$(a\in\{a_1,\ldots,a_n\})\Longleftrightarrow ((a=a_1)\lor\ldots\lor(a=a_n))$  מתקיים  $\{a_1,\ldots,a_n\}$  מתקיים  $\{a_1,\ldots,a_n\}$  ביימון: תהא  $\Sigma$  אלפבית אזי  $\Sigma^*$  כל המחרוזות הסופיות באלפבית.  $S\subseteq\Sigma^*$  אזי קיימת ויחידה  $S\subseteq\Sigma^*$  המקיימת טענה: יהי עולם  $\Sigma$  תהא  $\Sigma$  תהא  $\Sigma$  ותהא  $\Sigma$  ותהא  $\Sigma$  ותהא  $\Sigma$  ותהא  $\Sigma$  ותהא

- $B \subseteq S \bullet$
- .F סגורה להפעלת S
- $S\subseteq A$  אזי F אזי הפעלת סגורה וכן  $B\subseteq A$  עבורה עבורה  $A\subseteq \Sigma^*$  אזי  $\bullet$

אינדוקציה מבנית: יהי עולם  $X_{B,F}\subseteq \Sigma^*$  אזי  $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} o \Sigma^* \mid i\in I\}$  ותהא  $B\subseteq \Sigma^*$  מינימלית סגורה מבנית: יהי עולם  $B\subseteq X_{B,F}$  מינימלית  $B\subseteq X_{B,F}$  עבורה F

 $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid (B\subseteq Y)\land (F\text{ Derived Results})\land (F)\}$  אזי ותהא  $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$  אזי ותהא  $B\subseteq\Sigma^*$  ותהא  $Y\subseteq\Sigma^*$  סגורה להפעלת Y עבורה  $Y\subseteq\Sigma^*$  אזי  $Y\subseteq\Sigma^*$  ותהא  $Y\subseteq\Sigma^*$  ותהא  $Y\subseteq\Sigma^*$ 

 $(p\left(0
ight)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight)\Longrightarrow p\left(n+1
ight)
ight)\Longrightarrow\left(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight)$  אזי עענה על  $\mathbb{N}$  אזי עענה על אזי

על ידי הפעלת  $a_i) \lor (a_i \in B)$  מתקיים  $i \in [n]$  וכן לכל  $a_n = a$  וכן עבורה  $a_1, \ldots, a_n$  אזי אזי  $a \in X_{B,F}$  אזי  $a_i \in X_{B,F}$  מתקבל על ידי הפעלת מ־ $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ .

 $(a \in X_{B,F})$  אזי ( $a \in X_{B,F}$ ) אזי (מיימת סדרת יצירה ל־ $a \in \Sigma^*$  יהי

 $X_{B,F} = igcup_{i=1}^\infty \left\{ a \in \Sigma^* \mid n \;$ מסקנה:  $a \in \mathbb{Z}$  בעלת סדרת יצירה באורך

 $\Sigma = \{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow,(,)\} \cup \{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$  :עולם תחשיב הפסוקים:

 $a\in \Sigma^*$  יהי תחשיב הפסוקים אזי ביטוי: יהי ביטוי

אזי  $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$  אזי הגדרה: יהיו

- $.\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)" \bullet$
- $.\lor (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1\lor\omega_2)"$  •
- $:\Longrightarrow (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \Longrightarrow \omega_2)" \bullet$ 
  - $.\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)" \bullet$

.WFF =  $X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$  :פסוקי חוקי/פסוק היטב/ביטוי המוגדרות המוגדרות המוגדרות היטב/ביטוי הוקי/פסוק

 $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  עבורו  $p \in \mathrm{WFF}$  יסוקיסודי:

.(") ונגמר עם (") ונגמר עם (") ונגמר עם אזי ער  $p \in \mathsf{WFF}$  יהי יהי עם אזי ער ונגמר עם "

 $.q_1(q_2 
otin {
m WFF}$  אזי  $q_1,q_2 \in {
m WFF}$  מסקנה: יהיו

משפט הקריאה היחידה: יהי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה: יהי

- . פסוק אטומי lpha
- $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$  •
- $.lpha=(etaee\gamma)$  עבורם  $eta,\gamma\in \mathrm{WFF}$  פיימים ויחידים •
- $.\alpha = (\beta \Longrightarrow \gamma)$ עבורם  $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ יימים ויחידים
  - $\alpha = (\neg \beta)$  עבורו  $\beta \in \text{WFF}$  •

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי  $\mathcal{O}\left(\operatorname{len}\left(\alpha\right)\right)$  ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי תחשיב הפסוקים ויהי  $\alpha\in\Sigma^*$  ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי  $\alpha\in\mathsf{WFF}$ 

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .¬ .1
- $.\wedge, \vee .2$ 
  - $\Longrightarrow$  .3

T, true :אמת:

.F, false :שקר

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

 $.TT_\circ$  אזי טבלת האמת של יהינה  $(\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow)$  הינה סימון: תהא

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	p	$q \lor p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q

true

false

 $\neg q$ 

false

true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

 $v:\{p_i\} o \{F,T\}$  השמה: פונקציה

המוגדרת  $\overline{v}: \mathsf{WFF} o \{F,T\}$  השמה אזי פונקציה השמה לפסוק: תהא

 $q \wedge p$ 

true

false

false

false

- $\overline{v}(p) = v(p)$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- $.\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$  אזי פסוק אזי
- $.\overline{v}\left(eta\circ\gamma
  ight)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(eta
  ight),\overline{v}\left(\gamma
  ight)
  ight)$  איי הייו eta פסוקים ותהא פעולה בינארית איי

 $ar{v}\left(lpha
ight)=T$  עבורה עבורה אזי  $lpha\in\mathsf{WFF}$  עבורה עבורה תהא

 $v \models \alpha$  אזי א מסופקת על ידי מסופקת על ידי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  השמה ותהא

 $v \not\models \alpha$  אזי v אזי אזי מסופקת על מסופקת על ידי א מימון: תהא  $\alpha \in \mathsf{WFF}$ 

המוגדרת Var : WFF  $ightarrow \mathcal{P}\left(\{p_i\}
ight)$  פונקציה פונקציה בפסוק:

- .Var  $(p) = \{p\}$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- . $Var(\neg \alpha) = Var(\alpha)$  אזי פסוק מיהי •
- . Var  $(\beta \circ \gamma) =$ Var  $(\beta) \cup$  Var  $(\gamma)$  אזי אזי פעולה פעולה פעולה פעולה  $\beta, \gamma$  יהיו •

 $.\overline{v_{1}}\left(lpha
ight)=\overline{v_{2}}\left(lpha
ight)$  אזי  $\forall p\in\mathrm{Var}\left(lpha
ight).v_{1}\left(p
ight)=v_{2}\left(p
ight)$  עבורה עבורה

q

true

true

false

false

p

true

false

true

false

 $.TT_{lpha}$  אזי ניתן לייצג את lpha על ידי  $lpha\in {
m WFF}$  מסקנה: יהי

 $TT = TT_{\alpha}$  עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  קיים שלמה פונקציונלית: עבורה  $K \subseteq \{\land, \lor, \lnot, \Longrightarrow\}$  עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  קיים שלמה פונקציונלית: טענה:  $\{\land, \lor, \neg, \Longrightarrow\}$  שלמה פונקציונלית.

. טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה עבורה עבורה אזי  $T,\wedge,\vee\in K$  מערכת קשרים עבורה

 $v \models \alpha$  עבורו קיימת השמה v המקיימת  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  פסוק פסוק

 $v \models \alpha$  מתקיים עבורו לכל השמה עבורו מחקיים  $\alpha \in \mathsf{WFF}$ 

 $\perp = \alpha$  טאוטולוגיה אזי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  טאוטולוגיה

 $\models (\neg \alpha)$  עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  שתירה: פסוק

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=\overline{v}\left(eta
ight)$  מתקיים שקולים: פסוקים  $lpha,eta\in\mathsf{WFF}$  עבורם לכל השמה ע

 $\alpha \equiv \beta$  שקולים אזי  $\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}$  סימון: יהיו

 $.v \models lpha$  מתקיים מביקה: קבוצה  $lpha \in \Gamma$  עבורה לימת השמה עבורה לכל  $\Gamma \subseteq WFF$  מתקיים

 $v \models \Gamma$  אזי אוי השמה על ידי השמה קבוצה קבוצה קבוצה קבוצה קבוצה רהא

 $v \models \alpha$  מתקיים  $v \models \Gamma$  מתקיים עבורו לכל השמה v המניימת  $v \models \alpha$  מתקיים אזיי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  מתקיים

 $\Gamma \models \alpha$  אזי מ־ר מכטית מים פסוק נובע מסוק ויהי ויהי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  אזי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ 

טענה: יהיו  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$  אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \bullet$
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \bullet$ 
  - $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \bullet$
  - $.(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha) \bullet$
  - $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \bullet$
  - $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \bullet$ 
    - $\neg (\neg \alpha) \equiv \alpha \bullet$
  - $\neg (\alpha \land \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor (\neg \beta) \bullet$
  - $\neg (\alpha \lor \beta) \equiv (\neg \alpha) \land (\neg \beta) \bullet$ 
    - $.(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor \beta \bullet$

```
.\gamma \models \alpha מתקיים lpha \in \mathsf{WFF} למה: יהי \gamma \in \mathsf{WFF} סתירה אזי לכל
                                                             \Gamma \models \beta אזי \Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta וכן \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta עבורם \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} ויהיו \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} מענה: תהא
                                                         .\Gamma \models (\neg \alpha) אזי \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta וכן \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta אזי \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} אזי רבורם \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} אזי תהא
                                                                                                                          (\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta)) אזי \alpha, \beta \in WFF טענה: יהיו
                                                                                                                         הצבת פסוק בפסוק: יהיו lpha, arphi \in \mathsf{WFF} ויהי פסוק אטומי אזי הצבת מוק בפסוק:
                                                                                                                                                                       \alpha (\varphi/p) = \varphi אז \alpha = p אם •
                                                                                                                                    lpha\left(arphi/p
ight)=lpha אזי lpha
eq p אטומי וכן lpha פסוק אטומי וכן
                                                                                                                \alpha(\varphi/p) = \neg \beta(\varphi/p) אזי \alpha = \neg \beta עבורו \beta \in \mathsf{WFF}
                                       \alpha\left(\varphi/p\right)=\beta\left(\varphi/p\right)\circ\gamma\left(\varphi/p\right) אזי \alpha=\beta\circ\gamma אם בינארית פעולה בינארית פעולה \beta,\gamma\in\mathsf{WFF} אם קיימים
                                                                                                                        lpha\left(arphi/p
ight)\in\mathsf{WFF} אזי אזי p\in\mathsf{Var}\left(lpha
ight) ויהי lpha,arphi\in\mathsf{WFF} איזי
                                                                                 הצבת בסוקים בפסוק: יהיו p_1 \dots p_n ויהיו lpha, arphi_1 \dots arphi_n \in \mathsf{WFF} היהיו יהיו
                                                                                                                       lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=arphi_{i} אזי i\in\left[n
ight] עבור lpha=p_{i}
                                                                                        lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=lpha אז אז i\in\left[n
ight] לכל לכל lpha
eq p_{i} אם lpha פסוק אטומי וכן
                                                                      lpha \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) = 
eg eta \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) אם קיים eta \in \mathsf{WFF} עבורו lpha = \neg eta אזי lpha = \neg eta
lpha\left(arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight)=eta\left(arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight)\circ אם קיימים eta,\gamma\in שולה בינארית עבורה lpha=eta\circ\gamma אם קיימים eta,\gamma\in
                                                                                                                                                                                      \gamma \left( \varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n \right)
             .\overline{v}\left(lpha\left(arphi/p
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אזי v'\left(p_{j}
ight)=\left\{egin{array}{c}v^{(p_{j})}&i
eq j\\\overline{v}(arphi)&i=j\end{array}
ight. השמה נגדיר השמה v השמה עסענה: יהיו lpha,arphi\in\mathbb{W} אזי מינה אזי מומי ותהא יחשמה ערה השמה נגדיר השמה מוחדים אזי מינה מוחדים וותהא יחשמה ערכה.
מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו p_n יהיו יהיו \alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathsf{WFF} השמה נגדיר השמה עדיר השמה מסקנה הקשר בין הצבות השמה עדיר יהיו
       \overline{v}\left(lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אזי v'\left(p_j
ight)=\left\{egin{array}{ll} v(p_j) & j\notin [n] \\ \overline{v}(arphi_j) & j\in [n] \end{array}
ight. טאוטולוגיה. lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight) טאוטולוגיה יהי lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight) ויהיו lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight) טאוטולוגיה.
                                                                                                                         .NNF = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}} :NNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                    lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{NNF} משפט: יהי אזי קיים אזי קיים
                                                                                                                                                         .Conj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}} יימון:
                                                                                                                                                           .DNF =X_{	ext{Conj},\{ee{}ullet} :DNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                    lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m DNF} אזי קיים lpha\in {
m WFF} אזי יהי
                                                                                                                                                          Disj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\lor\}} יימון:
                                                                                                                                                             .CNF = X_{\mathrm{Disj},\{\wedge\}} :CNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                    lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{CNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF} אזי קיים
                                  A\subseteq N אזי A\subseteq M אזי A\subseteq N מערכת הוכחה: יהי
                                                                                         הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.
                                                                                                       N מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי מערכת מערכת הוכחה
                                                                                                       A אזי אוכחה מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי אקסיומת של מערכת הוכחה
                                                                                                     F מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי בללי היסק של מערכת הוכחה:
                                                                                                                   X_{A,F} אזי המשפטים: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                                            \vdash_{\sigma} \varphi אזי משפט \varphi \in Nויהי הוכחה מערכת מערכת מערכת S
                                                     (\Sigma,N,A,F,\Gamma) אזי \Gamma\subseteq N מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה בעלת הנחות:
                                                        X_{A \cup \Gamma, F} מערכת הנכחה בעלת הנחות אזי (\Sigma, N, A, F, \Gamma) מערכת הנכחה בעלת הנחות אזי
                                                    arphi מערכת יצירה אל סדרת יהי ויהי arphi\in N יכיח עלת מערכת הוכחה מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הוכחה
                                                                                   \Gamma \vdash_{c} \varphiיכיח אזי \varphi \in N הנחות ויהי הנכחה תהיינה מערכת מערכת מערכת הוכחה הנכחה \Gamma \subseteq N
                                                                                                                                                   טענה: תהא \varphi \in N אזי מערכת הוכחה מערכת מענה:
                                                      A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G ותהא A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G אזי קיימת A \subseteq G סופית עבורה A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי קיימת A \subseteq G מתקיים A \subseteq G אזי A \subseteq G כלל היסק המקיים A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G כלל הניתוק: תהא A \subseteq G מערכת הוכחה אזי A \subseteq G
```

```
מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך
```

- $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$  אלפבית:
  - $N = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$  :נוסחאות:
    - אקסיומות:
    - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$  -
- $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$ 
  - $A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$  -
    - $F = \{MP\}$  :כללי היסק

## אזי HPC־טענה: יהיו lpha,eta נוסחאות ב

- $\begin{array}{c} . \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \alpha) \bullet \\ . \vdash_{\mathrm{HPC}} ((\neg \alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta)) \bullet \end{array}$

 $.\{\neg\alpha\} \underset{\text{HPC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet$   $\alpha \underset{\text{HPC}}{\vdash} (\neg\alpha) \text{ באשר } (\neg\alpha)$  אזי  $\alpha,\beta$  אזי  $\alpha,\beta$  .

