```
\Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n] \ .a_i < x_i < b_i\} אזי a,b \in \mathbb{R}^n יהיו תיבה פתוחה: יהיו
                                                                           .\overline{\Pi}_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid orall j\in [n]\,.a_i\leq x_i\leq b_i\} אזי a,b\in\mathbb{R}^n תיבה סגורה: יהיו
                                                                                 \exists r>0.B_{r}\left(x
ight)\subseteq M המקיימת x\in M אזי אזי M\subseteq\mathbb{R}^{n} נקודה פנימית: תהא
                                                     \operatorname{Lint}(M) = \overset{\circ}{M} = \{x \in M \mid M \; פנים של קבוצה: תהא M \subseteq \mathbb{R}^n אזי M \subseteq \mathbb{R}^n פנים של קבוצה:
                                                                                                                                  M=\stackrel{\circ}{M} עבורה M\subset\mathbb{R}^n קבוצה פתוחה:
                           נקודה חיצונית. \exists r>0.B_r\left(x\right)\subseteq\mathbb{R}^n\backslash M המקיימת x\in\mathbb{R}^n ותהא ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי x נקודה חיצונית.
                      נקודה מבודדת: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת x\in M האזי x נקודה מבודדת: תהא
                                     נקודת שפה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n ותהא x נקודת שבה: לא נקודה פנימית ולא נקודה אזי x נקודת שבה.
                                                                            .\partial M=\{x\in M\mid M שפה של קבוצה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי M\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                AM\subseteq M עבורה סגורה: קבוצה M\subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                          \overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M אזי אזי M \subseteq \mathbb{R}^n סגור של קבוצה: תהא
                                                            (\mathbb{R}^n \backslash M) טענה: תהא M \subseteq \mathbb{R}^n אזי (x נקודה חיצונית של אזי (x נקודה פנימית של אזי (x נקודה חיצונית של
                                                                                                                  . מסקנה: תהא M^{\mathcal{C}} אזי (M פתוחה)\Longrightarrow תהא M\subseteq\mathbb{R}^n סגורה).
                                                                                                     \exists r>0.M\subseteq B_{r}\left(0
ight) המקיימת M\subseteq\mathbb{R}^{n} קבוצה חסומה:
                                                                                                                               . סגורה וחסומה קבוצה קבוצה קבוצה קומפקטית: קבוצה קומפקטית
טענה היינה בורל: תהא K\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n אזי (K\subseteq\mathbb{R}^n אזי לכל לכל היינה בורל: תהא אזי K\subseteq\mathbb{R}^n אזי אזי (לכל
                                                                                                                                                               .(\exists \mathcal{B} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{B}}I_n
                                                                                                                                               a^{(k)}=a\left(k
ight) אזי a\in\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{\mathbb{N}} סימונ: תהא a\in\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{\mathbb{N}}
                                           \lim_{k	o\infty}a^{(k)}=L אזי \lim_{k	o\infty}\|a^{(k)}-L\|=0 עבורן L\in\mathbb{R}^n אוו אזי a\in(\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} גבול: תהא
                                                                          0 \xrightarrow[x 	o a]{} \lim_{x 	o a} נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד.
                                            a\in [n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_j\Longleftrightarrow \left(a^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right) אזי b\in \mathbb{R}^n ויהי a\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} משפט: תהא a\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} ויהי a\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.
                . \left(\forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \left\|a^{(m)} - a^{(p)}\right\| < \varepsilon\right) \Longleftrightarrow (\mathsf{DR}) \text{ (In } a) אזי (a \in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} )
                                                                                     משפט בולצאנו ווירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.
     a^{(k_i)}\in K המקיימת a^{(k_i)}\in K אזי (לכל קומפקטית) קיימת a\in K^\mathbb{N} קיימת אזי (לכל קומפקטית) אזי אזי K\subseteq \mathbb{R}^n המקיימת
       f_i:A	o\mathbb{R} כאשר f=\langle f_1,\dots,f_m
angle הערה: תהא f:A	o\mathbb{R}^m כאשר f:A	o\mathbb{R}^m הערה: תהא
                                                                                    אזי L\in\mathbb{R}^m ותהא a\in\mathbb{R}^n תהא f:A	o\mathbb{R}^m תהא A\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                           \lim_{x\to a} f(x) = L אזי \forall x \in A^{\mathbb{N}}. (x^{(k)} \to a) \Longrightarrow (f(x^{(k)}) \to L) היינה: אם
                  \lim_{x \to a} f\left(x
ight) = L אזי \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in A \setminus \{a\}. \ \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f\left(x
ight) - L\| < \varepsilon סושי: אם •
                                                                                                          מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.
                                                 A = \lim_{x \to a} f(x) עבורה A \in A אזי A \in \mathbb{R}^n תהא A \subseteq \mathbb{R}^n תהא רציפות בנקודה:
       A\subseteq C(B) (ביפה נקודתית עבור כל B\subseteq A אוי ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n אוי ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n אוי ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n איי ותהא
                               A\subseteq A משפט: תהא A\subseteq \mathbb{R}^n תהא A\subseteq \mathbb{R}^m ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n משפט: תהא
                                                                                                    מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.
                                  . וכן f,f^{-1} הפיכה עבורה f:A	o B אזי B\subset\mathbb{R}^n וכן A\subset\mathbb{R}^n הפיכה עבורה A\subset\mathbb{R}^n רציפות.
                                                                                                                             A:I	o\mathbb{R}^m עקומה פרמטרית: יהיI\subseteq\mathbb{R} יהי
                                                                                                                                                                  מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.
```

 $\gamma\left(t
ight)=\left(1-t
ight)a+tb$  כך כך  $\gamma:\left[0,1
ight] o \mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר: יהיו  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה  $a,b\in\mathbb{R}^m$  יהיו  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a,b\in\mathbb{R}^m$ 

