פונקציית הסתברות נקודתית: תהא Ω קבוצה אזי פונקציה $\mathbb{P}:\Omega\to[0,1]$ עבורה $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)=1$.

מרחב הסתברות (מ"ה): תהא Ω קבוצה ותהא $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אזי $(\Omega,\mathbb{P})$.

מרחב מדגם: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מרחב הסתברות בדיד: מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\le\aleph_0$.

מרחב הסתברות סופי: מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\in\mathbb{N}$.

הערה: בקורס זה כל מרחבי ההסתברות הינם בדידים.

סימון: תהא A קבוצה אזי $2^A=\mathcal{P}(A)$.

מאורע: יהי $(\mathbb{P},\Omega)$ מרחב הסתברות אזי $A\subseteq\Omega$.

הסתברות מאורע: יהי $(\mathbb{P},\Omega)$ מרחב הסתברות ויהי A מאורע אזי $\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $[n]=\{1,\ldots,n\}$.

משפט: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו A,B מאורעות אזי

- משלים: $\mathbb{P}(A^{\mathcal{C}})=1-\mathbb{P}(A)$.
- אדטיביות: $\mathbb{P}(A\uplus B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A\backslash B)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B\cap A)$.
- מונוטוניות: $(A\subseteq B)\Longrightarrow(\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(B))$.
- הכלה והדחה: $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

מסקנה: תהא $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אזי $\mathbb{P}(\varnothing)=0$.

משפט סיגמא־אדטיביות: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right)=\sum_{i=1}^\infty\mathbb{P}(E_i)$.

הכלה והדחה כללית: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{\varnothing\ne I\subseteq[n]}\left((-1)^{|I|+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\right)$.

הכלה והדחה סימטרית: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות עבורם $\forall I\subseteq[n].(|I|=k)\Rightarrow(\mathbb{P}(A_I)=a_k)$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\sum_{k=1}^n\left((-1)^{k+1}\binom{n}{k}a_k\right)$.

מרחב הסתברות אחיד: מרחב הסתברות סופי $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $\forall A\in 2^\Omega.\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

תמורה מקרית/סידור אקראי: המרחב האחיד על S_n.

משפט חסם האיחוד: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cup B)\le\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.

מסקנה: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\le\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(A_i)$.

מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)\le\sum_{i=1}^\infty\mathbb{P}(A_i)$.

אי שוויונות בונפרוני: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות ויהי $1\le k\le n$ אזי

- $k\in\mathbb{N}_{odd}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\le\sum_{i=1}^k(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.
- $k\in\mathbb{N}_{even}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)\ge\sum_{i=1}^k(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.

משפט רציפות פונקציית ההסתברות: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות אזי

- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)$.
- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\right)$.

פונקציית גיבוב/hash: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ אזי $h:[n]\to[m]$.

התנגשות: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ תהא $h:[n]\to[m]$ פונקציית גיבוב אזי $i,j\in[n]$ שונים עבורם $h(i)=h(j)$.

פרדוקס יום ההולדת: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ תהא $h:[n]\to[m]$ פונקציית גיבוב אזי $\frac{n(n-1)}{2m}\ge\mathbb{P}(\text{התנגשות})\ge1-e^{-\frac{n(n-1)}{2m}}$.

מספר ראמזי: נגדיר $R:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך $R(t)=\min\{n\mid \text{בכל צביעה של } K_n \text{ בשני צבעים יש } K_t \text{ מונוכרומטית}\}$.

משפט: יהי $t\in\mathbb{N}_+$ אזי $2^{\frac{t-3}{2}}<R(t)\le c\cdot\frac{4^t}{\sqrt{t}}$.

פונקציית הסתברות מותנית: יהי F מאורע המקיים $\mathbb{P}(F)>0$ אזי $\mathbb{P}(\omega\mid F)=\begin{cases}\frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(F)} & \omega\in F\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

טענה: פונקציית הסתברות מותנית הינה פונקציית הסתברות.

מרחב הסתברות מותנה: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $F\in 2^\Omega$ אזי $(\Omega,\mathbb{P}(\cdot\mid F))$.

טענה: מרחב הסתברות מותנית הוא מרחב הסתברות.

משפט: יהיו E,F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E\mid F)=\frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

כלל השרשרת: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B)$.

כלל השרשרת: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)=\mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^n\mathbb{P}\left(A_i\mid\bigcap_{j=1}^{i-1}A_j\right)$.

נוסחת ההסתברות השלמה: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}\left(A\mid B^{\mathcal{C}}\right)\mathbb{P}\left(B^{\mathcal{C}}\right)$.

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$ אזי $\mathbb{P}(B)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B\mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

כלל בייס: יהיו E,F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E\mid F)=\frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F|E)}{\mathbb{P}(F)}$.

טענה: יהיו A,B מאורעות עבורם $\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B)>0$ אזי $\mathbb{P}((\cdot\mid B)\mid C)=\mathbb{P}(\cdot\mid B\cap C)\mathbb{P}(C\mid B)$.

מאורע מחזק: יהי B מאורע אזי מאורע A עבורו $\mathbb{P}(A)>0$ המקיים $\mathbb{P}(B\mid A)>\mathbb{P}(B)$.

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות A,B המקיימים $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

סימון: $AB=A\cap B$.

טענה: יהי A מאורע אזי (A ב"ת עם עצמו)$\iff(\mathbb{P}(A)\in\{0,1\})$.

טענה: יהיו A,B מאורעות זרים וב"ת אזי $(\mathbb{P}(A)=0)\vee(\mathbb{P}(B)=0)$.

