נקודה צפה: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $a_1\dots a_t\in\mathbb{Z}$ באשר $a_1\neq0$ וכן $p\in\mathbb{Z}$ וכן $\sigma\in\{\pm1\}$ עבורם $x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^t\frac{a_i}{\beta^i}\right)\cdot\beta^p$.

סימון: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ עבורו $x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^t\frac{a_i}{\beta^i}\right)\cdot\beta^p$ ייצוג בנקודה צפה אזי σ.

מנטיסה/ספרות משמעותיות: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ עבורו $x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^t\frac{a_i}{\beta^i}\right)\cdot\beta^p$ ייצוג בנקודה צפה אזי $(a_1\dots a_t)$.

הגבלה על החזקה בנקודה צפה: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהיו $L,U\in\mathbb{Z}$ עבורן בייצוג נקודה צפה $U<p<L$.

טענה: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהי $L,U\in\mathbb{Z}$ הגבלה על החזקה ויהי $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ מספר בעל ייצוג נקודה צפה אזי $\beta^{L-1}<|x|<\beta^U$.

גלישה: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס ויהיו $L,U\in\mathbb{Z}$ הגבלה על החזקה ויהי $x\in\mathbb{R}$ אזי
- overflow: $|x|\ge\beta^U$.
- underflow: $|x|\le\beta^{L-1}$.

קיצוץ נקודה צפה: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ בעל הצגה $x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^\infty\frac{a_i}{\beta^i}\right)\cdot\beta^p$ בבסיס β אזי $\mathrm{fl}(x)=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^t\frac{a_i}{\beta^i}\right)\cdot\beta^p$.

עיגול נקודה צפה: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ בעל הצגה $x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^\infty\frac{a_i}{\beta^i}\right)\cdot\beta^p$ בבסיס β אזי
$$\mathrm{fl}(x)=\begin{cases}\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^t\frac{a_i}{\beta^i}\right)\cdot\beta^p & 0\le a_{t+1}<\frac{\beta}{2}\\ \sigma\cdot\left(\left(\sum_{i=1}^t\frac{a_i}{\beta^i}\right)+\frac{1}{\beta^t}\right)\cdot\beta^p & \frac{\beta}{2}\le a_{t+1}<\beta\end{cases}.$$

סימון: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\tilde{x}=\mathrm{fl}(x)$.

שגיאה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $e(x)=x-\mathrm{fl}(x)$.

שגיאה מוחלטת: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $|e(x)|$.

שגיאה יחסית: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\delta(x)=\frac{e(x)}{x}$.

מסקנה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\mathrm{fl}(x)=x(1-\delta(x))$.

טענה: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ בעל ייצוג בקיצוץ נקודה צפה אזי $|\delta(x)|\le\beta^{-t+1}$.

טענה: יהי $\beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ בסיס יהי $t\in\mathbb{N}_+$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ בעל ייצוג בעיגול נקודה צפה אזי $|\delta(x)|\le\frac12\beta^{-t+1}$.

טענה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ אזי $|e(x+y)|\le|e(x)|+|e(y)|$.

מסקנה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ בעלי סימן זהה אזי $|\delta(x+y)|\le|\delta(x)|+|\delta(y)|$.

טענה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ בעלי סימן זהה אזי $|\delta(x+y)|\le\max\{|\delta(x)|,|\delta(y)|\}$.

טענה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ אזי $|\delta(x-y)|\le\left|\frac{e(x)}{x-y}\right|+\left|\frac{e(y)}{x-y}\right|$.

טענה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ אזי $|\delta(xy)|\le|\delta(x)|+|\delta(y)|+|\delta(x)\delta(y)|$.

טענה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ אזי $\left|e\left(\frac{x}{y}\right)\right|\le\frac{|x||e(y)|+|y||e(x)|}{|y\cdot\mathrm{fl}(y)|}$.

טענה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ אזי $\left|\delta\left(\frac{x}{y}\right)\right|\le\left|\frac{y}{\mathrm{fl}(y)}\right|(|\delta(x)|+|\delta(y)|)$.

אלגוריתם שיטת החצייה: יהי ε תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ויהיו $a_0<b_0$ עבורם $f(a_0)f(b_0)<0$ אזי

function BisectionMethod(a_0,b_0,ε):
- $n\leftarrow0$
- **while** $\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\ge\varepsilon$ **do**
  - $m_n\leftarrow\frac{a_n+b_n}{2}$
  - **if** $f(m_n)=0$ **then**
    - **return** m_n
  - **else if** $f(a_n)f(m_n)<0$ **then**
    - $(a_{n+1},b_{n+1})\leftarrow(a_n,m_n)$
    - $n\leftarrow n+1$
  - **else if** $f(m_n)f(b_n)<0$ **then**
    - $(a_{n+1},b_{n+1})\leftarrow(m_n,b_n)$
    - $n\leftarrow n+1$
- **end**

טענה: יהי ε תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ויהיו $a<b$ עבורם $f(a)f(b)<0$ אזי קיים שורש $\alpha\in[a,b]$ של f עבורו $|\mathrm{BisectionMethod}(a,b,\varepsilon)-q|<\varepsilon$.

סימון: תהא $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $x_n\to\alpha$ אזי $e_n=\alpha-x_n$.

טענה: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בעלת שורש יחיד α אזי באלגוריתם החצייה $m_n\to\alpha$ וכן $|\alpha-m_n|\le\frac{b-a}{2^{n+1}}$.

סדר התכנסות: תהא $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $x_n\to\alpha$ אזי $p\in\mathbb{R}_+$ עבורו $0<\liminf_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}<\infty$.

מסקנה: סדר ההתכנסות של שיטת החצייה היא לינארית.

טענה: תהא f גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט α וכן $f(x_n)=f(\alpha)+f'(\zeta_n)e_n$ טור טיילור שלה אזי $e_n=\frac{f(x_n)}{f'(\zeta_n)}$.

מסקנה: יהי ε_M דיוק המכונה ותהא f גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט α וכן $f(x_n)=f(\alpha)+f'(\zeta_n)e_n$ טור טיילור שלה וכן $|f(x_n)|\le\varepsilon_M$ אזי $|e_n|\le\left|\frac{2\varepsilon_M}{f'(\zeta_n)}\right|$.

מספר המצב: תהא f גזירה ברציפות בעלת שורש α מסדר שני אזי $\lim_{x\to\alpha}\left|\frac{f(x)}{xf'(x)}\right|$.

שיטת ניוטון: תהא $f\in C^1([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

טענה: תהא $f\in C^1([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\})$ בעלת שורש פשוט יחיד α ויהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי שיטת ניוטון בעלת סדר התכנסות ריבועי.

שיטת המיתרים: תהא $f\in C([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ויהיו $x_0,x_1\in\mathbb{R}$ אזי $x_{n+1}=x_n-f(x_n)\cdot\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$.

