```
המקיימת \mathcal{F}\subseteq 2^\Omega המקיימת תהא \Omega המקיימת
                                                                                                                                                                 \Omega \in \mathcal{F} \bullet
                                                                                                                                                  \forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \bullet
                                                                                                                 .\bigcup E \in \mathcal{F} בת מנייה מתקיים E \subseteq \mathcal{F} לכל
                                                                                                                                \varnothing\in\mathcal{F} אזי \sigma אלגברה אזי '\sigma
                                                                                          A \cap E \in \mathcal{F} אזי אזי B \subset \mathcal{F} בת מנייה אזי \sigma
                                                                                            \Omega מעל מעל הינה אלגברה מעל \mathcal F הינה אלגברה מעל מעל \sigma
         \mu\left(\biguplus_{i=1}^nB_i
ight)=\sum_{i=1}^n\mu\left(B_i
ight) פונקציה אדטיבית: פונקציה \mu:\mathcal{A}	o\mathbb{R} המקיימת לכל פונקציה ארטיבית: פונקציה המקיימת לכל
                                                                                        . אדטיבית \mu:\mathcal{F} 	o [0,\infty] אזי אלגברה תהא אדטיבית אלגברה אלגברה אזי
       \mu(igoplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) מתקיים מתקיים אזרות \{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A} המקיימת לכל \mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R} המקיים פונקציה \sigma-אדטיבית: פונקציה
                                                                             . אדטיבית: תהא \sigma \mu:\mathcal{F} 	o [0,\infty] אזי מידה על \sigma אדטיביה: תהא
                                                                                                            (\Omega, \mathcal{F}) אזי \Omega אזי מרחב מדיד: תהא \sigma \mathcal{F} אזי מרחב
                                                                                                         E \in \mathcal{F} אזי \Omega אזי אזירה: תהא \sigma אזי האזי מדידה: תהא
                                                                               .\mu\left(arnothing
ight)=0 אזי \exists E\in\mathcal{F}.\mu\left(E
ight)<0 המקיימת \mathcal{F} המידה על
                                                                                                        . אדטיבית \mu אזי \mathcal F אזי מעל \sigma־אלגברה מעל מידה \mu
                                                                            \mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right) אזי A\subseteq B עבורן A,B\in\mathcal{F} למה: תהא \mu מידה ותהיינה
                                                                                            סדרת קבוצות מונוטונית: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A}:\mathbb{N} 
ightarrow \mathcal{A} אזי
                                                                                                              \forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1} שונוטונית עולה חלש: •
                                                                                                             \forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n מונוטונית יורדת חלש: •
                                                                                  \sup\left(A
ight)=igcup_{i=0}^{\infty}A_{i} אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A} קבוצה ותהא
                                                                                   \inf\left(A
ight)=igcap_{i=0}^{\infty}A_{i} אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A} קבוצה ותהא
                                                          \limsup_{n	o\infty}A_n=igcap_{n=0}^\inftyigcup_{i=n}^\infty A_i אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא קבוצה ותהא ליון: תהא
                                                         \liminf_{n	o\infty}A_n=igcup_{n=0}^\inftyigcap_{i=n}^\infty A_i אזי איזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא קבוצה ותהא A:\mathbb{N}	o\mathcal{A}
        \lim_{n \to \infty} A_n = \liminf_{n \to \infty} A_n אזי \lim\inf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n עבורה A: \mathbb{N} \to \mathcal{A} אזי A: \mathbb{N} \to \mathcal{A}
                  \lim_{n \to \infty} \mu\left(A_n
ight) = \mu\left(B
ight) אזי \lim_{n \to \infty} A_n = B עבורה A: \mathbb{N} 	o \mathcal{F} ותהא לגברה \sigma־אלגברה מעל מידה מעל
                                                              (\Omega, \mathcal{F}, \mu) אזי איזי \mathcal{F} מידה \mu מידה מעל \Omega ותהא א אלגברה \sigmaראלגברה אלגברה
                                                   \mathbb{P}\left(\Omega
ight)=1 המקיימת \mathcal{F}:\mathcal{F}	o[0,\infty] האי מידה \sigma אזי מידה מעל \sigma המקיימת מידת הסתברות: תהא
                                                                                         מרחב הסתברות: מרחב מידה (\Omega, \mathcal{F}, \mu) עבורו \mu מידת הסתברות.
                                                                                                        \Omega אזי אזי \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} מרחב הסתברות אזי \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}
                                                                                                             E \in \mathcal{F} מרחב הסתברות אזי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מאורע: יהי
                                                                                                      \mathcal{F} אזי אחב הסתברות מרחב (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) יהי
A+b\subseteq (0,1] באשר b\in (0,1] אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות b\in (0,1] עבורו לכל A\subseteq (0,1] עבורו לכל
                                                                                                                                                         \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A+b)
                                                                  . טענה: לכל מרחב הסתברות ((0,1],2^{(0,1]},\mathbb{P}) לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.
                                                                                     . \forall x \in A. \exists arepsilon > 0. \, (x-arepsilon, x+arepsilon) \subseteq A עבורה עבורה אבוצה פתוחה: A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                                                           קבוצה סגורה: A\subseteq\mathbb{R} עבורה A^{\mathcal{C}} פתוחה.
                                                                \Omega טענה: תהיינה \sigma הינה \sigma אלגברה מעל מעל מעל מעל מעל -\sigma אלגברה היינה \cap
   \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i כל ה\sigma־אלגבראות מעל \mathbb{R} המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי \{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} כל ה\sigma-אלגבראות מעל מעל אויינה בורלית מעל
                                                                                                                                                  B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} :קבוצה בורלית
```