טענה: יהיו A,B מאורעות התב"ש

- A,B בלתי תלויים.
- $A^{\mathcal{C}},B$ בלתי תלויים.
- $A^{\mathcal{C}},B^{\mathcal{C}}$ בלתי תלויים.
- $A,B^{\mathcal{C}}$ בלתי תלויים.

אי תלות בזוגות: מאורעות $A_1\ldots A_n$ המקיימים $\forall i\neq j.\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

אי תלות בזוגות: מאורעות $\{A_i\}_{i\in I}$ המקיימים $\forall i\neq j.\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות $A_1\ldots A_n$ המקיימים $\forall I\subseteq[n].\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$.

הכללה: מאורעות $\{A_i\}_{i\in I}$ המקיימים $\forall J\subseteq I.(|J|\in\mathbb{N}_+)\Longrightarrow\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\right)$.

הערה: נסמן זמנית $\left(A^1=A\right)\wedge\left(A^{-1}=A^{\mathcal{C}}\right)$.

טענה: ($A_1\ldots A_n$ בלתי תלויים)$\iff\left(\forall\varepsilon\in\{\pm1\}^n.\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^{\varepsilon_i}\right)=\prod_{i=1}^n\mathbb{P}\left(A_i^{\varepsilon_i}\right)\right)$.

מסקנה: יהיו $A_1\ldots A_n,B_1$ מאורעות ב"ת אזי כל איחוד/חיתוך/משלים של $A_1\ldots A_n$ ב"ת עם B_1.

פונקציית הסתברות מכפלה: יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1),(\Omega_2,\mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $\mathbb{P}_{\Omega_1\times\Omega_2}((\omega_1,\omega_2))=\mathbb{P}_1(\omega_1)\mathbb{P}_2(\omega_2)$.

טענה: פונקציית הסתברות מכפלה היא פונקציית הסתברות.

מרחב מכפלה: יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1),(\Omega_2,\mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $(\Omega_1,\mathbb{P}_1)\otimes(\Omega_2,\mathbb{P}_2)=(\Omega_1\times\Omega_2,\mathbb{P}_{\Omega_1\times\Omega_2})$.

טענה: מרחב מכפלה הוא מרחב הסתברות.

טענה: יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1)\ldots(\Omega_n,\mathbb{P}_n)$ מ"ה אזי $\bigotimes_{i=1}^n(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ מרחב הסתברות.

מלבן: מאורע $C\subseteq\Omega_1\times\Omega_2$ המקיים $\exists A\subseteq\Omega_1.\exists B\subseteq\Omega_2.C=A\times B$.

טענה: יהי $A\times B\subseteq\Omega_1\times\Omega_2$ מלבן אזי $\mathbb{P}(A\times B)=\mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B)$.

סימון: יהי $\bigotimes_{i=1}^n(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ מ"ה ויהי $A\subseteq\Omega_i$ אזי $\overline{A}=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{i-1}\times A\times\Omega_{i+1}\times\ldots\times\Omega_n$.

מסקנה: יהי $A\subseteq\Omega_i$ ויהי $B\subseteq\Omega_j$ אזי $\overline{A},\overline{B}$ ב"ת מעל $\bigotimes_{i=1}^n(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$.

טענה: יהי $A\subseteq\Omega_i$ אזי $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=\mathbb{P}_i(A)$.

מסקנה: $\mathbb{P}((\omega_1\ldots\omega_n))=\prod_{i=1}^n\mathbb{P}_i(\omega_i)$.

משפט: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות עבורם $\forall i\in[n].A_i\subseteq\Omega_i$ אזי $\overline{A_1}\ldots\overline{A_n}$ ב"ת.

מאורעות בלתי תלויים בהתנייה: יהי $\mathbb{P}(C)>0$ אזי מאורעות A,B עבורם $\mathbb{P}(A\cap B\mid C)=\mathbb{P}(A\mid C)\mathbb{P}(B\mid C)$.

n ניסויי ברנולי: יהי $0\le p\le1$ נגדיר $f\in[0,1]^{\{0,1\}}$ כך $f(k)=\begin{cases}p & k=1\\ 1-p & k=0\end{cases}$ אזי $\bigotimes_{i=1}^n(\{0,1\},f)$.

טענה: נסמן $M_n=$"הרצף הארוך ביותר של 1 ב־n ניסויי ברנולי" אזי $\left(M_n-\log_{\frac{1}{p}}(n)\right)\to0$.

מטריצת שכנויות: יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון אזי $A\in M_{|V|}(\{0,1\})$ המקיים $A_{i,j}=\begin{cases}1 & \{i,j\}\in E\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

גרפים על n קודקודים: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\{(A_{i,j})_{1\le i<j\le n}\mid A_{i,j}\in\{0,1\}\right\}$.

הימצאות קשת בהתסברות p: יהי $p\in[0,1]$ אזי $\mathbb{P}(\{\omega\in\text{גרפים על } n \text{ קודקודים}\mid\omega_{i,j}=1\})=p$.

גרף מקרי: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $p\in[0,1]$ אזי $G(n,p)=(\text{גרפים על } n \text{ קודקודים},\text{הימצאות קשת בהתסברות } p)$.

טענה: יהי $\omega\in G(n,p)$ אזי $\mathbb{P}(\omega)=p^{|E_\omega|}\cdot(1-p)^{\binom{n}{2}-|E_\omega|}$.

מסקנה: גרף מקרי הינו מרחב הסתברות.

משתנה מקרי (מ"מ): יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מ"ה בדיד אזי $f\in\Omega\to S$.

סימון: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{P}(X=s)=\mathbb{P}\left(X^{-1}(\{s\})\right)$.

אינדיקטור: יהי $A\subseteq\Omega$ מאורע אזי $\mathbb{1}_A\in\{0,1\}^{\Omega}$ המוגדרת $\mathbb{1}_A(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

טענה: $\left(\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}\right) \wedge \left(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\uplus B}\right)$.

