקשתות אזי גרף מכוון u אזי גרף מכוון אזי אלגוריתם לבדיקת uיקשירות בקשתות: יהי uיהי uיהי uיהי uיהי אלגוריתם לבדיקת א־קשירות בקשתות: יהי uיהי uיהי uיהי אלגוריתם לבדיקת א

מתקיים $A\subseteq G_L$ מתקיים איווג מושלם ב־ (G_L) אזי (קיים איווג מושלם ב- (G_L) משפט החתונה/הול: יהי

 $\mathsf{DE}_{s,t} = \min \left\{ c\left(S,T\right) \mid \mathsf{O/1} \right\}$ ברשת s-t חתך אזי $s,t \in V$ טענה: יהי G גרף מכוון ויהיו

 $N\left(A
ight)=\{y\in G_R\mid (A imes\{y\})\cap E
eqarnothing\}$ אזי איז $A\subseteq G_L$ איזי לא מכוון ותהא גרף דו־צדדי לא מכוון ותהא

 $\mathtt{DP}_{s,t} = \mathtt{DE}_{s,t}$ אזי $s,t \in V$ מסקנה משפט מנגר: יהי

 $|A| \leq |N(A)|$

```
function kConnected(k, G):
    for u \in V \setminus \{v\} do
       /st The following FordFulkerson calls will return True if the flow size is bigger then k after k augmenting
           paths else False
       b_1 \leftarrow \text{FordFulkerson}(V, E, 1, v, u)
       b_2 \leftarrow \text{FordFulkerson}(V, E, 1, u, v)
       if (\neg b_1) \lor (\neg b_2) then return False
   return True
                                .(kConnected (G)= True)\Longleftrightarrowטענה: יהי k\in\mathbb{N}_+ אויהי k\in\mathbb{N} גרף מכוון אזי k\in\mathbb{N}_+
                         עבורה f:E 	o \mathbb{R}_{\geq 0} אזי ארימה איזי (V,E,c,s,t) עבורה ארימה. עבורה ארימה פונקציית פרה־זרימה
                                                                                                     f \leq c חסם קיבולת: •
                                                                                  \chi_f(v) \geq 0 מתקיים v \in V \setminus \{s, t\} •
x_f(v)>0 צומת גולשת/בעלת עודף זרימה: תהא v\in V\setminus \{s,t\} רשת זרימה ותהא פונקציית קדם זרימה אזיv\in V\setminus \{s,t\} עבורה
E_f = \{e \in E \mid c\left(e
ight) > f\left(e
ight)\} \cup E^{-1} אזי ארימה אנטי־מקבילות אנטי־מקבילות אנטי־מקבילות ותהא ענטי־מקבילות ותהא אוי רימה ארימה חסרת קשתות אנטי־מקבילות ותהא
E_f = E_f = \{e \in E \mid c_f(e) > 0\} רשת איזי (V, E, c, s, t) רשת אנטי־מקבילות אנטי־מקבילות אנטי־מקבילות רשת איזי
                   המוגדרת c_f:E_f	o\mathbb{R}_+ הימה אזי קדם לרימה ותהא רישה (V,E,c,s,t) המוגדרת הקיבולת: מיוריות הקיבולת
              .c_{f}\left(e
ight)=\left\{egin{array}{ll} c(e)-f(e) & e\in E \\ f(e^{-1}) & e\in E^{-1} \end{array}
ight. .\Delta_{u,v}=\min\left\{\chi_{f}\left(u
ight),c_{f}\left(\left(u,v
ight)
ight)
ight\} אזי u,v\in V אזי אוימה תהא t קדם זרימה תהא t קדם זרימה על עון: תהא איזי אוימה תהא t קדם זרימה תהא t
                                        אזי u,v\in V אזי ארימה ויהיו f קדם ארימה (V,E,c,s,t) אאזי אלגוריתם אויפה: תהא
function Push ((V, E, c, s, t), f, u, v):
   f^* \leftarrow f
   if (u,v) \in E then
     f^*((u,v)) \leftarrow f((u,v)) + \Delta_{u,v}
    if (v, u) \in E then
    f^*((v,u)) \leftarrow f((v,u)) - \Delta_{u,v}
   return f^*
    .Push (f,u,v)= Push ((V,E,c,s,t),f,u,v) אזי u,v\in V איי ארימה תהא f קדם ארימה תהא (V,E,c,s,t) רשת ארימה תהא
                        פדם זרימה. Push (f,u,v) אזי u,v\in V איזי אויימה תהא f קדם זרימה תהא (V,E,c,s,t) איזי רימה.
                \chi_{\mathrm{Push}(f,u,v)}\left(u
ight)=\chi_{f}\left(u
ight)-\Delta_{u,v} אזי איזי u,v\in V טענה: תהא t קדם זרימה תהא t
 .Push (f,u,v) אזי \Delta_{u,v}=c_f\left((u,v)
ight) עבורם u,v\in V אזי קדם זרימה תהא t קדם ארימה \Delta_{u,v}=c_f\left((u,v)
ight) עבורם
                                      עבורה h:V	o\mathbb{N} אזי h:V	o\mathbb{N} רשת זרימה ותהא f קדם זרימה אזי (V,E,c,s,t) עבורה
                                                                                                             .h(s) = |V| \bullet
                                                                                                                .h(t) = 0 \bullet
                                                                                  h(u) \leq h(v) + 1 אזי (u,v) \in E_f יהי
   function Relabel ((V, E, c, s, t), f, h, u):
    h^* \leftarrow h
    h^*(u) \leftarrow \min\{h(v) \mid (u, v) \in E_f\} + 1
    return h^*
```