אלגברה: תהא  $\Omega$  קבוצה אזי  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  המקיימת

. | או סופית מתקיים  $E\subseteq\mathcal{F}$  לכל סופית סופית

 $A \cap E \in \mathcal{F}$  אוזי סופית אזי ההא למה: תהא אלגברה ותהא למה:

 $\Omega \in \mathcal{F} \bullet$ 

 $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \bullet$ 

 $\varnothing \in \mathcal{F}$  אלגברה אזי  $\mathcal{F}$  אלגברה

```
\mathfrak{B}_{(0,1]}=\{B\cap(0,1]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}: (0,1] אלגברה בורלית מעל\sigma
                                                                              A(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i-a_i\right)\mid B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i,b_i\right)
ight\} אזי B\in\mathfrak{B} מידת לבג: תהא
                                                                                                               . מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות מרחב ((0,1],\mathfrak{B}_{(0,1]},\lambda) :
                                                                                                                                     A: (A, \mathfrak{B}_A, \lambda) אזי A\subseteq \mathbb{R} מרחב אחיד על
\sigma(\mathcal{T})=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i אזי \mathcal{T} אזי אויי המכילות מעל \Omega המכילות מעל \Omega המכילות את \mathcal{T} אזיי \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega ותהיינה \mathcal{T} ותהיינה \mathcal{T} בל ה\sigma-אלגברה נוצרת:
                                                                                          \mathcal{T} אזי \sigma(\mathcal{T}) אזי אלגברה הלגברה הנוצרת: תהא \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega אזי איזי אלגברה הנוצרת
                                                              נסמן lpha+1 נסמן, אכל סודר לכל \mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\} נסמן לכל \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega נסמן \Omega
באשר \sigma\left(\mathcal{T}
ight)=\mathcal{F}_{\omega_{1}} איי איז \mathcal{F}_{\lambda}=igcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha} נסמן \lambda נסמן \mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{igcap_{n=1}^{\infty}A_{n}\mid A_{n}\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}
                                                                                                                                           . הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה \omega_1
    . orall A \in \sigma \left( \mathcal{T} 
ight). \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A אזי orall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A טענה: תהא orall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A ויהיו \mathcal{T} \subseteq 2^\Omega ויהיו
                            A : \mathcal{A} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1} [B] \in \mathcal{F} עבורה X: \Omega \to \mathbb{R} אזי משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי והי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות אזי
                                                                                                A : \forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.arphi^{-1}\left[B
ight] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} המקיימת arphi: \mathbb{R} 	o \mathbb{R} בונקציה מדידה בורל:
                            \mathbb{P}_X\left(B
ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B
ight]
ight) כך \mathfrak{P}_X:\mathfrak{B}_\mathbb{R}	o\mathbb{R} מרחב הסתברות ויהי X:\Omega	o\mathbb{R} מ"מ נגדיר מ"מ נגדיר מ"מ מרחב הסתברות ויהי
                                                                                                                                       טענה: תהא A,B\subseteq\mathbb{R} ותהיינה f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} אזי
                                                                                                                                               f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \bullet
                                                                                                                                               f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \bullet
                                                                                                                                                                     f^{-1}[A^{\mathcal{C}}] = f^{-1}[A]^{\mathcal{C}} \bullet
                                      \mathbb R טענה: יהי \{E\subseteq\mathbb R\mid X^{-1}\left[E
ight]\in\mathcal F\} אזי X:\Omega	o\mathbb R אלגברה מעל מרחב מדיד ותהא מעלה: יהי
                                  (\forall t\in\mathbb{R}.X^{-1}\,[(-\infty,t)]\in\mathcal{F})\Longleftrightarrowמשפט: יהי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות ותהא X:\Omega\to\mathbb{R} אזי ותהא
        \sigma(X)=\sigma\left(\{X^{-1}\left[B
ight]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}
ight) אזי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) אזי משתנה מקרי: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות \sigma
                                                                                                                        (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) אזי מים על מרחב הסתברות אזי X,Y יהיו
                                                                                                                                                                     יהי cX אזי c\in\mathbb{R} מ"מ.
                                                                                                                                                                                       .מ"מ X+Y
                                                                                                                                                                                            .מ"מ XY
                                                                                                                                     מ"מ. f\circ X אזי (\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu) מ"מ. \bullet
                                                                                                         f^{-1}\left[\mathcal{U}
ight] פתוחה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R} פתוחה f\in C\left(\mathbb{R}
ight) פתוחה.
```

למה: תהא  $\mathcal{F}\subseteq 2^\Omega$  סגורה להפרשים וסגורה לגבולות סופיים עבורה  $\Omega\in\mathcal{F}_0$  ותהא  $\mathcal{F}_0\subseteq 2^\Omega$  סגורה לגבולות

. supp  $(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid \forall \varepsilon>0.\mathbb{P}\,(t-\varepsilon< X< t+\varepsilon)>0\}$  תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי מ"מ אזי X מענה: יהי X מ"מ אזי מ"מ אזי הקבוצה הסגורה המינימלית ב־ $\mathbb{R}$  עבורה X מיטענה: יהי X מ"מ אזי מ"מ אזי מ"מ אזי רקבוצה הסגורה המינימלית ב

 $\mathbb{R}$  טענה:  $\sigma$ ־אלגברה בורלית הינה  $\sigma$ ־אלגברה מעל

 $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$  מסקנה: תהא  $f\in C\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי איי מיימ על

 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$  טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות

 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$  משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עבורם

 $(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)\Longleftrightarrow (F_X=F_Y)$  מינה: יהיו X,Y מ"מ אזי מינה:

 $\mathbb{P}\left(X=t
ight)>0$  אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי  $t\in\mathbb{R}$  המקיים  $A_X=\{t\in\mathbb{R}\mid X$  אטום של  $t\}$  אטום יהי X מ"מ אזי אוי קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי אוי קבוצת האטומים: יהי

 $\lim_{t\to\infty}F_X\left(t\right)=1$  • .  $\lim_{t\to-\infty}F_X\left(t\right)=0$  • מונוטונית עולה.  $F_X$  •

