```
a*b=*(a,b) אזי א איז פעולה A שימון: תהא A קבוצה ותהא A פעולה בינארית
                                            עבורו e \in G עבורה איי*: G 	imes G 	o G עבורה קיים *: G 	imes G 	o G
                                         a*(b*c)=(a*b)*c מתקיים a,b,c\in G אסוציאטיביות: לכל
                                                         a*e=e*a=a מתקיים a\in G איבר יחידה: לכל
                                              a*b=e=b*a עבורו b\in G קיים a\in G לכל לכל • איבר הופכי:
                                                   S(X) = \{f: X \to X \mid הפיכה f\} הפינה אזי קבוצה אזי
                                                                    (S(X), \circ) אזי קבוצה אזי תהא X קבורת התמורות:
                                                            טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.
                                                                                   S_n = S\left([n]
ight) אזי n \in \mathbb{N} סימון: יהי
                                                                                       |S_n|=n! אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                         (\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight),\cdot) אזי n\in\mathbb{N} שדה ויהי \mathbb{F} שדה יהי אזי n\in\mathbb{N}
                                                  . מענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי n\in\mathbb{N} אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.
                                                             \mathbb{F},+ אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\} אזי החבורות החיבוריות: יהי
                                                                       A^*=A^{\times}=A\setminus\{0\} אזי A\subset\mathbb{C} סימון: תהא
                                                                \mathbb{F}(\mathbb{F},\cdot) אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{O}^*,\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*\} אזי יהי
                                                                             .(\{x\}, Id) אזי (החבורה הטריוואלית: יהי א
                                         (x\sim_n y)\Longleftrightarrow (n|\,(x-y)) המוגדרת \sim_n\subseteq\mathbb{Z}^2 אזי n\in\mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                                        .C_n=\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} סימון: יהי
                           [x]_{\sim} + [y]_{\sim} = [x+y]_{\sim} הגדרה: יהי n \in \mathbb{N} אזי n \in \mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                    (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N} יהי החלוקה: חבורת שאריות
                                                         טענה: יהי n \in \mathbb{N} אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.
                                                                                        |C_n|=n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
              g*h=h*g מתקיים g,h\in G עבורה לכל חבורה (G,*) חבורה חבורה אבלית/חילופית
                                                                         . טענה: יהי (S_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} אינה אבלית
                                                                    . אינה אבלית (GL_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot
ight) אזי אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי אבלית.
                                                                               . אבלית (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N}_+ אבלית טענה: יהי
                                                                         |G| \in \mathbb{N} חבורה עבורה חבורה חבורה חבורה
                                                                    |G| \geq \aleph_0 עבורה אינסופית: חבורה חבורה אינסופית:
                                                     .ord (G)=|G| אזי חבורה סופית הא (G,*) חבורה: תהא
                                                       \operatorname{ord}\left(G
ight)=\infty אינסופית אינ חבורה תהא G חבורה: תהא
                                                                     o\left(G
ight)=\operatorname{ord}\left(G
ight) חבורה אזי והא \left(G,st
ight)
                                           (H,st_{H	imes H}) אזי H\subseteq G עבורה תהא (G,st) עבורה תהא
                                                              a*b\in H מתקיים a,b\in H סגירות לכפל: סגירות ש
                                                               a^{-1} \in H מתקיים a \in H סגירות להופכי: לכל
                                                           e\in H אזי איבר היחידה של e אזי יהי •
                         H \leq G עבורה (H,*_{\restriction_{H \times H}}) תת־חבורה ותהא H \subseteq G אזי חבורה ותהא סימון: תהא
.(a*b^{-1}\in H מתקיים a,b\in H מתקיים (לכל H\leq G) אזי H\in \mathcal{P}\left(G\right)\setminus\left\{ \varnothing\right\} מתקיים (G,*) למה: תהא
                    A*B=\{a*b\mid (a\in A)\land (b\in B)\} סימון: תהא A,B\subseteq G חבורה ותהיינה G,*
                                     g*H=\{q\}*H אזי אוני q\in G ויהי ויהי חבורה (G,*) אזי חבורה תהא
                                                                             (n\mathbb{Z},+)<(\mathbb{Z},+) אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                     (\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot)\leq\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot
ight) שדה אזי n\in\mathbb{N} יהי ויהי n\in\mathbb{N}
                                                                     R_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\} אזי n\in\mathbb{N} דימון: יהי
```

A imes A o A פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי

 $(R_n,\cdot) \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$  אזי  $n\in\mathbb{N}$  טענה: יהי  $G\leq G$  טענה: תהא  $G\leq G$ 

```
\{e\} \leq G טענה: תהא (G,*) חבורה אזי
                                                    q^n=e המקיים n\in\mathbb{N}_+ איבר פיתול: תהא q\in G חבורה אזי חבורה (G,*)
                                                                     T\left(G
ight)=\left\{g\in G\mid T\left(G
ight) איבר אזי g\} חבורה אזי ותהא \left(G,st
ight)
                                                                                      T(G) < G טענה: תהא (G, *) חבורה אבלית אזי
                                              הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.
                                               a*e=e*a=a עבורו a*e=e*a=a עבורו אזי קיים ויחיד אזי קיים ויחיד (G,*) אכל
                                               a*b=e=b*a עבורו b\in G אזי קיים ויחיד a\in G חבורה ויהי חבורה (G,*)
                                                      a^{-1}=b אזי a איבר הופכי ל־b\in G ויהי a\in G חבורה יהי חבורה (G,*) איבר הופכי
                                                                 (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} אזי a,b \in G חבורה ויהיו (G,*) טענה: תהא
                                                                              (a^{-1})^{-1} = a אזי a \in G סענה: תהא (G,*) חבורה ויהי
                                    a*b=a*c אזיי a*b=a*c עבורם a,b,c\in G חבורה ויהי חבורה (G,*) אזיי משמאל:
                                      a,b=c אזי b*a=c*a עבורם a,b,c\in G חבורה ויהי חבורה (G,*) אזי
                                                                                      g^0=e אזי g\in G חבורה ויהי (G,*) אזי
                                                             g^n=g*g^{n-1} אזי g\in G ויהי חבורה יהי חבורה (G,*) אזי הגדרה:
                                                                      g^{-n}=\left(q^{n}\right)^{-1} אזי q\in G ויהי חבורה יהי חבורה G אזי מימון: תהא
                                                                     g^{-n}=\left(q^{-1}\right)^n אזי q\in G ויהי n\in\mathbb{N} יהי חבורה G אחזי מענה: תהא
a,h'\in H אזי ולכל g,g'\in G לכל לכל (g,h)\cdot (g',h')=(g*g',h\otimes h') חבורות נגדיר המכפלה: תהיינה (G,*),(H,\otimes) חבורת המכפלה
                                                                                                                                 (G \times H, \cdot)
                                                               . חבורה הינה חבורת אזי חבורת (G,*),(H,\otimes) טענה: תהיינה
                                              .(חבורת אזי (חבורת אבלית) חבורות אזי חבורות אזי חבורות (G,*),(H,\otimes) טענה: תהיינה
                                                .(HK=KH) (H*K\leq G) אזי איזי אינה תהיינה חבורה ותהיינה חבורה ותהיינה ענה:
                                        .(H \cap K \in \{H,K\}) שענה: תהא (H \cup K \leq G) אזי H,K \leq G טענה: תהא (G,*) חבורה ותהיינה
                                           .Stab (Y)=\{\pi\in S\left(X\right)\mid \forall y\in Y.\pi\left(y\right)=y\} אזי Y\subseteq X אחר קבוצה ותהא X קבוצה ותהא
                                                                           .Stab (Y) \leq S\left(X\right) אזי Y \subseteq X אחר קבוצה תהא א קבוצה ותהא
                                    \bigcap_{i\in I}H_i\leq G אזי i\in I לכל לכל H_i\leq G באשר באשר \{H_i\}_{I\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(G
ight) אזי חבורה תהא
                                                            \mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\} אזי X \subseteq G חבורה חבורה G תהא
                                        \langle X 
angle = igcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H אזי X \subseteq G חבורה ותהא חבורה תהיקבוצה: תהא תיקבוצה על ידי תתיקבוצה:
                                                                                      \langle X \rangle \leq G אזי אזי X \subseteq G אמר: תהא חבורה חבורה מהא
                     \langle X 
angle \subseteq H אזי איזי איזי עבורה H \leq G ותהא אות חבורה תהא חבורה תהא אזי א אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי
                          \langle X 
angle = \left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \ \middle| \ (k \in \mathbb{N}) \land \left(x \in X^k
ight) \land \left(s \in \{\pm 1\}^k
ight)
ight\} אזי X \subseteq G אזי X \subseteq G אזי
                                                               \langle X 
angle = G עבורה אזי אורה איזי אורה: תהא חבורה תהא אבורה עבורה איזי אבורה עבורה
                                                               חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.
                                                                        \langle g \rangle = G המקיים g \in G המקיים עבורה עבורה ציקלית: חבורה
                                                                             \langle g \rangle = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \} אזי g \in G חבורה ויהי חבורה G אהי
                                                              g^{n+m}=g^n*g^m אזי g\in G ויהי n,m\in\mathbb{Z} חבורה יהיו
                                                                 \left(g^{n}
ight)^{m}=g^{n\cdot m} אזי g\in G ויהי היו n,m\in\mathbb{Z} חבורה יהיו
                                                   G=\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\} עבורו g\in G עבורו ציקלית) אזי (G=\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\} עבורו למה: תהא
                                                                                           מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.
                                                                     \operatorname{ord}\left(g
ight)=\operatorname{ord}\left(\left\langle g
ight
angle אזי g\in G חבורה ויהי חבורה G איבר: תהא
                                                            .ord (g)=\min\left\{n\in\mathbb{N}_+\mid g^n=e\right\} אזי g\in G חבורה ויהי חבורה G
                                                           \operatorname{ord}\left(g
ight)=\infty אזי \operatorname{ord}\left(g
ight) עבורו g\in G חבורה ויהי G חבורה מערה:
                                g \in G טענה: תהא G = e (ord G = e) איי G = G באשר G \in G טענה: תהא G = e ויהי G \in G ויהי
                                                                        . (ירים) ויהי i,n)\Longleftrightarrowו(\langle i 
angle = \mathbb{Z}_n) אזי i \in \mathbb{Z}_n ויהי n \in \mathbb{N}_+ זרים).
                                                                            . ענה: תהא G חבורה ציקלית ותהא H \leq G אזי H ציקלית
```