אזי $u\in V$ אזי אונקציית גובה h פונקציית ההא t קדם ארימה תהא ערימה t רשת ארימה t רשת ארימה אוני אוני t (t, E, c, s, t) רשת ארימה (Relabel t) Relabel (t, E, c, s, t), t

 $u\in V$ טענה: תהא h פונקציית גובה ותהא t רימה תהא $t\in V$ רשת זרימה ותהא $t\in V$ אזי

- . Relabel (f,h,u) $(u) \leq \text{Relabel}$ (f,h,u) (v)+1 אזי $(u,v) \in E_f$ יהי
- .Relabel (f, h, u) $(w) \leq$ Relabel (f, h, u) (u) + 1 אזי $(w, u) \in E_f$ יהי

Relabel (f,h,u) אזי $u\in V\setminus\{s,t\}$ תהא גובה ותהא פונקציית גובה f קדם זרימה תהא t קדם זרימה אזי t פונקציית גובה.

 $h\left(u
ight) \leq h\left(v
ight) + \delta_{G_f}\left(u,v
ight)$ אזי $u,v \in V$ אזי גובה ותהיינה h פונקציית גובה h קדם ארימה תהא h קדם דרימה תהא h פונקציית גובה ויהי $u \in V$ עבורו קיים מסלול מ־u למה: תהא h קדם ארימה תהא h פונקציית גובה ויהי $u \in V$ עבורו קיים מסלול מ־u למה: $h\left(u
ight) \leq |V| - 1$ אזי $u \in V$

 G_f ב ב־u מסקנה: תהא $u \in V$ עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל-u ל-u עבורו איי ל $u \in V$ עבורו איז ל $u \in V$ ל-u ליים מסלול מ"u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל-u ל-

 G_f ב ל־ל ב־ל מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת ארימה תהא f קדם ארימה ותהא f פונקציית גובה אזי לא קיים מסלול מ־f למה: תהא f רשת ארימה תהא f קדם ארימה ותהא f באשר f אזי קיים מסלול f מ־f למה: תהא f לכל f פרf לכל f ב־f לכל f

 G_f מסלונה: תהא $\chi_f\left(u
ight)>0$ אזי קיים מסלול T_f מהע ליז ב־U בשר רימה תהא אזי קיים מסלול U בה ליז ביU באשר רשת אזי איזי אויים אזי אוי בין אויי אויים אזי אויים אזי אויים אזי אויים אזי באשר U באשר U באשר U באשר ליז בין אזיי בין רשת ארימה אזי ער באנריתם דחיפה ושינוי שם: תהא U באשר אויים בין רשת ארימה אזי רימה אזי בין בין אויים בין בין אויים בין ראב בין אויים בין ראב בין בין ראב בין אויים בין ראב בין ראב בין אויים בין ראב בי

```
function GoldbergTarjan((V, E, c, s, t)):
```

```
\begin{array}{l} f \leftarrow (E \rightarrow \mathbb{R}_+) \\ f \leftarrow 0 \\ \text{for } (s,v) \in E \text{ do} \\ \mid f((s,v)) \leftarrow c((s,v)) \\ \text{end} \\ h \leftarrow (V \rightarrow \mathbb{N}) \\ h \leftarrow 0 \\ h(s) \leftarrow |V| \\ \text{while } \{u \in V \backslash \{s,t\} \mid \chi_f(u) > 0\} \neq \varnothing \text{ do} \\ \mid u \leftarrow \{u \in V \backslash \{s,t\} \mid \chi_f(u) > 0\} \\ \mid \text{if } \{(u,v) \in E_f \mid h\left(u\right) = h\left(v\right) + 1\} \neq \varnothing \text{ then} \\ \mid (u,v) \leftarrow \{(u,v) \in E_f \mid h\left(u\right) = h\left(v\right) + 1\} \\ \mid f \leftarrow \text{Push}(f,u,v) \\ \mid \text{else} \\ \mid h \leftarrow \text{Relabel}(f,h,u) \\ \mid \text{end} \\ \text{return } f \end{array}
```