 $\lim_{t\to a^+} F_X(t) = F_X(a) \bullet$ 

 $|A_X| \leq leph_0$ טענה: יהי X מ"מ אזי

 $\sigma(\mathcal{F}_0)\subset\mathcal{F}$  אינסופיים עבורה  $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}$  אינסופיים

 $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{F}$  אוי הפתוחות אזי המכילה את את המכילה מעל המכילה אזי  $\sigma$ 

A אוי הינה  $\sigma$  הינה  $\sigma$  הינה הינה G ותהא אוי  $A\subseteq\Omega$  ותהא G אוי הינה  $\sigma$  אלגברה מעל  $\sigma$ 

```
\mathbb{.P}\left(X\in A_X
ight)=1 משתנה מקרי משתנה מקרי משתנה מקרי משתנה מקרי
                                                   \int_{-\infty}^{\infty}f\left(x
ight)\mathrm{d}x=1 וכן f\geq0 וכן המקיימת למקוטעין רציפה למקוטעין רציפה לf:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
                             משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי עבורו קיימת f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} עבורו קיימת עבורה לכל משתנה מקרי משתנה מקרי משתנה מקרי איימת
                                                                                                                         \mathbb{P}\left(a < X < b\right) = \int_{a}^{b} f\left(x\right) dx
                                                                                        X סימון: יהי א מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של
                                                                                         \mathbb{P}(X \in A_X) = 0טענה: יהי X מ"מ אזי (X רציף)
                                                        0 < \mathbb{P}\left(X \in A_X 
ight) < 1 הערה: לא כל משתנה מקרה הוא בדיד או רציף, ובמקרה
                                                                                                                              טענה: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                                                                                  \mathbb{P}(X=t)=0 אזי t\in\mathbb{R} יהי
                                                                                                                      .F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx \bullet
                                                            .F_{X}^{\prime}\left(a
ight)=f_{X}\left(a
ight) אזי f_{X}\in C\left(a
ight) עבורה a\in\mathbb{R} איזי ותהא X מ"מ רציף ותהא
               .F_{X}\left(x_{p}
ight)=p אוי x_{p}\in\mathbb{R} אוי איז p\in(0,1) ויהי ויהי אשר אשר עולה ממש עד אשר F_{X} עולה ממש עד אשר אוי יהי אוי יהי איז מ"מ עבורו
                                                x_p = \sup\{t \mid F_X(t) \leq p\} אזי p \in (0,1) עולה ויהי עבורו F_X עולה מ"מ עבורו הדק: יהי
טענה: תהא \lim_{x \to \infty} F\left(x
ight) = 1 וכן \lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 0 אזי קיים מ"מ F: \mathbb{R} 	o \mathbb{R} אונוטונית עולה רציפה מימין עבורה
                                                                                                          F_X = F עבורו (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות
                     אזי \lim_{x \to \infty} F\left(x\right) = 1 וכן \lim_{x \to -\infty} F\left(x\right) = 0 אזי אונוטונית עולה רציפה מימין עבורה F: \mathbb{R} \to \mathbb{R} אזי F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}
                                                                                                                         .X^{\star}\left(s\right) = \sup\left\{t \mid F\left(t\right) \leq s\right\}
.ig((0,1)\,,\mathfrak{B}_{(0,1)},\lambdaig) אזי X^\star מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה F\left(x
ight)=\lim_{x	o-\infty}F\left(x
ight)=0 מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה בייסענה: תהא
      .F_{X^{\star}}=F אזי \lim_{x	o\infty}F\left(x
ight)=1 וכן \lim_{x	o\infty}F\left(x
ight)=0 אזי \lim_{x	o\infty}F\left(x
ight)=0 משפט: תהא
                                                                                                                     אזי p \in [0,1] אזי אוי ברנולי: יהי
                                          1-p וסיכוי כישלון וסיכוי בעל המשתנה אינדיקטור להצלחה להצלחה בניסוי בעל הצלחה אינדיקטור X
                                                                              \mathbb{.P}\left(X=0
ight)=1-p , \mathbb{P}\left(X=1
ight)=p :פונקציית הסתברות
                                                                                                                               X \sim \mathrm{Ber}(p) סימור:
                                                                                                  אזי n \in \mathbb{N}_+ ויהי p \in [0,1] אזי התפלגות בינומית:
                       . לניסוי, p מספר הניסויים שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בסיכוי הצלחה אמקרי: X מספר הניסויים שצלחו בביצוע n
                                                     \mathbb{P}\left(X=k
ight)=inom{n}{k}p^{k}\left(1-p
ight)^{n-k} אזי k\in\{0,\ldots,n\} יהי
                                                                                                                           X \sim \text{Bin}(n,p) :סימון
                                                                                                                אזי p \in [0,1] יהי אומטרית: אומטרית:
                     . המשתנה המקרי: X מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל.
                                                                     .
<br/>P(X=k)=\left(1-p\right)^{k-1}pאזי אזי יהי יהי הסתברות: • פונקציית הסתברות:
                                                                                                                              X \sim \operatorname{Geo}(p) :סימון
                                                                                                                      התפלגות פואסונית: יהי \lambda>0 אזי
                                    \lambda זמן זה בפרק אירועים בפרק אמן מחן בפרק פרק מספר האירועים האירועים שקרו פרק מחן המשתנה מספר אירועים פרק מחן ספר יש
                                                                               \mathbb{P}\left(X=k
ight)=e^{-\lambda}rac{\lambda^{k}}{k!} אזי k\in\mathbb{N} יהי הסתברות: •
                                                                                                                               X\sim \mathrm{Poi}\left(\lambda
ight) סימון: •
```

