

הגדרה: תהא $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה אזי $\text{Hol}(G) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ הולומורפית}\}$.

סימון: תהא $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה אזי $A(G) = H(G) = \text{Hol}(G)$.

הגדרה: תהא $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה תהא $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ מרומורפית ותהא $K \subseteq G$ קומפקטית אזי $\|f\|_{C(K)} = \max |f(K)|$.

טור פונקציות מתכנס נורמלי: תהא $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהיינה $\langle f_n \in \text{Hol}(G) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ עבורה לכל $K \subseteq G$ קומפקטית קיים $m \in \mathbb{N}$ עבורו $\sum_{m \leq n} \|f_n\|_{C(K)}$ מתכנס.

טענה אויילר: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$.

מסקנה אויילר: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $\pi \cdot \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$.

מסקנה אויילר: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{|n| \leq m} \frac{(-1)^n}{z-n}$.

מכפלה מתכנסת: יהיו $\langle p_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ ויהי $P \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ באשר $P = \prod_{i=0}^{\infty} p_i$ אזי $P = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n p_i$.

טענה: יהיו $\langle p_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ עבורם $\prod_{i=0}^{\infty} p_i$ מתכנס אזי $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

הענף הראשי של \log : יהי $r \in \mathbb{R}_+$ ויהי $\theta \in \mathbb{R}$ אזי $\text{Log}(re^{i\theta}) = \log(r) + \text{Arg}(e^{i\theta})$.

טענה: Log ענף של \log על $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

טענה: יהיו $\langle p_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ ויהי $P \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ התב"ש

$$\bullet \prod_{i=0}^{\infty} p_i = P$$

$$\bullet P = \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} \text{Log}(p_i)\right) \text{ וכן } \sum_{i=0}^{\infty} \text{Log}(p_i) \text{ מתכנס}$$

טענה: יהיו $\langle a_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ באשר $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2$ מתכנס אזי $\left(\prod_{i=0}^{\infty} (1+a_i)\right) \iff \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ מתכנס.

טענה: קיימים $\langle a_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ עבורם $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ מתכנס אך $\prod_{i=0}^{\infty} (1+a_i)$ אינה מתכנסת.

טענה: קיימים $\langle a_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ עבורם $\prod_{i=0}^{\infty} (1+a_i)$ מתכנסת אך $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ אינה מתכנס.

טענה: יהיו $\langle a_n \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ באשר $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ מתכנס אזי $\prod_{i=0}^{\infty} (1+a_i)$ מתכנסת.

מכפלת פונקציות מתכנסת באופן נורמלי: תהא $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהיינה $\langle a_n \in \text{Hol}(G) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ אזי $\prod_{n=0}^{\infty} (1+a_n)$ עבורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס באופן נורמלי.

טענה: תהא $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהיינה $\langle p_n \in \text{Hol}(G) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ באשר $\prod_{i=0}^{\infty} p_i$ מתכנסת באופן נורמלי אזי לכל $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ מתקיים

$$\prod_{i=0}^{\infty} p_i = \prod_{i=0}^{\infty} p_{\sigma(i)}$$

טענה: תהא $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהיינה $\langle p_n \in \text{Hol}(G) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ באשר $\prod_{i=0}^{\infty} p_i$ מתכנסת באופן נורמלי אזי $\prod_{i=0}^{\infty} p_i \in \text{Hol}(G)$.

טענה: תהא $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה ותהיינה $\langle p_n \in \text{Hol}(G) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ באשר $\prod_{i=0}^{\infty} p_i$ מתכנסת באופן נורמלי אזי $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{p'_i}{p_i}$ מתכנס באופן נורמלי.