 $f_s\left((u,v)
ight)=\left\{egin{array}{l} c((u,v))&u=s\\0&else\end{array}
ight.$ המוגדרת $f_s:E o\mathbb{R}_+$ רשת זרימה אזי (V,E,c,s,t) המוגדרת $\mathbb{1}_s:U=\{0,E,c,s,t\}$ רשת זרימה אזי $\mathbb{1}_s:V o\mathbb{N}$ המוגדרת רשת זרימה אזי (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי $|V|\cdot\mathbb{1}_s$ פונקציית גובה וכן לא קיים מסלול מ־(V,E,c,s,t) למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי לאחר כל איטרציה של GoldbergTarjan מתקיים

- . הינה קדם זרימה f ullet
 - .פונקציית גובה $h \bullet$
- $.G_f$ ב ל־ל מ־s לא קיים מסלול מ-s

. פעמים איז Relabel קוראת לפונקציה GoldbergTarjan איז ארימה איז רשת לכל תהא לפונקציה (V,E,c,s,t) איז למה:

. פעמים $2\left|E\right|\left|V\right|$ ביותר לכל היותר מבצעת מבצעת אזי GoldbergTarjan בעמים רשת ארימה אוי רשת למה:

. פעמים פעמים אזי ארימה אזי הרימה אזי GoldbergTarjan מבצעת דחיפה לא מרווה לכל היותר (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי GoldbergTarjan הינה ארימה מקטימלית. (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי העובט הינה ארימה מקטימלית.

 $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\cdot\left|V\right|^2\right)$ עם בסיבוכיות אמן ריצה (V,E,c,s,t) רשת אר היימה אזי ניתן לממש את ריצה (V,E,c,s,t) עם בסיבוכיות אמן ריצה (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי ניתן לממש את עם בסיבוכיות בסיבוכיות אמן ריצה (V,E,c,s,t) הערה: תהא (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי ניתן לממש את $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\left|V\right|\log\left(\left|V\right|\right)\right)$

 $x \leq y$ אזי $i \in [n]$ לכל $x_i \leq y_i$ עבורן אזי $x,y \in \mathbb{R}^n$ איי סימון: תהיינה

 $x\geq y$ אזי $i\in [n]$ לכל $x_i\geq y_i$ עבורן $x,y\in \mathbb{R}^n$ איי סימון: תהיינה

תהא $q\in\mathbb{R}^k$ יהי $Q\in M_{k imes n}$ תהא תרא יהי $P\in M_{m imes n}$ תהא תרא יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$

בעיית תכנות לינארי: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תוכנה לינארית אזי מציאת נקודת קיצון של c^Tx תחת ההנחות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות (c,P,p,Q,q,R,r) בעיית תכנות לינארי: תהא (c,P,p,Q,q,R,r)

בעיית תכנות לינארי מקסימום של c, P, p, Q, q, R, r תחת ההנחות מקסימום של בעיית תכנות לינארי מקסימלית: תהא (c, P, p, Q, q, R, r) תחת ההנחות $Px \leq p, Qx = q, Rx \geq r$

תחת ההנחות מינימום של מינימום אזי מציאת מינימרית תכנות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות מינימרית מינימרית מינימרית מינימרית תהא ($Px \leq p,Qx=q,Rx \geq r$)

הערה: מכאן והלאה נשתמש במונח תוכנה לינארית גם עבור בעיית תכנות לינארי.