 $\mathbb{P}\left(X_n=k
ight) \xrightarrow[n o \infty]{} \mathbb{P}\left(X=k
ight)$  אזי  $k \in \mathbb{N}$  אזי מ"מ יהי  $X \sim \mathrm{Poi}\left(\lambda
ight)$  מ"מ יהי  $X_n \sim \mathrm{Bin}\left(n, rac{\lambda}{n}
ight)$  יהי  $\lambda > 0$  יהי  $\lambda > 0$ t אמן, כך שלכל  $N_t$  המ"מ המים המיים מספר האירועים בלתי שקרו כך או המ"מ לונים שקרו עד אמן כך או כך או או און או או אוויים או אוויים שקרו עד אמן אוויים א . אמן זמן ליחידת האירועים ממוצע א $\lambda$ באשר א $N_{t+s}-N_s\sim\operatorname{Poi}\left(\lambda t\right)$ וכן וכן  $N_0=0$ בפרט בפרט

התפלגות אחידה: יהיו a < b אזי

- (a,b) בחירה אקראית של נקודה בקטע . (a,b) בחירה אקראית המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקטע .  $F_X(t)=\left\{egin{array}{ll} 0 & t\leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & t\in(a,b) \\ 1 & t\geq b \end{array}\right.$  פונקציית צפיפות:  $f_X(t)=\left\{egin{array}{ll} \frac{1}{b-a} & t\in(a,b) \\ 0 & \mathrm{else} \end{array}\right.$