 $.B_r\left(a
ight)=\{x\in\mathbb{R}\mid \|x-a\|< r\}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $a\in\mathbb{R}^n$  יהי הנור: יהי הי  $\overline{B}_r\left(a
ight)=\{x\in\mathbb{R}\mid \|x-a\|\leq r\}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $a\in\mathbb{R}^n$  סבירה: יהי הי  $a\in\mathbb{R}^n$  ויהי  $r\in\mathbb{R}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $r\in\mathbb{R}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$ 

```
A,b\in M. [a,b]\subseteq M המקיימת M\subseteq \mathbb{R}^n קבוצה קמורה: קבוצה
                                                                                         . טענה: יהי B_{r}\left(a\right),\overline{B}_{r}\left(a\right) אזי r\in\mathbb{R} ויהי a\in\mathbb{R}^{n} קבוצות קמורות
       \gamma\left(1
ight)=y וכן \gamma\left(0
ight)=x המקיימת \gamma:\left[0,1
ight]	o M קיימת מסילה x,y\in M וכן עבורה לכל M\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                           תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.
                            . \biguplus \mathcal{A} = M פתוחה אזי קיימת \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_{<leph_0}\left(\mathbb{R}^n
ight) פתוחה אזי קיימת M \subseteq \mathbb{R}^n קבוצה של תחומים ארים עבורה
                     [f(a),f(b)]\subseteq f([a,b]) מתקיים f(a)< f(b) עבורן a,b\in A מבקיימת לכל f:A	o \mathbb{R}
                                                                טענה: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) קשירה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n
                                         עבורם x,y\in\mathcal{K} אזי קיימים אזי f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}
ight) עבורם אזי קומפקטית תהא אזי קיימים אזי קומפקטית עבורם
                                                                                                                                                                      f(\mathcal{K}) = [f(x), f(y)]
                                                                                רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n אזי המקיימת
                                                                                     \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in \mathcal{M}. \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon
                                                                          . טענה: תהא f \in C(\mathcal{K},\mathbb{R}^m) אזי קומפקטית ותהא \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n אזי \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n
                           מתקיים \lambda \in \mathbb{R} ולכל a \in L מרחב יהי עבורה לכל v: L 	o \mathbb{R} אזי מעל n אזי מנרמה: יהי a \in L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל
                                                                                                                        (\upsilon(a) > 0) \land ((\upsilon(a) = 0) \iff (a = 0)) \bullet
                                                                                                                                            .\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right) :הומוגניות
                                                                                                   v\left(a+b\right)\leq v\left(a\right)+v\left(b\right) אי שיוויון המשולש (אש"מ): •
                                                                  \forall x \in \mathbb{R}^n. v\left(x
ight) \leq c \, \|x\| עבורו עבורו עבורם אזי קיים v: \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} עבורו טענה: תהא
                                                                                                                        v \in C\left(\mathbb{R}^n
ight) נורמה אזי v:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} טענה: תהא
                                                                  \forall x \in \mathbb{R}^n.c \, \|x\| \leq v \, (x) עבורו c>0 נורמה אזי קיים v:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} עהא
                                             a\cdot \eta \leq v \leq b\cdot \eta נורמות שקולות: v,\eta:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} נורמות עבורן קיימים u,\eta:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R}
                                                                                                                                          טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.
                                                                                                                  תהא v,\|\cdot\| נורמה אזי v:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} שקולות.
                            (v\left(x^{(k)}
ight)	o 0)\Longleftrightarrow (
ho\left(x^{(k)}
ight)	o 0) אזי x\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} נורמות ותהא v,
ho:\mathbb{R}^n	o \mathbb{R} מסקנה: תהיינה
                                                            \|v\|_p=(\sum_{i=1}^n|v_i|^p)^{rac{1}{p}} כך \|\cdot\|_p:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} נגדיר נורמה p\in\mathbb{N}_+ עבור \ell_p
                                    \|v\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|v\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|v\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|v\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כורמת \gamma:(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h} אזי \alpha\in(0,1) ויהי \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m אזי \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m מסקנה: תהא \gamma'(a)=\begin{pmatrix}\gamma'_1(a)\\\vdots\\\gamma'_m(a)\end{pmatrix} אזי \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m
      המקיימת L\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) עבורה קיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} אזי a\in\mathcal{U} תחום ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת
                                                                                                                                   f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)
                                                        f\in\mathcal{D}\left(a
ight) אזי a\in\mathcal{U} איזי f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יהי
                                                      f\in\mathcal{D}\left(a
ight)\Longrightarrow f\in C\left(a
ight) אזי a\in\mathcal{U} ויהי f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי
                                      \operatorname{grad} f(a) = [L]_{\operatorname{ct}} אזי אזי f: \mathcal{U} 	o \mathbb{R} ותהא ותהא a \in \mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי יהי

abla f\left(a
ight)=\mathrm{grad}f\left(a
ight) אזי דיפרנציאבילית דיפרנציאביל ותהא a\in\mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n דיפרנציאבילית יהי
                           .rac{\partial f}{\partial x_i}\left(a
ight)=\lim_{h	o 0}rac{f(a+hx_i)-f(a)}{h} אזי a\in\mathcal{U} ויהי ווהי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n נגזרת חלקית: יהי
                                                                                                     .f'_{x_i}=rac{\partial f}{\partial x_i} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n הערה: יהי
                                           a_{i}=a_{i}משפט: יהי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי
                .
abla f\left(a
ight) = \left(rac{\partial f}{\partial x_{1}}\left(a
ight),\ldots,rac{\partial f}{\partial x_{n}}\left(a
ight)
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R} תחום ותהא
                                \mathcal{U} = \mathcal{U}(a) (a) איי (a \in \mathcal{U} איי ויהי a \in \mathcal{U} ויהי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n הערה: יהי
המקיימת L\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) עבורה קיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m אזי a\in\mathcal{U} תחום ויהי ע\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת יהי
                                                                                                                                   f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)
       (f\in\mathcal{D}\left(a
ight))\Longleftrightarrow (orall i\in\{1\dots m\}\,.f_i\in\mathcal{D}\left(a
ight)) איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n ויהי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n תחום ותהא f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n איזי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n
                                      (\mathcal{D}_{f}\left(a
ight))_{i,j}^{'}=rac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\left(a
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^{m} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}
```

```
(\forall x \in \mathcal{U}.f(x) = Ax + c) \Longrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = A) אזי A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) תהא
                                                                       \mathcal{D}_f \in C\left(\mathcal{U}
ight) וכן f \in \mathcal{D}\left(\mathcal{U}
ight) המקיימת המקיימת שזי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n תחום אזי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n וכן