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון ⊢ הוא במערכת HPC. הערה:

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$  אזי HPC משפט הדידוקציה: תהיינה העל HPC משפט הדידוקציה: תהיינה

.Ded  $(\Gamma)=\{\alpha\in N\mid \Gamma\vdash \alpha\}$  אזי  $\Gamma\subseteq N$  ותהא אוכחה מערכת הוכחה סימון: תהא

 $\vdash ((\neg (\neg \alpha)) \Longrightarrow \alpha)$  אזי HPC טענה: תהא  $\alpha$  נוסחה מעל

 $.ig(\Gamma \models lphaig) \Longrightarrow (\Gamma \models lpha)$  מערכת מעל מוסחה מעל ולכל ולכל הנחות עבורה לכל עבורה עבורה מערכת מערכת מעל מתקיים מערכת הוכחה אונחה:

 $(\Gamma \models lpha) \Longrightarrow \left(\Gamma \vdash_S lpha
ight)$  מערכת הוכחה מעל S מתקיים לכל הנחות מעל S הנחות מעל הוכחה מערכת הוכחה מערכת הוכחה מערכת הוכחה אבורה לכל המחות מעל המחות מעל מתקיים מערכת הוכחה מערכת הוכחת הוכחה מערכת הוכחה מערכת הוכחה מערכת הובחת הוכחת הוכחת הובחת הו למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט הנאותות: HPC מערכת נאותה.

אזי HPC אות מעל  $lpha,eta,\gamma$  נוחסאות מעל HPC אזי הנחות מעל

 $.((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$ 

אזי HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה רהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל

 $.((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \land (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$ 

 $\Gamma \not\models \alpha$  המקיימת S נוסחה מעל עקבית: תהא מערכת הנחות מעל קבוצת הנחות אזי  $\Gamma$ אזי אזי מערכת תהא מערכת הנחות קבוצת הנחות מעל אזי  $\Gamma$  $\alpha$  נוסחה מעל S המקיימת מענה: תהא מערכת הוכחה הנחה הנחה מעל S הנחות מעל S היחות מעל הינה עקבית מענה: תהא מערכת הוכחה מעל אזי

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל S אזי ( $\Gamma$  עקבית) עקבית) סינה: תהא מערכת הוכחה אונה הוכחה ותהיינה וותהיינה ותהיינה וותהיינה ותהיינה וותהיינה וותהיינה וותהיינה וותהיינה וותהיינה וותהיינה וותה

קבוצת הנחות עקבית מעל  $\Delta$  עבורה לכל  $\Delta$  קבוצת הנחות עקבית מערכת הוכחה אזי  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S $\Gamma = \Delta$  מתקיים  $\Gamma \subset \Delta$  ממקיים מעל

 $.lpha\in\Gamma$  אזי HPC אזי אוי HPC איזי מקסימלית מעל מקסימלית מקסימלית עקבית מקסימלית עקבית הנחות עקבית מקסימלית מעל

 $(lpha\in\Gamma)\lor(
eglpha\in\Gamma)$  אזי HPC אוו איז HPC טענה: תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל

אזי HPC אזי מעל הנחות עקבית מקסימלית מעל אורC אזי מקסימלית עקבית הנחות עקבית הנחות הנחות עקבית הנחות אזי חדינה  $\Gamma$ 

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg \alpha \in \Gamma) \lor (\beta \in \Gamma))$ 

אזי  $\Gamma$  ספיקה. אזי  $\Gamma$  אזי  $\Gamma$  ספיקה אזי  $\Gamma$  ספיקה. אזי  $\Gamma$ 

 $\Gamma \subset \Delta$  אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית  $\Delta$ 

טענה: תהא  $\Gamma$  אזי HPC טענה: תהא  $\Gamma$  ספיקה

 $\Gamma$  ספיקה) אזי ( $\Gamma$  עקבית) אזי ( $\Gamma$  ספיקה).

משפט השלמות: HPC מערכת שלמה.

 $(\Gamma \vdash \alpha) \Longleftrightarrow (\Gamma \models \alpha)$  אזי HPC מסקנה: תהיינה HPC מסקנה מעל

משפט הקומפקטיות: תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות מעל HPC אזי אי ( $\Gamma$  ספיקה) (לכל  $\Gamma$   $\Gamma$  סופית  $\Gamma$  ספיקה).

.Ass  $(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid v \models \Gamma\}$  אזי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  מימון: תהא

 $\{p_i\} o \{F,T\}$  טענה: הקבוצה  $\{(\{p_i\} o \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$  טענה: הקבוצה

