אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}$.
- לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\varnothing \in \mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$.

σ־אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}$.
- לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\varnothing \in \mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$.

משפט: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $\mathcal{F}$ הינה אלגברה מעל Ω.

פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1 \ldots B_n \in \mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(B_i\right)$.

מידה על אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ אדטיבית.

פונקציה σ־אדטיבית: פונקציה $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ המקיימת לכל $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i\right)$.

מידה על σ־אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ σ־אדטיבית.

מרחב מדיד: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $(\Omega, \mathcal{F})$.

קבוצה מדידה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $E \in \mathcal{F}$.

למה: תהא μ מידה על $\mathcal{F}$ המקיימת $\exists E \in \mathcal{F}.\mu(E) < 0$ אזי $\mu(\varnothing) = 0$.

למה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ אזי μ אדטיבית.

למה: תהא μ מידה ותהיינה $A, B \in \mathcal{F}$ עבורן $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$.

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי

- מונוטונית עולה חלש: $\forall n \in \mathbb{N}.A_n \subseteq A_{n+1}$.
- מונוטונית יורדת חלש: $\forall n \in \mathbb{N}.A_{n+1} \subseteq A_n$.

סופרמום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\sup(A) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

אינפימום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\inf(A) = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

גבול עליון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$.

גבול תחתון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$.

גבול: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ עבורה $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ אזי $\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$.

טענה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n\to\infty} A_n = B$ אזי $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$.

מרחב מידה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה/σ־אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על $\mathcal{F}$ אזי $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

מידת הסתברות: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ המקיימת $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

מרחב הסתברות: מרחב מידה $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ עבורו μ מידת הסתברות.

מרחב התוצאות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מאורע: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $E \in \mathcal{F}$.

מרחב המאורעות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $\mathcal{F}$.

אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $((0,1], \mathcal{F}, \mathbb{P})$ עבורו לכל $A \subseteq (0,1]$ ולכל $b \in (0,1]$ באשר $A + b \subseteq (0,1]$ מתקיים $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A + b)$.

טענה: לכל מרחב הסתברות $\left((0,1], 2^{(0,1]}, \mathbb{P}\right)$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.

קבוצה פתוחה: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה $\forall x \in A.\exists \varepsilon > 0.\,(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$.

קבוצה סגורה: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה $A^{\mathcal{C}}$ פתוחה.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ σ־אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ הינה σ־אלגברה מעל Ω.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}$: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$.

קבוצה בורלית: $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

טענה: σ־אלגברה בורלית הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$ המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω ותהא $A\subseteq\Omega$ אזי $\{E\cap A\mid E\in\mathcal{F}\}$ הינה σ־אלגברה מעל A.

σ־אלגברה בורלית מעל $(0,1]$: $\mathfrak{B}_{(0,1]}=\{B\cap(0,1]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$.

מידת לבג: תהא $B\in\mathfrak{B}$ אזי $\lambda(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)\mid B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right\}$.

טענה: $\left((0,1],\mathfrak{B}_{(0,1]},\lambda\right)$ מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

מרחב אחיד על A: עבור $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(A,\mathfrak{B}_A,\lambda)$.

σ־אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T}\subseteq2^{\Omega}$ ותהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל Ω המכילות את $\mathcal{T}$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

הצילינדר של ה־σ־אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T}\subseteq2^{\Omega}$ ו־σ־אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי $\mathcal{T}$.

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha+1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\mid A_n\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha}$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\mathcal{F}_{\omega_1}$ כאשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T}\subseteq2^{\Omega}$ ויהיו $\omega,\kappa\in\Omega$ עבורן $\forall A\in\mathcal{T}.\omega\in A\Longleftrightarrow\kappa\in A$ אזי $\forall A\in\sigma(\mathcal{T}).\omega\in A\Longleftrightarrow\kappa\in A$.

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ עבורה $\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1}[B]\in\mathcal{F}$.