תומך: תהא $f : S \to \mathbb{R}$ אזי $\mathrm{supp}\left(f\right) = \left\{s \in S \mid f\left(s\right) \neq 0\right\}$.

התפלגות בדידה: $\mu : S \to [0,1]$ המקיימת $\left(\sum_{s\in \mathrm{supp}(\mu)} \mu\left(s\right) = 1\right) \wedge \left(\left|\mathrm{supp}\left(\mu\right)\right| \leq \aleph_0\right)$.

התפלגות של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\mu : \mathrm{Im}\left(X\right) \to [0,1]$ המוגדרת $\mu_X\left(s\right) = \mathbb{P}\left(X = s\right)$.

טענה: ההתפלגות של משתנה מקרית היא התפלגות בדידה.

סימון: יהי X מ"מ אזי $\mathrm{supp}\left(X\right) = \mathrm{supp}\left(\mu_X\right)$.

משתנים מקריים שווים: $X, Y \in S^{\Omega}$ המקיימים $\forall\omega \in \Omega.X\left(\omega\right) = Y\left(\omega\right)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X, Y מ"מ עם אותה תמונה המקיימים $\forall s \in S.\mu_X\left(s\right) = \mu_Y\left(s\right)$.

סימון: יהיו X, Y מ"מ שווי התפלגות אזי $X \sim Y$.

התפלגות אחידה בדידה: יהיו $a, b \in \mathbb{Z}$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\mu\left(k\right) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & k\in[a,b]\cap\mathbb{Z} \\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג אחיד בדיד אזי $X \sim \mathrm{Uni}\left(a,b\right)$.

סימון: תהא μ התפלגות אזי $\left(\mu = \begin{cases} x_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & p_n\end{cases}\right) \equiv \left(\mu\left(k\right) = \begin{cases} p_1 & k=x_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & k=x_n \\ 0 & \text{else}\end{cases}\right)$.

התפלגות ברנולי: יהי $p \in [0,1]$ אזי $\mu \in [0,1]^{\{0,1\}}$ המקיימת $\mu = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p\end{cases}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג ברנולי אזי $X \sim \mathrm{Ber}\left(p\right)$.

התפלגות גאומטרית: יהי $p \in [0,1]$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}_+}$ המקיימת $\mu\left(k\right) = \left(1-p\right)^{k-1}p$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג גאומטרית אזי $X \sim \mathrm{Geo}\left(p\right)$.

התפלגות בינומית: יהי $p \in [0,1]$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\mu\left(k\right) = \binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג בינומית אזי $X \sim \mathrm{Bin}\left(n,p\right)$.

התפלגות פואסון: יהי $\lambda > 0$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(k\right) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג פואסונית אזי $X \sim \mathrm{Pois}\left(\lambda\right)$.

משפט קירוב בינום־פואסון: יהי $k \in \mathbb{N}$ ויהי $\lambda > 0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\mu_{\mathrm{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)}\left(k\right) = \mu_{\mathrm{Pois}(\lambda)}\left(k\right)$.

התפלגות היפרגאומטרית: יהיו $r, n, m \in \mathbb{N}$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(k\right) = \frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג היפרגאומטרית אזי $X \sim \mathrm{HG}\left(n,m,r\right)$.

התפלגות בינומית שלילית: יהי $r \in \mathbb{N}$ וכן $p \in [0,1]$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(k\right) = \binom{k-1}{r-1}p^r\left(1-p\right)^{k-r}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג בינומית שלילית אזי $X \sim \mathrm{NB}\left(r,p\right)$.

התפלגות היפרגאומטרית שלילית: יהיו $r, k, m \in \mathbb{N}$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(x\right) = \frac{\binom{x-1}{k-1}\binom{m-x}{r-k}}{\binom{m}{r}}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי $X \sim \mathrm{NHG}\left(r,k,m\right)$.

טרנספורמציה של משתנה מקרי: תהא $X \in A^{\Omega}$ ותהא $f \in B^A$ אזי $f\left(X\right) = f \circ X$.

משפט: יהי X מ"מ ויהי $f \in B^A$ אזי $\mu_{f(X)}\left(k\right) = \sum_{r\in f^{-1}(\{k\})}\mu_X\left(r\right)$.

מסקנה: יהי X מ"מ ויהי $f \in B^A$ אזי $\mathrm{supp}\left(f\left(X\right)\right) = f\left(\mathrm{supp}\left(X\right)\right)$.

זוג משתנים מקריים: יהיו $X : \Omega \to A$ וכן $Y : \Omega \to B$ משתנים מקריים אזי $\left(X,Y\right)$.

התפלגות משותפת: יהי $\left(X,Y\right)$ זוג מ"מ אזי $\mu_{X,Y}\left(x,y\right) = \mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right)$.

הכללה: יהיו $X_1 \ldots X_n$ מ"מ אזי $\mu_{X_1\ldots X_n}\left(x_1\ldots x_n\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\right)$.

התפלגויות שוליות: יהי $\left(X,Y\right)$ זוג מ"מ אזי μ_X, μ_Y.

טענה: $\mu_X\left(x\right) = \sum_{y\in S}\mu_{X,Y}\left(x,y\right)$.

משתנים מקריים בלתי תלויים: $\left(X,Y\right)$ זוג מ"מ עבורו $\mu_{X,Y} = \mu_X\mu_Y$.

הכללה: $X_1 \ldots X_n$ מ"מ המקיימים $\mu_{X_1\ldots X_n} = \mu_{X_1}\cdot\ldots\cdot\mu_{X_n}$.

משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות: $X_1 \ldots X_n$ מ"מ המקיימים X_i, X_j ב"ת לכל $i \neq j$.

