```
. סענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ חוג אבלי בעל יחידה R
                                                        ab=0 מתקיים ab=0 מתקיים a,b\in R עבורו לכל עבורו לכל
                                                          R\left[x_{1}\dots x_{n+1}
ight]=\left(R\left[x_{1}\dots x_{n}
ight]
ight)\left[x_{n+1}
ight] אוג אבלי בעל יחידה אזי
                                                                    . תחום שלמות R\left[x_1\dots x_n\right] אזי איי ויהי שלמות ויהי שלמות תחום שלמות יהי
                                                         R^{\times}=\{a\in R\mid \exists h\in R.ah=ha=1\} הגדרה: יהי חוג אבלי בעל יחידה אזי
                                                                                           למה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי (R^{	imes},*) חבורה.
                                                                                         (R[x])^{	imes}=R^{	imes} טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי
                                                                                            \mathbb{F}^{	imes}=\mathbb{F}\backslash\left\{ 0
ight\} המקיים \mathbb{F} העלי בעל אבלי אבלי חוג אבלי
                         .\sim_{	ext{Frac}}=\left\{ \left(\left(a,b
ight),\left(c,d
ight)
ight)\in\left(R	imes\left(Rackslash\left\{0
ight\}
ight)
ight)^{2}\mid ad=bc
ight\} אזי R
eq\left\{0
ight\} אזי איני R תחום שלמות באשר R\neq\left\{0
ight\} אזי
                                                                           .Frac (R)=R/_{\sim_{	ext{Frac}}} אזיR
eq\{0\} איזי איזי תחום שלמות באשר
[(a,b)]_{	ext{Frac}}+[(c,d)]_{	ext{Frac}}=\left[\left(ad+cb,bd
ight)
ight]_{	ext{Frac}} אזי (a,b)\,,(c,d)\in R	imes (R\setminus\{0\}) ויהיו R
eq\{0\} ויהיו הגדרה: יהי
                                                                                                         [(a,b)]_{\text{Frac}} \cdot [(c,d)]_{\text{Frac}} = [(ac,bd)]_{\text{Frac}} וכן
                                                               שדה. Frac (R) אזי אזי אזי אזי דרם: יהי אזר השברים: יהי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אוה.
                                                                                                         . ענה: יהי \mathbb{K} שדה אזי [x] תחום שלמות שלמות.
                                                                                     \mathbb{K}\left(x
ight)=\operatorname{Frac}\left(\mathbb{K}\left[x
ight]
ight) איז שדה איי הי \mathbb{K} יהי רציונליות: יהי
                                                                                                                מסקנה: יהי \mathbb{K} שדה אזי (x) שדה.
                                                                            הומומורפיזם בין חוגים: יהיו R,S חוגים אזי 
u:R	o S המקיימת

u(ab) = \nu(a) \nu(b) מתקיים u, b \in R משמרת כפל: לכל

u(a+b) = \nu(a) + \nu(b) מתקיים a,b \in R משמרת חיבור: לכל
   .
u\left(1_R
ight)=1_S המקיים בעלי חוגים בין חוגים בין חוגים בעלי יחידה חוגים בעלי יחידה אזי הומומורפיזם בין חוגים בעלי יחידה: יהיו
                                                            \ker\left(
u
ight)=
u^{-1}\left[\left\{0
ight\}
ight] אזי \left[\left\{0
ight\}
ight] הומומורפיזם אזי ויהי R,S חוגים ויהי
                                                            . חוגים \ker\left(\nu\right), \operatorname{Im}\left(\nu\right) אזי \left(\nu\right), \operatorname{Im}\left(\nu\right) חוגים \left(\nu\right), \operatorname{Im}\left(\nu\right) חוגים ויהי
                                R \hookrightarrow S = \{ \nu : R \to S \mid \mathsf{pr} חוגים אזי v \} חוגים אזי R,S חוגים איזי חח"ע
                                              (\ker(\nu)=0)אוי (שמנומורפיזם) אזי ויהי R,S הומומורפיזם ויהי ויהי ויהי R,S הומומורפיזם אזי ויהי
                                               R 	o S = \{ 
u: R 	o S \mid v \} הומומורפיזם על חוגים יהיו R,S חוגים אזי קבוצת האפימורפיזמים: יהיו
                                              (\operatorname{Im}(
u)=S)אפימורפיזם איז (
u,S) הומים ויהי(R,S) הומים ויהי(R,S) הומים ויהי
                                                                                                  R \simeq S יהיו איזומורפיים אויי חוגים חוגים חוגים דימון: יהיו
                     למה: יהיו R,S חוגים ויהי R,S הומומורפיזם אזי (\nu) אפימורפיזם וכן \nu אפימורפיזם וכן \nu אפימורפיזם וכן \nu
                                                                                                             \mathbb{Z}\left[i
ight]=\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} חוג השלמים של גאוס:
                                                                     I+I\subset I וכן I\cdot R\subset I המקיימת וכן I\cdot R\subset I חוג אבלי אזי
                                                                              I(I,+) \leq (R,+) טענה: יהי R חוג אבלי ויהי ויהי I \subseteq R טענה: יהי
                                                                    . אידאל \ker\left(\nu\right) אידאל אוי \nu:R	o S חוגים ויהי חוגים ויהי R,S חוגים ויהי
                                      I\subseteq\{\{0\},R\} משפט: יהי I\subseteq R מחלים (אידאל שדה) משפט: יהי I\subseteq R מחלים (אידאל ווידה אזי מוד מחלים).

u \in (\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{K}) \cup \{0\} אזי אזי 
u : \mathbb{F} \to \mathbb{K} שדות ויהי \mathbb{F}, \mathbb{K} הומומורפיזם אזי
```

חוג: תהא R קבוצה ותהיינה *,+ פעולות בינאריות אזי R המקיים

 $0_R=e$ אזי אוי (R,+,*) איבר היחידה של (R,+,*) אזי

(a*b)*c=a*(b*c) מתקיים $a,b,c\in R$ לכל לכל • אסוציאטיביות ספל:

 $a,b\in R$ לכל a*b=b*a המקיים a*b=b*a לכל חוג (R,+,*) חוג אבלי/קומוטטיבי/חילופי: חוג (R,+,*) עבורו (R,+,*) בעל איבר יחידה m וכן m סימון: יהי (R,+,*) חוג ויהי m איבר היחידה של (R,+,*) אזי m חוג ויהי m איבר היחידה וכן m חוג אבלי בעל יחידה. m טענה: יהי m אזי m חוג אבלי בעל יחידה וכן m חוג אבלי בעל יחידה.

a*(b+c)=(a*b)+(a*c) מתקיים $a,b,c\in R$ חוג הפילוג משמאל: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a,b,c\in R$ חוק הפילוג מימין: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a,b,c\in R$