טענה:  $(\mathbb{Q},+)$  אינה נ"ס.

```
q*H אזי q\in G ויהי ויהי H< G אזי חבורה תהא
                                                                      g ימני אזי קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי של קוסט ימני אזי G
                                                                gH אזי אוי ממאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי
                                                         Hg=gH אזי g\in G ויהי ויהי H\leq G אחר חבורה אבלית תהא
                                                         (gH)^{-1}=Hg^{-1} אזי g\in G ויהי H\leq G מסקנה: תהא
                                                     (gH=H) \Longleftrightarrow (g \in H) אזי g \in G ויהי ויהי H \leq G טענה: תהא
                                                      (Hg=H) \Longleftrightarrow (g\in H) אזי g\in G ויהי H\leq G טענה: תהא
                                                                  G/H = \{gH \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G חבורה תהא
                                                                 A_H \setminus G = \{Hg \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G איזי G
                                                                      G משפט: תהא G חבורה ותהא H \leq G חבורה חבורה משפט:
                                   (g_1H=g_2H)\Longleftrightarrow \left(g_2^{-1}g_1\in H
ight) אזי g_1,g_2\in G ויהיו H\leq G טענה: תהא G חבורה תהא
                                                                        .eH אזי אזי H \leq G הקוסט הטריוואלית: תהא
                                             G:H=|G/H| אזי H\leq G אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא אינדקס של אינדקס
                                                                       G:H]=|_Hackslash_G| אזי H\leq G טענה: תהא G חבורה ותהא
                                                     \operatorname{ord}(G) = \operatorname{ord}(H) \cdot [G:H] אזי H < G סענה: תהא G חבורה סופית ותהא
                                                        .ord (H) \left| \mathrm{ord} \left( G \right) \right. אזי אזי חבורה סופית ותהא H \leq G משפט לגראנז': תהא
                                                                    .ord (g) | \mathrm{ord} \, (G) אזי g \in G מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי
                                            G:K]=[G:H]\cdot [H:K] אזי איזי H\leq G חבורה תהא חבורה G איזי ותהא
                             G=\langle q \rangle מתקיים g\in G\setminus \{e\} אזי לכל ord G=p מתקיים חבורה חבורה G מתקיים מסקנה: יהי
                                                      אזי G אזי G אזי G אזי G אזי G אזי G אזי אזי G אזי G אזי מסקנה: יהי
                                 n^{p-1}\equiv 1\mod p אזי \gcd(n,p)=1 באשר n\in\mathbb{N} ויהי p\in\mathbb{P} ויהי מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי
                                                   |HK| = rac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|} אזי חבורות חבורה H,K \leq G למה: תהא
\operatorname{ord}(K)=p וכן \operatorname{ord}(H)=p באשר H,K\leq G אזי לכל ותהא G=p חבורה באשר G ותהא חבורה באשר אזי לכל
                                                                                                                   K=H מתקיים
                                                                 (S_n/\mathsf{Stab}(1)) \cap (S_\mathsf{Stab}(1) \setminus S_n) = \{\mathsf{Stab}(1)\} אזי n \in \mathbb{N}_{\geq 3} יהי n \in \mathbb{N}_{\geq 3}
                                                            HqK אזי g \in G ויהי H, K < G אזי חבורה תהיינה
                                                   G טענה: תהא G חלוקה של H,K \leq G טענה: תהא חבורה ותהיינה
                                                                     המקיימת \varphi:G \to H אזי חבורות G,H המקיימת הומומורפיזם:
                                                                                           .arphi\left(e_{G}
ight)=e_{H} :שימור איבר יחידה
                                                                .\varphi\left(a\cdot b\right)=\varphi\left(a\right)\cdot\varphi\left(b\right)מתקיים a,b\in Gלכל לכל • שימור כפל
                                                                     .arphi\left(g^{-1}
ight)=arphi\left(g
ight)^{-1} מתקיים g\in G שימור הופכי: לכל
.(arphi\left(a\cdot b^{-1}
ight)=arphi\left(a
ight)\cdotarphi\left(b
ight)^{-1} מתקיים a,b\in G מתקיים a,b\in G אזי arphi אזי arphi הומומורפיזם) אזי מענה: תהיינה
              \ker(\varphi)=\{g\in G\mid \varphi(g)=e_H\} אזי הומומורפיזם \varphi:G	o H חבורות ויהי חבורות G,H הומומורפיזם: תהיינה
                                                                     למה: תהיינה G,H חבורות ויהי G,H חבורות למה:
                                                                                                                 \operatorname{Im}(\varphi) \leq H \bullet
                                                                                                                \ker(\varphi) < G \bullet
                                                                                             (\ker(\varphi) = \{e_G\}) \iff (y \text{"nn } \varphi) \bullet
           \psi\circ \varphi אוווות היינה \psi:H	o K הומומורפיזם הומומורפיזם אזי הומומורפיזם אי\psi:G	o H הומומורפיזם סענה: תהיינה
```

H\*q אזי  $q\in G$  ויהי H< G אזי חבורה תהא

טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם.  $g\in G$  לכל g(g)=e המוגדרת  $g\in G$  לכל g(g)=e הינה הומומורפיזם. טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא  $g\in G$  חבורה אזי  $g\in G$  אזי  $g\in G$  הינו הומומורפיזם.  $g\in G$  טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא  $g\in G$  חבורה ותהא  $g\in G$  אזי  $g\in G$  אזי  $g\in G$  הינו הומומורפיזם.  $g\in G$  טענה: יהי  $g\in G$  שזי מעל  $g\in G$  אזי  $g\in G$  אזי  $g\in G$  המוגדרת  $g\in G$  לכל  $g\in G$  לכל  $g\in G$  אזי  $g\in G$  המוגדרת  $g\in G$  המוגדרת  $g\in G$  לכל  $g\in G$ 

