גודל מעגל בוליאני: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ ויהי C מעגל בוליאני בעל n חוטים וכן m קלטים אזי $\text{Size}\left(C\right)=n+m$.

עומק מעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $\text{depth}\left(C\right)$ הינו אורך המסלול המקסימלי מקלט לפלט.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq3}$ אזי $\vee_{n}:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ המוגדרת $\vee_{n}\left(x\right)=\bigvee_{i=1}^{n}x_{i}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq3}$ אזי $\wedge_{n}:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ המוגדרת $\wedge_{n}\left(x\right)=\bigwedge_{i=1}^{n}x_{i}$.

מעגל בוליאני בעל fan-in לא מוגבל: מעגל בוליאני מעל בסיס הפונקציות הבוליאניות $\left\{ \wedge,\vee,\neg\right\} \cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{ \vee_{n}\right\} \right)\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{ \wedge_{n}\right\} \right)$.

הערה: אלא אם נאמר אחרת מעגל בוליאני הוא בעל fan-in מוגבל.

טענה: תהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C בעל fan-in לא מוגבל המחשב את f בגודל $\mathcal{O}\left(n\cdot2^{n}\right)$ ובעומק 2.

טענה: תהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C המחשב את f בגודל $\mathcal{O}\left(n\cdot2^{n}\right)$ ובעומק $n+\log_{2}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא L שפה אזי קיימת משפחת מעגלים $\mathcal{C}$ מגודל $\mathcal{O}\left(n\cdot2^{n}\right)$ ומעומק $n+\log\left(n\right)$ המחשבת את L.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי קיימת $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ עבורה לכל מעגל בוליאני C המחשב אותה מתקיים $\text{Size}\left(C\right)\geq\frac{2^{n}}{2n}$.

הגודל של פונקציה בוליאנית: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי $\text{Size}\left(f\right)=\min\left\{ \text{Size}\left(C\right)\mid\left(f\text{ מחשבת את }C\right)\wedge\left(C\text{ מעגל}\right)\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי $\text{Size}\left(f\right)\leq15\cdot\left(2^{n}-1\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי $\text{Size}\left(f\right)=\mathcal{O}\left(\frac{2^{n}}{n}\right)$.

מסקנה שאנון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\max\left\{ \text{Size}\left(f\right)\mid f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\} \right\} =\Theta\left(\frac{2^{n}}{n}\right)$.

משפט: קיים $C\in\mathbb{R}_{+}$ עבורו לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימת $n\leq S<C\cdot\frac{2^{n}}{n}$ קיימת $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ באשר f חשיבה על ידי מעגל מגודל $S\left(n\right)+10n$ וכן f לא חשיבה על ידי מעגל מגודל $S\left(n\right)$.

הגדרה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{Size}\left(S\left(n\right)\right)=\left\{ L\subseteq\left\{ 0,1\right\} ^{*}\mid S\left(n\right)\text{ חשיבה על ידי משפחת מעגלים מגודל לכל היותר }L\right\}$.

מסקנה: $\text{Size}\left(2^{n}\right)=\mathcal{P}\left(\left\{ 0,1\right\} ^{*}\right)$.

מסקנה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה $n\leq S\left(n\right)\leq\frac{2^{n}}{n}$ אזי $\text{Size}\left(S\left(n\right)\right)\subsetneq\text{Size}\left(S\left(n\right)+10n\right)$.

הגדרה: $\text{Size}\left(\text{Poly}\right)=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{Size}\left(n^{c}\right)$.

למה: יהי G גרף אזי $\mathbb{E}_{\text{חתך }\left(A,B\right)}\left[\left|E\left(A,B\right)\right|\right]=\frac{\left|E\left(G\right)\right|}{2}$.

טענה: יהי G גרף אזי קיים חתך $\left(A,B\right)$ עבורו $E\left(A,B\right)\geq\frac{\left|E\left(G\right)\right|}{2}$.

הגדרה: תהיינה $s,d:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{AC}\left(s,d\right)=\left\{ L\subseteq\left\{ 0,1\right\} ^{*}\;\middle|\;\begin{array}{c}L\left(C\right)=L\\ \text{Size}\left(C_{n}\right)\leq s\left(n\right)\\ \text{depth}\left(C_{n}\right)\leq d\left(n\right)\end{array}\text{ קיימת משפחת מעגלים }C\text{ בעלת fan-in לא מוגבל עבורה}\right\}$.

הגדרה: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{AC}^{k}=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{AC}\left(n^{c},\log^{k}\left(n\right)\right)$.

הגדרה: תהיינה $s,d:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{NC}\left(s,d\right)=\left\{ L\subseteq\left\{ 0,1\right\} ^{*}\;\middle|\;\begin{array}{c}L\left(C\right)=L\\ \text{Size}\left(C_{n}\right)\leq s\left(n\right)\\ \text{depth}\left(C_{n}\right)\leq d\left(n\right)\end{array}\text{ קיימת משפחת מעגלים }C\text{ עבורה}\right\}$.

הגדרה: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{NC}^{k}=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{NC}\left(n^{c},\log^{k}\left(n\right)\right)$.

מסקנה: תהיינה $s,d:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{NC}\left(s,d\right)\subseteq\text{AC}\left(s,d\right)$.

טענה: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{AC}^{k}\subseteq\text{NC}^{k+1}$.

פונקציית זוגיות: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\text{parity}:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ המוגדרת $\text{parity}\left(x\right)=\bigoplus_{i=1}^{n}x_{i}$.