משפט: יהיו $X_1 \ldots X_n$ מ"מ ב"ת ויהיו $E_1 \ldots E_n$ קבוצות אזי $\left\{X_i \in E_i\right\}$ מאורעות ב"ת.

משפט: יהיו X, Y מ"מ ב"ת ויהיו f, g טרנספורמציות של מ"מ אזי $f\left(X\right), g\left(Y\right)$ ב"ת.

משפט: ($A_1 \ldots A_n$ מאורעות ב"ת)$\Longleftrightarrow$($\mathbb{1}_{A_1}\ldots\mathbb{1}_{A_n}$ מ"מ ב"ת).

טענה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי קיים מ"ה $\left(\Omega,\mathbb{P}\right)$ עבורו קיימים X, Y מ"מ ב"ת המקיימים $\left(\mu_X = \mu_1\right) \wedge \left(\mu_Y = \mu_2\right)$.

קונבולוציה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי $\left(\mu_1 * \mu_2\right)\left(z\right) = \sum_x \mu_1\left(x\right)\mu_2\left(z-x\right)$.

טענה: יהיו μ_1,μ_2 התפלגויות אזי $\mu_1*\mu_2=\mu_2*\mu_1$.

משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי $\mu_{X+Y}=\mu_X*\mu_Y$.

טענה: $\text{Bin}\left(n,p\right)+\text{Bin}\left(m,p\right)\sim\text{Bin}\left(n+m,p\right)$.

מסקנה: $\text{Bin}\left(n,p\right)\sim\sum_{i=1}^{n}\text{Ber}\left(p\right)$.

טענה: $\text{Pois}\left(\lambda_1\right)+\text{Pois}\left(\lambda_2\right)\sim\text{Pois}\left(\lambda_1+\lambda_2\right)$.

טענה: $\text{NB}\left(n,p\right)\sim\sum_{i=1}^{n}\text{Geo}\left(p\right)$.

משתנה מקרי מותנה: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $X_{\restriction A}$.

התפלגות מותנית: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction A}}$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction Y=y}}\left(x\right)=\frac{\mu_{X,Y}\left(x,y\right)}{\mu_Y\left(y\right)}$.

סימון: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction Y}}\left(x\mid y\right)=\mu_{X_{\restriction Y=y}}\left(x\right)$.

התפלגות מולטינומית: יהיו $p_1\ldots p_n$ אזי $\mu\in\left[0,1\right]^{\mathbb{N}^n}$ המקיים $\mu\left(k_1\ldots k_n\right)=\binom{n}{k_1\ldots k_n}\prod_{i=1}^{n}p_i^{k_i}$.

התפלגות מצטברת: יהי X מ"מ אזי $F_X:\left[0,1\right]^{\mathbb{R}}$ כך $F_X\left(x\right)=\mathbb{P}\left(X\le x\right)$.

טענה: יהי X מ"מ אזי

- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t\to\infty}F_X\left(t\right)=1$.
- $\lim_{t\to-\infty}F_X\left(t\right)=0$.
- יהי $s\in\text{supp}\left(X\right)$ אזי $\mu_X\left(s\right)=F_X\left(s\right)-\lim_{\varepsilon\to0^+}F_X\left(s-\varepsilon\right)$.

פונקציית ההישרדות: יהי X מ"מ אזי $\lambda_X\left(t\right)=1-F_X\left(t\right)$.

מסקנה: $\text{Geo}\left(1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-p_i\right)\right)\sim\min_{i=1}^{n}\left\{\text{Geo}\left(p_i\right)\right\}$.

פיצול פואסון: יהיו X,Y מ"מ עבורם $X+Y\sim\text{Poiss}\left(\lambda\right)$ וכן $X_{\restriction X+Y=n}\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ אזי

- $Y_{\restriction X+Y=n}\sim\text{Bin}\left(n,1-p\right)$.
- $X\sim\text{Poiss}\left(p\lambda\right)$.
- $Y\sim\text{Poiss}\left(\left(1-p\right)\lambda\right)$.
- X,Y ב"ת.

צימוד בין התפלגויות: יהיו $\mu_1,\mu_2:\left[0,1\right]^S$ התפלגויות אזי התפלגות $\mu:\left[0,1\right]^{S^2}$ המקיימת $\mu_1\left(\omega\right)=\sum_{s\in S}\mu\left(\omega,s\right)$ וכן $\mu_2\left(\omega\right)=\sum_{s\in S}\mu\left(s,\omega\right)$.

צימוד בין משתנים: יהיו X,Y מ"מ אזי זוג מ"מ $\left(X',Y'\right)$ המקיים $\left(X'\sim X\right)\wedge\left(Y'\sim Y\right)$.

טענה: יהי X מ"מ על Ω_1 ויהי Y מ"מ על Ω_2 נגדיר X',Y' מ"מ ב"ת על $\Omega_1\otimes\Omega_2$ כך $X'\left(\omega_1,\omega_2\right)=X\left(\omega_1\right)$ וכן $Y'\left(\omega_1,\omega_2\right)=Y\left(\omega_2\right)$ אזי $\left(X',Y'\right)$ צימוד של X,Y.

התפלגות שולטת סטוכססטית: יהי X מ"מ אזי מ"מ Y המקיים $\mathbb{P}\left(X>t\right)\ge\mathbb{P}\left(Y>t\right)$.

צימוד מונוטוני: יהיו X,Y מ"מ אזי צימוד $\left(X',Y'\right)$ המקיים $\mathbb{P}\left(Y'>X'\right)=0$.

טענה: יהי X מ"מ בעל התפלגות שולטת סטוכססטית בהתפלגות Y אזי קיים צימוד מונוטוני.