 $\operatorname{ord}(\varphi(q))|\operatorname{ord}(q)$  אזי  $q\in G$  אויי הומומורפיאם ויהי  $g\in G$  אויי היינה G,H טענה: תהיינה

```
.
ho\left(\sigma
ight)\cdot v=\left(egin{array}{c} v_{\sigma(1)}\ dots\ v_{\sigma(n)} \end{array}
ight) אזי v\in\mathbb{R}^n ויהי \sigma\in S_n תהא n\in\mathbb{N} אזי n\in\mathbb{N}

ho:S_n	o \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}
ight) אזי n\in\mathbb{N} הינה הומומורפיזם. 
ho:S_n	o \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}
ight)
                                                                                          \det\left(
ho\left(\sigma
ight)
ight)\in\left\{\pm1
ight\} אזי \sigma\in S_n ותהא n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                                  \operatorname{sign} = \det \circ 
ho המוגדרת \operatorname{sign} : S_n 	o \{\pm 1\} אזי n \in \mathbb{N} המוגדרת
                                                                                                         מסקנה: יהי n\in\mathbb{N} אזי sign מסקנה: יהי
                                                     \operatorname{sign}(\sigma)=rac{\prod_{i< j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i< j}(i-j)} אזי \sigma\in S_n אווי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא \sigma\in S_n אווי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא n\in\mathbb{N} אווי n\in\mathbb{N} אווי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא
                                                                                          A_n = \ker\left(\operatorname{sign}
ight) אזי n \in \mathbb{N} חבורת התמורות הזוגיות: יהי
                                                                                                                           A_n \leq S_n אזי n \in \mathbb{N} טענה: יהי
                                                                        arphi:G	o H איזומורפיזם הפיך חבורות אזי חבורות היינה תהיינה איזומורפיזם: תהיינה
                                                                                              G \cong H אזי איזומורפיות איזומור G,H סימון: תהיינה
                                                             . למה: תהיינה G,H חבורות ויהי \varphi:G	o H ויהי חבורות מהיינה למה: תהיינה מיינה למה:
               למה: תהיינה \psi\circ \varphi איזומורפיזם איז \psi:H	o K איזומורפיזם ויהי \phi:G	o H איזומורפיזם איז למה: תהיינה
                                                                                        \mathcal{A} טענה: תהא \mathcal{A} קבוצה של חבורות אזי יחס שקילות על
                                                                                                                           .C_n\cong R_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
.arphi=\psi אזי arphi_S=\psi_{
estriction_S} חבורות תהא אזי arphi_S=\psi באשר באשר אזי \langle S
angle=G ויהיו ויהיו \langle S
angle=G באשר באשר באשר באשר אזיי מענה:
                                                                        .arphi:G	o H מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם תהיינה
                                                                            arphi:G	o H אפימורפיזם על אזי הומומורפיזם G,H חבורות אפימורפיזם:
                                                                                         arphi:G	o G אוטומורפיזם: תהא חבורה אזי איזומורפיזם: תהא
                                                                          .Aut (G)=\{\varphi:G	o G\mid סימון: תהא G חבורה אזי \{\varphi\} אוטומורפיזם
                                                                                                        חבורה (Aut (G), \circ) חבורה G חבורה טענה:
                                                                                                                                K = C_2 \times C_2 חבורת קליין:
                                                                                                                           טענה: חבורת קלייו הינה אבלית.
                                                                                                                           טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.
                                                                                                             .C_4טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־
                                c_{q}\left(x
ight)=gxg^{-1} המוגדרת c_{q}:G	o G אזי g\in G לכל לכל תהא חבורה תהא פונקציית הצמדה:
                                                                                              . טענה: תהא G אוטומורפיזם אזי חבורה ויהי G אוטומורפיזם.
                                 \varphi=c_a המקיים פנימי: תהא g\in G עבורו קיים \varphi:G\to G אוטומורפיזם אוטומר תהא חבורה מיים פנימי: תהא
                                                                                                  .\operatorname{Inn}\left(G\right)=\left\{c_g\mid g\in G\right\} סימון: תהא חבורה אזי
                                                .c_{a}\left( H
ight) =H מתקיים g\in G מתקיים אזי חבורה אזי חבורה אזי חבורה מורמלית: תה
                                                                                         H \unlhd G נורמלית אזי H \subseteq G חבורה חבורה G חבורה H \subseteq G
                                                                                                            טענה: תהא G חבורה ותהא H \leq G טענה:
                                                                                                                                                   .H \triangleleft G \bullet
```

 $g^{-1}Hg=H$  מתקיים  $g\in G$  לכל  $gHg^{-1}=H$  מתקיים  $g\in G$  לכל gH=Hg מתקיים  $g\in G$  לכל  $g^{-1}Hg\subseteq H$  מתקיים  $g\in G$  לכל  $g^{-1}Hg\subseteq H$  מתקיים  $g\in G$  לכל  $g\in G$ 

 $\operatorname{Inn}(G) \unlhd \operatorname{Aut}(G)$  טענה: תהא G חבורה אזי

 $H \unlhd G$  אזי G:H]=2 באשר  $H \subseteq G$  אזי חבורה תהא טענה: תהא

 $K \unlhd G$  אופיינית ב־H אויי אויי $K \subseteq H$  ותהא ותהא  $H \unlhd G$  אזי חבורה תהא

 $K \unlhd G$  אופיינית אזי $K \subseteq G$  מסקנה: תהא חבורה ותהא

 $.arphi\left(K
ight)=K$  מתקיים  $arphi\in\mathrm{Aut}\left(G
ight)$  עבורה לכל עבורה אזי חבורה אוניינית: תהא חבורה אזי אוניינית

 $G/H = H \setminus G \bullet$ 

```
הינה הומומורפיזם. q
                                                                                                                                               \ker(q) = N \bullet
                                                                                                                                                          על. q ●
                          (H=\ker(arphi) עבורו arphi:G	o G עבורו arphi:G	o G אזי (H=\ker(arphi)א אזי איי (H\subseteq G) אזי איי (H=\ker(arphi)
                                                                                                                             \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                 G/\ker(arphi)\cong \mathrm{Im}\,(arphi) אזי הומומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G,H חבורות ויהי
                                                                                       טענה: תהא חבורה אין בדיוק אזי מתקיים מתקיים מחבאים מחבים G
                                                                                                                                                       .G\cong\mathbb{Z} •
                                                                                                                           G \cong \mathbb{Z}_n עבורו n \in \mathbb{N} פיים •
                                                                                                                    |G/\mathcal{Z}(G)| \notin \mathbb{P} טענה: תהא G חבורה אזי
                                             G \cong H 	imes K אזי אH \cap K = \{e\} וכן וכן HK = G באשר אוי H, K \unlhd G טענה: תהא
                                                                       \mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n	imes\mathbb{Z}_m ארים אזי n,m\in\mathbb{N} יהיו יהיו מסקנה משפט השאריות הסיני:
טענה: יהי p\in \mathbb{P} תהא p\in M אזי H\neq M אזי אזי אווי היהי אוכן מאינדקס M מאינדקס אזי מאינדקס M באשר אווי אזי M
                                                                                                                                                          p^2 | \text{ord} (G)
                                               חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H,K חבורות ויהי \varphi:K	o {
m Aut}\,(H)
                                                  (H \times K, \cdot) אאי k, k' \in K ולכל ולכל ולכל ולכל (h, k) \cdot (h', k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')
                                     H \rtimes_{arphi} K חבורות ויהי G : K 	o \operatorname{Aut}(H) אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה H, K סימון: תהיינה
                                                                 . הינה חבורה אזי H \rtimes_{\varphi} K אזי \varphi: K \to \operatorname{Aut}(H) חבורות ויהי חבורה H, K
                         H \rtimes_{\varphi} K \cong H \times K איז א k \in K ככל \varphi(k) = \operatorname{Id}_H כי \varphi: K \to \operatorname{Aut}(H) חבורות נגדיר איז איז איז \varphi: K \to \operatorname{Aut}(H)
                                          .Aff (\mathbb{F})=\{f:\mathbb{F}	o\mathbb{F}\mid\exists a\in\mathbb{F}^{	imes}\ (\exists b\in\mathbb{F}\ (\forall x\in\mathbb{F}\ (f\ (x)=ax+b)))\} יהי שדה אזי
                                                                                                                  טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי (Aff (\mathbb{F}), \circ) טענה:
                     A\mathrm{ff}(\mathbb{F})\cong\mathbb{F}
times_{arphi}\mathbb{F}^{	imes} אזי b\in\mathbb{F} אזי a\in\mathbb{F}^{	imes} לכל arphi(a) לכל arphi(a) לכל arphi(a) אזי arphi(a) אזי arphi(a)
                                    . Iso (P)=\{arphi:\mathbb{R}^2	o\mathbb{R}^2\mid (מצולע משוכלל אזי arphi)\wedge(arphi(P)=P)\} איזומטריה מצולע משוכלל משוכלל אזי
                                                        D_n = \mathrm{Iso}\left(P
ight) אזי קודקודים אונלע משוכלל בעל מצולע מצולע יהי יהי יהי אזי ויהי רהבורה מצולע משוכלל אזי יהי
                                                                                                                   . חבורה (D_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי
                            \langle X\mid \varphi_1\dots\varphi_n\rangle=\{x\in\langle X\rangle\mid igwedge_{i=1}^n arphi_i(x)\} אזי איזי (X\mid \varphi_1\dots\varphi_n) פרידיקטים על איזי
                                                                               D_n\cong\left\langle r,s\mid s^2=e,r^n=e,srs=r^{-1}
ight
angle אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יטענה: יהי
                                                                                                                                         משפט: יהי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} אזי
                               D_n אוי של החבורות הנורמליות אזי \{D_n,\langle sr,r^2\rangle,\langle s,r^2\rangle\}\cup\{H\leq\langle r\rangle\} אזי אזי n\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}} אם •
                                                         D_n אויי אורמליות הנורמליות הן כל הוך אויי \{D_n\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\} אוי n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}} אם n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}
```

