פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_+(a)=f(a)$ וכן $F'_-(b)=f(b)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^I\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\Longleftrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int(f+g)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int(\alpha f)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^I$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int((f\circ g)\cdot g')$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^n|\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\ldots t_n\}$ המקיימות $t_i\in[x_{i-1},x_i]$. $\forall i\in\{1\ldots n\}$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-L|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a,b])=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid f \text{ אינטגרבילית רימן}\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot\mathrm{d}t=c(b-a)$.

טענה: $D(x)\notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f\in R([a,b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ חסומה אזי $\int_a^b f=\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f,J)=\sup_{x,y\in J}(f(x)-f(y))$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0\in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\Longleftrightarrow(\lim_{\delta\to0}\omega(f,[x_0-\delta,x_0+\delta])=0)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}(I).\omega(f,I)<\varepsilon)$.

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p\}=\Pi_2$ חלוקות
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p_1\ldots p_m\}=\Pi_2$ חלוקות
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)\ge\overline{I}(f)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$ אזי $f\in R([a,b])$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

משפט: $C([a,b])\subseteq R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f\in R([a,b])$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $f_{\restriction_{[a,b]}}\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $(f\in R([a,b]))\wedge(f\in R([b,c]))$ אזי $f\in R([a,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in[a,d]$ עבורה $f\in R([a,d])$ אזי $f\in R([b,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,c])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([b,c])$ אזי $f\in R([a,c])$.

טענה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases}y & x=b\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $g\in R([a,c])$.

מסקנה: נגדיר $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אזי $f\in R([-1,1])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ תהא $H\in C(\mathbb{R})$ וכן $c\in\mathbb{R}$
- $(f+g),(cf)\in R([a,b])$.
- $(f\cdot g),(H\circ f),|f|\in R([a,b])$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\{(a_i,b_i)\}_{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup(a_i,b_i)$ וכן $\sum(b_i-a_i)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $|A|\le\aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.|b-a|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_A}=g_{\restriction_A}$ אזי $\int_a^b f=\int_a^b g$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases}y_i & x\in\{b_1\ldots b_m\}\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f=\int_a^c g$.

משפט ליניאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b\alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,c])$ ויהי $b\in(a,c)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $f\ge0$ אזי $\int_a^b f\ge0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^b f\ge\int_a^b g$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ רציפה המקיימת $f\ge0$ וכן $\int_a^b f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m\left(b-a\right)\le\int_{a}^{b}f\le M\left(b-a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_{a}^{b}f\right|\le\int_{a}^{b}\left|f\right|\le\sup_{\left[a,b\right]}\left(\left|f\right|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$ אזי $F\in C\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $0\le g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}\left(f\cdot g\right)=f\left(x_{0}\right)\int_{a}^{b}g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$ אזי $F'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_{a}^{b}f=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ יהיו $x_{1}\ldots x_{n}\in\left[a,b\right]$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]\backslash\left\{ x_{1}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $\left[f\right]|_{a}^{b}=f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f'g=\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $\varphi\in C^{1}\left(\left[\alpha,\beta\right],\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $\left(\varphi\left(\alpha\right)=a\right)\wedge\left(\varphi\left(\beta\right)=b\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

