```
a*b=*(a,b) אזי א איז פעולה A שימון: תהא A קבוצה ותהא A פעולה בינארית
                                            עבורו e \in G עבורה איי*: G 	imes G 	o G עבורה קיים *: G 	imes G 	o G
                                          a*(b*c)=(a*b)*c מתקיים a,b,c\in G אסוציאטיביות: לכל
                                                         a*e=e*a=a מתקיים a\in G איבר יחידה: לכל
                                              a*b=e=b*a עבורו b\in G קיים a\in G לכל לכל • איבר הופכי:
                                                   S(X) = \{f: X \to X \mid הפיכה f\} הפינה אזי קבוצה אזי
                                                                    (S(X), \circ) אזי קבוצה אזי תהא X קבורת התמורות:
                                                            טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.
                                                                                   S_n = S\left([n]
ight) אזי n \in \mathbb{N} סימון: יהי
                                                                                       |S_n|=n! אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                         (\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight),\cdot) אזי n\in\mathbb{N} שדה ויהי \mathbb{F} שדה יהי אזי n\in\mathbb{N}
                                                  . מענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי n\in\mathbb{N} אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.
                                                             \mathbb{F},+ אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\} אזי החבורות החיבוריות: יהי
                                                                        A^*=A^{\times}=A\setminus\{0\} אזי A\subset\mathbb{C} סימון: תהא
                                                                \mathbb{F}(\mathbb{F},\cdot) אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{O}^*,\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*\} אזי יהי
                                                                             .(\{x\}, Id) אזי (החבורה הטריוואלית: יהי א
                                         (x\sim_n y)\Longleftrightarrow (n|\,(x-y)) המוגדרת \sim_n\subseteq\mathbb{Z}^2 אזי n\in\mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                                        .C_n=\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} סימון: יהי
                           [x]_{\sim} + [y]_{\sim} = [x+y]_{\sim} הגדרה: יהי n \in \mathbb{N} אזי n \in \mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                     (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N} יהי החלוקה: חבורת שאריות
                                                         טענה: יהי n \in \mathbb{N} אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.
                                                                                        |C_n|=n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
              g*h=h*g מתקיים g,h\in G עבורה לכל חבורה (G,*) חבורה חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית:
                                                                         . טענה: יהי (S_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} אינה אבלית
                                                                    . אינה אבלית (GL_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot) אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי
                                                                               . אבלית (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N}_+ אבלית טענה: יהי
                                                                         |G| \in \mathbb{N} חבורה עבורה חבורה חבורה חבורה
                                                                    |G| \geq \aleph_0 עבורה אינסופית: חבורה חבורה אינסופית:
                                                     .ord (G)=|G| אזי חבורה סופית הא (G,*) חבורה: תהא
                                                        \operatorname{ord}\left(G
ight)=\infty אינסופית אינ חבורה תהא G חבורה: תהא
                                                                     o\left(G
ight)=\operatorname{ord}\left(G
ight) חבורה אזי (G,st
ight) סימון: תהא
                                           Hעבורה H,st_{H	imes H} אזי H\subseteq G עבורה ותהא חבורה (G,st)
                                                              a*b\in H מתקיים a,b\in H סגירות לכפל: סגירות ש
                                                               a^{-1} \in H מתקיים a \in H סגירות להופכי: לכל
                                                           e\in H אזי איבר היחידה של e אזי יהי •
                         H \leq G עבורה (H,*_{\upharpoonright_{H \times H}}) תת־חבורה ותהא H \subseteq G אזי חבורה ותהא סימון: תהא
.(a*b^{-1}\in H מתקיים a,b\in H מתקיים (לכל H\leq G) אזי H\in \mathcal{P}\left(G\right)\setminus\left\{ \varnothing\right\} מתקיים (G,*) למה: תהא
                    A*B=\{a*b\mid (a\in A)\land (b\in B)\} סימון: תהא A,B\subseteq G חבורה ותהיינה G,*
                                     g*H=\{q\}*H אזי אוני q\in G ויהי ויהי חבורה (G,*) אזי חבורה תהא
                                                                              (n\mathbb{Z},+)<(\mathbb{Z},+) אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                     (\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot)\leq\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot
ight) שדה אזי n\in\mathbb{N} יהי ויהי n\in\mathbb{N}
                                                                      R_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\} אזי n\in\mathbb{N} דימון: יהי
```