 $\mathcal{Z}\left(G
ight)=\left\{g\in G\mid orall h\in G.gh=hg
ight\}$  מרכז של חבורה: תהא

 $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}
ight)=\left\{\left(egin{array}{c}1&a&b\\1&c\\1\end{array}
ight)\ \middle|\ a,b,c\in\mathbb{F}
ight\}$  שדה סופי אזי  $\mathbb{F}$  שדה סופי אזי

 $\ker\left(\varphi\right) extlesigma G$  אזי אוינה G,H חבורות ויהי G extlesigma G extlesigma H חבורות ויהי

 $q\left(g
ight)=gN$  המוגדרת q:G o G/N אזי איזי N olember G חבורה תהא

 $.(gN)*(hN)=(g*h)\,N$  כך \*:G/N imes G/N o G/N נגדיר  $N ext{ } \subseteq G$  נגדיר (G,\*) חבורה ותהא אורה: תהא

 $H \in \{\{e\},G\}$  מתקיים  $H \unlhd G$  עבורה עבורה חבורה משוטה:

(G/N,\*) אזי אזי  $N \lhd G$  חבורה ותהא חבורת (G,\*) אזי . חבורה הינה חבורת חבורת אזי חבורת אזי חבורה G אזי חבורה G

טענה: תהא G חבורה תהא  $N \unlhd G$  ותהא חבורה G העתקת

 $\mathcal{Z}\left(G\right) riangleleft G$  טענה: תהא חבורה אזי G

טענה: יהי  $\mathbb{F}$  שדה סופי אזי  $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}\right)$  חבורה.

 $A_n \unlhd S_n$  אזי  $n \in \mathbb{N}$  טענה: יהי

מסקנה: יהי  $p\in\mathbb{P}$  אזי מסקנה: טענה: יהי  $n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$  פשוטה.  $n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ 

 $\mathcal{Z}\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{F}
ight)
ight)\cong\left(\mathbb{F},+
ight)$  טענה: יהי $\mathbb{F}$  שדה סופי אזי

```
D_n\cong C_n איזי k\in K לכל arphi(k)=c_k כך כך arphi:C_2	o {
m Aut}\,(C_n) ונגדיר וונגדיר n\in \mathbb{N}_{\geq 2} יהי
                                           חבורה G_0 \dots G_n \leq G וקיימות n \in \mathbb{N}_+ עבורה קיים עבורה מעירה: חבורה מעירה
                                                                                              G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                              i \in [n] לכל G_{i-1} \unlhd G_i
                                                                                           .i \in [n] אבלית לכל G_i/G_{i-1}
                                                                                  G פתירה אבלית אזי G פתירה.
                                                     . אינה פתירה G אינה אבלית אזי G אינה פשוטה באשר חבורה G אינה אבלית יענה:
                                                                                           משפט: יהיn\in [4] אזי S_n פתירה.
                                      חבורה G_0 \dots G_n \leq G וקיימות וקיים עבורה עבורה עבורה עבורה G המקיימות חבורה נילפוטנטית:
                                                                                              G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                               i \in [n] לכל G_{i-1} \triangleleft G
                                                                                   i \in [n] לכל G_i/G_{i-1} < \mathcal{Z}\left(G/G_{i-1}\right)
                                                                             פתירה. G אזי G פתירה. נילפוטנטית אזי
                           H/(H\cap N)\cong (HN)/N אזי M\unlhd G ותהא ותהא M\subseteq G משפט האיזומורפיזם השני: תהא
                                                  N/K \unlhd G/N אזי איזי K \subseteq N באשר N, K \unlhd G טענה: תהא
                   G/N\cong (G/K)/(N/K) אזי K\leq N משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה או האיזומורפיזם השלישי:
משפט ההתאמה: תהא \Phi:\{H\leq G\mid N\leq H\}	o \{H\mid H\leq G/N\} משפט ההתאמה: תהא 0 חבורה ותהא 0 אזי קיימת אזי קיימת
                                                               \Phi\left(K
ight) 	riangleq G/N מתקיים N \leq K המקיימת K 	riangleq G
                                            C/K \cong \Phi(G)/\Phi(K) מתקיים N < K המקיימת א המקיים לכל K \lhd G
                                         .(פשוטה) מקסימלית) אזי ותהא M \subseteq G אזי ותהא M \subseteq G משוטה) מענה: תהא חבורה ותהא מקסימלית
              המקיימת f:G	imes X	o T המקיימת קבוצה אזי פונקציה G הבורה על קבוצה: תהא המקיימת שמאלית של חבורה על קבוצה:
                                                                                     f(e,x)=x מתקיים x\in X •
                                                    f(g \cdot h, x) = f(g, f(h, x)) מתקיים x \in X ולכל g, h \in G
                                                               הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.
                             f\left(g,x
ight)=g.x אזי אזי G פעולה על f:G	imes X	o X פעולה ותהא קבוצה ותהא G
                                      G \curvearrowright X = \{f: G 	imes X 	o X \mid פעולה f\} פעולה ותהא G חבורה ותהא סימון: תהא
                                             f(g,x)=gx כך f\in G\curvearrowright G אזי חבורה G אזי הפעולה השמאלית: תהא
                                                                    . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.
                                             f אזי f(g,x)=xg^{-1} כך f\in G\curvearrowright G אזי חבורה מגדיר תהא
                                                                       . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.
                                                        . הפעולה מכאן ונסמן א ונסמן מיט פועלת כי הפעולה והלאה מכאן המערה: הערה מכאן והלאה הפעולה מיט הערה
                   \operatorname{corb}_lpha(x)=\{g.x\mid g\in G\} אזי x\in X איזי lpha\in G\curvearrowright X מסלולים: תהא lpha קבוצה תהא
                                      o(x) = \operatorname{orb}(x) אזי x \in X ויהי א ויהי X חבורה חבורה G חבורה תהא
              .o\left(x
ight)=X המקיים x\in X המקיים f\in G\curvearrowright X עבורה חבורה ותהא G חבורה חבורה קיים אזי
                     \operatorname{Stab}_G(x)=\{g\in G\mid g.x=x\} איי X\in X ויהי וויהי G חבורה הפועלת על מייצב: תהא
                                \operatorname{Fix}_G(x)=\operatorname{Stab}_G(x) איז x\in X חבורה הפועלת על X ויהי חבורה X איז חבורה הפועלת על X
                                       \operatorname{Stab}_G(x) < G אזי x \in X ויהי א ויהי X חבורה חבורה חבורה X אזי חבורה מענה:
            \operatorname{Stab}_G(x)=\{e\} מתקיים x\in X מתקיים f\in G \curvearrowright X פעולה חופשית: תהא
                                    lpha\left(g
ight)\in S\left(X
ight) אזי g\in G ויהי lpha\in G\curvearrowright X אמי קבוצה תהא למה: תהא
         arphi_lpha\left(g
ight)(x)=lpha\left(g,x
ight) חבורה תהא G חבורה ותהא איlpha\in G\curvearrowright X אזי מהא חבורה תהא G חבורה תהא א
                                             . סענה: תהא \varphi_{lpha} אזי lpha\in G\curvearrowright X אחותהא קבוצה חבורה תהא מענה: תהא
```

