

מטריקה אוקלידית: תהייה $x, y \in \mathbb{R}^n$ אזי $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

הגדרה: תהייה $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $d_2(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} d_2(x, y)$

נקודה קרובה ביותר לנקודה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $a \in \mathbb{R}^n \setminus X$ אזי $x \in X$ עבורו לכל $y \in X$ מתקיים $d_2(x, a) \leq d_2(y, a)$

טענה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ יהי $a \in \mathbb{R}^n \setminus X$ ותהא $x \in X$ אזי $(x \text{ הנקודה הקרובה ביותר ל-} a \text{ ב-} X) \iff (d_2(a, x) = d_2(a, X))$

משפט הנקודה הקרובה ביותר: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $a \in \mathbb{R}^n \setminus X$ אזי קיימת נקודה קרובה ביותר ל- a ב- X .

טענה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קמורה ויהי $a \in \mathbb{R}^n \setminus X$ אזי קיימת ויחידה נקודה קרובה ביותר ל- a ב- X .

היפר-משטח/על-מישור: יהי $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ויהי $\beta \in \mathbb{R}$ אזי $H(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha, x \rangle = \beta\}$

חצי מרחב נוצר על ידי היפר-משטח: יהי $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ויהי $\beta \in \mathbb{R}$ אזי

• עליון: $H^+(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha, x \rangle \geq \beta\}$

• תחתון: $H^-(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha, x \rangle \leq \beta\}$

טענה: יהי $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ויהי $\beta \in \mathbb{R}$ אזי $H^+(\alpha, \beta) = H^-(\alpha, -\beta)$

טענה: יהי $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ויהי $\beta \in \mathbb{R}$ אזי $H^+(\alpha, \beta) \cap H^-(\alpha, \beta) = H(\alpha, \beta)$

היפר-משטח מפריד: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי היפר-משטח $H(\alpha, \beta)$ המקיים אחד מהבאים

• $S \subseteq H^-(\alpha, \beta)$ וכן $x \in H^+(\alpha, \beta)$

• $S \subseteq H^+(\alpha, \beta)$ וכן $x \in H^-(\alpha, \beta)$

היפר-משטח מפריד ממש: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי היפר-משטח מפריד $H(\alpha, \beta)$ המקיים אחד מהבאים

• $S \subseteq H^-(\alpha, \beta) \setminus H(\alpha, \beta)$ וכן $x \in H^+(\alpha, \beta) \setminus H(\alpha, \beta)$

• $S \subseteq H^+(\alpha, \beta) \setminus H(\alpha, \beta)$ וכן $x \in H^-(\alpha, \beta) \setminus H(\alpha, \beta)$

משפט ההפרדה על ידי היפר-משטח: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וקמורה יהי $a \in \mathbb{R}^n \setminus S$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$ הנקודה הקרובה ביותר ל- a ב- S

אזי $H(a - x, \langle a - x, x \rangle)$ היפר-משטח מפריד בין S ל- a .

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וקמורה ויהי $a \in \mathbb{R}^n \setminus S$ אזי קיים $\alpha \in \mathbb{R}^n$ וקיים $\beta \in \mathbb{R}$ עבורם $H(\alpha, \beta)$ היפר-משטח מפריד ממש

בין S ל- a .

משפט: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^n$ קמורה וקומפקטית ותהא $T \subseteq \mathbb{R}^n$ קמורה וסגורה עבורה $S \cap T = \emptyset$ אזי קיים $\alpha \in \mathbb{R}^n$ וקיים $\beta \in \mathbb{R}$

עבורם $H(\alpha, \beta)$ היפר-משטח מפריד ממש בין S ל- T .

משפט: תהייה X, Y קבוצות ותהא $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y)$

פונקציה בילינארית: יהיו X, Y מ"ו מעל \mathbb{R} אזי $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת

• לכל $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ לכל $x \in X$ ולכל $y, z \in Y$ מתקיים $f(x, \lambda y + \mu z) = \lambda f(x, y) + \mu f(x, z)$

• לכל $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ לכל $x, w \in X$ ולכל $y \in Y$ מתקיים $f(\lambda x + \mu w, y) = \lambda f(x, y) + \mu f(w, y)$

סימפלס: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\Delta_n = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\right\}$

נקודות קיצון של סימפלס: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$

מטריצה מייצגת: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ ותהא $f : \Delta_n \times \Delta_m \rightarrow \mathbb{R}$ בילינארית אזי $[f] \in M_{(n+1) \times (m+1)}(\mathbb{R})$ המוגדרת $([f])_{i,j} = f(e_i, e_j)$

טענה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ תהא $f : \Delta_n \times \Delta_m \rightarrow \mathbb{R}$ בילינארית יהי $x \in \Delta_n$ ויהי $y \in \Delta_m$ אזי $f(x, y) = x^T \cdot [f] \cdot y$