. הינה קומפקטית. אינה  $\{(\{p_i\} o \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$  הינה סטענה:

```
קבarphi_G:E	o \mathsf{WFF} אזי אזי (v,u)\in E יהגדרה: יהי f:V	o \mathsf{WFF} תהא מכוון תהא
                                                                                                                                                                                                                                           .\varphi_G((v,u)) = "f(v) \Longrightarrow f(u)"
                        . (סענה: יהי G) אזי G ספיקה אזי (G) טענה: יהי G) טענה: יהי G ספיקה אזי (G) טענה: יהי G) ספיקה אזי (G) ספיקה אזי (G) טענה: יהי
                                              .(סופי G' סופי G' סופי G' הינו G'2-צביע) אינו G'3-צביע) מסקנה: יהי G3 גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי
                                                 . (טענה: G' סופי G' \leq G סופי אינו G' סופי G' \leq G סטענה: יהי G' סופי אזי G' סופי אזי G'
                                                 K=\operatorname{Ass}\left(\Gamma\right) המקיימת \Gamma\subseteq\operatorname{WFF} השנות גדירה: קבוצה K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}\right) המקיימת איימת השמות גדירה:
                                                                                                                                                        . גדירה, \{v\} השמה v לכל v גדירה, גדירה, \{p_i\} 	o \{F,T\} גדירה, גדירה, אדירה, גדירה, גדירה, אדירה, 
                                                                                                                                                                                       טענה: קיימת K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}\to\{F,T\}\right) שאינה גדירה.
                                                                                                                                                                    K_{\text{finite}} = \left\{ v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid \left| v^{-1} \left( \{T\} \right) \right| < \aleph_0 \right\} שימון:
                                                                                                                                                                                                                                                                     .טענה: K_{
m finite} אינה גדירה
K=\mathrm{Ass}\,(\Gamma) סופית המקיימת סופי. קבוצת השמות גדירה באופן סופי: קבוצה K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) עבורה קיימת
                                                                                                                                                                                                           משפט: תהא K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) התב"ש
                                                                                                                                                                                                                                                        . גזירה וכן K^{\mathcal{C}} גדירה K
                                                                                                                                                                                                                                                               גדירה באופן סופי. K ullet
                                                                                                                                                                                                                                              . גדירה על ידי פסוק יחיד K ullet
                                                 \{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i,n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n 	o \Sigma \mid i,n \in \mathbb{N}\}\} מילון: יהי \Sigma אלפבית אזי
                                                                                                                                                                                                          C מילון אזי (C,R,F) מילון: יהי
                                                                                                                                                                                                              R מילון אזי (C,R,F) סימני יחס במילון: יהי
                                                                                                                                                                                                   F מילון אזי (C,R,F) סימני פונקציה במילון: יהי
                                                                                                                                                      . בעל סופי של סימנים בעל מספר אזי מילון אלפבית אזי אלפבית אזי מילון מופי: יהי אלפבית אזי מילון מישנים.
                                                                                                                                                                           מילון יחסי: יהי \Sigma אלפבית אזי מילון \sigma חסר סימני פונקציה.
                                   \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{"(",")"\}, \{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\}, \{\forall, \exists\}, \sigma\} מסדר ראשון: יהי \Sigma אלפבית ויהי לוגיקה מסדר האשון: יהי
                                                                                                                                                                                                                \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} משתנים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                                                                                                                                                  סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: {"(",")"}
                                                                                                                                                                                   \{\neg,\lor,\land,\Longrightarrow\} קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                                                                                                                                                     \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} כמתים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                                             בה. בה חילון אזי המילון לוגיקה מסדר ראשון: תהא בה לוגיקה מסדר ראשון אזי המילון בה. סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: חיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון
                                                                                                                                         X_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i|i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}|i,n\in\mathbb{N}\}} שמות עצם מעל מילון: יהי \sigma מילון אזי
                                                                      משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי \sigma מילון ויהי שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
                                                                                                                                                                                                                                                                                                .משתנה t
                                                                                                                                                                                                                                                                                       .סימן קבוע t
                                                                                                           t=f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight) עבורם t_{1}\dots t_{n} ושמות עצם f_{i,n} שמון פונקציה ullet
                                                                                                                                                                                                 אזי \alpha \in \sigma אזי משתנה ותהא \sigma מילון יהי \sigma מילון יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                    \forall (\alpha, x) = \forall x \alpha •
                                                                                                                                                                                                                                                                    \exists (\alpha, x) = "\exists x \alpha" \bullet
                                                                                   \{R_{n,i}\left(t_1\dots t_n
ight)\mid (i,n\in\mathbb{N})\land (נוסחאות אטומיות: יהי \sigma מילון אזי ויהי t_1\dots t_n\} שמות עצם
                                                                                X_{\{R_{n,i}(t_1\dots t_n)|(i,n\in\mathbb{N})\land (נוסחאות מעל מילון: יהי \sigma מילון אזי מילון אזי t_1\dots t_n)\},\{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow,\forall,\exists\}
                                                                          משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי \sigma מילון ותהא מילון מחסה מילוק מחד מהבאים משפט מילוק אחד מהבאים
                                                                                                                                                                                                                                                                         . נוסחה אטומית \alpha
                                                                                                                                                                                               \alpha = (\neg \beta) עבורה \beta עבורה נוסחה •
                                                                                                        \alpha = (\beta \circ \gamma) עבורן \beta, \gamma וכן פעולה בולינארית \beta, \gamma וכן נוסחאות \alpha
                                                                                                                            \alpha = "Qx\beta" עבורם Q עבורם \alpha וכן משתנה \alpha וכן משתנה \beta וכן יוסחה \beta
                                                                                                 כך FV : \{t\mid\sigma שם עצם במילון שם איר החופשי בשם עצם: נגדיר באיר החופשי בשם עצם: נגדיר אויר החופשי בשם עצם במילון אויר החופשי בשם עצם: נגדיר אויר החופשי בשם עצם במילון אויר החופשי בשם במילון אויר החופשי בשם עצם במילון אויר החופשי בשם במילון אויר החופשי במילון אויר החופשי
```

 $\mathrm{FV}(c)=\varnothing$  יהי  $c\in\sigma$  סימן קבוע אזי  $c\in\sigma$  יהי •  $\mathrm{FV}(x)=\{x\}$  משתנה אזי  $x\in\sigma$  יהי

```
.FV (R\left(t_1\dots t_n
ight))= [ ] FV (t_i) אזי יחס איזי א סימן ויהי אם ויהי שמות עצם ויהי t_1\dots t_n
                                                                                                                                                                                                                                                       \mathsf{FV}(\neg \varphi) = \mathsf{FV}(\varphi) אזי (סתה שלי נוסחה פינוסחה שלי פינוסחה שלי נוסחה פינוסחה שלי פינ
                                                                                                                          \mathsf{FV}\left(\varphi\circ\psi\right)=\mathsf{FV}\left(\varphi\right)\cup\mathsf{FV}\left(\psi\right) אזי אזי פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה •
                                                                                                                                         .FV (Qx\varphi)=\mathrm{FV}\,(\varphi)\setminus\{x\} עבורם Q עבור משתנה \varphi יהי משתנה \varphi יהי משתנה \varphi
                                                                                                                                                                                                                                                          \mathrm{FV}\left(arphi
ight)=arphi עבורה עבורה: נוסחה לוסחה כנוסחה
                                                                                                                                                                         סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         .∀,∃ .1
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                .¬ .2
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        .\land,\lor .3
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         . . 4
וכן n\in\mathbb{N} חח"ע לכל R:\{R_{n.i}\}	o D^n חח"ע וכן C:\{c_i\}	o D ותהא חח"ע לכל D
eq \varnothing מבנה עבור מילון: יהי
                                                                                                                                                (D,C\left(c_{0}
ight),\ldots,R\left(R_{2,0}
ight),\ldots,f\left(f_{0,0}
ight)) חח"ע אזי F:\{f_{n,i}\}
ightarrow(D^{n}
ightarrow D)
                                                                                                                                                                                                                      D אזי \sigma אזי מבנה על מבנה: יהי מילון ויהי מילון מבנה:
                                                                                                                                                                                  D^M=D אזי אזי מבנה על \sigma בעל תחום D אזי מילון ויהי \sigma מילון ויהי
                                            (C\left(c_{0}
ight),\ldots,R\left(R_{2.0}
ight),\ldots,f\left(f_{0.0}
ight)) אזי מבנה על \sigma מילון ויהי \sigma מילון ויהי \sigma מילון ויהי מבנה: יהי מילון על \sigma
                                                                                     .f_{n,i}^{M}=F\left(f_{n,i}
ight) וכן וכך R_{n,i}^{M}=R\left(R_{n,i}
ight) וכן מבנה על \sigma אזי אזי c_{i}^{M}=C\left(c_{i}
ight) אזי מבנה על מבנה ע
                                                                                                                                                                              v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}	o D^M אזי מבנה על מבנה M מילון ויהי מילון יהי
                                                                                                                                                          השמה v יהי ותהא השמה ערך מבנה על מבנה מילון יהי מילון יהי \sigma יהי ותהא מילון יהי
                                                                                                                                                                                                                                                  \overline{v}\left(c_{i}
ight)=c_{i}^{M} יהי c_{i}\in\sigma סימן קבוע אזי c_{i}\in\sigma
                                                                                                                                                                                                                                                  .\overline{v}\left(x_{i}\right)=v\left(x_{i}\right) יהי x_{i}\in\sigma משתנה אזי x_{i}\in\sigma
                                                                          \overline{v}\left(f\left(t_1\dots t_n
ight)
ight)=f^M\left(\overline{v}\left(t_1
ight)\dots\overline{v}\left(t_n
ight)
ight) יהיו שמות עצם ויהי f\in\sigma סימן פונקציה אזי t_1\dots t_n
\forall x \in \mathsf{FV}\left(t\right).v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right) שם עצם עבורו t שם אם התלות הסופית: יהי \sigma מילון יהי M מבנה על \sigma תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                .\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t) אזי
                                               השמה אזי נגדיר איזי ויהי d\in D^M מבנה איזי יהי a משתנה ויהי a משתנה על a מבנה על מבנה על השמה מתוקנת: יהי a
                                                                                                                                                                                                                                                                                                      v\left[\frac{d}{x_{j}}\right]\left(x_{i}\right) = \begin{cases} v(x_{i}) & i \neq j \\ d & \text{else} \end{cases}
                                                                                                                                                                                ערך אמת לנוסחה: יהי \sigma מילון יהי M מבנה על \sigma ותהא v השמה אזי
                               (\overline{v}\left(R\left(t_{1}\dots t_{n}
ight)
ight)=T)\Longleftrightarrow\left((\overline{v}\left(t_{1}
ight),\dots,\overline{v}\left(t_{n}
ight)
ight)\in R^{M}
ight) יהיו שמות עצם ויהי R\in\sigma סימן יחס אזי •
                                                                                                                                                                                                                                        .\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha)) נוסחה אזי \alpha נוסחה א
                                                                                                                                .\overline{v}\left(\alpha\circ\beta\right)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\alpha\right),\overline{v}\left(\beta\right)\right)אזי בינארי חיהי \circ קשר היינה \alpha,\beta נוסחאות היינה \alpha,\beta
                                                                                                                                           .(\overline{v}\,(\exists xarphi)=T)\Longleftrightarrow \left(\exists d\in D^M\left(\overline{v\left[d/x
ight]}\left(arphi
ight)=T
ight)
ight) . (\overline{v}\,(\forall xarphi)=T)\Longleftrightarrow \left(\forall d\in D^M\left(\overline{v\left[d/x
ight]}\left(arphi
ight)=T
ight) . .(\overline{v}\,(\forall xarphi)=T)
orall x \in \mathsf{FV}(t).v_1(x) = v_2(x) משפט התלות הסופית: יהי \sigma מילון יהי \sigma מבנה על \sigma תהיינה v_1, v_2 השמות ותהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            .\overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi) אזי
                                                                                                      .\overline{v}\left(arphi
ight)=T מבנה על מילון \sigma תהא v השמה אזי נוסחה מבנה: יהי M מבנה מבנה נוסחה ספיקה במבנה:
                                                                                                              M,v\models arphi אזי M מבנה על מילון \sigma תהא תהא \sigma ווחהא ספיקה ב־M מבנה על מילון יהי
                                                                     M,v \models arphi מבנה ותהא v השמה עבורם M,v \models arphi מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma נוסחה יהי מילון מבנה ותהא \sigma
\overline{v}\left(arphi
ight)=T מתקיים מתקיים עבורה לכל \Gamma עבורה לכל עבורה לכל \sigma מתקיים ע מתקיים \sigma מתקיים מתקיים \sigma
                                                                                  M,v\models\Gamma אזי M מבנה על מילון \sigma תהא תהא \sigma השמה ותהא \sigma קבוצת נוסחאות ספיקה ב־
```