 $arphi(k)=c_k$  סענה: תהא G חבורה יהי G יהי G יהי של באשר G באשר G באשר G יהי איז G יהי הבורה יהי G יהי איז האי

 $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}_{2}\right)\cong D_{4}$  טענה:

 $.G\cong H
times_{arphi}K$  איז  $k\in K$ 

```
lpha_{arphi}\left(g,x
ight)=arphi\left(g
ight)(x) המוגדרת lpha_{arphi}:G	imes X	o T הומומורפיזם אזי lpha:G	o X חבורה תהא lpha קבוצה ויהי
                                                                              . פעולה \alpha_{\varphi} אזי חבור<br/>ה\varphi:G\to S\left(X\right)יהי קבוצה קבוצה תהא חבורה הא טענה: תהא 
                                       |o\left(x
ight)|=[G:\mathsf{Stab}_{G}\left(x
ight)] אזי x\in X איזי חבורה הפועלת על חבורה הפועלת על קבוצה תהא
|\{o(x)\mid x\in X\}|=rac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{x\in X\mid g.x=x\}| למה של ברנסייד: תהא G חבורה סופית הפועלת על X אזי
                            lpha\left(g,g'H
ight)=gg'H המוגדרת lpha\in G\curvearrowright G/H אזי אוlpha\in G המשמאליים: תהא חבורה ותהא lpha\in G
                                                           . טענה: תהא G חבורה ותהא H \leq G אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.
                 עבורן קיימת (lpha,eta)\in (G\curvearrowright X)	imes (G\curvearrowright Y) חבורה אזי חבורה G קבוצות ותהיינה X,Y קבורן קיימת עפורן אקווריאנטיות
                                                                               x \in X ולכל g \in G לכל F(\alpha(g,x)) = \beta(g,F(x)) ולכל המקיימת F:X \to Y
טענה: תהא o\left(x
ight)=X עבורו x\in X טרנזיטיבית תהא lpha\in G\curvearrowright X אזי הפעולה על חבורה תהא איזי הפעולה על מענה:
                                                                                                                                                                  .lphaהשמאליים של G/_{\mathrm{Stab}_{G}(x)} אקווריאנטית
מסקנה: תהא עבורה הפעולה על הקוסטים אזי קיימת אזי איי סינבית אזי חבורה ותהא חבורה ותהא חבורה מסקנה: מסקנה: עבורה הפעולה או חבורה ותהא מסקנה:
                                                                                                                                                                                                                  .\alphaאקווריאנטית ל־
                                                                           X טענה: תהא \{o\left(x\right)\mid x\in X\} אזי אוי חבורה חבורה G חלוקה של
                                      .o\left(x
ight)=X מתקיים x\in X אוי לכל אזי טרנזיטיבית מסקנה: תהא חבורה תהא חבורה ותהא מסקנה: תהא
                                             אזי p\in igcup_{i=1}^n arphi_i (P	imes\{0\}) איזי של \mathbb{R}^3 ותהא p\in igcup_{i=1}^n arphi_i (P	imes\{0\}) אזי מצולע משוכלל יהיו
                                                                                                                                                     .Poly (p) = |\{\varphi_i (P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i (P \times \{0\})\}|
עבורן \mathbb{R}^3 עבורה איזומטריות איזומטריות עבורה קיים מצולע משוכלל אוני: קבוצה קמורה אוניחה אניחה אבורה קיים מצולע משוכלל אוני: קבוצה קמורה אוניחה אוניחה אוניחה אוניחה עבורה קיים מצולע משוכלל
                                                                                                                                               \partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i\left(P \times \{0\}\right) פאות איזומטריות: •
                                                                       .
Poly (v_1)= Poly (v_2) מתקיים v_1,v_2\in K פודקודים לכל קודקודים יהה כמות:
עבורן \mathbb{R}^3 עבורן arphi_1\ldotsarphi_n של arphi_1\ldotsarphi_n של איזומטריות איזומטריות אפלטוני: יהיK\subseteq\mathbb{R}^3 אוף אפלטוני אזיn\in\mathbb{N} מינימלי עבורו קיימות איזומטריות
                                                                                                                                    באשר P\subseteq\mathbb{R}^2 באשר \partial K=igcup_{i=1}^n arphi_i \left(P	imes\{0\}
ight)
                                                       . Iso (P)=\left\{arphi:\mathbb{R}^3	o\mathbb{R}^3\mid (מימון: יהי K\subseteq\mathbb{R}^3 גוף אפלטוני אזי K\subseteq\mathbb{R}^3 איזומטריה יהי אוי גוף אפלטוני אזי אוי
              \operatorname{Iso}_+(P)=\left\{arphi:\mathbb{R}^3	o\mathbb{R}^3\mid (גוף אפלטוני אזי (arphi)וני איזי אומטריה משמרת איזומטריה (arphi) איזומטריה אוריינטציה אוריינט איינט איינט
                                                 \{n,\operatorname{Poly}(k)\} אזי קודקוד v\in K פאות ויהי n\in\mathbb{N} גוף אפלטוני גוף אפלטוני בעל אזי K\subseteq\mathbb{R}^3 הגדרה סימון שלפלי: יהי
                                                                                                                                                                  הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.
                                                                                                                                    \{5,3\} בעל סימון שלפלי K\subseteq\mathbb{R}^3 בעל אפלטוני גוף אפלטוני
                                                                                                                                                              \operatorname{Iso}_+(D) \cong A_5 טענה: יהי D דודקהדרון אזי
                                                                                                                                                  .ord (Iso<sub>+</sub> (D)) = 60 מסקנה: יהי דודקהדרון אזי מסקנה:
                                                                                 G\cong H עבורה H\leq S\left( X
ight) וקיימת קבוצה אזי קיימת חבורה אזי קיימת חבורה אזי קיימת
```

 $G\cong H$  עבורה  $H\leq S\left(\mathbb{N}
ight)$  אזי קיימת (G) אזי קיימת חבורה באשר מסקנה: תהא

 $lpha\left(g,h
ight)=c_{g}\left(h
ight)$  המוגדרת  $lpha\in G\curvearrowright G$  חבורה אזי חבורה lpha

 $[h]=\left\{ghg^{-1}\mid g\in G
ight\}$  אזי  $h\in G$  חבורה תהא חבורה ממידות: תהא G אזי חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי G אזי חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי

 $.C_G\left(h
ight)=\{g\in G\mid gh=hg\}$  אזי  $h\in G$  חבורה חבורה G הממרכז של איבר: תהא ממרכז של פעולת החבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי  $h\in G$  אזי חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי

 $G \cong S_3$  או  $G \cong \mathbb{Z}_6$  אזי  $G \cong G$  או  $G \cong G$  טענה: תהא

 $h^g=g^{-1}hg$  אזי  $h,g\in G$  חבורה ויהיו חבורה G אזי  $h^{g,k}=(h^g)^k$  טענה: תהא  $g,h,k\in G$  חבורה ויהיו

