

פונקציונל ליניארי: יהי V מ"ו מעל \mathbb{F} אזי $f \in \text{Hom}(V, \mathbb{F})$.

המרחב הדואלי: $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{F})$.

טענה: $V \cong V^* \iff V$ נ"ס.

שחלוף/העתקה הדואלית: תהא $T \in \text{Hom}(V, U)$ אזי $T^t : U^* \rightarrow V^*$ המוגדרת $T^t = \lambda\varphi \in U^* . \varphi \circ T$.

הטלה: $\Pi_i(x) = x_i$.

סימון: יהי C בסיס של V אזי $\Phi_i = \Pi_i \circ Q_C$.

הבסיס הדואלי: יהי C בסיס של V אזי $C^* = (\Phi_i)_{i=1}^{\dim(V)}$ בסיס של V^* .

טענה: יהי C בסיס של V אזי $f = \sum_{i=1}^{\dim(V)} f(C_i) \Phi_i$.

שורה של העתקה: תהא $T \in \text{Hom}(V, U)$ אזי $R_i(T) = \Phi_i \circ T$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}(T) = \text{span}\left((R_i(T))_{i=1}^{\dim(U)}\right)$.

טענה: $\ker(T) = \bigcap_{i=1}^n \ker(R_i(T))$.

מסקנה: $\ker(T) = \bigcap_{f \in \mathcal{R}(T)} \ker(f)$.

מרחב האפסים: תהא $S \subseteq V^*$ אזי $S_0 = \bigcap_{f \in S} \ker(f)$.

טענה: יהי V מ"ו ותהא $S, T \subseteq V$

• S_0 תמ"ו של V .

• $S \subseteq T \implies T_0 \subseteq S_0$.

• $(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha})_0 = \bigcap_{\alpha} (S_{\alpha})_0$.

• $S_0 = (\text{span}(S))_0$.

• $(\{0\})_0 = V$.

• $(V^*)_0 = \{0\}$.

המרחב המאפס: תהא $A \subseteq V$ אזי $A^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi|_A = 0\}$.

טענה: יהי V מ"ו ותהא $A, B \subseteq V$

• A^0 תמ"ו של V^* .

• $A \subseteq B \implies B^0 \subseteq A^0$.

• $(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha})^0 = \bigcap_{\alpha} (A_{\alpha})^0$.

• $A^0 = (\text{span}(A))^0$.

• $(\{0\})^0 = V^*$.

• $(V^*)^0 = \{0\}$.

טענה: יהי V מ"ו נ"ס

• $(U^0)_0 = U$ תמ"ו אזי $U \subseteq V$.

• $(W_0)^0 = W$ תמ"ו אזי $W \subseteq V^*$.

משפט: $\dim(M) + \dim(M^0) = \dim(V)$.

משפט: $\dim(W) + \dim(W_0) = \dim(V^*)$.

משפט: יהי B בסיס של V^* אזי קיים בסיס C של V המקיים $B = C^*$.

מסקנה: $\mathcal{R}(T) = (\ker(T))^0 \iff U$ נ"ס.

מסקנה: $\dim(\mathcal{R}(T)) = \dim(\text{Im}(T)) = \text{rank}(T)$.

המרחב הדואלי השני: $(V^*)^*$.

פונקציונל ההצבה/האיזומורפיזם הקנוני: $\lambda v \in V . \lambda \psi \in V^* . \psi(v)$.

משפט: פונקציונל ההצבה לינארי וחח"ע.

דמיון מטריצות: $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F}) . A \sim B \iff \exists P \in M_n(\mathbb{F}) . A = PBP^{-1}$.

מטריצה לכסינה: $A \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A \sim \text{Diag}(\lambda)$. $\exists \lambda \in \mathbb{F}^n . \exists P \in M_n(\mathbb{F}) . A \sim \text{Diag}(\lambda)$.

מטריצה מלכסנת: $P \in M_n(\mathbb{F})$ עבורה $P \cdot \text{Diag}(\lambda) \cdot P^{-1} = A$.

העתקה לכסינה: $T \in \text{Hom}(V)$ המקיימת כי קיים בסיס B עבורו $[T]_B$ אלכסונית.

בסיס מלכסן: בסיס B עבורו $[T]_B$ אלכסונית.

הערה: T לכסינה \iff לכל בסיס C מתקיים כי $[T]_C$ לכסינה.

וקטור עצמי (ו'ע): תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $0 \neq v \in V$ המקיים $T(v) = \lambda v$ $\exists \lambda \in \mathbb{F}$.

ערך עצמי (ע'ע): תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $\lambda \in \mathbb{F}$ המקיים $T(v) = \lambda v$ $\exists v \in V$.

משפט: T לכסינה \iff קיים בסיס B של וקטורים עצמיים.

המרחב העצמי (מ'ע): יהי λ ע'ע של T אזי $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$.

טענה: $V_\lambda = \ker(T - \lambda \text{Id}_V)$.

מסקנה: T הפיכה $\iff V_0 = \{0\} \iff 0$ אינו ע'ע של T .

טענה: $V_\lambda = \ker(\lambda \cdot \text{Id}_V - T)$.

מסקנה: λ ע'ע של A $\iff |\lambda I - A| = 0$.

הפולינום האופייני (פ'א): תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $f_A(x) = |xI - A|$.

מסקנה: λ ע'ע של A $\iff f_A(\lambda) = 0$.

הגדרה: יהי B בסיס של V אזי $f_T(x) = f_{[T]_B}(x)$.

טענה: $A \sim B \implies f_A(x) = f_B(x)$.

פולינום מתוקן: $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ המקיים $a_n = 1$.

טענה: יהי R תחום שלמות תהא $A \in M_n(R)$ ונניח כי $f_A(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

• $f_A(x) \in R[x]$ פולינום מתוקן.

• $\deg(f_A(x)) = n$.

• $a_{n-1} = -\text{trace}(A)$, $a_0 = (-1)^n |A|$.

טענה: תהא $\sigma \in S_n$ אזי $\deg\left(\prod_{i=1}^n (xI - A)_{i,\sigma(i)}\right) = \sum_{i=1}^n \deg\left((xI - A)_{i,\sigma(i)}\right)$.

טענה: $\deg(f_A(x)) \leq \max_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{i=1}^n \deg\left((xI - A)_{i,\sigma(i)}\right)\right)$.

מסקנה: לכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ יש לכל היותר n ע'ע.

הריבוי הגאומטרי: יהי λ ע'ע אזי $\rho_\lambda = \dim(V_\lambda)$.

טענה: יהיו $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ע'ע אזי $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

משפט: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ע'ע אזי $\bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$.

מסקנה: יהיו $B_i \subseteq V_{\lambda_i}$ בת"ל לכל $i \in [k]$ אזי $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k$ בת"ל.

מסקנה: A לכסינה $\iff \sum_{i=1}^k \rho_{\lambda_i} = n$.

מסקנה: A לכסינה $\iff \exists \lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_n. f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

טענה: A לכסינה $\iff f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ $\exists \lambda \in \mathbb{F}^n$.

הריבוי האלגברי: יהי λ ע'ע אזי $\mu_\lambda = \max_{n \in \mathbb{N}} ((x - \lambda)^n |f_A(x)|)$.

משפט: לכל λ ע'ע מתקיים $\rho_\lambda \leq \mu_\lambda$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי A לכסינה $\iff (f_A(x) \wedge (\text{לכל } \lambda \text{ ע'ע מתקיים } \rho_\lambda = \mu_\lambda))$.

מסקנה: יהי \mathbb{F} שדה סגור אלגברית ותהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי A לכסינה $\iff (\text{לכל } \lambda \text{ ע'ע מתקיים } \rho_\lambda = \mu_\lambda)$.

העתקה ניתנת למשלוש: $T \in \text{Hom}(V)$ המקיימת כי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B$ משולשית.

משפט: T ניתנת למשלוש $\iff \exists \lambda \in \mathbb{F}^n. f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

T אינווריאנטי/תת מרחב שמור: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי תמ'ו $U \subseteq V$ המקיים $T[U] \subseteq U$.