אלגוריתם שיטת regula falsi: יהי ε תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ויהיו $a_0<b_0$ עבורם $f(a_0)f(b_0)<0$ אזי

function RegulaFalsi(a_0,b_0,ε):
- $n\leftarrow0$
- **while** $\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\ge\varepsilon$ **do**
  - $m_n=a_n-f(a_n)\cdot\frac{a_n-b_n}{f(a_n)-f(b_n)}$
  - **if** $f(m_n)=0$ **then**
    - **return** m_n
  - **else if** $f(a_n)f(m_n)<0$ **then**
    - $(a_{n+1},b_{n+1})\leftarrow(a_n,m_n)$
    - $n\leftarrow n+1$
  - **else if** $f(m_n)f(b_n)<0$ **then**
    - $(a_{n+1},b_{n+1})\leftarrow(m_n,b_n)$
    - $n\leftarrow n+1$
- **end**

טענה: תהא $f\in C([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\})$ בעלת שורש פשוט יחיד α ויהיו $x_0,x_1\in\mathbb{R}$ אזי שיטת המיתרים בעלת סדר התכנסות $\phi=\frac{1+\sqrt5}{2}$.

שיטת איטרציה: תהא $g:I\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $x_n=g(x_{n-1})$.

איטרציה: תהא $g:I\to\mathbb{R}$ ויהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי x_n.

התכנסות שיטת איטרציה: שיטת איטרציה $g:I\to\mathbb{R}$ עבורה $x_n\to\alpha$.

נקודת שבת: תהא $g:I\to\mathbb{R}$ אזי $a\in\mathbb{R}$ עבורה $g(a)=a$.

טענה: תהא $g\in C(I,\mathbb{R})$ שיטת איטרציה מתכנסת עבורה $x_n\to\alpha$ אזי $g(\alpha)=\alpha$.

קונסיסטנטיות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ ותהא $g\in C(I,\mathbb{R})$ שיטת איטרציה מתכנסת אזי $(f(\alpha)=0)\Longleftarrow(g(\alpha)=\alpha)$.

משפט: תהא $g\in C([a,b],[a,b])$ אזי קיימת $\alpha\in[a,b]$ עבורה $g(\alpha)=\alpha$.

משפט: תהא $g\in C^1([a,b],[a,b])$ ויהי $K<1$ עבורו $|g'|\le K$ אזי קיימת ויחידה $\alpha\in[a,b]$ עבורה $g(\alpha)=\alpha$.

מסקנה: תהא $g\in C^1([a,b],[a,b])$ ויהי $K<1$ עבורו $|g'|\le K$ אזי שיטת האיטרציה g מתכנסת לנקודת השבת.

מסקנה: תהא $g\in C^1([a,b],[a,b])$ ויהי $K<1$ עבורו $|g'|\le K$ אזי $|e_n|\le K|e_{n-1}|$.

תנאי ליפשיץ: פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ וכן $K>0$ עבורם $|g(x)-g(y)|\le K|x-y|$.

תנאי כיווץ: פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ וכן $1>K>0$ עבורם g ליפשיץ K.

תנאי מתיחה: פונקציה $g\in C^1(\mathbb{R})$ וכן $|g'|\ge K>1$ עבורם g ליפשיץ K.

טענה: יהי X סגור תהא $g\in C(X)$ ויהי $K<1$ עבורו g ליפשיץ K אזי קיימת ויחידה $\alpha\in[a,b]$ עבורה $g(\alpha)=\alpha$.

מסקנה: יהי X סגור תהא $g\in C(X)$ ויהי $K<1$ עבורו g ליפשיץ K אזי שיטת האיטרציה g מתכנסת לנקודת השבת.

מסקנה: יהי X סגור תהא $g\in C(X)$ ויהי $K<1$ עבורו g ליפשיץ K אזי $|e_n|\le\frac{K^n}{1-K}|x_1-x_0|$.

משפט: תהא $g\in C^1(I,\mathbb{R})$ ותהא α נקודת שבת עבורה $|g'(\alpha)|<1$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו לכל $x\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ מתקיים כי g מתכנסת ל־α.

נקודה מושכת: תהא $g\in C^1(I,\mathbb{R})$ אזי נקודת שבת α עבורה $|g'(\alpha)|<1$.

נקודה דוחה: תהא $g\in C^1(I,\mathbb{R})$ אזי נקודת שבת α עבורה $|g'(\alpha)|>1$.

נקודה דו־פרצופית: תהא $g\in C^1(I,\mathbb{R})$ אזי נקודת שבת α עבורה קיימים $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}$ תחומים באשר $\alpha\in\partial\mathcal{U},\partial\mathcal{V}$ וכן $|g'(\mathcal{U})|<1$ וכן $|g'(\mathcal{V})|>1$.

מסקנה: תהא $f\in C^1([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ויהי $\zeta\in[a,b]$ שורש פשוט אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקטע $(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$.

משפט: תהא $g\in C^1(I,\mathbb{R})$ ותהא α נקודת שבת עבורה $0<|g'(\alpha)|<1$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו לכל $x\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ מתקיים כי g מתכנסת ל־α בקצב התכנסות לינארי.

משפט: יהי $p>1$ תהא $g\in C^p(I,\mathbb{R})$ ותהא α נקודת שבת עבורה $g^{(p)}(\alpha)\neq0$ וכן $g^{(n)}(\alpha)=0$ לכל $n\in[p-1]$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו לכל $x\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ מתקיים כי g מתכנסת ל־α בקצב התכנסות p.

מסקנה: תהא $f\in C^2([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ויהי $\zeta\in[a,b]$ שורש פשוט עבורו $f''(\zeta)\neq0$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקצב ריבועי בקטע $(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$.

מסקנה: תהא $f\in C^2([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ויהי $\zeta\in[a,b]$ שורש עבורו $f'(\zeta)=0$ וכן $f''(\zeta)\neq0$ אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקצב לינארי בקטע $(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$.

שיטת ניוטון המתוקנת: תהא $f\in C^1([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\})$ יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $g(x)=x-m\cdot\frac{f(x)}{f'(x)}$.

מסקנה: תהא $f\in C^\eta([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\})$ ויהי $\zeta\in[a,b]$ שורש מדרגה n אזי קיים $\varepsilon>0$ עבורו שיטת ניוטון המתוקנת מסדר n מתכנסת בקצב ריבועי בקטע $(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$.

שיטת סטפנסן: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ אזי $g(x)=x-\frac{f(x)^2}{f(x+f(x))-f(x)}$.

תחום ההתכנסות: תהא $g:I\to\mathbb{R}$ שיטה איטרטיבית ותהא $\alpha\in I$ נקודת שבת אזי קטע מקסימלי $J\subseteq I$ עבורו $\alpha\in J$ וכן לכל $x\in J$ שיטת האיטרציה g המתחילה ב־x מתכנסת ל־α.

תחום כיווץ: תהא $g\in C^1(I,\mathbb{R})$ שיטה איטרטיבית תהא $\alpha\in I$ נקודת שבת עם תחום התכנסות J אזי קטע מקסימלי $K\subseteq J$ עבורו $\alpha\in K$ וכן לכל $x\in K$ מתקיים $|g'(x)|\le1$.

שיטת ניוטון־רפסון: תהא $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ אזי $g(x)=x-D_f(x)^{-1}\cdot f(x)$.

טענה: תהא $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ ויהי $\zeta\in\mathbb{R}^n$ שורש פשוט אזי קיימת $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של ζ בה שיטת ניוטון־רפסון מתכנסת בקצב ריבועי.