מטריקת ההשתנות הכוללת: תהא $\left|S\right|\le\aleph_0$ ויהיו $\mu,\upsilon:\left[0,1\right]^S$ התפלגויות אזי $\delta\left(\mu,\upsilon\right)=\sum_{x\in S}\left|\mu\left(x\right)-\upsilon\left(x\right)\right|$.

למה: מטריקת ההשתנות הכוללת הינה מטריקה.

סימון: יהיו X,Y מ"מ אזי $\delta\left(X,Y\right)=\delta\left(\mu_X,\mu_Y\right)$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\delta\left(X,Y\right)=2\sup_{E\subseteq S}\left|\mathbb{P}\left(X\in E\right)-\mathbb{P}\left(Y\in E\right)\right|$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ ויהי $\left(X',Y'\right)$ צימוד אזי $\delta\left(X,Y\right)=\delta\left(X',Y'\right)\le2\mathbb{P}\left(X'\ne Y'\right)$.

מסקנה: יהיו $X_1\ldots X_{2n}$ מ"מ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{i=n+1}^{2n}X_i\right)\le2\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i\ne Y_i\right)$.

חוק המספרים הקטנים: יהיו $\left\{X_i\sim\text{Ber}\left(p_i\right)\right\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ויהי $T\sim\text{Pois}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)$ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,T\right)\le2\sum_{i=1}^{n}p_i^2$.

חציון של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $m\in\text{supp}\left(X\right)$ המקיים $\left(\mathbb{P}\left(X\ge m\right)\ge\frac{1}{2}\right)\wedge\left(\mathbb{P}\left(X\le m\right)\ge\frac{1}{2}\right)$.

משתנה בעל תוחלת: X מ"מ עבורו $\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)\mathbb{P}\left(\omega\right)$ מתכנס בהחלט.

טענה: יהי X משתנה על מ"ה סופי אזי X בעל תוחלת.

תוחלת: יהי X מ"מ בעל תוחלת אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)\mathbb{P}\left(\omega\right)$.

למה: יהיו X,Y מ"מ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי

- הומוגניות: $\mathbb{E}\left[cX\right]=c\mathbb{E}\left[X\right]$.

- חיבוריות: $\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$.
- מונוטוניות: $(X\le Y)\implies(\mathbb{E}[X]\le\mathbb{E}[Y])$.

מסקנה: יהיו $X_1\dots X_n$ מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]$.

משפט: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{s\in\text{supp}(X)}s\cdot\mu_X(s)$.

טענה: יהי X מ"מ אזי

- $(X\sim\text{Uni}(0,\dots,n))\implies\left(\mathbb{E}[X]=\frac{n}{2}\right)$.
- $(X\sim\text{Ber}(p))\implies(\mathbb{E}[X]=p)$.
- $(X\sim\text{Bin}(n,p))\implies(\mathbb{E}[X]=np)$.
- $(X\sim\text{Geo}(p))\implies\left(\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p}\right)$.
- $(X\sim\text{HG}(n,m,r))\implies\left(\mathbb{E}[X]=\frac{nr}{m}\right)$.
- $(X\sim\text{Pois}(\lambda))\implies(\mathbb{E}[X]=\lambda)$.

משפט: יהי X מ"מ ותהא f טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[f(X)]=\sum_{s\in\text{supp}(X)}f(s)\,\mu_X(s)$.

נוסחאת הזנב: יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}(X)=\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X\ge n)$.

משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

תוחלת מותנית: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X\mid A]=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\,\mathbb{P}(\omega\mid A)$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X\mid A]=\frac{\mathbb{E}[X\cdot\mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}$.

מסקנה: יהיו $X,\mathbb{1}_A$ מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}[X\mid A]=\mathbb{E}[X]$.

נוסחאת התוחלת השלמה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X\mid A]\,\mathbb{P}(A)+\mathbb{E}\left[X\mid A^{C}\right]\mathbb{P}\left(A^{C}\right)$.

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$ ויהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}[X\mid A_i]\,\mathbb{P}(A_i)$.

תוחלת של משתנה מותנה במשתנה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[X\mid Y](\omega)=\mathbb{E}[X\mid Y=Y(\omega)]$.

משפט/נוסחאת ההחלקה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X\mid Y]]=\mathbb{E}[X]$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ ותהא g טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[X\cdot g(Y)\mid Y]=g(Y)\cdot\mathbb{E}[X\mid Y]$.

משתנה בעל מומנט k: מ"מ X המקיים $\mathbb{E}\left[|X|^k\right]<\infty$.

סימון: יהי X משתנה בעל מומנט k אזי $X\in\ell^k$.

מומנט k: יהי $X\in\ell^k$ אזי $\mathbb{E}\left[X^k\right]$.

טענה: יהיו $m<k\in\mathbb{N}$ אזי $\ell^k\subseteq\ell^m$.

אי שיוויון קושי שוורץ: יהיו $X,Y\in\ell^2$ אזי $|\mathbb{E}[XY]|\le\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$.

מסקנה: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\mathbb{E}[X]^2\le\mathbb{E}\left[X^2\right]$.

שונות: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\text{Var}[X]=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$.

טענה: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\text{Var}[X]=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}[X]^2$.

סטיית תקן: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\sigma_X=\sqrt{\text{Var}[X]}$.

משתנה דטרמיניסטי: מ"מ X המקיים $\exists c.\mathbb{P}(X=c)=1$.

למה: יהי $X\in\ell^2$ ויהי a סקלר אזי

- $\text{Var}[X]\ge 0$.
- (X דטרמיניסטי)$\iff(\text{Var}[X]=0)$.
- $\text{Var}[aX]=a^2\text{Var}[X]$.
- $\text{Var}[X+a]=\text{Var}[X]$

פונקציית הפסד: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right]$.