סימלית מקסימלית בעיית עכנות בעיית בעיית בעיית בעיית אזי יהא בעיית יהא בעיית יהא בעיית יהא

$$\max c^T x$$

s.t.
$$Px \leq p$$

$$Qx = q$$

סימון: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) בעיית תכנות לינארית מינימלית אזי

 $\min c^T x$

s.t.
$$Px \leq p$$

$$Qx = q$$

 $Rx \geq r$ וכן $Px \leq p$ וכן $Px \leq p$ עבורו $x \in \mathbb{R}^n$ עבורו $x \in \mathbb{R}^n$ ווכנה לינארית: תהא $x \in \mathbb{R}^n$ עבורו $x \in \mathbb{R}^n$ ווכנה לינארית: תהא LP מוכנה לינארית: תהא לינארית: תהא עבורה לינארית אזי $x \in \mathbb{R}^n$ המהווה פתרון של בעיית התכנות הלינארית. LP עבורה לינארית פיזבילית: תוכנה לינארית עבורה קיים פתרון אופטימלי.

 $x\in\mathbb{R}^n$ עבורה קיים $B\in\mathbb{R}$ המקיים כי לכל פתרון פיזבילי עבורה לינארית (c,P,p,Q,q,R,r) עבורה לינארית מקסימלית חסומה: תוכנה לינארית מתקיים מתקיים a

 $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ יהי המקסימלית התוכנה הלינארית ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ ויהי ויהי $A\in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$ תהא ויהי $c\in\mathbb{R}^n$ יהי הינה הינה

$$\max c^T x$$

s.t.
$$Ax \leq b$$

 $\{Px\leq p,Qx=q,Rx\geq r\}$ מצולע/פאון/פוליהדרון הפיזביליות: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תוכנה לינארית אזי (c,P,p,Q,q,R,r) עבורה לכל $\alpha \in \{0,1\}$ מתקיים $\alpha \in \{0,1\}$ מתקיים $\alpha \in \{0,1\}$ עבורה לכל $\alpha \in \{0,1\}$ אזי $\alpha \in \{0,1\}$ אזי $\alpha \in \{0,1\}$ ולכל $\alpha \in \{0,1\}$ ולכל $\alpha \in \{0,1\}$ מתקיים $\alpha \in \{0,1\}$ אזי $\alpha \in \{0,1\}$ אזי $\alpha \in \{0,1\}$ אזי נקודה קיצונית $\alpha \in \{0,1\}$ פאון אזי נקודה קיצונית $\alpha \in \{0,1\}$

תוכנה הלינארית המוכנה הלינארית אזי התוכנה $b\in\mathbb{R}^m$ ויהי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ תהא היי $n,m\in\mathbb{N}$ יהי יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ אזי התוכנה הלינארית המקסימלית . $(c,0,0,A,b,I_n,0)$

 $(c,0,0,A,b,I_n,0)$ יהי המקסימלית התוכנה הלינארית ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ ויהי ויהי $A\in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$ תהא הינה $c\in\mathbb{R}^n$ יהי הינה הינה

$$\begin{aligned} & \max \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad A x = b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

צורת סלאק/צורה רפויה של תוכנה לינארית סטנדרטית: תהא $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ תוכנה לינארית שטנדרטית אזי התוכנה התוכנה המקסימלית $(\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix} \right),0,0,(A|I_m),b,I_{n+m},0)$ הלינארית המקסימלית

המקסימלית המקסימלית אזי התוכנה לינארית חוכנה לינארית תוכנה לינארית חוכנה $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ הינה חוכנה לינארית חוכנה המקסימלית חוכנה לינארית חוכנה המקסימלית חוכנה המקסימלית חוכנה הינארית חוכנה הינארית חוכנה לינארית חוכנה הינארית הינארית חוכנה הינארית הינארית

$$\max \quad c^T x$$
 s.t.
$$Ax + s = b$$

$$\binom{x}{s} \ge 0$$

משתנים בסיסיים בצורה רפויה: תהא SF צורה רפויה אזי $\{x_{n+1},\dots,x_{n+m}\}$ בבעיית התכנות הלינארי. משתנים לא בסיסיים בצורה רפויה: תהא SF צורה רפויה אזי $\{x_1,\dots,x_n\}$ בבעיית התכנות הלינארי. $x_1,\dots,x_n\}$ טענה צורה רפויה: תהא SLP תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית ויהי $x\in\mathbb{R}^n$ אזי (קיים $y\in\mathbb{R}^m$ עבורו x_n) פתרון פיזבילי של הצורה הרפויה) x

אלגוריתם סימפלקס: ...