טענה: תהא $f\in C([a,b],\mathbb{R})$ קמורה ומונוטונית באשר $f(a)f(b)<0$ אזי regula falsi בעלת סדר לינארי.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\Pi_n=\{f\in\mathbb{R}[x]\mid\deg(f)\le n\}$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $a_0\dots a_n,b_0\dots b_n\in\mathbb{R}$ אזי $f(x)=\sum_{k=0}^n(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$.

פולינום אקספוננטי: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $a_0\dots a_n,b_0\dots b_n\in\mathbb{R}$ אזי $f(x)=\sum_{k=0}^n a_ke^{b_kx}$.

פולינום אינטרפולציה (פ"א): תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $p\in\Pi_n$ עבורו $p(x_i)=f(x_i)$ לכל $i\in\{0\dots n\}$.

משפט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי קיים ויחיד $p\in\Pi_n$ פולינום אינטרפולציה.

פולינום לגראנז': תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\ell_i(x)=\frac{\prod_{k\in\{0\dots n\}\setminus\{i\}}(x-x_k)}{\prod_{k\in\{0\dots n\}\setminus\{i\}}(x_i-x_k)}$.

טענה: תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\ell_i(x_j)=\delta_{i,j}$.

טענה בסיס לגראנז': תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\{\ell_0\dots\ell_n\}$ בסיס של Π_n.

מסקנה צורת לגראנז': תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_i(x)$ פולינום אינטרפולציה.

טענה בסיס ניוטון: תהיינה $x_0\dots x_{n-1}\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\prod_{i=0}^j(x-x_i)\right\}_{j=-1}^{n-1}$ בסיס של Π_n.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_{n+1}\in\mathbb{R}$ ויהי $\sum_{j=-1}^nA_{j+1}\prod_{i=0}^j(x-x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f בנקודות $x_0\dots x_{n+1}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n-1}A_{j+1}\prod_{i=0}^j(x-x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\{x_0,\dots,x_n\}$.

מסקנה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_{n+1}\in\mathbb{R}$ ויהי $\sum_{j=-1}^nA_{j+1}\prod_{i=0}^j(x-x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f בנקודות $x_0\dots x_{n+1}$ אזי $\sum_{j=-1}^{k-1}A_{j+1}\prod_{i=0}^j(x-x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\{x_0,\dots,x_k\}$.

מסקנה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_{n+1}\in\mathbb{R}$ יהי $\sum_{j=-1}^nA_{j+1}\prod_{i=0}^j(x-x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f בנקודות $x_0\dots x_{n+1}$ ויהי $\sum_{j=-1}^{n-1}B_{j+1}\prod_{i=0}^j(x-x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\{x_0,\dots,x_n\}$ אזי $\sum_{j=-1}^nA_{j+1}\prod_{i=0}^j(x-x_i)=\left(\sum_{j=-1}^{n-1}B_{j+1}\prod_{i=0}^j(x-x_i)\right)+A_{n+1}\prod_{i=0}^n(x-x_i)$.

הפרש מחולק: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_k\in\mathbb{R}$ ויהי $\sum_{j=-1}^{k-1}A_{j+1}\prod_{i=0}^j(x-x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\{x_0\dots x_k\}$ אזי $f[x_0\dots x_k]=A_k$.

מסקנה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_k\in\mathbb{R}$ שונות ותהא $\sigma\in S_{k+1}$ תמורה אזי $f[x_0\dots x_k]=f[x_{\sigma(0)}\dots x_{\sigma(k)}]$.

מסקנה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n-1}f[x_0\dots x_{j+1}]\prod_{i=0}^j(x-x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב־$\{x_0\dots x_n\}$.

טענה נוסחה רקורסיבית להפרשים המחולקים: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_k\in\mathbb{R}$ באשר $x_0\neq x_k$ אזי $f[x_0\dots x_k]=\frac{f[x_1\dots x_k]-f[x_0\dots x_{k-1}]}{x_k-x_0}$.

השגיאה באינטרפולציה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי $e(x)=f(x)-p(x)$.

משפט ביטוי לשגיאה באינטרפולציה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי $e(x)=f[x_0\dots x_n,x]\prod_{i=0}^n(x-x_i)$.

טענה: תהא $f\in C([a,b])$ באשר $f\in C^k((a,b))$ ותהיינה $x_0\dots x_k\in[a,b]$ אזי קיימת $c\in(a,b)$ עבורה $f[x_0\dots x_k]=\frac{f^{(k)}(c)}{k!}$.

מסקנה נוסחת השגיאה בפולינום האינטרפולציה: תהא $f\in C([a,b])$ באשר $f\in C^{n+1}((a,b))$ תהיינה $x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי קיימת $c\in(a,b)$ עבורה $e(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^n(x-x_i)$.

מסקנה: תהא $f\in C([a,b])$ באשר $f\in C^{n+1}((a,b))$ תהיינה $x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי קיימת $c\in(a,b)$ עבורה $|e(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right|(b-a)^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f\in C([a,b])$ באשר $f\in C^{n+1}((a,b))$ תהא $M\in\mathbb{R}$ עבורה $\sup|f^{(n+1)}|\le M$ תהיינה $x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\Pi_n$ פ"א אזי $|e(x)|\le\frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

פונקציית ספליין: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ תהא $\{x_0\dots x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$ ויהיו $k,m\in\mathbb{N}$ אזי $f\in C^m([a,b])$ באשר $f\restriction_{[x_{i-1},x_i]}\in\Pi_k$ לכל $i\in\{1\dots n\}$.

הערה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ תהא $\{x_0\dots x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$ אזי פונקציית ספליין ממעלה k הינה פונקציית ספליין ממעלה k וסדר חלקות $k-1$.

אינטרפולנט ליניארי למקוטעין: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ תהא $\{x_0\dots x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$ אזי פונקציית ספליין ממעלה 1.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אזי $f\left[\left\{a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right\}_{i=0}^n\right]=\frac{1}{n!\left(\frac{b-a}{n}\right)^n}\left(\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\right)$.

הפרש מחולק עם חזרה: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ אזי $f[x,x]=f'(x)$.

טענה: תהא $f\in C^1(\mathbb{R})$ אזי $f[x,x]=\lim_{h\to0}f[x,x+h]$.

הפרש מחולק עם חזרות: תהא $f\in C^n(\mathbb{R})$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ בסדר עולה אזי
$$f[x_0\dots x_n]=\begin{cases}\frac{f[x_1\dots x_n]-f[x_0\dots x_{n-1}]}{x_n-x_0} & x_0<x_n\\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} & x_0=x_n\end{cases}.$$

פולינום אינטרפולציית הרמיט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_m\in\mathbb{R}$ ותהא $g:\{x_0\dots x_m\}\to\mathbb{N}_+$ באשר $\sum_{i=0}^mg(x_i)=n+1$ אזי $p\in\Pi_n$ עבורו $p^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)$ לכל $i\in\{0\dots m\}$ ולכל $j\in\{0\dots g(x_i)-1\}$.

משפט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תהיינה $x_0\dots x_m\in\mathbb{R}$ ותהא $g:\{x_0\dots x_m\}\to\mathbb{N}_+$ באשר $\sum_{i=0}^mg(x_i)=n+1$ אזי קיים ויחיד $p\in\Pi_n$ פולינום אינטרפולציית הרמיט.