 $\mathsf{FV}(f(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \mathsf{FV}(t_i)$  אזי פונקציה איזי  $f \in \sigma$  יהיו שמות עצם ויהי  $t_1 \dots t_n$ 

כך FV :  $\{arphi \mid \sigma \mid \sigma$  נוסחה במילון  $\varphi\} o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}\right)$  כך כך גדיר

 $\{\varphi\} \stackrel{t}{\models} \psi$  וכן  $\{\psi\} \stackrel{t}{\models} \varphi$  עבורן  $\{\psi\} \stackrel{t}{\models} \varphi$  עבורן יהי  $\sigma$  מילון ותהא v השמה אזי נוסחאות v עבורה לכל v השמה מתקיים v מילון אזי נוסחה v עבורה לכל v מבנה על v ולכל v השמה מתקיים v מילון אזי נוסחה v עבורה לכל v

סימון: יהי  $\sigma$  מילון תהא T אז (M,v) אז השמה תהא T קבוצת נוסחאות ותהא עוסחה עבורה אם מילון יהי  $\sigma$  מילון של

 $M,v\models arphi$  עבורם v עבורה ספיקה: יהי  $\sigma$  מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה מבנה v מילון אזי נוסחה מילון אזי נוסחה ספיקה: יהי

 $.\Gamma \stackrel{\circ}{\models} \varphi$  אזי  $\varphi \stackrel{\circ}{\models} 1$ .

```
M \models \varphi עבורו M עבורו \sigma מילון תהא \sigma נוסחה אזי מבנה \sigma
                M\models \varphi מתקיים \varphi\in \Gamma עבורה לכל \Gamma עבורה מילון אזי קבוצת מילון מילון מתקיים M מבנה: יהי
                                                                                                   M\models\Gamma אזי אזי בכונה ב־M מבנה על מילון \sigma ותהא ותהא \sigma קבוצת נוסחאות נכונה ב־M
                                                                                                          M\modelsarphi עבורו קיים מבנה M עבורו מילון אזי נוסחה arphi עבורה מינה מבנה M
\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi אזי \varphi אזי \sigma מילון תהא \Gamma אז של \sigma מילון. נוסחה עבורה אם \sigma נוסחה עבורה אם \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma מילון ותהא \sigma מילון נוסחאות ותהא \sigma
                                                                                                  \{arphi\} \stackrel{v}{\models} \psi וכן \{\psi\} \stackrel{v}{\models} arphi עבורן arphi, \psi וכן אזי נוסחאות מילון אזי נוסחאות arphi, \psi
                                                                  arphi נוסחה \sigma מתקיים \sigma מתקיים עבורה לכל עבורה לכל אזי נוסחה מילון אזי מילון אזי נוסחה מבנה על מבנה על מילון אזי נוסחה מילון אוויים מילון אילון אוויים מילון אילון אייים מילון אוויים מילון אוויים מילון אוויים מילון אילון אילון אייים מילון אייים מילון אייים מ
                                                                                                                                                                             \stackrel{\smile}{\models} \varphi אזי יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה מילון יהי יהי סימון: יהי
                                                                                                                         \begin{pmatrix} v \\ \models \varphi \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ \models \varphi \end{pmatrix} נוסחה אזי \begin{pmatrix} v \\ \models \varphi \end{pmatrix} מילון ותהא \varphi נוסחה אזי \exists x \varphi תקפה וכן \forall x \varphi תקפה. \forall x \varphi
                                                                            טענה: יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה עבורה \forall x \varphi תקפה אזי \varphi תקפה. \sigma יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה עבורה \varphi נוסחה אזי \sigma מילון תהא \sigma קבוצת נוסחאות ותהא \sigma נוסחה אזי \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma קבוצת נוסחאות ותהא \sigma נוסחה אזי \sigma
                                                                                                                                                                              .FV (arphi)=arphi עבורה arphi עבורה \sigma מילון אזי נוסחה arphi
                                                                               .\Big(\Gamma \stackrel{t}{\models} arphi\Big) \Longleftarrow \Big(\Gamma \stackrel{v}{\models} arphi\Big) אזי נוסחה אזי קבוצת פסוקים ותהא קבוצת פסוקים ותהא מילון תהא
                                            .(\Gamma \not\models \neg arphi) הינה \Gamma \cup \{arphi\} הינה \varphi נוסחה אזי (\varphi \in \Gamma מילון תהא \varphi קבוצת נוסחאות ותהא \varphi נוסחה אזי (\varphi \in \Gamma
                                                                              . (\varphi\Longleftrightarrow\psi))\Longleftrightarrowסענה: יהי \sigma מילון ותהיינה \varphi,\psi נוסחאות אזי (\varphi,\psi הון דשקולות)
                        .= עזרת את ונסמן את ונסמן \mathrm{Id}^M=\mathrm{Id}_M נגדיר ולכל מבנה M דו־מקומי אזי לכל דו־מקומי אזי לכל מילון בעל אח מילון מילון אוויון
                                                                                                                                                  אזי משתנה x משתנה אזי רהיו שם עצם יהיו יהיו יהיו יהיו
                                                                                                                                                                                                                  s\left[r/x
ight]=s אם s סימן קבוע אזי s •
                                                                                                                                                                                                                                  s[r/x] = r אזי s = x אם s = x
                                                                                                                                                                                                              s[r/x]=s משתנה אזי s
eq x •
                                                                                                                                                  s\left[r/x
ight]=f\left(t_1\left[r/x
ight]\ldots t_n\left[r/x
ight]
ight) אם s=f\left(t_1\ldots t_n
ight) אם \bullet
                                                                                                                       משתנה אזי x משתנה אזי שמות עצם ויהי x משתנה אזי הצבת שם עצם בנוסחה: תהא
                                                                                                                                             .arphi\left[r/x
ight]=R\left(t_{1}\left[r/x
ight]\ldots t_{n}\left[r/x
ight]
ight) אם arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight) אם arphi
                                                                                                                                                                                                   .\varphi\left[r/x
ight]=\neg\left(lpha\left[r/x
ight]
ight) אז arphi=\neglpha אם arphi
                                                                                                                                                                                 .arphi\left[r/x
ight]=lpha\left[r/x
ight]\circeta\left[r/x
ight] אם arphi=lpha\circeta אם arphi
                                                                                                                                                                                                                \varphi[r/x] = \forall x \alpha אזי \varphi = \forall x \alpha •
                                                                                                                                                                                                               \varphi\left[r/x
ight]=\exists xlpha אזי arphi=\exists xlpha •
                                                                                                                                                          .arphi\left[r/x
ight]=orall y\left(lpha\left[r/x
ight]
ight) אם arphi=orall y lpha באשר arphi=\gamma באשר
                                                                                                                                                          .arphi\left[r/x
ight]=\exists y\left(lpha\left[r/x
ight]
ight) אז אי x
eq y באשר arphi=\exists ylpha אם arphi=\exists ylpha
                                                                                                                                                שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא \varphi נוסחה ויהי x משתנה אזי
```