טענה: בעיית הזרימה המקסימלית הינה בעיית תכנות לינארי מקסימלית.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי בעיית הזרימה המקסימלית הינה

$$\begin{aligned} & \max & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,t)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,t)\right) \\ & \text{s.t.} & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,u)\right) = 0 & , \forall v \in V \backslash \{s,t\} \\ & & f\left((u,v)\right) \leq c\left((u,v)\right) & , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & & f\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

(V,E,c,s,t,a) אזי $a:E o\mathbb{R}$ רשת ארימה ותהא (V,E,c,s,t) רשת תהא עלות: תהא

 $a\cdot f$ אויימה אזי f ארימה ותהא ארימה (V,E,c,s,t) אויי עלות ארימה: תהא

וכן $\chi_f\left(t
ight)=d$ עבורה f אזי פונקציית איי פונקציית עלות ויהי אויימה עלות (V,E,c,s,t,a) עבורה עבורה בעיית העלות המינימלית: תהא עבורה $\chi_f\left(t
ight)=d$ אזי פונקציית איי פונקציית עבורה בעיית העלות מינימלית: $\sum_{e\in E}a\left(e\right)\cdot f\left(e\right)$

טענה: בעיית העלות המינימלית הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: תהא העלות המינימלית ווהי איזי בעיית בעלת איזימה הינימלית רשת המינימלית חבא (V,E,c,s,t,a) מסקנה:

$$\begin{aligned} & \min \quad \sum_{(u,v) \in E} a\left((a,v)\right) \cdot f\left((a,v)\right) \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,t)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,t)\right) = d \\ & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,u)\right) = 0 \qquad , \forall v \in V \backslash \left\{s,t\right\} \\ & f\left((u,v)\right) \leq c\left((u,v)\right) \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & f\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה בעלת עלות יהי $d\in\mathbb{N}_+$ ותהא זרימה מקסימלית של (V,E,c,s,t,a) אזי (בעיית העלות המינימלית פיזבילית). $(|f|\geq d)$

סענה: תהא (V,E,c,s,t,a) השת בעית העלות ויהי עלות ויהי עלות ויהי אזי בעיית העלות המינימלית פיזבילית אזי בעיית העלות המינימלית בעיית פתרון אופטימלי.

 $f:E o\mathbb{R}_+$ אזי פונקציה אזי פונקציה עלות ותהא עלות איימה בעלת (V,E,c,s,t,a) אזי פונקציה בעיית העלות המינימלית המינימלית עם היצע וביקוש: תהא $\chi_f=d$ וכן $\chi_f=d$ וכן $\chi_f=d$ וכן $\chi_f=d$ וכן לפר בורה בעיית העלות מינימלית.

טענה: בעיית העלות המינימלית עם היצע וביקוש הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: תהא עם המינימלית עם היצע וביקוש הינה $d:V o \mathbb{Z}$ אזי בעלת עלות ותהא אוי בעלת עם היצע וביקוש הינה (V,E,c,s,t,a) מסקנה:

$$\begin{aligned} & \min & & \sum_{(u,v) \in E} a\left((a,v)\right) \cdot f\left((a,v)\right) \\ & \text{s.t.} & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,u)\right) = d\left(v\right) & , \forall v \in V \\ & & f\left((u,v)\right) \leq c\left((u,v)\right) & , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & & f\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

טענה: תהא המינימלית עם היצע וביקוש פיזבילית עבורה בעיית העלות ותהא איז פיזבילית על זרימה בעלת עלות ותהא איז רימה בעלת אוו ותהא בעלת עלות ותהא בעלת עלות ותהא וביקוש פיזבילית וביקוש פיזבילית בערית העלות המינימלית עם היצע וביקוש פיזבילית בעלת וביקוש פיזבילית וביקוש פיזבילית וביקוש פיזבילית בעלת עלות ותהא בעלת ותהא ב

s.t.
$$\sum_{u \in V} f\left(\left(u,t_{i}\right),i\right) - \sum_{u \in V} f\left(\left(t_{i},u\right),i\right) = \alpha \cdot d\left(i\right) \qquad , \forall i \in [k]$$

$$\sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left(\left(u,v\right),i\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left(\left(v,u\right),i\right) = 0 \qquad , \forall i \in [k] . \forall v \in V \backslash \left\{s_{i},t_{i}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{k} f\left(\left(u,v\right),i\right) \leq c\left(\left(u,v\right)\right) \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E$$

$$f\left(\left(u,v\right),i\right) \geq 0 \qquad , \forall i \in [k] . \forall \left(u,v\right) \in E$$