G מסקנה: תהא G חבורה אזי  $\{[h]\mid h\in G\}$  חלוקה של

 $.C_{G}\left(h
ight)\leq G$  אזי  $h\in G$  חבורה חבורה G אזי מסקנה: תהא חבורה חבורה אזי  $\mathcal{Z}\left(G
ight)=igcap_{q\in G}C_{G}\left(g
ight)$  אינה: תהא

טענה: תהא G חבורה אזי  $\mathcal{Z}\left(G\right)$  אופיינית.  $G/\mathcal{Z}(G)\cong\operatorname{Inn}\left(G\right)$  חבורה אזי  $G/\mathcal{Z}(G)\cong\operatorname{Inn}\left(G\right)$ 

.ord (g)=p עבורו עבורו  $g\in G$  אזי קיים אזי עבורו עבורו ויהי  $p\in\mathbb{P}$  עבורה סופית חבורה G אזי קיים

.ord (H)=p אזי קיימת  $H\leq G$  אזי קיימת עבורה  $p|\operatorname{ord}(G)$  עבורו עבורה  $p\in\mathbb{P}$  אין ציקלית עבורה G

```
\sum_{g\in C}rac{1}{|C_G(g)|}=1 אזי \{[h]\mid h\in G\} אזי קבוצת נציגים של קבוצת חבורה סופית חבורה סופית חבורה כופית משוואת מחלקות הצמידות:
                                                                \mathcal{Z}\left(G
ight)=igcup\{[g]\mid(g\in G)\wedge(|[g]|=1)\} טענה: תהא G חבורה סופית אזי
                   למה: יהי \beta=(m_{1,1}\cdots m_{1,\ell_1})\circ\ldots\circ(m_{b,1}\cdots m_{b,\ell_b}) באשר \alpha,\beta\in S_n פירוק מעגלים זרים אזי n\in\mathbb{N}_+ למה:
                                                                               \alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(m_{1,1}) \dots \alpha(m_{1,\ell_1})) \circ \dots \circ (\alpha(m_{b,1}) \dots \alpha(m_{b,\ell_b}))
                                                                                                                                       . פשוטה A_5
                                    H=A_n אזי \pi\in H אזי שלוש בגודל שלוש מעגל \pi עבורה קיים עבורה H\unlhd A_n אזי ותהא ותהא למה: יהי
                                                                                                                                       .למה: A_6 פשוטה
                                                                                               . משפט: יהי אבלית אזי n\in\mathbb{N}_{>5} יהי משפט: יהי
                         \mathbb{FP}=(\mathbb{F}^2\setminus\{0\})/R אזי R=\left\{(x,y)\in\mathbb{F}^2\setminus\{0\}\;\middle|\;\exists\lambda\in\mathbb{F}^	imes\;(x=\lambda y)
ight\} אזי היישר הפרויקטיבי: יהי
                                                                      \mathcal{Z}\left(\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight)
ight)=\{\lambda I_n\mid\lambda\in\mathbb{F}^{	imes}\} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq2} שדה ויהי \mathbb{F} שדה ויהי n\in\mathbb{N}_{\geq2}
                                                                            \operatorname{PGL}_n\left(\mathbb{F}
ight)=\operatorname{GL}_n(\mathbb{F})/\mathcal{Z}(\operatorname{GL}_n(\mathbb{F})) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} שדה ויהי \mathbb{F} שדה ויהי
                                                                   |G|=p^n יהי n\in\mathbb{N} המקיים עבורה q\in\mathbb{R} אזי חבורה אזי יהי יהי
                                                                                         \mathcal{Z}\left(G
ight)
eq\left\{e
ight\} אזי p\in\mathbb{P} ותהא חבורת G ותהא
                                                                                    . אבלית G אזי אזי p\in\mathbb{P} אזי מסקנה: יהי p\in\mathbb{P} אזי מסקנה:
                                                                                         . נילפוטנטית אזי G אזי p חבורת־G ותהא ותהא p \in \mathbb{P}
H \leq G אזי אוי|G| = p^k \cdot m חבורה באשר חבורה G ותהא אוי אוי באשר m,k \in \mathbb{N} אזי p \in \mathbb{P} אזי p \in \mathbb{R}
p-חבורה K \leq G וכן לכל חבורת H) אזי (H \in \mathcal{G} אזי ותהא H \leq G חבורה חבורה חבורה חבורה אזי וענה: יהי
                                                                                                                                   |K| \leq |H| מתקיים
                      (p \not\mid [G:H] טענה: יהי p \in \mathbb{P} חבורה ותהא H \leq G אזי וענה: אזי חבורה H חבורה אזי וענה: אזי H \leq G טענה: יהי
                                      \operatorname{Syl}_n(G)=\{H\leq G\mid G אינו של p\in \mathbb{P} חבורה סופית אזיg\in \mathbb{P} חבורה סופית אזיg\in \mathbb{P} ותהא
                                                                                 .n_{p}=\left|\operatorname{Syl}_{p}\left(G
ight)
ight| יהי אזי חבורה חבורה G ותהא ותהא p\in\mathbb{P}
                                                                   p 
otin \gcd(p,m) = 1 באשר n,m \in \mathbb{N}_+ ויהיו p \in \mathbb{P} אזי p \in \mathbb{P}
                       G משפט סילו הראשון: יהי H תת־חבורה סופית אזי קיימת H \leq G ותהא חבורה סופית חבורה סופית אזי קיימת
                                                                                          n_p \geq 1 יהי חבורה חבורה p \in \mathbb{P} ותהא מסקנה: יהי
                                            N_{G}\left(H
ight)=\left\{g\in G\mid gHg^{-1}=H
ight\} אזי אוי חבורה תהא חבורה: תהא חבורה של חבורה:
                                                                 H \subseteq N_G(H) וכן N_G(H) \subseteq G אזי H \subseteq G חבורה חבורה G אסענה: תהא
H,K \leq G ותהיינה G באשר חבורות G תהא תהא \gcd(p,m)=1 באשר הבאשר m,k \in \mathbb{N} ותהיינה למה: יהי
                                                                                                                  .H \nsubseteq N_G\left(K
ight) אזי H 
eq K באשר
g+g^{-1}=K עבורו g\in G אוי קיים סילו של G אוי סילו של g+G תת־חבורה סופית ותהיינה G תהא חבורה סופית ותהיינה ותהיינה אוי חבורה סופית ותהיינה משפט סילו השני: יהי
                           (n_p=1)\Longleftrightarrow (H\unlhd G) מסקנה: יהי p אזי תהא H תת־חבורה סופית ותהא p\in\mathbb{P} מסקנה:
y \in Y ולכל g \in G איזי איזי איזי איזי Y \subseteq X ולכל קבוצה ותהא קבוצה ותהא קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה: תהא
                                                                                                                                      g,y \in Y מתקיים
\mathcal{O}\subseteq X שפורה)\Longleftrightarrowר שמורה)\Longrightarrow עבורה הא אזי על אזי על אזי על אזי חבורה הפועלת על אזי חבורה מענה: תהא אזי קבוצה תהא
                                                                                                                                     \mathcal{N} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} o(x)
                       טענה: יהי \alpha עונה אזי \alpha חבורה סופית ונגדיר \alpha \in G \curvearrowright \mathrm{Syl}_n(G) כך אזי \alpha \in G אזי \alpha \in G טענה: יהי \alpha \in G
למה: יהי R וכן H\in R וכן H\in R וכן הינה H\in Syl_p(G) אזי סילו תהא H\leq G תת־חבורה תהא חבורה אזי H\in R
                                                                n_p \equiv 1 \mod p אוי אוי חבורה חבורה G ותהא ותהא אוי יהי השלישי: יהי
                            a_n|m אזי אזי |G|=p^k\cdot m חבורה באשר G ותהא \gcd(p,m)=1 באשר m,k\in\mathbb{N} יהיו יהי p\in\mathbb{P} יהי
                                                                                     n_p|\mathrm{ord}\,(G) מסקנה: יהי p\in\mathbb{P} ותהא חבורה חבורה סופית אזי
```

