

**מרכיבים:** מרחב וקטורי  $\mathbb{R}^2$  מעל  $\mathbb{R}$  עם הפעולות הסטנדרטיות.

**סימון:** נסמן את המרכיבים בעזרת  $\mathbb{C}$ .

**הערה:** נשתמש ב- $\mathbb{C}$  בהתאמה  $1 \mapsto (1, 0)$  וכן ההגדרה  $i = (0, 1)$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי קיימים ויחידים  $a, b \in \mathbb{R}$  עבורם  $z = a + ib$ .

**מטריצה קונפורמית:**  $A \in M_2(\mathbb{R})$   $0 \neq A$  המקיימת  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$   $\exists a, b \in \mathbb{R}$ .

**סימון:**  $A \in M_2(\mathbb{R})$  קונפורמית  $\iff O(n) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ קונפורמית}\}$ .

**טענה:** ההעתקה  $T \in \text{Hom}(\mathbb{C}, O(2))$  המוגדרת  $T(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  היא איזומורפיזם.

**טענה:** תהא  $A \in M_2(\mathbb{R})$  אזי  $A \iff A$  קונפורמית  $\iff A$  הפיכה ושומרת זווית.

**מטריצה אנטי-קונפורמית:**  $A \in M_2(\mathbb{R})$   $0 \neq A$  המקיימת  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$   $\exists a, b \in \mathbb{R}$ .

**טענה:** תהא  $A \in M_2(\mathbb{R})$  אזי  $A \iff A$  אנטי-קונפורמית  $\iff A$  הפיכה והופכת זווית.

**משפט:** תהא  $A \in M_2(\mathbb{R})$  אזי קיימות ויחידות  $B, C \in M_2(\mathbb{R})$  באשר  $B$  קונפורמית או  $0$  וכן  $C$  אנטי-קונפורמית או  $0$  עבורן  $A = B + C$ .

**מכפלת מרכיבים:** יהיו  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  אזי  $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ .

**טענה:**  $i^2 = -1$ .

**החלק הממשי:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\text{Re}(a + ib) = a$ .

**החלק המדומה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\text{Im}(a + ib) = b$ .

**הצמוד:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\overline{a + ib} = a - ib$ .

**הערך המוחלט:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**מספר מדומה טהור:**  $z \in \mathbb{C}$  עבורו  $\text{Re}(z) = 0$ .

**מספר ממשי טהור:**  $z \in \mathbb{C}$  עבורו  $\text{Im}(z) = 0$ .

**למה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי

$$\bullet \overline{\overline{z}} = z$$

$$\bullet |\overline{z}| = |z|$$

$$\bullet z\overline{z} = |z|^2$$

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי  $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ .

**מסקנה:**  $\mathbb{C}$  עם הפעולות שהוגדרו מלעיל הינו שדה.

**טענה:** יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$  אזי

$$\bullet \text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\bullet \text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$\bullet \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\bullet \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \text{ נניח כי } w \neq 0$$

$$\bullet |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\bullet \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ נניח כי } w \neq 0$$

$$\bullet -|z| \leq \text{Re}(z) \leq |z|$$

$$\bullet -|z| \leq \text{Im}(z) \leq |z|$$

**טענה אי שיוויון המשולש:** יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$  אזי  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

**טענה אי שיוויון קושי שורץ:** יהיו  $z_1 \dots z_n, w_1 \dots w_n \in \mathbb{C}$  אזי  $\left|\sum_{i=1}^n z_i w_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\right)^{1/2}$ .

**מסקנה:** יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$  ויהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי

$$\bullet |z| - |w| \leq |z - w|$$

$$\bullet |a + ib| \leq |a| + |b|$$

**הצגה פולרית/הצגה קוטבית:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  אזי  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ .

**הארגומנט:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z| e^{i\theta}\}$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי קיים ויחיד  $\theta \in (-\pi, \pi]$  עבורו  $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ .

**הארגומנט העיקרי:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ויהי  $\theta \in \arg(z) \cap (-\pi, \pi]$  אזי  $\text{Arg}(z) = \theta$ .

