

**רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים:**  $\{a_1, \dots, a_n\}$  מתקיים  $((a = a_1) \vee \dots \vee (a = a_n)) \iff (a \in \{a_1, \dots, a_n\})$ .  
**סימון:** תהא  $\Sigma$  קבוצה אזי  $\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$ .

**טענה:** תהא  $\Sigma$  קבוצה תהא  $B \subseteq \Sigma^*$  ותהא  $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$  אזי קיימת יחידה  $S \subseteq \Sigma^*$  המקיימת  $B \subseteq S$  •

•  $S$  סגורה להפעלת  $F$ .

• מינימליות: תהא  $A \subseteq \Sigma^*$  עבורה  $B \subseteq A$  וכן  $A$  סגורה להפעלת  $F$  אזי  $S \subseteq A$ .

**אינדוקציה מבנית:** תהא  $\Sigma$  קבוצה תהא  $B \subseteq \Sigma^*$  ותהא  $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$  אזי  $X_{B,F} \subseteq \Sigma^*$  מינימלית סגורה להפעלת  $F$  עבורה  $B \subseteq X_{B,F}$ .

**עולם באינדוקציה מבנית:** תהא  $\Sigma$  קבוצה תהא  $B \subseteq \Sigma^*$  ותהא  $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$  אזי  $\Sigma$ .

**בסיס באינדוקציה מבנית:** תהא  $\Sigma$  קבוצה תהא  $B \subseteq \Sigma^*$  ותהא  $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$  אזי  $B$ .

**טענה:** תהא  $B \subseteq \Sigma^*$  ותהא  $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$  אזי  $X_{B,F} = \bigcap \{Y \subseteq \Sigma^* \mid (B \subseteq Y) \wedge (F \text{ סגורה להפעלת } Y)\}$ .

**אינווריאנטה:** יהי עולם  $\Sigma$  תהא  $B \subseteq \Sigma^*$  ותהא  $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$  אזי  $Y \subseteq \Sigma^*$  סגורה להפעלת  $F$  עבורה  $B \subseteq Y$ .  
**מסקנה הוכחה באינדוקציה מבנית:** יהי עולם  $\Sigma$  ותהא  $Y \subseteq \Sigma^*$  אינווריאנטה אזי  $X_{B,F} \subseteq Y$ .

**מסקנה משפט האינדוקציה:** תהא  $p$  טענה על  $\mathbb{N}$  אזי  $(\forall n \in \mathbb{N}. p(n)) \iff (p(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}. p(n) \implies p(n+1)))$ .

**סדרת יצירה:** יהי  $a \in X_{B,F}$  אזי  $(a_1, \dots, a_n)$  עבורה  $a_n = a$  וכן לכל  $i \in [n]$  מתקיים  $a_i \in B$  מתקבל על ידי הפעלת  $F$  על חלק מ- $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ .

**טענה:** יהי  $a \in \Sigma^*$  אזי  $a \in X_{B,F} \iff$  (קיימת סדרת יצירה ל- $a$ ).

**מסקנה:**  $\{a \in \Sigma^* \mid a \text{ בעלת סדרת יצירה באורך } n\} = X_{B,F} \bigcup_{n=1}^{\infty}$ .

**עולם תחשיב הפסוקים:**  $\Sigma = \{\wedge, \vee, \neg, \implies, (, )\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .

**ביטוי:** יהי  $\Sigma$  תחשיב הפסוקים אזי  $a \in \Sigma^*$ .

**הגדרה:** יהיו  $\omega_1, \omega_2 \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  אזי

•  $\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)"$

•  $\vee (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \vee \omega_2)"$

•  $\implies (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \implies \omega_2)"$

•  $\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)"$

**קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק:**  $WFF = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee, \neg, \implies\}}$ .

**פסוק אטומי/יסודי:**  $p \in WFF$  עבורו  $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .

**טענה:** יהי  $p \in WFF$  אזי  $(p \text{ פסוק אטומי}) \vee (p \text{ מתחיל עם } "(" \text{ ונגמר עם } ")")$ .

**מסקנה:** יהיו  $q_1, q_2 \in WFF$  אזי  $q_1(q_2 \notin WFF)$ .

**משפט הקריאה היחידה:** יהי  $\alpha \in WFF$  אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

•  $\alpha$  פסוק אטומי.

•  $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$

•  $\alpha = (\beta \vee \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$

•  $\alpha = (\beta \implies \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$

•  $\alpha = (\neg \beta)$  עבורו  $\beta \in WFF$

**מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות:** יהי  $\Sigma$  תחשיב הפסוקים ויהי  $\alpha \in \Sigma^*$  אזי

```

function wffValidity( $\alpha$ ):
  if length( $\alpha$ )  $\leq$  3 then
    if  $\alpha \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  then return True
    else return False
  if ( $\alpha_1 \neq "(" \vee \alpha_{\text{length}(\alpha)} \neq ")"$ ) then return False
  if  $\alpha_2 = "\neg"$  then return wffValidity( $(\alpha_3 \dots \alpha_{\text{length}(\alpha)-1})$ )
  parenthesisCount  $\leftarrow$  0
  for  $i \leftarrow [2, \dots, \text{length}(\alpha) - 1]$  do
    if  $\alpha_i = "("$  then parenthesisCount  $\leftarrow$  parenthesisCount + 1
    if  $\alpha_i = ")"$  then parenthesisCount  $\leftarrow$  parenthesisCount - 1
    if parenthesisCount = 0 then
      if  $\alpha_{i+1} \in \{\neg, \wedge, \vee, \implies\}$  then
        return (wffValidity( $(\alpha_2 \dots \alpha_i)$ )  $\wedge$  wffValidity( $(\alpha_{i+2} \dots \alpha_{\text{length}(\alpha)-1})$ ))
  end
  return False

```

**טענה:** יהי  $\Sigma$  תחשיב הפסוקים ויהי  $\alpha \in \Sigma^*$  אזי  $(\text{wffValidity}(\alpha)) \iff (\alpha \in \text{WFF})$ .

**טענה:** יהי  $\Sigma$  תחשיב הפסוקים ויהי  $\alpha \in \Sigma^*$  אזי  $\text{wffValidity}(\alpha)$  רץ בסיבוכיות זמן  $O(\text{length}(\alpha))$ .

**הערה סדר קדימות של קשרים:** נגדיר סדר ביצוע פעולות

1.  $\neg$ .

2.  $\wedge, \vee$ .

3.  $\implies$ .

**סימון אמת:**  $T, \text{true}$ .

**סימון שקר:**  $F, \text{false}$ .

**טבלת אמת:** טבלה אשר מסכמת את אמיתותו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

**הגדרה:** יהיו  $p, q$  פסוקים אזי

$q$	$\neg q$
true	false
false	true

$q$	$p$	$q \implies p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

$q$	$p$	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

$q$	$p$	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

**סימון:** תהא  $\circ \in \{\wedge, \vee, \neg, \implies\}$  אזי טבלת האמת של  $\circ$  הינה  $TT_\circ$ .

**השמה:** פונקציה  $v : \{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$ .

**השמת ערך אמת לפסוק:** תהא  $v$  השמה אזי פונקציה  $\bar{v} : \text{WFF} \rightarrow \{F, T\}$  המוגדרת

- יהי  $p$  פסוק אטומי אזי  $\bar{v}(p) = v(p)$ .
- יהי  $\alpha$  פסוק אזי  $\bar{v}(\neg \alpha) = TT_\neg(\bar{v}(\alpha))$ .
- יהיו  $\beta, \gamma$  פסוקים ותהא  $\circ$  פעולה בינארית אזי  $\bar{v}(\beta \circ \gamma) = TT_\circ(\bar{v}(\beta), \bar{v}(\gamma))$ .

**השמה מספקת פסוק:** תהא  $v$  השמה אזי  $\alpha \in \text{WFF}$  עבורה  $\bar{v}(\alpha) = T$ .

**סימון:** תהא  $v$  השמה ותהא  $\alpha \in \text{WFF}$  מסופקת על ידי  $v$  אזי  $v \models \alpha$ .

**סימון:** תהא  $v$  השמה ותהא  $\alpha \in \text{WFF}$  לא מסופקת על ידי  $v$  אזי  $v \not\models \alpha$ .

**הפסוקים האטומיים בפסוק:** פונקציה  $\text{Var} : \text{WFF} \rightarrow \mathcal{P}(\{p_i\})$  המוגדרת

- יהי  $p$  פסוק אטומי אזי  $\text{Var}(p) = \{p\}$ .
- יהי  $\alpha$  פסוק אזי  $\text{Var}(\neg \alpha) = \text{Var}(\alpha)$ .
- יהיו  $\beta, \gamma$  פסוקים ותהא  $\circ$  פעולה בינארית אזי  $\text{Var}(\beta \circ \gamma) = \text{Var}(\beta) \cup \text{Var}(\gamma)$ .

**משפט התלות הסופית:** תהיינה  $v_1, v_2$  השמות ויהי  $\alpha \in \text{WFF}$  עבורו  $v_1(p) = v_2(p)$   $\forall p \in \text{Var}(\alpha)$  אזי  $\bar{v}_1(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha)$ .

