```
. שהינה דו־מימדית \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n משטח: יריעה
                                                                                                                             . מימדית n-1 שהינה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מימדית מימר n-1
                                                                                                                                                                    . טענה: \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n הינה היפר־משפט חלק\mathbb{S}^n
                                                                                                                                                       הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.
יריעה לכל \mathcal{M}\cap\mathcal{U}_{lpha} אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_{lpha} פתוחות עבורן פתוחות לכל אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M} וכן \mathcal{M} יריעה לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                                                                      .(\alpha \in \Lambda
                                                              (יריעה), אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (בורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} יריעה) קיימת סביבה x \in \mathcal{M} יריעה), יריעה
                   עבורה r\in C^m (G,\mathbb{R}^n) אני פתוחה אזי G\subseteq\mathbb{R}^k מימדית ותהא T־יריעה T-יריעה T-יריעה T-יריעה ארייריעה ארייריעה פרמטריזציה: תהא
                                                                                                                                                                                                                            .r(G) = \mathcal{M}
       \operatorname{Lank}\left(\mathcal{D}_{r}\left(x
ight)
ight)=k מתקיים x\in G מתקיים עבורה לכל r\in C^{1}\left(G,\mathbb{R}^{n}
ight) פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית: תהא
                                                           f^{-1}\in C\left(B,A
ight) הפיכה עבורה f\in C\left(A,B
ight) אזי אזי B\subseteq\mathbb{R}^{m} ותהא A\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                       . פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית r:G	o A שהינה הומאומורפיזם. פתוחה אזי פרמטריזציה ותהא מובה: תהא A\subseteq\mathbb{R}^n שהינה הומאומורפיזם.
וכן קיימות \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha עבורן ביחס ל־\mathcal{M} עבורן קיימות (קיימות קיימות יריעה) אזי אזי \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי אזי (\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha) פתוחות ביחס ל־\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי (\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha) פתוחות ביחס ל־
                                             \mathcal{U}_{lpha}\left(G_{lpha}
ight)=\mathcal{U}_{lpha} עבורן r_{lpha}\subseteq C^{m}\left(G_{lpha},\mathbb{R}^{n}
ight) טובות טובות פרמטריזציות פרמטריזציות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות \left\{G_{lpha}\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{k}
ight)
                          . עבורה \mathcal{M}\cap\mathcal{U} בעלת פרמטריזציה טובה) אזי (\mathcal{M} יריעה) אזי אזי (\mathcal{M} יריעה) אזי אזי \mathcal{M}\in\mathbb{R}^n אזי אזי (\mathcal{M} יריעה) אזי אזי (מכל
(f_1\dots f_{n-k})\,(x)=0 המקיימת x\in\mathcal{U} עבורה לכל עבורה אזי \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית:
                                                                                                                                                                                               מתקיים כי \{\nabla f_i(x)\} בת"ל.
עבורו x\in\mathcal{U} עבורו (לכל איזי איזי אויאות אויאות אויאות איזי איזי איזי f_1\dots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורו פתוחה תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית
                                                                                                                       . Grank \left(\mathcal{D}_{\left(f_{1}\dots f_{n-k}\right)}\left(x
ight)
ight)=n-k מתקיים \left(f_{1}\dots f_{n-k}
ight)\left(x
ight)=0
                              תיאלית מערכת משוואות רגולרית: תהא מערכת משוואות רגולרית: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k מימדית ותהא מימדית משוואות רגולרית: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n משוואות רגולרית:
                                                                                                                                          \{(f_1\dots f_{n-k})=0\}=\mathcal{M} עבורה \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                  .(לכל \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n בעלת הצגה סתומה רגולרית) קיימת סביבה עבורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי (לכל
                                                                                  \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\} אליפסואיד: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי a,b,c\in\mathbb{R} טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\}
                                                                                \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} אזי a,b,c\in\mathbb{R} היפרבולואיד דו־יריעתי: יהינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                                                                                .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} אזי \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1
ight\} אזי .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\} טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                               f(t,
ho)=egin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(
ho) \\ \gamma_1(t)\sin(
ho) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} המוגדרת f:I	imes(0,2\pi)	o\mathbb{R}^3 עקומה אזי \gamma:I	o(0,\infty)	imes\mathbb{R} המוגדרת
טענה משטחי סיבוב: תהא f אזי משפט הסיבוב \gamma עקומה עבורה \gamma פרמטריזציה טובה של \gamma:I 	o (0,\infty) 	imes \mathbb{R} אזי משפט הסיבוב
                                                                                                                                                                                            \operatorname{Im}(f) פרמטריזציה טובה של
                                                                                                                                                                                             \mathbb{S}^1 טורוס: משטח הסיבוב של
                                                                                                                                                                                           \mathbb{T}^2 סימון: נסמן טורוס בעזרת
```

עבורה לכל $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וכן קיימת סביבה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וכן קיימת של C^m

יריעה חלקה x של \mathcal{O} של ביבה סביבה $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת עבורה לכל $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל איימת $x\in\mathcal{M}$

יריעה אנליטית x-מימת סביבה \mathcal{O} של xוכן קיימת עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ פיימת איימת $x\in\mathcal{M}$ עבורה לכל אוכן $x\in\mathcal{M}$