טענה: $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$ הם T אינו'.

טענה: יהיו v_1, \dots, v_k ו'ע אזי $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$ אינו' T .

טענה: תהא $A \subseteq V$ אזי התמ'ו T אינו' הקטן ביותר שמכיל את A הוא $\bigcup_{i=0}^\infty T^i[A]$.

מרחב פריק: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי V מ'ו עבורו קיימים $U, W \subseteq V$ $\{0\} \neq U, W$ אינו' המקיימים $V = U \oplus W$.

הצבה בפולינום: יהי $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ותהא $A \in M_m(\mathbb{F})$ אזי $p(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$.

טענה: $\forall p \in \mathbb{F}[x]. [p(T)]_B = p([T]_B)$.

טענה: $(\lambda \text{ ע'ע של } A) \iff (\lambda \text{ ע'ע של } A^t)$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{F}_n[x]$ ותהא A המקיימת $Av = \lambda v$ אזי $p(A)v = p(\lambda)v$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\ker(p(T))$, $\text{Im}(p(T))$ הם T -אינו'.

טענה: יהי $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ מ'ו יהי $T \in \text{Hom}(V)$ נניח כי לכל $i \in [n]$ מתקיים כי V_i אינו' T וגם B_i בסיס של V_i אזי

$$[T]_B = \text{Diag} \left(\left([T|_{V_i}]_{B_i} \right)_{i=1}^n \right)$$

מסקנה: נניח כי $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ ונניח כי לכל $i \in [n]$ מתקיים כי $T V_i$ אינו'אזי $f_T(x) = \prod_{i=1}^n f_{T|_{V_i}}(x)$.

טענה: יהיו $\lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_n$ ע"ע של T אזי $(T - \lambda_i \text{Id}) = 0 \iff (\prod_{i=1}^n (T - \lambda_i \text{Id}) = 0)$.

טענה: $\forall p \in \mathbb{F}[x]. A \sim B \implies p(A) \sim p(B)$.

טענה: יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ ותהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $f(T)g(T) = g(T)f(T)$.

מסקנה: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ותהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $f(T) \circ T = T \circ f(T)$.

מסקנה: $\ker(S), \text{Im}(S) \iff T \circ S = S \circ T$ הן T אינו'.

משפט קיילי המילטון: $f_A(A) = 0$.

תת חוג: יהי $\langle R', +, * \rangle$ חוג עם יחידה אזי $R' \subseteq R$ המקיים $\langle R', +|_{R'^2}, *|_{R'^2} \rangle$ חוג עם יחידה.

משפט: כל תחום שלמות הוא תת חוג של שדה.

מחלק: יהי $b \in R$ אזי $a \in R$ המקיים $a \cdot c = b$ $\exists c \in R$.

סימון: אם a מחלק את b אזי $a|b$.

מסקנה: יהי R תחום שלמות ונניח כי $b = u \cdot a$ וגם $a = v \cdot b$ אזי $v \cdot u = u \cdot v = 1$.

מסקנה: $(b|a) \wedge (a|b) \iff \exists u \in R^\times. a = u \cdot b$.

חברים: $a, b \in R$ המקיימים $a \cdot u = b$ $\exists u \in R^\times$.

סימון: אם a, b חברים אזי $a \sim b$.

אידאל: $I \subseteq R$ המקיים $(\forall x \in R. \forall y \in I. x \cdot y \in I) \wedge (\forall a, b \in I. a + b \in I) \wedge (0 \in I)$.

האידאל הנפרש על ידי איבר: יהי $a \in R$ אזי $Ra = (a) = \{b \cdot a \mid b \in R\}$.

משפט: יהי $I \subseteq \mathbb{Z}$ אידאל אזי $I = (a)$ $\exists a \in \mathbb{Z}$.

האידאל הנפרש על ידי קבוצה: תהא $X \subseteq R$ אזי $(X) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid (m \in \mathbb{N}_+) \wedge (\alpha \in R^m) \wedge (v \in X^m)\}$.

טענה: תהא $\varphi: R \rightarrow S$ הומומורפיזם בין חוגים אזי $\ker(\varphi)$ אידאל.

טענה: $\forall a \in R. (a) = R \iff a \in R^\times, b|a \iff (a) \subseteq (b)$.

אידאל ראשי: אידאל $I \subseteq R$ המקיים $(a) = I$ $\exists a \in R$.

תחום ראשי/PID: תחום שלמות R המקיים כי כל $I \subseteq R$ אידאל הוא ראשי.

אידאל ראשוני: אידאל $I \subseteq R$ המקיים $(a \in I) \vee (b \in I) \implies ab \in I$ $\forall a, b \in R$.

טענה: (a) ראשוני $\iff a$ ראשוני.

טענה: יהיו $I_1, I_2 \subseteq R$ אידאלים אזי $I_1 \cap I_2$ אידאל.

אידאל פריק: אידאל $I \subseteq R$ עבורו קיימים $I \neq I_1, I_2 \subseteq R$ המקיימים $I = I_1 \cap I_2$.

טענה: (a) אי פריק $\iff a$ אי פריק.

אידאל מירבי: אידאל $I \subseteq R$ המקיים כי לכל $I \subset J$ אידאל מתקיים $J = R$.

טענה: יהי I אידאל אזי $(I \text{ מירבי}) \iff (I \text{ אי פריק})$.

gcd: יהיו $r_1, \dots, r_n \in R$ אזי $d \in R$ המקיים $(d) = (r_1, \dots, r_n)$.

טענה: נניח כי d הוא $\gcd(r_1, \dots, r_n)$ מתקיים $a|d \wedge (d|r_1 \dots r_n) \implies a|r_1 \dots r_n$.

lcm: יהיו $r_1, \dots, r_n \in R$ אזי $d \in R$ המקיים $(d) = (r_1) \cap \dots \cap (r_n)$.

טענה: נניח כי d הוא $\text{lcm}(r_1, \dots, r_n)$ מתקיים $d|a \wedge (r_1 \dots r_n|d) \implies r_1 \dots r_n|a$.

זרים: $r_1, \dots, r_n \in R$ המקיימים כי 1 הוא $\gcd(r_1, \dots, r_n)$.

משפט: $(\exists a \in R^n. \sum_{i=1}^n a_i r_i = 1) \iff (r_1, \dots, r_n \text{ זרים})$.

ראשוני: יהי R תחום שלמות אזי $a \in R$ המקיים $(a|pq) \implies (a|p) \vee (a|q)$ $\forall p, q \in R$.

אי פריק (א"פ): $a \in R \setminus R^\times$ המקיים $(a = pq) \implies (p \in R^\times) \vee (q \in R^\times)$ $\forall p, q \in R$.

טענה: יהי R חוג ויהי $a \in R, a \neq 0$ אזי $(a \text{ ראשוני}) \iff (a \text{ א"פ})$.

טענה: הפיך \cdot ראשוני = ראשוני, הפיך \cdot א"פ = א"פ.

טענה: יהי R תחום ראשי ויהי $a \in R, a \neq 0$ אזי $(a \text{ ראשוני}) \iff (a \text{ א"פ})$.

פריקות חד ערכית: נניח כי $\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i=1}^m q_i$ עבור p_i, q_j ראשוניים אזי $(\forall i \in [n]. p_i \sim q_i) \wedge (n = m)$.

משפט: יהי R תחום המקיים כי כל ראשוני הוא אי פריק אזי R מקיים פריקות חד ערכית.

מסקנה: תחום ראשי מקיים פריקות חד ערכית.

תחום אוקלידי: תחום שלמות R ופונקציה $N : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ המקיימת

$$\forall y \in R. \forall x \in R \setminus \{0\}. \exists! q, r \in R. (y = xq + r) \wedge (N(r) < N(x))$$

טענה: כל תחום אוקלידי הוא ראשי.