פונקציה מדידה בורל: $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.\varphi^{-1}[B]\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

סימון: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ כך $\mathbb{P}_X(B)=\mathbb{P}\left(X^{-1}[B]\right)$.

טענה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ מ"מ אזי $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mathbb{P}_X)$ מרחב הסתברות.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ אזי
- $f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}\left[A^{\mathcal{C}}\right]=f^{-1}[A]^{\mathcal{C}}$.

טענה: יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדיד ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}$ אזי $\left\{E\subseteq\mathbb{R}\mid X^{-1}[E]\in\mathcal{F}\right\}$ הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

משפט: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}$ אזי (X מ"מ)$\Longleftrightarrow\left(\forall t\in\mathbb{R}.X^{-1}[(-\infty,t)]\in\mathcal{F}\right)$.

σ־אלגברה נוצרת על ידי משתנה מקרי: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי $\sigma(X)=\sigma\left(\left\{X^{-1}[B]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\right\}\right)$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי
- יהי $c\in\mathbb{R}$ אזי cX מ"מ.
- $X+Y$ מ"מ.
- XY מ"מ.
- יהי Z מ"מ על $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$ אזי $f\circ X$ מ"מ.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה אזי $f^{-1}[\mathcal{U}]$ פתוחה.

מסקנה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ אזי f מ"מ על $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$.

פונקציית התפלגות מצטברת (פה"מ): יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ המקיימת $F_X(t)=\mathbb{P}(X\le t)$.

טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי
- $\lim_{t\to\infty}F_X(t)=1$.
- $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0$.
- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t\to a^+}F_X(t)=F_X(a)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$.

למה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}_0\subseteq2^{\Omega}$ סגורה לחיתוכים סופיים עבורה $\Omega\in\mathcal{F}_0$ ותהא $\mathcal{F}\subseteq2^{\Omega}$ סגורה להפרשים וסגורה לגבולות אינסופיים עבורה $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}$ אזי $\sigma(\mathcal{F}_0)\subseteq\mathcal{F}$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $(F_X=F_Y)\Longleftrightarrow(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)$.

תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\mathrm{supp}(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid\forall\varepsilon>0.\mathbb{P}(t-\varepsilon<X<t+\varepsilon)>0\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $\mathrm{supp}(X)$ הקבוצה הסגורה המינימלית ב־$\mathbb{R}$ עבורה $\mathbb{P}(X\in\mathrm{supp}(X))=1$.

אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $t\in\mathbb{R}$ המקיים $\mathbb{P}(X=t)>0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי $A_X=\{t\in\mathbb{R}\mid X\text{ אטום של }t\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $|A_X| \le \aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי X המקיים $\mathbb{P}(X \in A_X) = 1$.

פונקציית צפיפות: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f \ge 0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי X עבורו קיימת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a < b$ מתקיים $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

סימון: יהי X מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של X.

טענה: יהי X מ"מ אזי (X רציף)$\Longleftrightarrow$($\mathbb{P}(X \in A_X) = 0$).

הערה: לא כל משתנה מקרה הוא בדיד או רציף, ובמקרה זה $0 < \mathbb{P}(X \in A_X) < 1$.

טענה: יהי X מ"מ רציף אזי

- יהי $t \in \mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X = t) = 0$.
- $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,\mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $a \in \mathbb{R}$ עבורה $f_X \in C(a)$ אזי $F'_X(a) = f_X(a)$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ממש עד אשר $F_X = 1$ ויהי $p \in (0,1)$ אזי $x_p \in \mathbb{R}$ המקיים $F_X(x_p) = p$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ויהי $p \in (0,1)$ אזי $x_p = \sup\{t \mid F_X(t) \le p\}$.

טענה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ אזי קיים מ"מ X על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ עבורו $F_X = F$.

סימון: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ אזי $X^\star(s) = \sup\{t \mid F(t) \le s\}$.

טענה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ אזי $X^\star$ מ"מ על $\left((0,1), \mathfrak{B}_{(0,1)}, \lambda\right)$.