התפלגות מעריכית: יהי  $\lambda > 0$  אזי

```
\mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a
ight)=\mathbb{P}\left(X>b
ight) אזי A,b>0 ויהיו X\sim \mathrm{Exp}\left(\lambda
ight) יהי \lambda>0 יהי \lambda>0
X\sim 	ext{Exp}\left(\lambda
ight) עבורו \lambda>0 אזי קיים \forall a,b>0.\mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a
ight)=\mathbb{P}\left(X>b
ight) עבורו עבורו טענה: יהי
                                                                         \operatorname{Exp}(\lambda) אמן מתפלג זמן מופעים ליחידת עם קצב א תהליך פואסון עם הבינמופעי של הבינמופעי של איז פואסון עם איז איז פואסון עם די פואסון איז איז הימן הבינמופעי של מופעים איז פואסון עם הבינמופעי של הבינמופעי של האיז פואסון עם האיז פואסון עם האיז פואסון איז פואסון איי
                                                 f_{\varphi\circ X}\left(t
ight)=rac{f_X\left(arphi^{-1}(t)
ight)}{arphi'\left(arphi^{-1}(t)
ight)} איז מ"מ רציף ותהא \varphi:\mathbb{R}	o\mathbb{R} על, עולה ממש וגזירה אזי מ"מ רציף ותהא \varphi:\mathbb{R}	o\mathbb{R} על, יורדת ממש וגזירה אזי \varphi:\mathbb{R}	o\mathbb{R} ותהא \varphi:\mathbb{R}	o\mathbb{R} על, יורדת ממש וגזירה אזי מ"מ רציף ותהא מ"מ רציף ותה
                                                                                                                                         X^{-} = \min\{X, 0\} , X^{+} = \max\{X, 0\} מ"מ אזי X^{+} = \max\{X, 0\}
                                                                                                                                                  \mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{c \in A_X} c \cdot \mathbb{P}\left(X = c
ight) תוחלת: יהי X מ"מ בדיד אזי
                                                                                                                                                                  \mathbb{E}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[X^{+}
ight]+\mathbb{E}\left[X^{-}
ight] טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי
                                                                                                                                                               משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו \mathbb{E}\left[X\right] סופי.
                                                   . orall b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}\left(X > a+k
ight) = \mathbb{P}\left(X < a-k
ight) משתנה מקרי סימטרי: יהי a \in \mathbb{R} אזי מ"מ a \in \mathbb{R}
                                                                                                 \mathbb{E}\left[X
ight]=a אזי חיהי a\in\mathbb{R} אינטגרבילי סימטרי מ"מ בדיד מ"מ מ"מ בדיד a\in\mathbb{R}
                                       \mathbb{E}\left[aX+b
ight]=a\mathbb{E}\left[X
ight]+b אינטגרבילי איזי a,b\in\mathbb{R} ויהי ויהי טענה לינאריות התוחלת: יהיו
                                                                                                                                  X < X משתנה מקרי שולט: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט על אם משתנה מקרי שולט:
                                                                                                                      \mathbb{E}\left[X
ight]>\mathbb{E}\left[Y
ight] אזי בדידים אזי X>Y יהיו אינה מונוטוניות התוחלת: יהיו
                                                                                                                                                                                                                                                                  תוחלת: יהי X מ"מ אזי
                                                                                                                                      \mathbb{E}[X^+] = \sup \{ \mathbb{E}[Y] \mid (0 \le Y \le X^+) \land (Y^-) \} \bullet
                                                                                                                         \mathbb{E}[X^-] = -\sup \{ \mathbb{E}[Y] \mid (0 \le Y \le -X^-) \land (Y) \} \bullet
                                                                                                                                                                                                                                \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-] \bullet
                                                                                                                                                                               משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו \mathbb{E}\left[X