.r אזי שם עצם  $arphi=R\left(t_{1}\dots t_{n}
ight)$  אם ullet

If any are the  $\varphi = \operatorname{It}(\iota_1 \dots \iota_n)$  are

 $\dot{\models} \varphi$  אזי זיהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה  $\tau$ תקפה אזי  $\sigma$ 

 $M \models \varphi$  אזי M מבנה על מילון  $\sigma$  ותהא  $\sigma$  נוסחה נכונה ב־M מבנה על מילון

 $M,v\models arphi$  מבנה: יהי M מבנה על מילון  $\sigma$  אזי נוסחה arphi עבורה לכל השמה מתקיים מבנה:

- lphaאזי שם עצם r באשר אונפשי להצבה ב־ אזי שם אזי שם אזי שם אזי ש
- etaוכן ב־lpha וכן הצבה להצבה lpha אם עצם א אזי שם עצם lpha אם lpha
- x וכן x אינו מופיע או אינו חופשי בי $\varphi=\forall y \alpha$  אם  $\varphi=\forall y \alpha$
- x אינו מופיע או אינו חופשי ב־ $\varphi=\exists y$  אם אוי שם עצם  $\sigma=\exists y$
- $.y\notin \mathrm{FV}\left(r\right)$ וכן הבבה ב $\alpha$ רם שם עצם אזי שם אזי אזי אזי וכן  $\varphi=\forall y\alpha$  אם יוכן  $\varphi=\forall y\alpha$
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$  וכן  $lpha = \exists y lpha$  או שם עצם r באשר r או או אי  $x \in \mathrm{FV}(arphi)$  וכן  $arphi = \exists y lpha$

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר  $f:\{$ ווסחאות $\} 
ightarrow \mathcal{P}\left(\{x_i\}
ight)$  כך

 $f(\varphi) = \emptyset$  אזי  $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$  •

```
f(\varphi) = f(\alpha) אזי \varphi = \neg \alpha אם •
```

$$f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$$
 אזי  $\varphi = \alpha \circ \beta$  אם •

$$f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$$
 אזי  $\varphi = \forall x \alpha$  אם •

$$f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$$
 אזי  $\varphi = \exists y \alpha$  אם •

עבור חדש עבור  $y\in \mathrm{FV}(r)$  לאכל (קיכל רבבה מופע קשור אזי  $y\in \mathrm{FV}(r)$  למה: תהא  $y\in \mathrm{FV}(r)$  למה: עבור  $y\in \mathrm{FV}(r)$  שם עצם אזי  $y\in \mathrm{FV}(r)$  חופשי להצבה ב־ $y\in \mathrm{FV}(r)$  לא נוצר מופע קשור חדש עבור  $y\in \mathrm{FV}(r)$  ב־ $y\in \mathrm{FV}(r)$ 

 $v\left[\overline{v}(r)/x
ight](y)=\left\{egin{array}{ll} v(y) & x
eq y \\ \overline{v}(r) & ext{else} \end{array}
ight.$  שם עצם אזי נגדיר השמה s שם עצם יהי s משתנה ויהי s שם עצם אזי נגדיר השמה אזי נגדיר השמה אזי נגדיר השמה אזי נגדיר השמה אזי משתנה ויהי s

 $.\overline{v}\left(s\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(s
ight)$  אזי שם עצם אזי משתנה משתנה x משתנה x יהי שם עצם יהי

 $.\overline{v}\left(arphi\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(arphi
ight)$  אזי arphi אזי משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־arphi אזי arphi נוסחה יהי x משתנה ויהי

 $\overline{v}\left(arphi
ight)=\overline{v\left[v(x)/y
ight]}\left(arphi\left[y/x
ight]
ight)$  אזי arphi אוי משתנה ויהי y משתנה ויהי y משתנה ב־arphi משקנה:

טענה שינוי שם משתנה: תהא  $\varphi$  נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־ $\varphi$  אזי

- $.(\exists x\varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi [y/x])) \bullet$
- $.(\forall x\varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi [y/x])) \bullet$

 $X_{\{arphi|}$  נוסחה חסרת כמתים יPNF הצורה הנורמלית הצורה הנורמלית

מסקנה: תהא  $\varphi$  נוסחה אזי ( $\varphi$  בצורת PNF) (קיימת נוסחה  $\alpha$  חסרת כמתים וכן  $\alpha$  משתנים וכן בצורת  $\varphi$  בצורת (קיימת נוסחה  $\alpha$  הסרת כמתים וכן  $\varphi$  בצורת ( $\varphi=Q_1x_1\dots Q_nx_n\alpha$ 

טענה: תהיינה  $arphi,\psi$  נוסחאות אזי

- $(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)) \bullet$
- $(\exists x (\varphi \lor \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \lor (\exists x \psi)) \bullet$
- $.((\forall x\varphi)\lor\psi)\equiv^t(\forall x\,(\varphi\lor\psi))$  אזי  $x\notin\mathrm{FV}\,(\psi)$  תהא
- $((\exists x\varphi) \land \psi) \equiv^t (\exists x (\varphi \land \psi))$  אזי  $x \notin FV(\psi)$  תהא
  - $.(\neg(\forall x\varphi)) \equiv^t (\exists x(\neg\varphi)) \bullet$
  - $(\neg (\exists x\varphi)) \equiv^t (\forall x (\neg \varphi)) \bullet$