                                                                                                                  f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) אזי ברציפות אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n גזירה ברציפות
                                                                             . orall i \in [m] \,. orall j \in [n] \,. rac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C \left( \mathcal{U} 
ight) איז f \in C^1 \left( \mathcal{U}, \mathbb{R}^m 
ight) תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n איז f \in \mathcal{D} \left( \mathcal{U} 
ight) איז \forall i \in [m] \,. orall j \in [n] \,. rac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C \left( \mathcal{U} 
ight) עבורה f : \mathcal{U} 	o \mathbb{R}^m איז שפט: יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m עבורה \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n משפט: יהי
                                                 \mathcal{L}_{i}\left(orall i\in\left[m
ight].orall j\in\left[n
ight].rac{\partial f_{i}}{\partial x_{i}}\in C\left(\mathcal{U}
ight)
ight)\Longleftrightarrow\left(f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)
ight) אזי f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{m} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                                  d_{\overline{\partial v}}(a)=\lim_{h	o 0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h} אזי a\in \mathcal{U} ויהי v\in \mathbb{S}^{n-1} יהי f:\mathcal{U}	o \mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                         .rac{\partial f}{\partial v}(a)=
abla f\left(a
ight)\cdot v אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} ותהא v\in\mathbb{S}^{n-1} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מענה: יהי
                                                 \frac{\partial f}{\partial x}(a)=\mathcal{D}_f(a)\cdot v אזי f\in\mathcal{D}(a) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m ותהא v\in\mathbb{S}^{n-1} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: יהי
                                                                                                                                 .(טענה: יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n תחום אזי \mathcal{U} קשירה מסילתית אזי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n יהי יהי
                                       (orall x\in\mathcal{U}.f(x)=c) \Longleftarrow (orall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0) משפט: יהי \mathcal{U}=\mathcal{U}ת תחום תהא \mathcal{U}=\mathcal{U}ויהי ויהי \mathcal{U}=\mathcal{U}
                                 \mathcal{U}(x) \in \mathcal{U}(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}(x) \in \mathcal{U}(x) = 0) אזי c \in \mathbb{R}^m ויהי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n מסקנה: יהי
             A: \mathcal{U}. ויהי A: \mathcal{U}. 
        A\in\mathcal{U}.f\left(x
ight)=Ax+c\Longleftrightarrow\left(orall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x
ight)=A
ight) אזי C\in\mathbb{R}^{m} ויהי A\in M_{m	imes n}\left(\mathbb{R}
ight) תהא f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{m} מסקנה: תהא
                                                                                                                         .rac{\partial\left(rac{\partial f}{\partial x_i}
ight)}{\partial x_i}=rac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} גזירה אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} סימון: תהא
                                                                                  rac{\partial \left(rac{\partial f}{\partial x_j}
ight)}{\partial x_i}=rac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} גזירה אזי rac{\partial f}{\partial x_j} באשר ויהיו f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} גזירה אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                                                                                                                                                                    \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}} הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה מוכלל
                                  \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(a
ight) = rac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(a
ight) איז a \in \mathcal{U} ויהי \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^1\left(\mathcal{U}
ight) עבורן i,j \in \{1\dots n\} וכך 
 dמסקנה: יהי K\in\mathbb{N}^n תהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורה \mathcal{D}_f\in C^k ויהי \mathcal{D}_f\in\mathcal{C}^k ויהי \mathcal{D}_f\in\mathcal{C}^k אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא
                                                                                                                                                  \|Av\|_{
m st} \leq \|A\|_{
m st} \cdot \|v\|_{
m st} איז v \in \mathbb{R}^n ויהי A \in M_{m 	imes n}\left(\mathbb{R}
ight) טענה: תהא
אזי g\in D\left(f\left(a
ight)
ight) וכן f\in\mathcal{D}\left(a
ight) עבורן g:\mathcal{V}	o\mathbb{R}^k אזי g\in\mathcal{D}\left(f\left(a
ight)
ight) וכן \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m עבורן אזי \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m אזי \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m אזי
                                                                                                                                                                                                  \mathcal{D}_{g \circ f}\left(a\right) = \mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right) \cdot \mathcal{D}_{f}\left(a\right) וכן g \circ f \in \mathcal{D}\left(a\right)
                                                    \Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n 	imes \mathbb{R} \mid (x \in \mathcal{U}) \land (f(x) = y)\} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                                 \Pi_c=\{x\in\mathcal{U}\mid f(x)=c\} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{R} אזי תחום תהא
משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום יהי עבורה f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורה משיק לגרף הפונקציה בנקודה:
                                                                                                                                                                                                                                    y - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i)
                  N_a = (-
abla f\left(a
ight), 1) אזי f \in \mathcal{D}\left(a
ight) עבורה f : \mathcal{U} 	o \mathbb{R} אותהא a \in \mathcal{U} תחום יהי עG \subseteq \mathbb{R}^n אזי עבורה יהי

abla f\left(a
ight) \perp \Pi_{f\left(a
ight)} אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) עבורה f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} אחי a\in\mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n טענה: יהי
                                                                                                                                                                                            נקודת קיצון: יהי f:\mathcal{U} 	o \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                                                       \forall x \in \mathcal{O}.f\left(x\right) \geq f\left(a\right) המקיימת סביבה עבורה קיימת סביבה a \in \mathcal{U} צבורה מינימום מקומי:
                                                                                   . \forall x \in \mathcal{O}. f\left(x\right) \leq f\left(a\right) המקיימת שביבה \mathcal{O} המקיימת עבורה קיימת a \in \mathcal{U} . עבורה קיימת
                                                                                                         .
abla f\left(a
ight)=0 משפט פרמה: יהי a\in\mathcal{U} תחום תהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n משפט פרמה:
                                                                                                                                                                                       נקודת קיצון: יהי f:\mathcal{U} 	o \mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי
                                                                                   aנקודת מינימום מקומי: a \in \mathcal{U} עבורה לכל i \in [m] מתקיים a \in \mathcal{U} נקודת מינימום מקומי.
                                                                            f_i נקודת מקסימום מקומי: u \in \mathcal{U} עבורה לכל i \in [m] מתקיים a \in \mathcal{U} נקודת מקסימום מקומי
                                                                                                                  \mathcal{D}_f\left(a
ight)=0 אזי קיצון אזי a\in\mathcal{U} ותהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m מסקנה: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום תהא
                                                                \mathcal{D}_f(a)=0 המקיימת a\in\mathcal{U} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת יהי
\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^n\|V|=k}}inom{k!}{V_1,...,V_n}\prod_{i=1}^n\left(a_i-b_i
ight)^{V_i}rac{\partial^k}{\partial x^V}f נגדיר a,b\in\mathbb{R}^n ויהיו f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) תחום תהא
```