. חבורה אבלית (R,+)

```
R/I = \{a+I \mid a \in R\} אידאל אזי I \subseteq R חוג אבלי ויהי חוג אבלי ויהי
a(ab)+I=(cd)+I אזי b+I=d+I וכן a+I=c+I אזי a+I=c+I איזי a+I=c+I איזי a+I=c+I טענה: יהי
                                           A(a+I) (b+I)=(ab)+I אזי איזי a,b\in R אידאל ויהיו ויהיו אבלי יהי I\subseteq R חוג אבלי יהי
                                                                    משפט חוג מנה: יהי R חוג אבלי ויהי I\subseteq R אידאל אזי R חוג אבלי.
  \ker(p)=I טענה: יהי p חוג אבלי יהי p איז ענהיר p:R 	o P כך p:R 	o R/I אידאל ונגדיר ונגדיר ונגדיר I\subseteq R
                                                             . חוגים אזי R/\mathrm{ker}(
u) חוגים חוגים חוגים 
u:R	o S חוגים ויהי רביזם חוגים אזי למה:
                                                    R/\ker(
u)\simeq \mathrm{Im}\,(
u) אזי חוגים חוגים 
u:R	o S חוגים ויהי תוגים ויהי
                                                            I 
eq R המקיים והיים I \subseteq R אידאל אמיתי: יהי
                                                       (I\cap R^{\times}=\varnothing)אזי (I\cap R^{\times}=\varnothing) אזי (I\cap R^{\times}=\varnothing) אזי (I\cap R^{\times}=\varnothing) טענה: יהי
             S(S)=\{\sum_{i=1}^n r_i s_i \mid (n\in\mathbb{N}_+) \land (r\in R^n) \land (s\in S^n)\} איז איזאל נוצר: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ותהא S\subseteq R איז איזאל נוצר: יהי
                                                                          . טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ותהא S\subseteq R אזי (S) אידאל
                                                                                                                     \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)\simeq \mathbb{Z}\left[i
ight] טענה:
                                                  I=(a) המקיים a\in R עבורו קיים ועבור איז אידאל אזי אידאל חוג אבלי יהי אידאל אידאל אידאל יהי
             ab\in I עבורו לכל a,b\in R עבורו לכל a,b\in R מתקיים מחקיים ווג אבלי אזי אידאל איז אידאל איז עבורו לכל
                                   I \subsetneq J אידאל מקסימלי: יהי R חוג אבלי איזי אידאל I \subseteq R עבורו לכל אידאל I \subseteq R לא מתקיים
                                                                                 משפט: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי I \subseteq R משפט:
                                                                                            .(תחום שלמות) אידאל ראשוני) אידאל ראשוניR/I •
                                                                                                    שדה). אידאל מקסימלי)\Longleftrightarrow(ו אידאל I) •
                                                      . ראשי: חוג אבלי בעל יחידה R עבורו לכל אידאל I\subseteq R מתקיים כי I ראשי
    a,b\in R^{	imes} עבורו לכל a,b\in R^{	imes} מתקיים a,b\in R מתקיים עבורו איז a,b\in R^{	imes} עבורו לכל
                    a,b \in R עבורו לכל עבר המקיימים a,b \in R מתקיים אזי בעל יחידה אזי בעל יחידה אזי r \in R עבורו לכל
                                                                                                                          משפט: יהי \mathbb{K} שדה אזי
                                                                                                                       תחום ראשי. \mathbb{K}[x]
                                                    (x] מקסימלי) מקסימלי) אי־פריק ב־(f) אי־פריק ב־(f) איזי f \in \mathbb{K}[x].
                                                                        Rמסקנה: יהי R תחום שלמות אזי (R[x] תחום ראשי) שדה).
                Aבורש A\subseteq M עבורו A\subseteq M אידאל אזי קיים אידאל מקסימלי והיי A\subseteq M עבורו A\subseteq M אידאל אזי קיים אידאל מקסימלי
    \gcd(f_1\dots f_n)=d וכן dוכן מתוקן אזי f_1\dots f_n, d\in\mathbb{K}\left[x
ight] באשר שדה ויהיו \mathbb{K} אזי יהי \mathbb{K} שדה ויהיו
משפט חלוקה עם שארית: יהי g חוג אבלי בעל יחידה ויהיו f,g\in R\left[x
ight] באשר המקדם המוביל של חוג אבלי בעל יחידה ויהיו
                                                                                    deg(r) < deg(g) באשר q, r \in R[x]
                                                                  \gcd(f,g)=1 פולינומים זרים: יהי{\mathbb F} שדה אזי f,g\in{\mathbb F}[x] המקיימים
                                                   \gcd(a_1\dots a_n)=1 המקיים \sum_{i=0}^n a_i x^i אזי a_0\dots a_n\in\mathbb{Z} הייו
 f=(rg)\,(sh) וכן sh,rg\in\mathbb{Z}\,[x] המקיימים r,s\in\mathbb{Q} האי קיימים g,h\in\mathbb{Q}\,[x] ויהיו f\in\mathbb{Z}\,[x]\setminus\{0\} ויהיו
                                          d\in\mathbb{Z}\left[x
ight] אזי אזי d\in\mathbb{Z}\left[x
ight] מסקנה גאוס: יהי d\in\mathbb{Z}\left[x
ight] מחקן ויהי מתוקן ויהי
                                               \mathbb{Q}[x] וכן f פרימיטיבי). למה גאוס: יהי \mathbb{Q}[x] אזי f \in \mathbb{Z}[x] אזי f \in \mathbb{Z}[x] אזי למה גאוס:
טענה קריטריון אייזנשטיין: יהיו a_0\ldots a_n\in\mathbb{Z} ויהי p
mid a_i וכן i< n לכל p|a_i וכן p
mid a_n אי־פריק איזיa_0\ldots a_n\in\mathbb{Z} אי־פריק אייזנשטיין: יהיו
טענה קריטריון אייזנשטיין המוכלל: יהי \mathbb{F} שדה יהיו a_0\ldots a_n\in\mathbb{F}\left[x_1\ldots x_m
ight] ויהי שדה יהיו שדה יהיו שדה יהיו שדה יהיו
                                                            \mathbb{F}\left(x_1\dots x_m
ight)[x] אי־פריק מעל \sum_{i=0}^n a_i x^i אזי p^2 \nmid a_0 וכן i < n לכל p|a_i
                                                    a\in\mathbb{K} אזי a\in\mathbb{K} המקיים a\in\mathbb{K} אזי a\in\mathbb{K} אזי שדה ויהי a\in\mathbb{K} שדה ויהי
                                                        \mathrm{sols}_{\mathbb{K}}\left(f
ight)=\left\{lpha\in\mathbb{K}\mid f\left(lpha
ight)=0
ight\} אזי f\in\mathbb{K}\left[x
ight]\setminus\left\{0
ight\} שדה ויהי
                                           \alpha\in\mathrm{Sols}_{\mathbb{K}}(f) אזי \alpha\in\mathrm{Sols}_{\mathbb{K}}(f) ויהי f\in\mathbb{K}[x] ויהי שדה יהי שדה יהי שדה יהי f\in\mathbb{K}[x]
                                                                    |\mathrm{sols}_{\mathbb{K}}\left(f
ight)| \leq \deg\left(f
ight) אזי f \in \mathbb{K}\left[x
ight] \setminus \{0\} שדה ויהי שדה ויהי
                                               (x-lpha)^2
mid f המקיים lpha\in\mathrm{sols}_{\mathbb{K}}(f) אזי f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\} המקיים שורש שוט: יהי
                                               (x-lpha)^2\,|f המקיים lpha\in\mathrm{sols}_{\mathbb{K}}\,(f) אזי f\in\mathbb{K}\,[x]\setminus\{0\} המקיים \mathbb{K} שדה ויהי
                                  .ig(\sum_{i=0}^n a_i x^iig)' = \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1} אזי a_0 \dots a_n \in \mathbb{K} ויהיו n \in \mathbb{N} יהי של פולינום: יהי
```

```
(\gcd(f,f')=1) שדה ויהי f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\} אזי (כל השורשים של f הם פשוטים) משפט: יהי
                                                        \deg(f)>1 באשר f\in\mathbb{F}[x] איי (אייפריק) שדה אזי ויהי f\in\mathbb{F}[x] באשר באשר ויהי
                                                                                                                                            \mathbb{F}_p=\mathbb{Z}_p אזי p\in\mathbb{P} סימון: יהי
                                                                                                            \mathbb{K} \subseteq \mathbb{L} שדה אזי שדה \mathbb{L} המקיים שדה אזי שדה הרחבה: יהי
                                                                                                       \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי אזי \mathbb{K} אזי \mathbb{K} אזי \mathbb{K} שדות באשר באשר \mathbb{K}
                                                                                   . כאובייקט \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי נתייחס לביטוי אזי באשר אדות באשר \mathbb{K},\mathbb{L} יהיו
                                                                                                    \mathbb{L}/\mathbb{K} טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי הינו מרחב וקטורי מעל
                                   .
u_{\mathbb{F}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{F}} המיינה 
u:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{L} איי שיכון \mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{L} הרחבות. המיינה \mathbb{K}/\mathbb{F},\mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבות איי שיכון
                                                \mathbb{K}/\mathbb{F} \to \mathbb{L}/\mathbb{F} = \{ 
u : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{L} \mid 
u_{\mathbb{I}_{\mathbb{F}}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}} \} הרחבות אזי \mathbb{K}/\mathbb{F}, \mathbb{L}/\mathbb{F} שדה ותהיינה
                                           \mathbb{F} טענה: יהי \mathbb{F} שזה תהיינה \mathbb{K}/\mathbb{F}, \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבות ויהי \mathbb{F}/\mathbb{F} \to \mathbb{L}/\mathbb{F} שזה תהיינה שלה מעל מענה: יהי
                                                                                                    \mathbb{K} \subset \mathbb{F} שדה פשוט: שדה \mathbb{K} עבורו לא קיים שדה עבורו
                                                                                                         טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי \mathbb{K} שדה אזי \mathbb{K} שדה פשוט.
                                                                                                           \mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} מסקנה: יהי \mathbb{F} שדה אזי קיים ויחיד שדה פשוט
                                                                                                   \mathbb{F} = \mathbb{F} = \mathbb{F} = \mathbb{F}משפט: יהי \mathbb{F} שדה פשוט אזי אזי (\exists p \in \mathbb{P}.\mathbb{F} \simeq \mathbb{F}_p) משפט: יהי
                                                                                                       \mathbb{F}_p\subseteq\mathbb{K} עבורו p\in\mathbb{P} עבורו אזי קיים שדה סופי אזי יהי
                                                                                \|\mathbb{K}\|=p^n עבורם n\in\mathbb{N} וקיים וקיים אזי קיים אזי סופי אזי סופי אזי p\in\mathbb{P}
                                                                                                           מציין של שדה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} שדה פשוט אזי
                                                                                                                                      .char (\mathbb{F})=0 אז \mathbb{K}\simeq\mathbb{Q} אם ullet
                                                                                                          .char (\mathbb{F})=p אז \mathbb{K}\simeq\mathbb{F}_p עבורו p\in\mathbb{P} אם קיים
                                                                     .char (\mathbb{F})\cdot a=0 מתקיים a\in\mathbb{F} אזי לכל char (\mathbb{F})>0 שדה המקיים
                                                    (x+y)^p=x^p+y^p אזי (x+y)^p=x^p+y^p לכל אזי המקיים שדה המקיים p\in\mathbb{R} לכל
                                \operatorname{Fr}_p(a)=a^p כך \operatorname{Fr}_p:\mathbb{K}	o\mathbb{K} אזי נגדיר המקיים p\in\mathbb{F} וויהי p\in\mathbb{F} שדה המקיים רובניום: יהי p\in\mathbb{K}
                                                                               . מונומורפיזם \mathrm{Fr}_p אזי \mathrm{char}\left(\mathbb{K}\right)=pשדה המקיים שבט: יהי ויהי p\in\mathbb{P} יהי יהי משפט:
                    \operatorname{sols}\left(ax^2+bx+c\right)=\left\{rac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
ight\} אזי איזי a
eq 0 באשר a,b,c\in\mathbb{F} ויהיו (\mathbb{F})
eq 2 שענה: יהי
                                                                                       . אינה ציקלית אינה אינסופי באשר באשר אינסופי אינה אינסופי באשר \mathbb{F}^{	imes} אינה אינסופי באשר
                            f(lpha)=0 איבר אלגברי מעל שדה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת שדות אזי lpha\in\mathbb{L} עבורו קיים lpha\in\mathbb{K} המקיים
                                                \mathbb K אינו אלגברי מעל שדה: תהא \mathbb L/\mathbb K הרחבת שדות אזי lpha\in\mathbb L באשר אינו אלגברי מעל
                                                                      \mathbb{K} אלגברי מעל lpha: הרחבה אלגברית: הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} עבורה לכל
                                                                                                                                              .טענה: \mathbb{C}/\mathbb{R} הרחבה אלגברית
                       \mathbb{K}\subseteq R סטענה: תהא \mathbb{K}\subseteq R הרחבה אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה אלגברית) אלגברית: המקיים \mathbb{K}\subseteq R מתקיים כי \mathbb{K} שדה).
פולינום מינימלי של איבר אלגברי: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה ויהי אלגברי מעל \mathbb{K} איי פולינום מתוקן f\in\mathbb{K} תהא אלגברי: תהא
```

 $f\left(lpha
ight)=0$ מינימלית המקיים $f\left(lpha
ight)=0$. משפט: תהא \mathbb{Z}/\mathbb{Z} הרחבה ויהי $lpha\in\mathbb{Z}$ אלגברי מעל \mathbb{Z} אזי קיים ויחיד פולינום מינימלי $f_lpha\in\mathbb{Z}$ עבור lpha וכן $f_lpha=0$. $f_lpha=0$

 f_lpha הינו lpha הינו מעל אזי הפולינום המינימלי של אלגברי מעל מעל הרחבה ויהי מעל $lpha\in\mathbb{L}$ הרחבה היהי

. אי־פריק f_lpha אזי מסקנה: תהא \mathbb{K} אזי $lpha\in\mathbb{L}$ אויהי ויהי הרחבה ויהי מסקנה: תהא

 $f=f_{lpha}$ אזי $f\left(lpha
ight)=0$ טענה: תהא \mathbb{Z}/\mathbb{K} הרחבה יהי $lpha\in\mathbb{L}$ אלגברי מעל \mathfrak{Z} ויהי $f\in\mathbb{K}$ אי־פריק מתוקן המקיים $lpha\in\mathbb{L}$ אזי $lpha\in\mathbb{L}$ טענה: יהי \mathfrak{Z} שדה תהיינה $\mathfrak{Z}/\mathbb{F},\mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבות יהי $\mathfrak{Z}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבות יהי $\mathfrak{Z}/\mathbb{F},\mathbb{L}/\mathbb{F}\to\mathbb{K}$ הרחבות יהי $\mathfrak{Z}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבות יהי \mathfrak{Z}/\mathbb{F} הרחבות יחבות יחבו

המינימלי המקיים בעל יחידה האבלי בעל יחידה אבלי ויהי אבליים בעל יחידה באשר אבריים ויהי אבליים בעל יחידה אבלי איז א איז או האבלי ויהי אבליים בעל יחידה באשר אבריים בעל יחידה באשר איז או איז או איז או איז או איז א