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ חוג השלמים של גאוס:}$$

טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי $\mathbb{F}[x]$ תחום אוקלידי ראשי, $\mathbb{Z}[i]$ תחום אוקלידי.

$$\Delta(f) = (-1)^{\binom{n}{2}} a_n^{2(n-1)} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) \text{ דיסקרימיננטה: } f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}_n[x] \text{ ויהיו } \{\alpha_i\}_{i=1}^n \text{ השורשים של } f \text{ אזי}$$

$$\forall f, g \in \mathbb{F}[x]. f \sim_{(q)} g \iff f - g \in (q) \text{ הגדרה: } q \in \mathbb{F}[x] \text{ אזי}$$

$$\mathbb{F}[x]/\sim_{(q)} \text{ שדה. טענה:}$$

$$q \left([x]_{\sim_{(q)}} \right) = 0 \text{ משפט:}$$

משפט: כל שדה מוכל בשדה סגור אלגברית.

$$\mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}_1 \text{ ותהא } A \in M_n(\mathbb{F}_0) \text{ אזי } A \in M_n(\mathbb{F}_1) \iff A \text{ הפיכה מעל } \mathbb{F}_0. \text{ טענה:}$$

$$A, B \in M_n(\mathbb{F}_0) \text{ אזי } A \sim B \text{ מעל } \mathbb{F}_1 \iff A \sim B \text{ מעל } \mathbb{F}_0. \text{ טענה:}$$

$$I_A = \{p \in \mathbb{F}[x] \mid p(A) = 0\} \text{ תהא } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ האידאל המאפס:}$$

$$f_A \in I_A \text{ מסקנה:}$$

$$(m_A) = I_A \wedge (\text{פולינום מתוקן}) \text{ הפולינום המינימלי: } m_A \in I_A$$

$$m_A = \iota \sum_{i=0}^n a_i x^i \in I_A. (a_n = 1) \wedge (n = \min(\deg(p) \mid p \in I_A \setminus \{0\})) \text{ טענה:}$$

$$T \in \text{Hom}(V) \text{ ותהא } A, B \in M_n(\mathbb{F}) \text{ תהייה}$$

$$f(A) = 0 \iff m_A \mid f \bullet$$

$$I_T = I_{[T]_B} \bullet$$

$$A \sim B \implies m_A = m_B \bullet$$

$$(m_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)) \iff A \text{ לכסינה) } \lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_k \text{ ויהיו } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ תהא} \text{ משפט:}$$

$$m_A(\lambda) = 0 \iff \lambda \text{ ע"ע של } A \text{ משפט:}$$

$$\min(d \in \mathbb{N} \mid A^d = 0) = \deg(m_A) \text{ טענה:}$$

$$f \in \mathbb{F}[x] \text{ תהא } f \text{ המקיימת } \deg(f) > 0 \text{ אזי } (f|m_A) \iff f(A) \text{ לא הפיכה. למת המחלק הפולינום המינימלי:}$$

$$V \text{ מ"ו מעל } \mathbb{F}_1 \text{ אזי } (V \text{ בת"ל מעל } \mathbb{F}_1) \iff (V \text{ בת"ל מעל } \mathbb{F}_0). \text{ טענה:}$$

משפט: m_A לא משתנה בהרחבת שדות.

$$f_A | m_A^n \text{ משפט:}$$

$$p \mid f_A \iff p \mid m_A \text{ מתקיים } p \in \mathbb{F}[x] \text{ לכל} \text{ מסקנה:}$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i \text{ ונניח כי לכל } i \in [n] \text{ מתקיים כי } V_i \text{ אינו} \text{ טענה:}$$

$$p \in \mathbb{F}[x]. p(T)|_U = p(T|_U) \text{ אזי } U \text{ תמ"ו } T \text{ אינו} \text{ טענה:}$$

$$S_1, S_2 \in \text{Hom}(V) \text{ המקיימות } S_1 + S_2 = Id, S_1 \circ S_2 = 0 = S_2 \circ S_1 \text{ אזי} \text{ טענה:}$$

$$\text{Im}(S_1) = \ker(S_2), \ker(S_1) = \text{Im}(S_2) \bullet$$

$$V = \ker(S_1) \oplus \ker(S_2) \bullet$$

$$S_1 \dots S_n \in \text{Hom}(V) \text{ יהיו } S_1 \dots S_n \text{ המקיימות } \sum_{i=1}^n S_i = 1, S_i \circ \left(\sum_{j \neq i} S_j \right) = 0 \text{ אזי} \text{ הכללה:}$$

$$\text{Im}(S_i) = \bigcap_{j \neq i} \ker(S_j) \bullet$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \ker(S_i) \bullet$$

$$f, g \in \mathbb{F}[x] \text{ ויהיו } T \in \text{Hom}(V) \text{ תהא } \mathbb{F} \text{ מעל } V \text{ מ"ו מעל } \mathbb{F} \text{ טענה:}$$

$$V = \ker(g(T)) \oplus \ker(f(T))$$

$$p_1 \dots p_n \in \mathbb{F}[x] \text{ ויהיו } T \in \text{Hom}(V) \text{ תהא } \mathbb{F} \text{ מעל } V \text{ מ"ו מעל } \mathbb{F} \text{ טענה:}$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \ker(p_i(T))$$

$$m_T(x) = \prod_{i=1}^n q_i(x)^{r_i} \text{ באשר } q_i(x) \text{ אי פריקים} \text{ משפט הפירוק הפרימרי דרך הפולינום המינימלי:}$$

מתוקנים אזי

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \ker(q_i(T)^{r_i}) \bullet$$

$$m_{T|_{\ker(q_i(T)^{r_i})}}(x) = q_i(x)^{r_i} \bullet$$

הגדרה: נניח כי $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)^{r_i}$ אזי $f_A^{red}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$

טענה: $f_A^{red}(A) = 0 \iff A$ לכסינה

נגזרת: נניח כי $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ אזי $f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$

טענה: $f_A^{red} = \frac{f_A}{\gcd(f_A, f_A')}$

הגדרה: $(a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, $(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) = (a + c, b + d)$

מירכוב: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} אזי $V_{\mathbb{C}} = \langle V^2, \cdot_{\mathbb{C}}, +_{\mathbb{C}} \rangle$

מסקנה: $(a, b) \cong a + ib$

הגדרה: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} ותהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי נגדיר את $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ כך $T_{\mathbb{C}}(u + iv) = T(u) + iT(v)$

אינדקס הנילפוטנטיות: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $n(T) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid T^k = 0\}$

טענה: נניח כי $m_T(x) = \prod_{i=1}^{\kappa} (x - \lambda_i)^{k_i}$ אזי $n(T) = \max \{k_i\}$

שרשרת: יהי $v \in V$ אזי $\langle v, Tv, \dots, T^n v \rangle$ עבורו $T^{n+1}v = 0$

מרחב T -ציקלי: מרחב וקטורי V המקיים כי קיימת שרשרת שהיא בסיס.

מסקנה: נניח כי $T \in \text{Hom}(V)$ נילפוטנטית אזי $(n(T) = \dim(V)) \iff (V \text{ הוא } T\text{-ציקלי})$.

מסקנה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ נילפוטנטית אזי $(V \text{ מ"ו } T \text{ ציקלי}) \iff (V \text{ אי פריק})$.