למה: תהא $f\in C^{1}\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx=-\int_{0}^{2\pi}f'\left(x\right)\frac{\sin\left(nx\right)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^{1}\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx\right|\le\frac{2\pi\sup\left(\left|f'\right|\right)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=\left[a,\infty\right)$ וכן $\forall b\in\left[a,\infty\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{\infty}f=\lim\limits_{b\to\infty}\int_{a}^{b}f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=\left(-\infty,b\right]$ וכן $\forall a\in\left(-\infty,b\right].f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{-\infty}^{b}f=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{b}f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.\left(a<b\right)\Longrightarrow\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)$ אזי $\int_{-\infty}^{\infty}f=\int_{-\infty}^{0}f+\int_{0}^{\infty}f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=\left(a,b\right]$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[c,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim\limits_{r\to a^{+}}\int_{r}^{b}f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=\left[a,b\right)$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim\limits_{r\to b^{-}}\int_{a}^{r}f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R\left(I\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{I}\mid\text{קיים וסופי }\int_{I}f\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\left\{ \infty\right\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{\omega}\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\int_{a}^{\omega}f+\beta\int_{a}^{\omega}g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהי $c\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{a}^{c}f+\int_{c}^{\omega}f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_{a}^{\omega}f\ge\int_{a}^{\omega}g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ על $\left[a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\lim_{b\to\omega}F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f'g=\lim_{b\to\omega}\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{\omega}fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $\varphi\in C^{1}\left(\left[c,\eta\right),\left[a,\omega\right)\right)$ המקיימת $\varphi\left(c\right)=a$ וכן $\lim_{b\to\eta}\varphi\left(b\right)=\omega$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{c}^{\eta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in\left(a,\omega\right).\forall b_{1},b_{2}\in\left[B,\omega\right).\left|\int_{b_{1}}^{b_{2}}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow\left(f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ אינו מתכנס אך $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_{a}^{\omega}f\right|\le\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)\Longleftrightarrow$($F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ חסומה על $\left[a,\omega\right)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימות $\forall b\in\left(a,\omega\right).f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי

- $\left(\int_{a}^{\omega}g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)$.
- $\left(\int_{a}^{\omega}f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_{a}^{\omega}g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\left(\int_{1}^{\infty}f<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^{\infty}f\left(n\right)\le\int_{1}^{\infty}f\le\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^{n}}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

משפט אבל: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)\cap R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $f\in C^{1}\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_{a}^{\omega}fg<\infty$.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $\int_a^\omega fg<\infty$.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0\le g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(a\right)\int_a^{x_0}g\left(x\right)\mathrm{d}x+f\left(b\right)\int_{x_0}^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

הלמה של בונה: תהא $f\in C^1\left(\left(a,b\right)\right)$ רציפה על a,b עבורה $\left(f'\ge0\right)\vee\left(f'\le0\right)$ ותהא $g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_a^{x_0}g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_0}^b g\left(x\right)dx$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $R_n\left(f,a\right)\left(x\right)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)\left(x-t\right)^n dt$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}\left(k-2n\right)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x\right)^m dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x\right)^m dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\left(m-1\right)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{\left(m-1\right)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots\left(2n-2\right)\cdot\left(2n-2\right)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots\left(2n-1\right)\cdot\left(2n-1\right)}=\prod_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:\left(1,\infty\right)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta\left(s\right)\left(s-1\right)=1$.

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\iff\left(\forall x\in I.\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in R\left(I\right)\right)$.
- גבול האינטגרל: נניח $\substack{f\in R\left(I\right)\\ \forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R\left(I\right)}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)\not\Longrightarrow\left(\int_I f=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}f_n'\left(x\right)=L\right)\not\Longrightarrow\left(f'\left(x\right)=L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=0\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)\right|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\wedge\left(g_n\xrightarrow{\text{u}}g\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{\text{u}}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C\left(I\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in C\left(I\right)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{I_n\right\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $\left[a,b\right]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ וכן $\forall n<m.f_m<f_n$ אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ באשר $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ וכן לכל $x\in\left[a,b\right]$ הסדרה $\left\{f_n\right\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[a,b\right]$ ותהא $\Psi\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.\left|f_n\right|\le\Psi$ אזי $\left(\forall b\in\left[a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\wedge\left(\int_a^\omega f\text{ מתכנס בהחלט}\right)\wedge\left(\int_a^\omega f=\lim_{n\to\infty}\int_a^\omega f_n\right)$.

טענה: $\int_0^\infty e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: תהיינה $f_n\in C^1\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $f_n'\xrightarrow{\text{u}}g$ ותהא $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורה $\left\{f_n\left(x_0\right)\right\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ וכן $f'=g$.