**מסקנה:** יהי  $\alpha \in \text{WFF}$  אזי ניתן לייצג את  $\alpha$  על ידי  $TT_\alpha$ .

**מערכת קשרים שלמה פונקציונלית:** קבוצה  $K \subseteq \{\wedge, \vee, \neg, \implies\}$  עברה לכל טבלת אמת  $TT$  קיים  $\alpha \in WFF$  עבורו  $TT = TT_\alpha$ .  
**טענה:**  $\{\wedge, \vee, \neg, \implies\}$  שלמה פונקציונלית.

**טענה:** תהא  $K$  מערכת קשרים עבורה  $\neg, \wedge, \vee \in K$  אזי  $K$  שלמה פונקציונלית.

**פסוק ספיק:** פסוק  $\alpha \in WFF$  עבורו קיימת השמה  $v$  המקיימת  $v \models \alpha$ .

**טאוטולוגיה:** פסוק  $\alpha \in WFF$  עבורו לכל השמה  $v$  מתקיים  $v \models \alpha$ .

**סימון:** יהי  $\alpha \in WFF$  טאוטולוגיה אזי  $\models \alpha$ .

**סתירה:** פסוק  $\alpha \in WFF$  עבורו  $\models (\neg \alpha)$ .

**פסוקים שקולים:** פסוקים  $\alpha, \beta \in WFF$  עבורם לכל השמה  $v$  מתקיים  $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$ .

**סימון:** יהיו  $\alpha, \beta \in WFF$  שקולים אזי  $\alpha \equiv \beta$ .

**קבוצה ספיקה:** קבוצה  $\Gamma \subseteq WFF$  עבורה קיימת השמה  $v$  עבורה לכל  $\alpha \in \Gamma$  מתקיים  $v \models \alpha$ .

**סימון:** תהא  $\Gamma \subseteq WFF$  קבוצה ספיקה על ידי השמה  $v$  אזי  $\Gamma \models v$ .

**פסוק נובע סמנטית:** תהא  $\Gamma \subseteq WFF$  אזי  $\alpha \in WFF$  עבורו לכל השמה  $v$  המקיימת  $\Gamma \models v$  מתקיים  $v \models \alpha$ .

**סימון:** תהא  $\Gamma \subseteq WFF$  והי  $\alpha \in WFF$  פסוק נובע סמנטית מ- $\Gamma$  אזי  $\Gamma \models \alpha$ .

**טענה:** יהיו  $\alpha, \beta, \gamma \in WFF$  אזי

$$\bullet (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$$

$$\bullet (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$$

$$\bullet (\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$$

$$\bullet (\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$$

$$\bullet (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

$$\bullet (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$$

$$\bullet \neg(\neg \alpha) \equiv \alpha$$

$$\bullet \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg \alpha) \vee (\neg \beta)$$

$$\bullet \neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg \alpha) \wedge (\neg \beta)$$

$$\bullet (\alpha \implies \beta) \equiv (\neg \alpha) \vee \beta$$

**למה:** יהי  $\gamma \in WFF$  סתירה אזי לכל  $\alpha \in WFF$  מתקיים  $\gamma \models \alpha$ .

**טענה:** תהא  $\Gamma \subseteq WFF$  והיו  $\alpha, \beta \in WFF$  עבורם  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$  וכן  $\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta$  אזי  $\Gamma \models \beta$ .

**טענה:** תהא  $\Gamma \subseteq WFF$  והיו  $\alpha, \beta \in WFF$  עבורם  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$  וכן  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta)$  אזי  $\Gamma \models (\neg \alpha)$ .

**טענה:** יהיו  $\alpha, \beta \in WFF$  אזי  $(\alpha \implies \beta) \iff (\Gamma \models \beta) \iff (\Gamma \models \alpha)$ .

**הצבת פסוק בפסוק:** יהיו  $\alpha, \varphi \in WFF$  והי  $p$  פסוק אטומי אזי

$$\bullet \text{ אם } \alpha = p \text{ אזי } \alpha[\varphi/p] = \varphi$$

$$\bullet \text{ אם } \alpha \text{ פסוק אטומי וכן } \alpha \neq p \text{ אזי } \alpha[\varphi/p] = \alpha$$

$$\bullet \text{ אם קיים } \beta \in WFF \text{ עבורו } \alpha = \neg \beta \text{ אזי } \alpha[\varphi/p] = \neg \beta[\varphi/p]$$

$$\bullet \text{ אם קיימים } \beta, \gamma \in WFF \text{ וקיימת פעולה בינארית } \circ \text{ עבורה } \alpha = \beta \circ \gamma \text{ אזי } \alpha[\varphi/p] = \beta[\varphi/p] \circ \gamma[\varphi/p]$$

**טענה:** יהיו  $\alpha, \varphi \in WFF$  והי  $p \in \text{Var}(\alpha)$  אזי  $\alpha[\varphi/p] \in WFF$ .

**הצבת פסוקים בפסוק:** יהיו  $\alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in WFF$  והיו  $p_1 \dots p_n$  פסוקים אטומים אזי

$$\bullet \text{ אם } \alpha = p_i \text{ עבור } i \in [n] \text{ אזי } \alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] = \varphi_i$$

$$\bullet \text{ אם } \alpha \text{ פסוק אטומי וכן } \alpha \neq p_i \text{ לכל } i \in [n] \text{ אזי } \alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] = \alpha$$

$$\bullet \text{ אם קיים } \beta \in WFF \text{ עבורו } \alpha = \neg \beta \text{ אזי } \alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] = \neg \beta[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]$$

$$\bullet \text{ אם קיימים } \beta, \gamma \in WFF \text{ וקיימת פעולה בינארית } \circ \text{ עבורה } \alpha = \beta \circ \gamma \text{ אזי}$$

$$\alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] = \beta[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] \circ \gamma[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]$$

**סימון:** יהיו  $\alpha, \varphi \in WFF$  יהי  $p_i$  פסוק אטומי ותהא  $v$  ההשמה  $v \models \alpha$  אזי  $v[\bar{v}(\varphi)/p_i](p_j) = \begin{cases} v(p_j) & i \neq j \\ \bar{v}(\varphi) & i = j \end{cases}$

**טענה:** יהיו  $\alpha, \varphi \in WFF$  יהי  $p$  פסוק אטומי ותהא  $v$  ההשמה  $v \models \alpha$  אזי  $\bar{v}(\alpha(\varphi/p)) = \bar{v}(\bar{v}(\varphi)/p)$

**סימון:** יהיו  $\alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in WFF$  והיו  $p_1 \dots p_n$  פסוקים אטומים ותהא  $v$  ההשמה  $v \models \alpha$  אזי  $v[\bar{v}(\varphi_1)/p_1, \dots, \bar{v}(\varphi_n)/p_n](p_j) = \begin{cases} v(p_j) & j \notin [n] \\ \bar{v}(\varphi_j) & j \in [n] \end{cases}$

**מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות:** יהיו  $\alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \text{WFF}$  יהיו  $p_1 \dots p_n$  פסוקים אטומים ותהא  $v$  השמה אזי

$$\bar{v}(\alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]) = v[\bar{v}(\varphi_1)/p_1, \dots, \bar{v}(\varphi_n)/p_n](\alpha)$$

**מסקנה:** יהי  $\alpha \in \text{WFF}$  טאוטולוגיה יהיו  $\varphi_1 \dots \varphi_n \in \text{WFF}$  יהיו  $p_1 \dots p_n$  פסוקים אטומים אזי  $\alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]$  טאוטולוגיה.

**הצורה הנורמלית NNF:**  $\text{NNF} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee\}}$

**משפט:** יהי  $\alpha \in \text{WFF}$  אזי קיים  $\beta \in \text{NNF}$  עבורו  $\alpha \equiv \beta$

**סימון:**  $\text{Conj} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge\}}$

**הצורה הנורמלית DNF:**  $\text{DNF} = X_{\text{Conj}, \{\vee\}}$

**משפט:** יהי  $\alpha \in \text{WFF}$  אזי קיים  $\beta \in \text{DNF}$  עבורו  $\alpha \equiv \beta$

**סימון:**  $\text{Disj} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\vee\}}$

**הצורה הנורמלית CNF:**  $\text{CNF} = X_{\text{Disj}, \{\wedge\}}$

**משפט:** יהי  $\alpha \in \text{WFF}$  אזי קיים  $\beta \in \text{CNF}$  עבורו  $\alpha \equiv \beta$

**מערכת הוכחה:** יהי  $\Sigma$  אלפבית תהא  $N \subseteq \Sigma^*$  תהא  $A \subseteq N$  ותהא  $(\Sigma, N, A, F)$  אזי  $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (N^n \rightarrow N)$

**הערה:** בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.

**נוסחאות של מערכת הוכחה:** תהא  $(\Sigma, N, A, F)$  מערכת הוכחה אזי  $N$

**אקסיומת של מערכת הוכחה:** תהא  $(\Sigma, N, A, F)$  מערכת הוכחה אזי  $A$

**כללי היסק של מערכת הוכחה:** תהא  $(\Sigma, N, A, F)$  מערכת הוכחה אזי  $F$

**קבוצת המשפטים:** תהא  $(\Sigma, N, A, F)$  מערכת הוכחה אזי  $X_{A,F}$

**סימון:** תהא  $S$  מערכת הוכחה ויהי  $\varphi \in N$  משפט אזי  $\vdash_S \varphi$

**מערכת הוכחה בעלת הנחות:** תהא  $(\Sigma, N, A, F)$  מערכת הוכחה ותהא  $\Gamma \subseteq N$  אזי  $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$