**הערה:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי הארגומנט העיקרי קיים ויחיד.

**הערה:**  $\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**טענה:** יהיו  $\theta, \phi \in \mathbb{R}$  ויהיו  $r, s \geq 0$  אזי

$$\overline{r \cdot e^{i\theta}} = r \cdot e^{-i\theta} \bullet$$

$$(r \cdot e^{i\theta}) \cdot (s \cdot e^{i\phi}) = rs \cdot e^{i(\theta+\phi)} \bullet$$

**מסקנה:** יהיו  $w, z \in \mathbb{C}$  אזי  $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

**טענה:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  ויהי  $r > 0$  אזי  $(r \cdot e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$

**טענה:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  יהי  $r \geq 0$  ויהי  $n \in \mathbb{Z}$  אזי  $(r \cdot e^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta}$

**מסקנה נוסאת דה מואבר:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  ויהי  $n \in \mathbb{Z}$  אזי  $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

**טענה:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  יהי  $r \geq 0$  ויהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

**מסקנה שורשי יחידה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

**המשפט היסודי של האלגברה:** יהי  $p \in \mathbb{C}_{\geq 1}[x]$  אזי קיים  $x \in \mathbb{C}$  עבורו  $p(x) = 0$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{C}_{\geq 1}[x]$  אזי קיימים  $a_0 \dots a_n \in \mathbb{C}$  עבורם  $p(x) = a_0 \prod_{i=1}^n (x - a_i)$

**הקוטב הצפוני:** נסמן ב- $\mathbb{R}^3$  את  $N = (0, 0, 1)$

**ספירה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

**ההמיספרה העליונה:** כל הנקודות  $(x, y, z) \in S^2$  המקיימות  $z > 0$

**ההמיספרה התחתונה:** כל הנקודות  $(x, y, z) \in S^2$  המקיימות  $z < 0$

**הטלה סטריאוגרפית:** נגדיר  $f: \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$  כך  $f(x + iy) = \left( \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, 1 - \frac{2}{x^2+y^2+1} \right)$

**הערה:** במרחב  $\mathbb{R}^3$  נגדיר את  $\mathbb{C}$  להיות שני הצירים הראשונים, אז הטלה הסטריאוגרפית היא מבחינה מעשית  $f(p) = \text{line}_{p,N} \cap S^1$

**טענה:**  $f$  רציפה.

**טענה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי

$$(z \in S^1) \iff (f(z) = z) \bullet$$

$$(f(z)) \iff (z \text{ מחוץ ל-} S^1) \bullet$$

$$(f(z)) \iff (z \text{ בתוך } S^1) \bullet$$

**טענה:**  $f$  הפיכה ומתקיים  $f^{-1}: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  כך  $f^{-1}(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}$

**סימון:**  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

**הספירה של רימן:**  $f$  ניתנת להרחבה רציפה  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$  וכן  $f(\infty) = N$

**טענה:** תהא  $A \subseteq S^2 \setminus \{N\}$  אזי  $A$  מעגל (או ישר)  $\iff f^{-1}[A]$  מעגל (או ישר).

**מסקנה:** יהי  $C \subseteq S^2 \setminus \{N\}$  מעגל ויהי  $P$  מישור עבורו  $C = P \cap S^2$  אזי  $C = f^{-1}[C']$  (ישר)  $\iff (N \in P)$

**גבול:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ויהי  $z \in \mathbb{C}$  עבורם  $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. |a_n - a| < \varepsilon$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ויהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $(a_n \rightarrow z) \iff (|a_n - z| \rightarrow 0)$

**גבול אינסופי:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  עבורה  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$   $\forall M \in \mathbb{R}. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. M < |a_n|$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a_n \rightarrow \infty) \iff (|a_n| \rightarrow \infty)$

