

אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ המקיימת

- $\Omega \in \mathcal{F}$

- $\forall E \in \mathcal{F}. E^c \in \mathcal{F}$

- לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} אלגברה אזי $\emptyset \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$

σ -אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ המקיימת

- $\Omega \in \mathcal{F}$

- $\forall E \in \mathcal{F}. E^c \in \mathcal{F}$

- לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה אזי $\emptyset \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$

משפט: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי \mathcal{F} הינה אלגברה מעל Ω

פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1 \dots B_n \in \mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu(\biguplus_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$

מידה על אלגברה: תהא \mathcal{F} אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ אדטיבית.

פונקציה σ -אדטיבית: פונקציה $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת לכל $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu(\biguplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$

מידה על σ -אלגברה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ σ -אדטיבית.

מרחב מדיד: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי (Ω, \mathcal{F})

קבוצה מדידה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי $E \in \mathcal{F}$

למה: תהא μ מידה על \mathcal{F} המקיימת $\mu(E) < \infty$ אזי $\mu(\emptyset) = 0$

למה: תהא μ מידה מעל σ -אלגברה \mathcal{F} אזי μ אדטיבית.

למה: תהא μ מידה ותהיינה $A, B \in \mathcal{F}$ עבורן $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי

- מונוטונית עולה חלש: $\forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1}$

- מונוטונית יורדת חלש: $\forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n$

סופרמום: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\sup(A) = \bigcup_{i=0}^\infty A_i$

אינפימום: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\inf(A) = \bigcap_{i=0}^\infty A_i$

גבול עליון: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^\infty \bigcup_{i=n}^\infty A_i$

גבול תחתון: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^\infty \bigcap_{i=n}^\infty A_i$

גבול: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ עבורה $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$

טענה: תהא μ מידה מעל σ -אלגברה \mathcal{F} ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B)$

מרחב מידה: תהא \mathcal{F} אלגברה/ σ -אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על \mathcal{F} אזי $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

מידת הסתברות: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ המקיימת $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

מרחב הסתברות: מרחב מידה $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ עבורו μ מידת הסתברות.

מרחב התוצאות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω

מאורע: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $E \in \mathcal{F}$

מרחב המאורעות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי \mathcal{F}

אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$ עבורו לכל $A \subseteq (0, 1]$ ולכל $b \in (0, 1]$ באשר $A + b \subseteq (0, 1]$ מתקיים

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A + b)$$

טענה: לכל מרחב הסתברות $(\mathbb{P}, (0, 1], 2^{(0, 1]})$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.

קבוצה פתוחה: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה $\forall x \in A. \exists \varepsilon > 0. (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$

קבוצה סגורה: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה A^c פתוחה.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ σ -אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ הינה σ -אלגברה מעל Ω

σ -אלגברה בורלית מעל \mathbb{R} : תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ כל σ -אלגבראות מעל \mathbb{R} המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

קבוצה בורלית: $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

טענה: σ -אלגברה בורלית הינה σ -אלגברה מעל \mathbb{R} .

טענה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל \mathbb{R} המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω ותהא $A \subseteq \Omega$ אזי $\{E \cap A \mid E \in \mathcal{F}\}$ הינה σ -אלגברה מעל A .

σ -אלגברה בורלית מעל $(0, 1]$: $\mathcal{B}_{(0,1]} = \{B \cap (0, 1] \mid B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$.

מידת לבג: תהא $B \in \mathcal{B}$ אזי $\lambda(B) = \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\}$.

טענה: $\lambda: ((0, 1], \mathcal{B}_{(0,1]}, \lambda)$ מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

מרחב אחיד על A : עבור $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(A, \mathcal{B}_A, \lambda)$.

σ -אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ותהיינה $\{F_i\}_{i \in I}$ כל ה- σ -אלגבראות מעל Ω המכילות את \mathcal{T} אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \bigcap_{i \in I} F_i$.

הצילינדר של ה- σ -אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ו- σ -אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי \mathcal{T} .

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\emptyset, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן

$\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_{\alpha} \cup \{A^c \mid A \in \mathcal{F}_{\alpha}\} \cup \{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_{\alpha}\}$ נסמן $\mathcal{F}_{\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}_{\alpha}$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ויהיו $\omega, \kappa \in \Omega$ עבורן $\omega \in A \iff \kappa \in A$ אזי $\forall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \iff \kappa \in A$.

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ עברה $X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ עבור $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

סימון: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X: \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}[B])$.

טענה: תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ אזי

$$\bullet f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$

$$\bullet f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

$$\bullet f^{-1}[A^c] = f^{-1}[A]^c$$

טענה: יהי (Ω, \mathcal{F}) מרחב מדיד ותהא $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\{E \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}[E] \in \mathcal{F}\}$ הינה σ -אלגברה מעל \mathbb{R} .

משפט: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אזי X מ"מ $(X \text{ מ"מ}) \iff (\forall t \in \mathbb{R}. X^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{F})$.

σ -אלגברה נוצרת על ידי משתנה מקרי: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\})$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

$$\bullet \text{יהי } c \in \mathbb{R} \text{ אזי } cX \text{ מ"מ.}$$

$$\bullet X + Y \text{ מ"מ.}$$

$$\bullet XY \text{ מ"מ.}$$

$$\bullet \text{יהי } Z \text{ מ"מ על } (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu) \text{ אזי } f \circ X \text{ מ"מ.}$$

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אזי $f^{-1}[\mathcal{U}]$ פתוחה.

מסקנה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ אזי f מ"מ על $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$.

פונקציית התפלגות מצטברת (פה"מ): יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ המקיימת $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$$

$$\bullet F_X \text{ מונוטונית עולה.}$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow a^+} F_X(t) = F_X(a)$$

משתנים מקריים שויי התפלגות: X, Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

למה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}_0 \subseteq 2^{\Omega}$ סגורה לחיתוכים סופיים עברה $\Omega \in \mathcal{F}_0$ ותהא $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ סגורה להפרשים וסגורה לגבולות

אינסופיים עברה $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ אזי $\sigma(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $(F_X = F_Y) \iff (\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y)$.

תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X) = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(t - \varepsilon < X < t + \varepsilon) > 0\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X)$ הקבוצה הסגורה המינימלית ב- \mathbb{R} עברה $\mathbb{P}(X \in \text{supp}(X)) = 1$.

אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $t \in \mathbb{R}$ המקיים $\mathbb{P}(X = t) > 0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי $t \in \mathbb{R}$ אטום של X אזי $A_X = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ אטום של } X\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $|A_X| \leq \aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי X המקיים $\mathbb{P}(X \in A_X) = 1$.

פונקציית צפיפות: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f \geq 0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי X עבורו קיימת $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a < b$ מתקיים $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$.

סימון: יהי X מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של X .

טענה: יהי X מ"מ רציף אזי

• יהי $t \in \mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X = t) = 0$.

• $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $a \in \mathbb{R}$ עבורה $a \in C(a)$ אזי $F'_X(a) = f_X(a)$.

האחוזון ה- p : יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ממש עד אשר $F_X = 1$ ויהי $p \in (0, 1)$ אזי $a \in \mathbb{R}$ המקיים $F_X(a) = p$.