A[S]=R סימון: יהיו A,B חוגים אבליים בעלי יחידה באשר $A\subseteq B$ תהא $A\subseteq B$ ויהי $A\subseteq B$ החוג הנוצר מ־A על ידי A אזי $A[S]=\bigcup_{n=1}^\infty \left\{f\left(s_1\dots s_n\right)\,\middle|\, f\in A[s_1\dots s_n\in S] \atop s_1\dots s_n\in S\right\}$ אזי $A\subseteq B$ אויהים אבליים בעלי יחידה באשר $A\subseteq B$ ותהא $A\subseteq B$ ותהא $A\subseteq B$ אזי $A\subseteq B$ הרחבה נוצרת: תהא $A\subseteq B$ הרחבה תהא $A\subseteq B$ ויהי $A\subseteq B$ ויהי $A\subseteq B$ הרחבה הנוצרת על ידי $A\subseteq B$ אזי $A\subseteq B$ ותהא $A\subseteq B$ ווהי $A\subseteq B$ ווחים בעלי יחידה באשר $A\subseteq B$ ווחידה בא

```
\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) טענה:
                                                                                                                  \mathbb{K}\left(lpha
ight)/\mathbb{K} אזי lpha\in\mathbb{L} ויהי ויהי \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי הרחבה פשוטה:
                                                                                               משפט מבנה של הרחבה פשוטה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי משפט מבנה של הרחבה פשוטה
                                                                                                         \mathbb{K}\left(lpha
ight)/\mathbb{K}\simeq\mathbb{K}\left(x
ight)/\mathbb{K} אז אז \alpha טרנסצנדנטי מעל • •
                                                                                                         \mathbb{K}(\alpha)/\mathbb{K}\simeq \left(\mathbb{K}[x]/(f_{\alpha})\right)/\mathbb{K} אז אלגברי מעל \alpha אלגברי מעל \alpha

u:\mathbb{K}\left(lpha
ight)/\mathbb{K} 	o \mathbb{K}\left(eta
ight)/\mathbb{K} שורשים של f אזי קיים איזומורפיזם f\in\mathbb{K}\left[x
ight]\setminus\{0\} אי־פריק ויהיו f\in\mathbb{K}\left[x
ight]\setminus\{0\} שורשים של
                                                                                                                                                                          .\nu\left(\alpha\right)=\beta באשר
 המקיים f\in\mathbb{K}\left[x_1\dots x_n
ight] איי קיים eta\in\mathbb{K}\left(lpha_1\dotslpha_n
ight) איי איי קיים מעל lpha_1\dotslpha_n\in\mathbb{L} המקיים החחבה יהיו
                                                                                                                                                                       f(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \beta
                                                                                                     \mathbb{L}:\mathbb{K}=\dim_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{L}
ight) הרחבה אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} תהא
                                                                                                                   \mathbb{L} : \mathbb{K}] < \infty המקיימת \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית: הרחבה
                                     \mathbb{F}^{[x]/(f)} בסיס של \{x^i+(f)\}_{i=0}^{n-1} אזי \deg(f)=n באשר באשר f\in\mathbb{F}[x] ביסיס של n\in\mathbb{N}_+ יהי הי
                                                                                                   טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה נוצרת סופית.
                                                     טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה סופית) הרחבה אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה אזי
                                                                      \mathbb{L}[\mathbb{K}\left(lpha
ight):\mathbb{K}]=\deg\left(f_{lpha}
ight) אזי מענה: תהא lpha\in\mathbb{L} הרחבה ויהי lpha\in\mathbb{L}
                                                     \mathbb{F}:\mathbb{K}=[\mathbb{F}:\mathbb{L}]\cdot[\mathbb{L}:\mathbb{K}] אזי \mathbb{F}/\mathbb{L},\mathbb{L}/\mathbb{K} משפט מולטיפליקטיביות של דרגה: תהיינה
     (פימים \mathbb{F}/\mathbb{K} המקיים \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבה סופית) אזי (\alpha\in\mathbb{F} המקיים \alpha\in\mathbb{F} המקיים אזי (\alpha\in\mathbb{F} הרחבה סופית).
הרחבה \mathbb{F}/\mathbb{K} הכח היהיו \mathbb{F} המקינם \mathbb{F} המקינם שדה \mathbb{F}\subseteq\mathbb{L} המקינם מעל \alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{L} הרחבה ויהיו \alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{L} הרחבה ויהיו
                                                                                    מסקנה: תהיינה \mathbb{F}/\mathbb{L}, \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אלגבריות אזי \mathbb{F}/\mathbb{L}, \mathbb{L}/\mathbb{K} מסקנה:
                                                                                                                      \mathbb{Q}\left(\sqrt{q}
ight)
ot\simeq\mathbb{Q}\left(\sqrt{p}
ight) שונים אזי p,q\in\mathbb{P} טענה: יהיו
               \mathbb{L}\left[x
ight] איז אי־פריק מעל f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אי־פריק מעל f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אי־פריק מעל אי־פריק מעל f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אי־פריק מעל
                                                                           \overline{\mathbb{K}_{\mathbb{L}}}=\{lpha\in\mathbb{L}\mid\mathbb{K} אלגברי מעל lpha\} הרחבה אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה: תהא
                                                                                                                                      מסקנה: תהא \mathbb{K}_{\mathbb{L}} הרחבה אזי שדה.
                                                                                                                           |\mathbb{F}[x]| = \max\{|\mathbb{F}|, \aleph_0\} טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי
                                                                                                     \|\mathbb{L}\| \leq \max\left\{ |\mathbb{K}| \, , \aleph_0 
ight\} טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אלגברית אזי
                                       a\in\mathbb{K} המקיים lpha\in\mathbb{K} המקיים מצור אלגברית: שדה שדה לכל קוצורו לכל f\in\mathbb{K} באשר באשר לכל שדה סגור אלגברית: שדה אלגברית: שדה לכל המקיים אלגברית:
                                                                                                            טענה המשפט היסודי של האלגברה: \mathbb C שדה סגור אלגברית.
                                                                                       הרחבה סגורה אלגברית: הרחבה אלגברית \mathbb{L}/\mathbb{K} באשר שלגברית:
f=lpha_0\cdot\prod_{i=1}^n(x-lpha_i) בולינום מתפרק לגורמים לינאריים: יהי \mathbb K שדה אזיf\in\mathbb K\left[x
ight] עבורו קיימים lpha_0,lpha_1\ldotslpha_n\in\mathbb K
                                                               טענה: יהי \mathbb{K} שדה סגור אלגברית ויהי f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\} אזי f \in \mathbb{K}[x] טענה:
                                     . הרחבה סגורה אלגברית \mathbb{L}/\mathbb{F} אזי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} המקיים \mathbb{F}\subseteq\mathbb{L} הרחבה סגורה אלגברית ויהי
                                                                                    \mathbb{L}=\mathbb{K} אזי אלגברית אוי הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אלגברית אזי שדה סגור אלגברית ותהא
                            \mathrm{sols}_{\mathbb{L}}(f) 
eq \varnothing המקיימת \mathbb{L}/\mathbb{K} שדה ויהי \mathbb{E}/\mathbb{K} שדה ויהי באשר f \in \mathbb{K}[x] באשר החבה אז קיימת הרחבה אין מיימת הרחבה הויהי
                      למה: יהי \mathbb{Z} שדה ויהי f\in\mathbb{K} [x]\setminus\{0\} אזי קיימת הרחבה סופית עבורה קיימים f\in\mathbb{K} אזי קיימת הרחבה למה:
                                                                                                                                                             f = \alpha_0 \cdot \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)
 המקיימת lpha\in M_{m	imes(n+1)}\left(\mathbb{L}
ight) עבורה קיימת \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי קיימת הרחבה אזי קיימת הרחבה f_1\dots f_m\in\mathbb{K}\left[x
ight]\setminus\{0\} המקיימת
                                                                                                                               j \in [m] לכל f_j = \alpha_{j,1} \cdot \prod_{i=1}^n (x - \alpha_{j,i+1})
\mathbb{L}/\mathbb{K} משפט: יהי \mathcal{T} שדה תהא \mathcal{T} קבוצה ויהיו \langle f_	au \in \mathcal{T} | 	au \in \mathcal{T} \rangle באשר באשר לכל לכל לכל שדה תהא \mathcal{T} קבוצה ויהיו באלגברית להיו
                                                                                                                                          .	au \in \mathcal{T} לכל \mathrm{sols}_{\mathbb{L}}\left(f_{	au}
ight) 
eq arnothing המקיימת
                                                                                                        \mathbb{L}/\mathbb{K} שדה אזי קיימת הרחבה סגורה אלגברית שפט: יהי \mathbb{K} שדה אזי קיימת
\Phi:\mathbb{L}\hookrightarrow\mathbb{F} משפט שטייניץ: תהא 
u:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{F} הרחבה אלגברית יהי 
u:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{F} שדה סגור אלגברית ויהי שדה סגור אלגברית היהי
                                                                                      \mathbb{F}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{L}/\mathbb{K} אזי אלגברית סגורות הרחבות הרחבות \mathbb{F}/\mathbb{K},\mathbb{L}/\mathbb{K} מסקנה:
```

 $\mathbb{L}(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{f,g \in \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]} \left\{ rac{f(s_1 \dots s_n)}{g(s_1 \dots s_n)} \;\middle|\; rac{s_1 \dots s_n \in S}{g(s_1 \dots s_n)
eq 0}
ight\}$ אזי $S \subseteq \mathbb{L}$ אזי $S \subseteq \mathbb{L}$ הרחבה ותהא

```
. טענה: יהי \mathbb{F} שדה אינסופי אזי \mathbb{F}^{	imes} אינה ציקלית
                               אזי \gcd(f,g)=1 וכן a=rac{f}{a} באשר f,g\in\mathbb{K}[x] ויהיו a\in\mathbb{K}(x) שדה תהא שדה תכיינלית: יהי
                                                                                                                                                                                   \deg(a) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}\
משפט: יהי \mathbb{K}\left(x\right)/\mathbb{K}\left(a\right) וכן איי a איי אי a באשר a\in\mathbb{K}\left(x\right) באשר a\in\mathbb{K}\left(x\right) באשר a\in\mathbb{K}\left(x\right)
.(a=rac{lpha x+eta}{\gamma x+\delta} וכן lpha \delta-eta\gamma
eq 0 המקיימים lpha,eta,\gamma,\delta\in\mathbb{K} וכן (lpha) אוי (lph
                                      . \mathrm{Aut}\left(\mathbb{K}\left(x\right)\right) = \left\{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \;\middle|\; (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}) \land (\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0)\right\} שדה אזי \alpha \in \mathbb{K}\left(x\right) אוטומורפיזם ויהי \alpha \in \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} \to \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} \to \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} אוטומורפיזם ויהי \alpha \in \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} \to \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} אוטומורפיזם ויהי
                                                                 \mathbb{L}=\mathbb{K}\left(lpha
ight) טרנסצנדטי המקיים lpha\in\mathbb{L} עבורה קיים עבורה מקיים המקיים המקיים
   משפט לורות': יהיו \mathbb{L}/\mathbb{K} שדות באשר \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה לא טריוואלית וכן \mathbb{L}(x) הרחבה אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה טרנסצנדנטית פשוטה.
                                 f\left(
u,\psi
ight)=0 עבורן עבורן 
u,\psi\in\mathbb{K}\left(x
ight) אזי פונקציות רציונליות שדה ותהא איז שדה ותהא ותהא f:\mathbb{K}^{2}	o\mathbb{K} אזי פרמטריזציה איזי פונקציות יהי
                                   . עקומה רציונלית: יהי \mathbb K שדה תהא איז עקומה f:\mathbb K^2	o\mathbb K אזי עקומה רציונלית: יהי שדה תהא שדה תהא איז עקומה רציונלית: יהי
                   \mathbb{K}\left(u_1\dots u_m
ight) איבר תלוי אלגברית מעל שדה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה ויהיו u_1\dots u_m\in\mathbb{L} איבר תלוי אלגברי מעל מעל שדה
אינו תלוי אלגברית מעל שדה (בת"א): תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה ויהיו u_1 \ldots u_m \in \mathbb{L} אינו תלוי אלגברית מעל שדה (בת"א): איבר בלתי תלוי אלגברית מעל אינו תלוי אלגברית מעל שדה (בת"א): אינר בלתי תלוי אלגברית מעל שדה (בת"א): תהא
\mathbb K מעל u_1\ldots u_{m-1} בת"א ב־u_1\ldots u_m מעל u_1\ldots u_m מעל u_1\ldots u_m,v\in\mathbb L בת"א ברית מעל u_1\ldots u_m מעל u_1\ldots u_m
                                                                                                                                                           \mathbb{K} מעל u_1 \dots u_{m-1}, vמעל אזי תלוי אלגברית מעל
למה: תהא v_j וכן \mathbb K וכן v_j חלוי אלגברית ב־u_1 \dots u_m, v_1 \dots v_n באשר שוכן v_j \dots v_n מעל \mathbb L/\mathbb K הרחבה הייו
                                                                                                       \mathbb{K} מעל וu_1\ldots u_m מעל אזי אלגברית אזי j\in [n] מעל אזי מעל ברu_1\ldots u_m
קבוצה בלתי תלויה אלגברית/טרנסצנדנטיים בלתי תלויים אלגברית זה בזה (בת"א): תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי u_1\dots u_m\in\mathbb{L} עבורם
                                                                                                                    f=0 אז f\left(u_1\ldots u_m
ight)=0 מתקיים כי אם f\in\mathbb{K}\left[x_1\ldots x_m
ight]
                                                           \mathbb{K}(u_1\dots u_m)\simeq \mathbb{K}(x_1\dots x_m) אוי משפט: תהא \mathbb{K} אוי u_1\dots u_m\in \mathbb{L} ויהיו הרחבה ויהיו הרחבה u_1\dots u_m\in \mathbb{L}
f\in \mathbb{K}\left[x_1,\ldots,x_{|S|}
ight] סופית ולכל S\subseteq \mathcal{B} סופית הרא ש\mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי איז הרחבה אזי\mathcal{B}\subseteq \mathbb{L} עבורה לכל
                                                                                                                                                                                                   .f=0 אז f\left( S
ight) =0 כי אם
                           \mathbb{K}\left(\{u_{lpha}\}_{lpha\in\mathcal{I}}
ight)\simeq\mathbb{K}\left(\{x_{lpha}\}_{lpha\in\mathcal{I}}
ight) אזי משפט: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} אהרחבה תהא \mathbb{L} קבוצה ותהא \{u_{lpha}\}_{lpha\in\mathcal{I}}\subseteq\mathbb{L}
\mathbb K בת"א מעל \mathbb A עבורה לכל בת"א בת"א מעל בת"א מעל בת"א מעל \mathbb A\subseteq\mathbb L בת"א מעל בת"א מעל בת"א מעל בת"א מעל בת"א מעל
                                                                                                                                                                                                                           \mathcal{B} \not\subset \mathcal{A} מתקיים
                                                                                                . משפט: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה שאינה אלגברית אזי קיים ל\mathbb{L}/\mathbb{K} בסיס טרנסצנדנטי
              \mathbb{L}/\mathbb{K} המקיים \mathbb{L}/\mathbb{K} של \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת שדות ותהא אזי קיים בשר \mathbb{L}=\mathbb{K}(S) באשר אזי באשר S\subseteq\mathbb{L} המקיים \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת שדות ותהא
                                                              \mathbb{L}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{K}\left(\{x_lpha\}_{lpha\in\mathcal{I}}
ight)/\mathbb{K} הרחבה טרנסצנדנטית: הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{K}\left(\{x_lpha\}_{lpha\in\mathcal{I}}
ight) אבורה קיימת קבוצה \mathcal{I} המקיימת
מסקנה משפט הפיצול: תהא \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבה אזי קיים שדה \mathbb{F} באשר \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבות המקיים כי \mathbb{E}/\mathbb{K} הרחבה אזי קיים שדה \mathbb{F}
                                                                                                                                                                                                               \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבה אלגברית.
eta\in B וכן לכל \mathbb{K}\left(B
ight) אלגברי מעל \mathbb{K}\left(B
ight) וכן לכל A,B\subseteq\mathbb{L} אבון לכל A,B\subseteq\mathbb{L} וכן לכל
                                                                                                                                                                                         \mathbb{K}\left(A
ight) מתקיים כי eta אלגברי מעל
           \mathbb{A}באשר A,M שקולות אלגברית מעל \mathbb{K}. דורש A\subset\mathbb{L} אזי קיימת A\subset\mathbb{L} אזי קיימת A\subset\mathbb{L} אזי קיימת
וכן B\subseteq M באשר M\subseteq A בת"א מעל M\subseteq A בת"א אזי קיימת בת"א באשר B\subseteq A באשר A,B\subseteq \mathbb{L} באשר באחר \mathbb{L}/\mathbb{K}
```