משפט: יהי  $a\in\mathcal{U}$  יהי  $f,g:\mathcal{U} o\mathbb{R}^m$  משפט: יהי תחום תהיינה  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי יהי

 $.f\in C\left( a
ight)$  אזי  $f\in \mathcal{D}\left( a
ight)$  •

 $.cf, f + g \in \mathcal{D}(a)$  אמ  $f, g \in \mathcal{D}(a)$  אם •

 $.(\forall x \in \mathcal{U}.f(x) = c) \Longrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = 0) \bullet$ 

```
\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\left(\sum_{i=1}^n\left(a_i-b_i\right)rac{\partial f}{\partial x_i}
ight)^k אזי a,b\in\mathbb{R}^n ויהיו f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n משפט טיילור: יהי f\in\mathcal{U} תחום יהי f\in\mathcal{U} תהא f\in\mathcal{U} תהא f\in\mathcal{U} משפט טיילור: יהי f\in\mathcal{U} תחום יהי f\in\mathcal{U} תהא משפט טיילור: יהי f\in\mathcal{U} תחום יהי f\in\mathcal{U} תהא משפט טיילור: יהי
                                                              f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{i}f\left(a\right)+\frac{1}{\left(k+1\right)!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{k+1}f\left(c\right) עבורו c\in\left[x,a\right] אזי קיים x\in\mathcal{O}
                                                      (H_f)_{i,j}=f''_{x_i,x_i} יהי פעמיים אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} הסיאן: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום ותהא
                                                עבורו c\in[x,a] עבורו אזי קיים a\in\mathcal{U} ותהא ותהא f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) עבורו תחום תהא ענה: יהי
                                                                                                                           f(x) = f(a) + (x - a)^{t} H_{f}(c) (x - a)
                                                                               משפט: יהי a\in\mathcal{U} תחום תהא f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                                                                                                               .(מנימום) חיובית ממש) חיובית ממש) חיובית ממש).
                                                                                                            .(מקסימום) שלילית ממש) שלילית שלילית H_f(a)
                                                                 (לא אחד מהמקרים מלעיל))\wedge (\det(H_f(a)) \neq 0)) (\det(H_f(a)) \neq 0))
                                                                              מסקנה: יהי a\in\mathcal{U} תחום תהא f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2 יהי
                                                                                   .(det (H_f(a)) > 0) \land (f''_{x,x}(a) > 0) •
                                                                                 .(det (H_f(a)) > 0) \land (f''_{x,x}(a) < 0) •
                                                                 (לא אחד מהמקרים מלעיל)) (\det(H_f(a)) \neq 0) (לא אחד מהמקרים מלעיל)) •
                      \det\left(H_f(a)
ight)
eq a\in\mathcal{U} אזי f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום ותהא \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n יהי a\in\mathcal{U} קריטית עבורה \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n
משפט פונקציה סתומה: יהי F(a)=0 וכן F(a)=0 ותהא ותהא F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) משפט פונקציה סתומה: יהי
מתקיים (x,y)\in I_x	imes I_y עבורה לכל f\in C^1(I_x,I_y) וקיימת a_2\in I_y וכן a_1\in I_x פתוחים עבורם וI_x,I_y\subseteq \mathbb{R}
                                                                                                                                       (F(x,y)=0) \iff (y=f(x))
טענה: יהי F_u'(a) 
eq 0 וכן F(a) = 0 וכן F(a) = 0 יהיו אווער תהא F \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) יהיו עבורה \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 יהי
עבורם (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in I_{x}	imes I_{y} עבורה לכל f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}
ight) וכן a_{1}\in I_{x} וכן a_{2}\in I_{y} ותהא
                                                                                                                                              J_x על J'(x)=-rac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}
I_x,I_y\subseteq\mathbb{R} יהיו F_y'(a)
eq 0 וכן F(a)=0 וכן G(a)=0 יהיו F(a)=0 פתוחים G(a)=0 פתוחים G(a)=0 פתוחים G(a)=0 פתוחים G(a)=0
עבורם (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in I_{x}	imes I_{y} עבורה לכל f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}
ight) ותהא a_{2}\in I_{y} ומתקיים a_{1}\in I_{x}
                                                                                                                                                          f(x) \in C^k(I_x, I_y)
אזי קיימים F'(a) \neq 0 וכן F(a) = 0 ותהא F \in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}) אזי קיימים \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}
עבורה f\in C^k\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i},I_y
ight) וכן a_i\in I_y וכן מתקיים מתקיים לכל וכל פתוחים עבורם לכל וi\in [n]
                                                                              (F(x,y)=0)\Longleftrightarrow (y=f(x)) מתקיים (x,y)\in (\prod_{i=1}^n I_{x_i})\times I_y לכל
I_{x_1},\dots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R} יהיו יהיי F'_{x_{n+1}}(a)
eq 0 וכן F(a)=0 עבורה a\in\mathcal{U} ותהא ותהא F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) יהיו עוב יהיי יהיי
(x,y)\in (\prod_{i=1}^n I_{x_i})	imes I_y עבורה לכל f\in C^1 עבורה לכל a_i\in I_y ותהא ותהא a_{n+1}\in I_y ותהא a_i\in I_x מתקיים עבורם לכל a_i\in I_{x_i} מתקיים a_i\in I_{x_i} איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x על a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x איי לכל a_i\in I_x
                                      \mathcal{D}_f(a) = \left(F_x'(a), F_y'(a)top M^{n+m}
ight) אזי a \in \mathcal{U} אותהא f \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) תחום תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m} איזי מימון: יהי
ינר אזי F'_y(a) וכן וכך F(a)=0 וכן המים בינקציה אזי הפיכה אזי הפיכה עבורה F'\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) הפיכה אזי הפיכה אזי
(F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in (\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}})	imes \left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight) עבורה לכל f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight)
                            וכן F'_y(a) וכן F(a)=0 אבורה a\in\mathcal{U} אביכה יהיו הפיכה ההא F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m) הפיכה יהיו עבורה ער הא
                ותהא a_{j+n}\in I_{y_j} מתקיים מתקיים ולכל a_i\in I_{x_i} מתקיים עבורם לכל שבורם פתוחים עבורם ולכל I_{x_1},\dots,I_{x_n},I_{y_1}\dots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}
אזי (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow(y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}})	imes\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight) אזי f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight)
                                                                                                    \prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}} על \mathcal{D}_{f}\left(x
ight)=-F_{y}'\left(x,f\left(x
ight)
ight)^{-1}\cdot F_{x}'\left(x,f\left(x
ight)
ight)
מסקנה: יהי 
abla F\left(a
ight) 
eq 0 אזי משוואת המשטח המשיק וכך F\left(a
ight) = 0 ותהא ותהא ותהא F \in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) אזי משוואת המשטח המשיק יהי
                                                                                                                        \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(a) (x_i - a_i) = 0 לגרף ב־a לגרף
מסקנה: יהי הפיכה אזי משוואת המשטח הפיכה אזי משוואת המשטח וכן F\left(a
ight)=0 ותהא ותהא ותהא ותהא F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight) הפיכה אזי משוואת המשטח מסקנה:
```

 $\sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(a) (x_i - a_i) = 0$  המשיק לגרף ב־a הינו

 של  $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$  משפט פונקציה הפוכה: יהי  $\mathcal{D}_f(a)$  תחום יהי  $a\in\mathcal{U}$  ותהא ותהא  $a\in\mathcal{U}$  תחום יהי עוברה שנקציה הפוכה: יהי  $\mathcal{O}$  עבורה f דיפאומורפיזם על af עבורה  $\mathcal{D}_f(a)$  הפיכה ותהא  $\mathcal{D}_f(a)$  סביבה של  $a\in\mathcal{U}$  תחום יהי  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  תחום יהי  $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}$  תחום יהי  $\mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x
ight)
ight)=\mathcal{D}_{f}\left(x
ight)^{-1}$  על  $\mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x
ight)
ight)$ טענה: יהיו  $f:\mathcal{U} o\mathcal{V}$  תהא  $A\subset\mathcal{U}$  תהא  $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n$  דיפאומורפיזם אזי .(בתוחה) f(A) פתוחה) • סגורה)  $(A) \Leftrightarrow (A) \rightarrow A$ .(א קומפקטית) f(A) קומפקטית).  $\partial (f(A)) = f(\partial A)$  אזי  $\partial A \subseteq \mathcal{U}$  אם  $\Phi$ i פתוחה. יהי  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  תחום אזי  $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}^m$  המקיימת לכל  $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$  פתוחה מתקיים  $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}^m$  פתוחה.  $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$  אזי קיימת סביבה rank  $(\mathcal{D}_f(a))=m$  עבורה  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  ותהא ותהא  $a\in\mathcal{U}$  משפט פונקציה פתוחה: יהי

 $\mathcal{O}$  של של פתוחה על f

וכן  $g\left(a
ight)=0$  המקיימת  $a\in\mathcal{U}$  אזי  $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)$  תהא  $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  המקיימת  $.\nabla f(a) \in \operatorname{span} \{\nabla g_i(a)\}\$ 