פונקציית ספליין הרמיט: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ תהא $x_0\dots x_n$ חלוקה של $[a,b]$ ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי פונקציית ספליין ממעלה k וסדר חלקות 1.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $x_0\dots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n-1}f[x_0\dots x_{j+1}]\prod_{i=0}^j(x-x_i)$ פולינום אינטרפולציית הרמיט.

פולינום ברנשטיין: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $k\in\{0\dots n\}$ אזי $B_n^k:[0,1]\to\mathbb{R}$ המוגדר $B_n^k(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\{B_n^k\}_{k=0}^n$ בסיס של Π_n.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $P_n^B:([0,1]\to\mathbb{R})\times[0,1]\to\mathbb{R}$ המוגדרת $P_n^B(f,x)=\sum_{k=0}^nB_n^k(x)\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי
- תהיינה $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ ויהיו $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ אזי $P_n^B(\lambda f+\mu g,x)=\lambda P_n^B(f,x)+\mu P_n^B(g,x)$.
- לכל $k\in\{0\dots n\}$ מתקיים $B_n^k\ge0$.
- תהא $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $P_n^B(c,x)=c$.
- $P_n^B(x,x)=x$.
- $P_n^B(x^2,x)=x^2+\frac1n(x-x^2)$.
- $\sum_{k=0}^nB_n^k(x)\left(\frac{k}{n}-x\right)^2=\frac{x(1-x)}{n}$.
- $B_n^k(x)=xB_{n-1}^{k-1}(x)+(1-x)B_{n-1}^k(x)$.

טענה: תהא $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ותהא $x\in[0,1]$ אזי $f(x)=\lim_{n\to\infty}P_n^B(f,x)$.

מסקנה: תהא $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ותהא $x\in[0,1]$ אזי $\sup\left|f(x)-P_n^B(x)\right|=\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt n}\right)$.

חצי־מכפלה פנימית: יהי V מ"ו נ"ס אזי $H:V^2\to\mathbb{C}$ המקיימת
- הרמיטיות: $\forall a,b\in V.H(a,b)=\overline{H(b,a)}$.
- לינאריות: $\forall a,b,c\in V.\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.H(\alpha a+\beta b,c)=\alpha H(a,c)+\beta H(b,c)$.
- חיוביות: $\forall a\in V.H(a,a)\in\mathbb{R}_+$.

חצי־נורמה מושרית: יהי V מ"ו נ"ס ותהא חצי־מכפלה פנימית H על V אזי $\|a\|=\sqrt{H(a,a)}$.

קירוב ריבועים מינימליים: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל $\mathrm{span}\{v_0\dots v_n\}$ ויהי $u\in L$ אזי $\arg\min_{v\in\mathrm{span}\{v_0\dots v_n\}}(\mathrm{dist}(u,v))$.

משפט: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל $\mathrm{span}\{v_0\dots v_n\}$ יהי $u\in L$ ויהיו $c_0\dots c_n\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum_{i=0}^nc_iv_i$ הינו קירוב ריבועים מינימליים של u)$\Longleftrightarrow$(לכל $k\in\{0\dots n\}$ מתקיים $\sum_{i=0}^nc_i(v_i,v_k)=(u,v_k)$).

טענה: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל $\mathrm{span}\{v_0\dots v_n\}$ יהי $u\in L$ ויהי $v\in\mathrm{span}\{v_0\dots v_n\}$ קירוב ריבועים מינימליים אזי $(v-u)\perp\mathrm{span}\{v_0\dots v_n\}$.

מערכת משוואות נורמלית: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל $\mathrm{span}\{v_0\dots v_n\}$ יהי $u\in L$ ויהיו $c_0\dots c_n\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{i=0}^nc_i(v_i,v_k)=(u,v_k)$.

מסקנה: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0\dots v_n\}\subseteq V$ בת"ל ואורתוגונלית באשר H מכפלה פנימית מעל $\mathrm{span}\{v_0\dots v_n\}$ ויהי $u\in L$ אזי הקירוב ריבועים מינימליים הוא $\sum_{i=0}^n\frac{H(f,v_i)}{H(v_i,v_i)}\cdot v_i$.

מכפלה פנימית ממושקלת: תהא $w\in C^1([a,b])$ חיובית ממש עד כדי קבוצה זניחה אזי $H:C^1([a,b])^2\to\mathbb{R}$ כך $H(f,g)=\int_a^b(f\cdot g\cdot w)$.

טענה: תהא $w\in C^1([a,b])$ חיובית ממש עד כדי קבוצה זניחה אזי מכפלה פנימית ממושקלת w הינה מכפלה פנימית מעל $C^1([a,b])$.

סדרה אורתוגונלית של פולינומים: תהא H מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}[x]$ אזי $\{q_n\}_{n=0}^\infty\subseteq\mathbb{R}[x]$ באשר $q_n\in\Pi_n$ וכן לכל $i\neq j$ מתקיים $H(q_i,q_j)=0$.

פולינומי לג'נדר: $P_0(x)=1$ וכן $P_1(x)=x$ וכן $P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$.

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת 1 בקטע $[-1,1]$ אזי פולינומי לג'נדר מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ אזי $P_{n+1}(x)=x\cdot P_n(x)-\frac{(P_n,P_n)}{(P_{n-1},P_{n-1})}P_{n-1}(x)$.

פולינומי צ'בישב: $T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos(x))$.

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ בקטע $[-1,1]$ אזי פולינומי צ'בישב מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

טענה: $T_0(x)=1$ וכן $T_1(x)=x$ וכן $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$.

פולינומי לגר: $L_0(x)=1$ וכן $L_1(x)=1-x$ וכן $L_{n+1}(x)=\left(\frac{2n+1}{n+1}-\frac{x}{n+1}\right)L_n(x)-\frac{n}{n+1}L_{n-1}(x)$.

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת e^{-x} בקטע $[0,\infty)$ אזי פולינומי לגר מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

פולינומי הרמיט: $H_0(x)=1$ וכן $H_1(x)=2x$ וכן $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$.

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת e^{-x^2} בקטע $(-\infty, \infty)$ אזי פולינומי הרמיט מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

טענה: תהא $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ ותהא $Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + \sum_{i=0}^{n} f(n+1, i) \cdot Q_i(x)$ סדרה אורתוגונלית של פולינומים אזי

- $f(n+1, i) = -\frac{(xQ_n, Q_i)}{(Q_j, Q_j)}$.
- לכל $i \in \{0 \dots n-2\}$ מתקיים $f(n+1, i) = 0$.

טענה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ באשר $m > n$ וכן עמודות A בת"ל יהי $b \in \mathbb{R}^m$ ויהי $b' \in \mathbb{R}^m$ קירוב ריבועיים מינימליים של b למרחב $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ אזי קיים ויחיד פתרון למערכת $A^TAx = A^Tb$.

טענה: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $f'(x) = p'(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f[x_0 \dots x_n, x] \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)$.

שגיאה בנגזרת: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $e_{f'}(x) = e'_f(x)$.

סדר נקודות חוקי: נקודות $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ עבורן אם $x_i = x_j$ אזי $\{x_i \dots x_j\} = \{x_i\}$.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ בסדר חוקי ותהא $\sigma \in S_{n+1}$ תמורה בסדר חוקי אזי $f[x_0 \dots x_n] = f\left[x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(n)}\right]$.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $f[x_0 \dots x_n, x]$ רציפה.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f[x_0 \dots x_n, x]\right)(x) = f[x_0 \dots x_n, x, x]$.