משפט: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ אזי $F_{X^\star} = F$.

התפלגות ברנולי: יהי $p \in [0,1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X אינדיקטור להצלחה בניסוי בעל סיכוי הצלחה p וסיכוי כישלון $1-p$.
- פונקציית הסתברות: $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- סימון: $X \sim \text{Ber}(p)$.

התפלגות בינומית: יהי $p \in [0,1]$ ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר הניסויים שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p לניסוי.
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \{0, \ldots, n\}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- סימון: $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

התפלגות גאומטרית: יהי $p \in [0,1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל.
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.
- סימון: $X \sim \text{Geo}(p)$.

התפלגות פואסונית: יהי $\lambda > 0$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר האירועים שקרו בפרק זמן נתון בעל קצב אירועים בפרק זמן זה λ.
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
- סימון: $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.

טענה: יהי $\lambda > 0$ ויהי $X_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ מ"מ יהי $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ מ"מ ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$.

תהליך פואסון: משתנים מקריים $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ כך שלכל $t \in \mathbb{R}_+$ המ"מ N_t סופר את מספר האירועים בלתי תלויים שקרו עד זמן t, בפרט $N_0 = 0$ וכן $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poi}(\lambda t)$ באשר λ ממוצע האירועים ליחידת זמן.

התפלגות אחידה: יהיו $a < b$ אזי

- המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקטע (a, b).
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \le a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a,b) \\ 1 & t \ge b \end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

- סימון: $X\sim \text{Uni}\left(a,b\right)$.

התפלגות מעריכית: יהי $\lambda>0$ אזי

- המשתנה המקרי: X משך חיים של תהליך הנמשך λ יחידות זמן בממוצע.
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_{X}\left(t\right)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda t} & t\geq0\\ 0 & t<0 \end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_{X}\left(t\right)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t\geq0\\ 0 & t<0 \end{cases}$.
- סימון: $X\sim \text{Exp}\left(\lambda\right)$.

טענה: יהי $\lambda>0$ יהי $X\sim \text{Exp}\left(\lambda\right)$ ויהיו $a,b>0$ אזי $\mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a\right)=\mathbb{P}\left(X>b\right)$.

טענה: יהי X מ"מ המקיים $\forall a,b>0.\mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a\right)=\mathbb{P}\left(X>b\right)$ אזי קיים $\lambda>0$ עבורו $X\sim \text{Exp}\left(\lambda\right)$.

טענה: הזמן הבינמופעי של תהליך פואסון עם קצב λ מופעים ליחידת זמן מתפלג $\text{Exp}\left(\lambda\right)$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על, עולה ממש וגזירה אזי $f_{\varphi\circ X}\left(t\right)=\frac{f_{X}\left(\varphi^{-1}\left(t\right)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(t\right)\right)}$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על, יורדת ממש וגזירה אזי $f_{\varphi\circ X}\left(t\right)=-\frac{f_{X}\left(\varphi^{-1}\left(t\right)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(t\right)\right)}$.

הגדרה: יהי X מ"מ אזי $X^{+}=\max\left\{ X,0\right\}$,$X^{-}=\min\left\{ X,0\right\}$.

תוחלת: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_{c\in A_{X}}c\cdot\mathbb{P}\left(X=c\right)$.

טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[X^{+}\right]+\mathbb{E}\left[X^{-}\right]$.

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו $\mathbb{E}\left[X\right]$ סופי.

משתנה מקרי סימטרי: יהי $a\in\mathbb{R}$ אזי מ"מ X עבורו $\forall b\in\mathbb{R}.\mathbb{P}\left(X\geq a+k\right)=\mathbb{P}\left(X\leq a-k\right)$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי סימטרי סביב a אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=a$.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}\left[aX+b\right]=a\mathbb{E}\left[X\right]+b$.