**קבוצת הטענות היכוחות מהנחות:** תהא  $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$  מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי  $X_{A \cup \Gamma, F}$

**הגדרה הוכחה:** תהא  $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$  מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי  $\varphi \in N$  יכיח אזי סדרת יצירה של  $\varphi$

**סימון:** תהא  $S$  מערכת הוכחה תהיינה  $\Gamma \subseteq N$  הנחות ויהי  $\varphi \in N$  יכיח אזי  $\Gamma \vdash_S \varphi$

**טענה:** תהא  $S$  מערכת הוכחה ויהי  $\varphi \in N$  אזי

• מונוטוניות: תהא  $\Delta \subseteq N$  עבורה  $\Delta \vdash_S \varphi$  ותהא  $\Delta \subseteq \Gamma$  אזי  $\Gamma \vdash_S \varphi$

• קומפקטיות: תהא  $\Gamma \subseteq N$  עבורה  $\Gamma \vdash_S \varphi$  אזי קיימת  $\Delta \subseteq \Gamma$  סופית עבורה  $\Delta \vdash_S \varphi$

• טרנזיטיביות: תהיינה  $\Delta, \Gamma \subseteq N$  באשר  $\Delta \vdash_S \varphi$  וכן לכל  $\alpha \in \Delta$  מתקיים  $\Gamma \vdash_S \alpha$  אזי  $\Gamma \vdash_S \varphi$

**סימון:** תהא  $S$  מערכת הוכחה ויהי  $f \in F$  כלל היסק המקיים  $f(x_1, \dots, x_n) = y$  אזי  $f : \frac{x_1 \dots x_n}{y}$

**כלל הניתוק (Ponens Modus):** תהא  $(\Sigma, N, A, F)$  מערכת הוכחה אזי  $\text{MP} : \frac{(\alpha \Rightarrow \beta), \alpha}{\beta}$

**מערכת ההוכחה של הילברט (HPC):** נגדיר מערכת הוכחה כך

• אלפבית:  $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Rightarrow, (, )\}$

• נוסחאות:  $N = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Rightarrow\}}$

• אקסיומות:

$$A_1 = (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) -$$

$$A_2 = ((\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))) -$$

$$A_3 = (((\neg \alpha) \Rightarrow (\neg \beta)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) -$$

• כללי היסק:  $F = \{\text{MP}\}$

**טענה:** יהיו  $\alpha, \beta$  נוסחאות ב-HPC אזי

•  $\vdash_{\text{HPC}} (\alpha \Rightarrow \alpha)$

•  $\vdash_{\text{HPC}} ((\neg \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$

•  $\{\neg \alpha\} \vdash_{\text{HPC}} (\alpha \Rightarrow \beta)$

**מסקנה:** יהיו  $\alpha, \beta$  נוסחאות ב-HPC באשר  $\vdash_{\text{HPC}} (\neg \alpha)$  אזי  $\vdash_{\text{HPC}} \alpha$

**הערה:** בקורס זה ניתן להניח כי הסימון  $\vdash$  הוא במערכת HPC.

**משפט הדידוקציה:** תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל HPC ותהיינה  $\alpha, \beta$  נוסחאות מעל HPC אזי  $(\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)) \iff (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$

**סימון:** תהא מערכת הוכחה  $S$  ותהא  $\Gamma \subseteq N$  אזי  $\text{Ded}(\Gamma) = \{\alpha \in N \mid \Gamma \vdash \alpha\}$

**טענה:** תהא  $\alpha$  נוסחה מעל HPC אזי  $\vdash ((\neg(\neg \alpha)) \Rightarrow \alpha)$

**למה:** אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

**משפט הנאותות:** תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל HPC ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל HPC אזי  $(\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \alpha) \implies (\Gamma \models \alpha)$ .

**למה:** תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל HPC ותהיינה  $\alpha, \beta, \gamma$  נוסחאות מעל HPC אזי

$$((\Gamma \vdash (\alpha \implies \beta)) \wedge (\Gamma \vdash (\beta \implies \gamma))) \implies (\Gamma \vdash (\alpha \implies \gamma))$$

**משפט הדיכוטומיה:** תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל HPC ותהיינה  $\alpha, \beta$  נוסחאות מעל HPC אזי

$$((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \wedge (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \implies (\Gamma \vdash \beta)$$

**קבוצת הנחות עקבית:** תהא מערכת הוכחה  $S$  אזי  $\Gamma$  קבוצת הנחות מעל  $S$  עבורה קיימת  $\alpha$  נוסחה מעל  $S$  המקיימת  $\Gamma \not\vdash_S \alpha$ .

**טענה:** תהא מערכת הוכחה  $S$  ותהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל  $S$  אזי  $(\Gamma \text{ אינה עקבית}) \iff (\text{קיימת } \alpha \text{ נוסחה מעל } S \text{ המקיימת } \Gamma \not\vdash_S \alpha)$ .

$$((\Gamma \vdash_S (\neg\alpha)) \wedge (\Gamma \vdash_S \alpha))$$

**טענה:** תהא מערכת הוכחה  $S$  ותהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל  $S$  אזי  $(\Gamma \text{ עקבית}) \iff (\text{לכל } \Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית מתקיים כי } \Delta \text{ עקבית})$ .

**קבוצת הנחות עקבית מקסימלית:** תהא מערכת הוכחה  $S$  אזי  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מעל  $S$  עבורה לכל  $\Delta$  קבוצת הנחות עקבית מעל  $S$  המקיימת  $\Gamma \subseteq \Delta$ .

**טענה:** תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל HPC עבורה  $\Gamma \vdash \alpha$  אזי  $\alpha \in \Gamma$ .

**טענה:** תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל HPC אזי  $(\alpha \in \Gamma) \vee (\neg\alpha \in \Gamma)$ .

**טענה:** תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהיינה  $\alpha, \beta$  נוסחאות מעל HPC אזי

$$(\Gamma \vdash (\alpha \implies \beta)) \iff ((\neg\alpha \in \Gamma) \vee (\beta \in \Gamma))$$

**טענה:** תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי  $\Gamma$  ספיקה.

**טענה:** תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית  $\Delta$  עבורה  $\Gamma \subseteq \Delta$ .

**טענה:** תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי  $\Gamma$  ספיקה.

**מסקנה:** תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות מעל HPC אזי  $(\Gamma \text{ עקבית}) \iff (\Gamma \text{ ספיקה})$ .

**משפט השלמות:** תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל HPC ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל HPC אזי  $(\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \alpha) \iff (\Gamma \models \alpha)$ .

**מסקנה:** תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל HPC ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל HPC אזי  $(\Gamma \vdash \alpha) \iff (\Gamma \models \alpha)$ .

**משפט הקומפקטיות:** תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות מעל HPC אזי  $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\text{לכל } \Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית } \Delta \text{ ספיקה})$ .

**סימון:** תהא  $\Gamma \subseteq \text{WFF}$  אזי  $\text{Ass}(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \mid v \models \Gamma\}$ .

**טענה:** הקבוצה  $\{(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}) \setminus \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$  הינה טופולוגיה על  $\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$ .

**טענה:** הטופולוגיה  $\{(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}) \setminus \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$  הינה קומפקטית.

**הגדרה:** יהי  $G$  גרף פשוט לא מכוון תהא  $f : V \rightarrow \text{WFF}$  חח"ע ויהיו  $(v, u) \in E$  אזי  $\varphi_G : E \rightarrow \text{WFF}$  כך

$$\varphi_G((v, u)) = "f(v) \implies f(u)"$$

**טענה:** יהי  $G$  גרף פשוט לא מכוון ותהא  $f : V \rightarrow \text{WFF}$  חח"ע אזי  $(G \text{ הינו 2-צביע}) \iff (\{\varphi_G(e) \mid e \in E\} \text{ ספיקה})$ .

**מסקנה:** יהי  $G$  גרף בן-מנייה פשוט לא מכוון אזי  $(G \text{ הינו 2-צביע}) \iff (G' \leq G \text{ סופי } G' \text{ הינו 2-צביע})$ .

**טענה:** יהי  $G$  גרף בן-מנייה פשוט לא מכוון אזי  $(G \text{ הינו } k\text{-צביע}) \iff (G' \leq G \text{ סופי } G' \text{ הינו } k\text{-צביע})$ .

**קבוצת השמות גדירה:** קבוצה  $K \subseteq \{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$  עבורה קיימת  $\Gamma \subseteq \text{WFF}$  המקיימת  $K = \text{Ass}(\Gamma)$ .

**טענה:**  $\emptyset$  גדירה.

**טענה:**  $\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$  גדירה.

**טענה:** לכל  $v$  השמה  $\{v\}$  גדירה.

**טענה:** קיימת  $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$  שאינה גדירה.

**סימון:**  $K_{\text{finite}} = \{v \in \{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \mid |v^{-1}(\{T\})| < \aleph_0\}$ .

**טענה:**  $K_{\text{finite}}$  אינה גדירה.

**קבוצת השמות גדירה באופן סופי:** קבוצה  $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$  עבורה קיימת  $\Gamma \subseteq \text{WFF}$  סופית המקיימת  $K = \text{Ass}(\Gamma)$ .

**משפט:** תהא  $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$  אזי התב"ש

•  $K$  גזירה וכן  $K^c$  גדירה.