בת"ל וכן  $\{
abla g_i(a)\}$  וכן  $\{g(a)=0$  המקיימת  $a\in\mathcal{U}$  ותהא ותהא  $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  תהא  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$  וכן g=0 אזי a נקודה קריטית של a בתנאי sols  $(g)\cap\mathcal{O}$  פיימת סביבה a של a עבורה a קיימת קיימת סביבה

כך  $L\in C^1(\mathcal{U} imes\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$  נגדיר  $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  ותהא  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  נגדיר  $L(x_1 \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_m) = f(x_1 \dots x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1 \dots x_n)$ 

מסקנה: יהי a) אזי ( $a\in\mathcal{U}$  אחזי  $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  תהא  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  יהי  $(L \ )$ עבורה ( $a,\lambda)$  עבורה עבורה אבורה ( $a,\lambda)$  עבורה עבורה עבורה ( $a,\lambda)$ 

 $\operatorname{Lank}\left(f\left(a
ight)
ight)=\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{f}\left(a
ight)
ight)$  אזי  $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)$  ותהא  $a\in\mathcal{U}$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  אזי יהי משפט: יהי  $\forall x\in\mathcal{U}.\mathsf{rank}\,(f\left(x
ight))=k$  עבורה  $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)$  ותהא משפט: יהי  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  אזי קיימת  $a\in\mathcal{U}$  חביבה של  $arphi\left(a
ight)$  סביבה של  $\mathcal{W}\subseteqarphi\left(\mathcal{O}
ight)$  סביבה של  $\mathcal{V}:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^m$  וכן  $arphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$  סביבה של  $f\left(a
ight)$  סביבה של  $g\left(a
ight)$ 

 $g\in C^{p-1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n
ight)$  אזי קיימת  $f\left(0
ight)=0$  הלמה של הדמר: תהא של  $f\left(0
ight)=0$  סביבה קמורה של  $f\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$  ותהא  $f\left(x
ight) = \sum_{i=1}^{n} x_{i} g\left(x
ight)$  וכן  $g\left(0
ight) = \nabla f\left(0
ight)$ 

a מביבה של מנוונת אזי קיימת  $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$  הלמה של מורס: יהי  $a\in\mathcal{U}$  ותהא ותהא  $f\in C^3\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$  סביבה של  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  יהי  $\left(f\circ g
ight)(x)-f\left(a
ight)=\sum_{i=1}^{k}x_{i}^{2}-\sum_{i=k+1}^{n}x_{i}^{2}$  המקיים  $g:\mathcal{O} o\mathbb{R}^{n}$  הנים  $\mathcal{O}:\mathcal{O}$  סביבה של  $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n}$  וגם  $\mathcal{O}:\mathcal{O}:\mathcal{O}$ 

 $P_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n] . a_i \leq x_i \leq b_i\}$  אזי  $a,b \in \mathbb{R}^n$  תיבה סגורה: יהיו  $.P_{a,b}$  אזי  $\exists i \in [n] \,.a_i = b_i$  עבורם  $a,b \in \mathbb{R}^n$  אזי היי

 $\mathcal{W}$  על  $\left(\psi\circ f\circ arphi^{-1}
ight)(x)=(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$  עבורם

 $.\{\prod_{i=1}^n\left[t_i^{m_i},t_i^{m_i+1}
ight]\mid orall i\in[n].m_i\in[\ell_i-1]\}$  אזי  $[a_i.b_i]$  אזי  $\{t_i^0,\dots,t_i^{\ell_i}\}$  תהיינה  $i\in[n]$  תהיינה  $i\in[n]$  אזי  $i\in[n]$ 

. $\operatorname{Vol}(P) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Vol}(A_i)$  אזי P חלוקה של  $\{A_1, \dots, A_k\}$  ותהא  $a,b \in \mathbb{R}^n$  טענה: יהיו

. $\operatorname{Vol}\left(P_{a,b}
ight)=0$  אזי מנוונת  $P_{a,b}$  עבורם  $a,b\in\mathbb{R}^n$  הערה: יהיו

 $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}
ight\}
ight)=\sum_{j=1}^{k}f\left(x^{(j)}
ight)$  Vol $(A_{j})$  אזי עום רימן: יהיו  $a,b\in\mathbb{R}^{n}$  תהא  $a,b\in\mathbb{R}^{n}$  תהא תהא  $d\left(M
ight)=\sup_{x,y\in M}\|x-y\|$  אזי  $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$  הואר קבוצה: תהא

 $A(\Pi)=\max_{i< i< k} d\left(A_i
ight)$  חלוקה אזי  $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^n$  מדד העדינות: יהיו

 $\int_{P}f\left(x
ight)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\left(\Pi
ight)
ightarrow0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}
ight)$  אזי  $f:P
ightarrow\mathbb{R}$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^{n}$  אינטגרביליות רימן: יהיו

 $f \in R\left(P
ight)$  אינטגרבילית רימן אזי  $f:P o\mathbb{R}$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^n$  סימון: יהיו

P טענה: תהא  $f \in R(P)$  אזי אוים חסומה על ענה: תהא

 $.\overline{S}\left(f,\Pi
ight)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{P_{i}}\left(f
ight)$  Vol $\left(P_{j}
ight)$  אזי אויף אויף אויף חסומה ותהא  $f:P o\mathbb{R}$  חסומה תיבה תהא חסומה ותהא  $\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{P_i}(f)\operatorname{Vol}(P_i)$  אזי חלוקה אזי  $\{A_1,\ldots,A_n\}$  חסומה ותהא  $f:P o\mathbb{R}$  תיבה תהא תיבה תהא טענה: תהא  $x^{(j)}$  נקודות חלוקה ויהיו  $f:P o\mathbb{R}$  נקודות מתאימות אזי  $S(f,\Pi) \leq S(f,\Pi,\{x^{(i)}\}) \leq \overline{S}(f,\Pi)$ 