. עבורה על קואורדינטות עד כדי פרמוטציה של עבורה $\Gamma_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ עבורה $f \in C^m \left(G, \mathbb{R}^{n-k} \right)$

עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עבורה $f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$. $C^\omega\left(A,B\right)=\{f:A o B\mid$ עד מקומית מקומית $f\}$ אנליטית אזי f

 $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ שהינה חד־מימדית. $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$

עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ אנליטית מקומית עבורה $f:G o\mathbb{R}^{n-k}$

```
\forall x \in \mathcal{M}. (|N\left(x
ight)| = 1) \land (N\left(x
ight) \perp x) המקיימת N \in C\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right) עבורו קיימת \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n משטח אוריינטבילי: משטח
                                                                                                                                                                         למה: טבעת מוביוס אינו משטח אוריינטבילי.
                                                                                                                                     . יריעה דו־מימדית אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} יריעה דו־מימדית טענה: תהא
                                                                               טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.
                                                                                                  . טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.
                                                                                                                                        a	imes b = \left(egin{array}{l} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_1b_1 \end{array}
ight) אזי a,b\in\mathbb{R}^3 יהיו
                                                                                                                                              (u	imes v)\perp u וכן (u	imes v)\perp v אזי אזי u,v\in\mathbb{R}^3 וכן טענה: יהיו
                                                                                                                                       (u \times v = 0) \Longleftrightarrow (u \in \mathrm{span}\,(v)) אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                                                     \det(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 > 0 אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיי
                                                                                                                                       |v \times u| = \|v\| \|u\| \sin\left(\angle\left(v,u\right)\right) אזי u,v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
וכן קיים אוכן A\subset \mathcal{U} סביבה המקיימת על \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n עבורה איימת \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n סביבה המקיימת איים אוכן קיים A\subset\mathcal{U}
                                                                                                                        f(A) = f(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}) דיפאומורפיזם עבורו f: \mathcal{U} \to \mathcal{V}
עבורה P מתקיימת עבורה עבורה פרידיקט עבורה לכל עבורה U \subset \mathbb{R}^n קיימת סביבה A \subset \mathbb{R}^n עבורה על
                                                                                                                                                                                                                                                  A \cap \mathcal{U}
                                                                                                                                                                        משפט: תהא k\in\mathbb{N}_+ ויהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n התב"ש
                                                                                                                                                                                                          .יריעה k־מימדית \mathcal{M}
                                                          . עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות עד f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}
ight) של פונקציה של מקומית גרף של פונקציה של פונקציה אויך של פונקציה של פונקציה של פונקציה אויך של פונקציה של 
                                                                                                                                           r:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^n מקומית בעלת פרמטריזציה טובה \mathcal{M} •
                                                                                                                      \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^k	o\mathbb{R} מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית \mathcal{M}
                                                                                                                                         \mathbb{R}^{k}- מקומית ניתנת ליישור על אידי דיפאומורפיזם ל\mathcal{M}
מסקנה: תהא W\subseteq\mathbb{R}^n של (a,0_{n-k}) של וקיים דיפאומורפיזם קיימת סביבה r:G	o\mathbb{R}^n של וקיים דיפאומורפיזם
                                                                                                                                                                          .s_{\restriction_{W\cap\left(G\times0_{n-k}\right)}}=rעבורו s:W\rightarrow s\left(W\right)
                                                                                                                                             הערה: יריעה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.
                                                       \mathcal{U}=W\cap A פתוחה עבורה עבורה אזי W\subseteq\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזי A\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי פתוחה יחסית:
                                                          \mathcal{U}=W\cap A סגורה עבורה אזי W\subset\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזי A\subset\mathbb{R}^d אזי אזי סגורה סגורה סגורה אזי
                                                   (\forall x \in \mathcal{U}. \exists r > 0.B_r(x) \cap A \subseteq \mathcal{U}) \Longleftrightarrow (Aט פתוחה ביחס שפט: תהא \mathcal{U} \subseteq A ותהא ותהא \mathcal{U} \subseteq A אזי (\mathcal{U} \subseteq A
                                                         \mathcal{U}\in\{A,\varnothing\} פתוחה מתקיים A\subset\mathbb{R}^d מתקיים A\subset\mathbb{R}^d עבורה לכל קבוצה קשירה:
                             \mathcal{U},\mathcal{U}\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית ל־A\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי (A\subseteq\mathbb{R}^d אזי לא קיימות ל-A\subseteq\mathbb{R}^d פתוחות יחסית ל-
פתוחה f^{-1}(\mathcal{U}) פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי f אזי f:A\to B אוי מענה: תהיינה A,B\subseteq\mathbb{R}^d פתוחה יחסית ל־A,B\subseteq\mathbb{R}^d
                                                                                                                                                                                                                                       (Aיחסית ל־A).
arphi^{-1} וכן פתוחה arphi פתוחה יריעה arphi:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^k החסית ותהא שפה: תהא יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה איריעה איריעה איריעה מימדית מחחה יחסית ותהא
                                                                                                                                                                                                    (\mathcal{U}, \varphi) אזי טובה טובה פרמטרזיציה
                                                                   \mathcal{A} אטלס: תהא \mathcal{A}=\mathcal{A} יריעה \mathcal{A}־מימדית אזי קבוצה של מפות אזי איזי איזי \mathcal{A}\subseteq\mathbb{R}^n אטלס:
                . סענה: תהא r(\mathcal{U}), אזי r(\mathcal{U}) אזי r(\mathcal{U}) אפה. איניה: תהא r(\mathcal{U}) אזי r(\mathcal{U}) איזי r(\mathcal{U}) מפה.
                                                            arphi_{1,2}=arphi_2\circarphi_1^{-1} המוגדרת arphi_{1,2}:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^k מפות אזי (\mathcal{U}_1,arphi_1), (\mathcal{U}_2,arphi_2) המינה היינה
                                              i\in\{1,2\} טענה: תהיינה arphi_i\left(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2
ight) מפות ותהא מפות ותהא מפות ותהא מפות מפות A\subseteq\mathbb{R}^k מפות ותהא
                                                                                   . פתוחה אזי arphi_{1,2} דיפאומורפיזם מפות ותהא A\subseteq\mathbb{R}^k מפות ותהא מפות (\mathcal{U}_1,arphi_1),(\mathcal{U}_2,arphi_2)
C^{lpha} פונקציה C^{lpha} מתקיים כי \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n עבורה לכל מפה \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n מיריעה: תהא \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n יריעה
                                                                                       C^{lpha} אזי הינה לכל היותר הינה אזי f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^m אזי אזי C^{lpha} איי ריעה עניח כי
עבורו \mathcal{M} של \{(\mathcal{U}_lpha,arphi_lpha)\}_{lpha\in\Lambda} יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזיי \mathcal{M}\in\mathcal{M} אזיי \mathcal{M}\in\mathbb{R}^n איי יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזיי ותהא
                                                                                                                                                                                                 .(\alpha \in \Lambda \ לכל C^{\alpha} הינה f \circ \varphi^{-1}
                                                                                                                                    . אטלס\mathcal{M}יריעה k־מימדית אזי קיים ל\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אטלס\mathcal{M}