•  $K$  גדירה באופן סופי.

•  $K$  גדירה על ידי פסוק יחיד.

**מילון:** יהי  $\Sigma$  אלפבית אזי  $(\{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i, n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n \rightarrow \Sigma \mid i, n \in \mathbb{N}\})$ .

**סימני קבוע במילון:** יהי  $(C, R, F)$  מילון אזי  $C$ .

**סימני יחס במילון:** יהי  $(C, R, F)$  מילון אזי  $R$ .

**סימני פונקציה במילון:** יהי  $(C, R, F)$  מילון אזי  $F$ .

**מילון סופי:** יהי  $\Sigma$  אלפבית אזי מילון  $\sigma$  בעל מספר סופי של סימנים.

**מילון יחסי:** יהי  $\Sigma$  אלפבית אזי מילון  $\sigma$  חסר סימני פונקציה.

**לוגיקה מסדר ראשון:** יהי  $\Sigma$  אלפבית ויהי  $\sigma$  מילון אזי  $(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{",", "\}, \{\neg, \vee, \wedge, \implies\}, \{\forall, \exists\}, \sigma)$ .

**משתנים בלוגיקה מסדר ראשון:** תהא  $(X, P, C, A, \sigma)$  לוגיקה מסדר ראשון אזי  $X$ .

**סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון:** תהא  $(X, P, C, A, \sigma)$  לוגיקה מסדר ראשון אזי  $P$ .

**קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון:** תהא  $(X, P, C, A, \sigma)$  לוגיקה מסדר ראשון אזי  $C$ .

**כמתים בלוגיקה מסדר ראשון:** תהא  $(X, P, C, A, \sigma)$  לוגיקה מסדר ראשון אזי  $A$ .

**סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון:** תהא  $(X, P, C, A, \sigma)$  לוגיקה מסדר ראשון אזי  $\sigma$ .

**שמות עצם מעל מילון:** יהי  $\sigma$  מילון אזי  $X_{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{f_{i,n} \mid i, n \in \mathbb{N}\}}$ .

**משפט הקריאה היחידה לשמות עצם:** יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $t$  שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- $t$  משתנה.
  - $t$  סימן קבוע.
  - קיים ויחיד סימן פונקציה  $f_{i,n}$  ושמות עצם  $t_1 \dots t_n$  עבורם  $t = f(t_1 \dots t_n)$ .
- הגדרה:** יהי  $\sigma$  מילון יהי  $x$  משתנה ותהא  $\alpha \in \sigma$  אזי
- $\forall (\alpha, x) = "\forall x \alpha"$
  - $\exists (\alpha, x) = "\exists x \alpha"$
- נוסחאות אטומיות:** יהי  $\sigma$  מילון אזי  $\{R_{n,i}(t_1 \dots t_n) \mid (i, n \in \mathbb{N}) \wedge (t_1 \dots t_n \text{ שמות עצם})\}$ .
- נוסחאות מעל מילון:** יהי  $\sigma$  מילון אזי  $X_{\{R_{n,i}(t_1 \dots t_n) \mid (i, n \in \mathbb{N}) \wedge (t_1 \dots t_n \text{ שמות עצם})\}, \{\wedge, \vee, \neg, \implies, \forall, \exists\}}$ .
- משפט הקריאה היחידה לנוסחאות:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\alpha$  נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
- $\alpha$  נוסחה אטומית.
  - קיימת ויחידה נוסחה  $\beta$  עבורה  $\alpha = "\neg \beta"$ .
  - קיימות ויחידות נוסחאות  $\beta, \gamma$  וכן פעולה בוליאנית  $\circ$  עבורן  $\alpha = "(\beta \circ \gamma)"$ .
  - קיימת ויחידה נוסחה  $\beta$  וכן משתנה  $x$  וכן כמת  $Q$  עבורם  $\alpha = "Qx\beta"$ .
- משתנה חופשי בשם עצם:** נגדיר  $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathcal{P}(\{t \mid t \text{ שם עצם במילון } \sigma\})$  כד
- יהי  $c \in \sigma$  סימן קבוע אזי  $FV(c) = \emptyset$ .
  - יהי  $x \in \sigma$  משתנה אזי  $FV(x) = \{x\}$ .
  - יהיו  $t_1 \dots t_n$  שמות עצם ויהי  $f \in \sigma$  סימן פונקציה אזי  $FV(f(t_1 \dots t_n)) = \bigcup FV(t_i)$ .
- משתנה חופשי בנוסחה:** נגדיר  $\{\varphi \mid \varphi \text{ נוסחה במילון } \sigma\} \rightarrow \mathcal{P}(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\})$  כד
- יהיו  $t_1 \dots t_n$  שמות עצם ויהי  $R \in \sigma$  סימן יחס אזי  $FV(R(t_1 \dots t_n)) = \bigcup FV(t_i)$ .
  - תהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $FV(\neg \varphi) = FV(\varphi)$ .
  - תהיינה  $\varphi, \psi$  נוסחאות ויהי  $\circ$  פעולה בוליאנית אזי  $FV(\varphi \circ \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ .
  - תהא נוסחה  $\varphi$  יהי משתנה  $x$  ויהי כמת  $Q$  אזי  $FV(Qx\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$ .
- נוסחה סגורה:** נוסחה  $\varphi$  עבורה  $FV(\varphi) = \emptyset$ .
- הערה סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון:** נגדיר סדר ביצוע פעולות

1.  $\forall, \exists$ .
2.  $\neg$ .
3.  $\wedge, \vee$ .
4.  $\implies$ .

**מבנה עבור מילון:** יהי  $(C, R, F)$  מילון תהא  $D \neq \emptyset$  קבוצה תהא  $\mathcal{C} : C \rightarrow D$  תהא  $\mathcal{R} : R \rightarrow \mathcal{P}(D^*)$  המקיימת  $\mathcal{R}(r) \subseteq D^n$  לכל  $n \in \mathbb{N}$  ולכל  $r \subseteq \Sigma^n \rightarrow D$  תהא  $\mathcal{F} : F \rightarrow (D^n \rightarrow D)$  המקיימת  $\mathcal{F}(f) \in D^n \rightarrow D$  לכל  $n \in \mathbb{N}$  ולכל  $f \in \Sigma^n \rightarrow \Sigma$  אזי  $(D, \mathcal{C}(C), \mathcal{R}(R), \mathcal{F}(F))$ .

**תחום של מבנה:** יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $(D, \mathcal{C}(C), \mathcal{R}(R), \mathcal{F}(F))$  מבנה אזי  $D$ .

**סימון:** יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $M$  מבנה על  $\sigma$  בעל תחום  $D$  אזי  $D^M = D$ .

**פירוש של סימנים במילון על ידי מבנה:** יהי  $\sigma$  מילון והי  $(D, \mathcal{C}(C), \mathcal{R}(R), \mathcal{F}(F))$  מבנה אזי  $(\mathcal{C}(C'), \mathcal{R}(R), \mathcal{F}(F))$ .

**סימון:** יהי  $\sigma$  מילון והי  $M$  מבנה על  $\sigma$  אזי  $c^M = \mathcal{C}(c)$  וכן  $r^M = \mathcal{R}(r)$  וכן  $f^M = \mathcal{F}(f)$ .

**השמה:** יהי  $\sigma$  מילון והי  $M$  מבנה על  $\sigma$  אזי  $v : \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow D^M$ .

**השמת ערך לשם עצם:** יהי  $\sigma$  מילון יהי  $M$  מבנה על  $\sigma$  יהי ותהא  $v$  השמה אזי

• יהי  $c_i \in \sigma$  סימן קבוע אזי  $\bar{v}(c_i) = c_i^M$ .

• יהי  $x_i \in \sigma$  משתנה אזי  $\bar{v}(x_i) = v(x_i)$ .

• יהיו  $t_1 \dots t_n$  שמות עצם והי  $f \in \sigma$  סימן פונקציה אזי  $\bar{v}(f(t_1 \dots t_n)) = f^M(\bar{v}(t_1) \dots \bar{v}(t_n))$ .

**משפט התלות הסופית:** יהי  $\sigma$  מילון יהי  $M$  מבנה על  $\sigma$  תהיינה  $v_1, v_2$  השמות ויהי  $t$  שם עצם עבורו  $v_1(x) = v_2(x) \forall x \in \text{FV}(t)$ .

אזי  $\bar{v}_1(t) = \bar{v}_2(t)$ .

**השמה מתוקנת:** יהי  $\sigma$  מילון יהי  $M$  מבנה על  $\sigma$  תהא  $v$  השמה יהי  $x_j \in \sigma$  משתנה והי  $d \in D^M$  אזי נגדיר השמה

$$v[d/x_j](x_i) = \begin{cases} v(x_i) & i \neq j \\ d & \text{else} \end{cases}$$

**ערך אמת לנוסחה:** יהי  $\sigma$  מילון יהי  $M$  מבנה על  $\sigma$  ותהא  $v$  השמה אזי

• יהיו  $t_1 \dots t_n$  שמות עצם והי  $R \in \sigma$  סימן יחס אזי  $(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_n)) \in R^M \iff (\bar{v}(R(t_1 \dots t_n)) = T)$ .

• תהא  $\alpha$  נוסחה אזי  $\bar{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$ .