למה משפט ההחלפה: תהא b_j וכן \mathbb{K} הרחבה ויהיו באשר $\{b_1\dots b_s\}$ באשר $\{b_1\dots b_s\}$ בת"א מעל \mathbb{K} וכן \mathbb{K} הרחבה ויהיו אלגברית באטר $S\subseteq \{a_1\dots a_r,b_1\dots b_s\}$ איז $S\subseteq \{a_1\dots a_r\}$ וכן קיימת $S\subseteq \{a_1\dots a_r\}$ ביונר אז איז בין איז איז בין דיימת באטר איז מעל $S\subseteq \{a_1\dots a_r\}$

|A|=|B| אזי אזי אוגברית מעל \mathbb{K} אזי אקולות אלגברית בת"א בת"א בת"א בת"ג בת"ג הרחבה ותהיינה

 $\overline{\mathbb{K}}=\mathbb{L}$ אזי $\mathbb{K}=\mathbb{L}$ הרחבה סגורה אלגברית אזי $\mathbb{K}=\mathbb{L}$

 $.\overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}}=\overline{\mathbb{Q}}$ טענה: $|\overline{\mathbb{Q}}|=leph_0$

 \mathbb{A} ורש \mathbb{K} אקולות אלגברית מעל \mathbb{A} . דורש

 \mathbb{K} מעל $\{a_1 \dots a_r\}$ מעל

 $L/\mathbb{K} o \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}$ מסקנה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K} o \mathbb{K}$ הרחבה אלגברית אזי קיים הומומורפיזם

```
\mathbb{K} 
eq \mathbb{R} וכן \mathbb{K} \simeq \mathbb{R} טענה: קיים שדה \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C} באשר
                                                                                                                                                              |\operatorname{Aut}\left(\mathbb{C}/\mathbb{Q}\right)|=2^{\aleph_0} וכן \operatorname{Aut}\left(\mathbb{R}/\mathbb{Q}\right)=\{e\} טענה:
                                                                    \mathbb{F},\mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} שדות אזי השדה המינימלי \mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} המקיים שדה ויהיו שדה ויהיו שדה ויהיו שדה קומפוזיט: יהי
                                                                                                      \mathbb{F}\cdot\mathbb{K}=\mathbb{E} אזי \mathbb{F},\mathbb{K} אזי שדה קומפוזיט של \mathbb{F},\mathbb{K}\subseteq\mathbb{L} איזי שדה יהיו
\operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{FE}
ight)\leq \mathfrak{k} אזי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} אזי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} ויהייו \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}
ight)<\aleph_{0} אזי
                                                                                                                                                                                                                     \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{F}\right) + \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{E}\right)
\mathbb{L}\left[x
ight] מתקיים כי f אינו מתפרק לגורמים לינאריים מעל בכל שדה \mathbb{L}\subset\mathbb{F}
                              \mathbb{F}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{L}/\mathbb{K} מתקיים f של f\in\mathbb{K}[x] אזי קיים ל-f שדה פיצול וכן לכל שדות פיצול f\in\mathbb{K}[x] אזי קיים ל-
                                                                                                                         \|\mathbb{F}\|=p^n טענה: יהי\mathbb{F} באשר n\in\mathbb{R} אזי קיים ויחיד שדה ויהי n\in\mathbb{R}_+ טענה:
                                                                                                                                      \mathbb{F}_{p^n}=\left\{x\in\overline{\mathbb{F}_p}\mid x^{p^n}=x
ight\} אזי p\in\mathbb{P} ויהי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי n\in\mathbb{N}_+
                                                             \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי f שדה הפיצול של ויהי \mathbb{L} ויהי \mathbb{L} שדה יהי \mathbb{K} שדה יהי \mathbb{K} אזי \mathbb{K} אזי \mathbb{K}
                                                                                                                                    \mathbb{L}[\mathbb{L}:\mathbb{K}]=2 אזי \mathbb{L}
eq \mathbb{K} איי באשר הרחבה ריבועית הא
מתפרק איז \mathrm{sols}_{\mathbb{L}}(f) 
eq \varnothing מתקיים כי אם f \in \mathbb{K}[x] עבורה לכל פולינום אי־פריק עבורה f \in \mathbb{K}[x] מתפרק
                                                                                                                                                                                                                  \mathbb{L}\left[x
ight] לגורמים לינאריים מעל
                                                                                                                                     משפט: תהא \mathbb{K}/\mathbb{K} הרחבה סופית באשר \mathbb{K}/\mathbb{K} הרחבה אזי התב"ש
                                                                                                                                                                                                                 . הרחבה נורמלית \mathbb{L}/\mathbb{K}
                                                                                                                                                                    f \in \mathbb{K}[x] שדה הפיצול של f \in \mathbb{K}[x]
                                                                                                                                                             \mathbb{F}=\mathbb{L} אז \mathbb{F}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{L}/\mathbb{K} אם \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{F} אז ullet
                                                                                                                                          .
u\left(\mathbb{L}
ight)=\mathbb{L} מתקיים 
u:\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}	o\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K} פלכל אוטומורפיזם •
                                                                        . הרחבה נורמלית \mathbb{L}/\mathbb{F} אזי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} אזי \mathbb{F}\subseteq\mathbb{L} הרחבה נורמלית ויהי מסקנה: תהא
                                                                                    \mathbb{L}\subset\mathbb{F} עבורה \mathbb{F}/\mathbb{K} עבורה סופית אוי קיימת הרחבה סופית נורמלית \mathbb{L}/\mathbb{K}
מסקנה: יהי \mathbb{K} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{L}\subset\mathbb{F} וכן \mathbb{K}\subset\mathbb{F} הרחבות נורמליות אזי \mathbb{F},\mathbb{L}\subset\mathbb{K} הרחבה \mathbb{F},\mathbb{L}\subset\mathbb{F}
                                                                                                                                                                                      נורמלית וכן \mathbb{L} \cap \mathbb{F}) /\mathbb{K} ורחבה נורמלית.
                                                                                                                                         מסקנה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה מדרגה 2 אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה נורמלית.
                                                                                                           \mathbb{L}/\mathbb{F} אזי \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבה נורמלית. שדה סופי ותהא \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבה כופית אזי
\mathbb{L}[x] אינ מעל לגורמים לינאריים מעל f_lpha מתפרק הפולינום lpha\in\mathbb{L} הרחבה אלגברית איי \mathbb{L}[x] הרחבה עלגברית איי (\mathbb{L}[x] הרחבה עלגברית איי מעל בורמלית)
                                                                  (\mathbb{L}\left[x
ight] איי f,g) איי ארים מעל f,g איי ארים מעל f,g\in\mathbb{K}\left[x
ight] זרים מעל \mathbb{L}/\mathbb{K} איי גווענה: תהא
                           אזי \mathbb{L}\left[x
ight] מעל g,h|f אי־פריקים באשר g,h\in\mathbb{L}\left[x
ight] אי־פריק אי־פריק מעל פריקים מעל אי־פריקים אי־פריק מעל אי־פריק מעל אי־פריק מעל אי־פריק מעל אי־פריקים אי־פריקי
                                                                                                                                                                                                                                     \deg(q) = \deg(h)
                                                                                           \overline{\mathbb{K}}\left[x
ight] שדה אזי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] באשר בעל שורשים פשוטים מעל פולינום ספרבילי: יהי
                                                                                   \overline{\mathbb{K}}[x] אי־ספרבילי טהור: יהי \mathbb{K} שדה אזי f \in \mathbb{K}[x] באשר f בעל שורש יחיד מעל
                                                                                              . איבר אוי שדה: תהא שדה: תהא הרחבה אלגברית היחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} שבורו ספרבילי מעל איבר איבר מעל שדה: תהא
                                                                              \mathbb{K} עבורה מער מער פרבילית: הרחבה אלגברית עבורה לכל עבורה לכל עבורה אלגברית הרחבה אלגברית מעל
                           \mathbb{F} מסקנה: תהא \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} ארי \alpha\in\mathbb{L} אוי \alpha\in\mathbb{L} ספרבילי מעל \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} באשר באשר \mathbb{F}\subseteq\mathbb{L} אוי מסקנה: תהא
                                                                                         מסקנה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה ספרבילית. באשר באשר הרחבה אלגברית הא ברחבה הרחבה שלגברית באשר
g\in\mathbb{K}\left[x
ight] מסקנה: יהי p\in\mathbb{K} בעל שורש מרובה)\Rightarrow הרחבה אלגברית באשר ויהי להמר ויהי מסקנה: יהי הראב אלגברית באשר הראב האלגברית באשר ויהי
                                                                                                                                                                                                                           f_{\alpha}\left(x\right)=g\left(x^{p}\right) עבורו
```

 $\det_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})=|\mathcal{B}|$ אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי טרנסצנדנטית של \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה שאינה אלגברית ויהי \mathcal{B} בסיס טרנסצנדנטי של

 \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי

 $\operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{L}\right) = \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{F}\right) + \operatorname{degtr}_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{L}\right)$ הרחבות אזי היינה $\mathbb{F}/\mathbb{K}, \mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבות אזי

 $.\overline{\mathbb{C}\left(x
ight) }\simeq\mathbb{C}$:טענה

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא ותהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי

 \mathbb{L}/\mathbb{K} ט פרבילית) ספרבילית) ספרבילית) ספרבילית) ספרבילית).