משתנה מקרי שולט: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט על Y אם $Y\leq X$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $Y\geq X$ מ"מ בדידים אזי $\mathbb{E}\left[X\right]\geq\mathbb{E}\left[Y\right]$.

תוחלת: יהי X מ"מ אזי

- $\mathbb{E}\left[X^{+}\right]=\sup\left\{ \mathbb{E}\left[Y\right]\mid\left(0\leq Y\leq X^{+}\right)\wedge\left(\text{מ"מ בדיד } Y\right)\right\}$.
- $\mathbb{E}\left[X^{-}\right]=-\sup\left\{ \mathbb{E}\left[Y\right]\mid\left(0\leq Y\leq-X^{-}\right)\wedge\left(\text{מ"מ בדיד } Y\right)\right\}$.
- $\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[X^{+}\right]+\mathbb{E}\left[X^{-}\right]$.

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו $\mathbb{E}\left[X\right]$ סופי.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}\left[aX+b\right]=a\mathbb{E}\left[X\right]+b$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $Y\geq X$ מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]\geq\mathbb{E}\left[Y\right]$.

טענה נוסחת הזנב: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{0}^{\infty}\left(1-F_{X}\left(t\right)\right)\text{d}t+\int_{-\infty}^{0}\left(0-F_{X}\left(t\right)\right)\text{d}t$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}tf_{X}\left(t\right)\text{d}t$.

משתנה מקרי שולט סטוכסטית: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט סטוכסטית על Y אם $F_{Y}\geq F_{X}$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}\left(Y\leq X\right)=1$ אזי X שולט סטוכסטית על Y.

טענה: יהיו X,Y מ"מ

- אם X שולט סטוכסטית על Y אזי $\mathbb{E}\left[Y\right]\leq\mathbb{E}\left[X\right]$.
- אם $\mathbb{P}\left(Y\leq X\right)=1$ אזי $\mathbb{E}\left[Y\right]\leq\mathbb{E}\left[X\right]$.
- חיבוריות: $\mathbb{E}\left[X+Y\right]=\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[Y\right]$.

טענה אי־שיוויון מרקוב: יהי $X\geq0$ מ"מ אינטגרבילי ויהי $b>0$ אזי $\mathbb{P}\left(X\geq b\right)\leq\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{b}$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא φ מדידה בורל אזי $\mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\sum_{c\in A_{X}}\varphi\left(c\right)\cdot\mathbb{P}\left(X=c\right)$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא φ רציפה למקוטעין אזי $\mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(t\right)f_{X}\left(t\right)\text{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{0}^{1}X^{\star}\left(t\right)\text{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום מלרע אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0}^{1-\varepsilon}X^{\star}\left(t\right)\text{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום מלעיל אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^{1}X^{\star}\left(t\right)\text{d}t$.

שונות: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\text{Var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^{2}\right]$.

סטיית תקן: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\sigma\left(X\right)=\sqrt{\text{Var}\left(X\right)}$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\text{Var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left[X^{2}\right]-\mathbb{E}^{2}\left[X\right]$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\text{Var}(aX+b)=a^2\text{Var}(X)$.

טענה אי־שיוויון צ'בישב: יהי X מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי $a>0$ אזי $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\ge a)\le\frac{\text{Var}(X)}{a^2}$.

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $M_X(t)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_X\in C^n(I)$ אזי $M_X^{(n)}(0)=\mathbb{E}[X^n]$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_X(t)$ קיים וסופי על I אזי $\mathbb{E}[|X|^n]$ מתכנס לכל $n\in\mathbb{N}$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי $\varepsilon>0$ עבורו $M_X(t)$ קיים וסופי על $(-\varepsilon,\varepsilon)$ אזי $M_X(t)=\sum_{n=0}^{n}\frac{t^n\mathbb{E}[X^n]}{n!}$.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}^n$: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}^n$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

משתנה מקרי n־מימדי: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ עבורה $\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}.X^{-1}[B]\in\mathcal{F}$.