 $|G||=|G:C_{G}\left( g
ight)$  אזי  $g\in G$  מסקנה: תהא חבורה סופית ויהי

מסקנה משפטי סילו: יהי  $p\in\mathbb{P}$  ותהא חבורה סופית אזי G . באשר  $H\leq G$  סילו של

 $|C_G(k)|=|C_G(h)|$  אזי  $k=ghg^{-1}$  באשר g,h,k ויהיו חבורה G אחי

```
.n_p \equiv 1 \mod p .3
                                                                 H=\langle \pi
angle עבורו \pi\in S_p אזי קיים \pi־מעגל H=p באשר באשר אבורו H\leq S_p ותהא ותהא H\leq S_p
                                                                                                                      (p-1)! \equiv -1 \mod p אזי p \in \mathbb{P} מסקנה משפט ווילסון: יהי
                                                            טענה: יהיו p \in p אזי אזי q \neq 1 \mod p וכן p < q אזי אזי q \in \mathbb{P} ותהא יהיו
                                                                                                G \cong D_p או G \cong C_{2p} אזי אזי p \in \mathbb{P}_{>2} ותהא p \in \mathbb{P}_{>2}
                                                    N_G\left(N_G\left(P
ight)
ight)=N_G\left(P
ight) אזי איי ענה: תהא P\leq G ותהא p\in\mathbb{P} ותהא P\leq G ותהא
                                         g\in A ולכל n\in\mathbb{Z} לכל g^n=ng וכן x\in A לכל -x=x^{-1} וכן ולכל e_A=0 ולכל תהא
אזי g,h\in\prod_{i\in I}G_i לכל לכל (g\cdot h)_i=g_i\cdot h_i חבורות נגדיר אזי ולכל ותהיינה קבוצה ותהיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה וולכל ולכל ולכל וולכל וו
                                                                                                                                                                                                          .(\prod_{i\in I}G_i,\cdot)
                                                                                                  חבורה. \prod_{i\in I}G_i אזי חבורות \{G_i\mid i\in I\} חבורה ותהיינה קבוצה ותהיינה
                                                                                          חבורות אזי אחיצוני: תהא \{G_i \mid i \in I\} חבורת הסכום הישר החיצוני: תהא
                                                                                                                           .\bigoplus_{i\in I}G_n=\left\{g\in\prod_{i\in I}G_i\mid |\{i\in I\mid g_i\neq e_{G_i}\}|\in\mathbb{N}\right\}
G_i\cap\left(igoplus_{j
eq i}G_i
ight)=\{e\} באשר באשר איימת קבורה קיימת קבוצה |I|\geq 2 באשר באשר עבורה קיימת קבוצה עבורה קיימת קבוצה וקיימות באשר איימות וקיימות וקיימות ואיימות באשר פנימי:
                                                                                                                                                                             G = \bigoplus_{i \in I} G_n לכל i \in I לכל
                                                                                                                               הערה: נקרא לחבורת סכום ישר חיצוני חבורת סכום ישר.
                                                                                       \bigoplus_{i\in I}G_n\leq \prod_{i\in I}G_i אזי חבורות אזי \{G_i\mid i\in I\} טענה: תהא קבוצה ותהיינה
                                                                                                                                                      T\left( G
ight) =G אבורת פיתול: חבורה G
                                                                                                                               T\left(G
ight)=\left\{ e
ight\} אבורה לכל G חבורה חסרת פיתול:
                                                                                                                                  טענה: תהא A חבורה אבלית אזי A חסרת פיתול.
                                                                                                                                  G/H אזי H \subseteq G טענה: תהא G חבורה נ"ס ותהא G
                                                                               Gמסקנה: תהיינה G,H,Kוליס), חבורות באשר G\cong H	imes K מסקנה: תהיינה
                                                                                                                                          igoplus_X \mathbb{Z} אזי קבוצה אזי תהא X קבוצה אזי
                                                                X בסיס של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא בסיס של חבורה אבלית חופשית אזי
                                                              \|X\| חבורה אבלית חופשית: תהא אזי קבוצה ותהא אוי חבורה אבלית חופשית אזי אזי אוי דרגה של חבורה אבלית חופשית:
                             x\mapsto e_x כך X כדיס עם בסיס בסיס אזי נשכן בצורה טבעית את X בתוך החבורה האבלית החופשית עם בסיס X
arphi:igoplus_X\mathbb{Z}	o G משפט התכונה האוניברסלית: תהא f:X	o G חבורה ותהא חבורה תהא קבוצה תהא משפט התכונה האוניברסלית: משפט התכונה האוניברסלית:
                                                                                                                                                                       x \in X לכל \varphi(x) = f(x) עבורו
\psi:F	o B משפט תכונת ההרמה: תהא \varphi:A	o B חבורה אבלית חופשית תהיינה A,B חבורה אבליות ויהי
                                                                                                              .arphi\circ\hat{\psi}=\psi עבורו \hat{\psi}:F	o A הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם
                                          A \cong B \oplus A/B אבלית חופשית אזי B < A באשר אבלית ותהא A \cong B \oplus A/B אבלית חופשית אזי
                                                                                         משפט: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי A אבלית חופשית עם בסיס סופי.
                                                                                                A \cong \mathbb{Z}^k עבורו k \in \mathbb{N} מסקנה: תהא אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי קיים
                                                                                                                                      תהא A חבורת פיתול אבלית נ"ס אזי A סופית.
                                                                                                                                                                             משפט: תהא A אבלית נ"ס אזי
                                                                                                                                                                               A \cong A/T(A) \oplus T(A) \bullet
                                                                                                                                                             A/T(A)\cong \mathbb{Z}^k עבורו k\in \mathbb{N} סיים
                                                                                                                                                                                               . סופית T(A) \bullet
                                                      A\cong\mathbb{Z}^k\oplus B עבורם k\in\mathbb{N} מסקנה: תהא A אבלית נ"ס אזי קיימת חבורה אבלית סופית
```

 $qHq^{-1}=K$  עבורו  $q\in G$  אזי קיים  $q\in G$  עבורו של  $q\in G$  עבורו של  $q\in G$  עבורו של 2.

 $G_p = \{x \in G \mid p| \mathrm{ord}\,(x)\}$  אזי  $p \in \mathbb{P}$  חבורה ויהי G חבורה אזי

 $A=igoplus \left\{P\leq A\; \middle|\; \exists p\in \mathbb{P}\left(P\in \operatorname{Syl}_p\left(A
ight)
ight)
ight\}$  מסקנה: תהא אבלית סופית אזי

 $A_p \leq A$  אזי  $p \in \mathbb{P}$  אינת: תהא A חבורה אבלית ויהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי A חבורת־ $A_p$  אזי  $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$  אזי סענה: תהא A אבלית סופית אזי  $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$  אזי חבית אוסי  $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$  אזי A אבלית סופית ויהי A אזי A אבלית סופית ויהי A

טענה: יהי  $n\in\mathbb{N}$  יהי  $a_1\ldots a_{n+1}\in\mathbb{N}$  תהא  $a_1\ldots a_{n+1}\in A$  ויהיו  $a_1\ldots a_{n+1}\in \mathbb{N}$  יהי  $a_1\ldots a_{n+1}\in \mathbb{N}$  עבורם  $a_i \not\equiv 0 \mod p$  וכן קיים  $i \in [n+1]$  וכן קיים  $\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0$ 

טענה: תהא G אבלית ותהא G התב"ש

- A+B=G וכן  $B\cap A=\{e\}$  עבורה  $B\leq G$  קיימת B
- a=a+b עבורם  $b\in B$  וקיים ויחיד  $a\in A$  קיים ויחיד  $g\in G$  עבורה לכל
- . העתקת המנה  $u:G \to G/A$  באשר  $u\circ \varphi = \mathrm{Id}_{G/A}$  עבורו  $\varphi:G/A \to G$  העתקת המנה o
  - $\pi:G o A$  קיימת נשג  $\sigma:G$

 $(A\cong \mathbb{Z}^k/G)$  עבורם  $G<\mathbb{Z}^k$  וקיימת  $k\in \mathbb{N}$  טענה: תהא A אבלית אזי A אבלית אזי איים)