**טענה:** תהיינה  $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ויהיו  $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$  עבורם  $a_n \rightarrow z$  וכן  $b_n \rightarrow w$  אזי

$$a_n + b_n \rightarrow z + w \bullet$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow z \cdot w \bullet$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{z}{w} \text{ אזי } w \neq 0 \bullet$$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ויהי  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  עבורם  $a_n \rightarrow z$  אזי

$$\overline{a_n} \rightarrow \overline{z} \bullet$$

$$|a_n| \rightarrow |z| \bullet$$

$$\text{Re}(a_n) \rightarrow \text{Re}(z) \bullet$$

$$\text{Im}(a_n) \rightarrow \text{Im}(z) \bullet$$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a) \iff (\text{Re}(a), \text{Im}(a))$  מתכנסות.

**מסקנה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a) \iff (a \text{ מתכנסת}) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N. |a_n - a_m| < \varepsilon)$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  המקיימת  $|a_n| \rightarrow 0$  אזי  $a_n \rightarrow 0$

**מסקנה:** תהיינה  $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  באשר  $a$  חסומה וכן  $b_n \rightarrow 0$  אזי  $a_n b_n \rightarrow 0$

**הערה:** מכאן והלאה הסימון  $\mathbb{F}$  יתאר שדה מבין  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  וכאשר נאמר כי  $\mathcal{U}$  פתוחה הכוונה היא ביחס לשדה.

**גבול:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה תהא  $a \in \mathbb{F}_1$  תהא  $A \in \mathbb{F}_2$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$  עבורה

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \iff \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall z \in \mathcal{U} \setminus \{a\}. |z - a| < \delta \implies |f(z) - A| < \varepsilon$$

**משפט היינה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה אזי  $(\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A) \iff (\forall b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}. (b_n \rightarrow a) \implies (f(b_n) \rightarrow A))$

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה ותהינה  $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$  באשר  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$  וכן  $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = B$  אזי

$$\lim_{z \rightarrow a} (f + g)(z) = A + B \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} (fg)(z) = AB \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(z) = \frac{A}{B} \quad \text{נניח } B \neq 0 \text{ אזי} \quad \bullet$$

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}$  פתוחה ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  באשר  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$  אזי

$$\lim_{z \rightarrow a} \overline{f(z)} = \overline{A} \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |A| \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(A) \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(A) \quad \bullet$$

**גבול אינסופי:** תהא  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ויהי  $a \in \mathbb{C}$

• שאיפה לאינסוף בנקודה: אם  $\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}. |z - a| < \delta \implies M < |f(z)|$  אזי  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

• שאיפה לנקודה באינסוף: אם  $\forall \varepsilon > 0. \exists R > 0. \forall z \in \mathbb{C}. R < |z| \implies |f(z) - a| < \varepsilon$  אזי  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a$

• שאיפה לאינסוף באינסוף: אם  $\forall M > 0. \exists R > 0. \forall z \in \mathbb{C}. R < |z| \implies M < |f(z)|$  אזי  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$

**פונקציה רציפה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה יהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$  המקיימת  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$

**מסקנה:** כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

**נגזרת:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$  אזי  $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$

**פונקציה הולומורפית:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה אזי  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה על כל  $\mathcal{U}$

**מסקנה:** כל מניפולציות הנגזרת של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

**הערה:** תהא  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  נסמן  $u + iv = f$  עבור  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

**טענה:** תהא  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי  $f$  גזירה  $\iff (v, u)$  גזירות.

**למה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה אזי  $(f' = 0) \iff (\exists c \in \mathbb{C}. f = c)$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a)$

**מסקנה משוואות קושי-רימן:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה אזי  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right) \wedge \left( \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \right)$

**הגדרה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  דיפרנציאבילית אזי

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \bullet$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \bullet$$

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה אזי  $(f \text{ הולומורפית}) \iff \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \right)$

**טענה:** תהא  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $f$  גזירה  $\iff (\exists c \in \mathbb{R}. f = c)$

**משפט:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי  $f$  גזירה ברציפות  $\iff \left( (u, v \in C^1(\mathcal{U})) \wedge \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right) \wedge \left( \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right)$

**לפלסיאן:** תהא  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים אזי  $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

**פונקציה הרמונית:**  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים המקיימת  $\Delta g = 0$

**טענה:** תהא  $f \in C^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  אזי  $u, v$  הרמוניות.

**פונקציה צמודה הרמונית:** תהא  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה  $u + iv$  הולומורפית.

**טענה:** תהא  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ותהא  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  צמודה הרמונית ל- $u$  אזי  $u$  צמודה הרמונית ל- $(-v)$ .