                                                                                                                                          \dim\left(\mathcal{M}
ight)=k יריעה k־מימדית אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
עבורה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעה איריעה \mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m יריעה \mathcal{M}'\subseteq\mathcal{R}^m יריעה \mathcal{M}'\subseteq\mathcal{R}^m יריעה
                                                                                                                                                                                                              .C^lpha הינה f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^m
```

```
g\circ f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}'') אזי g\in C^{lpha}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'') ותהא f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}') אזי יריעות תהא f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}') יטענה: תהיינה
 של p של p של p\in\mathcal{M} של אזיי p\in\mathcal{M} של p\in\mathcal{M} של אזיי של p\in\mathcal{M} של הינה
                                                                                                                                                                                                             .(g_{
estriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}=f המקיימת g\in C^{lpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)
מתקיים כי \psi \circ f \circ \varphi^{-1} מתקיים כי
                                                                           f,f^{-1}\in C^lpha עבורה f הפיכה וכן f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעות אזי \mathcal{M},\mathcal{M}' אינה יכר וכן: \mathcal{M}
                                                                                                                             \dim\left(\mathcal{M}
ight)=\dim\left(\mathcal{M}'
ight) איריעות דיפאומורפיות אזי \mathcal{M},\mathcal{M}' מסקנה: תהיינה
                                   סטענה: תהא \mathcal{U},\mathcal{V} יריעה \mathcal{U},\mathcal{V} סביבות של p\in\mathcal{M} ותהיינה וונה יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n סטענה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathcal{M} סביבות של
                                                                                                                                                                                                          \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)
                                                 יריעה k סביבה של g טחביבה מפר מפרה באשר M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזי M\subseteq\mathbb{R}^n ותהא
                                                                                                                                                                                                                                   T_{p}\left(\mathcal{M}\right) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)
                                                                                                                     \dim\left(T_p\left(\mathcal{M}
ight)
ight)=\dim\left(\mathcal{M}
ight) אזי p\in\mathcal{M} יריעה ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי תהא
                                                                                                                                                            \dot{\gamma}=rac{d\gamma}{dt} אזי C^1 מסילה \gamma:(a,b)	o \mathcal{M} אהירות: תהא
                                                                                                                                                      \dot{\gamma}\left(t
ight)\in T_{\gamma\left(t
ight)}\left(\mathcal{M}
ight) אזי C^{1} מסילה \gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathcal{M} טענה: תהא
                   T_p\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{\dot{\gamma}\left(0
ight)\mid\left(\gamma\in C^1\left(\left(-arepsilon,arepsilon
ight),\mathcal{M}
ight)
ight)\wedge\left(\gamma\left(0
ight)=p
ight)
ight\} אזי p\in\mathcal{M} אזי p\in\mathcal{M} יריעה M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה
\gamma_i\left(0
ight)=p טענה: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא p\in\mathcal{M} תהא p\in\mathcal{M} תהא תהיינה f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) תהא
                                                                                                                                                                     \left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0
ight)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}\right)\right)\left(0
ight) אזי \dot{\gamma}_{i}\left(0
ight)=v וכן
\mathcal{D}_p f: T_p\left(\mathcal{M}
ight) 	o T_{f(p)}\left(\mathcal{M}'
ight) אזי f \in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p \in \mathcal{M} ותהא יריעות: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא
                                                 \dot{\gamma}\left(0
ight)=v וכן \gamma\left(0
ight)=p המקיימת \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)
ightarrow\mathcal{M} עבור מסילה עבור עבור \left(\mathcal{D}_{p}f
ight)\left(v
ight)=\left(rac{d}{dt}\left(f\circ\gamma
ight)
ight)\left(0
ight)
                                                                             . טענה: תהיינה \mathcal{D}_n f אזי f \in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}') ותהא p \in \mathcal{M} העתקה לינארית. תהיינה
                                                      משפט כלל השרשרת: תהיינה M, \mathcal{M}', \mathcal{M}'' יריעות תהא f \in C^{lpha}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') יריעות תהא יריעות תהא
                                                                                                                                                                                                                             \mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right) = \mathcal{D}_{f(p)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)
                                                                  \mathcal{D}_{p}f\left(v
ight)=\mathcal{D}_{p}\left(f
ight)\cdot v אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעות תהא \mathcal{M},\mathcal{M}' מסקנה:
                                                          טענה: תהא p \in \mathcal{M} יריעה תהא עבור סביבה של הצגה סתומה ותהא \{F=0\} ותהא ותהא p \in \mathcal{M} יריעה יריעה אזיי יריעה אזיי
T_{p}\left(\mathcal{M}
ight)=\operatorname{span}\left(\left\{ 
abla F_{1}\left(p
ight),\ldots,
abla F_{n-k}\left(p
ight)
ight\}^{\perp}
ight) סענה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^{n} יריעה תהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא
                                                                                                                                                                                                                                                                T_{n}(\mathcal{M}) בסיס של
                                                                            T_p\left(\mathcal{M}
ight) של הסטנדרטי הבסיס הסטנדרטי להיות \left\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_1
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_k
ight)
ight\} הערה: נגדיר את
(\mathcal{V},\psi) מפה ב־\mathcal{M} באשר \mathcal{U} סביבה של p\in\mathcal{M} תהא p\in\mathcal{M} מפה ב־\mathcal{M} באשר p\in\mathcal{M} סביבה של p\in\mathcal{M} אזי p\in\mathcal{M} אזי p\in\mathcal{M} אזי p\in\mathcal{M} תהא p\in\mathcal{M} תהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} יריעה תהא p\in\mathcal{M} יריעה תהא
                          \mathcal{D}_p f = \left(\mathcal{D}_p g\right)_{\restriction_{T_p(\mathcal{M})}} אזי g_{\restriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}} = f וכן p ש הביבה של g וכן g הוא v \in T_p(\mathcal{M}) ותהא f \in C^{\alpha}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^m) אזי f \in C^{\alpha}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^m) טענה: תהא f \in C^{\alpha}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^m) מפה בסביבה של g ותהא g \in \mathcal{L}_v f = \mathcal{D}_v f מפה בסביבה של g \in \mathcal{L}_v f = \mathcal{D}_v f מפה בסביבה של g \in \mathcal{L}_v f = \mathcal{D}_v f \in \mathcal{L}_v f
                                                                                         v\perp T_p\left(\mathcal{M}
ight) עבורו v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} אזי p\in\mathcal{M} אל־משטח על־משטח על־משטח v\in\mathbb{R}^n אזי
                                                    \|v\|=1 עבורו v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} איז וקטור נורמל p\in\mathcal{M} עבורו M\subseteq\mathbb{R}^n עבורו על יחידה: יהי
טענה: יהי p \subseteq \mathcal{N} אזי איי וקטור נורמל יחידה וענה: יהי p \in \mathcal{M} על־משטח תהא ועהא על־משטח p \in \mathcal{M} ותהא וענה: יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                  ב-p.
     p \in \mathcal{M} וקטור נורמל יחידה ל\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, 1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^2}} אזי p \in \mathcal{M} אזי p \in \mathcal{M} וקטור נורמל יחידה ל\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יהי יהי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n וקטור נורמל יחידה ל\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יהי יהי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n וקטור נורמל יחידה ל\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n מכפלה מצולבת: יהיו v_{n-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det \begin{pmatrix} (v_1)_1 & \ldots & (v_{n-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{i-1} & \ldots & (v_{n-1})_{i-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & & \ddots \end{pmatrix} e_i אזי v_1 \ldots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n מכפלה מצולבת: יהיו
```