 $|\mathbb{L} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}| \leq |\mathbb{L} : \mathbb{K}| \bullet$

```
(\mathbb{K} ספרביליים מעל lpha_1\ldotslpha_m) ספרבילית) ספרביליים מעל אזי מסקנה: יהיו lpha_1\ldotslpha_m\in\overline{\mathbb{K}} אזי מסקנה:
                                                           מסקנה: יהי \mathbb{K} שדה ותהיינה \mathbb{L}/\mathbb{K}, \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבות ספרביליות אזי שדה ותהיינה
                                                          . מסקנה סגור ספרבילי בשדה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי lpha ספרבילי מעל שדה. תהא
                                                                                      \overline{\mathbb{K}}_s=ig\{lpha\in\overline{\mathbb{K}}\mid\mathbb{K} מער ספרבילי: יהי שדה אזי שדה אזי מפרבילי: יהי
        \mathbb{R} טענה: יהי p\in\mathbb{R} עבורו lpha^{p^r} ספרבילי מעל מעל ויהי היהי רומב האזי היחבה אלגברית באשר באשר רובה a\in\mathbb{R} ויהי a\in\mathbb{R} אזי קיים a\in\mathbb{R}
                                                                       טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} ספרבילית. char (\mathbb{K}) 
mid | [\mathbb{L}:\mathbb{K}] ספרבילית.
                                                                                   שדה משוכלל: שדה \mathbb{L} עבורו לכל הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} מתקיים כי \mathbb{L} ספרבילי.
                                                                                                                                       אזי p\in\mathbb{P} אזי שדה ויהי \mathbb{K} אזי
                                                                                                                        אז \mathbb{K} שדה משוכלל. char (\mathbb{K})=0
                                                     מסקנה: יהי \mathbb F שדה סופי אזי \mathbb F שדה משוכלל.
                                                                       טענה: יהי p\in\mathbb{P} ויהי \mathbb{F} שדה באשר הויר אזי p\in\mathbb{P} אזי יהי p\in\mathbb{P}
                                                                                         \mathbb{L}=\mathbb{K}\left(lpha
ight) עבורו lpha\in\mathbb{L} איבר פרימיטיבי: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי
               \mathbb{L}=\mathbb{K}\left(lpha
ight) עבורו lpha\in\mathbb{L} שנסופי חרחבה סופית ספרבילית אזי קיים שדה אינסופי ותהא
                                                                                              למה: יהי \mathbb{K} שדה ותהא G\subseteq\mathbb{K}^	imes חבורה סופית אזי \mathbb{K} ציקלית.
                                                                                                                             \mathbb{F}^{	imes} ציקלית. שדה סופי אזי \mathbb{F}^{	imes} ציקלית.
                                 \mathbb{L}=\mathbb{K}\left(lpha
ight) עבורו lpha\in\mathbb{L} עבורו איי קיים lpha\in\mathbb{L} שבה סופי ותהא אוי קיים lpha\in\mathbb{L}
                            (p \nmid n) \Longleftrightarrow (\mathbb{K} \, [x] \,  ספרבילי מעל אזי (n \in \mathbb{N}_+ ויהי הי n \in \mathbb{N}_+ טענה: יהי p \in \mathbb{P} יהי יהי p \in \mathbb{R} יהי
          \mu_n=\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(x^n-1) אזי \gcd(n,p)=1 באשר n\in\mathbb{N}_+ ויהי ויהי p\in\mathbb{R} אזי שדה באשר p\in\mathbb{R} יהי שורשי היחידה: יהי
                            . אזי \gcd(n,p)=1 באשר ויהי \gcd(n,p)=1 ויהי ויהי רבאשר ויהי הבאשר שדה באשר אזי באשר ויהי ויהי ויהי p\in\mathbb{P} יהי יהי
שורש g\in\mu_n אזי \gcd(n,p)=1 באשר ויהי n\in\mathbb{N}_+ ויהי ויהי ראשר שדה באשר g\in\mu_n יהי אזי יוצר מיטיבי: יהי ויהי p\in\mathbb{P} יהי שדה באשר שדה באשר אזי יוצר
                                                                                                                                                                            \mu_n של
                \mathbb{E}[\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)]=|\mathrm{sols}_{\mathbb{K}(lpha)}\left(f_{lpha}
ight)| איזי \alpha איזי f_{lpha}\in\mathbb{K}\left[x
ight] הרחבה פשוטה ויהי
                                                                                      הרחבת גלואה: הרחבה סופית \mathbb{L}/\mathbb{K} באשר \mathbb{L}/\mathbb{K} נורמלית וספרבילית.
                                                        טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{F} אזי \mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} שדה באשר \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L} הרחבת גלואה ויהי בענה: תהא
                                    טענה: אזי \mathbb{F}/\mathbb{K} אזי \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבת גלואה. \mathbb{F} שדה פיצול של f\in\mathbb{K} הרחבת גלואה. אויהי \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבת גלואה.
                                                           . הרחבת \mathbb{L}/\mathbb{F} שדה באשר \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבה סופית אזי \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבת גלואה.
             .
u: \mathbb{F}/\mathbb{K} 	o \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית ספרבילית אזי קיימת הרחבת גלואה \mathbb{L}/\mathbb{K} עבורה קיים הומומורפיזם
                                                      \mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)=\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight) הרחבת גלואה אזי בורת גלואה של הרחבת גלואה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K}
                                                                                                       . חבורה \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\right) אזי הרחבת \mathbb{L}/\mathbb{K} חבורה \mathbb{L}/\mathbb{K}
                                                                                           a^{\sigma}=\sigma\left(a
ight) אזי \sigma\in\operatorname{Aut}\left(\mathbb{L}
ight) ויהי a\in\mathbb{L} אזי שדה יהי \mathbb{L} יהי
                                       \mathrm{GA}\left(\sigma,lpha
ight)=a^{\sigma} כך \mathrm{GA}:\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)	imes\mathbb{L}	o\mathbb{L} פעולת גלואה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי נגדיר
                                                                                                \mathrm{GA}\in\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight) \curvearrowright \mathbb{L} למה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי
טענה: תהא f(x)=\prod_{eta\in \mathrm{Orb}(lpha)}(x-eta) כך כך f\in\mathbb{L}[x] איזי lpha\in\mathbb{L} וכן אי־פּריק מעל lpha\in\mathbb{L}
                                                                                                                                                                              \mathbb{K}[x]
                                               \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{F}
ight)<\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight) אזי \mathbb{K}\subset\mathbb{F} שדה באשר \mathbb{F}\subset\mathbb{L} הרחבת גלואה ויהי
                                                                                               \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת \mathbb{L}/\mathbb{K} משפט: תהא
                                                        \mathbb{L}[\mathbb{L}:\mathbb{K}]=|\mathrm{Aut}\,(\mathbb{L}/\mathbb{K})|טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה)
                                          עת־חבורה אזי H<\operatorname{Aut}\left(\mathbb{L}
ight) שדה ותהא של שדה ביחס לחבורה אזי H<\operatorname{Aut}\left(\mathbb{L}
ight)
                                                                                                                                    \mathbb{L}^H = \{ a \in \mathbb{L} \mid \forall h \in H.a^h = a \}
```

 $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{L}^H\right)=H$ משפט: יהי \mathbb{L} שדה ותהא $H\leq\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}
ight)$ תת־חבורה סופית אזי $H\leq\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}
ight)$ שדה ותהא $H\leq\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)$ שדה ותהא $H\leq\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)$ ותת־חבורה אזי $H\leq\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)$ הרחבה גלואה ותהא

 $\operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q
ight)$ יוצר של Fr_p יוצר אזי $\operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q
ight)$ אזי $n\in\mathbb{N}_+$ יהי $q\in\mathbb{P}$ יהי יהי

 $\mathbb{L}^{\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})}=\mathbb{K}$ מסקנה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי

(ספרביליות). באשר $\mathbb{L}/\mathbb{F},\mathbb{F}/\mathbb{K})$ שבר בילית) של שדה באשר $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{F}$ שדה באשר $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{E}$ שבר בילית).

```
\|\{H\mid H<\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)\}\|=\|\{\mathbb{F}\mid (\mathbb{K}\subset\mathbb{F}\subset\mathbb{L})\wedge (\mathbb{F})\}\|טענה המשפט היסודי של תורת גלואה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי
                                                                                                                                                              \mathbb{L}^G\subseteq\mathbb{L}^Hמסקנה: יהי \mathbb{L} שדה ותהיינה H,G\leq \mathrm{Aut}\,(\mathbb{L}) מסקנה: יהי שדה ותהיינה מסקנה:
                                                                                                                               (\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})\subseteq\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{F})) שדות אזי (\mathbb{F}\subseteq\mathbb{K}) שדות אזי שדה ויהיו שדה ויהיו שדה \mathbb{F},\mathbb{K}\subseteq\mathbb{L}
                                                                                                                             \|\mathbb{F} \mid (\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}) \land (שדה\|\mathbb{F} \mid \mathbb{F} \mid (\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}) \land \mathbb{F} \mid \mathbb
                                                                                                                                                                                                                       \{\mathbb{F}\mid (\mathbb{F}) \wedge (\mathbb{F}) \wedge (\mathbb{F})\} = \{\mathbb{C}\} מסקנה:
צמודות \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{F}\right),\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{E}\right) הרחבת גלואה ויהיו \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} הרחבת גלואה ויהיו
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              .(\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})ב-
                                                                                                                                                                                        אזי \mathbb{K} \subset \mathbb{F} אזי \mathbb{F} \subset \mathbb{L} אזי הרחבת גלואה ויהי \mathbb{F} \subset \mathbb{L} אזי
                                                                                                                                                                                                                    .(Gal (\mathbb{L}/\mathbb{F}) \leq Gal (\mathbb{L}/\mathbb{K}))\iff גלואה) הרחבת גלואה) •
                                                                                                                                                                                              \operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}/\mathbb{K}
ight)\simeq\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})/\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) אם \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אז \bullet
                                                                         . הרחבת \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי אזי שדה הרחבת גלואה. בעל שורשים פשוטים בעל שורשים בעל בעל f\in\mathbb{K}\left[x\right] הרחבת גלואה.
    \operatorname{Gal}\left(f
ight)=\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight) אזי שדה הפיצול של f אזי שדה יהי \mathbb{K} שדה יהי f בעל שורשים פשוטים ויהי \mathbb{L} שדה הפיצול של אזי אזי f
\operatorname{RA}:\operatorname{Gal}(f)	imes\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f)	o\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f) בעל שורשים פשוטים אזי נגדיר f\in\mathbb{K}[x] בעל שדה ויהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               .RA(\sigma,\alpha) = \sigma(\alpha)
                                                                                                                               \mathrm{RA}\in\mathrm{Gal}\left(f
ight) \curvearrowright \mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{Z}}}\left(f
ight) אזי פשוטים בעל שורשים בעל דה ויהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] בעל
                                                                                                        .(אי־פריק) אי־פריק) אריפרית אזי (אורשים שוטים בעל שורשים בעל אי־פריק) שדה איהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אי־פריק).
                                              |\operatorname{Gal}(f)| |\operatorname{deg}(f)| וכן |\operatorname{Gal}(f)| |\operatorname{Gal}(f)| |\operatorname{Gal}(f)| אי־פריק בעל שורשים פשוטים אזיf \in \mathbb{K}[x] מסקנה: יהי
f(x_1\dots x_n)=f\left(x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)}
ight) מתקיים \sigma\in S_n מתקיים f\in \mathbb{K} אזי n\in \mathbb{N}_+ אזי n\in \mathbb{N}_+ אזי מטרית: יהי
                                                                                                         המוגדר s_k \in \mathbb{K}\left[x_1 \dots x_n
ight] אזי איזי k \in [n] ויהי n \in \mathbb{N}_+ המוs_k \in \mathbb{K}\left[x_1 \dots x_n
ight] איזי
                                                                                                                                                                                                                        .s_k\left(x_1,\ldots,x_n
ight)=\sum_{\substack{a\in[n]^k\ udh\ aav}}\prod_{i=1}^kx_{a_i} טענה: יהי \mathbb X שדה ויהי k\in\mathbb N_+ אזי s_k פונקציה סימטרית.
            f=g\left(s_1,\ldots,s_n
ight) עבורה g\in\mathbb{K}\left(x_1\ldots x_n
ight) סימטרית אזי קיימת f\in\mathbb{K}\left(x_1\ldots x_n
ight) ותהא ותהא n\in\mathbb{N}_+ יהי
                \prod_{i=1}^n (x-lpha_i) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \cdot s_{n-i} \left(lpha_1,\ldots,lpha_n
ight) \cdot x^i איזי lpha_1\ldotslpha_n\in\mathbb{K} ויהיו n\in\mathbb{N}_+ ויהיו n\in\mathbb{N}_+ איזי יהי
                                                                                                                                             \operatorname{Gal}\left(\prod_{i=1}^n (x-lpha_i)\right) \simeq S_n אזי מסקנה: יהי lpha שדה ויהיו lpha_1 \ldots lpha_n בת"א מעל
                                                                  . \mathbb K משפט: יהי \mathbb X שדה ויהיו lpha_1 בת"א מעל \mathbb X איז lpha_n איז lpha_n בת"א מעל lpha_n בת"א מעל
                                   |z_i| \le \sum_{i=1}^n |z_i| = \sum_{i=1}^n |z_i|לכל איז (i,j \in [n] לכל איז איז (z_1 \ldots z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\} ויהיו n \in \mathbb{N}_+ יהי איז ווהיו
                                                                                                                               \mathbb{Q}\left(\sqrt[d_1]{a_1},\ldots,\sqrt[d_n]{a_n}
ight)=\mathbb{Q}\left(\sum_{i=1}^n\sqrt[d_i]{a_i}
ight) אזי a_1\ldots a_n,d_1\ldots d_n\in\mathbb{N}_+ מסקנה: יהיו
                                                                                                       c=lpha a^2+eta b^2 עבורם a,b\in\mathbb{F} אזי קיימים אזי מענה: יהי lpha,eta\in\mathbb{F}^	imes ויהי lpha,eta\in\mathbb{F}
                                                                                                                                                                       |G| \geq [\mathbb{L}:\mathbb{L}^G] סופית אזי G \leq \mathrm{Aut}\,(\mathbb{L}) משפט ארטין: יהי\mathbb{L} יהי
                                                                                                                                                                               G=\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}/\mathbb{L}^G
ight) סופית אזי G\leq\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}
ight) שדה ותהא מסקנה: יהי
הרחבת גלואה אזי \mathbb{F}\mathbb{E}/\mathbb{E} שדות באשר \mathbb{F} וכן \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} וכן \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} הרחבת גלואה אזי \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} אינה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       \mathbb{FE}:\mathbb{E}=[\mathbb{F}:\mathbb{F}\cap\mathbb{E}] וכן
                                                              טענה: תהא \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבת גלואה ויהיו \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{E} וכן \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} הרחבת גלואה אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                 \operatorname{Gal}\left(\mathbb{FE}/\mathbb{E}\right) \simeq \operatorname{Gal}\left(\mathbb{E}/\left(\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\right)\right)
\mathbb{E}\cap\mathbb{F}=\mathbb{K} וכן \mathbb{F}/\mathbb{K},\mathbb{E}/\mathbb{K} הרחבות גלואה ויהיו \mathbb{F},\mathbb{E}\subset\mathbb{L} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{E}\subset\mathbb{E} וכן \mathbb{F}/\mathbb{K},\mathbb{E}/\mathbb{K} הרחבות גלואה ויהיו
                                                                                                                                                                                                                         \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)\simeq\operatorname{Gal}\left(\mathbb{E}/\mathbb{K}
ight)	imes\operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}/\mathbb{K}
ight) אזי \mathbb{FE}=\mathbb{L} וכן
טענה: יהיו \deg(f)=p אזי באשר pq הרחבת גלואה ממעלה שדה \mathbb{L}/\mathbb{K} אינו שדה pq הרחבת גלואה p< q באשר אינו שדה פיצול
```