A imes A o A פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי

 $(R_n,\cdot) \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$ אזי $n \in \mathbb{N}$ טענה: יהי $G \leq G$ טענה: תהא $G \leq G$

```
הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.
                                             a*e=e*a=a עבורו a*e=e*a=a עבורו אזי קיים ויחיד אזי קיים ויחיד (G,*) מענה: תהא
                                             a*b=e=b*a עבורו b\in G אזי קיים ויחיד a\in G חבורה ויהי חבורה (G,*)
                                                    a^{-1}=b אזי ל־a\in G איבר הופכי ל־a\in G אזי חבורה יהי חבורה (a\in G) איבר הופכי
                                                               (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} אזי a,b \in G טענה: תהא (G,*) אחר טענה:
                                                                            a = a טענה: תהא a \in G טענה: תהא (G,*) חבורה ויהי
                                   a*b=a*c עבורם a,b,c\in G אזי חבורה ויהי משמאל: תהא מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא
                                     a,b=c אזי b*a=c*a עבורם a,b,c\in G חבורה ויהי חבורה (G,*) אזי
                                                                                   g^0=e אזי g\in G חבורה ויהי (G,*) אזי
                                                            g^n=g*g^{n-1} אזי g\in G ויהי חבורה יהי חבורה (G,*) אזי הגדרה:
                                                                   g^{-n}=(g^n)^{-1} אזי g\in G ויהי n\in\mathbb{N} חבורה חבורה G אזי
                                                                   g^{-n}=\left(g^{-1}
ight)^n אזי g\in G ויהי חבורה יהי חבורה G אזי מענה: תהא
g,g'\in G ולכל g,h)\cdot (g',h')=(g*g',h\otimes h') חבורות נגדיר וולכל g,g'\in G לכל חבורת המכפלה: תהיינה וולכל חבורות נגדיר וולכל
                                                                                                                             (G \times H, \cdot)
                                                             . חבורה הינה הינה (G,*), (H,\otimes) חבורה חבורה סענה:
                                            .(חבורת אזי (חבורת אבלית) חבורות אזי (חבורת אבלית) אבליות חבורות אזי (חבורת אבלית) טענה: תהיינה
                                              (HK=KH) אזי (H*K\leq G) אזי H,K\leq G טענה: תהא (G,*) חבורה ותהיינה
                                       (H \cap K \in \{H,K\}) עענה: תהא (H \cup K \leq G) אזי H,K \leq G טענה: תהא (G,*) אחריינה
                                         .Stab (Y)=\{\pi\in S\left(X\right)\mid \forall y\in Y.\pi\left(y\right)=y\} אזי Y\subseteq X אוי קבוצה ותהא X קבוצה ותהא
                                                                         .
Stab (Y) \leq S\left(X\right) אזי<br/> Y \subseteq X ותהא קבוצה תהא א קבוצה תהא אזי
                                   \bigcap_{i\in I}H_{i}\leq G אאי i\in I לכל לכל H_{i}\leq G באשר באשר \{H_{i}\}_{I\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(G
ight) אאי
                                                          \mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\} אזי X \subseteq G חבורה חבורה G הגדרה: תהא
                                       \langle X 
angle = igcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H איי אX \subseteq G חבורה ותהא חבורה תהקבוצה: תהא
                                                                                   \langle X 
angle < G אזי X \subseteq G אויי חבורה ותהא למה: תהא
                     \langle X 
angle \subseteq H אזי איזי איזי עבורה H \leq G ותהא אות חבורה תהא חבורה תהא אזי א אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי
                         \langle X 
angle = \left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \ \middle| \ (k \in \mathbb{N}) \land \left(x \in X^k
ight) \land \left(s \in \{\pm 1\}^k
ight)
ight\} אזי X \subseteq G איזי X \subseteq G איזי
                                                             \langle X \rangle = G עבורה אזיX \subset G חבורה תהא חבורה: תהא
                                                             חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.
                                                                      \langle g \rangle = G המקיים g \in G המקיים עבורה עבורה ציקלית: חבורה
                                                                           \langle g 
angle = \left\{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} 
ight\} אזי g \in G חבורה חבורה G למה: תהא
                                                            g^{n+m}=g^n*g^m אזי g\in G ויהי n,m\in\mathbb{Z} טענה: תהא
                                                               (g^n)^m=g^{n\cdot m} אזי g\in G ויהי n,m\in\mathbb{Z} חבורה חבורה G אחזי
                                                 G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\} עבורו g \in G עבורו ציקלית) ציקלית אזי (G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\} עבורו אזי מהא
                                                                                         . אבלית אזי G חבורה אין חבורה G אבלית מסקנה:
                                                                   .ord (g)=\operatorname{ord}\left(\langle g
angle
ight) אזי g\in G חבורה חבורה G חבורה של איבר: תהא
                                                          .ord (g)=\min\left\{n\in\mathbb{N}_+\mid g^n=e\right\} אזי g\in G חבורה ויהי חבורה G
                                                         \operatorname{ord}\left(g
ight)=\infty אזי \operatorname{ord}\left(g
ight) עבורו g\in G חבורה ויהי G חבורה מערה:
                               g \in G טענה: תהא G = e (ord G = e) איי G = G באשר G \in G טענה: תהא G = e ויהי G \in G ויהי
                                                                      . איי (i,n)ליים). איי (i,n)ליים). ויהי i\in\mathbb{Z}_n ויהי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי
                                                                         . אזי H אזי איזי איזי איקלית ותהא H < G אזי איקלית ובורה עיקלית תהא
                                                                                                                .טענה: (\mathbb{Q},+) אינה נ"ס
                                                                     H*g אזי g\in G ויהי ויהי H\leq G אזי חבורה תהא
```