$$\Gamma(v_1\dots v_m)=\detegin{pmatrix}\langle v_1,v_1
angle & \dots & \langle v_1,v_m
angle \ dots & dots \ \langle v_m,v_1
angle & \dots & \langle v_m,v_m
angle \end{pmatrix}$$
 אזי $v_1\dots v_m\in\mathbb{R}^n$ אזי $v_1\dots v_m\in\mathbb{R}^n$ דטרמיננטת גראם: יהיי

- $v_1 imes \dots imes v_{n-1} \perp v_i$ מתקיים $i \in [n-1]$ לכל
 - $||v_1 \times \ldots \times v_{n-1}|| = \sqrt{\Gamma(v_1 \ldots v_{n-1})} \bullet$
 - $\det(v_1 \times ... \times v_{n-1}, v_1, ..., v_{n-1}) \ge 0$ •

p נורמל ל־ $\frac{\partial r}{\partial x_1} imes \dots imes \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ אזי של אזי פרמטריזציה פרמטריזציה ותהא אזי $p \in \mathcal{M}$ וקטור נורמל ל־ $p \in \mathbb{R}^n$ אזי יהי $\overline{\mathcal{U}}$ באשר \mathcal{M} על \mathcal{M} על $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ לינארית עבורה לכל מפה $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ אופרטור דיפרנציאלי: תהא אזי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי . חלקות. a_{α} וכן $m\in\mathbb{N}$ עבור $\mathcal{D}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(x)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{k}\\|\alpha|\leq m}}a_{\alpha}\left(x\right)\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(x)$ עבור $m\in\mathbb{N}$