משפט: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ אזי (X מ"מ)$\iff\left(\forall t\in\mathbb{R}^n.\forall i\in[n].X_i^{-1}[(-\infty,t)]\in\mathcal{F}\right)$.

סימון: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}\to\mathbb{R}^n$ כך $\mathbb{P}_X(B)=\mathbb{P}\left(X^{-1}[B]\right)$.

טענה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ מ"מ אזי $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n},\mathbb{P}_X)$ מרחב הסתברות.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת: יהי X מ"מ n־מימדי על $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי $F:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ המקיימת $F_X(t)=\mathbb{P}(X_1\le t_1,\ldots,X_n\le t_n)$.

טענה: יהי (X,Y) מ"מ דו־ערכי אזי

- יהי $\ell\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{k\to-\infty}F_{X,Y}(k,\ell)=0$.
- יהי $k\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{\ell\to-\infty}F_{X,Y}(k,\ell)=0$.
- $\lim_{\ell\to\infty}\lim_{k\to\infty}F_{X,Y}(k,\ell)=1$.
- רציפות מימין: יהיו $p,q\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{k\to p^+}\lim_{\ell\to q^+}F_{X,Y}(k,\ell)=F_{X,Y}(p,q)$.

טענה: יהי (X,Y) מ"מ דו־ערכי ויהיו $k_1<k_2$ וכן $\ell_1<\ell_2$ אזי $F_{X,Y}(k_2,\ell_2)+F_{X,Y}(k_1,\ell_1)\ge F_{X,Y}(k_2,\ell_1)+F_{X,Y}(k_1,\ell_2)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ n־מימדיים עבורם $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ n־מימדיים אזי $(F_X=F_Y)\iff(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי X_i מ"מ חד־מימדי.

משתנה מקרי שולי: יהי X מ"מ n־מימדי אזי X_i.

פונקציית התפלגות מצטברת שולית: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי

- $F_X(t)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(t,y)$.
- $F_Y(t)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,t)$.

אטום: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $a\in\mathbb{R}^n$ עבורו $\mathbb{P}(X=a)>0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $A_X=\{t\in\mathbb{R}^n\mid t\text{ אטום של }X\}$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $|A_X|\le\aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: X מ"מ n־מימדי עבורו $\mathbb{P}(X\in A_X)=1$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי בדיד אזי $\forall a\in A_X.\mathbb{P}_X(a)=\mathbb{P}(X=a)$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי (X מ"מ בדיד)$\iff$(X_i מ"מ בדיד לכל $i\in[n]$).

פונקציית צפיפות משותפת: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f\ge0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=1$.

משתנה מקרי רציף: X מ"מ n־מימדי עבורו קיימת $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a,b\in\mathbb{R}^n$ המקיימות $a_i<b_i$ מתקיים $\mathbb{P}(a_1<X_1<b_1,\ldots,a_n<X_n<b_n)=\int_{a_n}^{b_n}\ldots\int_{a_1}^{b_1}f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי (X רציף)$\iff$($\mathbb{P}(X\in A_X)=0$).

טענה: הי X מ"מ n־מימדי ויהי $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathbb{P}(X=a)=0$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף אזי $F_X(a)=\int_{-\infty}^{a_n}\ldots\int_{-\infty}^{a_1}f_X(x_1\ldots x_n)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $p:[n]\to[n]$ תמורה אזי $F_X(a)=\int_{-\infty}^{a_{p(n)}}\ldots\int_{-\infty}^{a_{p(1)}}f_X(x_1\ldots x_n)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ עבורה $f_X\in C(a)$ אזי $\frac{\partial^2F_X}{\partial x\partial y}(a)=\frac{\partial^2F_X}{\partial y\partial x}(a)=f_X(a)$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף אזי X_i מ"מ רציף לכל $i\in[n]$.

פונקציית צפיפות שולית: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי

- $f_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(t,y)\,\mathrm{d}y$.
- $f_Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,t)\,\mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ אזי $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X$.