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $e_{f'}(x) = f[x_0 \dots x_n, x, x]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) + f[x_0 \dots x_n, x]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)$.

מסקנה: תהא $f \in C^1([a,b])$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in [a,b]$ ויהי p פ"א של f אזי קיימים $\zeta, \xi \in (a,b)$ עבורם $f'(x) = p'(x) + \frac{f^{(n+2)}(\zeta)}{(n+2)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)$.

מסקנה: תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי

- אם $\prod_{i=0}^{n}(a - x_i) = 0$ אזי $e_{f'}(a) = \mathcal{O}((b-a)^n)$.
- אם $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)(a) = 0$ אזי $e_{f'}(a) = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+1}\right)$.

סדר הקירוב: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $p \in \mathbb{N}$ מקסימלי עבורו קיים $C \in \mathbb{R}$ וקיים $h \in \left[\min_{i\neq j}\left|x_i - x_j\right|, \max\left|x_i - x_j\right|\right]$ המקיימים $\left|e_{f'}(a)\right| \le Ch^p$.

הערה: תהא שיטת קירוב מעל הנקודות $x_1 \dots x_n$ עם מרחק מקסימלי h בין הנקודות ועם שגיאה $e(x)$ סדר הקירוב של השיטה הוא $p \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו $|e(x)| = \mathcal{O}(h^p)$.

טענה: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ותהא $a \in \mathbb{R} \setminus \{x_0 \dots x_n\}$ עבורה $\{x_0 \dots x_n\}$ סימטריות סביב a אזי $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)(a) = 0$.

סדר דיוק אלגברי: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שגיאה של נוסחת קירוב אזי $n \in \mathbb{N}$ מקסימלי עבורו לכל $p \in \Pi_n$ מתקיים $e_p = 0$.

טענה: תהא $f \in C^m(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי

$$f''(x) = p''(x) + f[x_0 \dots x_n, x, x, x]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) + 2f[x_0 \dots x_n, x, x]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right) + f[x_0 \dots x_n, x]\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right).$$

מסקנה: תהא $f \in C^2([a,b])$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in [a,b]$ ויהי p פ"א של f אזי קיימים $\zeta, \xi, \chi \in (a,b)$ עבורם $f''(x) = p''(x) + \frac{f^{(n+3)}(\zeta)}{(n+3)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right) + + \frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)$.

כלל הפרש קדמי לקירוב נגזרת: תהא $f \in C^2(\mathbb{R})$ יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $h > 0$ אזי $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

טענה: תהא $f \in C^2(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ באשר קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של a בה f'' חסומה אזי סדר קירוב הפרש קדמי הינו $\mathcal{O}(h)$.

כלל הפרש מרכזי לקירוב נגזרת: תהא $f \in C^2(\mathbb{R})$ יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $h > 0$ אזי $\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$.

מסקנה: תהא $f \in C^2(\mathbb{R})$ יהי $a \in \mathbb{R}$ יהי $h > 0$ ויהי p פ"א של f בנקודות $\{a+h, a-h\}$ אזי $p'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$.

טענה: תהא $f \in C^3(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ באשר קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של a בה f''' חסומה אזי סדר קירוב הפרש מרכזי הינו $\mathcal{O}\left(h^2\right)$.

טענה: תהא $f \in C^3(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ באשר קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של a בה f''' חסומה אזי הפרש מרכזי בעל סדר דיוק אלגברי 2.

משפט ריצ'רדסון: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ יהי $a \in \mathbb{R}$ יהי $h > 0$ ותהא D שיטת קירוב ל־$f'(a)$ מסדר $\mathcal{O}\left(h^{2k}\right)$ בעלת הפרש h בין נקודותיה אזי $f'(a) = D(h) + \sum_{i=0}^{\infty} C_i h^{2k+2i}$.

מסקנה קירוב ריצ'רדסון: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ יהי $a \in \mathbb{R}$ יהי $h > 0$ ותהא $D(h)$ שיטת קירוב ל־$f'(a)$ מסדר $\mathcal{O}\left(h^{2k}\right)$ בעלת הפרש h בין נקודותיה אזי $f'(a) = \frac{4^k D(h) - D(2h)}{4^k - 1} + \mathcal{O}\left(h^{2k+2}\right)$.

טענה: תהא $f \in R([a,b])$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $\int_a^b f = \int_a^b p + \int_a^b f[x_0 \dots x_n, x]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,\mathrm{d}x$.

שגיאה באינטגרל: תהא $f \in R([a,b])$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $E\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b e_f(x)\,\mathrm{d}x$.

טענה: תהא $f \in C^{n+1}([a,b])$ ותהיינה $x_0 \dots x_n, k \in \mathbb{R}$ באשר $\max_{i\in[n]}\max_{x\in[a,b]}|x - x_i| \le k(b-a)$ אזי $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| \le \max_{x\in[a,b]}\frac{\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!}(b-a)(k(b-a))^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f \in C^{n+1}([a,b])$ ותהיינה $x_0 \dots x_n, k \in \mathbb{R}$ באשר $\max_{i\in[n]}\max_{x\in[a,b]}|x - x_i| \le k(b-a)$ אזי $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+2}\right)$.

טענה: תהא $f \in C^{n+1}([a,b])$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ באשר $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a,b]$ אזי קיים $\xi \in (a,b)$ עבורו $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $f \in C^{n+1}([a,b])$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ באשר $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a,b]$ אזי $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+2}\right)$.

כלל המלבן לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^1([a,b])$ אזי $(b-a)f(a)$.

מסקנה: תהא $f \in C^1([a,b])$ אזי קיים $\xi \in (a,b)$ עבורו שגיאת כלל המלבן הינה $E\left(\int_a^b f\right) = \frac{(b-a)^2}{2}f'(\xi)$.

כלל הטרפז לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^2([a,b])$ אזי $\frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$.

מסקנה: תהא $f \in C^2([a,b])$ אזי קיים $\xi \in (a,b)$ עבורו שגיאת כלל הטרפז הינה $E\left(\int_a^b f\right) = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$.

טענה: תהא $f \in C^{n+2}([a,b])$ ותהיינה $x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$ באשר $\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,\mathrm{d}x = 0$ וכן $\prod_{i=0}^{n+1}(x - x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a,b]$ אזי קיים $\xi \in (a,b)$ עבורו $E\left(\int_a^b f\right) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n+1}(x - x_i)\,\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $f \in C^{n+2}([a,b])$ ותהיינה $x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$ באשר $\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,\mathrm{d}x = 0$ וכן $\prod_{i=0}^{n+1}(x - x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a,b]$ אזי $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+3}\right)$.

כלל נקודת האמצע לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^2([a,b])$ אזי $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

מסקנה: תהא $f \in C^2([a,b])$ אזי קיים $\xi \in (a,b)$ עבורו שגיאת כלל נקודת האמצע הינה $E\left(\int_a^b f\right) = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$.