ציקלי מקסימלי: תמ"ו $U \subseteq V$ T -אינו המקיים $\dim(U) = n(T)$

יחס מנה: יהי $U \subseteq V$ תמ"ו נגדיר יחס שקילות $v_1 \sim_U v_2 \iff v_1 - v_2 \in U$

מרחב מנה: $V/U = V/\sim_U$

העתקת המנה: $T_U(v) = [v]_{\sim_U}$

מסקנה: $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$

טענה: יהי $U \subseteq V$ תמ"ו והיו $(v_1 \dots v_n) = B \in V^n$ וגם $([v_1]_{\sim_U} \dots [v_n]_{\sim_U}) = \overline{B} \in V/U$

• \overline{B} בת"ל $\iff (\forall i \in [n]. a_i = 0) \implies \sum \alpha_i v_i \in U \implies \forall v \in \prod_{i=1}^n [v_i]_{\sim_U} \cdot \sum \alpha_i v_i \in U$

• \overline{B} בת"ל $\iff (B \text{ בת"ל}) \wedge (U \oplus \text{span}(B))$

• \overline{B} פורשת $\iff U + \text{span}(B) = V$

• $[v]_{B \sim C} = [P_U(v)]_C \cap [v]_{\sim_U}]_{\overline{B}}$

קו-מימד: יהי $U \subseteq V$ תמ"ו אזי $\dim(V/U)$

הגדרה: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו אזי $W/U = T_U[W] = \{[w]_U \mid w \in W\}$

הגדרה: יהיו $U \subseteq V$ תמ"ו ותהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי נגדיר $\overline{T} : V/U \rightarrow V/U$ כך $\overline{T}([v]_{\sim_U}) = [T(v)]_{\sim_U}$

טענה: יהי $W \subseteq V$ תמ"ו T -אינו אזי $[T]_{B \sim C} = \left(\begin{array}{c|c} [T]_{W|B} & * \\ \hline 0 & [\overline{T}]_{\overline{C}} \end{array} \right)$

בלוק ז'ורדן: $(J_k(\lambda))_{i,j} = \lambda \delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}$ או תצוגתית

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}$$

מערך ז'ורדן: $I(\lambda) = \text{Diag}(J_{k_1}(\lambda), \dots, J_{k_r}(\lambda))$

מטריצת/צורת ז'ורדן: $J = \text{Diag}(I(\lambda_1), \dots, I(\lambda_k))$

טענה: $\left(J_r(0)^k \right)_{i,j} = \delta_{i+k,j}$

הבינום של ניוטון: יהיו A, B מתחלפות אזי $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

טענה: $J_n(\lambda)^k = (J_n(0) + \lambda I_n)^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \lambda^{k-m} J_n(0)^m$

מסקנה: יהי $\lambda \neq 0$ אזי $J_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda^i} J_n(0)^{i-1}$

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ ויהי B בסיס של V

• $v \in \ker(T^n) \setminus \ker(T^{n-1})$ המקיים $B = (T^{n-1}v, \dots, v) \iff [T]_B = J_n(0)$

• $v \in \ker((T - \lambda I)^n) \setminus \ker((T - \lambda I)^{n-1})$ המקיים $B = ((T - \lambda I)^{n-1}v, \dots, v) \iff [T]_B = J_n(\lambda)$

מסקנה: $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן $B \iff$ שרשרת בסיסים מהצורה $\left((T - \lambda I)^{n-1} v, \dots, v\right)$.

וקטור עצמי מובלל: תהא $S \in \text{Hom}(V)$ אזי $v \in V$ שמקיים $(S - \lambda I)^k(v) = 0$ $\exists \lambda \in \mathbb{F}, \exists k > 0$.

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ ונניח כי $m_T(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{r_i}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B = \text{Diag}(I(\lambda_1), \dots, I(\lambda_k))$.

טענה: נניח כי $[T]_B = \text{Diag}(I(\lambda_1), \dots, I(\lambda_k))$ בעבור $I(\lambda_i) = \text{Diag}(J_{k_1^i}(\lambda_i), \dots, J_{k_{n_i}^i}(\lambda_i))$

- כל הע"ע של T הם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
- $\mu_i = \sum_{j=1}^{n_i} k_j^i$.
- $\rho_i = n_i$.
- הריבוי האלגברי בפולינום המינימלי של ע"ע λ_i הוא $\max(k_1^i, \dots, k_{n_i}^i)$.
- $|\{j \mid k_j^i \geq r\}| = \dim(\ker((T - \lambda_i I)^r)) - \dim(\ker((T - \lambda_i I)^{r-1}))$.

מסקנה: צורת ז'ורדן היא יחידה עד כדי שינוי סדר.

אלגוריתם ז'ורדן: יהי \mathbb{F} שדה סגור אלגברית ויהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ עם פ"א $f_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{d_i}$ בעבור $\lambda_i \neq \lambda_j$

- צורת ז'ורדן:

```

J = 0
for (1 ≤ i ≤ k)
    for (1 ≤ m ≤ d_i)
        s_{i,m} = dim(sols((A - λ_i I)^m))
    for (1 ≤ m ≤ d_i)
        r_{i,m} = 2s_{i,m} - s_{i,m+1} - s_{i,m-1}
        for (1 ≤ t ≤ r_{i,m})
            J = Diag(J, J_m(λ_i))
return B

```

- בסיס ז'ורדן:

```

P = ⟨,⟩
for (1 ≤ i ≤ k)
    for (1 ≤ m ≤ d_i)
        for (1 ≤ t ≤ r_{i,m})
            v_{i,m,t}^1 ∈ sols((A - λ_i I)^m)
            v_{i,m,t}^1 ∉ sols((A - λ_i I)^{m-1})
            v_{i,m,t}^1 ∉ span ⎛⎜⎝
                1 ≤ m' ≤ m
                v_{i,m',t'}^{ℓ'}; 1 ≤ t' ≤ r_{i,m'}
                2 ≤ ℓ' ≤ m'
            ⎞⎟⎠
        for (2 ≤ ℓ ≤ m)
            v_{i,m,t}^ℓ = (A - λ_i I) v_{i,m,t}^{ℓ-1}
        for (m ≤ l ≤ 1)
            P = P ∪ v_{i,m,t}^l

```

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \begin{pmatrix} \lim_{m \rightarrow \infty} (A_m)_{1,1} & \dots & \lim_{m \rightarrow \infty} (A_m)_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lim_{m \rightarrow \infty} (A_m)_{n,1} & \dots & \lim_{m \rightarrow \infty} (A_m)_{n,n} \end{pmatrix}$$

התכנסות של סדרת מטריצות: תהא $A : \mathbb{N} \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ אזי

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad \text{טענה:}$$

$$e^{I(\lambda)} = e^{\text{Diag}(J_{n_1}(\lambda), \dots, J_{n_k}(\lambda))} = \text{Diag}(e^{J_{n_1}(\lambda)}, \dots, e^{J_{n_k}(\lambda)}) \quad \text{מסקנה:}$$

$$e^J = e^{\text{Diag}(I(\lambda_1), \dots, I(\lambda_k))} = \text{Diag}(e^{I(\lambda_1)}, \dots, e^{I(\lambda_k)}) \quad \text{מסקנה:}$$

$$e^A = Pe^JP^{-1} \quad \text{אזי } A = PJP^{-1} \quad \text{טענה: נניח כי}$$

$$e^A \quad \text{מסקנה: } e^A \text{ קיים ומוגדר היטב בשדה סגור אלגברית.}$$

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B} \quad \text{אזי } A, B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ מתחלפות אזי} \quad \text{טענה: יהיו}$$

$$F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{אזי } n \in \mathbb{N} \text{ יהי } \quad \text{משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר):}$$

$$n \quad \text{בהינתן } n \text{ תנאי התחלה קיים ויחיד פתרון } y(x) \text{ למד"ר מסדר } \quad \text{משפט:}$$

$$\text{sols}(y' = Ay) = \{ce^{Ax} \mid c \in \mathbb{F}^n\} \quad \text{אזי } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ ותהא } y \in (\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F})^n \quad \text{טענה: תהא}$$

$$T, S \in \text{Hom}(V) \quad \text{יהי } \mathbb{F} \text{ שדה ויהי } m \in \mathbb{N} \text{ עבורו לכל } V \text{ מ"ז המקיים כי } m \nmid \dim(V) \quad \text{טענה:}$$

מתחלפות קיים ו"ע משותף.

$$T, S \in \text{Hom}(V) \text{ לכסינות ומתחלפות אזי קיים בסיס } B \text{ של } V \text{ עבורו } [T]_B, [S]_B \text{ אלכסוניות.}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{מטריצה מצורפת/נלוית: יהי } f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ מתוקן אזי}$$

$$f_{A_p} = p \quad \text{משפט:}$$

$$m_{A_p} = p \quad \text{טענה:}$$

$$\mathbb{F} \text{ שדה ויהי } n \in \mathbb{N} \text{ התב"ש} \quad \text{טענה:}$$

• לכל פולינום מעל \mathbb{F} ממעלה n קיים פתרון.