טענה: קיים מעגל C המחשב את parity_{n} מגודל $\mathcal{O}\left(n\right)$ ועומק $\mathcal{O}\left(\log\left(n\right)\right)$.

מסקנה: $\text{parity}\in\text{NC}^{1}$.

פולינום מולטי־לינארי (מ"ל): יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $p\in\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}\right]$ בעל דרגה 1.

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית: תהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי $p\in\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}\right]$ מ"ל עבורו $f\left(x\right)=p\left(x\right)$ לכל $x\in\left\{ 0,1\right\} ^{n}$.

טענה: תהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי קיים פולינום מ"ל יחיד המחשב את f.

סימון: תהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ ויהי $p\in\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}\right]$ מ"ל המחשב את f אזי $\deg\left(f\right)=\deg\left(p\right)$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\deg\left(\vee_{n}\right)=n$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\deg\left(\text{parity}_{n}\right)=n$.

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה ε: יהי $\varepsilon>0$ ותהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי $p\in\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}\right]$ מ"ל עבורו $\mathbb{P}_{x\leftarrow\left\{ 0,1\right\} ^{n}}\left(p\left(x\right)=f\left(x\right)\right)\geq1-\varepsilon$.

טענה: הפולינום 1 מחשב את $\vee_{n}$ בממוצע עם שגיאה $\frac{1}{3}$.

התפלגות משפחת פולינומים מחשבת פונקציה בוליאנית עם שגיאה ε: יהי $\varepsilon>0$ ותהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ אזי קבוצת פולינומים מ"ל $P\subseteq\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}\right]$ עבורה לכל $x\in\left\{ 0,1\right\} ^{n}$ מתקיים $\mathbb{P}_{p\leftarrow P}\left(p\left(x\right)=f\left(x\right)\right)\geq1-\varepsilon$.

טענה: יהי $\varepsilon>0$ תהא $f:\left\{ 0,1\right\} ^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ ותהא $P\subseteq\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}\right]$ מ"ל המחשבת את f עם שגיאה ε אזי קיים $p\in P$ המחשב בממוצע את f עם שגיאה ε.

סימון: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $(x\leftarrow\Omega):\Omega\to\Omega$ הינו מ"מ באשר $\mathbb{P}((x\leftarrow\Omega)=\omega)=\mathbb{P}(\omega)$.

הערה: תהא A קבוצה סופית אזי $x\leftarrow A$ הינו המ"מ כאשר A עם ההתפלגות האחידה.

סימון: יהי $\varepsilon>0$ ותהא $S_{j,k}\leftarrow\mathcal{P}([n])$ לכל $k\in\{0\ldots\log(n)\}$ ולכל $j\in\left[c\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$ אזי $R_{\vee}(x)=1-\prod_{k,j}\left(1-\sum_{i\in S_{j,k}}x_i\right)$.

למה: יהי $x\in\{0,1\}^n$ עבורו $\vee_n(x)=0$ אזי $R_{\vee}(x)=0$ לכל $S_{j,k}\leftarrow\mathcal{P}([n])$.

למה: יהי $x\in\{0,1\}^n$ ותהיינה $S_{j,k}\leftarrow\mathcal{P}([n])$ עבורן קיימים j,k המקיימים $|S_{j,k}\cap\{i\mid x_i=1\}|=1$ אזי $R_{\vee}(x)=1$ וכן $\vee_n(x)=1$.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}$ ויהי $x\in\{0,1\}^n$ עבורו $2^{k-1}\le|\{i\mid x_i=1\}|\le 2^k$ אזי $\mathbb{P}_{S\leftarrow\mathcal{P}([n])}(|S\cap I|=1)\ge\frac{1}{2e}$.

טענה: יהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל $P\subseteq\mathbb{R}[x_1\ldots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\log(n)\cdot\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ שמחשבת את $\vee_n$ עם שגיאה ε.

טענה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל $s(n)$ ועומק $d(n)$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצת פולינומים מ"ל $P\subseteq\mathbb{R}[x_1\ldots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\left(\log(n)\cdot\log\left(\frac{s(n)}{\varepsilon}\right)\right)^{d(n)}\right)$ המחשבת את f עם שגיאה ε.

מסקנה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל $s(n)$ ועומק $d(n)$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים פולינום מ"ל $p\in\mathbb{R}[x_1\ldots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\left(\log(n)\cdot\log\left(\frac{s(n)}{\varepsilon}\right)\right)^{d(n)}\right)$ המחשב את f בממוצע עם שגיאה ε.

למה: יהי $\delta>0$ ויהי $p\in\mathbb{R}[x_1\ldots x_n]$ מ"ל המחשב את parity_n בממוצע עם שגיאה $\frac{1}{2}+\delta$ אזי $\deg(p)=\Omega(\delta\sqrt{n})$.

טענה: יהי $\varepsilon>0$ ויהי $p\in\mathbb{R}[x_1\ldots x_n]$ מ"ל המחשב את parity_n בממוצע עם שגיאה ε אזי $\deg(p)=\Omega(\sqrt{n})$.

מסקנה: יהי C מעגל המחשב את parity_n בעל fan-in לא מוגבל ועומק $d(n)$ אזי $\text{Size}(C)\ge 2^{\Omega\left(n^{\frac{1}{4\cdot d(n)}}\right)}$.

משפט: $\text{parity}\notin\mathsf{AC}^0$.

מסקנה: $\mathsf{AC}^0\subsetneq\mathsf{NC}^1$.