 $G=\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)$ עבורה \mathbb{L}/\mathbb{K} עבורה אזי קיימת הרחבת גלואה \mathbb{L}/\mathbb{K}

 $\pi_q(n)=|\{f\in\mathbb{F}_q\left[x
bracket{x} \mid (\deg\left(f
ight)=n
ight)\wedge(\eta$ מתוקן ואי־פּריק) כך $\pi_q:\mathbb{N}_+ o\mathbb{N}_+$ אזי נגדיר $\pi_q(n)=|\{f\in\mathbb{F}_q\left[x
bracket{x} \mid (\deg\left(f
ight)=n
ight)\wedge(\eta)=0}$ טענה: יהי $\pi_q(n)=|\{f\in\mathbb{F}_q\left[x
bracket{x} \mid (d\in\mathbb{N}_+) \mid (d\in\mathbb{N$

f של

 $\overline{\mathbb{F}_p}=igcup_{n-1}^\infty\mathbb{F}_{p^n}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ טענה: יהי

 $(\mathbb{F}_{p^d}\subseteq\mathbb{F}_{p^n})\Longleftrightarrow (d|n)$ אזי $d,n\in\mathbb{N}_+$ ויהיו $p\in\mathbb{P}$ טענה: יהי

fשל של שדה הינו שדה $\mathbb{F}_{p^{\deg(f)}}$ אזי אי־פריק אי
ר $f\in\mathbb{F}_p\left[x\right]$ ויהי ויהי יהי יהי יהי אי־פריק אי־פריק אי

```
\mathbb{K}\left(\zeta_n
ight)=\mathbb{K}\left(\zeta_{\gcd(n,p)}
ight) אזי n\in\mathbb{N}_+ וויהי הוא char (\mathbb{K})=p שדה באשר p\in\mathbb{P} יהי למה: יהי
                                                                                                                               \mathbb{K}\left(\zeta_{n}
ight)/\mathbb{K} אזי \mathbb{K}\left(\zeta_{n}
ight)/\mathbb{K} הרחבת גלואה. n\in\mathbb{N}_{+}
                                                                                                                                                                                אזי n\in\mathbb{N}_+ אזי שדה ויהי \mathbb{K} אזי
                                                                                                                                                                                         . אבלית Gal (\mathbb{K}(\zeta_n)/\mathbb{K})
                                                                                                                                        H \cong \operatorname{Gal}\left(\mathbb{K}\left(\zeta_{n}\right)/\mathbb{K}\right) עבורה H < \left(\mathbb{Z}_{n}\right)^{\times} קיימת
                                                                                                                                                             ציקלית. \operatorname{Gal}\left(\mathbb{K}\left(\zeta_{n}\right)/\mathbb{K}\right) אז n\in\mathbb{P} אם n\in\mathbb{P}
                                                                                                                                                        \mathbb{Q}\left(\zeta_{n}
ight)/\mathbb{Q} אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי ציקלוטומית: יהי
              \Phi_n=f_{\zeta_n} כך \Phi_n\in\mathbb{Q}[x] אזי נגדיר של אל הפולינום המינימלי של הפולינום המינימלי ויהי f_{\zeta_n}\in\mathbb{Q}[x] ויהי ויהי n\in\mathbb{N}_+ אזי נגדיר
                                                                                                                                       \Phi_{n}\left(x
ight)=\prod_{\substack{i\in[n]\\gcd(i,n)=1}}\left(x-\zeta_{n}^{i}
ight) אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי
                                                                                                                                                          \mathbb{Q}\left[x
ight]טענה: יהי p\in\mathbb{P} אזי \frac{x^p-1}{x-1} אי־פריק מעל
                                                                                                                                                                            \Phi_{p}\left(x
ight)=rac{x^{p}-1}{x-1} אזי p\in\mathbb{P} טענה: יהי
                                                    \Phi_{\prod_{i=1}^k p_i^{e_i}}(x)=\Phi_{\prod_{i=1}^k p_i}\left(x^{\prod_{i=1}^k p_i^{e_i-1}}
ight) אזי e_1\dots e_k\in\mathbb{N}_+ שונים ויהיו p_1\dots p_k\in\mathbb{P}
                                                                                                     \Phi_n\left(x
ight) = \Phi_n\left(x^p
ight)טענה: יהיn \in \mathbb{N}_+ ויהי n \in \mathbb{N}_+ באשר n 
otin p 
otin p אזי
                                                                                                                                                              .\Phi_{n}\left(0
ight)=\left\{ egin{array}{ll} -1 & n=1 \ 1 & n>1 \end{array} 
ight. אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי הי
                                                                                                                                               \Phi_{2m}\left(x
ight)=\Phi_{m}\left(-x
ight) אזי m\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}\setminus\{1\} טענה: יהי
                                                                                                                                                             \mathbb{Q}\left(\zeta_{n}
ight):\mathbb{Q}=arphi\left(n
ight) אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי משפט: יהי
                                                                                               \|\mathbb{K}\cap\{\zeta_n\mid n\in\mathbb{N}\}\|<leph_0 אזי איזי באשר סופית הרחבה סופית הרחבה \mathbb{K}/\mathbb{Q}
                                                                                                                                    \mathbb{Q}\left(\zeta_{n}
ight) אי־פריק מעל n,m\in\mathbb{N}_{+} אי־פריק מעל טענה: יהיו
                                                                                                                                          \mathbb{Q}\left(\zeta_{n}\right)\cap\mathbb{Q}\left(\zeta_{m}\right)=\mathbb{Q} זרים אזי n,m\in\mathbb{N}_{+} יהיו יהיו
                                                                                                                                      \mathbb{Q}\left(\zeta_n,\zeta_m
ight)=\mathbb{Q}\left(\zeta_{rac{nm}{\gcd(n,m)}}
ight) אזי n,m\in\mathbb{N}_+ יהיו יהיו
                                                                                          \operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{n},\zeta_{m}
ight)/\mathbb{Q}\left(\zeta_{n}
ight)
ight)\simeq\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{m}
ight)/\mathbb{Q}
ight) זרים אזי n,m\in\mathbb{N}_{+} זרים אזי n,m\in\mathbb{N}_{+}
                                                             \operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{n},\zeta_{m}\right)/\mathbb{Q}
ight)\simeq\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{n}\right)/\mathbb{Q}
ight)	imes\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{m}\right)/\mathbb{Q}
ight) זרים אזי n,m\in\mathbb{N}_{+} זרים אזי
                                                                                              p \equiv 1 \mod d אזי p \nmid d וכן p \mid \Phi_d(m) באשר p \in \mathbb{P} ויהי m, d \in \mathbb{N} טענה: יהיו
                                         \mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{Q}
ight)\simeq G סטענה: תהא D חבורה אבלית סופית אזי קיים שדה \mathbb{L}\subseteq\mathbb{C} עבורו ענהה \mathbb{L}
                                                    \mathbb{K}[\mathbb{K}] = \mathbb{K} שדה) \mathbb{K}[\mathbb{K}] \wedge (\mathbb{K}[\mathbb{K}] \wedge \mathbb{K}] \wedge (\mathbb{K}[\mathbb{K}] \wedge \mathbb{K}[\mathbb{K}] \wedge (\mathbb{K}[\mathbb{K}] \wedge \mathbb{K}] = \mathbb{K}[\mathbb{K}] איז \mathbb{K}[\mathbb{K}] = \mathbb{K}[\mathbb{K}] \wedge (\mathbb{K}[\mathbb{K}] \wedge \mathbb{K}[\mathbb{K}] = \mathbb{K}[\mathbb{K}] + \mathbb{K}[\mathbb{K}]
                                                                                                                                  \Omega^{(1)}=\left\{\mathrm{line}_{a,b}\mid a,b\in\Omega^{(0)}
ight\} אזי \Omega^{(0)}\subseteq\mathbb{C} הגדרה: תהא
                                                                                                              \Omega^{(2)}=\left\{\partial B_{\mathrm{dist}(a,b)}\left(c
ight)\;\middle|\;a,b,c\in\Omega^{(0)}
ight\} אזי \Omega^{(0)}\subseteq\mathbb{C} הגדרה: תהא
                                                                  \Omega_{k+1}^{(0)}=\bigcup\left\{S_1\cap S_2\;\Big|\;S_1,S_2\in\left(\Omega_k^{(1)}\cup\Omega_k^{(2)}
ight)
ight\} וכך \Omega_0^{(0)}=\{0,1\} אזי k\in\mathbb{N} הגדרה: יהי k\in\mathbb{N}
                                                                                                               \mathbb{K}_{
m sc} = igcup_{k=0}^\infty \Omega_k^{(0)} :שדה המספרים הניתנים לבנייה בעזרת סרגל ומחוגה
                                                                                          a^2\in\mathbb{K} וכן \mathbb{L}=\mathbb{K}\left(a
ight) עבורו a\in\mathbb{L} איי קיים איי קיים \mathbb{L}/\mathbb{K} ארחבה ריבועית איי
סדרת הרחבה ויהי \mathbb{L}_{i+1}/\mathbb{L}_i איי שדות \mathbb{L}_1/\mathbb{K} עבורם \mathbb{L}_1/\mathbb{K} עבורם איי שדה ויהי n\in\mathbb{N} איי שדה ויהי הרחבה ריבועית. יהי
                     \mathbb{L}_n אאי איז שדה נוצר מסדרת הרחבות ריבועיות: יהי \mathbb{K} שדה יהי n\in\mathbb{N} ותהא ווהא n\in\mathbb{N} סדרת הרחבות ריבועיות של
```

 $\mu\left(\prod_{i=1}^k p_i^{e_i}
ight)=\left\{egin{array}{ll} (-1)^k & e=1 \ 0 & ext{else} \end{array}
ight.$ כך $\mu:\mathbb{N} o\{0,\pm1\}$ אזי נגדיר $e\in\mathbb{N}_+^k$ אוי נגדיר $p_1\dots p_k\in\mathbb{P}$ יהיי $k\in\mathbb{N}$ יהיי והי

 $f\left(n
ight)=\sum_{d\in\mathbb{N}top d\mid n}\left(\mu\left(d
ight)\cdot\left(\sum_{\substack{a\in\mathbb{N}\alpha\midrac{n}{r}}}f\left(a
ight)
ight)
ight)$ אזי $f:\mathbb{N}_{+} o\mathbb{C}$ ויהי $f:\mathbb{N}_{+} o\mathbb{C}$ טענה נוסחת ההיפוך של מוביוס: תהא