טענה: תהא $f \in R([a,b])$ תהיינה $A_0 \dots A_n \in \mathbb{R}$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in [a,b]$ ויהי p פ"א של f אזי (הכלל $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ לקירוב אינטגרל בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות n)$\iff$($\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} A_i p(x_i)$).

מסקנה: תהיינה $f, w \in R([a,b])$ באשר $w \ge 0$ תהיינה $A_0 \dots A_n \in \mathbb{R}$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in [a,b]$ אזי (הכלל $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ לקירוב $\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}x$ בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות n)$\iff$(לכל $i \in \{0 \dots n\}$ מתקיים $A_i = \int_a^b \ell_i(x)w(x)\,\mathrm{d}x$).

כלל סימפסון לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C([a,b])$ אזי $\frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$.

טענה: תהא $f \in C([a,b])$ אזי כלל סימפסון בעל סדר דיוק אלגברי 3.

מסקנה: תהא $f \in C^4([a,b])$ אזי קיים $\xi \in (a,b)$ עבורו שגיאת כלל סימפסון הינה $E\left(\int_a^b f\right) = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{90}$.

כלל הטרפז המורכב לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^2([a,b])$ ותהא $x_0 \dots x_n$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h אזי $T_h(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)$.

מסקנה: תהא $f \in C^2([a,b])$ אזי קיים $\xi \in (a,b)$ עבורו שגיאת כלל הטרפז המורכב הינה $E\left(\int_a^b f\right) = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)$.

מסקנה: תהא $f \in C([a,b])$ גזירה פעמיים באשר $\left|f^{(2)}\right| \le M$ אזי שגיאת כלל הטרפז המורכב הינה $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| \le \frac{(b-a)h^2}{12}M$.

כלל סימפסון המורכב לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C([a,b])$ ותהא $x_0 \dots x_{2M}$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h אזי $S_h(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_{2M}) + 2\sum_{i=1}^{M-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{M} f(x_{2i-1})\right)$.

מסקנה: תהא $f \in C^4([a,b])$ אזי קיים $\xi \in (a,b)$ עבורו שגיאת כלל סימפסון המורכב הינה $E\left(\int_a^b f\right) = -\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi)$.

טענה: תהא $f \in C([a,b])$ ותהא $x_0 \dots x_n$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h אזי $S_h(f) = \frac{4T_h(f) - T_{2h}(f)}{3}$.

כלל הטרפז המורכב עם שגיאה לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^2([a,b])$ תהא $x_0 \dots x_n$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h ותהא $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ אזי $\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left(f(x_i) + \varepsilon_i + f(x_{i+1}) + \varepsilon_{i+1}\right)$.

מסקנה: תהא $f \in C^2([a,b])$ תהא $x_0 \dots x_n$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h ותהא $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ אזי שגיאת כלל הטרפז המורכב עם שגיאה הינה $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| \le \frac{(b-a)h^2}{12}\left|f''(\xi)\right| + (b-a) \cdot \max_{i\in[n]}(\varepsilon_i)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי המקדם הראשי של $T_n(x)$ הינו 2^{n-1}.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\{T_n = 0\} = \left\{\cos\left(\frac{2k+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $|\{T_n = 0\}| = n$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $-1 \le T_n \le 1$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי נקודות הקיצון של T_n בקטע $(-1, 1)$ הינן $\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \mid k \in \{0, \dots, n\}\right\}$.

כלל גאוס לקירוב אינטגרל: תהיינה $f, w \in R([a,b])$ באשר $w \ge 0$ יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$ סדרה אורתוגונלית של פולינומים באשר $\{x_0 \dots x_n\} = \operatorname{sols}(q_{n+1})$ אזי $\sum_{i=0}^{n}\left(\left(\int_a^b \ell_i(x)w(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdot f(x_i)\right)$.

משפט: תהא $w \in R([a,b])$ באשר $w \ge 0$ ותהא $f \in C^{2n+2}([a,b])$ אזי קיים $\xi \in (a,b)$ עבורו שגיאת כלל גאוס הינה $E\left(\int_a^b f\right) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot \int_a^b\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)^2 w(x)\,\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $w \in R([a,b])$ באשר $w \ge 0$ ותהא $f \in C^{2n+2}([a,b])$ אזי כלל גאוס בעל סדר דיוק אלגברי $2n+1$.

טענה: יהי $f \in C^{n+1}([a,b])$ ויהי p פ"א של f אזי קיים $c \in (a,b)$ עבורו $\|e(x)\|_\infty = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \cdot \left\|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right\|_\infty$.

פולינום צ'בישב מתוקן: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\widehat{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$.

פולינום המינימקס: תהא $f \in C([a,b])$ אזי $p \in \Pi_n$ מתוקן עבורו לכל $q \in \Pi_n$ מתקיים $\|f(x) - p(x)\|_\infty \le \|f(x) - q(x)\|_\infty$.

משפט המינימקס לפולינומים: יהי $p \in \Pi_n$ מתוקן בקטע $[-1, 1]$ אזי $\left\|\widehat{T}_n\right\|_\infty \le \|p\|_\infty$.

מסקנה: פולינום המינימקס ממעלה n של x^{n+1} בקטע $[-1, 1]$ הינו $x^{n+1} - \widehat{T}_{n+1}(x)$.

מסקנה: יהי $f \in R([-1, 1])$ פולינום מדרגה $n+1$ ויהי $p \in \Pi_n$ פולינום המינימקס של f אזי p פ"א של f בשורשי $\widehat{T}_{n+1}$.

משפט איפיון כללי לפולינום המינימקס: תהא $f \in C([a,b])$ ויהי $p \in \Pi_n$ מתוקן אזי (p פולינום המינימקס של f)$\iff$(קיימים $t_0 \dots t_{n+1} \in [a,b]$ עבורם $f(t_i) - p(t_i) = \operatorname{sign}(e(t_0)) \cdot (-1)^i \cdot \|f - p\|_\infty$ לכל $i \in \{0, \dots, n+1\}$).

נורמה מושרית על מרחב המטריצות: תהא $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמה אזי $\nu_{\mathrm{M}} : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ המוגדרת $\nu_{\mathrm{M}}(A) = \max_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\left\{\frac{\nu(Ax)}{\nu(x)}\right\}$.

הערה: תהא $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמה אזי נסמן $\nu = \nu_{\mathrm{M}}$.

טענה: תהא $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמה אזי ν נורמה מעל $M_n(\mathbb{R})$.

טענה: תהא $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמה ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\nu(A) = \max_{v\in\mathbb{S}^{n-1}}\{\nu(Av)\}$.

מסקנה: תהא $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמה תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $\nu(Ax) \le \nu(A) \cdot \nu(x)$.

טענה: תהא $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמה ותהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\nu(A \cdot B) \le \nu(A) \cdot \nu(B)$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\|A\|_\infty = \max_{i\in[n]}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\|A\|_1 = \max_{j\in[n]}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|$.

מסקנה: תהיינה $\nu, \eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $m, M > 0$ עבורם $m \cdot \eta(A) \le \nu(A) \le M \cdot \eta(A)$.

ספקטרום של מטריצה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\operatorname{spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A \text{ ע"ע של } \lambda\}$.

רדיוס ספקטראלי: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\rho(A) = \max_{\lambda\in\operatorname{spec}(A)}|\lambda|$.