 $.arphi\equiv^t lpha$  עבורה PNF משפט: תהא קיימת נוסחה אזי קיימת נוסחה משפט

 $arphi=orall x_1\dotsorall x_n$  המקיימת החסות אוניברסלי: פסוק arphi עבורו קיימת נוסחה חסרת כמתים באשר באשר אוניברסלי: פסוק arphi עבורו קיימת נוסחה

 $arphi=orall x_1\ldotsorall x_n$ ביסוק arphi עבורו קיימת נוסחה lpha חסרת כמתים באשר  $\{x_1\ldots x_n\}$  המקיימת נוסחה lpha

 $(\sigma \cup \{c\})$  ספיקה מעל  $\varphi$  ( $\sigma \cup \{c\}$ ) אזי  $\sigma$  טענה: יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  ויהי סימן קבוע אזי  $\sigma$  אזי  $\sigma$  אזי  $\sigma$  מילון תהא

 $a_1 \ldots a_n 
otin \sigma$  סקולמיזציה למילון: יהי  $\sigma$  מילון ויהיו מילון יהיו סימני קבועים ופונקציות אזי  $a_1 \ldots a_n 
otin \sigma$ 

 $a_1\dots a_n$  אזי קבועים סקולם: יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $\{a_1\dots a_n\}$  סקולמיזציה של סימני קבועים ל $\sigma$ 

 $a_1 \dots a_n$  אזי  $\sigma$  מילון ויהי  $a_1 \dots a_n$  סקולמיזציה של פונקציות ל־ $\sigma$  אזי מילון ויהי

טענה: תהא  $\forall y_n \ (\varphi \ [f(y_1...y_n)/x]))$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$  ספיק מעל סקולמיזציה  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \ \exists x \varphi$ 

 $\varphi$ ) עבורו  $\sigma'$  עבורו  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון פסוק אוניברסלי  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון  $\sigma$  מעל מילון  $\sigma$  מעל מילון  $\phi$  באשר  $\psi$  מעל מילון  $\psi$  באשר  $\psi$  (שספיק).

המקיים WFF מעל פסוק המקבל ומחזיר משתנים וכמתים משתנים וכמתים הסרת המקבל מוסחה המקבל המקבל איוויון ומחזיר פסוק המקבל המקנים המקיים אלגוריתם המקבל משתנים וכמתים המחור משתנים וכמתים המקבל המקבים המקב

- .(ספיק) ספיק) ספיק) •
- .(טאוטולוגיה) טאוטולוגיה)  $\alpha$

 $v\left(p_i
ight)=(M\models lpha_i)$  כך WFF למה: תהא  $lpha_1\ldotslpha_k$  נגדיר השמה מיחסים וכמתים וכמתים וכמתים  $(M\models\psi)\Longleftrightarrow(\overline{v}\left( ext{FOLWFF}\left(\psi
ight)
ight)=T)$ 

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה M מילון אזי מילון ללא שיוויון מבנה  $\sigma$  מילון יהי מבנה מבנה

- $.\alpha^M=a$ עבורו סגור שם שם קיים  $a\in D^M$ לכל
  - $\alpha^M \neq \beta^M$  יהיו אזי שמות עצם שונים  $\alpha, \beta$  יהיו •

בן־מנייה.  $D^M$  אזי של  $\sigma$  של הרברנד מבנה Mויהי בן־מנייה מיקלו, יהי יהי  $\sigma$ 

 $D^M = \{ arphi \mid \sigma$ ם משתנים חסר ששם לכתוב לכתוב כי ניתן כי ניתן נובע כי מהגדרת מבנה מהגדרת מהגדרת לכתוב לי

 $\sigma$  על M על מסקנה: יהי  $\sigma$  מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד

טענה: יהי  $v\left(x_{i}
ight)=t_{i}$  מבנה הרברנד מעל  $\sigma$  ותהא  $\sigma$  השמה עבורה M מבנה הרברנד

- $.\overline{v}\left(r
  ight)=r\left[t_{1}/x_{1},\ldots,t_{n}/x_{n}
  ight]$  אזי FV  $(r)=\{x_{1}\ldots x_{n}\}$  יהי r שם עצם באשר
- $(M,v\models\varphi)\Longleftrightarrow (M\models\varphi\left[t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n
  ight])$  אזי FV  $(\varphi)=\{x_1\ldots x_n\}$  נוסחה באשר
  - . עבורו g עבורו g טפיקה) פפיקה פיקה) ספיקה אזי (קיים שם עצם סגור שור g עבורו g טפיקה).
- . תקפה)  $\varphi$  (s/x עבורו עבורה s/x פסוק אזי (s/x תקפה) תקפה) מוסחה עבורה f/x עבורו f/x עבורו f/x
  - . תהא  $\varphi$  נוסחה אזי ( $\varphi x \varphi$ ) ספיקה) שם עצם סגור א מתקיים כי  $\forall x \varphi$ ) ספיקה).
- . תקפה)  $\varphi$  (s/x מתקיים כי s/x מתקיים עצם חסר שם עצם (לכל שם עצה) תקפה) אזי (s/x פסוק אזי (s/x תקפה) תקפה).

.(משפט הרברנד: יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $\varphi$  פסוק אוניברסלי אזי ( $\varphi$  ספיק) מילון ויהי  $\sigma$  מילון ויהי  $\sigma$  מילון משפט הרברנד:

אזי FV  $(arphi)=\{x_1\dots x_n\}$  מופעי בסיס: תהא arphi נוסחה חסרת כמתים באשר

.GroundInstance  $(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi) = \{ \varphi \left[ s_1/x_1, \dots, s_n/x_n \right] \mid GroundInstance \left( \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \right) = \{ s_1 \dots s_n \}$ 

. GroundInstance  $(\Gamma)=\bigcup_{\varphi\in\Gamma}$  GroundInstance ( $\varphi)$  אזי אוניברסליים אוניברסליים האזי קבוצת דהא סימון: תהא ח

טענה: תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים סגורים וכמתים אזי ( $\Gamma$  ספיקה) ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- .ספיקה  $\Gamma$
- . ספיקה במבנה הרברנד  $\Gamma$
- ספיקה. GroundInstance  $(\Gamma)$
- ספיקה במבנה הרברנד. GroundInstance  $(\Gamma)$

משפט הקומפקטיות: יהי  $\sigma$  מילון ללא שיוויון תהא קבוצת נוחסאות ותהא מילון יהי מילון משפט הקומפקטיות:

- $\Delta$  ספיקה) $\Longrightarrow$ (לכל  $\Delta\subseteq\Gamma$  סופית  $\Delta$  ספיקה).  $\bullet$
- $\Delta \mathrel{\mathop{\models}}_v \varphi$  סופית עבורה  $\Delta \subseteq \Gamma$  קיימת  $\Delta \subseteq \Gamma$  ( $\Gamma \mathrel{\mathop{\models}}_v \varphi$ ).
- $\Delta \subseteq \varphi$  סופית עבורה  $\Delta \subseteq \Gamma$  (קיימת  $\Delta \subseteq \Gamma$ ) (קיימת  $\Delta \subseteq \Gamma$ ).

 $(y^-)$  משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  מעל  $\{E\left(\cdot,\cdot\right)\}$  המקיימת (x,y) משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות (x,y) מעל הורם (x,y) משפט: יהי (x,y) משפט: יהי (x,y) נוסחה ללא כמתים מעל (x,y) אזי (x,y) תקפה)(x,y) תקפה שמות עצם סגורים (x,y) נוסחה ללא כמתים מעל (x,y) אזי (x,y) תקפה).