 $y:V o\mathbb{R}$ אזי $s\in V$ אזי δ גרף מכוון ממושקל אוזי δ אזי אזי $s\in V$ אזיים ויהי שליליים אזי משקל: יהי δ גרף מכוון ממושקל אוזי חסר מעגלים שליליים ויהי אוי $s\in V$ לכל g לכל g לכל g לכל עבורה g

 $y:V o\mathbb{R}$ ותהא $v\in V$ ותהא לכל $\delta\left(s,v
ight)<\infty$ עבורו יהי $s\in V$ תת־משקל חסר מעגלים שליליים יהי עבורו $s\in V$ ותהא $v\in V$ ותהא אזי $v\in V$ למל: $v\in V$ לכל עבורו למליים אזי $v\in V$ לכל למר:

 $y:V o\mathbb{R}$ אותהא $v\in V$ לכל לכל לכל און עבורו $s\in V$ יהי שליליים שליליים שליליים עבורו ממושקל לכל לכל און ותהא $s\in V$ ותהא $g(e_2)=y(e_1)+\ell(e)$ עבורה בורה עבורה לעבורה משקל און אוי קשת

 $y:V o\mathbb{R}$ תהא $v\in V$ לכל לכל לכל $\delta\left(s,v
ight)<\infty$ עבורו יהי שליליים שליליים שליליים עבורו חסר מעגלים עבורו ממושקל א תהא $v\in V$ חסר מעגלים שליליים יהי עבורו $s\in V$ המכיל רק קשתות הדוקות אזי עבורו קיים מסלול $u\in V$ המכיל רק קשתות הדוקות אזי עבורו קיים מסלול

 $y:V o\mathbb{R}$ ותהא $v\in V$ לכל לכל לכל לכל עבורו אור מטקנה: יהי אורף מכוון ממושקל חסר מעגלים שליליים יהי שליליים אור אזי עבורו אורף מכוון ממושקל פיזבילית.

טענה: בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי ויהי אי בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה מסקנה: יהי

$$\max \quad \sum_{u \in V} y(u)$$
 s.t.
$$y(v) - y(u) \leq \ell(u,v) \qquad , \forall (u,v) \in E$$

$$y(s) = 0$$

מאני $\delta\left(s,v
ight)<\infty$ עבורו אזי $\delta\left(s,v
ight)<\delta\left(s,v
ight)$ לכל לינים שליליים ייהי אזי ממושקל ממושקל חסר מעגלים שליליים אזי משפט: איזי

- בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא בעלת פתאון אופטימלי.
- $u\in V$ לכל $y\left(u
 ight)=\delta_{\ell}\left(s,u
 ight)$ יהי y פתרון אופטימלי של בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא אזי $y\left(u
 ight)=\delta_{\ell}\left(s,u
 ight)$

טענה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ בעל מעגל שלילי ויהי $s\in V$ אזי בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא איז בעיית מנקודת מנקודת $s\in V$ שבורו ℓ איז בעיית המסלולים הקצרים מנקודת יהי ℓ גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי ℓ אויהי ℓ עבורו קיים ℓ אוי בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא לא חסומה.

תחת ההנחות c^Tx מוכנה לינארי אזי מציאת (c,P,p,Q,q,R,r) תחת האז תרע בשלמים: תהא בעיית תכנות לינארי c^Tx תחת ההנחות c^Tx תחת ההנחות אזי מציאת נקודת קיצון של c^Tx תחת ההנחות c^Tx תחת ההנחות c^Tx תחת ההנחות c^Tx תחת ההנחות הבעיית תכנות לינארי בשלמים: תחת ההנחות הבעיית הבעיית

תוכנה הלינארית אזי התוכנה הלינארית חוכנה ($c,A,b,0,0,I_n,0$) תוכנה הלינארית אזי התוכנה הלינארית המינימלית ($b,0,0,0,0,\left(\frac{A^T}{I_m} \right),\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