שדה וקטורי $v\left(p\right)\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ וכן לכל מפה $v\left(p\right)\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה $v:\mathcal{M}\to\bigcup_{p\in\mathcal{M}}T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי אזי יריעה אזי אזי יריעה אזי אזי יריעה אזי אזי יריעה יריעה אזי יריעה אזי יריעה $.C^{m}$ העתקה $x \mapsto \mathcal{D}_{x}\varphi\left(v\left(x\right)\right)$

סענה: תהא $\mathcal{L}_v\left(f
ight)(x)=L_{v(x)}\left(f
ight)$ הינה המוגדרת $L_v:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי חלק אזי חלק אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה

 $\operatorname{supp}\left(f
ight)=\overline{\left\{ x\in\mathcal{M}\mid f\left(x
ight)
eq0
ight\} }$ אזי $f\in C\left(\mathcal{M}
ight)$ תומך: תהא

 $.C^{\infty}_{C}\left(\mathcal{U}
ight)=\{f\in C^{\infty}\left(\mathcal{U}
ight)\mid$ קומפקטית supp $(f)\}$ פתוחה אזי $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ יריעה ותהא \mathcal{M}

 $f_{{{
brace}} u}=g_{{{
brace}} u}$ עבורן $f,g\in C_C^\infty$ פתוחה ולכל עבורה לכל עבורה לכל $L:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ עבורן אזי \mathcal{M} יריעה אזי אופרטור מקומי: תהא $L\left(f
ight)_{
estriction_{\mathcal{U}}}=L\left(g
ight)_{
estriction_{\mathcal{U}}}$ מתקיים

 $.\partial^{lpha}f=rac{\partial^{|lpha|}}{\partial x^{lpha}}\left(f
ight)$ אאי $lpha\in\mathbb{N}^{k}$ ותהא $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ אאי

 $\|f\|_{W,n}=\sup_{|lpha|< n}\|(\partial^{lpha}f)\left(x
ight)\|$ אזי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}
ight)$ פתוחה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ אחדרה: תהא

טענה: תהא $|lpha|\leq n$ לכל $(\partial^lpha f)(x)=0$ אזי קיימת $x\in\mathcal{W}$ תהא $f\in C^\infty(\mathcal{W})$ ויהי ויהי $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^k$ אזי קיימת עבורה $g \in C^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ וכן $\delta \in \left(0, \varepsilon\right)$

- $.g_{\restriction_{B_{\delta}(x)}} = 0 \bullet$
- $g_{\upharpoonright_{\mathcal{W}\backslash B_{\delta}(x)}}^{2} = 0 \bullet$
- $.\|f-g\|_{W,n}<\varepsilon \ \bullet$

 $oxed{a}_{lpha}(lpha)=\prod_{i=1}^kinom{lpha_i}{eta_i}$ אזי $lpha,eta\in\mathbb{N}^k$ אזי יהיו

משפט פיטרה: תהא $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ ותהא יריעה ותהא \mathcal{M} יריעה ותהא

- אופרטור מקומי. L
- .supp $(L(f)) \subseteq \text{supp}(f)$ מתקיים $f \in C^{\infty}(\mathcal{M})$
 - אופרטור דיפרנציאלי. L

x סביבה של $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ אזי קיימת $x\in\mathcal{V}$ אזי מקומי ותהא אופרטור לינארי $L:C^\infty(\mathcal{V}) o C^\infty(\mathcal{V})$ סביבה של $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$

וכן $n\in\mathbb{N}$ פתוחה עבורה קיימים $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ פתוחה אופרטור לינארי אופרטור $L:C^\infty\left(\mathcal{V}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{V}
ight)$ פתוחה יהי עבורה קיימים מענה: L אויי אופרטור דיפרנציאלי מסדר $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \leq C \, \|f\|_{\mathcal{W},n}$ מתקיים מחדר $f \in C_C^\infty\left(\mathcal{W}\right)$ אויי עבורם לכל C>0

עבורן $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathbb{R}^n
ight)$ אזי קיימות של X אזי קיימות אויהי ויהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן $X\subseteq\mathbb{R}^n$

- $0 \le \rho_i \le 1$ מתקיים $i \in \mathbb{N}$ •
- .supp $(\rho_i)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$ עבורו $\alpha\in\Lambda$ קיים $i\in\mathbb{N}$ •
- $\{i\in\mathbb{N}\mid
 ho_i(\mathcal{W})
 eq 0\}$ ו $\in\mathbb{N}$ עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פיימת סביבה פתוחה $x\in X$ לכל
 - $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}\left(x\right)=1$ מתקיים $x\in X$ לכל •

. אופרטור דיפרנציאלי אופרטור לינארי מקומי אזי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}
ight) o C^{\infty}\left(\mathcal{V}
ight)$ אופרטור אופרטור דיפרנציאלי פתוחה על פתוחה ויהי