**טענה:** יהי  $\sum_{i=0}^n a_i z^i \in \mathbb{C}[z]$  אזי  $\sum_{i=1}^n a_i i z^{i-1} = \left( \sum_{i=0}^n a_i z^i \right)'$

**טענה:** יהי  $f \in \mathbb{R}[z]$  אזי  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$   $\forall z \in \mathbb{C}$ .

**התכנסות טור:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  אזי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$  עבורה  $\sum_{i=0}^n a_n$  מתכנסת.

**התכנסות נקודתית:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ויהי  $a \in \mathbb{C}$  אזי  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  עבורה  $f_n(a)$  מתכנסת.

**התכנסות במידה שווה (במ"ש):** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ותהא  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  אזי  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall x \in \mathcal{U}. \forall n > N. |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ותהא  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  אזי  $f$  מתכנסת במ"ש  $\iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N. \forall z \in \mathcal{U} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon)$ .

**טענה מבחן M של ווירשטראס להתכנסות:** תהא  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  ותהא  $M \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  עבודה  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$  וכן

$\forall x \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \leq M_n$  אזי  $\sum_{i=0}^n u_i$  מתכנסת בהחלט ובמ"ש.

**טענה:** תהא  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ותהא  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  עבודה  $\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in C(\mathcal{U})$  וכן  $f_n \xrightarrow{u} g$  אזי  $g \in C(\mathcal{U})$ .

**טור חזקות:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  סדרה ויהי  $b \in \mathbb{C}$  אזי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-b)^i$ .

**משפט אבל:** יהי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  טור חזקות אזי קיים  $R \in [0, \infty]$  המקיים

• הטור מתכנס בהחלט על  $|z| < R$ .

• יהי  $0 \leq \rho < R$  אזי הטור מתכנס במ"ש על  $|z| < \rho$ .

• יהי  $|z| > R$  אזי  $\sum a_n z^n$  לא מתכנס.

**טענה:** יהי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  טור חזקות אזי הפונקציה  $\sum a_n z^n$  הולומורפית על  $|z| < R$  ובפרט  $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i)' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1}$

**משפט קושי-הדמר:** יהי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  טור חזקות ויהי  $R$  רדיוס ההתכנסות אזי  $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

**טענה:** יהיו  $g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  פתרונות של המד"ר  $(f'(z) = f(z)) \wedge (f(0) = 1)$  אזי  $g = h$ .

**פונקציה מעריכית:** נגדיר  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  להיות פתרון של המד"ר  $(f'(z) = f(z)) \wedge (f(0) = 1)$ .

**טענה:**  $\exp(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$

**מסקנה:**  $\exp$  מתכנסת על  $\mathbb{C}$ .

**טענה:**  $e^0 = 1, (e^z)' = e^z$  על כל  $\mathbb{C}$ .

**מסקנה:**  $\exp(z) = e^z$ .

**מסקנה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{C}$  אזי  $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $e^z \neq 0$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ .

**קוסינוס:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

**סינוס:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

**טענה:** על כל  $\mathbb{C}$  מתקיים  $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$

**מסקנה:** על כל  $\mathbb{C}$  מתקיים  $\sin(z)' = \cos(z), \cos(z)' = -\sin(z)$ .

**log:** יהי  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי  $\log(w) = \text{sols}(e^z = w)$ .

**טענה:** יהי  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי  $\log(w) = \{\log|w| + i\theta \mid \theta \in \arg(w)\}$ .