ight] סופי.
                                                      \mathbb{E}\left[aX+b
ight]=a\mathbb{E}\left[X
ight]+b טענה לינאריות התוחלת: יהיו a,b\in\mathbb{R} ויהי והי לינאריות התוחלת:
                                                                                                                                             \mathbb{E}\left[X
ight] \geq \mathbb{E}\left[Y
ight] מ"מ אזי X \geq Y יהיו התוחלת: התוחלת:
                                                                   \mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{0}^{\infty}\left(1-F_{X}\left(t
ight)
ight)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\left(0-F_{X}\left(t
ight)
ight)\mathrm{d}t טענה נוסחת הזנב: יהי
                                                                                                                                                                      \mathbb{E}\left[X
ight] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X\left(t
ight) \mathrm{d}t מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                           F_{Y}>F_{X} משתנה מקרי שולט סטוכסטית איי X,Y מ"מ אזי מ"מ אוי שולט סטוכסטית על א מטוכסטית: יהיו
                                                                                                      X טענה: יהיו X,Y מ"מ עבורם Y \subseteq X אזי \mathbb{P}(Y \subseteq X) = 1 מ"מ עבורם X,Y יהיו
                                                                                                                                                                                                                                                                     טענה: יהיו X,Y מ"מ
                                                                                                                                                                 \mathbb{E}\left[Y
ight]<\mathbb{E}\left[X
ight] אזי אזי Y טטוכסטית שולט אולט סטוכסטית ש
                                                                                                                                                                                            \mathbb{E}\left[Y\right] < \mathbb{E}\left[X\right] אזי \mathbb{P}\left(Y < X\right) = 1 •
                                                                                                                                                                                              \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] :חיבוריות
                                                                         \mathbb{P}\left(X\geq b
ight)\leq rac{\mathbb{E}[X]}{b} אזי b>0 אינטגרבילי ויהי X\geq 0 מ"מ אינטגרבילי יהי
                              \mathbb{E}\left[arphi\circ X
ight]=\sum_{c\in A_X}arphi\left(c
ight)\cdot\mathbb{P}\left(X=c
ight) אינ מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא arphi מדידה בורל אי
                                                                       \mathbb{E}\left[arphi\circ X
ight]=\int_{-\infty}^{\infty}arphi\left(t
ight)f_{X}\left(t
ight)\mathrm{d}t אזי אזי אזי רציפה ותהא arphiרציפה אינה: יהי א
                                                                                                                                                                               \mathbb{E}\left[X
ight] = \int_0^1 X^\star\left(t
ight) \mathrm{d}t טענה: יהי X מ"מ חסום אזי
                                                                                                                               .
Var (X)=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^{2}
ight] אינטגרבילי אי<br/>נXמ"מ מ"מ אינטגרבילי אי
                                                                                                                                                      \sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} סטיית תקן: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי
                                                                                                                                           .\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}^2\left[X\right] אזי מ"מ אינטגרבילי אזי מ"מ מימ אינטגרבילי אזי
                                                                                                       .\operatorname{Var}\left(aX+b\right)=a^{2}\operatorname{Var}\left(X\right) אזי a,b\in\mathbb{R} ויהיו מ"מ אינטגרבילי ויהיו מ"מ אינטגרבילי ויהיו
                 \mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}\left[X
ight]|\geq a
ight)\leq rac{	ext{Var}(X)}{a^2} אזי a>0 אזי מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי a>0
```