עבורן $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי קיימות X של \mathcal{M} כיסוי פתוח כיסוי $X\subseteq\mathcal{M}$ ויהי ויהי אויהי $X\subseteq\mathcal{M}$ איזי קיימות אזי יריעה תהא

- $0 < \rho_i < 1$ מתקיים $i \in \mathbb{N}$ •
- .supp $(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$ עבורו $\alpha \in \Lambda$ קיים $i \in \mathbb{N}$ לכל

- $|\{i\in\mathbb{N}\mid
 ho_i\left(\mathcal{W}
 ight)
 eq0\}|\in\mathbb{N}$ עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ סביבה פתוחה $x\in X$ לכל
 - $\sum_{i\in\mathbb{N}}
 ho_{i}\left(x
 ight)=1$ מתקיים $x\in X$ לכל

 $\Pi\left(v_1\dots v_k
ight)=\left\{\sum_{i=1}^k t_i v_i\mid orall i\in [k]. t_i\in [0,1]
ight\}$ אזי $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$ מקבילון: יהיו $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$ אזי $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$ נפח מקבילון: יהיו

טענה: יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^k$ אזי

- $\operatorname{Vol}_{k}\left(\left(\begin{smallmatrix}v_{1}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right),\ldots,\left(\begin{smallmatrix}v_{k}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right)\right) = \left|\det\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\right| \bullet$
- $\operatorname{Vol}_k\left(Tv_1,\ldots,Tv_k\right)=\operatorname{Vol}_k\left(v_1,\ldots,v_k\right)$ אזי $T\in O\left(n\right)$ תהא

זניחה $\varphi\left(E\cap\mathcal{U}\right)$ מתקיים כי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אניחה ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אניחה ביחס ליריעה: תהא

(לכל $(\mathcal{M}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$) איזי אזי $E \subseteq \mathcal{M}$ אזי ותהא \mathcal{M} ותהא אזי אטלס של $\{(\mathcal{U}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$ יריעה \mathcal{M} ־מתקיים כי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ זניחה ב־ \mathbb{R}^k .

 \mathcal{M} טענה: תהא $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ אזי אזי ליחות ביחס ל $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}
ight)$ זניחה ביחס ל $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אניחות יריעה ותהיינה

 \mathcal{M} טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של

 $B_f=\{x\in\mathcal{M}\mid x$ אינה רציפה על $f\}$ אזי $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$ יריעה ותהא יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי אינה רציפות: תהא

עבורה $f:\mathcal{M} o \mathbb{R}$ יריעה אזי אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה

- .חסומה f ullet
- קומפקטי. $\sup (f)$
- \mathcal{M} זניחה ביחס ל־ B_f

 \mathcal{M} יריעה אזי $\mathbb{1}_E$ עבורה על אינטגרבילית יריעה: תהא יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אינטגרבילית אונטגרבילית אונטגרבילית

 $arphi\left(E
ight)$ טענה: תהא $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי שפה ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ מפה ותהא מפה ($\mathcal{U},arphi$) מפה ז'ורדן ב־ \mathcal{M} אזי מדידה ז'ורדן ב־ \mathcal{M} : מדידה ז'ורדן ב- \mathcal{M}

 $\operatorname{supp}(f)\subseteq\mathcal{U}$ אבורה (\mathcal{U},φ) עבורה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית וכן קיימת מפה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה \mathbb{R}^n נוחה. $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה \mathbb{R}^n נוחה.

 $u_i\in\mathbb{N}$ נוחה לכל \mathcal{U}_i נוחה לכל $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ של $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$ של אוי קיים אטלס בן־מנייה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ איריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה

מסקנה: תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן איי קיימות $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן איי קיימות $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן ביימות איינטגרביליות ואינטגרביליות וא

אינטגרבילית רימן $f:\mathcal{M} o \mathbb{R}$ ותהא $G\subseteq \mathbb{R}^k$ ותהא $G\subseteq \mathbb{R}^k$ אינטגרבילית פרמטריזציה טובה $f:\mathcal{M} o \mathbb{R}$ ותהא $G\subseteq \mathbb{R}^k$ אינטגרבילית רימן $.\int_{\mathcal{M}} f = \int_G \left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot \sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r\right)^T\cdot \mathcal{D}_q\left(r\right)\right)}\mathrm{d}q$ אזי

מסקנה: תהא $M \to \mathbb{R}$ ותהא $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ותהא $G \subseteq \mathbb{R}^k$ אינטגרבילית טובה טובה עובה באשר $f: M \to \mathbb{R}$ ותהא $G \subseteq \mathbb{R}^k$ אינטגרבילית רימן $\int_{\mathcal{M}} f = \int_G \left(f \circ r \right) \left(q \right) \cdot \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \dots \frac{\partial r}{\partial x_k} \right)} \mathrm{d}q$ אזי אי

 $R_{\mathcal{U}}=\{f:\mathcal{M} o\mathbb{R}\mid(\mathrm{supp}\,(f)\subseteq\mathcal{U})\wedge(\mathrm{prop}\,(f)\subseteq\mathcal{U})$ מפה אזי $f)\}$ מפה אזי f מפה אזי \mathcal{M} מרחב לינארי. \mathcal{M} מרחב לינארי. \mathcal{M} מרחב לינארי. מענה: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא \mathcal{U},φ) מפה אזי \mathcal{M} מרחב לינארי.