משפט: תהא $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמה ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\rho(A) \le \nu(A)$.

טענה: תהא $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נורמה אזי $\nu(I) = 1$.

מסקנה: הפונקציה $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right|$ אינה נורמה מושרית.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי קיימת נורמה $\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ עבורה $\nu(A) \le \rho(A) + \varepsilon$.

שגיאה של מערכת משוואות: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי $e = \tilde{x} - x$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי $Ae = r$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי

- $\|b\| \le \|A\|\|x\|$.
- $\|x\| \le \left\|A^{-1}\right\|\|b\|$.
- $\|r\| \le \|A\|\|e\|$.
- $\|e\| \le \left\|A^{-1}\right\|\|r\|$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי

- $\frac{1}{\|A\|} \le \frac{\|e\|}{\|r\|} \le \left\|A^{-1}\right\|$.
- $\frac{1}{\left\|A^{-1}\right\|} \le \frac{\|b\|}{\|x\|} \le \|A\|$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי $\frac{1}{\|A\|\left\|A^{-1}\right\|} \le \frac{\|e\|}{\|r\|} \cdot \frac{\|b\|}{\|x\|} \le \|A\|\left\|A^{-1}\right\|$.

מספר המצב של מטריצה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\left\|A^{-1}\right\|$.

שגיאה יחסית של מערכת משוואות: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי

- $\delta(x) = \frac{\|e\|}{\|x\|}$.
- $\delta(b) = \frac{\|r\|}{\|b\|}$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי $\delta(x) \in \left[\frac{\delta(b)}{\operatorname{cond}(A)}, \operatorname{cond}(A)\,\delta(b)\right]$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $\operatorname{cond}(A) \ge \left|\frac{\max\operatorname{spec}(A)}{\min\operatorname{spec}(A)}\right|$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\operatorname{cond}(A) \ge 1$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ באשר B אינה הפיכה וכן $A \ne B$ אזי $\operatorname{cond}(A) \ge \frac{\|A\|}{\|A - B\|}$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\operatorname{cond}(A) = \max\left\{\frac{\|A\|}{\|A - B\|} \,\middle|\, \det(B) = 0\right\}$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\operatorname{cond}(A) = \frac{\|A\|}{\min\{\|A - B\| \mid \det(B) = 0\}}$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ וכן b ו"ע של $\max\operatorname{spec}(A)$ וכן r ו"ע של $\min\operatorname{spec}(A)$ אזי $\delta(x) = \left|\frac{\max\operatorname{spec}(A)}{\min\operatorname{spec}(A)}\right| \cdot \delta(b)$.

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\operatorname{cond}(AB) \le \operatorname{cond}(A) \cdot \operatorname{cond}(B)$.

שגיאה של מערכת משוואות: תהיינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A + R)\tilde{x} = b$ אזי $e = \tilde{x} - x$.

מסקנה: תהיינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A + R)\tilde{x} = b$ אזי $Ae = -R\tilde{x}$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהיינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ באשר A הפיכה ותהיינה $b, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A + R)\tilde{x} = b$ אזי $\|e\| \le \left\|A^{-1}\right\|\|R\|\|\tilde{x}\|$.

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהיינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ באשר A הפיכה ותהיינה $b, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A + R)\tilde{x} = b$ אזי $\frac{\|e\|}{\|B\|} \cdot \frac{\|A\|}{\|\tilde{x}\|} \le \operatorname{cond}(A)$.

שגיאה של מערכת משוואות: תהיינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A + R)\tilde{x} = b + r$ אזי $e = \tilde{x} - x$.

משפט: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהיינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ באשר A הפיכה ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A + R)\tilde{x} = b + r$ וכן $\|B\| \le \frac{1}{\left\|A^{-1}\right\|}$ אזי $\frac{\|e\|}{\|x\|} \le \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \operatorname{cond}(A)\left(\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)}\left(\frac{\|B\|}{\|A\|} + \frac{\|r\|}{\|b\|}\right)$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ משולשית עליונה והפיכה אזי אלגוריתם גאוס לדירוג בעל סיבוכיות זמן $\mathcal{O}\left(n^2\right)$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי אלגוריתם גאוס לדירוג בעל סיבוכיות זמן $\mathcal{O}\left(n^3\right)$.

משפט פירוק LU: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי קיימות $L, U \in M_n(\mathbb{R})$ באשר U משולשית עליונה וכן L משולשית תחתונה עם 1 על האלכסון הראשי עבורן $A = LU$.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $U_A \in M_n(\mathbb{R})$ המטריצה המשולשית העליונה הראשונה המתקבלת באלגוריתם גאוס.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $L_A \in M_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(L_A)_{i,j} = \frac{(U_A)_{i,j}}{(U_A)_{j,j}}$ באשר $i > j$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי L_A, U_A פירוק LU של A.

אלגוריתם גאוס עם הצרה חלקית: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ויהי $b \in \mathbb{R}^n$ אזי

```
function GaussPartialPivoting(A, b):
    B ← (A|b)
    for i ← [1, ..., n] do
        m ← arg max{(A)_{i,j} | j ∈ [n]}
        [R_1(B), R_m(B)] ← [R_m(B), R_1(B)]
        for j ← [i+1, ..., n] do
            R_j(B) ← R_i(B) − ((A)_{i,j} / (A)_{i,i}) · R_i(B)
        end
        R_i(B) ← (1 / (A)_{i,i}) · R_i(B)
    end
    return ( C_1(B) ... C_n(B) ), C_{n+1}(B)
```

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ויהי $b \in \mathbb{R}^n$ באשר A, b מיוצגים בעזרת נקודה צפה אזי $e(\text{GaussPartialPivoting}(A, b)) \le e(\text{GaussElimination}(A, b))$ במציאת פתרון למשוואה $Ax = b$.

משפט פירוק QR: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי קיימות $Q, R \in M_n(\mathbb{R})$ באשר Q אורתוגונלית וכן R משולשית עליונה עבורן $A = QR$.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהא $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ תוצאת גרם־שמידט על $C_1(A), \dots, C_n(A)$ אזי $Q_A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $R_A \in M_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(R_A)_{i,j} = \left\langle C_j(A), C_i(Q_A)\right\rangle$ באשר $i \le j$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי Q_A, R_A פירוק QR של A.

טענה: תהא $Q \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית אזי $\operatorname{cond}(Q) = 1$ בנורמה המושרית הסטנדרטית.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $i \in [n]$ אזי $r_i = \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}}\left|(A)_{i,j}\right|$.

משפט העיגולים של גרשגורין: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי לכל $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ קיים $i \in [n]$ עבורו $\left|\lambda - (A)_{i,i}\right| \le r_i$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ אזי $\min_{i\in[n]}\left(\left|(A)_{i,i} - r_i\right|\right) \le |\lambda| \le \rho(A) \le \max_{i\in[n]}\left(\left|(A)_{i,i} - r_i\right|\right) = \|A\|_\infty$.

מטריצה בעלת אלכסון דומיננטי בשורות: מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ עבורה לכל $i \in [n]$ מתקיים $\left|(A)_{i,i}\right| > r_i$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ בעלת אלכסון דומיננטי בשורות אזי A הפיכה.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ באשר $\rho(A) < 1$ ויהי $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ אזי $c(A - I)$ הפיכה.