משפט: יהי $X\in\ell^2$ אזי המינימום של פונקציית ההפסד מתקבלת בערך $\mathbb{E}[X]$.

חציון: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{E}[|X-a|]$.

סימון: יהי X מ"מ אזי החציון הוא $\text{Median}(X)$.

ערך אמצעי/Range Mid: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\max|X-a|$.

סימון: יהי X מ"מ אזי הערך האמצעי הוא $\text{MR}(X)$.

שכיח: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{P}(X\ne a)$.

סימון: יהי X מ"מ אזי השכיח הוא $\text{Mode}(X)$.

שונות משותפת: יהיו X,Y מ"מ אזי $\text{Cov}\left[X,Y\right]=\mathbb{E}\left[XY\right]-\mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]$.

משפט: $\text{Var}\left[X+Y\right]=\text{Var}\left[X\right]+2\text{Cov}\left[X,Y\right]+\text{Var}\left[Y\right]$.

טענה: $\text{Cov}\left[X,Y\right]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\left(Y-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right]$.

משתנים בלתי מתואמים: X,Y המקיימים $\text{Cov}\left[X,Y\right]=0$.

משפט: יהיו X,Y ב"ת אזי X,Y בלתי מתואמים.

מסקנה: יהיו X,Y בלתי מתואמים אזי $\text{Var}\left[X+Y\right]=\text{Var}\left[X\right]+\text{Var}\left[Y\right]$.

למה: יהיו X,Y,Z מ"מ ויהיו α,β סקלרים אזי

- $\text{Cov}\left[X,X\right]=\text{Var}\left[X\right]$.
- סימטריות: $\text{Cov}\left[X,Y\right]=\text{Cov}\left[Y,X\right]$.
- בי־לינאריות: $\text{Cov}\left[\alpha X+\beta Y,Z\right]=\alpha\text{Cov}\left[X,Z\right]+\beta\text{Cov}\left[Y,Z\right]$.
- אינווריאנטיות להוספת סקלר: $\text{Cov}\left[X+\alpha,Y\right]=\text{Cov}\left[X,Y\right]$.
- $\left|\text{Cov}\left[X,Y\right]\right|\le\sqrt{\text{Var}\left[X\right]}\sqrt{\text{Var}\left[Y\right]}$.

מקדם המתאם: יהיו X,Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y}=\frac{\text{Cov}\left[X,Y\right]}{\sqrt{\text{Var}\left[X\right]}\sqrt{\text{Var}\left[Y\right]}}$.

למה: יהיו X,Y מ"מ ויהיו a,b סקלרים אזי

- $\left|\rho_{X,Y}\right|\le1$.
- (X,Y בלתי מתואמים)$\Longleftrightarrow\left(\rho_{X,Y}=0\right)$.
- $\left(\rho_{X,Y}=\pm1\right)\Longleftrightarrow\left(Y=aX+b\right)$.

למה: יהי X מ"מ אזי

- $X\sim\text{Uni}\left(\left[n\right]\right)$ אזי $\text{Var}\left[X\right]=\frac{n^{2}-1}{12}$.
- $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ אזי $\text{Var}\left(X\right)=np\left(1-p\right)$.
- $X\sim\text{Pois}\left(\lambda\right)$ אזי $\text{Var}\left(X\right)=\lambda$.
- $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$ אזי $\text{Var}\left(X\right)=\frac{1-p}{p^{2}}$.

פונקציה יוצרת: יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}\left(X\right)=\mathbb{N}$ אזי $g_{X}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{X}\left(n\right)t^{n}$.

טענה: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת אזי

- $g_{X}\left(t\right)$ מתכנס עבור $\left|t\right|\le1$.
- $g_{X}\in C^{\infty}\left(\left(-1,1\right)\right)$.
- יהי $t\in\left[-1,1\right]$ אזי t^{X} מ"מ בעל תוחלת.

משפט: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת אזי $g_{X}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[t^{X}\right]$.

למה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת בעלי פונקציה יוצרת אזי

- $\mu_{X}\left(n\right)=\frac{g_{X}^{\left(n\right)}\left(0\right)}{n!}$.
- $g_{X+Y}=g_{X}\cdot g_{Y}$.
- $\lim_{t\to1^{-}}g_{X}\left(t\right)=g_{X}\left(1\right)=1$.
- נניח כי X בעל מומנט k אזי $\lim_{t\to1^{-}}g_{X}^{\left(k\right)}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1}\left(X-i\right)\right]$.

מסקנה: יהי $X\in\ell^{2}$ בעל פונקציה יוצרת אזי

- $\mathbb{E}\left[X\right]=\lim_{t\to1^{-}}g_{X}'\left(t\right)$.
- $\text{Var}\left[X\right]=\lim_{t\to1^{-}}\left(g_{X}''\left(t\right)+g_{X}'\left(t\right)-\left(g_{X}'\left(t\right)\right)^{2}\right)$.

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_{X}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

טענה: יהי $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ אזי $M_{X}\left(t\right)=\left(1-p+pe^{t}\right)^{n}$.

למה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי

- $M_{X+Y}=M_{X}\cdot M_{Y}$.
- יהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_{X}\in C^{n}\left(I\right)$ אזי $M_{X}^{\left(n\right)}\left(0\right)=\mathbb{E}\left[X^{n}\right]$.

מסקנה: יהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_{X}\in C^{\infty}\left(I\right)$ אזי $M_{X}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{E}\left[X^{n}\right]}{n!}t^{n}$.

אי־שוויון מרקוב: יהי X מ"מ אי שלילי ויהי $a>0$ אזי $\mathbb{P}\left(X\ge a\right)\le\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{a}$.