 $\mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(x^n-1)$ אזי שורש יחידה g מסדר n באשר שורש ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי שורה ויהי \mathbb{K} יוצר של

 $\pi_q^{(a)}(n)=\hat{rac{1}{n}}\sum_{\substack{d\in\mathbb{N}\\d|n}}\left(\mu\left(rac{n}{d}
ight)\cdot q^d
ight)$ אזי $n\in\mathbb{N}_+$ שדה ויהי $p\in\mathbb{N}_+$ אזי $q\in\mathbb{N}$

 $\zeta_n=g$ איז n שדה יהי $\mathbb K$ שדה יהי $n\in\mathbb N_+$ ויהי p שורש יחידה פרימיטיבי מסדר $n\in\mathbb N_+$ מעל $\mathbb K$. הרחבת מעגל: יהי $\mathbb K$ שדה ויהי $n\in\mathbb N_+$ איז שדה הפיצול של $n\in\mathbb N_+$ מעל $\mathbb K$ שדה יהי $\mathbb K$ ותהא $\mathbb K$

 $\pi_q\left(n
ight)\sim rac{q^n}{n}$ שדה אזי \mathbb{F}_q באשר $q\in\mathbb{N}$ יהי יהי

 $\mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}\left(x^{n}-1
ight)$ אזי $n\in\mathbb{N}_{+}$ שדה ויהי \mathbb{K} שדה היחידה: יהי

 $\sum_{\substack{d\in\mathbb{N}\d|n}}\mu\left(d
ight)=\{egin{smallmatrix}1&n=1\0&n>1\end{smallmatrix}$ אזי $n\in\mathbb{N}_+$ יהי יהי

```
|\operatorname{Gal}(x^n - a)| = n
\operatorname{Gal}(x^n-a) יהי a\in\mathbb{N}_+ ויהי a\in\mathbb{N}_+ ויהי a\in\mathbb{N}_+ ויהי a\in\mathbb{N}_+ יהי a\in\mathbb{N}_+ יהי a\in\mathbb{N}_+ יהי שדה באשר משפט: יהי a\in\mathbb{N}_+ יהי
                                                                                                                                                \operatorname{ord}\left(\operatorname{Gal}\left(x^{n}-a\right)\right)|n| ציקלית וכן
                                      \zeta_n\in\mathbb{K} וכן n\in\mathbb{K} וכן n\in\mathbb{K} וכר וכן n\in\mathbb{K} אדה באשר n\in\mathbb{K} וכר וכר n\in\mathbb{K}
                                                                                 |\operatorname{Gal}(x^n-a)|=n אזי a\in\mathbb{K}^{\times}\setminus\left\{b^d\mid (b\in\mathbb{K}^{\times})\wedge (d\in\mathbb{N}_{\geq 2})\wedge (d|n)\right\}
                G=\mathrm{Gal}\,(x^n-a) עבורם a\in\mathbb{K} חכן קיים שדה n\in\mathbb{N}_+ וכן קיים אזי קיים איז קיים איז חבורה ציקלית סופית איז קיים n\in\mathbb{N}_+
\mathcal{L}:\mathbb{L}	o\mathbb{L} אזי נגדיר Gal (\mathbb{L}/\mathbb{K}) יוצר של \sigma יוצר של הרחבה ציקלית מסדר ציקלית מסדר הרחבה \mathcal{L}/\mathbb{K} אזי נגדיר תהא
                                                                                                                                                       \mathcal{L}\left(lpha
ight) = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta_n^{-i} \cdot lpha^{\sigma^i} דכך
                                          אזי \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\right) אזי ויהי \sigma יוצר אוי באשר \gamma ויהי מסדר מסדר ציקלית הרחבה ציקלית הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי הרחבה אזי
                                                                                                                           \mathcal{L}(\alpha)^{\sigma} = \zeta_n \cdot \mathcal{L}(\alpha) מתקיים \alpha \in \mathbb{L} לכל
                                                                                                                                        \mathcal{L}(\alpha)^n \in \mathbb{K} מתקיים \alpha \in \mathbb{L} לכל
                                                                                                                                          \mathcal{L}(\alpha) \neq 0 המקיים \alpha \in \mathbb{L} פיים
משפט: יהי b\in\mathbb{K}^+ עבורו קיים b\in\mathbb{K}^+ אזי קיים מסדר b\in\mathbb{K}^+ המקיים מסדר b\in\mathbb{K}^+ המקיים מסדר משפט: יהי
                                                                                                                                                                                   \mathbb{L} = \mathbb{K}(\beta)
                                                                  המקיימים \mathbb{F}_0 \dots \mathbb{F}_k וקיימים שדות k \in \mathbb{N} עבורה קיים עבורה הרחבה הרחבה הרחבה הרחבה הרחבה הרחבה הרחבה
                                                                                                                                                           \mathbb{L} = \mathbb{F}_k וכן \mathbb{K} = \mathbb{F}_0
                               \mathbb{F}_i = \mathbb{F}_{i-1}\left(lpha
ight) המקיים lpha \in \mathrm{sols}_{\mathbb{F}_i}\left(x^n - a
ight) עבורם קיים a \in \mathbb{F}_i המקיים n \in \mathbb{N}_+ המקיים i \in [k]
           f\in\mathbb{K}[x] אזי איזי שדה ויהי \mathbb{L}/\mathbb{K} שדה ויהי ברדיקלים: יהי f\in\mathbb{K}[x] עבורו קיימת הרחבה רדיקלית
                   (ביס איז היחבה נורמלית באשר \mathbb{F}/\mathbb{K} איז קיים שדה \mathbb{F}/\mathbb{K} עבורו איז הרחבה נורמלית באשר באשר באיז הרחבה נורמלית באשר באיז היים איז הרחבה באיז הרחבה נורמלית באשר
                                                             . פתירה \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\right) אזי \operatorname{char}\left(\mathbb{K}\right)=0 פתירה נורמלית רדיקלית באשר \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי
                                          \operatorname{Gal}\left(f
ight)משפט: יהי \mathbb{K} שדה באשר \operatorname{char}\left(\mathbb{K}
ight) ויהי ויהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אזי ויהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] פתירה).
(n \leq 4)בת"י ברדיקלים) פתיר ברדיקלים) פתיר מסקנה: היי \sum_{i=0}^n a_i x^i אזי מסקנה: היי n \in \mathbb{N}_+ יהי היי רומי n \in \mathbb{N}_+ מסקנה: יהי
                               \operatorname{Gal}(f)\simeq S_p איי \operatorname{sols}_{\mathbb{R}}(f)|=p-2 וכן \operatorname{deg}(f)=p אי־פריק באשר f\in\mathbb{Q}\left[x
ight] איי f\in\mathbb{R}_{>2}
                                 \|\operatorname{sol}_{\mathbb{R}}(f)\| \in \{1,p\} איי \operatorname{deg}(f) = p אייבפריק פתיר ברדיקלים באשר f \in \mathbb{Q}[x] איי
                                                                                                \mathbb{L}\subseteq\mathbb{R} המקיימת \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה רדיקלית: הרחבה ממשית רדיקלית:
משוואה פתירה ברדיקלים ממשיים: יהי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{R} שדה ויהי f\in\mathbb{K}[x] עבורו קיימת הרחבה ממשית רדיקלית המקיימת \mathbb{L}/\mathbb{K}
                                                                                                                                                                    .f אזי \operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f) \subseteq \mathbb{L}
למה: יהי p\in\mathbb{P} וכן \mathbb{K} אזי \mathbb{K}אזי \mathbb{K} הרחבת גלואה וכן \mathbb{K} ויהיו p\in\mathbb{P} אזי \mathbb{K} שדות עבורם \mathbb{K}
                                                                                                                                                                               .[\mathbb{LK} : \mathbb{K}] = p
                                          \mathbb{K}\left(\zeta_{p}
ight) אי־פריק מעל sols_{\mathbb{K}}\left(x^{p}-a
ight)=arnothing עבורו עבור אי־פריק מעל מה: יהי p\in\mathbb{P} יהי אי־פריק מעל
   \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) \mathbb{R} הרחבה ממשית רדיקלית) אז הרחבה באשר \mathbb{L}/\mathbb{K} באשר \mathbb{L} \subseteq \mathbb{R} אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה מוציע הרחבה פופית נורמלית באשר
                                 \sigma(i)=j המקיים \sigma\in H קיים i,j\in [n] עבורה לכל עבורה אזי חבורה אזי חבורה אזי יהי הי n\in \mathbb{N}_+ המקיים
                                                     .(חבורה טרנזיטיבית) שדה ויהי \mathbb{G}ו שדה ויהי f \in \mathbb{K}[x] ספרבילי אזי שדה ויהי \mathbb{K} שדה ויהי \mathbb{K}
\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f)=\{lpha_i\mid i\in[n]\} באשר lpha\in\overline{\mathbb{K}}^n ויהי lpha\in\overline{\mathbb{K}}^n באשר lpha\in\mathbb{K}[x] יהי lpha\in\mathbb{K}[x] יהי שדה יהי שדה יהי lpha\in\mathbb{K}[x] יהי
                                                                                                                                            .\operatorname{disc}\left(f\right) = \prod_{\substack{i,j \in [n] \\ i < j}} \left(\alpha_i - \alpha_j\right)^2 אזי
```

 $\mathbb{K}_{
m sc} = \bigcup \{ \mathbb{L} \mid \mathbb{Q} \;$ שדה וכן $\mathbb{L} \in \mathbb{L}$ שדה נוצר מסדרת הרחבות ריבועיות של $\mathbb{K}_{
m sc}$

 $.arphi\left(n
ight)=2^{r}$ עבורו $r\in\mathbb{N}$ אזי קיים אזי $\mathrm{RegPol}_{n}\subseteq\mathbb{K}_{\mathsf{sc}}$ באשר באשר $n\in\mathbb{N}_{>3}$ יהי

 $. \sphericalangle_{\mathrm{line}_{a,b},\mathrm{line}_{b,c}} = rac{lpha}{3}$ עבורם $a,b,c \in \mathbb{K}_{\mathrm{sc}}$ אזי לא קיימים $lpha \in (-\pi,\pi]$

 \mathbb{Q} עבורו של \mathbb{Q} עבורו שלה \mathbb{Q} אזי (RegPol $_n\subseteq\mathbb{K}_{\mathrm{sc}}$) אזי אזי (אזי מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{>3}$ אזי אזי (אור $n\in\mathbb{N}_{>3}$

 $i \in [k]$ אזי $i \in [k]$ וכן $i \in [k]$ אזי (RegPol $_n \subseteq \mathbb{K}_{\mathrm{sc}}$) אזי ($i \in [k]$ אזי וכן $i \in [k]$ לכל אורם $i \in [k]$ אזי ($i \in [k]$

 $\operatorname{cord}\left(\operatorname{Gal}\left(x^{n}-a
ight)
ight)$ אזי $a\in\mathbb{K}$ אזי $a\in\mathbb{K}$ ציקלית וכן $\operatorname{char}\left(\mathbb{K}
ight)=0$ איזי $n\in\mathbb{N}_{+}$ יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ יהי $n\in\mathbb{K}$ ויהי $n\in\mathbb{K}$ ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$

 $\{\sqrt{a},-\sqrt{a}\}\subseteq\mathbb{K}_{ ext{sc}}$ אזי $a\in\mathbb{K}_{ ext{sc}}$ יהי

 $\operatorname{RegPol}_n = \{\zeta_n^0, \dots, \zeta_n^{n-1}\}$ אזי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ יהי מצולע משוכלל: יהי