. משך חיים של תהליך הנמשך  $\lambda$  יחידות זמן בממוצע. X

 $.F_{X}\left(t
ight)=\left\{egin{array}{ll} 1-e^{-\lambda t} & t\geq 0 \ 0 & t<0 \end{array}
ight.$  פונקציית התפלגות מצטברת: ullet

 $f_X\left(t
ight) = \left\{egin{array}{ll} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \ 0 & t < 0 \end{array}
ight.$ פונקציית צפיפות:  $t \geq 0$ 

 $M_X\left(t
ight)=\mathbb{E}\left[e^{tX}
ight]$  המוגדרת  $M_X:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  המ"מ אזי X מ"מ יודרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי  $M_X:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  אזי  $M_X=0$  וכן  $M_X^{(n)}\left(0
ight)=\mathbb{E}\left[X^n\right]$  אזי  $M_X\in C^n\left(I\right)$  אזי  $M_X=0$  מענה: יהי X מ"מ ויהי X קטע עבורו X=0 וכן X=0 קיים וסופי על X=0 אזי X=0 מתכנס לכל X=0 מענה: יהי X=0 מ"מ ויהי X=0 עבורו X=0 קיים וסופי על X=0 אזי X=0 אזי X=0 עבורו X=0 עבורו X=0 קיים וסופי על X=0 אזי X=0 אזי X=0