 $\operatorname{ord}\left(q
ight)\in\left\{ 1,p
ight\}$  מתקיים  $q\in G$  מתקיים אזי חבורה  $p\in\mathbb{P}$  אזי חבורה  $q\in G$ 

משפט המבנה לחבורות־p אזי קיים ויחיד  $k\in\mathbb{N}$  יהי יהי אבליות סופית בעלת סופית המבנה לחבורות־p אזי יהי ויחיד אבליות המיים ויחיד אבליות משפט המבנה לחבורות־p אזי קיים ויחיד אבליות משפט המבנה לחבורות־p אוי יהי ויחיד אבליות סופית:  $A\cong igoplus_{i=1}^k C_{p^{n_i}}$  עבורם  $\sum_{i=1}^k n_i=n$  וכן  $i\in [k-1]$  לכל  $n_{i+1}\leq n_i$  באשר באשר  $n_1\ldots n_k\in \mathbb{N}_+$  ויחידים

מסקנה משפט המיון לחבורות אבליות סופיות: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד ווחידים  $k\in\mathbb{N}$  וקיימים ויחידים באשר  $A\congigoplus_{i=1}^k C_{m_i}$  עבורם  $i\in[k-1]$  לכל  $m_i|m_{i+1}$ 

וקיימים  $i\in [k-1]$  לכל  $p_i\leq p_{i+1}$  באשר באשר אבלית סופית אזי קיים ויחיד א קיימים ויחידים אבלית באשר אבלית סופית אזי קיים ויחידים ויחידים אויחידים ויחידים אבלית סופית אזי קיים ויחידים אויחידים אבלית סופית אזי קיים ויחידים אבלית סופית אויחידים אבלית סופית אזי קיים ויחידים אויחידים אבלית סופית אויחידים אויח  $A\cong igoplus_{i=1}^k C_{n_i^{t_i}}$  עבורם  $t_1\dots t_k\in\mathbb{N}$  ויחידים

 $A \cong B$  אזי  $A \oplus C \cong B \oplus C$  מסקנה: תהיינה A,B,C אבליות סופיות באשר

 $A \cong B$  אזי  $A \oplus A \cong B \oplus B$  מסקנה: תהיינה A, B אזי אבליות סופיות באשר

. ציקלית אזי A טופית אזי  $A \leq \mathbb{F}^{\times}$  שדה ותהא  $\mathbb{F}$  יהי מסקנה: יהי

. מסקנה: יהי  $p\in\mathbb{P}$  אזי ציקלית מסקנה:

 $C \cong A/B$  עבורה עבורה איי קיימת אזי קיימת חופית סופית טענה: תהא אבלית סופית ותהא אבלית אזי קיימת

 $\chi:A o\mathbb{S}^1$  קרקטר: תהא A אבלית אזי הומומורפיזם

 $\hat{A} = \{\chi: A o \mathbb{S}^1 \mid$  החבורה  $\chi\}$  קרקטר חבורה חבורה A חבורה הדואלית: תהא

 $.C_n\cong\widehat{C_n}$  אזי  $n\in\mathbb{N}$  טענה: יהי

 $\widehat{A imes B} = \hat{A} imes \hat{B}$  אבליות סופיות אזי A,B טענה: תהיינה

 $A\cong \hat{A}$  מסקנה: תהא A אלבית סופית אזי

 $U(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=\{a\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\mid\exists b\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\ (a\cdot b=1)\}$  אזי  $p\in\mathbb{P}\setminus\{2\}$  יהי יהי  $p\in\mathbb{P}\setminus\{2\}$  יהי

. ציקלית  $U\left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}
ight)$  אזי  $n\in\mathbb{N}$  ויהי  $p\in\mathbb{P}ackslash\left\{2
ight\}$  ציקלית.

 $T\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}}T_p$  משפט גאוס: תהא חבורת פיתול אזי משפט משפט משפט

 $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight)=\left\{rac{k}{p^{n}}\ \middle|\ (n\in\mathbb{N})\wedge\left(k\in\{0,\ldots,p^{n}-1\}
ight)
ight\}$  ההי  $p\in\mathbb{P}$  אזי  $p\in\mathbb{P}$  אזי  $a\star b=(a+b)-\lfloor a+b\rfloor$  כך p כך p אזי  $p\in\mathbb{P}$  אזי  $p\in\mathbb{P}$  אזי  $p\in\mathbb{P}$  .( $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight),\star$ )

. טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$  אזי  $p\in\mathbb{P}$  חבורה

 $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight)\cong\left\{2^{\pi i\cdot rac{k}{p^n}}\;\middle|\;(n\in\mathbb{N})\wedge(k\in\{0,\ldots,p^n-1\})
ight\}$ טענה: יהי  $p\in\mathbb{P}$  איזי מענה:  $p\in\mathbb{P}$  איזי  $p\in\mathbb{P}$  מענה:  $p\in\mathbb{P}$  מענה:

 $a\cdot b=a$  המקיים  $b\in G$  עבורו קיים  $a\in G$  אזר אבלית ויהי חבורה אבלית חבורה אבלית ויהי מתחלק במספר:

a ב־n מתחלק בים מתחלק מתקיים כי $a\in G$  עבורה לכל עבורה לכל  $a\in G$  מתחלק בים מתחלק מתחלק

מסקנה:  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  חליקה.

חליקה. p:D o G הומומורפיזם אזי p:D o G חליקה ויהי שענה: תהיינה p:D o G חבורות אבליותת באשר

 $(i \in I \ )$ סענה: תהא  $(i \in I \ )$ חליקה חבורה אבלית לכל וענה: תהא  $(i \in I \ )$ חליקה לכל חבורה אבלית לכל וענה: תהא חבורה אבלית לכל וענה: תהא וענה ותהא

מסקנה: יהי  $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}\right)$  אזי  $p\in\mathbb{P}$  חליקה.

חבורה מצומצמת: חבורה G עבורה לכל  $H \leq G$  מתקיים כי

וכן  $C\cap B=\{0\}$  באשר באיר קיימת אזי קיימת A אבלית ויהי אבלית ויהי  $B\leq A$  אבלית ויהי  $A = C \oplus B$ 

 $A=D\oplus K$  מסקנה: תהא A אבלית ותהא  $D\leq A$  חליקה אזי קיימת  $K\leq A$  באשר  $C\leq A$  וכן

 $A=D\oplus R$  סענה: תהא A אבלית אזי קיימת D< A חליקה וקיימת R< A מצומצמת באשר  $D\cap R=\{0\}$  וכן

```
טענה: תהא D אבלית חליקה אזי T\left(D\right) חליקה.
```

מסקנה: תהא A אבלית אזי קיימת  $A \leq A$  מצומצמת קיימת  $A \leq B$  חסרת פיתול באשר  $B \leq A$  חסרת פיתול באשר  $A \in A$  חסרת פיתול באשר  $A = D \cap B = A$  וכן  $A = D \cap B \cap B = A$  וכן  $A = D \cap B \cap B \cap B \cap B \cap B$ 

 $.F \cong \bigoplus_I \mathbb{Q}$  חבורה עבורה אזי קיימת פיתול חסרת חליקה חבורה אבלית חבורה F משפט: משפט

 $T\cong\bigoplus_I\mathbb{Z}\left(p^\infty
ight)$  חבורת עבורה I חבורת אזי קיים אבלית אזי קיים אבלית חליקה אבלית חבורת משפט: תהא

 $.[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh$  אזי  $g,h\in G$ ויהיו חבורה G תהא קומוטטור: תהא

 $.([g,h]=e)\Longleftrightarrow (gh=hg)$  אזי  $g,h\in G$  חבורה ויהיו מסקנה: תהא

 $I[I+e_{i,j},I+e_{j,k}]=e_{i,k}$  אזי  $i,j,k\in[n]$  ויהיו  $n\in\mathbb{N}$  טענה: יהי יהי

 $I[I+e_{i,j},I+e_{j,\ell}]=I$  שונים אזי  $i,j,k,\ell\in[n]$  ויהיו  $n\in\mathbb{N}$  טענה: יהי

Av=v עבורו עבורן ייחיד אזי קיים אזי אויילר: תהא  $A\in \mathrm{SO}\left(3
ight)$  אזי אויילר