• לכל V מ"ז מעל \mathbb{F} מממד n מתקיים כי לכל $T \in \text{Hom}(V)$ קיים ע"ע מעל \mathbb{F} .

• לכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ קיים ע"ע מעל \mathbb{F} .

$$\mathbb{F} \text{ שדה ויהי } f \in \mathbb{F}[x] \text{ א"פ מתוקן אזי } \mathbb{E}_f = \{g(A_f) \mid g \in \mathbb{F}[x]\} \quad \text{משפט:}$$

$$\langle I, A_f, \dots, A_f^{\deg(f)-1} \rangle \text{ בסיס של } \mathbb{E}_f \text{ בתור מ"ז מעל } \mathbb{F} \quad \text{טענה:}$$

$$f(A_f) = 0 \quad \text{מסקנה:}$$

$$A \sim \text{Diag}(A_{q_1}, \dots, A_{q_r}) \quad \text{אזי } q_i \text{ א"פ זרים בזוגות אזי } f_A(x) = \prod_{i=1}^r q_i(x) \text{ עם } A \in M_n(\mathbb{F}) \quad \text{צורת פרוביניוס:}$$

$$M_1 \in M_n(\mathbb{F}) \text{ כד } (M_1)_{i,j} = \delta_{i,n} \delta_{j,n} \quad \text{הגדרה:}$$

$$C(q) = \begin{pmatrix} A_q & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & M_1 & 0 \\ & \ddots & A_q & M_1 \\ 0 & & 0 & A_q \end{pmatrix} \quad \text{הגדרה: יהי } q(x)^\ell \text{ עבור } q_i \text{ א"פ מתוקן אזי } C(q) \in M_{\ell \deg(q)}(\mathbb{F}) \text{ כד}$$

$$A \sim \text{Diag}(C(q_1), \dots, C(q_r)) \quad \text{אזי } q_i \text{ א"פ זרים אזי } f_A(x) = \prod_{i=1}^r q_i(x)^{\ell_i} \text{ עם } A \in M_n(\mathbb{F}) \quad \text{צורת יעקובסון:}$$

$$\overline{(A)}_{i,j} = \overline{(A)}_{i,j} \quad \text{כד } \overline{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \text{ אזי } A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \quad \text{הגדרה:}$$

$$A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ ויהי } \lambda \text{ ע"ע של } A_{\mathbb{C}} \text{ עם ו"ע } b \text{ אזי } \bar{\lambda} \text{ ע"ע של } A_{\mathbb{C}} \text{ עם ו"ע } \bar{b} \quad \text{טענה:}$$

$$\mu_\lambda = \mu_{\bar{\lambda}}, \rho_\lambda = \rho_{\bar{\lambda}} \quad \text{טענה:}$$

$$M_{\mathbb{C}}^\lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{הגדרה: יהי } a + ib \in \mathbb{C} \text{ אזי}$$

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ לכסינה יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ע"ע עם $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$ ו"ע ויהיו $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_m, \overline{\lambda_m} \in \mathbb{C}$ ע"ע עם $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}^n$ ו"ע של $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ אזי

- $\langle b_1, \dots, b_k, c_1, \overline{c_1}, \dots, c_m, \overline{c_m} \rangle$ בסיס מלכסן מעל \mathbb{C} .
- $B = \langle b_1, \dots, b_k, \text{Re}(c_1), \text{Im}(c_1), \dots, \text{Re}(c_m), \text{Im}(c_m) \rangle$ בסיס מעל \mathbb{R} עבורו $[A]_B = \text{Diag} \left(a_1, \dots, a_k, M_{\mathbb{C}}^{\lambda_1}, \dots, M_{\mathbb{C}}^{\lambda_m} \right)$.

טענה: תהא λ ע"ע ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $\dim(\ker(A - \lambda I)^m) = \dim(\ker(A - \overline{\lambda} I)^m)$.

מסקנה: $\overline{I(\lambda)} = I(\overline{\lambda})$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ נניח כי $\langle b_1, \dots, b_k \rangle$ שרשרת היוצרת את $J_k(\lambda)$ אזי $\langle \overline{b_1}, \dots, \overline{b_k} \rangle$ שרשרת היוצרת את $J_k(\overline{\lambda})$.
מכפלה הרמיטית/מכפלה פנימית (מ"פ): יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} אזי $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת

• לינאריות: $\forall a, b, c \in V. \langle \alpha a + \beta b, c \rangle = \alpha \langle a, c \rangle + \beta \langle b, c \rangle$

• הרמיטיות: $\forall a, b \in V. \langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$

• חיוביות: $\forall a \in V. \langle a, a \rangle \in \mathbb{R}_+$

• חיוביות ממש: $\forall a \in V. (\langle a, a \rangle = 0) \iff (a = 0)$

מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ): $\langle V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ שמקיים $\langle V, +, \cdot \rangle$ מ"ו $\wedge (\langle \cdot, \cdot \rangle)$ מ"פ.

מכפלה סקלרית סטנדרטית: יהיו $a, b \in \mathbb{C}^n$ אזי $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$.

הגדרה: $(\overline{A})_{i,j} = \overline{(A)_{i,j}}$.

מטריצה צמודה: $A^* = \overline{A}^t$.

מכפלה פנימית על מטריצות: יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\langle A, B \rangle = \text{trace}(AB^*)$.

מכפלה פנימית על פונקציות רציפות: יהיו $f, g \in C^0([0, 1])$ אזי $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$.

נורמה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$.

ניצב/אורתוגונלי/מאונך: $a, b \in \mathbb{R}^n$ המקיימים $\langle a, b \rangle = 0$.

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ניצבים אזי $a \perp b$.

קוסינוס: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא θ הזווית בין a, b אזי $\cos(\theta_{a,b}) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$.

טענה: $(AB)^* = B^* A^*, (A+B)^* = A^* + B^*, (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, (A^*)^* = A$.

מסקנה: יהי $v, u \in \mathbb{C}^n$ אזי $\langle v, u \rangle_{st} = u^* \cdot v$.

הגדרה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ אזי $\langle v, u \rangle_A = u^* A v$.

מטריצה הרמיטית: $A^* = A$.

הגדרה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ סימטרית אזי

• חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית: $\langle Ax, x \rangle > 0, \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

• אי שלילית: $\langle Av, v \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

• שלילית לחלוטין: $\langle Av, v \rangle < 0, \forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

• אי חיובית: $\langle Av, v \rangle \leq 0, \forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

מסקנה: (A) הרמיטית וחיובית לחלוטין $\iff (\langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ מ"פ.

טענה: יהי V ממ"פ

• $\forall v \in V. \langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$

• $\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^m \beta_j u_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, u_j \rangle$

מטריצת גראם: יהי V ממ"פ ויהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ אזי $\langle v_i, v_j \rangle$ $(G(v_1, \dots, v_n))_{i,j}$.

טענה: $(G(v_1, \dots, v_n))$ הרמיטית ומוגדרת חיובית $\iff (v_1, \dots, v_n)$ בת"ל.

מרחק: יהיו v, u אזי $\text{dist}(v, u) = \|v - u\|$.

טענה: $\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \iff v = 0, \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$.

אי שיוויון קושי שוורץ: יהי V ממ"פ אזי $|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|, \forall v, u \in V$.

טענה: $\text{dist}(v, u) \geq 0, \text{dist}(v, u) = 0 \iff v = u, \text{dist}(v, u) + \text{dist}(u, w) \leq \text{dist}(v, w)$.

משפט פיתגורס: $\|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 \iff \text{Re}(\langle v, u \rangle) = 0$.

משפט הקוסינוסים: $\|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\|v\| \|u\| \text{Re}(\cos(\theta_{v,u}))$.

קבוצה אורתוגונלית: קבוצה $S \subseteq V$ המקיימת $\forall v, u \in S. v \neq u \implies v \perp u$.

וקטור יחידה: $v \in V$ המקיים $\|v\| = 1$.

נרמול: יהי $v \in V$ אזי $\frac{v}{\|v\|}$.

קבוצה אורתונורמלית: קבוצה $S \subseteq V$ אורתוגונלית המקיימת $\forall v \in S. \|v\| = 1$.