משפט המינימקס: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ ותהא $f : \Delta_n \times \Delta_m \rightarrow \mathbb{R}$ בילינארית אזי

$$\max_{x \in \Delta_n} \min_{y \in \Delta_m} f(x, y) = \min_{y \in \Delta_m} \max_{x \in \Delta_n} f(x, y)$$

מסקנה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ ותהא $A \in M_{(n+1) \times (m+1)}(\mathbb{R})$ אזי $\max_{x \in \Delta_n} \min_{y \in \Delta_m} x^T A y = \min_{y \in \Delta_m} \max_{x \in \Delta_n} x^T A y$

סימון: $\Delta_\infty = \left\{\mu : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(n) = 1\right\}$

מטריצה חסומה: יהיו $n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ אזי $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ עבורה קיים $M > 0$ עבורו לכל $i \in [n]$ ולכל $j \in [m]$ מתקיים

$$|(A)_{i,j}| < M$$

מסקנה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ ותהא $A \in M_{\infty \times (m+1)}(\mathbb{R})$ חסומה אזי $\sup_{x \in \Delta_\infty} \inf_{y \in \Delta_m} x^T A y = \inf_{y \in \Delta_m} \sup_{x \in \Delta_\infty} x^T A y$

משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס: תהייה A_1, A_2 קבוצות סופיות ותהא $u : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ אזי (A_1, A_2, u)

פעולות/אסטרטגיות של שחקן 1: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי A_1

פעולות/אסטרטגיות של שחקן 2: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי A_2

פונקציית תשלומים: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי u

פעולה/אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי התפלגות על A_1

פעולה/אסטרטגיה מעורבת של שחקן 2: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי התפלגות על A_2

סימון: תהא A קבוצה סופית אזי $\Delta(A) = \{\mu : A \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{a \in A} \mu(a) = 1\}$.

סימון: יהי (A, B, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס תהא $\mu \in \Delta(A)$ ותהא $\lambda \in \Delta(B)$ אזי

$$u(\mu, \lambda) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \mu(a) \cdot \lambda(b) \cdot u(a, b)$$

ערך המקסמין של משחק: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי

$$\underline{v} = \max_{x \in \Delta(A_1)} \min_{y \in \Delta(A_2)} u(x, y)$$

ערך המינימקס של משחק: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי

$$\bar{v} = \min_{y \in \Delta(A_2)} \max_{x \in \Delta(A_1)} u(x, y)$$

מסקנה: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי $\bar{v} = \underline{v}$.

ערך של משחק: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי $v = \bar{v} = \underline{v}$.

אסטרטגיה מעורבת אופטימלית עבור שחקן 1: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי $x \in \Delta(A_1)$

$$\text{עבורה } \min_{y \in \Delta(A_2)} u(x, y) = v$$

אסטרטגיה מעורבת אופטימלית עבור שחקן 2: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי $y \in \Delta(A_2)$

$$\text{עבורה } \min_{x \in \Delta(A_1)} u(x, y) = v$$

פעולה שולטת חזק על פעולה עבור שחקן 1: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא $a \in A_1$ אזי

$$b \in A_1 \text{ עבורה } u(b, c) < u(a, c) \text{ לכל } c \in A_2$$

פעולה שולטת חזק על פעולה עבור שחקן 2: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא $a \in A_2$ אזי

$$b \in A_2 \text{ עבורה } u(c, a) < u(c, b) \text{ לכל } c \in A_1$$

פעולה שולטת חלש על פעולה עבור שחקן 1: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא $a \in A_1$ אזי

$$b \in A_1 \text{ עבורה}$$

$$\bullet \text{ לכל } c \in A_2 \text{ מתקיים } u(b, c) \leq u(a, c)$$

$$\bullet \text{ קיים } c \in A_2 \text{ עבורו } u(b, c) < u(a, c)$$

פעולה שולטת חלש על פעולה עבור שחקן 2: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא $a \in A_2$ אזי

$$b \in A_2 \text{ עבורה}$$

$$\bullet \text{ לכל } c \in A_1 \text{ מתקיים } u(c, a) \leq u(c, b)$$

$$\bullet \text{ קיים } c \in A_1 \text{ עבורו } u(c, a) < u(c, b)$$

משפט: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס תהא $a \in A_1$ פעולה נשלטת חזק עבור שחקן 1 ותהא x

$$\text{אסטרטגיה מעורבת אופטימלית עבור שחקן 1 אזי } x(a) = 0$$

משפט: יהי (A_1, A_2, u) משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא $a \in A_1$ פעולה נשלטת חלש עבור שחקן 1 אזי

$$\bullet v((A_1, A_2, u)) = v((A_1 \setminus \{a\}, A_2, u))$$

$$\bullet \text{ תהא } x \in \Delta(A_1) \text{ אזי } (x \text{ אופטימלית במשחק } (A_1, A_2, u)) \iff (u|_{A_1 \setminus \{a\}} \text{ אופטימלית במשחק } ((A_1 \setminus \{a\}, A_2, u)))$$