 $\underline{S}(f,\Pi_1) \leq \underline{S}(f,\Pi_2) \leq \overline{S}(f,\Pi_2) \leq \overline{S}(f,\Pi_1)$  איי חלוקות איי חסומה ותהיינה  $f:P \to \mathbb{R}$  תיבה תהא P תיבה תהא חסומה ותהיינה ב

```
.\overline{I}(f)=\inf_{\Pi}\overline{S}(f,\Pi) אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה אזי
                                                     \underline{I}(f)=\sup_{\Pi}\underline{S}(f,\Pi) אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה תיבה תיבה תחתון: תהא
                                  \underline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight)\leq\underline{I}\left(f
ight)\leq\overline{L}\left(f
ight)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight) אזי חלוקה אזי חסומה f:P	o\mathbb{R} תיבה תהא P תיבה תהא
                                                   I(f)=\overline{I}(f) \iff (f\in R(P)) איי חסומה f:P	o\mathbb{R} תיבה ותהא תיבה תהא P
                                                                                    .\int_{P}f=\underline{I}\left(f
ight)=\overline{I}\left(f
ight) אזי חסומה f\in R\left(P
ight) תיבה תהא מסקנה: תהא
                                                                                                    .\operatorname{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^n\operatorname{Vol}\left(P_{a,b}\right) אזי \lambda>0 ויהי a,b\in\mathbb{R} טענה: יהיו
                                           טענה: יהיו P_i וכן P_i וכן P_i תיבה אזי ווהיו והיו P_i וכן P_i תיבה אזי עבורן לכל i 
eq j מתקיים מענה: יהיו
                                                                                                                                                        \operatorname{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Vol}\left(P_i\right)
                                                                 .\operatorname{Vol}\left(P
ight) \leq \sum_{i=1}^{n}\operatorname{Vol}\left(P_{i}
ight) תיבה אזי P\subseteq igcup_{i=1}^{n}P_{i} תיבות תהא תיבות ותהא מסקנה: יהיו
                                                                                                                                     טענה: יהיו P_1 \cap P_2 תיבות אזי P_1, P_2 תיבה.
                                                                                                                                  .\operatorname{Vol}\left(P\backslash\operatorname{int}\left(P\right)\right)=0 תיבה תהא תיבה P תיבה הערה:
                       \sum_{i=0}^\infty {
m Vol}\,(P_i)<arepsilon וכן E\subseteq igcup_{i=0}^\infty P_i המקיימת \{P_i\}_{i=0}^\infty קיימות תיבות arepsilon>0 קיימות תיבות בורה לכל
                                                                                                                                           \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid זניחה E\}
                                                                                                                      \{a\}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) אזי a\in\mathbb{R}^n יהי\varnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight)
                                                                                                                   \bigcup_{i=0}^{\infty}E_{i}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) זניחות אזי \left\{ E_{i}
ight\} _{i=0}^{\infty} טענה: תהיינה
E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty \mathrm{Vol}\left(P_i
ight)<arepsilon וכך E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty \mathrm{int}\left(P_i
ight)המקיימת אוי (E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty \mathrm{int}\left(P_i
ight) המקיימת לכל פיימות תיבות E קיימות תיבות קיימת אוי (E אוי וכך אוי לכל פיימות תיבות אוי (E אוי וכך אוי לכל פיימות תיבות הא
\sum_{i=0}^n \mathrm{Vol}\left(P_i
ight) < arepsilon וכן E \subseteq igcup_{i=0}^n \mathrm{int}\left(P_i
ight) המקיימת \{P_i\}_{i=0}^n המקיימת אזי לכל arepsilon > 0 קיימות תיבות arepsilon > 0 המקיימת וכן
                                                                                                               A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי A\subseteq E ותהא ותהא E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) טענה: תהא
                                                                                        P 
otin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) עינה: P 
otin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight), תהא P \subseteq \mathbb{R}^n תיבה לא מנוונת אזי
                                                                                              M \notin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) עבורה פנימית נקודה פנימית אזי M \subseteq \mathbb{R}^n טענה: תהא
                                                                                                                                  .int (M)=arnothing אזי M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) מסקנה: תהא
                                                                                            \Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}
ight) אזי f\in C\left(P,\mathbb{R}
ight) תיבה ותהא P\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                       \Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}
ight) אזי f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי
טענה: תהא e_i\in\mathbb{N} עבור צלע אורך אורך אורך עבור \{C_i\}_{i=0}^\infty מתקיים פתוחה אזי קיימות קוביות פענה: עבור \{C_i\}_{i=0}^\infty
                                                                                                                                        \mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i וכן int (P_i) \cap \operatorname{int}(P_j) = \emptyset
                                                                                                                                  מסקנה: \mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight), קבוצת קנטור זניחה.
                 \omega\left(f,a
ight)=\lim_{\delta	o0^+}\omega\left(f,B_\delta\left(a
ight)\cap A
ight) איי f:A	o\mathbb{R} תהא A\subseteq\mathbb{R}^n תהא A\subseteq\mathbb{R}^n תהא איי
                                                          A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n טענה: תהא
                            למה של קנטור: תהא K \in K. קומפקטית יהי K \in K. ותהא אK \in K. המקיימת K \in K. קומפקטית יהי K \in K.
                                                                                                                     \forall x \in K. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \omega (f, B_{\delta}(x) \cap K) < \omega_0 + \varepsilon
מתקיים \psi מתקיים אזי נאמר E\subseteq A ויהי וויהי \psi פרידיקט אזי נאמר כי \psi'' מתקיים כמעט על כלA\subseteq \mathbb{R}^n אם היימת A\subseteq \mathbb{R}^n
                                B_{f,arepsilon}=\{x\in P\mid \omega\left(f,x
ight)\geqarepsilon\} אזי arepsilon>0 אזי f:P	o\mathbb{R} תיבה סגורה תהא P\subseteq\mathbb{R}^n
                                                           . תיבה B_{f,arepsilon} אזי arepsilon>0 אזי חסומה f:P	o\mathbb{R} קומפקטית. P\subseteq\mathbb{R}^n אזי למה:
                                                           למה: תהא חלוקה ויהי הגורה תהא למה: תהא תהא הויהי חלוקה ויהי אזי אזי תיבה סגורה תהא תיבה סגורה תהא למה: תהא חלוקה ויהי ויהי אזי
                                                                                                 A: B_{f, \frac{1}{k}} כיסוי של \left\{A \in \Pi \mid \left(A \cap B_{f, \frac{1}{k}} \neq \varnothing \right) \wedge \left(\omega\left(f, A\right) \geq \frac{1}{2k}\right) \right\}
קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא P\subseteq\mathbb{R}^n תיבה סגורה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה אזי f רציפה כמעט על כל
                                                                                                                                                                           (f \in R(P)) \iff (P)
                                                                                                                   קבוצה מדידת ז'ורדן: E \subseteq \mathbb{R}^n חסומה עבורה \partial E זניחה.
                                                                                                                                                        טענה: תהיינה E_1,E_2\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                                                                               . סגורה \partial E_1 \bullet
                                                                                                        \partial (E_1 \backslash E_2), \partial (E_1 \cup E_2), \partial (E_1 \cap E_2) \subseteq \partial E_1 \cup \partial E_2 \bullet
                                                                                                                                            J(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid \mathfrak{J}(E)\} סימון:
```

 $A \backslash B, A \cup B, A \cap B \in J$  מסקנה: תהיינה  $A, B \in J$  מסקנה:

 $S(f,\Pi_1) \leq \overline{S}(f,\Pi_2)$  איזי חלוקות אזי  $f:P o \mathbb{R}$  מענה: תהא  $f:P o \mathbb{R}$  תיבה תהא

```
\chi_A\left(x
ight)=\left\{egin{array}{ll} 1 & x\in A \\ 0 & x
eq A \end{array}
ight.כך \chi_A:\mathbb{R}^n	o\{0,1\} אזי A\subseteq\mathbb{R}^n אזי אנידיקטור: תהא
                                                                                                    .\chi_A\in C\left(\mathbb{R}^n\backslash A
ight) וכן \chi_A\in C\left(\mathrm{int}\left(A
ight)
ight) אזי A\subseteq\mathbb{R}^n וכן
אזי f\cdot\chi_A\in R(P) אזי f:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} אחומה ותהא A\subseteq P תיבה סגורה תהא P\subseteq\mathbb{R}^n אזי תהא
                                                                                                                                                                                 \int_A f = \int_P f \cdot \chi_A
                                 טענה: תהא A\subseteq P_1,P_2 ותהא P_1,P_2\subseteq \mathbb{R}^n מיננה תהיינה חסומה תהיינה A\subseteq \mathbb{R}^n מענה: תהא
                                                                                                                             (f \cdot \chi_A \in R(P_1)) \iff (f \cdot \chi_A \in R(P_2)) \bullet
                                                                                                                                                           \int_{P_1} f \cdot \chi_A = \int_{P_2} f \cdot \chi_A \bullet
                                                                                            V\left(A
ight)=\mathrm{Vol}\left(A
ight)=\int_{A}\mathrm{d}x אזי A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) מידה/נפח של תיבה: תהא
                                                                                                                           משפט: תהא f,g\in R\left(A
ight) ותהיינה A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי
                                                                            .\int_{A}\left(af+bg
ight)=a\int_{A}f+b\int_{A}g וכך af+bg\in R\left(A
ight) אזי a,b\in\mathbb{R} יהיו
                                                                                                                                                      \int_{A} f \geq 0 גניח כי f \geq 0 אזי f \geq 0
                                                                                                                                                 \int_{A} f \geq \int_{A} g נניח כי f \geq g אזי f \geq g
                                                                                                      .m\mathrm{Vol}\,(A) \leq \int_A f \leq M\mathrm{Vol}\,(A) אזי m \leq f \leq M נניח כי
                                               f\in R (A\cup B) וכן f\in R (A\cap B) אזי f\in R (A\cap B) ותהא A,B\in J (\mathbb{R}^n) וכן
                                                                    \int_{A\cup B}f=\int_{A}f+\int_{B}f אזי \mathrm{Vol}\left(A\cap B
ight)=0 עבורן A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) מסקנה: תהיינה
                                               .\exists c\in A.\int_{A}f=f\left(c\right)\mathrm{Vol}\left(A
ight) אזי f\in C\left(A,\mathbb{R}
ight) תחום ותהא A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) יהי יהי
                                                                              |\int_A f| \leq \int_A |f| וכך |f| \in R(A) אזי f \in R(A) ויהי A \in J(\mathbb{R}^n) טענה: תהא
                                                                           \int_A f = \int_A g אזי A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) כמעט על כל f,g \in R(A) ותהיינה A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)
                                                                                                                     \int_{\mathrm{int}(A)}f=\int_{A}f=\int_{\overline{A}}f אזי A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) משפט: תהא
                                                                                               \bigcup_{i=1}^k A_i, igcap_{i=1}^k A_i \in J\left(\mathbb{R}^n
ight) אזי A_1 \dots A_k \in J\left(\mathbb{R}^n
ight) טענה: תהינה
           . Vol \left(igcup_{i=1}^k A_i
ight)=\sum_{i=1}^n 	ext{Vol}\left(A_i
ight) אזי 	ext{Vol}\left(A_i\cap A_j
ight)=0 מסקנה: תהיינה A_1\dots A_k\in J\left(\mathbb{R}^n
ight) עבורן לכל
                                                                             A \in J(\mathbb{R}^n) אזי A \in \mathbb{R}^n ותהא A \subseteq \mathbb{R}^n ותהא A \subseteq \mathbb{R}^n טענה: תהא
                                                                                                      \operatorname{Vol}\left(A
ight)=\operatorname{Vol}\left(A+a
ight) אזי a\in\mathbb{R}^n ותהא A\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: תהא

u = 	ext{Vol} אאי 
u : J\left([0,1]^n\right) = 1 אאי עבורה בונקציית נפח: תהא 
u : J\left(\mathbb{R}^n\right) 	o \mathbb{R}_{>0} אאי אינווריאנטית להזאות עבורה
                                                                         . חסומה T\left(A\right) אורתוגונלית ותהא חסומה אזי אורתוגונלית אורתוגונלית אורתוגונלית אורתוגונלית חסומה אזי T\in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n\right)
                                                                       T(\partial A)=\partial\left(T\left(A
ight)
ight) אזי איזי A\subseteq\mathbb{R}^n אורתוגונלית ותהא T\in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n
ight) מסקנה: תהא
                                                מסקנה: T\left(E\right) זניחה וחסומה אזי אורתוגונלית ותהא T\left(E\right) אורתוגונלית ותהא אוי אורתוגונלית ותהא T\left(E\right) אורתוגונלית ותהא
                              .\operatorname{Vol}\left(T\left(A\right)
ight)=\operatorname{Vol}\left(A\right) וכן T\left(A
ight)\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) איז A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אורתוגונלית ותהא T\in\operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)
                                                  משפט פוביני: תהיינה M_{P	imes Q} , עבורה תיבות ותהא עבורה M_{P	imes Q} קיים אזי קיים אזי עבורה עבורה עבורה עבורה אזי
                      \iint_{P	imes Q}f=\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y קיימים ובפרט \int_{P}\int_{Q}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
                               a\in P קיים כמעט לכל \int_{O}f\left(a,y
ight)\mathrm{d}y אזי f\in R\left(P	imes Q
ight) תיבות ותהא Q\subseteq\mathbb{R}^{m} ,P\subseteq\mathbb{R}^{n} מסקנה: תהיינה
f\in R\left(A
ight) ותהא A=\{(x,y)\in B	imes \mathbb{R}\mid arphi_{1}\left(x
ight)\leq y\leq arphi_{2}\left(x
ight)\} תהא arphi_{1},arphi_{2}:B	o \mathbb{R} ותהא מסקנה: תהא B\subseteq \mathbb{R}^{n-1}
                                                                                                                                                  .\int_{A}f=\int_{B}\int_{arphi_{1}(x)}^{-arphi_{2}(x)}f\left(x,y
ight)\mathrm{d}y\mathrm{d}xאזי
y\in P_n כמעט לכל A\cap \left(\mathbb{R}^{n-1}	imes\{y\}
ight)\in J\left(\mathbb{R}^{n-1}
ight) תיבה אזי A\subseteq \prod_{i=1}^n P_i כמעט לכל A\in J\left(\mathbb{R}^n
ight)
                                                                                                                                       \operatorname{Vol}(A) = \int_{P_n} \operatorname{Vol}\left(A \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\}\right)\right) \mathrm{d}y
                                                                                                                                      S\left(D
ight)=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y אזי D\subseteq\mathbb{R}^{2} שטח: תהא
                                                                        m\left(D
ight)=\iint_{D}
ho\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y צפיפות אזי 
ho:\mathbb{R}^{2}	o\mathbb{R}_{\geq0} ותהא D\subseteq\mathbb{R}^{2} ותהא
                                                                                                             מומנט מסה: תהא \rho:\mathbb{R}^2	o\mathbb{R}_{\geq 0} ותהא ותהא מסה: תהא מסה:
                                                                                                        M_{x}\left(D
ight)=\iint_{D}y\cdot
ho\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y:x מומנט מסה לפי ציר
                                                                                                       M_x\left(D
ight)=\iint_D x\cdot
ho\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y:מומנט מסה לפי ציר \left(rac{M_y(D)}{m(D)},rac{M_x(D)}{m(D)}
ight) אזי D\subseteq\mathbb{R}^2 אזי D\subseteq\mathbb{R}^2 אזי E\subseteq\mathbb{R}^3 מרבז ההא E\subseteq\mathbb{R}^3 אזי E\subseteq\mathbb{R}^3 אזי לבח: תהא
                                                               m\left(E
ight)=\iiint_{E}
ho\left(x,y,z
ight) מסה: תהא E\subseteq\mathbb{R}^{3} ותהא E\subseteq\mathbb{R}^{3} ותהא ותהא E\subseteq\mathbb{R}^{3}
                                                                                                             מומנט מסה: תהא E\subseteq\mathbb{R}^3 ותהא מסה: תהא מומנט מסה: ותהא אוי
                                                                            M_{xy}\left(E
ight)=\iiint_{E}z\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z:\left\{z=0
ight\} מומנט מסה לפי המישור
```

```
M_{xz}\left(E
ight)=\iiint_{E}y\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z:\left\{ y=0
ight\} מומנט מסה לפי המישור
```