משפט: תהא $0 \notin S \subseteq V$ אורתוגונלית אזי S בתל.

טענה: תהא $B = (v_1, \dots, v_n) \notin$ סדרה אורתוגונלית

$$\bullet G(B) = \text{Diag} \left(\|v_1\|^2, \dots, \|v_n\|^2 \right)$$

$$\bullet \langle [v]_B \rangle_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

$$\bullet \langle v, u \rangle = [v]_B^T G(B) [u]_B$$

$$\bullet \text{שיויון פרסבל: נניח כי } B \text{ בסיס אזי } \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, v_i \rangle|^2}{\|v_i\|^2}}$$

ניצבות לקבוצה: יהי $S \subseteq V$ אזי $v \perp S \iff \forall s \in S. v \perp s$

טענה: $v \perp \text{span}(v_1, \dots, v_n) \iff \forall i \in [n]. v \perp v_i$

הטלה אורתוגונלית: יהי e_1, \dots, e_k בסיס אורתונורמלי של $U \subseteq V$ נגדיר $P_U : V \rightarrow U$ כך $P_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, e_i \rangle e_i$

טענה: P_U לינארית, $v - P_U(v) \perp U$, $P_U^2 = P_U$, $\text{Im}(P_U) = U$, $\ker(P_U) = \{v \mid v \perp U\}$.

המשלים לניצב: יהי $U \subseteq V$ אזי $U^\perp = \{v \in V \mid v \perp U\}$

טענה: U^\perp תמ"ו, $U \oplus U^\perp$

טענה: יהי V מ"ו נ"ס ויהיו $U, W \subseteq V$ ויהי בסיס אורתונורמלי של U

$$\bullet v = P_U(v) + (v - P_U(v)), V = U \oplus U^\perp$$

$$\bullet P_{(U^\perp, U)} = Id - P_U, P_{(U, U^\perp)} = P_U$$

$$\bullet U \subseteq W \implies W^\perp \subseteq U^\perp$$

$$\bullet \dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$$

$$\bullet (U^\perp)^\perp = U$$

$$\bullet (U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp, (U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$$

$$\bullet \text{מסקנה: } \langle v, v \rangle = \langle P_U(v), P_U(v) \rangle + \langle v - P_U(v), v - P_U(v) \rangle$$

מרחק ממרחב: יהי $U \subseteq V$ מרחב ויהי $v \in V$ אזי $\text{dist}(v, U) = \inf_{u \in U} (\text{dist}(v, u))$

משפט: יהי $U \subseteq V$ מרחב ויהי $v \in V$ אזי $\text{dist}(v, U) = \text{dist}(v, P_U(v))$

$$\text{התליך גראם שמידט: בהינתן } v_1, \dots, v_n \in V \text{ בתל נגדיר } GS(v_1, \dots, v_n) = \left(\frac{v_i - P_{\text{span}(v_1, \dots, v_{i-1})}(v_i)}{\|v_i - P_{\text{span}(v_1, \dots, v_{i-1})}(v_i)\|} \right)_{i=1}^n$$

טענה: $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(GS(v_1, \dots, v_n))$, קבוצה אורתונורמלית.

מסקנה: יהי V מ"מ"פ ויהי $U \subseteq V$ תמ"ו נ"ס אזי בסיס אורתונורמלי ל- U .

מטריצה אורתוגונלית: מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ המקיימת $AA^t = I$.

מטריצה אוניטרית: מטריצה $Q \in M_n(\mathbb{C})$ המקיימת $QQ^* = I$.

טענה: Q אוניטרית \iff עמודות Q בסיס אורתונורמלי לממ"פ $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st}) \iff Q^t$ אוניטרית.

טענה: תהא $Q \in M_n(\mathbb{C})$ אזי $|\det(Q)| = 1$.

משפט פירוק QR: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ בעבור $m \geq n$ אזי $A = QR$ בעבור Q אוניטרית ו- R משולשית עליונה.

מסקנה: נניח כי $QR = A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$, $Q \in M_m(\mathbb{C})$, $R \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

טענה: נניח כי $A = QR$ ונניח כי (u_1, \dots, u_r) בסיס של $\mathcal{C}(A)$ ו- (u_1, \dots, u_m) השלמה לבסיס אורתונורמלי של \mathbb{C}^m אזי

$$(R)_{i,j} = \begin{cases} \langle C_j(A), u_i \rangle & i \leq j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$C_i(Q) = u_i$$

$$\text{טענה: יהיו } B, C \text{ בסיסים של } V \text{ אזי } G(C) = \left([Id]_B^C \right)^T G(B) \overline{[Id]_B^C}$$

משפט: B בתל $\iff \det(G(B)) \neq 0$

טענה: $\det(G(B)) \geq 0$.

הגדרה: $\text{Vol}(\text{Par}(B)) = \sqrt{\det(G(B))}$.

טענה: $\text{Vol}(\text{Par}(v_1, \dots, v_n)) = \prod_{i=1}^n \|v_i\| \iff v_1, \dots, v_n$ אורתוגונלים

טענה: יהי E בסיס אורתונורמלי ויהי B בסיס אזי $\text{Vol}(\text{Par}(B)) = \left| \det \left([Id]_E^B \right) \right|$.

הגדרה: נגדיר יחס שקילות על בסיסים $B \sim C \iff \det \left([Id]_C^B \right) > 0$.

נפח עם אוריאנטציה: יהי E בסיס אורתונורמלי ויהי B בסיס אזי $\text{Vol}^*(\text{Par}(B)) = \det \left([Id]_E^B \right)$.

טענה: יהי V ממ"פ יהי $T \in \text{Hom}(V)$ ויהי B בסיס אורתונורמלי אזי $\langle [T]_B \rangle_{i,j} = \langle T(B_j), B_i \rangle$.

הגדרה: יהי V ממ"פ ויהי $v \in V$ נגדיר $a_v \in V^*$ כך $a_v(u) = \langle u, v \rangle$.

הגדרה: יהי V ממ"פ נ"ס אזי נגדיר $a : V \rightarrow V^*$ כך $a(v) = a_v$.

טענה: $a(v)$ הפיכה ובפרט איזומורפיזם קונוי בין V ל- V^* .

משפט: תהא V נ"ס אזי $\langle T(v), u \rangle = \langle v, T^*(u) \rangle \forall v, u \in V, T \in \text{Hom}(V)$.

טענה: $T^* = a^{-1} \circ T^t \circ a$.

טענה: יהיו $T, S \in \text{Hom}(V)$

$$\bullet (T + S)^* = T^* + S^*$$

$$\bullet (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$$

$$\bullet (T \circ S)^* = S^* \circ T^*$$

$$\bullet T^{**} = T$$

$$\bullet [T^*]_B = [T]_B^*$$

מסקנה: יהי B בסיס אורתונורמלי אזי $\langle [T^*(u)]_B \rangle_i = \langle u, T(B_i) \rangle$.

איזומטריה: יהיו V, U ממ"פ אזי $T \in \text{Hom}(V, U)$ הפיכה המקיימת $\langle v, u \rangle = \langle T(v), T(u) \rangle \forall v, u \in V$.

טענה: יהיו $S, T \in \text{Hom}(V, U)$ איזומטריות

$$\bullet S \circ T \text{ איזומטריה.}$$

$$\bullet S^{-1} \text{ איזומטריה.}$$

$$\bullet \text{dist}(u, v) = \text{dist}(S(v), S(u)), \|v\|_V = \|S(v)\|_U$$

$$\bullet \text{Vol}(\text{Par}(B)) = \text{Vol}(\text{Par}(S(B))), \theta_{v,u} = \theta_{S(v), S(u)}$$

משפט: יהיו V, U ממ"פ אזי $V \cong U \iff \dim(V) = \dim(U)$.