מנת רליי: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\sigma : \mathbb{R}^n\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ המוגדרת $\sigma(x) = \frac{x^TAx}{x^Tx}$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ יהי $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ ו"ע של λ אזי $\sigma(v) = \lambda$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ אזי $\sigma(v) = v^TAv$.

משפט שיטת החזקה: יהיו $\lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ באשר $|\lambda_i| \ge \left|\lambda_j\right|$ לכל $i < j$ יהי $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ באשר $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ יהיו $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ יהיו $C_1 \dots C_m \in \mathbb{R}$ באשר $C_1 \ne 0$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ עבורה $v_1 \dots v_m$ קבוצת ו"ע בת"ל מקסימלית וכן v_i ו"ע של λ_i לכל $i \in [m]$ אזי

- $\lim_{k\to\infty}\sigma\left(A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} C_iv_i\right)\right) = \lambda_1$.
- קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ עבורו $\left|\sigma\left(A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} C_iv_i\right)\right) - \lambda_1\right| \le \alpha \cdot \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$.

- אם A סימטרית אזי קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ עבורו $\left|\sigma\left(A^{k}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_{i}v_{i}\right)\right)-\lambda_{1}\right|\leq\alpha\cdot\left|\frac{\lambda_{2}}{\lambda_{1}}\right|^{2k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$.
- $\lim_{k\to\infty}\frac{A^{k}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_{i}v_{i}\right)}{\lambda_{1}^{k}}=C_{1}v_{1}$.

טענה: יהיו $\lambda_{2},\ldots,\lambda_{m}\in\mathbb{C}$ באשר $\left|\lambda_{i}\right|\geq\left|\lambda_{j}\right|$ לכל $i<j$ יהי $\lambda_{1}\in\mathbb{R}$ באשר $\left|\lambda_{1}\right|>\left|\lambda_{2}\right|$ יהיו $v_{1}\ldots v_{m}\in\mathbb{R}^{n}$ יהיו $C_{1}\ldots C_{m}\in\mathbb{R}$ באשר $C_{1}\neq0$ ותהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $v_{1}\ldots v_{m}$ קבוצת ו"ע בת"ל מקסימלית וכן v_{i} ו"ע של λ_{i} לכל $i\in[m]$ אזי $\left|\lambda_{1}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{\left\Vert A^{k+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_{i}v_{i}\right)\right\Vert _{2}}{\left\Vert A^{k}\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}C_{i}v_{i}\right)\right\Vert _{2}}$.

משפט שיטת החזקה ההפוכה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ יהי $\mu\in\mathbb{R}\backslash\mathrm{spec}\left(A\right)$ ויהי $\lambda\in\mathrm{spec}\left(A\right)$ עם ו"ע $v\in\mathbb{R}\backslash\left\{ 0\right\}$ אזי $\left(A-\mu I\right)^{-1}v=\frac{1}{\lambda-\mu}v$.

פירוק SVD: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $A=U\Sigma V^{T}$ באשר $V\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ אורתוגונלית וכן $U\in M_{m}\left(\mathbb{R}\right)$ אורתוגונלית וכן $\Sigma\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ אלכסונית אי־שלילית עבורה $\left(\Sigma\right)_{i,i}\leq\left(\Sigma\right)_{j,j}$ לכל $i\geq j$.

ערכים סינגולריים: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $A=U\Sigma V^{T}$ פירוק SVD אזי $\mathrm{Sing}\left(A\right)=\left\{ \left(\Sigma\right)_{i,i}\mid i\in\left[\min\left\{ n,m\right\} \right]\right\}$.

וקטורים סינגולריים ימניים: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $A=U\Sigma V^{T}$ פירוק SVD אזי $\left\{ C_{i}\left(V\right)\mid i\in[n]\right\}$.

וקטורים סינגולריים שמאליים: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $A=U\Sigma V^{T}$ פירוק SVD אזי $\left\{ C_{i}\left(U\right)\mid i\in[m]\right\}$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{spec}\left(AA^{T}\right)\cup\left\{ 0\right\} =\mathrm{spec}\left(A^{T}A\right)\cup\left\{ 0\right\}$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ בעלת פירוק SVD אזי $\mathrm{spec}\left(A^{T}A\right)\cup\left\{ 0\right\} =\left\{ \sigma^{2}\mid\sigma\in\mathrm{Sing}\left(A\right)\right\} \cup\left\{ 0\right\}$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ בעלת פירוק SVD אזי הוקטורים הסינגולריים הימניים של A הם ו"ע של $A^{T}A$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ בעלת פירוק SVD אזי הוקטורים הסינגולריים השמאליים של A הם ו"ע של AA^{T}.

סימון: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ יהי $A=U\Sigma V^{T}$ פירוק SVD ויהי $i\in\left[\min\left\{ n,m\right\} \right]$ עבורו הע"ע של $C_{i}\left(V\right)$ בתור ו"ע של $A^{T}A$ שווה לע"ע של $C_{i}\left(U\right)$ בתור ו"ע של AA^{T} אזי $C_{i}\left(V\right)\sim C_{i}\left(U\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $A=U\Sigma V^{T}$ פירוק SVD אזי $\left\{ A\cdot C_{i}\left(V\right)\mid\left(i\in\left[\min\left\{ n,m\right\} \right]\right)\wedge\left(C_{i}\left(V\right)\sim C_{i}\left(U\right)\right)\right\}$ אורתוגונליים וכן הינם ו"ע של AA^{T}.

אלגוריתם למציאת פירוק SVD: יהיו $m,n\in\mathbb{N}_{+}$ באשר $n\geq m$ ותהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי

```
function SVD(A):
    (V, D) ← OrthogonalDiagonalization(A^T A) // such that ∀i ≤ j ∈ [n].(D)_{i,i} ≥ (D)_{j,j}
    S ← √D
    Σ ← M_{m×n}(ℝ)
    for i ∈ [m] do
        for j ∈ [n] do
            (Σ)_{i,j} ← (S)_{i,j}
        end
    end
    U ← M_m(ℝ)
    U ← GrahamSchmidt( 1/(S)_{1,1} A · C_1(V), ..., 1/(S)_{rank(A),rank(A)} A · C_{rank(A)}(V) )
    return (U, Σ, V^T)
```

משפט: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי A בעלת פירוק SVD.

משפט יחידות פירוק SVD: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $A=U\Sigma V^{T}$ פירוק SVD באשר $\left(\Sigma\right)_{i,i}\neq\left(\Sigma\right)_{j,j}$ לכל $i\neq j$ אזי קיים ויחיד פירוק SVD עד כדי סימן הוקטורים הסנגולריים.

משפט יחידות פירוק SVD: תהא $A\in M_{n\times m}\left(\mathbb{C}\right)$ ויהי $A=U\Sigma V^{T}$ פירוק SVD באשר $\left(\Sigma\right)_{i,i}\neq\left(\Sigma\right)_{j,j}$ לכל $i\neq j$ אזי קיים ויחיד פירוק SVD עד כדי הכפלת הוקטורים הסנגולריים ב־$\left\{ 1,-1,i,-i\right\}$.

מסקנה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי $\mathrm{Sing}\left(A\right)=\left\{ \left|\lambda\right|\mid\lambda\in\mathrm{spec}\left(A\right)\right\}$.