. מסקנה: תהא $\int_{\mathcal{M}}:R_{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}$ אזי מפה ($\mathcal{U},arphi$) הינו פונקציונל לינארי תהא מסקנה: תהא

טענה: תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות ואינטגרבילית $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן $\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{M}} g_i$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אזי $f=\sum_{i=1}^mg_i$ וכן $f=\sum_{i=1}^nf_i$ אזי $f=\sum_{i=1}^nf_i$

עבורן אינטגרביליות ואינטגרביליות $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן אינטגרביליות אינטגרביליות $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות האינה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות רימן עבורן $\int_{\mathcal{M}} f=\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i$ איז אינטגרביליות רימן עבורן $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$

 $R\left(\mathcal{M}
ight)=\{f:\mathcal{M}
ightarrow\mathbb{R}\mid$ סימון: תהא $f\}$ יריעה אזי יריעה אזי אינטגרבילית דימן

טענה: תהא \mathcal{M} יריעה אזי $R\left(\mathcal{M}\right)$ מרחב לינארי.

. מסקנה: תהא $\int_{\mathcal{M}}:R\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow\mathbb{R}$ יריעה אזי יריעה הינו פונקציונל לינארי

```
\int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}\mathrm{dVol}_{k} אזי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) יריעה ותהא \mathcal{M} יריעה ותהא
\bigcup_{i=1}^\infty E_i = \mathcal{M} יריעה איזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יריעה איזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n מיצוי ז'ורדן של יריעה:
אינטגרל אם קיים בורו לכל מיצוי ז'ורדן של L\in\mathbb{R} זניחה אזי אם היים באשר f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} יריעה ותהא אינטגרל לא אמיתי: תהא
                                                                                 \int_{\mathcal{M}}f=L אזי אוו\lim_{i	o\infty}\int_{E_i}f\cdot 1\!\!1_{E_i}=L מתקיים של אוי (E_i)_{i=1}^\infty אזי סגורות
\int_{\mathcal{M}}f= טענה: תהא \mathcal{M} של (E_i)_{i=1}^\infty יריעה ותהא אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות אזי לכל f\in R\left(\mathcal{M}
ight) של \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה ותהא
                                                                                                                                                                                               \lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{M}}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}
                                                                                                    \operatorname{Vol}_k\left(\mathcal{M}
ight)=\int_{\mathcal{M}}1 אזי אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה: תהא יריעה: תהא
                                                                                                                                       \mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing עבורן (\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi) מפות זרות: מפות
טענה: תהיינה f_{\uparrow_{\mathcal{M}\setminus(S\cup(\biguplus_{i=1}^n\mathcal{U}_i))}}=0 מפות זרות מפות אויינה f:\mathcal{M}\to\mathbb{R} אניחה ותהא אויינה f:\mathcal{M}\to\mathbb{R} מפות זרות בזוגות על מענה:
                                                                                                                                                                                              \int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{U}_i} f
                                        . Length (\gamma)=\lim_{m	o\infty}\sup_{a=t_0<\ldots< t_m=b}\sum_{i=1}^m\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\| איי \gamma\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right) . The suppose \gamma\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right) . Length \gamma\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)
```

.Length $(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'\left(t
ight)\|\,\mathrm{d}t$ אוי $\gamma\in C^1\left(\left[a,b
ight],\mathbb{R}^n
ight)$ טענה: תהא

.Length $(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_1\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי אוי יריעה חד־מימדית יריעה \mathcal{M} יריעה \mathcal{M} .Length $(\mathcal{M})=$ Length (γ) יריעה טובה אזי $\gamma:(a,b) o \mathcal{M}$ ותהא \mathcal{M} יריעה חד־מימדית ותהא \mathcal{M}

. Length $(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'\left(t\right)\right)^2}\mathrm{d}t$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ אהי מסקנה: תהא

 $\|\gamma'\|=\sqrt{r^2+r'}$ אזי $\gamma\left(t
ight)=\left(r\left(t
ight)\cos\left(heta\left(t
ight)
ight),r\left(t
ight)\sin\left(heta\left(t
ight)
ight)
ight)$ כך $\gamma:\left(a,b
ight) o \mathbb{R}^2$ נגדיר $r, heta\in C^1\left(\mathbb{R}
ight)$ מסקנה: תהיינה .Area $(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_2\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי אוי חד־מימדית יריעה יריעה \mathcal{M} יריעה \mathcal{M}

.Area $(\mathcal{M})=\int_G\left|rac{\partial r}{\partial x_1}\left(x
ight) imesrac{\partial r}{\partial x_2}\left(y
ight)
ight|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ אזי $G\subseteq\mathbb{R}^2$ איזי $T:G o\mathcal{M}$ ותהא $T:G o\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית ותהא .Area $(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|
abla f\left(x,y
ight)
ight\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ אחי $\det\left(I+uv^T
ight)=1+\langle u,v
angle$ אזי $u,v\in\mathbb{R}^n$ טענה: תהיינה