 $\{e\} \leq G$ טענה: תהא (G,*) חבורה אזי

g*H אזי $g\in G$ ויהי ויהי $H\leq G$ אחבורה תהא חבורה G אזי אזי g

```
Hq = qH אזי q \in G ויהי H < G מסקנה: תהא חבורה אבלית תהא
                                                          (gH)^{-1}=Hg^{-1} אזי g\in G ויהי H\leq G מסקנה: תהא
                                                      (gH=H)אזי (g\in H) אזי g\in G ויהי H\leq G חבורה תהא
                                                       (Hg=H) \Longleftrightarrow (g\in H) אזי g\in G ויהי H\leq G טענה: תהא
                                                                   G/H = \{gH \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G חבורה תהא
                                                                  H \setminus G = \{Hg \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G חבורה G
                                                                       G משפט: תהא G חבורה ותהא H \leq G חבורה חבורה משפט:
                                    .(g_1H=g_2H)\Longleftrightarrow \left(g_2^{-1}g_1\in H
ight) אזי g_1,g_2\in G ויהיו H\leq G חבורה תהא חבורה G
                                                                         .eH אזי אוי H \leq G חבורה ותהא חבורה תהא אזי אזי
                                              |G:H|=|G/H| אזי אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא חבורה ותהא H\leq G אינדקס של הת־חבורה
                                                                        G:H]=|_Hackslash_G| אזי H\leq G טענה: תהא G חבורה ותהא
                                                      \operatorname{ord}\left(G
ight)=\operatorname{ord}\left(H
ight)\cdot\left[G:H
ight] אזי H\leq G סענה: תהא חבורה סופית ותהא
                                                          .ord (H) | \mathrm{ord} \, (G) אזי H \leq G משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא
                                                                     .ord (g) | \mathrm{ord} \, (G) אזי g \in G מסקנה: תהא חבורה חבורה סופית ויהי
                                             G:K] = [G:H] \cdot [H:K] אזי איי ותהא H < G טענה: תהא חבורה תהא G:K < H
                             G=\langle g 
angle מתקיים g\in G\setminus \{e\} אזי לכל ord G=p מתקיים חבורה חבורה מסקנה: יהי
                                                       אזי G אזי G אזי G אזי G אזי G אזי סופית באשר חבורה סופית ההא g\in\mathbb{P} אזי מסקנה: יהי
                                  n^{p-1}\equiv 1\mod p אזי \gcd(n,p)=1 באשר n\in\mathbb{N} ויהי p\in\mathbb{P} יהי מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי
                                                    |HK| = rac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|} אזי חבורות חוברה H,K \leq G למה: תהא G חבורה תהא
\operatorname{ord}(K)=p וכן \operatorname{ord}(H)=p באשר H,K\leq G אזי לכל ותהא G=p חבורה באשר G ותהא G חבורה באשר אזי לכל
                                                                                                                     K=H מתקיים
                                                                  (S_n/\mathsf{Stab}(1))\cap (S_\mathsf{Stab}(1)\setminus S_n)=\{\mathsf{Stab}(1)\} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} יהי n\in\mathbb{N}_{\geq 3}
                                                              HgK אזי g \in G ויהי ויהי H, K \leq G קוסט כפול: תהא
                                                    G טענה: תהא G חלוקה של H,K \leq G טענה: תהא חבורה ותהיינה
                                                                      המקיימת \varphi:G 	o H אזי חבורות G,H המקיימת הומומורפיזם:
                                                                                            .arphi\left(e_{G}
ight)=e_{H} :שימור איבר יחידה
                                                                 .arphi\left(a\cdot b
ight)=arphi\left(a
ight)\cdotarphi\left(b
ight) מתקיים a,b\in G שימור כפל: לכל
                                                                      .arphi\left(g^{-1}\right)=arphi\left(g
ight)^{-1} שימור הופכי: לכל g\in G מתקיים •
. (arphi\left(a\cdot b^{-1}
ight)=arphi\left(a
ight)\cdotarphi\left(b
ight)^{-1} מתקיים a,b\in G מתקיים a,b\in G אזי (arphi הומומורפיזם) אזי (לכל arphi הומומורפיזם) אזי (מינה G,H מתקיים מענה:
              \ker\left(arphi
ight)=\left\{g\in G\midarphi\left(g
ight)=e_{H}
ight\} אזי הומומורפיזם הומור מינה הבורות ויהי חבורות היינה G,H חבורות היינה אזי
                                                                      למה: תהיינה G,H חבורות ויהי \varphi:G	o H חבורות מחורפיזם אזי
                                                                                                                   \operatorname{Im}(\varphi) \leq H \bullet
                                                                                                                  \ker(\varphi) \leq G \bullet
                                                                                              (\ker(\varphi) = \{e_G\}) \iff (y \text{''nn } \varphi) \bullet
            טענה: תהיינה G,H,K חבורות יהי \varphi:G	o H הומומורפיזם ויהי \psi:H	o K הומומורפיזם היהי הומומורפיזם אזי
                                   \operatorname{ord}(\varphi(q))|\operatorname{ord}(q) אזי q\in G אויי הומומורפיאם ויהי g\in G אויי היינה G,H טענה: תהיינה
                                                                                      . סענה: תהא G חבורה אזי Id טענה: תהא
            טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא G חבורה אזי g\in G המוגדרת g\in G לכל g\in G הינה הומומורפיזם.
                                      טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא H 	imes G אזי חבורה ותהא חבורה ותהא ומומורפיזם ההכלה: הומומורפיזם החבלה
                                                    . הינו הומומורפיזם \det: \operatorname{GL}(V) 	o \mathbb{F}^* אזי \mathbb{F} מ"ו מעל V מ"ו שדה ויהי \mathbb{F} שדה משנה: יהי
```