• תהיינה  $\alpha, \beta$  נוסחאות והי  $\circ$  קשר בינארי אזי  $\bar{v}(\alpha \circ \beta) = TT_{\circ}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta))$ .

• תהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\bar{v}(\exists x \varphi) = T) \iff (\exists d \in D^M (\bar{v}[d/x](\varphi) = T))$ .

• תהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\bar{v}(\forall x \varphi) = T) \iff (\forall d \in D^M (\bar{v}[d/x](\varphi) = T))$ .

**משפט התלות הסופית:** יהי  $\sigma$  מילון יהי  $M$  מבנה על  $\sigma$  תהיינה  $v_1, v_2$  השמות ותהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $v_1(x) = v_2(x) \forall x \in \text{FV}(t)$ .

אזי  $\bar{v}_1(\varphi) = \bar{v}_2(\varphi)$ .

**נוסחה ספיקה במבנה:** יהי  $M$  מבנה על מילון  $\sigma$  תהא  $v$  השמה אזי נוסחה  $\varphi$  עבורה  $\bar{v}(\varphi) = T$ .

**סימון:** יהי  $M$  מבנה על מילון  $\sigma$  תהא  $v$  השמה ותהא  $\varphi$  נוסחה ספיקה ב- $M$  אזי  $M, v \models \varphi$ .

**t-מודל של נוסחה:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\varphi$  נוסחה יהי  $M$  מבנה ותהא  $v$  השמה עבורם  $M, v \models \varphi$  אזי  $(M, v)$ .

**קבוצת נוסחאות ספיקה במבנה:** יהי  $M$  מבנה על מילון  $\sigma$  תהא  $v$  השמה אזי קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  עבורה לכל  $\varphi \in \Gamma$  מתקיים  $\bar{v}(\varphi) = T$ .

**סימון:** יהי  $M$  מבנה על מילון  $\sigma$  תהא  $v$  השמה ותהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות ספיקה ב- $M$  אזי  $M, v \models \Gamma$ .

**נוסחה ספיקה:** יהי  $\sigma$  מילון אזי נוסחה  $\varphi$  עבורה קיים מבנה  $M$  והשמה  $v$  עבורם  $M, v \models \varphi$ .

**סימון:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $v$  השמה תהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה עבורה לכל  $(M, v)$  t-מודל של  $\Gamma$  מתקיים כי  $(M, v)$ .

t-מודל של  $\varphi$  אזי  $\Gamma \models^t \varphi$ .

**נוסחאות t-שקולות:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $v$  השמה אזי נוסחאות  $\varphi, \psi$  עבורן  $\{\psi\} \models^t \varphi$  וכן  $\{\varphi\} \models^t \psi$ .

**נוסחה t-תקפה:** יהי  $\sigma$  מילון אזי נוסחה  $\varphi$  עבורה לכל  $M$  מבנה על  $\sigma$  ולכל  $v$  השמה מתקיים  $(M, v)$  t-מודל של  $\varphi$ .

**סימון:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה t-תקפה אזי  $\models^t \varphi$ .

**נוסחה נכונה במבנה:** יהי  $M$  מבנה על מילון  $\sigma$  אזי נוסחה  $\varphi$  עבורה לכל  $v$  השמה מתקיים  $M, v \models \varphi$ .

**סימון:** יהי  $M$  מבנה על מילון  $\sigma$  ותהא  $\varphi$  נוסחה נכונה ב- $M$  אזי  $M \models \varphi$ .

**v-מודל של נוסחה:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\varphi$  נוסחה אזי מבנה  $M$  עבורו  $M \models \varphi$ .

**קבוצת נוסחאות נכונה במבנה:** יהי  $M$  מבנה על מילון  $\sigma$  אזי קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  עבורה לכל  $\varphi \in \Gamma$  מתקיים  $M \models \varphi$ .

**סימון:** יהי  $M$  מבנה על מילון  $\sigma$  ותהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות נכונה ב- $M$  אזי  $M \models \Gamma$ .

**נוסחה v-ספיקה:** יהי  $\sigma$  מילון אזי נוסחה  $\varphi$  עבורה קיים מבנה  $M$  עבורו  $M \models \varphi$ .

**סימון:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה עבורה לכל  $M$  v-מודל של  $\Gamma$  מתקיים כי  $M$  v-מודל של  $\varphi$  אזי  $\Gamma \models^v \varphi$ .

**נוסחאות v-שקולות:** יהי  $\sigma$  מילון אזי נוסחאות  $\varphi, \psi$  עבורן  $\{\psi\} \models^v \varphi$  וכן  $\{\varphi\} \models^v \psi$ .

**נוסחה v-תקפה:** יהי  $\sigma$  מילון אזי נוסחה  $\varphi$  עבורה לכל  $M$  מבנה על  $\sigma$  מתקיים  $M$  v-מודל של  $\varphi$ .

**סימון:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה v-תקפה אזי  $\models^v \varphi$ .

**מסקנה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $\left( \models^v \varphi \right) \iff \left( \models^t \varphi \right)$ .

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה תקפה אזי  $\exists x \varphi$  תקפה וכן  $\forall x \varphi$  תקפה.

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $\forall x \varphi$  תקפה אזי  $\varphi$  תקפה.

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\Gamma \models^t \varphi) \implies (\Gamma \models^v \varphi)$ .

**פסוק:** יהי  $\sigma$  מילון אזי נוסחה  $\varphi$  עבורה  $FV(\varphi) = \emptyset$ .

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\Gamma \models^t \varphi) \iff (\Gamma \models^v \varphi)$ .

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\Gamma \cup \{\varphi\})$  הינה  $t$ -ספיקה  $\iff (\Gamma \not\models^t \neg\varphi)$ .

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהיינה  $\varphi, \psi$  נוסחאות אזי  $(\varphi, \psi)$  הן  $t$ -שקולות  $\iff (\varphi \iff \psi)$  תקפה.

**הסגור האוניברסלי:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $FV(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$  אזי  $\varphi^\forall = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi$ .

**הסגור היישי:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $FV(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$  אזי  $\varphi^\exists = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \varphi$ .

**סימון:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות אזי  $\Gamma^\forall = \{\varphi^\forall \mid \varphi \in \Gamma\}$ .

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\varphi$  נוסחה ויהי  $M$  מבנה אזי  $(\varphi^\forall)$  ספיק ב- $M$   $\iff (M \models \varphi)$ .

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\Gamma \models^v \varphi) \iff (\Gamma^\forall \models^v \varphi^\forall)$ .

**איזומורפיזם בין מבנים:** יהי  $\sigma$  מילון ויהיו  $M, N$  מבנים מעל  $\sigma$  אזי  $G : D^M \rightarrow D^N$  חח"ע ועל עבורה

- לכל סימן קבוע  $c \in \sigma$  מתקיים  $G(c^M) = c^N$ .

- לכל סימן פונקציה  $f \in \sigma$  ולכל  $a_1 \dots a_n \in D^M$  מתקיים  $G(f^M(a_1 \dots a_n)) = f^N(G(a_1) \dots G(a_n))$ .

- לכל סימן יחס  $R \in \sigma$  ולכל  $a_1 \dots a_n \in D^M$  מתקיים  $(a_1 \dots a_n) \in R^M \iff ((G(a_1) \dots G(a_n)) \in R^N)$ .

**מבנים איזומורפיים:** יהי  $\sigma$  מילון אזי מבנים  $M, N$  מעל  $\sigma$  עבורם קיים איזומורפיזם  $G$  מ- $M$  ל- $N$ .

**סימון:** יהי  $\sigma$  מילון ויהיו  $M, N$  מבנים איזומורפיים מעל  $\sigma$  אזי  $M \cong N$ .

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון יהיו  $M, N$  מבנים איזומורפיים מעל  $\sigma$  ויהי  $\varphi$  פסוק אזי  $(M \models \varphi) \iff (N \models \varphi)$ .

**הערה:** יהי  $\sigma$  מילון בעל יחס שיוויון  $\text{Id}$  דו-מקומי אזי לכל מבנה  $M$  נגדיר  $\text{Id}^M = \text{Id}_M$  ונסמן את היחס בעזרת  $=$ .

**הערה:** אלא אם כן נאמר אחרת מכאן והלאה כל המילונים הם חסרי שיוויון.

**הצבת שם עצם במשתנה:** יהיו  $s, r$  שמות עצם ויהי  $x$  משתנה אזי

- אם  $s$  סימן קבוע אזי  $s[r/x] = s$ .

- אם  $s = x$  אזי  $s[r/x] = r$ .

- אם  $s \neq x$  משתנה אזי  $s[r/x] = s$ .

- אם  $s = f(t_1 \dots t_n)$  אזי  $s[r/x] = f(t_1[r/x] \dots t_n[r/x])$ .

**הצבת שם עצם בנוסחה:** תהא  $\varphi$  נוסחה יהי  $r$  שמות עצם ויהי  $x$  משתנה אזי

- אם  $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$  אזי  $\varphi[r/x] = R(t_1[r/x] \dots t_n[r/x])$ .

- אם  $\varphi = \neg\alpha$  אזי  $\varphi[r/x] = \neg(\alpha[r/x])$ .

- אם  $\varphi = \alpha \circ \beta$  אזי  $\varphi[r/x] = \alpha[r/x] \circ \beta[r/x]$ .

- אם  $\varphi = \forall x \alpha$  אזי  $\varphi[r/x] = \forall x \alpha$ .