הערה: ניתן להגדיר מילון ומבנה לא בני־מנייה.

משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי  $\sigma$  מילון בן־מנייה ותהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  אזי ( $\varphi$  ספיקה) $\iff$ (קיים מבנה בן־מנייה M מעל  $\sigma$  בו  $\varphi$  ספיקה).

 $(|M|=\kappa)\iff$ מסקנה: יהי  $\sigma$  מעל  $\sigma$  מעל מיימת המיימת אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות מיימת  $\sigma$  מעל  $\sigma$  המקיימת  $\sigma$  מולן בן־מנייה ותהא א עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות  $\sigma$  מעל  $\sigma$  המקיימת  $\sigma$  ( $M\models\Gamma$ ).

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

(האלגוריתם מחזיר תשובה) $(\varphi)$  המקבל מוסחה קיים אלגוריתם מחזיר תשובה) משפט בדיקת מחזיר תשובה קיים אלגוריתם מחזיר תשובה

בעזרת  $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$  את ניתן לרצף אזי האם צבועה צבע שלהם אלי וכן כל צלע מאורך  $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$  את ריבועים אזי האם ניתן לרצף את בעלע חיבורם.

**טענה**: לא קיים אלגוריתם המכריע את בעיית הריצוף.

משפט ב'רץ'־טיורינג: לא קיים אלגוריתם המקבל נוסחה  $\varphi$  ומכריע האם היא תקיפה.

- $\forall x (E(x,x))$  רפלקסיבי:
- $\forall x \forall y (E(x,y) \Longrightarrow E(y,x))$  סימטרי:
- $\forall x \forall y \forall z ((E(x,y) \land E(y,z)) \Longrightarrow E(x,z)) :$  טרנזיטיבי:
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
  ight)
  ight) \Longrightarrow E\left(f\left(x_1 \ldots x_n
  ight), f\left(y_1 \ldots y_n
  ight)
  ight)
  ight)$  סימן פונקציה מתקיים  $f \in \sigma$  לכל
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
  ight)
  ight) \Longrightarrow \left(R\left(x_1 \ldots x_n
  ight) \Longleftrightarrow R\left(y_1 \ldots y_n
  ight)
  ight)
  ight)$  לכל  $R \in \sigma$  לכל  $\sigma$

הערה: במקום שיוויון  $\sigma$  ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן  $\sigma_E$  את המילון עם קונגרואנציה במקום ועיוויון  $\sigma$ 

מעל  $\sigma_E$  מעל מבנה  $M_E$  מבנה אזי מבנה M מבנה על שיוויון ויהי מילון יהי מילון יהי מילון מחלקות קונגרואנציה:

- $.D^{M'}=D^{M}/E \bullet$
- $.f^{M'}\left([a_1]_E\,,\ldots,[a_n]_E
  ight)=\left[f^M\,(a_1\ldots a_n)
  ight]_E$  מתקיים לכל סימן פונקציה לכל סימן מתקיים ש
  - $.R^{M'}\left([a_1]_E\,,\ldots,[a_n]_E
    ight) \Longleftrightarrow R^M\left(a_1\ldots a_n
    ight)$  מתקיים  $R\in\sigma$  לכל סימן יחס יחס  $\bullet$

 $R_1\dots R_m$  וכן arphi וכן סימני הפונקציות ביחס קונגרואנציה: תהא arphi נוסחה מעל מילון עם שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא arphi נוסחה מעל מילון עם שיוויון סימני היחס ביarphi אזי

 $.arphi_E=arphi\left[E/=
ight]\wedge\left(\bigwedge_{i=1}^n\left(f_i^{-1}
ight)\wedge\left(\bigwedge_{i=1}^m\left(f_i^{-1}
ight)
ight)\wedge\left(\bigwedge_{i=1}^m\left(E_i^{-1}
ight)
ight)\wedge\left(\bigwedge_{i=1}^m\left(E_i^{-1}
ight)
ight)$ יחס קונגרואנציה ביחס ל $v_E:\{x_i\}
ightarrow D^{M_E}$  יחס קונגרואנציה מעל  $\sigma$  ותהא v השמה נגדיר השמה מעל מילון  $\sigma$  עם שיוויון יהי  $v_E:\{x_i\}
ightarrow D^{M_E}$  מבנה מעל  $v_E:\{x_i\}
ightarrow D^{M_E}$  השמה נגדיר השמה מעל מילון  $v_E:\{x_i\}
ightarrow D^{M_E}$  באשר  $v_E:\{x_i\}
ightarrow D^{M_E}$  אזי  $v_E:\{x_i\}$  אזי  $v_E:\{x_i\}$ 

 $\sigma'$  משפט:  $\phi$  מעל מילון  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון מחזיר נוסחה חסרת שיוויון  $\sigma$  מעל מילון עם שיוויון  $\psi$  באשר  $\psi$  באשר  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון עם שיוויון  $\phi$  ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון  $\psi$  באשר  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון עבורו ( $\psi$  ספיק).

.(ספיקה) קבוצת נוסחאות מעל  $\sigma$  עם שיוויון אזי  $\Gamma$  ספיקה) משפט: תהא קבוצת נוסחאות מעל  $\sigma$ 

 $\Delta$  סופית G סופית (לכל G ספיקה) משפט הקומפקטיות: יהי G מילון עם שיוויון תהא קבוצת נוחסאות ותהא קבוצת נוחסאות ותהא ספיקה) משפט הקומפקטיות: יהי G מילון עם שיוויון תהא ספיקה

 $\operatorname{Gen}: rac{lpha}{orall xlpha}$  יהי מילון ותהא מוסחה מילון יהי  $\sigma$  מילון יהי

אזי שיוויון אזי  $\sigma$  יהי (HC) מערכת ההוכחה מערכת מערכת

- $\Sigma = \sigma$  :אלפבית
- $N=X_{\{t\mid$ שם עצם  $t\},\{\lnot,\Longrightarrow\}}$  :נוסחאות:
  - אקסיומות:

$$A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$

$$A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$$
 -

$$A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$
 -

$$A_4 = ((\forall x \alpha) \Longrightarrow \alpha \, [t/x])$$
 יהי אזי מחופשי להצבה במקום  $x$  ב־מ

$$.A_{5}=((\forall x\,(\alpha\Longrightarrow\beta))\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow(\forall x\beta)))$$
 אזי  $x\notin\mathrm{FV}\,(\alpha)$  יהי -

 $.F = \{ MP, Gen \}$  כללי היסק:

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

 $(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha) \Longrightarrow \left(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha\right)$  אזי אזי  $(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha)$  הנחות מעל HC הנחות מעל HC הנחות מעל  $(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha) \Longrightarrow (\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha)$  משפט הנאותות: יהי  $(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha) \Longrightarrow (\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha)$  וכן באשר  $(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha) \Longrightarrow (\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha)$  נוסחאות אזי  $(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha) \Longrightarrow (\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha)$  נוסחאות אזי  $(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha) \Longrightarrow (\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha)$  וכן בהוכחה לא הופעל כלל Gen משפט הדידוקציה: תהיינה  $(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha) \Longrightarrow (\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha)$  וכן בהוכחה לא הופעל כלל על משתנה חופשי ב- $(\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha) \Longrightarrow (\Gamma \ \vdash_{\mathrm{HC}} \alpha)$ 

 $\left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$  אזי אור אנדל: יהי  $\sigma$  מילון ללא שיוויון תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל אור אור ותהא משפט השלמות של אדל: יהי מילון ללא שיוויון היינה וותהא