g אזי קוסט שמאלי: תהא חבורה ויהי gH קוסט שמאלי: תהא

```
\operatorname{sign}(\sigma)=rac{\prod_{i< j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i< j}(i-j)} אזי \sigma\in S_n ותהא n\in\mathbb{N} אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא \sigma\in S_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא \sigma\in S_n אזי n\in\mathbb{N} אזי n\in\mathbb{N}
                                                                             A_n = \ker\left(\operatorname{sign}
ight) אזי n \in \mathbb{N} חבורת התמורות הזוגיות: יהי
                                                                                                          A_n \leq S_n טענה: יהי n \in \mathbb{N} טענה: יהי
                                                              .arphi:G	o H חבורות אזי הומומורפיזם: תהיינה G,H איזומורפיזם:
                                                                                 G\cong H סימון: תהיינה G,H חבורות איזומורפיות סימון
                                                    . למה: תהיינה G,H חבורות ויהי \varphi:G	o H ויהי חבורות מהיינה למה: תהיינה מיינה חבורות ויהי
             למה: תהיינה \psi\circ \varphi איזומורפיזם איז \psi:H	o K איזומורפיזם ויהי \varphi:G	o H איזומורפיזם איז למה: תהיינה
                                                                           \mathcal{A} טענה: תהא \mathcal{A} קבוצה של חבורות אזי יחס שקילות על
                                                                                                         .C_n\cong R_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
.arphi=\psi אזי arphi_{\lceil S}=\psi_{\lceil S} חבורות באשר G,H הומומורפיזמים באשר אזי S\subseteq G באשר באשר חבורות תהא טענה: תהיינה
                                                              .arphi:G	o H מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם: מונומורפיזם
                                                                 arphi:G	o H אפימורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם: תהיינה
                                                                            arphi:G	o G אוטומורפיזם: תהא חבורה אזי איזומורפיזם: תהא
                                                                .Aut (G)=\{arphi:G	o G\mid מימון: תהא G חבורה אזי אוטומורפיזם G אוטומורפיזם חבורה אזי
                                                                                          חבורה (Aut (G), \circ) חבורה G חבורה G
                                                                                                              K = C_2 \times C_2 :חבורת קליין
                                                                                                          טענה: חבורת קליין הינה אבלית.
                                                                                                         טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.
                                                                                              .C_4טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־
                           c_{q}\left(x
ight)=gxg^{-1} המוגדרת c_{q}:G	o G אזי g\in G לכל לכל תהא חבורה תהא פונקציית הצמדה:
                                                                                 . טענה: תהא G אוטומורפיזם אזי g \in G טענה: תהא חבורה ויהי
                            arphi=c_q המקיים g\in G אוטומורפיזם arphi:G	o G אוטומורפיזם חבורה אזי אוטומורפיזם פנימי: תהא
                                                                                    .Inn (G) = \{c_q \mid g \in G\} סימון: תהא G חבורה אזי
                                         .c_{a}\left( H
ight) =H מתקיים g\in G עבורה לכל עבורה אזי H\leq G חבורה אזי תהא G
                                                                            H \unlhd G נורמלית אזי H \subseteq G חבורה ותהא חבורה H \subseteq G
                                                                                             טענה: תהא G חבורה ותהא H \leq G טענה:
                                                                                                                              .H \unlhd G \bullet
                                                                                                 g^{-1}Hg=H מתקיים g\in G לכל
                                                                                                 .qHq^{-1}=H מתקיים q\in G לכל
                                                                                                   .gH=Hg מתקיים g\in G לכל
                                                                                                 q^{-1}Hq \subseteq H מתקיים q \in G לכל
                                                                                                H \subseteq q^{-1}Hq מתקיים q \in G לכל
                                                                                                                        G/H = H \setminus G \bullet
```