- אם  $\varphi = \exists x \alpha$  אזי  $\varphi[r/x] = \exists x \alpha$ .

- אם  $\varphi = \forall y \alpha$  באשר  $x \neq y$  אזי  $\varphi[r/x] = \forall y (\alpha[r/x])$ .

- אם  $\varphi = \exists y \alpha$  באשר  $x \neq y$  אזי  $\varphi[r/x] = \exists y (\alpha[r/x])$ .

**שם עצם חופשי להצבה בנוסחה:** תהא  $\varphi$  נוסחה ויהי  $x$  משתנה אזי

- אם  $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$  אזי שם עצם  $r$ .

- אם  $\varphi = \neg\alpha$  אזי שם עצם  $r$  באשר  $r$  חופשי להצבה ב- $\alpha$ .

- אם  $\varphi = \alpha \circ \beta$  אזי שם עצם  $r$  באשר  $r$  חופשי להצבה ב- $\alpha$  וכן ב- $\beta$ .

- אם  $\varphi = \forall y \alpha$  וכן  $x$  אינו מופיע או אינו חופשי ב- $\varphi$  אזי שם עצם  $r$ .

- אם  $\varphi = \exists y \alpha$  וכן  $x$  אינו מופיע או אינו חופשי ב- $\varphi$  אזי שם עצם  $r$ .

- אם  $\varphi = \forall y \alpha$  וכן  $x \in FV(\varphi)$  אזי שם עצם  $r$  באשר  $r$  חופשי להצבה ב- $\alpha$  וכן  $y \notin FV(r)$ .

- אם  $\varphi = \exists y \alpha$  וכן  $x \in FV(\varphi)$  אזי שם עצם  $r$  באשר  $r$  חופשי להצבה ב- $\alpha$  וכן  $y \notin FV(r)$ .

**משתנה בעל מופע קשור:** נגדיר  $f : \{x_i\} \rightarrow \mathcal{P}(\{x_i\})$  כך

- אם  $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$  אזי  $f(\varphi) = \emptyset$ .

- אם  $\varphi = \neg\alpha$  אזי  $f(\varphi) = f(\alpha)$ .



- אם  $\varphi = \alpha \circ \beta$  אזי  $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$
- אם  $\varphi = \forall x \alpha$  אזי  $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$
- אם  $\varphi = \exists y \alpha$  אזי  $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{y\}$

**למה:** תהא  $\varphi$  נוסחה יהי  $x$  משתנה ויהי  $r$  שם עצם אזי  $(r \text{ חופשי להצבה ב-}\varphi) \iff (y \in FV(r) \text{ לא נוצר מופע קשור חדש עבור } y \text{ ב-}\varphi[r/x])$

**סימון:** יהי  $s$  שם עצם יהי  $x$  משתנה ויהי  $r$  שם עצם אזי נגדיר השמה  $v[\bar{v}(r)/x](y) = \begin{cases} v(y) & x \neq y \\ \bar{v}(r) & \text{else} \end{cases}$

**מסקנה:** יהי  $s$  שם עצם יהי  $x$  משתנה ויהי  $r$  שם עצם אזי  $\bar{v}(s[r/x]) = \overline{v[\bar{v}(r)/x]}(s)$

**מסקנה:** תהא  $\varphi$  נוסחה יהי  $x$  משתנה ויהי  $r$  שם עצם חופשי להצבה ב- $\varphi$  אזי  $\bar{v}(\varphi[r/x]) = \overline{v[\bar{v}(r)/x]}(\varphi)$

**מסקנה:** תהא  $\varphi$  נוסחה יהי  $x$  משתנה ויהי  $y$  משתנה חופשי להצבה ב- $\varphi$  אזי  $\bar{v}(\varphi) = \overline{v[v(x)/y]}(\varphi[y/x])$

**טענה שינוי שם משתנה:** תהא  $\varphi$  נוסחה ויהי  $y$  משתנה אשר אינו מופיע ב- $\varphi$  אזי

- $(\exists x \varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi[y/x]))$
- $(\forall x \varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi[y/x]))$

**הצורה הנורמלית PNF:**  $X_{\{\varphi | \varphi \text{ נוסחה חסרת כמתים } \varphi, \{\forall, \exists\}\}$

**מסקנה:** תהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\varphi \text{ בצורת PNF}) \iff (q_1 \dots q_n \text{ חסרת כמתים וכן } x_1 \dots x_n \text{ משתנים וכן } Q_1 \dots Q_n \text{ כמתים עבורם } \varphi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \alpha)$

**טענה:** תהיינה  $\varphi, \psi$  נוסחאות אזי

- $(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi))$
- $(\exists x (\varphi \vee \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi))$
- תהא  $x \notin FV(\psi)$  אזי  $(\forall x (\varphi \vee \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \vee \psi)$
- תהא  $x \notin FV(\psi)$  אזי  $(\exists x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \wedge \psi)$
- $(\neg (\forall x \varphi)) \equiv^t (\exists x (\neg \varphi))$
- $(\neg (\exists x \varphi)) \equiv^t (\forall x (\neg \varphi))$

**משפט:** תהא  $\varphi$  נוסחה אזי קיימת נוסחה  $\alpha$  בצורת PNF עבורה  $\varphi \equiv^t \alpha$

**פסוק אוניברסלי:** פסוק  $\varphi$  עבורו קיימת נוסחה  $\alpha$  חסרת כמתים כאשר  $FV(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$  המקיימת  $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$

**פסוק יישי:** פסוק  $\varphi$  עבורו קיימת נוסחה  $\alpha$  חסרת כמתים כאשר  $FV(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$  המקיימת  $\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n \alpha$

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  ויהי סימן קבוע  $c \notin \sigma$  אזי  $(\exists x \varphi) \text{ ספיקה מעל } \sigma \iff (\exists x \varphi[c/x]) \text{ ספיקה מעל } \sigma \cup \{c\}$

**טענה:** תהא  $\varphi$  נוסחה מעל מילון  $\sigma$  אזי  $(\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x \varphi) \text{ ספיק מעל } \sigma \iff (\forall y_1 \dots \forall y_n (\varphi[f(y_1 \dots y_n)/x])) \text{ ספיק מעל המילון } \sigma \cup \{f\}$  כאשר  $f$  פונקציה  $n$ -מקומית.

**משפט סקולם:** קיים אלגוריתם  $sk$  המקבל נוסחה  $\varphi$  מעל מילון  $\sigma$  ומחזיר פסוק אוניברסלי מעל מילון  $\sigma'$  עבורו  $(\varphi \text{ ספיק}) \iff (sk(\varphi) \text{ ספיק})$

**סקולמיזציה למילון:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי המילון המינימלי מעליו מוגדר  $sk(\varphi)$

**אלגוריתם לוגיקה מסדר ראשון לתחשיב הפסוקים:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{\text{נוחסאות אטומיות סגורות}\} : f$  הפיכה ותהא

$\varphi$  נוסחה סגורה חסרת כמתים אזי  $FOLWFF(\varphi)$  עובר על  $\varphi$  ולכל שם עצם  $t$  בו מחליפו ב- $f(t)$

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{\text{נוחסאות אטומיות סגורות}\} : f$  הפיכה ותהא  $\varphi$  נוסחה סגורה חסרת כמתים אזי

- $(\varphi \text{ ספיק}) \iff (FOLWFF(\varphi) \text{ ספיק})$

- $(\varphi \text{ תקפה}) \iff (FOLWFF(\varphi) \text{ טאוטולוגיה})$

**למה:** תהא  $\varphi$  נוסחה סגורה חסרת כמתים המורכבת מהנוסחאות האטומיות  $\alpha_1 \dots \alpha_k$  נגדיר השמה של WFF כך  $(M \models \alpha_i) \iff v(p_i) = (M \models \alpha_i)$

אזי  $(M \models \varphi) \iff (T = (FOLWFF(\varphi)))$

**שם עצם סגור:** שם עצם חסר משתנים.

**מבנה הרברנד:** יהי  $\sigma$  מילון אזי מבנה  $M$  המקיים

- לכל  $a \in D^M$  קיים שם עצם סגור  $\alpha$  עבורו  $\alpha^M = a$

- יהיו  $\alpha, \beta$  שמות עצם שונים אזי  $\alpha^M \neq \beta^M$

**מסקנה:** יהי  $\sigma$  מילון בן-מנייה ויהי  $M$  מבנה הרברנד של  $\sigma$  אזי  $D^M$  בן-מנייה.

**הערה:** מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב  $\{\varphi \mid \text{שם עצם חסר משתנים ב-}\sigma\} = D^M$

**מסקנה:** יהי  $\sigma$  מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד  $M$  על  $\sigma$

**טענה:** יהי  $M$  מבנה הרברנד מעל  $\sigma$  ותהא  $v$  השמה עבורה  $v(x_i) = t_i$  אזי

- יהי  $r$  שם עצם באשר  $FV(r) = \{x_1 \dots x_n\}$  אזי  $\bar{v}(r) = r[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$ .
- תהא  $\varphi$  נוסחה באשר  $FV(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$  אזי  $(M, v \models \varphi) \iff (M \models \varphi[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n])$ .
- תהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\exists x \varphi) \iff$  (קיים שם עצם סגור  $s$  עבורו  $\varphi[s/x]$  ספיקה).
- תהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $\exists x \varphi$  פסוק אזי  $(\exists x \varphi) \iff$  (קיים שם עצם סגור  $s$  עבורו  $\varphi[s/x]$  תקפה).
- תהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\forall x \varphi) \iff$  (לכל שם עצם סגור  $s$  מתקיים כי  $\varphi[s/x]$  ספיקה).
- תהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $\forall x \varphi$  פסוק אזי  $(\forall x \varphi) \iff$  (לכל שם עצם חסר משתנים  $s$  מתקיים כי  $\varphi[s/x]$  תקפה).