. ציקלית: הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} באשר \mathbb{L}/\mathbb{K} ציקלית: הרחבה ציקלית:

```
\operatorname{disc}\left(f\right)\in\mathbb{K} אזי מתוקן מתוקן ויהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] שדה ויהי
                                                                                                                                         \Box_R = \left\{ a^2 \mid a \in R 
ight\} סימון: יהי R חוג אזי
                         (\mathrm{disc}\,(f)\in\Box_{\mathbb{K}})איי (\mathrm{Gal}\,(f)\leq A_n) טענה: יהיf\in\mathbb{K}\,[x] ויהי ויהי f\in\mathbb{K}\,[x] יהי אויהי
                                                                                          \deg\left(f
ight)=3 אזי מתוקן שדה יהיf\in\mathbb{K}\left[x
ight] מתוקן מפרבילי באשר
                                                                                                                                     \operatorname{Gal}(f) \simeq \{0\} אם \operatorname{sols}_{\mathbb{K}}(f) = 3 אם •
                                                                                                                                       \operatorname{Gal}(f) \simeq \mathbb{Z}_2 אם |\operatorname{sols}_{\mathbb{K}}(f)| = 1 אם •
                                                                                                               \operatorname{Gal}(f) \simeq A_3 אז \operatorname{disc}(f) \in \square_{\mathbb{K}} וכן •
                                                                                                               \operatorname{Gal}(f) \simeq S_3 אז \operatorname{disc}(f) \notin \square_{\mathbb{K}} אם f אי־פריק וכן \bullet
\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f)=\{lpha_i\mid i\in[4]\} באשר lpha\in\overline{\mathbb{K}}^4 ויהי lpha\in\overline{\mathbb{K}}^4 באשר שדה יהי f\in\mathbb{K}[x] מתוקן ספרבילי באשר
                                       \mathcal{H}(f)(x) = (x - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4))(x - (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4))(x - (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3))איי
                                                                \mathcal{H}(f)\in\mathbb{K}\left[x
ight] אזי \deg\left(f
ight)=4 טענה: יהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אזי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] טענה: יהי
                                                \operatorname{disc}\left(\mathcal{H}\left(f
ight)
ight)=\operatorname{disc}\left(f
ight) אזי \operatorname{deg}\left(f
ight)=4 מתוקן ספרבילי באשר f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אזי מענה: יהי
                                                                                           אזי \deg\left(f
ight)=4 אזי מתוקן ספרבילי מתוקן אזה יהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אזי אדה יהי
         \operatorname{Gal}(f)\simeq\mathbb{Z}_2 אז rac{\operatorname{disc}(g)}{\operatorname{disc}(h)}\in\Box_{\mathbb{K}} וכן f=gh וכן \operatorname{deg}(g)=\operatorname{deg}(h)=2 איז באשר g,h\in\mathbb{K}[x] איז g,h\in\mathbb{K}[x]
\operatorname{Gal}\left(f
ight)\simeq\mathbb{Z}_{2}	imes\mathbb{Z}_{2} אז rac{\operatorname{disc}\left(g
ight)}{\operatorname{disc}\left(h
ight)}
otin \operatorname{Gal}\left(g
ight)=\operatorname{deg}\left(h
ight)=\operatorname{deg}\left(h
ight)=2 אם קיימים g,h\in\mathbb{K}\left[x
ight] אז יפריקים באשר g,h\in\mathbb{K}\left[x
ight]
                                                                      \operatorname{Gal}(f) \simeq H עבורו H \in \{S_4, A_4, D_4, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\} אי־פריק אז קיים f אם \bullet
טענה: יהי f\left(x
ight)=x^{q^n}+\sum_{i=0}^{n-1}t_ix^{q^i} כך f\in\mathbb{F}_q\left(t_0\dots t_{n-1}
ight)[x] ונגדיר n\in\mathbb{N}_+ יהי \mathbb{F}_q שבורו קיים שדה p\in\mathbb{N}_+ יהי q\in\mathbb{N}
                                                                                                                                                                            \operatorname{Gal}(f) \simeq \operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_q)
                                                                                משפט קאפלאנסקי: יהיו \mathbb{Q}\left[x
ight] עבורם a,b\in\mathbb{Q} אי־פריק מעל x^4+ax^2+b משפט קאפלאנסקי:
                                                                                                                                          \operatorname{Gal}\left(f
ight)\simeq\mathbb{Z}_{2}	imes\mathbb{Z}_{2} אם b\in\Box_{\mathbb{O}} אם ullet
                                                                                                              \operatorname{Gal}(f)\simeq \mathbb{Z}_4 אז b\left(a^2-4b
ight)\in \square_{\mathbb{Q}} וכן b
otin\mathbb{Q} אם b
                                                                                                             \operatorname{Gal}(f) \simeq D_8 אז b\left(a^2-4b\right) \notin \square_{\mathbb{Q}} וכן b \notin \square_{\mathbb{Q}}
                                    \sum_{i=1}^n a_i 
eq -1 מתקיים a \in \square_\mathbb{K}^n ולכל n \in \mathbb{N}_+ ולכל המקיים וכן המקיים \mathbb{K} המקיים ולכל המקיים ולכל
                   \mathbb{L}=\mathbb{K} שדה ממשי סגור: שדה ממשי פורמלי \mathbb{L} עבורו לכל שדה ממשי פורמלי \mathbb{L} הרחבה סופית מתקיים
                                                                                     \sum_{i=1}^n a_i \in \square_{\mathbb K} אזי a \in \square_{\mathbb K}^n וויהי n \in \mathbb N_+ יהי סגור ממשי סגור יהי n \in \mathbb N_+
                                                                  \mathbb{K} ויהי אדה סדר חזק קווי מעל ויהי ויהי אדה באשר המקיים char (\mathbb{K})=0 שדה שדה אדה שדה סדור: יהי
                                                          x+z<_{\mathbb{K}}y+z מתקיים x<_{\mathbb{K}}y המקיימים x,y,z\in\mathbb{K} לכל
                     x\cdot z<_{\mathbb{K}}y\cdot z מתקיים 0<_{\mathbb{K}}z המקיים z\in\mathbb{K} ולכל ולכל x<_{\mathbb{K}}y המקיימים x,y\in\mathbb{K} מתקיים x
```

fספרבילי). מתוקן אזי $f \in \mathbb{K}[x]$ ספרבילי). טענה: יהי \mathbb{K} שדה ויהי

- $\mathbb{K}_+,\mathbb{K}_- \subseteq \mathbb{K}$ שדה סדור) \iff (קיימות $\mathbb{K}_+,\mathbb{K}_- \subseteq \mathbb{K}$ אזי (קיים יחס $\mathbb{K}_+,\mathbb{K}_+ \subseteq \mathbb{K}$) שדה סדור) שדה סדור) שדה באשר char $(\mathbb{K})=0$ אזי (קיים יחס $\mathbb{K}_+,\mathbb{K}_+ \subseteq \mathbb{K}$)
 - $\{a+b,ab\}\subseteq\mathbb{K}_+$ וכן לכל $\{a+b,ab\}\subseteq\mathbb{K}_+$ וכן לכל $\mathbb{K}_-=-\mathbb{K}_+$ וכן $\mathbb{K}=(\mathbb{K}_+\uplus\mathbb{K}_-)\cup\{0\}$ משפט: יהי \mathbb{K} שדה ממשי סגור אזי קיים ויחיד יחס סדר חזק \mathbb{K} עבורו \mathbb{K} עבורו \mathbb{K} שדה סדור.

 $\operatorname{sols}_{\mathbb{K}}\left(f
ight)
eqarnothing$ אזי $\operatorname{deg}\left(f
ight)\in\mathbb{N}_{\operatorname{odd}}$ באשר $f\in\mathbb{K}\left[x
ight]$ אזי סגור ויהי

 \mathbb{K} שדה סגור אלגברית). שדה ממשי פורמלי אזי (\mathbb{K} שדה ממשי סגור) שדה ממשי פורמלי אזי (\mathbb{K}

מסקנה: \mathbb{R} שדה ממשי סגור.

 $\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}\left(\gamma
ight)=a\cdot\gamma$ כך כך $\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}:\mathbb{L} o\mathbb{L}$ הרחבה סופית ויהי $a\in\mathbb{L}$ אזי נגדיר $\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}:\mathbb{L} o\mathbb{L}$ כך אזי $\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}$ הרחבה סופית ויהי $A\in\mathbb{L}$ אזי $A\in\mathbb{L}$ הרחבה סופית ויהי $A\in\mathbb{L}$ אזי $A\in\mathbb{L}$

 $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=\det\left(\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}
ight)$ כך $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}:\mathbb{L} o\mathbb{K}$ כורמה של הרחבה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי נגדיר \mathbb{L}

- $.N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(ab
 ight)=N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
 ight)\cdot N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(b
 ight)$ מתקיים $a,b\in\mathbb{L}$ לכל
 - $.N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
 ight)=a^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]}$ מתקיים $a\in\mathbb{K}$ לכל
 - $.ig(N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
 ight)=0ig)\Longleftrightarrow\left(a=0
 ight)$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ לכל

מסקנה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי $\mathbb{L}\times \mathbb{K}^{\times}$ וכן $\mathbb{L}\times \mathbb{K}$ וכן הרחבה חומורפיזם חבורות. בעזרת פולינום מינימלי: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה חישוב של נורמה בעזרת פולינום מינימלי: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה חישוב של נורמה בעזרת פולינום מינימלי

- $.M_{\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}}\left(x
 ight)=f_{a}\left(x
 ight)$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ לכל •
- $.P_{\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}}\left(x
 ight)=f_{a}\left(x
 ight)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}(a)]}$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ לכל $.N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
 ight)=(-1)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]}\cdot f_{a}\left(0
 ight)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}(a)]}$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ לכל $.N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}$

 $\mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f_a)$ אזי $a\in\mathbb{K}$ אינברים צמודים: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית ויהי

משפט חישוב של נורמה בעזרת איברים צמודים: תהא של נורמה בעזרת ספרבילית איי

- $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
 ight)=\left(\prod_{s\in \mathrm{sols}_{\mathbb{K}}(f_a)}s
 ight)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}(a)]}$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ לכל
 - $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
 ight)=\prod_{arphi\in\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\hookrightarrow\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}
 ight)}arphi\left(a
 ight)$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ לכל
- $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
 ight)=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})}\sigma\left(a
 ight)$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ מתקיים לואה אז לכל

 $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}=N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}\circ N_{\mathbb{L}/\mathbb{F}}$ אזי סופיות סופיות של נורמה: יהיו $\mathbb{K},\mathbb{F},\mathbb{L}$ שדות באשר $\mathbb{K},\mathbb{F},\mathbb{K}$ הרחבות סופיות אזי

 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=\mathrm{trace}\left(\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}
ight)$ כך $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}:\mathbb{L} o\mathbb{K}$ עקבה של הרחבה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי נגדיר

למה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} פונקציונל לינארי. למה: תהא בחבה החבה \mathbb{L}/\mathbb{K}

משפט חישוב של עקבה בעזרת פולינום מינימלי: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית יהי $a\in\mathbb{L}$ יהי משפט חישוב של עקבה בעזרת פולינום מינימלי: $\operatorname{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=-\left[\mathbb{L}:\mathbb{K}\left(a
ight)
ight]\cdot\zeta_{m-1}$ איז $f_{a}=\sum_{i=0}^{m}\zeta_{i}\cdot x^{i}$

משפט חישוב של עקבה בעזרת איברים צמודים: תהא שורחבה סופית ספרבילית אזי משפט חישוב של עקבה בעזרת איברים מודים:

- $.\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a\right)=\left[\mathbb{L}:\mathbb{K}\left(a\right)\right]\cdot\sum_{s\in\mathrm{sols}_{\overline{\nu}}\left(f_{a}\right)}s$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ לכל
 - $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
 ight)=\sum_{arphi\in\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\hookrightarrow\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}
 ight)}arphi\left(a
 ight)$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ לכל
- $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(a)=\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})}\sigma\left(a
 ight)$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ מתקיים $a\in\mathbb{L}$ הרחבת גלואה אז לכל

 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}=\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}\circ\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{F}}$ אזי סופיות סופיות אוי $\mathbb{L}/\mathbb{F},\mathbb{F}/\mathbb{K}$ שדות באשר $\mathbb{K},\mathbb{F},\mathbb{L}$ הרחבות סופיות אוי

. אינה ספרבילית. \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי $\mathbb{T}r_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}=0$ מסקנה: תהא הרחבה סופית באשר

 $\mathbb{Q}\left(\sqrt[d]{a}
ight):\mathbb{Q}=d$ אי־פריק אזי x^n-a באשר $a\in\mathbb{Q}_{>0}$ ויהי d|n ויהי באשר $n,d\in\mathbb{N}_+$ יהיו

 $[\mathbb{F}:\mathbb{Q}]=d$ וכן $\mathbb{P}\subseteq\mathbb{Q}$ פוכן $\mathbb{P}\subseteq\mathbb{Q}$ שדה באשר \mathbb{P} שדה באשר $a\in\mathbb{Q}_{>0}$ יהיd|n יהי $d\in\mathbb{N}_+$ וכן היי $\mathbb{F}=\mathbb{Q}\left(\sqrt[d]{a}
ight)$ אזי