 $K \unlhd G$ אופיינית ב־H אויי אויי אויינית $H \unlhd G$ אויי חבורה תהא

 $\varphi\left(K
ight)=K$ מתקיים $\varphi\in\operatorname{Aut}\left(G
ight)$ עבורה לכל K< G אחבורה מינית: תהא

 $.Z\left(G\right) =\left\{ g\in G\mid\forall h\in G.gh=hg\right\}$ אזי חבורה G תהא חבורה: תהא מרכז של חבורה

 $\operatorname{Inn}(G) \lhd \operatorname{Aut}(G)$ טענה: תהא G חבורה אזי

 $H \subseteq G$ אזי G:H]=2 באשר $H \subseteq G$ אזי אזי G:H

 $K \unlhd G$ אופיינית אזי $K \subseteq G$ מסקנה: תהא חבורה חבורה אופיינית אזי

 $\det\left(
ho\left(\sigma
ight)
ight)\in\left\{\pm1
ight\}$ אזי $\sigma\in S_n$ ותהא $n\in\mathbb{N}$ טענה: יהי

מסקנה: יהי אזי sign אזי $n\in\mathbb{N}$ יהי יהי

 $\operatorname{sign} = \det \circ
ho$ המוגדרת sign : $S_n o \{\pm 1\}$ אזי $n \in \mathbb{N}$ המוגדרת סימן של תמורה: יהי

```
\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                  G/\ker(arphi)\cong \mathrm{Im}\,(arphi) הומומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G,H חבורות ויהי G,H
                                                                                         טענה: תהא G חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים
                                                                                                                                                          .G\cong\mathbb{Z} •
                                                                                                                              G \cong \mathbb{Z}_n עבורו n \in \mathbb{N} פיים •
                                                                                                                       |G/Z(G)| \notin \mathbb{P} טענה: תהא G חבורה אזי
                                              G \cong H 	imes K אזי אH \cap K = \{e\} וכן וכן HK = G באשר באשר H, K \unlhd G אזי חבורה ויהיו
                                                                                                       \mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n	imes\mathbb{Z}_m זרים אזי n,m\in\mathbb{N} מסקנה: יהיו
טענה: יהי p\in \mathbb{P} תהא p\in M אזי H\neq M אזי אזי אווי היהי אוכן מאינדקס M מאינדקס אזי מאינדקס M באשר אווי אזי M
                                                                                                                                                              p^2 | \text{ord} (G)
(h,k)\cdot(h',k')=(h\cdot\varphi(k)\,(h')\,,k\cdot k') חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H,K חבורות ויהי
                                                                                                            (H \times K, \cdot) אזי k, k' \in K ולכל ולכל ולכל
                                      H \rtimes_{arphi} K חבורות ויהי H,K חבורת המכפלה החצי ישרה הינה \varphi: K 	o \operatorname{Aut}(H) חבורות ויהי
                                                                  טענה: תהיינה H \rtimes_{\varphi} K אזי \varphi: K \to \operatorname{Aut}(H) חבורות ויהי חבורה.
                          H 
ightarrow_{arphi} K \cong H 
ightarrow K אזי איזי k \in K לכל \varphi\left(k\right) = \mathrm{Id}_{H} כך \varphi: K 
ightarrow \mathrm{Aut}\left(H\right) חבורות נגדיר חבורות נגדיר
                                           .Aff (\mathbb{F})=\{f:\mathbb{F}	o\mathbb{F}\mid\exists a\in\mathbb{F}^{	imes}\ (\exists b\in\mathbb{F}\ (\forall x\in\mathbb{F}\ (f\ (x)=ax+b)))\} יהי שדה אזי
                                                                                                                     טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי (Aff (\mathbb{F}), \circ) טענה:
                     \operatorname{Aff}(\mathbb{F})\cong\mathbb{F}
ightarrow_{\omega}\mathbb{F}^{	imes} אזי b\in\mathbb{F} איזי a\in\mathbb{F}^{	imes} לכל a\in\mathbb{F}^{	imes} לכל a\in\mathbb{F}^{	imes} ולכל a\in\mathbb{F}^{	imes} אזי a\in\mathbb{F}^{	imes} איזי
                                     A .Iso (P)=\left\{arphi:\mathbb{R}^2	o\mathbb{R}^2\mid (מצולע משוכלל אזי arphi\wedge(arphi(P)=P)
ight\} איזומטריה מצולע משוכלל משוכלל אזי
                                                          D_n = \operatorname{Iso}(P) אזי (חבורה הדיהדרלית: יהיP \subseteq \mathbb{R}^2 מצולע משוכלל בעל
                                                                                                                      . חבורה (D_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי
                            .\langle X\mid \varphi_1\dots\varphi_n\rangle=\{x\in\langle X\rangle\mid \bigwedge_{i=1}^n\varphi_i\left(x\right)\}אזי על Xאסים פרידיקטים \varphi_1\dots\varphi_nויהיו קבוצה עהא סימון: תהא
                                                                                 D_n\cong \left\langle r,s\mid s^2=e,r^n=e,srs=r^{-1}
ight
angle אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי יהי
                                                                                                                                            משפט: יהיn\in\mathbb{N}_{\geq 2} אזי
                                D_n או הנורמליות הנורמליות או \{D_n,\langle sr,r^2
angle,\langle s,r^2
angle\}\cup\{H\leq\langle r
angle\} אזי n\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}} אם n\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}}
                                                          D_n אזי \{D_n\}\cup\{H\leq\langle r
angle\} הן הנורמליות של החבורות אזי n\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}} אם n\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}
                                                                                                                                                \mathcal{H}\left(\mathbb{F}_{2}\right)\cong D_{4} :טענה
לכל arphi(k)=c_k ככך arphi:K	o Aut (H) ונגדיר וכן H\cap K=\{e\} באשר באשר H\subseteq G להי היי M\cap K=\{e\} ונגדיר ליהי איז איהי M\cap K=\{e\} באשר באשר האי
                                                                                                                                         .G\cong H
times_{arphi}K איז k\in K
```

טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}
ight)$ חבורה.

 $A_n \unlhd S_n$ אזי $n \in \mathbb{N}$ טענה: יהי

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ פשוטה. $\mathrm{SL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $n\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ פשוטה.

. הינה הומומורפיזם. $\ker\left(q\right)=N \quad \bullet$

על. *q* ●

 $Z\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{F}
ight)
ight)\cong\left(\mathbb{F},+
ight)$ טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי

 $\ker\left(arphi
ight) riangleq G$ אזי אוי הומומורפיזם הוהינה G,H המומורפיזם היהינה

 $q\left(g
ight)=gN$ המוגדרת q:G o G/N אזי איזי N olember G חבורה תהא

(qN)*(hN)=(q*h) א כך (q*h) כך (q*h) כך גגדיה: תהא (G,*) כגדיה ותהא (G,*) גגדיה ותהא

 $(H=\ker(arphi)$ עבורו $\varphi:G o G$ עבורו $\varphi:H=\ker(arphi)$ אזי (H< G אזי איזי H

 $H \in \{\{e\},G\}$ מתקיים $H \unlhd G$ עבורה עבורה עבורה משוטה: חבורה

(G/N,*) אזי איזי $N \unlhd G$ אחרה ותהא חבורה (G,*) אזי תהא מנה: תהא חבורה ותהא $M \unlhd G$ אזי חבורה המנה הינה חבורה.