**משפט הרברנד:** יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $\varphi$  פסוק אוניברסלי אזי  $(\varphi \text{ ספיקה}) \iff (\varphi \text{ ספיק במבנה הרברנד})$ .

**מופעי בסיס:** תהא  $\varphi$  נוסחה חסרת כמתים באשר  $FV(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$  אזי

$\text{GroundInstance}(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi) = \{\varphi[s_1/x_1, \dots, s_n/x_n] \mid s_1 \dots s_n \text{ שמות עצם חסרי משתנים}\}$

**סימון:** תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי  $\text{GroundInstance}(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \text{GroundInstance}(\varphi)$

**טענה:** תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים סגורים חסרי כמתים אזי  $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\Gamma \text{ ספיקה במבנה הרברנד})$ .

**משפט:** תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

•  $\Gamma$  ספיקה.

•  $\Gamma$  ספיקה במבנה הרברנד.

•  $\text{GroundInstance}(\Gamma)$  ספיקה.

•  $\text{GroundInstance}(\Gamma)$  ספיקה במבנה הרברנד.

**משפט הקומפקטיות:** יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי

•  $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\text{לכל } \Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית } \Delta \text{ ספיקה})$ .

•  $(\Gamma \models \varphi) \iff (\text{קיימת } \Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית עבורה } \varphi \text{ ספיקה})$ .

•  $(\Gamma \models \varphi) \iff (\text{קיימת } \Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית עבורה } \varphi \text{ ספיקה})$ .

**טענה:** יהיו  $x, y$  משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  מעל  $\{E(\cdot, \cdot)\}$  המקיימת  $(M \models \Gamma) \iff$  (יש מסלול ב- $M$  מ- $x$  ל- $y$ ).

**משפט:** יהי  $\sigma$  מילון בעל קבוע תהא  $\varphi$  נוסחה ללא כמתים מעל  $\sigma$  אזי  $(\exists x \varphi) \iff$  (קיימים שמות עצם סגורים  $t_1 \dots t_n$  עבורם

$\varphi[t_1/x] \vee \dots \vee \varphi[t_n/x]$  תקפה).

**מבנה הנקין:** יהי  $\sigma$  מילון אזי מבנה  $H$  מעל  $\sigma$  עבורו לכל  $a \in D^H$  קיים שם עצם סגור  $t$  עבורו  $t^H = a$ .

**המודל הסטנדרטי של הטבעיים:** יהי מילון עם שיוויון  $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$  אזי מבנה  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  עבורו

•  $D^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = \mathbb{N}$  וכן  $c_0^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = 0$  וכן  $c_1^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = 1$ .

•  $f_+^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a, b) = a + b$

•  $f_\times^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a, b) = a \times b$

•  $((a, b) \in R_>^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}) \iff (a > b)$ .

**פסוקים נכונים אריתמטיים:** יהי מילון  $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$  אזי  $AT = \{\alpha \mid (\mathcal{M}_{\mathbb{N}} \models \alpha) \wedge (FV(\alpha) = \emptyset)\}$

**מודל לא סטנדרטי של הטבעיים:** יהי מילון  $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$  אזי מבנה  $M$  עבורו  $M \models AT$  וכן  $M$  אינו איזומורפי ל- $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$ .

**טענה:** יהי  $M$  מודל לא סטנדרטי של הטבעיים אזי  $|D^M| > \aleph_0$ .

**עוצמה של מבנה:** יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $M$  מבנה מעל  $\sigma$  אזי  $|M| = |D^M|$ .

**משפט לוונהיים-סקולם היורד:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  אזי  $(\varphi \text{ ספיקה}) \iff$  (קיים מבנה לכל היותר בן-מנייה  $M$  בו  $\varphi$  ספיקה).

**משפט לוונהיים-סקולם העולה:** יהי  $\sigma$  מילון יהי  $M$  מבנה בן-מנייה ותהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  באשר  $\varphi$  ספיקה ב- $M$  אזי לכל עוצמה

אינסופית  $\kappa$  קיים מבנה  $M'$  מעוצמה  $\kappa$  עבורו  $\varphi$  ספיקה ב- $M'$ .

**מסקנה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\kappa$  עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  מעל  $\sigma$  המקיימת  $(M \models \Gamma) \iff (|M| = \kappa)$ .

**הערה:** אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

**מסקנה:** קיים מבנה בן-מנייה לתורת הקבוצות.

**סימון:**  $\text{VALID} = \{(\sigma, \varphi) \mid (\varphi \text{ נוסחה מעל } \sigma) \wedge (\varphi \text{ ספיקה})\}$

**משפט אלגוריתם בדיקת תקפות:** יהי  $\sigma$  מילון אזי  $\text{VALID} \in \mathcal{RE}$ .

**משפט צ'רץ'-טיורינג:**  $\text{HALT} \leq_m \text{VALID}$

**מסקנה:**  $\text{VALID} \notin \mathcal{R}$ .

**בעיית הריצוף:** יהיו  $R_1 \dots R_n$  ריבועים בעלי צלע מאורך 1 וכן כל צלע שלהם בצבע אזי האם ניתן לרצף את  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  בעזרת הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

**בעיית הריצוף:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ותהא  $R : [n]^2 \times \{\text{left, right, above, below}\} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$  אזי  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow [n]$  עבורה

- לכל  $m \in \mathbb{N}$  ולכל  $n \in \mathbb{N}_+$  מתקיים  $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n-1}{m}), \text{left}) = \text{yes}$ .
- לכל  $m, n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n+1}{m}), \text{right}) = \text{yes}$ .
- לכל  $m, n \in \mathbb{N}$  ולכל  $n \in \mathbb{N}_+$  מתקיים  $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n}{m+1}), \text{above}) = \text{yes}$ .
- לכל  $m \in \mathbb{N}$  ולכל  $n \in \mathbb{N}_+$  מתקיים  $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n}{m-1}), \text{below}) = \text{yes}$ .

**סימון:**  $f$  פתרון לבעיית הריצוף עבור  $R$   $\text{TILING} = \{(n, R, f) \mid R \text{ פתרון לבעיית הריצוף עבור } R\}$ .

**משפט:**  $\text{VALID} \leq_m \text{TILING}$ .

**מסקנה:**  $\text{TILING} \notin \mathcal{R}$ .

**יחס קונגרואנציה:** יהי  $\sigma$  מילון אזי  $E \in \sigma$  סימן יחס דור-מקומי המקיים

- רפלקסיבי:  $\forall x (E(x, x))$ .
- סימטרי:  $\forall x \forall y (E(x, y) \implies E(y, x))$ .
- טרנזיטיבי:  $\forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \implies E(x, z))$ .
- לכל  $f \in \sigma$  סימן פונקציה מתקיים  $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i)) \implies E(f(x_1 \dots x_n), f(y_1 \dots y_n)))$ .
- לכל  $R \in \sigma$  סימן יחס מתקיים  $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i)) \implies (R(x_1 \dots x_n) \iff R(y_1 \dots y_n)))$ .

**הערה:** בהינתן מילון עם שיוויון  $\sigma$  ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן  $\sigma_E$  את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

**מילון מחלקות קונגרואנציה:** יהי מילון  $\sigma$  עם שיוויון  $M$  מונה על  $\sigma$  אזי מבנה  $M_E$  מעל  $\sigma_E$  המקיים

- $D^{M'} = D^M / E$ .
- לכל סימן פונקציה  $f \in \sigma$  מתקיים  $f^{M'}([a_1]_E, \dots, [a_n]_E) = [f^M(a_1 \dots a_n)]_E$ .
- לכל סימן יחס  $R \in \sigma$  מתקיים  $R^{M'}([a_1]_E, \dots, [a_n]_E) \iff R^M(a_1 \dots a_n)$ .

**החלפת שיוויון ביחס קונגרואנציה:** תהא  $\varphi$  נוסחה מעל מילון עם שיוויון  $\sigma$  באשר  $f_1 \dots f_n$  סימני הפונקציות ב- $\varphi$  וכן  $R_1 \dots R_m$  סימני היחס ב- $\varphi$  אזי  $(E) \varphi_E = \varphi^{[E/=]} \wedge (E \text{ יחס קונגרואנציה ביחס ל-} f_i) \wedge (\bigwedge_{i=1}^m (E_i \text{ יחס קונגרואנציה ביחס ל-} R_i))$ .

**טענה:** תהא  $\varphi$  נוסחה מעל מילון  $\sigma$  עם שיוויון  $M$  מונה מעל  $\sigma$  ותהא  $v$  השמה נגדיר השמה  $v_E : \{x_i\} \rightarrow D^{M_E}$  באשר  $v_E(x_i) = [v(x_i)]_E$  אזי  $(M_E, v_E \models \varphi_E) \iff (M, v \models \varphi)$ .