**חזקה:** יהי  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ויהי  $b \in \mathbb{C}$  אזי  $a^b = e^{b \log a}$ .

**ענף של arg:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום עבורו  $0 \notin \mathcal{U}$  אזי  $\alpha \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$  המקיימת  $\forall z \in \mathcal{U}. \alpha(z) \in \arg(z)$

**ענף של log:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום עבורו  $0 \notin \mathcal{U}$  אזי  $\ell \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$  המקיימת  $\forall z \in \mathcal{U}. \ell(z) \in \log(z)$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום עבורו  $0 \notin \mathcal{U}$  אזי  $(\text{קיים ענף של arg על } \mathcal{U}) \iff (\text{קיים ענף של log על } \mathcal{U})$ .

**טענה:** בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  לא קיים ענף של log.

**טענה:** יהי  $\ell : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  ענף של log אזי  $\ell$  הולומורפית וכן  $\ell'(z) = \frac{1}{z}$ .

**טענה:**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$  ענף של  $\log(1+z)$  בתחום  $|z| < 1$ .

**אינטגרל:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע ותהא  $f \in C(I, \mathbb{C})$  אזי  $\int_I f(t) dt = \int_I u(t) dt + i \int_I v(t) dt$

**טענה:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע ותהא  $f \in C(I, \mathbb{C})$  אזי  $|\int_I f(t) dt| \leq \int_I |f(t)| dt$

**מסילה:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע אזי  $\gamma \in C(I, \mathbb{C})$ .

**מסילה חלקה למקוטעין:** מסילה  $\gamma$  אשר חלקה עד כדי מספר סופי של נקודות ובהן קיימות נגזרות חד-צדדיות מכל סדר.

**אינטגרל מסילתי:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע ותהא  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה ותהא  $f \in C(\gamma[I], \mathbb{C})$  אזי  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_I f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$

**טענה:** תהא  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה תהא  $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$  עולה וחלקה למקוטעין אזי  $\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$

**המסילה ההפוכה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $-\gamma$ .

**טענה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{-\gamma} f(z) dz = -\int_{\gamma} f(z) dz$

**סכום מסילות:** תהיינה  $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילות אזי  $(\sum \gamma_i)(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & t \in [a_0, a_1] \\ \vdots & \\ \gamma_n(t) & t \in [a_n, a_{n+1}] \end{cases}$

**טענה:** תהיינה  $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילות אזי  $\sum \gamma_i$  מסילה.

**מסקנה:** תהיינה  $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילות אזי  $\int_{\sum \gamma_i} f(z) dz = \sum \int_{\gamma_i} f(z) dz$

**מסילה סגורה:** מסילה  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  המקיימת  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**אינטגרל לפי אורך קשת:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_I f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$ .

**הערה:** מקובל מאוד גם הסימון  $\int_{\gamma} f(z) ds = \int_{\gamma} f(z) |dz|$ .

**אורך מסילה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} |dz|$ .

**טענה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} (f+g) |dz| = \int_{\gamma} f |dz| + \int_{\gamma} g |dz|$ .

**טענה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$ .

**אינטגרל על פי צמוד:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} f(z) \overline{dz} = \int_I \overline{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt$ .

**הגדרה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי

$$\bullet \int_{\gamma} f(z) dx = \frac{1}{2} \left( \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} f(z) \overline{dz} \right)$$

$$\bullet \int_{\gamma} f(z) dy = \frac{1}{2i} \left( \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) \overline{dz} \right)$$

**טענה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} f(z) dz = \left( \int_{\gamma} u(x, y) dx - \int_{\gamma} v(x, y) dy \right) + i \left( \int_{\gamma} u(x, y) dy - \int_{\gamma} v(x, y) dx \right)$

**הערה:** מהמשוואה מעיל ניתן לחשוב על כך שמתקיים  $dz = dx + i dy$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  ותהא  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עבורה  $g' = f$  אזי לכל מסילה  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  מתקיים

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

**משפט קושי למלבן:** יהי  $R \subseteq \mathbb{C}$  מלבן סגור תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה עבורה  $R \subseteq \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ .

**משפט קושי למלבן משופר:** יהי  $R \subseteq \mathbb{C}$  מלבן סגור תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה עבורה  $R \subseteq \mathcal{U}$  יהיו  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \subseteq R \cap \partial R$  ותהא

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_i} (z - \zeta_i) f(z) = 0 \quad i \in [k] \quad \text{מתקיים}$$

**למה:** תהא מסילה  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  סגורה חלקה למקוטעין ותהא  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$  אזי קיים  $k \in \mathbb{Z}$  עבורו  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i k$ .

**מספר הליפופים:** תהא מסילה  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  סגורה חלקה למקוטעין ותהא  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$  אזי מספר הליפופים של  $\gamma$  סביב  $a$

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

**טענה:** תהא  $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$  נגדיר  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  כך  $F(t) = \int_{\alpha}^t f(\tau) d\tau$  אזי  $F$  גזירה וכן  $\frac{dF}{dt} = f$ .

**משפט קושי לדיסק:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ותהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  מסילה סגורה אזי  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

**משפט קושי לדיסק משופר:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח יהיו  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \subseteq D$  תהא  $f : D \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עבורה

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_i} (z - \zeta_i) f(z) = 0 \quad i \in [k] \quad \text{מתקיים}$$

**טענה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  מסילה סגורה ויהי  $a \in \mathbb{C} \setminus D$  אזי  $n(\gamma, a) = 0$ .

**טענה:** תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה ויהיו  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$  עבורן  $[a, b]$  לא נחתכת עם  $\gamma$  אזי  $n(\gamma, a) = n(\gamma, b)$ .

**משפט נוסחת האינטגרל של קושי:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  מסילה סגורה תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי

$$n(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad a \in D \setminus \gamma([\alpha, \beta])$$

**מסקנה משפט הערך הממוצע:** יהי  $r > 0$  יהי  $a \in \mathbb{C}$  ותהא  $f : B_a(r) \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$ .

**סימון:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  מסילה סגורה תהא  $\varphi \in C(\gamma([\alpha, \beta]), \mathbb{C})$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  נגדיר

$$F_n(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n} d\zeta \quad \text{כך } F_n : D \rightarrow \mathbb{C}$$

**טענה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  מסילה סגורה תהא  $\varphi \in C(\gamma([\alpha, \beta]), \mathbb{C})$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי

$$\bullet F_n \text{ רציפה.}$$

$$\bullet F_n \text{ גזירה.}$$

$$\bullet F'_n = n \cdot F_{n+1}$$

**מסקנה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $f \in C^\infty(D)$ .

**מסקנה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$ .

**מסקנה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  בעלת קדומה אזי  $f$  הולומורפית.

**מסקנה משפט מוררה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה לכל  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{U}$  מתקיים  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  אזי  $f$  הולומורפית.

**משפט ליוביל:** תהא  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית וחסומה אזי  $f$  קבועה.

$$\left( (A)_{i,j} = 1 \right) \iff (\{i, j\} \in E(G)) \quad \text{המקיים } A \in M_n(\mathbb{Z}_2) \text{ קודקודים אזי } n \text{ גרף } G \text{ יהי}$$

**טענה:** יהי  $G$  גרף  $k$ -רגולרי אזי  $A$  לכסינה וכן  $\text{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

**טענה:** יהי  $G$  גרף  $k$ -רגולרי ויהי  $\lambda \in \text{spec}(A)$  אזי  $|\lambda| \leq k$ .

**טענה:** יהי  $G$  גרף  $k$ -רגולרי אזי  $k \in \text{spec}(A)$ .

משפט: יהי  $G$  גרף  $k$ -רגולרי אזי  $G$  קשיר  $\iff (r_g(k) = 1)$ .

משפט: תהא  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  המקיימת  $f(z)^2 = z \forall z \in \mathbb{C}$ . אזי  $f$  אינה רציפה ב- $\mathbb{C}$ .