טענה: תהא G חבורה תהא $N \unlhd G$ ותהא חבורה G אזי

```
חבורה פתירה: חבורה G עבורה קיים n\in\mathbb{N}_+ וקיימות חבורה המקיימות
                                                                                                               .G_n = G \bullet
                                                                                                              .G_0 = \{e\} \bullet
                                                                                                 i \in [n] לכל G_{i-1} \unlhd G_i
                                                                                             .i \in [n] אבלית לכל G_i/G_{i-1}
                                                                                    G פתירה פתירה מצלית אזי G פתירה.
                                                         . אינה פתירה פשוטה באשר G אינה אבלית אזי G אינה פתירה פשוטה באשר G
                                                                                             משפט: יהי S_n אזי n \in [4] פתירה.
                                                                              A_n אזי אבלית. אבלית אינה אבלית יהי n\in\mathbb{N}_{>5}
                               A^{H/(H\cap N)}\cong (HN)/N אזי או M \unlhd G ותהא ותהא חבורה תהא חבורה G אזי תהא
                                                     N/K \unlhd G/N אזי K \subseteq N באשר N, K \unlhd G טענה: תהא
                       G/N\cong (G/K)/(N/K) אאי K\leq N משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה חאר באשר איזומורפיזם השלישי:
    משפט ההתאמה: תהא H \leq G \mid N \leq H  אזי קיימת M \subseteq G אזי קיימת M \subseteq G חח"ע ועל המקיימת תהא M \subseteq G
                                                                  \Phi\left(K
ight) \lhd G/N מתקיים N < K המקיימת K \lhd G לכל
                                                C/K \cong \Phi(G)/\Phi(K) מתקיים N \leq K המקיימת א לכל לכל לכל פשמרת מנות: לכל המקיימת K \unlhd G
                                             .(פשוטה) מקסימלית מהא חבורה ותהא M \subseteq G אזי N \subseteq G אזי חבורה מקסימלית מקסימלית מחבורה ותהא N \subseteq G
                           המקיימת f:G	imes X	o X המקיימת קבוצה אזי פונקציה G המהא חבורה חבורה על קבוצה: תהא
                                                                                       f(e,x)=x מתקיים x\in X •
                                                        f\left(g\cdot h,x
ight)=f\left(g,f\left(h,x
ight)
ight) מתקיים x\in X ולכל g,h\in G לכל
                                 f\left(g,x
ight)=g. אזי אי G פעולה על f:G	imes X	o X פרובה ותהא קבוצה ותהא G
                                          G \curvearrowright X = \{f: G \times X \to X \mid G פעולה פעולה אזי קבוצה אזי תהא חבורה ותהא G \curvearrowright X
                                                 f אאי f(g,x)=gx כך f\in G\curvearrowright G אאי חבורה נגדיר תהא
                                                                       . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.
                                                 f(q,x)=xq^{-1} כך f\in G\curvearrowright G אזי אויה חבורה G אזי הפעולה הימנית: תהא
                                                                          . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.
                                                           הפעולה. את g.x ונסמן או פועלת על G את הפעולה מכאן והלאה מכאן הערה:
                               .o\left(x
ight)=\left\{ g.x\mid g\in X
ight\} איי x\in X איי אויהי G חבורה הפועלת על X ויהי איי קבוצה תהא
                   .o\left(x
ight)=X המקיים x\in X המקיים f\in G\curvearrowright X מעולה טרנזיטיבית: תהא
                         \operatorname{Stab}_G(x)=\{g\in G\mid g.x=x\} אזי x\in X אויהי א חבורה הפועלת על חבורה הפועלת על מייצב: תהא
                                           \operatorname{Stab}_G(x) \leq G אזי x \in X ויהי אויהי X חבורה הפועלת על חבורה X אזי חבורה מענה:
                 x \in X מתקיים x \in X מתקיים x \in X מנורה הותהא x \in X בורה ותהא x \in X מתקיים x \in X מתקיים x \in X
                                        lpha\left(g
ight)\in S\left(X
ight) אזי g\in G ויהי lpha\in G\curvearrowright X אבוצה תהא A קבוצה תהא למה:
             .arphi_{lpha}\left(g
ight)\left(x
ight)=lpha\left(g,x
ight) המוגדרת arphi_{lpha}:G	o S\left(X
ight) אזי מהא lpha\in G\curvearrowright X הבורה תהא A
                                                 . סענה: תהא \varphi_{lpha} אזי lpha\in G\curvearrowright X אחותהא קבוצה חבורה תהא מענה: תהא 
lpha_{arphi}\left(g,x
ight)=arphi\left(g
ight)\left(x
ight) חבורה תהא A קבוצה ויהי arphi:G	o S\left(X
ight) הומומורפיזם אזי A
                                        . פעולה lpha_{arphi} חבורה תהא אזי קבוצה ויהי \varphi:G	o S(X) הומומורפיזם אזי סענה: תהא
                    .|o\left(x
ight)|=[G:\mathsf{Stab}_{G}\left(x
ight)] איזי x\in X איזי חבורה הפועלת על X ויהי אוזי x\in X איזי תהא
|\{o\left(x
ight)\mid x\in X\}|=rac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{x\in X\mid g.x=x\}| למה של ברנסייד: תהא X קבוצה ותהא G חבורה סופית הפועלת על X אזי
              lpha\left(g,g'H
ight)=gg'H המוגדרת lpha\in G\curvearrowright G/H אזיlpha\in G המעולה על הקוסטים השמאליים: תהא
                              עבורן קיימת (\alpha,\beta)\in (G\curvearrowright X)	imes (G\curvearrowright Y) חבורה אזי חבורה G חבורות תהיינה X,Y עבורן קיימת עפולות. תהיינה
                                         x \in X ולכל g \in G לכל F(\alpha(g,x)) = \beta(g,F(x)) ולכל המקיימת F:X \to Y
```