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(V, U)$ התב"ש

$$\bullet T \text{ איזומטריה.}$$

$$\bullet T^* \circ T = Id$$

$$\bullet \text{לכל בסיס אורתונורמלי } B \text{ של } V \text{ מתקיים כי } T(B) \text{ בסיס אורתונורמלי של } U.$$

$$\bullet \text{קיים בסיס אורתונורמלי } B \text{ של } V \text{ עבורו } T(B) \text{ בסיס אורתונורמלי של } U.$$

$$\bullet \forall v, u \in V. \text{dist}(v, u) = \text{dist}(T(v), T(u))$$

מסקנה: יהי B בסיס אזי $(T \text{ איזומטריה}) \iff [T]_B^{-1} = [T]_B^*$.

מסקנה: תהא T איזומטריה ויהי λ ע"ע אזי $|\lambda| = 1$.

העתקה קונפורמית: $T \in \text{Hom}(V, U)$ המקיימת $\forall v, u \in V. \theta_{v,u} = \theta_{T(v), T(u)}$.

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(V, U)$ איזומטריה אזי λT קונפורמית.

העתקה שומרת נפח: $T \in \text{Hom}(V, U)$ המקיימת $\text{Vol}(\text{Par}(B)) = \text{Vol}(\text{Par}(T(B)))$.

העתקה הרמיטית: $T \in \text{Hom}(V)$ המקיימת $T^* = T$.

העתקה נורמלית: $T \in \text{Hom}(V)$ המקיימת $TT^* = T^*T$.

משפט: יהי B בסיס אורתונורמלי ויהי C בסיס אזי $(C \text{ אורתונורמלי}) \iff [Id]_C^B$ אוניטרית).

טענה: A אוניטרית $\iff T_A$ איזומטריה.

הגדרה:

$$\bullet U(n) = \{Q \in M_n(\mathbb{C}) \mid QQ^* = I\}$$

$$\bullet SU(n) = \{Q \in U(n) \mid \det(Q) = 1\}$$

$$\bullet O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$$

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\} \bullet$$

טענה: $\langle SO(n), \cdot \rangle, \langle O(n), \cdot \rangle, \langle SU(n), \cdot \rangle, \langle U(n), \cdot \rangle$ חבורות.

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $(\text{Im}(T) = \ker(T^*)^\perp) \wedge (\ker(T) = \text{Im}(T^*)^\perp)$.

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $(T \text{ אוניטריות}) \vee (T \text{ הרמיטיות}) \iff (T \text{ נורמלית})$.

טענה: תהא T נורמלית אזי $\langle T(v), T(u) \rangle = \langle T^*(v), T^*(u) \rangle \forall v, u \in V$.

מסקנה: $T(v) \perp T(u) \iff T^*(v) \perp T^*(u), \|T(v)\| = \|T^*(v)\|$.

לכסינה אוניטרית/לכסינה אורתוגונלית: $T \in \text{Hom}(V)$ עברה קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.

דמיון אוניטרי: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ המקיימות כי קיימת מטריצה P אוניטרית עברה $A = PBP^*$.

לכסינה אוניטרית/לכסינה אורתוגונלית: A אשר דומה אוניטרית למטריצה אלכסונית.

טענה: תהא A מטריצה הרמיטית/אוניטרית/נורמלית ותהא B דומה אוניטרית Ab אזי B הרמיטית/אוניטרית/נורמלית.

למה: אם W הוא T אינו' אז W^\perp הוא T^* אינו'.

למה: T נורמלית אז לכל λ, v מתקיים $T(v) = \lambda v \iff T^*(v) = \bar{\lambda}v$.

טענה: אם T נורמלית אז $T - \lambda I$ נורמלית.

טענה: אם T נורמלית אז ו"ע לע"ע שונים ניצבים.

למה: $(T \text{ נורמלית}) \wedge (f_T \text{ מתפרק לגורמים לינארים}) \iff (T \text{ ניתנת ללכסון אוניטרי})$.

משפט הפירוק הספקטרלי: $A \in M_n(\mathbb{C})$ ניתנת ללכסון אוניטרי $\iff A$ נורמלית.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ נורמלית

$$\bullet \text{ } \text{sols}_{\mathbb{C}}(f_A) \subseteq \mathbb{R} \iff A = A^*$$

$$\bullet \text{ } \text{sols}_{\mathbb{C}}(f_A) \subseteq \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1\} \iff AA^* = I$$

משפט הפירוק הספקטרלי: $A \in M_n(\mathbb{R})$ ניתנת ללכסון אורתוגונלי $\iff A$ סימטרית.

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $(T \text{ נורמלית}) \iff (\exists p \in \mathbb{R}[x]. T^* = p(T))$.

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ מעל \mathbb{R} אזי קיים תמ"ו $U \subseteq V$ T -אינו' המקיים $\dim(U) \leq 2$.

משפט: תהא T העתקתה נורמלית אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עברו

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ \hline & & & a_1 & b_1 \\ & & & -b_1 & a_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_r & b_r \\ & & & & & -b_r & a_r \end{array} \right)$$

מסקנה: תהא T העתקה אורתוגונלית אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & -1 & \\ & & \ddots \\ & & & -1 \\ \hline & & & R(\theta_1) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

לכסון סימולטני אוניטרי: יהיו $T, S \in \text{Hom}(V)$ נורמליות ומתחלפות אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו $[T]_B, [S]_B$ אלכסוניות.

תבנית בילינארית: יהיו V, W מ"ו מעל \mathbb{F} אזי $f : V \times W \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת

• לינאריות ברכיב הראשון: $f(\alpha v + \beta u, w) = \alpha f(v, w) + \beta f(u, w)$

• לינאריות ברכיב השני: $f(w, \alpha v + \beta u) = \alpha f(w, v) + \beta f(w, u)$

טענה: יהיו $\varphi \in V^*, \psi \in W^*$ אזי $f(v, w) = \varphi(v)\psi(w)$ תבנית בילינארית.

מרחב התבניות הבילינאריות: $\text{Bil}(V, W) = B(V, W) = \{T \in V \times W \rightarrow \mathbb{F} \mid T \text{ תבנית בילינארית}\}$

טענה: $B(V, W)$ מ"ו.

טענה: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ אזי $f_A(v, u) = v^t A u$ תבנית בילינארית.

טענה: תהא $f \in B(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$ אזי $f = f_A$ $\exists A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

מסקנה: תהא $f_A \in B(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$ אזי $(A)_{i,j} = f_A(e_i, e_j)$

מטריצה מייצגת: תהא $f \in B(V, W)$ ויהיו C בסיס של V וגם B בסיס של W אזי המטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ עבורה

$$f_A(x, y) = f(Q_C^{-1}(x), Q_B^{-1}(y))$$

סימון: המטריצה המייצגת של f על פי הבסיסים C, B היא $[f]_B^C = M(f)$

טענה: $([f]_B^C)_{i,j} = f(v_i, v_j)$

מסקנה: $f(v, u) = [v]_C^t \cdot [f]_B^C \cdot [u]_B$

משפט: $[*]_B^C : B(V, W) \rightarrow M_{\dim(V) \times \dim(W)}(\mathbb{F})$ המוגדרת $[*]_B^C(f) = [f]_B^C$ היא איזומורפיזם.

מסקנה: $\dim(B(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$

משפט: $[f]_{B_1}^{C_1} = ([Id]_{C_2}^{C_1})^t [f]_{B_2}^{C_2} [Id]_{B_2}^{B_1}$

דרגה של תבנית: תהא $f \in B(V, W)$ אזי $\text{rank}(f) = \text{rank}([f]_C^B)$

מסקנה: $[f]_C^B = \left(\begin{array}{c|c} I_{\text{rank}(f)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

סימון: $B(V, V) = B(V)$

סימון: אם $f \in B(V)$ אזי $[f]_C = [f]_C^C$

מטריצות חופפות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $P^t B P = A$ $\exists P \in M_n^\times(\mathbb{F})$

טענה: יהיו A, B חופפות אזי

• $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

• $\exists c \in \mathbb{F}. |A| = c^2 |B|$

תבנית סימטרית: $f \in B(V)$ המקיימת $f(v, u) = f(u, v)$

תבנית אנטי סימטרית: $f \in B(V)$ המקיימת $f(v, u) = -f(u, v)$

תבנית מנוונת: $f \in B(V)$ המקיימת $(\exists v \in V \setminus \{0\} \cdot (\forall w \in V. f(v, w) = 0) \vee (\forall w \in V. f(w, v) = 0))$

הגדרה: תהא $\varphi \in B(V)$ מעל \mathbb{F} המקיימת $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ אזי

$$\begin{aligned} \varphi^+(u, v) &= \frac{\varphi(u, v) + \varphi(v, u)}{2} \\ \varphi^-(u, v) &= \frac{\varphi(u, v) - \varphi(v, u)}{2} \end{aligned}$$

משפט: תהא $\varphi \in B(V)$ אזי $(\varphi \text{ סימטרית}) \iff (\varphi \text{ סימטרית})$.