$$M_{yz}\left(E
ight)=\iint_{E}x\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,:\left\{ x=0
ight\}$$
 מומנט מסה לפי המישור

 $M_{yz}\left(E
ight)=\iiint_{E}x\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z:\left\{x=0
ight\}$  מומנט מסה לפי המישור -  $\cdot\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xy}(E)}{m(E)}
ight)$  אזי  $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$  אזי  $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$  מקבילון: יהיו  $D=\{\sum_{i=1}^{n}lpha_{i}v_{i}\mid\forall i\in[n].lpha_{i}\in[0,1]\}$  אזי  $v_{1}\ldots v_{n}\in\mathbb{R}^{n}$ 

$$(v_1\dots v_n)=\{\sum_{i=1} \alpha_i v_i\mid \forall i\in [n]. \alpha_i\in [0,1]\}$$
 איי מתקיים  $\det\begin{pmatrix} -v_1&-1\\ \vdots\\-v_n&-\end{pmatrix}$  איי מתקיים  $\det\begin{pmatrix} v_1&\dots v_n\in\mathbb{R}^n\\\vdots\\-v_n&-\end{pmatrix}$  טענה: יהיו

 $\mathrm{supp}\,(f)=\overline{\{x\in\mathcal{U}\mid f\,(x)
eq0\}}$  אזי  $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}$  תחום ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  יהי

טענה: תהיינה  $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי G:A o B אזי פתוחות פתוחות ותהא

- (ביחה) אניחה) גניחה).  $\varphi(E)$
- $.((\operatorname{Vol}\left(\varphi\left(E\right)\right)=0)\wedge\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)) \longleftarrow ((\operatorname{Vol}\left(E\right)=0)\wedge\left(\overline{E}\subseteq A\right)) \ \bullet$ 
  - $\varphi(E) \wedge (\overline{\varphi(E)} \subset B) \iff ((\overline{E} \subset A)) \wedge (\overline{E} \subset A)$  ז'ורדן)).

 $A,B\subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $f\in R(B)$  אזי  $f\in R(B)$  מסקנה: תהיינה  $A,B\subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי טענה: תהיינה  $A,B\subseteq\mathbb{R}$  פתוחות וחסומות יהי G:A o B דיפאומורפיזם ותהא אזי  $f\in R$ ו ובפרט ובפרט  $A,B\subseteq\mathbb{R}$  $\int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) |\varphi'| dt$ 

המקיימת  $\psi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  המקיימת עבורו קיימת  $\psi:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  המקיימת אזי קיימת אזי  $\varphi:A o B$  המקיימת היינה  $\varphi(x) = (x_1, \dots, \psi(x_i), \dots x_n)$ 

טענה: תהינה  $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי  $\varphi:A o B$  דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא אזי

 $\int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_{\varphi}(t)| dt$ 

טענה: תהיינה אלמנטריים ותהא וחסומות יהיו  $\psi:A o B$  , $\varphi:B o C$  יהיו וחסומות וחסומות אלמנטריים אלמנטריים ענה:  $\int_{C} f = \int_{A} f((\varphi \circ \psi)(t)) |\det \mathcal{D}_{\varphi \circ \psi}(t)| dt$ 

טענה: תהיינה  $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי  $G:A o \mathcal{O}$  דיפאומורפיזם ויהי איז קיימת  $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$  סביבה של  $\mathscr{O}$  על  $arphi=\psi_1\circ\ldots\circ\psi_m$  עבורם אלמנטריים אלמנטריים על דיפאומורפיזים א

אזי  $f\in R\left( B
ight)$  אזי ותהא G:A o B אזי פתוחות וחסומות פתוחות אזי משפט: תהיינה

 $\int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) \left| \det \mathcal{D}_{\varphi}(t) \right| dt$ 

 $f\in R\left(arphi\left(E
ight)
ight)$  ותהא  $\overline{E}\subseteq A$  ותהא עבורה  $E\subseteq A$  אסקנה: תהיינה G:A o B ותהא וחסומות יהי  $\int_{\varphi(E)} f = \int_E f(\varphi(t)) \left| \det \mathcal{D}_{\varphi}(t) \right| dt$  ובפרט ובפרט ( $f \circ \varphi$ ) ובפרט איי

משפט: תהיינה  $A \setminus E, S \setminus B$  פתוחות עבורן אניחות עבורן  $A \setminus E, S \setminus B$  פתוחות וחסומות תהא משפט: תהיינה  $A \setminus E, S \setminus B$  פתוחות וחסומות וחסומות וכך  $(f\circ arphi) |\det \mathcal{D}_arphi| \in R(Aackslash E)$  אזי איזי איזי איזי איזי בעל דיפרנציאל חסום אזיAackslash E ותהא G(Aackslash E) = G(Aackslash E) במו כן G(Aackslash E) $\int_{B}f=\int_{A\setminus E}f\left( arphi\left( t
ight) 
ight) \left| \det\mathcal{D}_{arphi}\left( t
ight) 
ight| \mathrm{d}t$  ובפרט

אניחות עבורן  $S\subseteq B$  , $E\subseteq A$  אניחום תהיינה בעל דיפרנציאל חסום תהא arphi:A o B אניחות וחסומות תהא  $(f\circ\varphi)|\det\mathcal{D}_{arphi}|\in R(A)$  אזי  $f\in R(S)$  ותהא על Aackslash E כמו כן  $\varphi$  כמו כן  $\varphi$  כמו כן  $\varphi(Aackslash E)=Sackslash B$  פתוחות וכן  $\int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) \left| \det \mathcal{D}_{\varphi}(t) \right| dt$  ובפרט