 $A_n\cong C_n$ איזי $A_{arphi}\in \mathbb{N}$ איזי $A_{arphi}\in \mathbb{N}$ איזי $G_{arphi}: C_1 o G_1$ כך $G_1 o G_2 o G_2$ איזי $G_2 o G_2 o G_2 o G_2$ ונגדיר

```
טענה: תהא \sigma(x)=X עבורו \alpha\in G\curvearrowright X טרנזיטיבית ויהי אויה הפעולה על חבורה תהא מענה: תהא אויה הפעולה על מענה: מהא
                                                                                                          \alphaאקווריאנטית ל־G/\operatorname{Stab}_G(x) השמאליים של
מסקנה: תהא עבורה הפעולה על הקוסטים אזי קיימת איי סיניבית איי סיניבית חבורה ותהא חבורה ותהא חבורה ותהא מסקנה: תהא מסקנה: עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים
                                                                                                                                          \alphaאקווריאנטית ל
                                                 X טענה: תהא \{o\left(x\right)\mid x\in X\} אזי אוי חבורה חבורה G חלוקה של
                         .o\left(x
ight)=X מתקיים x\in X אוי לכל אזי טרנזיטיבית מסקנה: תהא חבורה תהא חבורה ותהא מסקנה: תהא
                             איי p\in igcup_{i=1}^n arphi_i (P	imes\{0\}) ותהא של \mathbb{R}^3 ותהא \varphi_1\dots \varphi_n אייומטרלל יהיו מצולע משוכלל יהיו
                                                                                                  .Poly (p) = |\{\varphi_i (P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i (P \times \{0\})\}|
עבורן \mathbb{R}^3 עבורה איזומטריות איזומטריות איזומטריות עבורה קיים מצולע משוכלל אוני: קבוצה קמורה לא G=\mathbb{R}^3 עבורה קיים מצולע משוכלל
                                                                                              .\partial K = igcup_{i=1}^n arphi_i \left(P 	imes \{0\}
ight) פאות איזומטריות: •
                                               .Poly (v_1)= Poly (v_2) מתקיים v_1,v_2\in K פודקודים לכל קודקודים יהה כמות:
עבורן \mathbb{R}^3 עבורן arphi_1\ldotsarphi_n של arphi_1\ldotsarphi_n של אוף אפלטוני אזי אפר פאות של אוף אפלטוני: יהיK\subseteq\mathbb{R}^3 אוף אפלטוני אזי אוף אפלטוני אזי אוימטריות איזומטריות איזומטריות אוי
                                                                                       באשר מצולע משוכלל. באשר P\subseteq\mathbb{R}^2 באשר \partial K=\bigcup_{i=1}^n \varphi_i\left(P	imes\{0\}\right)
                                    . Iso (P)=\left\{ arphi:\mathbb{R}^{3}
ightarrow\mathbb{R}^{3}\;\middle|\; (היי מיסריה) איז אוף אפלטוני אזי איז K\subseteq\mathbb{R}^{3} איזומטריה. אוף אפלטוני אזי K\subseteq\mathbb{R}^{3}
         \mathrm{Iso}_{+}\left(P
ight)=\left\{arphi:\mathbb{R}^{3}
ightarrow\mathbb{R}^{3}\mid\left(גוף אפלטוני אזי K\subseteq\mathbb{R}^{3} איזומטריה משמרת אוריינטציה אור אזי אזי K\subseteq\mathbb{R}^{3} גוף אפלטוני אזי אוני איזי
                                \{n,\operatorname{Poly}(k)\} אזי קודקוד v\in K פאות ויהי n\in\mathbb{N} אוף אפלטוני גוף אפלטוני בעל אזי K\subset\mathbb{R}^3 הגדרה סימון שלפלי: יהי
                                                                                                           הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.
                                                                                       .\{5,3\} אפלטון בעל דודקהדרון: גוף אפלטוני אפלטוני אפלK\subseteq\mathbb{R}^3
                                                                                                        \operatorname{Iso}_+(D)\cong A_5 טענה: יהי דודקהדרון אזי יהי
                                                                                                .ord (Iso_{+}(D)) = 60 מסקנה: יהי D דודקהדרון אזי
                                                     G\cong H עבורה H\leq S\left( X
ight) וקיימת אזי קיימת קבוצה אזי קיימת חבורה אזי קיימת תהא
                                                       G\cong H עבורה H\leq S\left(\mathbb{N}
ight) אזי קיימת G אזי איי סrd עבורה באשר G עבורה מסקנה:
                                     \operatorname{ord}(q)=p עבורו q\in G אזי קיים איי איי p|\operatorname{ord}(G) עבורו עבורה סופית ויהי p\in\mathbb{P}
                           .ord (H)=p אזי קיימת H\leq G אזי קיימת p|\operatorname{ord}(G) עבורו עבורה p\in\mathbb{P} איז קיימת עבורה מסקנה:
                                                                            G \cong S_3 או G \cong \mathbb{Z}_6 אזי G \cong G או G \cong G או סענה: תהא
                                                              lpha\left(q,h
ight)=qhq^{-1} המוגדרת lpha\in G\curvearrowright G חבורה אזיlpha\in G המוגדרת תהא
```

 $h^g = lpha\left(q,h
ight)$ אזי ההצמדה מעולת פעולת חבורה G חבורה G