הינה $\left(b,0,0,0,0,\left(\begin{smallmatrix}A^T\\I_m\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}c\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$ הינה הלינארית המינימלית $\left(c,A,b,0,0,I_n,0\right)$ הינה הערה: תהא

$$\begin{aligned} & \min & b^T x \\ & \text{s.t.} & A^T x \geq c \\ & & x \geq 0 \end{aligned}$$

y ויהי $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ של פתרון פיזבילי פתרון משפט חוכנה לינארית סטנדרטית ווכנה $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ ויהי $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ של התוכנה הלינארית הדואלית אזי $c^Tx \leq b^Ty$ ויהי

משפט הפרדת היפר־משטח: תהא $\beta\in\mathbb{R}$ עבורם $x\in\mathbb{R}^n$ אזי קיים $x\in\mathbb{R}^n$ אזי קיים א עבורם $x\in\mathbb{R}^n$ וכן $x\in\mathbb{R}^n$ וכן $x\in\mathbb{R}^n$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$ לכל $x\in\mathbb{R}^n$

למה מתקיים מהבאים אזי בדיוק $b\in\mathbb{R}^m$ ויהי ויהי $A\in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$ למה מארקאס: תהא

- Ax = b וכן $x \ge 0$ עבורו $x \in \mathbb{R}^n$
- $A^Ty \geq 0$ וכן $b^Ty < 0$ עבורו $y \in \mathbb{R}^m$ וכן •

משפט דואליות חזקה: תהא SLP תוכנה לינארית סטנדרטית ותהא DLP התוכנה הלינארית הדואלית אזי

- x=y אזי DLP ויהי אופטימלי פתרון ויהי אויהי SLP יהי פתרון פתרון יהי יהי
 - (SLP) פיזבילית וחסומה \Longrightarrow (חסומה) פיזבילית וחסומה).
 - \bullet (א פיזבילית) לא DLP) לא חסומה SLP) \bullet
 - .(א חסומה) לא DLP) \Longrightarrow לא פיזבילית SLP) •

תוכנה לינארית פרימאלית: תהא SLP תוכנה לינארית סטנדרטית תהא DLP התוכנה הלינארית הדואלית ותהא SDLP הצורה הסטנדרטית של DLP אזי התוכנה הלינארית הדואלית של SDLP.

שקולה ל-SDLP שקולה ל-SDLP תוכנה לינארית סטנדרטית ותהא SDLP התוכנה הלינארית הפרימאלית אזי

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה המקסימלית הינה

$$\begin{split} & \min \quad \sum_{(u,v) \in E} c\left((u,v)\right) \cdot z\left((u,v)\right) \\ & \text{s.t.} \quad y\left(v\right) - y\left(u\right) + z\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall u,v \in V \backslash \left\{s,t\right\}.\left(u,v\right) \in E \\ & \quad y\left(v\right) + z\left((s,v)\right) \geq 1 \qquad , \forall \left(s,v\right) \in E \\ & \quad -y\left(u\right) + z\left((u,t)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,t\right) \in E \\ & \quad z\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \end{split}$$

יטענה: תהא אקולה לתוכנה הדואלית של בעיית הזרימה אזי הבעיה הדואלית שקולה לתוכנה הלינארית (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה אזי הבעיה הדואלית שקולה לתוכנה הלינארית

$$\begin{aligned} & \min & & \sum_{(u,v) \in E} c\left((u,v)\right) \cdot z\left((u,v)\right) \\ & \text{s.t.} & & y\left(v\right) - y\left(u\right) + z\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & & y\left(s\right) = 1 \\ & & y\left(t\right) = 0 \\ & & z\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

עבורו ($\binom{z}{y}$) משפט: תהא (V,E,c,s,t) משפט: תהא אזי הבעיה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה המקסימלית בעלת פתרון אופטימלי ($u\in V$) עבורו $u\in V$ לכל v

טענה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי $s\in V$ אזי הבעיה הדואלית של בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה

$$\begin{aligned} & \min & & \sum_{(u,v) \in E} \ell\left((u,v)\right) \cdot x\left((u,v)\right) \\ & \text{s.t.} & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} x\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} x\left((v,u)\right) = 1 & , \forall v \in V \backslash \left\{s\right\} \\ & & x\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

מסקנה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ יהי $s\in V$ יהי ויהי $s\in V$ ויהי $s\in V$ אזי s פתרון בשלמים.