 $\operatorname{Vol}_k\left(\Gamma_f
ight)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|
abla f\left(x
ight)
ight\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ מסקנה: תהא טענה: $\alpha\left(x
ight)$ בנקודה $\alpha\left(x
ight)$ באשר $\alpha:\Gamma_{f} o\mathbb{R}$ ותהא ווית בין הנורמל של פתוחה תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ באשר $\alpha:\Gamma_{f} o\mathbb{R}$ ותהא $\left\| \sqrt{1+\left\|
abla f\left(x
ight)
ight\| ^{2}}=rac{1}{\cos \left(lpha \left(x
ight)
ight) }$ ציר e_{k+1} אזי e_{k+1}

 P_1 בין P_1 ל־ P_2 אזי השטח הכלוא על \mathbb{S}^2 בין P_1 ל־ P_2 אזי האורים מקבילים במרחק P_1 החותכים את \mathbb{S}^2 ויהי

 $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין $R\cdot\mathbb{S}^2$ אזי הייו $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין במרחק לכדים מקבילים מקבילים מחותכים את .Area $(\mathcal{M}) = 2\pi hR$

 $P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \max\left\{d\left(x,H_1
ight),d\left(x,H_2
ight)
ight\}\leq d\left(H_1,H_2
ight)\}$ היפר־משטחים מקבילים אזי $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ יהיו . Width $(P_{H_1,H_2})=d\left(H_1,H_2
ight)$ אזי היפר־משטחים $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ יהיו . Width $(K)=\inf_{\{K\subset P\mid$ קורה $P\}}$ (Width (P)) גוף קמור אזי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ יהי יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$

אזי $K\subseteq igcup_{i=1}^m P_i$ קורות עבורן אויהיו קומפקטי ויהיו אוף קמור הקורה של טרסקיי. יהי איזי יהי אזי אויהיו אזי $K\subseteq \mathbb{R}^n$ אזי יהי .Width $(K) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{Width } (P_i)$

. Width $K(P)=\inf_{m\in\mathbb{R}_+}\{m\in\mathbb{R}_+\mid\exists a\in\mathbb{R}^n.K\subseteq m\cdot P+a\}$ גוף קמור קומפקטי ותהא אזי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ותהא אזי

. טענה: תהא $abla arphi^{-1}(t)$ אזי abla arphi
eq 0 באשר $abla arphi \in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ היפר־משטח. $abla arphi \in \mathcal{V}^{-1}(t)$ אזי $abla arphi \subseteq \mathbb{R}^n$ היפר־משטח.

טענה: יהי $p\in\mathcal{V}$ אזי קיים $\phi\in\mathcal{V}$ וכן $\nabla \varphi\neq 0$ וכן $\nabla \varphi\neq 0$ באשר $\varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ אזי קיים $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ טענה: יהי $\int_{B_{\delta}\left(p
ight)}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}\left(t
ight)}rac{f\left(x
ight)}{\left\|
ablaarphi\left(x
ight)
ight\|}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t$ באשר supp $\left(f
ight)$ באשר $f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight)$

באשר $f\in R\left(\mathcal{V}
ight)$ ותהא $arphi\left(\mathcal{V}
ight)=(a,b)$ באשר ablaarphi
eq b וכן ablaarphi
eq b ותהא abla
eq b ותהא abla
eq b באשר ablaarphi
eq b וכן abla $.\int_{\mathcal{V}}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}V\mathrm{ol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t$ אוי $u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight)$ לכל $u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight)$ עבורו $u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight)$ לכל $u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight)$ עבורו $u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight)$ לכל $u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight)$ אוי $u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight)$ אוי $u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight)$ לכל $u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight)$ אוי $u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight)$ לכל $u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight)$

abla x הוא arphi בנקודה x הוא אזי הגרדיאנט של אזי הגרדיאנט של $arphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight)$ הימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא

 $\psi_{
estriction\omega}=arphi_{
estriction\omega}$ באשר $\psi\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ סביבה של $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $arphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight)$ באשר יריעה תהא $\psi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ $.
abla_{x}arphi=\operatorname{Proj}_{T_{x}(\mathcal{M})}\left(
abla_{x}\psi
ight)$ אזי

ותהא $arphi(\mathcal{M})=(a,b)$ וכן ablaarphi
eq 0 באשר abla
eq 0 באשר abla
eq 0 וכן abla
eq 0 ותהא abla
eq 0 ומרא

 $\int_{\mathcal{M}} f = \int_a^b \int_{arphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\|
abla arphi(x)\|} \mathrm{dVol}_{n-1}\left(x\right) \mathrm{d}t$ אאי $f \in R\left(\mathcal{M}\right)$ אאי $f \in R\left(\mathcal{M}\right)$ באשר $f \in R\left(\mathcal{V}\right)$ באשר $f \in R\left(\mathcal{V}\right)$ באשר $g \in C^1\left(\mathcal{V}, \mathbb{R}^k\right)$ באשר $g \in C^1\left(\mathcal{V}, \mathbb{R}^k\right)$ באשר $g \in C^1\left(\mathcal{V}, \mathbb{R}^k\right)$ $\int_{\mathcal{V}} f = \int_{\varphi(\mathcal{V})} \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\sqrt{\det((\mathcal{D}_x \varphi) \cdot (\mathcal{D}_x \varphi)^T)}} dVol_{n-1}(x) dt$