תבנית ריבועית: תהא $f \in B(V)$ תבנית סימטרית אזי $Q_f : V \rightarrow \mathbb{F}$ המקיימת $Q_f(v) = f(v, v)$.

משפט הפולריזציה: יהי $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ותהא $f \in B(V)$ סימטרית אזי

$$f(v, w) = \frac{Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2}$$

$$f \neq 0 \implies Q_f \neq 0$$

לכסון תבניות: נניח $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ תהא $f \in B(V)$ תבנית סימטרית אז קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B$ אלכסונית.

מסקנה: תהא $f \in B(V)$ מעל \mathbb{C} אזי קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B = \begin{pmatrix} I_{\text{rank}(f)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

מסקנה: תהא $f \in B(V)$ מעל \mathbb{R} אזי קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$

משפט ההתמדה של סילבסטר: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ וגם $[f]_C = \text{Diag}(I_{p'}, -I_{q'}, 0)$ אזי $\langle p, q \rangle = \langle p', q' \rangle$

אינדקס ההתמדה החיובי: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מעל \mathbb{R} אזי p .

סימון: $\sigma_+(f)$ האינדקס ההתמדה החיובי הוא

אינדקס ההתמדה השלילי: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מעל \mathbb{R} אזי q .

סימון: $\sigma_-(f)$ האינדקס ההתמדה החיובי הוא

הסיגנטורה/החתימה של תבנית: תהא f תבנית מעל \mathbb{R} אזי $(\sigma_+(f), \sigma_-(f))$

סימון: $\sigma_0(f) = \dim(V) - \text{rank}(f)$

המינור הפינתי: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי נגדיר $A_{(k)} \in M_k(\mathbb{R})$ כך $(A_{(k)})_{i,j} = (A)_{i,j}$

הדטרמיננטה הפינתית: $\Delta_0 = 1, \Delta_k = |A_{(k)}|$

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0 \forall k \in [n]$ אזי קיימת $C \in M_n(\mathbb{R})$ משולשית תחתונה עבורה CAC^t אלכסונית.

קריטריון סילבסטר: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0 \forall k \in [n]$ אזי $\sigma_-(A) = |\{i \in [n] \mid \Delta_i \Delta_{i-1} < 0\}|$

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0 \forall k \in [n]$ אזי $(A \text{ מוגדרת חיובית}) \iff (\forall i \in [n]. \Delta_i > 0)$

משפט: יהי \mathbb{F} שדה המקיים $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ וגם $\exists \beta \in \mathbb{F}. \beta^2 = \alpha$ ותהא $T \in B(V)$ סימטרית אזי הסיגנטורה היא

$$(\text{rank}(T), 0)$$

שיטת לגראנז' על פי השלמה לריבוע: תהא Q_f תבנית ריבועית אזי קיימת החלפת משתנים עבורה $Q_f(v) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ בפרט

$$[Q_f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$$

הגדרה: תהא $T \in B(V)$ סימטרית מעל \mathbb{R} אזי

• חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית: $\forall v \in V \setminus \{0\}. T(v, v) > 0$

• אי שלילית: $\forall v \in V \setminus \{0\}. T(v, v) \geq 0$

• שלילית לחלוטין: $\forall v \in V \setminus \{0\}. T(v, v) < 0$

• אי חיובית: $\forall v \in V \setminus \{0\}. T(v, v) \leq 0$

טענה: תהא $T \in B(V)$ סימטרית ותהא $A = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מטריצה מייצגת אזי

$$A = I \iff T \text{ חיובית לחלוטין}$$

$$A = \text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \iff T \text{ אי שלילית}$$

$$A = -I \iff T \text{ שלילית לחלוטין}$$

$$A = \text{Diag}(-1, \dots, -1, 0, \dots, 0) \iff T \text{ אי חיובית}$$

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית התב"ש

$$T_A \text{ מוגדרת חיובית.}$$

• לכל $T \in \text{Hom}(V)$ המטריצה $[T]_B = A$ מוגדרת חיובית.

• קיים $T \in \text{Hom}(V)$ כך שהמטריצה $[T]_B = A$ מוגדרת חיובית.

• כל הע"ע של A ממשיים חיוביים ממש.

משפט: תהא A סימטרית מייצגת של $f \in B(V)$ סימטרית מעל \mathbb{R} אזי

$$\sigma_+(f) = \#\{\lambda \mid \lambda > 0 \wedge \lambda \text{ ע"ע}\}$$

$$\sigma_-(f) = \#\{\lambda \mid \lambda < 0 \wedge \lambda \text{ ע"ע}\}$$

$$\sigma_0(f) = \#\{\lambda \mid \lambda = 0 \wedge \lambda \text{ ע"ע}\}$$

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ הרמיטית אי שלילית מעל \mathbb{C} אזי קיימת ויחידה $R \in \text{Hom}(V)$ המקיימת $R^2 = T$.

סימון: אם $R^2 = T$ אזי $R = \sqrt{T}$.

משפט הפירוק הפולרי של העתקות לינאריות הפיכות: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ הפיכה אזי קיימות ויחידות $U \in \text{Hom}(V)$ אוניטרית

ו- $R \in \text{Hom}(V)$ מוגדרת חיובית הרמיטית עבורן מתקיים $T = UR$.

מסקנה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ הפיכה אזי נגדיר $R = \sqrt{TT^*}$, $U = T \circ (\sqrt{TT^*})^{-1}$.

ערכים סינגולרים: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי הע"ע של $\sqrt{TT^*}$.

טענה: $f_{TT^*}(x) = f_{T^*T}(x)$.

פירוק SVD: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ אזי קיימות U, V אוניטריות וקיימת D אלכסונית אי שלילית המקיימות $A = UDV$.

טענה: נניח כי $A = UDV$ פירוק SVD ונניח כי $\alpha_1 \dots \alpha_n$ הערכים הסינגולרים של A אזי $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

תבנית סימפלקטית: תבנית בילינארית אנטי סימטרית לא מנוונת.

הגדרה: תהא $\omega \in B(V)$ סימפלקטית ויהי $W \subseteq V$ תמ"ו אזי $W^\omega = \{v \in V \mid \forall w \in W. \omega(v, w) = 0\}$.

מרחב לגרנז'יאני: תהא $\omega \in B(V)$ סימפלקטית אזי תמ"ו $W \subseteq V$ המקיים $W^\omega = W$.

מבנה מרוכב: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} אזי איזומורפיזם $J \in \text{Hom}(V)$ המקיים $J^2 = -I$.

מבנה תואם תבנית: מבנה מרוכב J ותבנית סימפלקטית ω המקיימות $(\forall v \in V. \omega(Jv, v) > 0) \wedge (\forall v, u \in V. \omega(Jv, Ju) = \omega(v, u))$.

שניונית: פולינום בנעלמים $x_1 \dots x_n$ מהצורה $c + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} (A)_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n (A)_{i,i} x_i^2 = 0$.

מסקנה: מטריציונית שניונית היא $c + 2b^t x + x^t A x = 0$.

המטריצה המצומצמת של שניונית: A .

$$\left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ x_1 & \dots & x_n & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} A & b \\ b & c \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{array} \right) = 0$$

המטריצה המורחבת של שניונית: $\left(\begin{array}{cc} A & b \\ b & c \end{array} \right)$.

איזומטריה אופיינית: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המקיימת כי קיימת איזומטריה T וקיים $w \in \mathbb{R}^3$ עבורם $f(x) = T(x) + w$.