**משפט:** קיים אלגוריתם המקבל נוסחה  $\varphi$  באשר  $\varphi$  מעל מילון עם שיוויון  $\sigma$  ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון  $\sigma'$  עבורו  $(\varphi \text{ ספיקה}) \iff (\psi \text{ ספיקה})$ .

**משפט:** תהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות מעל  $\sigma$  עם שיוויון אזי  $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\Gamma_E \text{ ספיקה})$ .

**משפט הקומפקטיות:** יהי  $\sigma$  מילון עם שיוויון תהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית } \Delta \text{ ספיקה})$ .

**הגדרה:** יהי  $\sigma = \{R(\cdot, \cdot)\}$  מילון עם שיוויון אזי

- $\xi_1 = \forall x (\neg (R(x, x)))$ .
- $\xi_2 = \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \implies R(x, z))$ .
- $\xi_3 = \forall x \forall y ((x \neq y) \implies (R(x, y) \vee R(y, x)))$ .
- $\xi_4 = (\forall x \exists y (R(x, y))) \wedge (\forall x \exists y (R(y, x)))$ .
- $\xi_5 = \forall x \forall y ((R(x, y)) \implies (\exists z (R(x, z) \wedge (R(z, y))))))$ .
- $\xi = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5$ .

**משפט קנטור:** יהי  $\sigma = \{R(\cdot, \cdot)\}$  מילון עם שיוויון והיו  $M, N$  מבנים המספקים את  $\xi$  אזי  $M \cong N$ .

**כלל ג'ן:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\alpha$  נוסחה אזי  $\text{Gen} : \frac{\alpha}{\forall x \alpha}$ .

**מערכת ההוכחה של הילברט (HC):** יהי  $\sigma$  מילון אזי

- אלפבית:  $\Sigma = \sigma$ .
- נוסחאות:  $N = X_{\{t \mid t \text{ שם עצם}\}, \{\neg, \implies, \forall\}}$ .
- אקסיומות:
- $A_1 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha))$

- $A_2 = ((\alpha \implies (\beta \implies \gamma)) \implies ((\alpha \implies \beta) \implies (\alpha \implies \gamma)))$
- $A_3 = (((\neg \alpha) \implies (\neg \beta)) \implies (\beta \implies \alpha))$
- יהי  $t$  שם עצם חופשי להצבה במקום  $x$  ב- $\alpha$  אזי  $A_4 = ((\forall x \alpha) \implies \alpha[t/x])$
- יהי  $x \notin \text{FV}(\alpha)$  אזי  $A_5 = ((\forall x (\alpha \implies \beta)) \implies (\alpha \implies (\forall x \beta)))$
- כללי היסק:  $F = \{\text{MP}, \text{Gen}\}$

**הערה:** מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

**הערה:** במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

**משפט הנאותות:** יהי  $\sigma$  מילון תהייה  $\Gamma$  הנחות מעל HC ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל HC אזי  $(\Gamma \vdash_{\text{HC}} \alpha) \implies (\Gamma \models^v \alpha)$

**טענה:** יהי  $\alpha \in \text{WFF}$  פסוק באשר  $\vdash_{\text{HPC}} \alpha$  וכן  $\text{Var}(\alpha) = \{p_1 \dots p_n\}$  ויהיו  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  נוסחאות אזי  $\vdash_{\text{HC}} \alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]$

**משפט הדידוקציה:** תהייה  $\Gamma$  הנחות מעל HC ותהייה  $\alpha, \beta$  נוסחאות מעל HC עבורן  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{HC}} \beta$  וכן בהוכחה לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב- $\alpha$  אזי  $\Gamma \vdash_{\text{HC}} (\alpha \implies \beta)$

**משפט הדיכוטומיה:** תהייה  $\Gamma$  הנחות מעל HC ותהייה  $\alpha, \beta$  נוסחאות מעל HC עבורן  $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{HC}} \beta$  וכן  $\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \vdash_{\text{HC}} \beta$  וכן בהוכחות לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב- $\alpha$  אזי  $\Gamma \vdash_{\text{HC}} \beta$

**קבוצת נוסחאות  $\sigma$ -שלמה:** יהיו  $\sigma, \Sigma$  מילונים באשר  $\sigma \subseteq \Sigma$  אזי קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  מעל  $\Sigma$  עבורה לכל פסוק  $\varphi$  מעל  $\sigma$  מתקיים  $(\varphi \in \Gamma) \vee (\neg \varphi \in \Gamma)$

**קבוצת נוסחאות בעלת תכונת הנקין:** יהי  $\sigma$  מילון אזי קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  עבורה לכל נוסחה  $\varphi$  באשר  $\neg \forall x \varphi$  פסוק וכן  $\neg \forall x \varphi \in \Gamma$  מתקיים שקיים סימן קבוע  $c \in \sigma$  עבורו  $\neg \varphi[c/x] \in \Gamma$

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית אזי קיים מילון  $\Sigma \subseteq \sigma$  וקיימת  $\Delta$  עקבית  $\sigma$ -שלמה מעל  $\Sigma$  המקיימת  $\Gamma \subseteq \Delta$

**למה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית תהא  $\varphi$  נוסחה באשר  $\neg \forall x \varphi$  פסוק וכן  $\neg \forall x \varphi \in \Gamma$  ויהי  $c \notin \sigma$  סימן קבוע אזי  $\Gamma \cup \{\neg \varphi[c/x]\}$  עקבית מעל  $\{c\}$

**משפט הנקין:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית אזי קיים מילון  $\Sigma \subseteq \sigma$  וקיימת  $\Delta$  עקבית מעל  $\Sigma$  המקיימת את תכונת הנקין עבורה  $\Gamma \subseteq \Delta$

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית אזי קיים מילון  $\Sigma \subseteq \sigma$  וקיימת  $\Delta$  מעל  $\Sigma$  עקבית  $\Sigma$ -שלמה המקיימת את תכונת הנקין עבורה  $\Gamma \subseteq \Delta$

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין יהי  $M$  מבנה ההרברנד מעל  $\sigma$  עבורו

$$(t_1 \dots t_n \in R^M) \iff (R(t_1 \dots t_n) \in \Gamma) \iff (\varphi \in \Gamma) \iff (M \models \varphi)$$

**מסקנה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין אזי קיים מבנה  $M$  עבורו  $M \models \Gamma$

**משפט השלמות:** תהייה  $\Gamma$  הנחות מעל HC ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל HC אזי  $(\Gamma \vdash_{\text{HC}} \alpha) \iff (\Gamma \models^v \alpha)$

**תורה של מבנה:** יהי  $M$  מבנה מעל מילון  $\sigma$  אזי  $\text{Th}(M) = \{\varphi \mid (M \models \varphi) \wedge (\text{FV}(\varphi) = \emptyset)\}$

**מסקנה:**  $\text{Th}(\mathcal{M}_{\mathbb{N}}) = \text{AT}$

**טענה:** יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים התב"ש

• לכל מבנים  $M, N$  המספקים את  $\Gamma$  מתקיים  $\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$

• לכל פסוק  $\varphi$  מתקיים  $(\Gamma \vdash \varphi) \vee (\Gamma \vdash (\neg \varphi))$

**מערכת הוכחה עקבית:** מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון  $S$  עבורה קיים פסוק  $\varphi$  המקיים  $\not\vdash \varphi$

**מערכת הוכחה שלמה:** מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון  $S$  עבורה לכל פסוק  $\varphi$  מתקיים  $(\vdash \varphi) \vee (\vdash (\neg \varphi))$

**מערכת הוכחה אפקטיבית:** מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון  $(\Sigma, N, A, F)$  עבורה קיים אלגוריתם המכריע אם  $\varphi \in A$  לכל נוסחה  $\varphi$

**אקסיומות אריתמטיקת פיאנו:** יהי  $\{c_0, \text{succ}, *, +, <\}$  מילון עם שיויון אזי

$$\bullet \forall y (\text{succ}(y) \neq c_0)$$

$$\bullet \forall x \forall y ((\text{succ}(x) = \text{succ}(y)) \implies (x = y))$$

$$\bullet \text{תהא } \varphi \text{ נוסחה אזי } (\forall y_1 \dots \forall y_n ((\varphi(c_0, y_1 \dots y_n) \wedge (\forall x (\varphi(x, y_1 \dots y_n) \implies \varphi(\text{succ}(x), y_1 \dots y_n)))) \implies (\forall x \varphi(x, y_1 \dots y_n)))$$

$$\bullet \forall x (x + c_0 = x)$$

$$\bullet \forall x \forall y (x + \text{succ}(y) = \text{succ}(x + y))$$

$$\bullet \forall x (x * c_0 = c_0)$$

$$\bullet \forall x \forall y (x * \text{succ}(y) = x + (x * y))$$

$$\bullet \quad \forall x \forall y ((x < y) \iff (\exists z ((z \neq c_0) \wedge (x + z = y))))$$

**סימון:** יהי  $\{c_0, \text{succ}, *, +, <\}$  מילון עם שיויון אזי  $\{ \text{אקסיומות אריתמטיקה פיאנו} \}$ .

**מערכת הוכחה אריתמטית:** מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון  $(\Sigma, N, A, F)$  עבורה  $\text{PA} \subseteq A$ .

**משפט אי השלמות של גדל:** תהא  $S$  מערכת הוכחה עקבית אפקטיבית ואריתמטית בלוגיקה מסדר ראשון אזי  $S$  אינה שלמה.