פונקציה מדידה בורל: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המקיימת $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.\varphi^{-1}[B] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי ותהא $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מדידה בורל אזי $\varphi(X)$ מ"מ חד־מימדי.

מסקנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי $f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, s-x)\,\mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי ותהא $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ בורלית רציפה למקוטעין אזי $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1 \ldots x_n) f_X(x_1 \ldots x_n)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$.

שונות משותפת: יהיו X,Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות אזי $\text{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.

משתנים בלתי מתואמים: X,Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות עבורם $\text{Cov}[X,Y] = 0$.

מקדם מתאם: יהיו X,Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

משפט אי־שיוויון קושי־שוורץ: יהיו X,Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי $\mathbb{E}[XY]^2 \le \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]$.

מסקנה: יהיו X,Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי $(\exists c \in \mathbb{R}.\mathbb{P}(Y = cX) = 1) \iff \left(\mathbb{E}[XY]^2 \le \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{E}[Y^2]\right)$.

מסקנה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y} \in [-1,1]$.

מסקנה: יהיו X,Y מ"מ אזי

- $(\rho_{X,Y} = 1) \iff (\exists a > 0.\exists b \in \mathbb{R}.\mathbb{P}(X = aY + b) = 1)$.
- $(\rho_{X,Y} = -1) \iff (\exists a < 0.\exists b \in \mathbb{R}.\mathbb{P}(X = aY + b) = 1)$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\text{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי

- $\text{Cov}[X,X] = \text{Var}[X]$.
- $\text{Cov}[X,Y] = \text{Cov}[Y,X]$.
- $\text{Cov}[aX + b, Y] = a\text{Cov}[X,Y]$.
- $\text{Cov}\left[\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^m Y_i\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m \text{Cov}[X_i, Y_i]$.

משתנים מקריים בלתי תלויים: $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ חד־מימדיים עבורם לכל מאורעות $\{B_i\}_{i=1}^n$ המקיימים $\forall k \in [n].B_k \in \sigma(X_k)$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת ותהיינה $\{g_i\}_{i=1}^n$ פונקציות מדידות בורל אזי $\{g_i(X_i)\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ אזי ($\{X_i\}_{i=1}^n$ ב"ת)$\iff$($F_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$).

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ רציפים אזי ($\{X_i\}_{i=1}^n$ ב"ת)$\iff$($f_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$).

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ רציפים ותהיינה $\{g_i\}_{i=1}^n$ אי־שליליות רציפות למקוטעין המקיימות $f_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$ אזי $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת.

למה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אינטגרביליים אזי $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי $\text{Cov}[X,Y] = 0$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי $\text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי $M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$.

סטטיסטיי הסדר: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $X_{(k)}$ הערך ה־k בגודלו באוסף $\{X_i\}_{i=1}^n$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי

- $F_{X_{(k)}}(t) = \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} \cdot F_{F_{X_1}}(t)^i \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-i}\right)$.
- $f_{X_{(k)}}(t) = n \cdot f_{X_1}(t) \cdot F_{X_1}(t)^{k-1} \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-k}$.

ממוצע מדגמי: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] = \mathbb{E}[X_1]$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\text{Var}\left[\overline{X_n}\right] \to 0$.

התכנסות משתנים מקריים: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי

- התכנסות בהתפלגות: $\left(X_n \xrightarrow{D} X\right) \iff \left(\forall t \in \mathbb{R}.\left(F_X \in C(\{t\})\right) \Longrightarrow \left(F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)\right)\right)$.
- התכנסות בהסתברות: $\left(X_n \xrightarrow{p} X\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0.\mathbb{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$.
- התכנסות כמעט תמיד: $\left(X_n \xrightarrow{a.s.} X\right) \iff \left(\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\right\}\right) = 1\right)$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי $\left(X_n \xrightarrow{a.s.} X\right) \Longrightarrow \left(X_n \xrightarrow{p} X\right) \Longrightarrow \left(X_n \xrightarrow{D} X\right)$.