מסקנה: תהא $f\in\left[0,\infty\right)^{\mathbb{R}}$ עולה ויהי X מ"מ עבורו $f\left(X\right)$ בעל תוחלת אזי $\mathbb{P}\left(X\ge t\right)\le\frac{\mathbb{E}\left[f\left(X\right)\right]}{f\left(t\right)}$.

אי־שוויון צ'בישב: יהי $X\in\ell^{2}$ ויהי $b>0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\ge b\right)\le\frac{\text{Var}\left[X\right]}{b^{2}}$.

סימון: יהיו $X_1 \ldots X_n$ מ"מ אזי $\mu = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$.

טענה: יהיו $X_1 \sim \ldots \sim X_n$ מ"מ בלתי מתואמים בזוגות עם תוחלת משותפת μ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right| \geq b\right) \leq \frac{n\sigma_1^2}{b^2}$.

אי־שוויון צ'רנוף: יהיו $\{X_i \sim \text{Ber}(p_i)\}_{i=1}^{n}$ אזי $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq (1+t)\mu\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2+t}\mu\right)$.

הכללה: יהי X מ"מ ויהי $s \in \mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{M_X(s)}{e^{sa}}$.

פונקציה קמורה: יהי I קטע אזי $\varphi \in \mathbb{R}^I$ עבורה $\varphi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$. $\forall x, y \in I. \forall \lambda \in [0,1]$.

טענה: תהא $\varphi \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה ויהיו $x < y < z$ אזי $\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}$.

מסקנה: תהא $\varphi \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $\varphi \in C((a,b))$.

למה: תהא $\varphi \in \mathbb{R}^I$ קמורה ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $(\varphi(x_0) = ax_0 + b) \wedge (\forall x \in I. \varphi(x) \geq ax + b)$.

אי־שוויון ינסן: יהי X מ"מ בעל תוחלת ותהא $\varphi \in \mathbb{R}^I$ קמורה עבורה $\varphi(X)$ בעל תוחלת אזי $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$.

אי־שוויון הממוצעים: יהיו $a_1 \ldots a_n > 0$ אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$.

אי־שוויון המשולש: יהי X מ"מ אזי $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת שקולי התפלגות עם תוחלת μ אזי $\forall \delta > 0. \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהי $X \in \ell^1$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon, \delta > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$ ולכל $\{X_i \sim X\}_{i=1}^{n}$ מ"מ בלתי מתואמים מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) < \varepsilon$.

מסקנה: יהי $X \sim \text{Bin}(n,p)$ ויהי $\delta > 0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \delta\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$.

למה: יהי $x \in [0,1]$ יהי $X \sim \text{Bin}(n,p)$ ויהי $\delta > 0$ אזי $\sup_{x \in [0,1]} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

פולינום ברנשטיין: יהיו $k < n \in \mathbb{N}$ אזי $B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

הגדרה: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.

טענה: $Q_n(t) \in \mathbb{R}_n[x]$.

משפט: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $\forall \varepsilon > 0. \exists n \in \mathbb{N}. \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - Q_n(t)| \leq \varepsilon$.

החוק החזק של המספרים הגדולים: יהי $X \in \ell^4$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon, \delta > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N > N_0$ ולכל $\{X_i \sim X\}_{i=1}^{N}$ מ"מ ב"ת מתקיים $\mathbb{P}\left(\max_{n \in \{N_0 \ldots N\}} \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) < \varepsilon$.

פונקציית צפיפות רציפה: $f : I \to [0,1]$ רציפה המקיימת $\int_I f(x)\,dx = 1$.

הסתברות רציפה: תהא $f : I \to [0,1]$ פונקציית צפיפות ותהא $[a,b] \subseteq I$ אזי $\mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx$.

משנה מקרי רציף: מ"מ X עבורו קיימת פונקצית צפיפות $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ עבורה $\forall E \subseteq \mathbb{R}. \mathbb{P}(X \in E) = \int_E f(x)\,dx$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת: יהי X מ"מ רציף אזי $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

משתנה מקרי אחיד רציף: מ"מ רציף $X : I \to \mathbb{R}$ עבורו $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|I|} & x \in I \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

תוחלת רציפה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$.

מומנט רציף: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X^p] = \int_{\mathbb{R}} x^p f(x)\,dx$.

התפלגות נורמלית: יהיו $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2$ אזי $f \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

סימון: יהי Z מ"מ רציף עבורו $f(x)$ מתפלג נורמלית אזי $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$.

גאוסיאן: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

טענה: יהי Z מ"מ רציף עם פונקציית צפיפות $\phi(x)$ אזי $Z \sim N(0,1)$.

הגדרה: יהי $Z \sim N(0,1)$ מ"מ רציף אזי $\Phi(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt$.

טענה: יהי $t \in \mathbb{R}$ אזי

- $(\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1) \wedge (\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0)$.
- $(\Phi$ עולה ממש$) \wedge (\Phi > 0) \wedge (\Phi \in C(\mathbb{R}))$.
- $\Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$.

הגדרה: $(\Phi(\infty) = 1) \wedge (\Phi(-\infty) = 0)$.

מסקנה: יהי $Z \sim N(0,1)$ מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \phi(t)\,dt$.

משתנה מתוקנן: $X \in \ell^2$ המקיים $(\mathbb{E}[X] = 0) \wedge (\text{Var}[X] = 1)$.

תקנון: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\widehat{X}=\frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma}$.

טענה: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\widehat{X}$ מתוקנן.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\right)\wedge\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,dx=\frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}\right)$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}}{\frac{2}{2n+1}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}}=1$.

משפט דה־מואבר לפלס: יהי $a\le b$ ויהי $\{S_N\sim\text{Bin}(N,p)\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(a\le\widehat{S_N}\le b\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\Phi(b)-\Phi(a)$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ חסומה יהיו $a\le b$ ויהי $\{S_N\sim\text{Bin}(N,p)\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(f\left(\frac{S_N-Np}{p\sqrt{N}}\right)\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\int_a^b f(t)\,\phi(t)\,dt$.

הגדרה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ חסומה אזי $\|f\|=\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

למה: תהא $f\in C^3(\mathbb{R})$ יהי X מ"מ ויהי $Z\sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)-1$ אזי
$\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)\right]-\mathbb{E}\left[f\left(\frac{Z}{\sqrt{N}}\right)\right]\right|\le\frac{1}{6N^{\frac{3}{2}}}\left\|f^{(3)}\right\|\left(1+\mathbb{E}\left[|X-\mathbb{E}[X]|^3\right]\right)$.

הגדרה: נגדיר $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך $\psi(x)=\begin{cases}1 & x\ge0\\ 1+x-\frac{2\sin(2\pi x)}{3\pi}+\frac{\sin(4\pi x)}{12\pi} & -1\le x\le0\\ 0 & x\le-1\end{cases}$.

טענה: $\left(\psi\in C^3(\mathbb{R})\right)\wedge$($\psi$ חסומה).

הגדרה: יהי $\varepsilon>0$ ויהיו $a\le b$ אזי $I_{a,b,\varepsilon}(x)=\psi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)\psi\left(\frac{b-x}{\varepsilon}\right)$.

טענה: יהי $\varepsilon>0$ ויהיו $a\le b$ אזי $\left(I_{a,b,\varepsilon}\in C^3(\mathbb{R})\right)\wedge$($I_{a,b,\varepsilon}$ חסומה).

למה: קיים $B>0$ עבורו לכל $a\le b$ ולכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\left\|I_{a,b,\varepsilon}^{(3)}\right\|\le\frac{B}{\varepsilon^3}$.

מסקנה: יהיו $a\le b$ ויהי $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$ אזי $\mathbb{1}_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}\le I_{a+\varepsilon,b-\varepsilon,\varepsilon}\le\mathbb{1}_{[a,b]}\le I_{a,b,\varepsilon}\le\mathbb{1}_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}$.

משפט הגבול המרכזי: יהיו $a\le b$ נניח כי לכל $N\in\mathbb{N}$ יהיו $X_1\sim\ldots\sim X_N$ מ"מ ב"ת עם תוחלת משותפת אזי
$\mathbb{P}\left(a\le\widehat{\sum_{i=1}^{N}X_i}\le b\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\Phi(b)-\Phi(a)$.

מרחב מצבים: קבוצה S.

מטריצת מצבים: $\mathcal{P}:S^2\to[0,1]$ המקיימת $\forall x\in S.\sum_{y\in S}\mathcal{P}(x,y)=1$.

שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן ובעלת מרחב מצבים סופי: מ"מ $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ ומטריצת מצבים $\mathcal{P}$ עבורם
$\mathbb{P}(X_0=s_0\ldots X_n=s_n)=\mu_{X_0}(s_0)\prod_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}(s_i,s_{i+1})$.

טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}(X_{n+1}=s_{n+1}\mid X_n=s_n\ldots X_0=s_0)=\mathcal{P}(s_n,s_{n+1})$.

הערה: נתייחס אל התפלגות μ_X כאל וקטור שורה כך $(\mu_X)_i=\mathbb{P}(X=i-1)$.

משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mu_{X_k}=\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^k$.

טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}(X_n=y\mid X_k=x)=\mathcal{P}^{n-k}(x,y)$.

התפלגות סטציונרית/עמידה: התפלגות π על S המקיימת $\pi\cdot\mathcal{P}=\pi$.

וקטור עצמי שמאלי: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $v\in M_{1,n}(\mathbb{F})$ המקיים $v\cdot A=\alpha v$.

טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\left(\mu_{X_0}\mathcal{P}^n\to\pi\right)\Longleftarrow$($\pi$ התפלגות סטציונרית).

משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות סטציונרית π.

סימון: יהיו $x,y\in S$ עבורם $\exists n\in\mathbb{N}_+.\mathcal{P}^n(x,y)>0$ אזי $x\to y$.

מטריצת מעברים אי פריקה: שרשרת עבורה $\forall x,y\in S.x\to y$.

למה: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה ותהא π התפלגות סטציונרית אזי $\forall x\in S.\pi(x)>0$.

משפט: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה אזי קיימת התפלגות סטציונרית יחידה π.

משפט התכנסות ממוצעים: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^k\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi$.

הערה: נתייחס אל טרנספורמציה f כאל וקטור עמודה כך $(f)_i=f(i)$.

משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π ותהא f טרנספורמציה אזי
$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi\cdot f$.

מחזור: יהי $x\in S$ אזי $\gcd\left(\{n\in\mathbb{N}_+\mid\mathcal{P}^n(x,x)>0\}\right)$.

מצב חסר מחזור: $x\in S$ אשר מחזורו 1.

שרשרת חסרת מחזור: שרשרת $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ עבורה כל מצב חסר מחזור.

המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת אי פריקה וחסרת מחזור אזי $\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^n\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi$.

זמן החזרה: יהי $x\in S$ אזי T_x מ"מ הזמן הראשון בו חזרנו ל־x בהילוך שמתחיל ב־x.

משפט: תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}\left[T_x\right]=\frac{1}{\pi(x)}$.

זמן הפגיעה: יהיו $x,y\in S$ אזי $T_{x,y}$ מספר הפעמים שנגיע למצב y בהילוך שמתחיל ב־x עד לחזרה הראשונה אל x.

משפט: תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}\left[T_{x,y}\right]=\frac{\pi(y)}{\pi(x)}$.