$(a\in\{a_1,\ldots,a_n\})\Longleftrightarrow ((a=a_1)\lor\ldots\lor(a=a_n))$ מתקיים $\{a_1,\ldots,a_n\}$ מתקיים $\{a_1,\ldots,a_n\}$ ביימון: תהא Σ אלפבית אזי Σ^* כל המחרוזות הסופיות באלפבית. $S\subseteq\Sigma^*$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת טענה: יהי עולם Σ תהא Σ תהא Σ ותהא Σ ותהא Σ ותהא Σ ותהא Σ ותהא

- $B \subseteq S \bullet$
- .F סגורה להפעלת S
- $S\subseteq A$ אזי F סגורה להפעלת אוכן $B\subseteq A$ עבורה $A\subseteq \Sigma^*$ אזי $A\subseteq S$

אינדוקציה מנימלית סגורה להפעלת $X_{B,F}\subseteq \Sigma^*$ אזי $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$ ותהא $B\subseteq \Sigma^*$ מינימלית סגורה אינדוקציה מבנית: יהי עולם $B\subseteq X_{B,F}\subseteq \Sigma^*$ מעבורה $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$ אינדוקציה מבנית: יהי עולם $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$ אינדוקציה מבנית: יהי עולם $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$ אינדוקציה מבנית: יהי עולם $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$ אינדוקציה מבנית: יהי עולם $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$ אינדוקציה מבנית: יהי עולם $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$ אינדוקציה מבנית: יהי עולם $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$ אינדוקציה מבנית: יהי עולם $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$ אינדוקציה מבנית: יהי עולם $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i\in I\}$

 $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid (B\subseteq Y)\land (F\text{ Derived Results})\land (F)\}$ אזי ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי ותהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת Y עבורה $Y\subseteq\Sigma^*$ אזי $Y\subseteq\Sigma^*$ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$

 $(p\left(0
ight)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight)\Longrightarrow p\left(n+1
ight)
ight)\Longrightarrow\left(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight)$ אזי עענה על \mathbb{N} אזי עענה על אזי

על ידי הפעלת $a_i) \lor (a_i \in B)$ מתקיים $i \in [n]$ וכן לכל $a_n = a$ וכן עבורה a_1, \ldots, a_n אזי אזי $a \in X_{B,F}$ אזי $a_i \in X_{B,F}$ מתקבל על ידי הפעלת מ־ $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

 $(a \in X_{B,F})$ אזי ($a \in X_{B,F}$) אזי (מיימת סדרת יצירה ל־ $a \in \Sigma^*$ יהי

 $X_{B,F} = igcup_{i=1}^\infty \left\{ a \in \Sigma^* \mid n \;$ מסקנה: $a \in \mathbb{Z}$ בעלת סדרת יצירה באורך

 $\Sigma = \{\wedge, ee, \neg, \Longrightarrow, (,)\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$:עולם תחשיב הפסוקים:

 $a\in \Sigma^*$ יהי תחשיב הפסוקים אזי ביטוי: יהי ביטוי

אזי $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי הגדרה: יהיו

- $.\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)" \bullet$
- $.\lor (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1\lor\omega_2)"$ •
- $\Longrightarrow (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \Longrightarrow \omega_2)" \bullet$
 - $.\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)" \bullet$

.WFF = $X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$:פסוקי חוקי/פסות המוגדרות המוגדרות המוגדרות היטב/ביטוי הוקי/פסוק

 $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ עבורו $p \in \mathrm{WFF}$ יסוקיסודי:

.(") ונגמר עם (") ונגמר עם (") ונגמר עם אזי ער $p \in \mathsf{WFF}$ יהי יהי יהי עם אזי ער פסוק אטומי

 $q_1(q_2 \notin \mathsf{WFF}$ אזי $q_1,q_2 \in \mathsf{WFF}$ מסקנה: יהיו

משפט הקריאה היחידה: יהי אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה: משפט משפט מעריאה משפט משפט משפט הקריאה מיחידה:

- . פסוק אטומי lpha
- $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ •
- $lpha=(etaee\gamma)$ עבורם $eta,\gamma\in \mathrm{WFF}$ פיימים ויחידים •
- $.\alpha = (\beta \Longrightarrow \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ יימים ויחידים
 - $\alpha = (\neg \beta)$ עבורו $\beta \in \text{WFF}$ •

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי $\mathcal{O}\left(\operatorname{len}\left(\alpha\right)\right)$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .¬ .1
- .∧, ∨ .2
 - \Longrightarrow .3

T, true :אמת:

.F, false :שקר

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

 $.TT_\circ$ אזי טבלת האמת של יהינה $(\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow)$ הינה סימון: תהא

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	p	$q \lor p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q

true

false

 $\neg q$

false

true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

 $v:\{p_i\} o \{F,T\}$ השמה: פונקציה

המוגדרת $\overline{v}: \mathsf{WFF} o \{F,T\}$ השמה אזי פונקציה השמה לפסוק: תהא

 $q \wedge p$

true

false

false

false

- $\overline{v}(p) = v(p)$ יהי p פסוק אטומי אזי •
- $.\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$ אזי פסוק אזי
- $.\overline{v}\left(eta\circ\gamma
 ight)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(eta
 ight),\overline{v}\left(\gamma
 ight)
 ight)$ איי הייו eta פסוקים ותהא פעולה בינארית איי

 $ar{v}\left(lpha
ight)=T$ עבורה עבורה אזי $lpha\in\mathsf{WFF}$ עבורה עבורה תהא

 $v \models \alpha$ אזי א מסופקת על ידי מסופקת על ידי $\alpha \in \mathsf{WFF}$ השמה ותהא

 $v \not\models \alpha$ אזי v אזי אזי מסופקת על מסופקת על ידי א מימון: תהא $\alpha \in \mathsf{WFF}$

המוגדרת Var : WFF $ightarrow \mathcal{P}\left(\{p_i\}
ight)$ פונקציה פונקציה בפסוק:

- .Var $(p) = \{p\}$ יהי p פסוק אטומי אזי •
- . $Var(\neg \alpha) = Var(\alpha)$ אזי פסוק מיהי •
- . Var $(\beta \circ \gamma) =$ Var $(\beta) \cup$ Var (γ) אזי אזי פעולה פעולה פעולה פעולה β, γ יהיו •

 $.\overline{v_{1}}\left(lpha
ight)=\overline{v_{2}}\left(lpha
ight)$ אזי $\forall p\in\mathrm{Var}\left(lpha
ight).v_{1}\left(p
ight)=v_{2}\left(p
ight)$ עבורה עבורה

q

true

true

false

false

p

true

false

true

false

 $.TT_{lpha}$ אזי ניתן לייצג את lpha על ידי $lpha\in {
m WFF}$ מסקנה: יהי

 $TT = TT_{\alpha}$ עבורו $\alpha \in \mathsf{WFF}$ קיים שלמה פונקציונלית: עבורה $K \subseteq \{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow\}$ עבורה עבורה עבורה $\alpha \in \mathsf{WFF}$ טענה: $\{\land, \lor, \neg, \Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

. טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה עבורה עבורה אזי $T,\wedge,\vee\in K$ מערכת קשרים עבורה

 $v \models \alpha$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $\alpha \in \mathsf{WFF}$ פסוק פסוק

 $v \models \alpha$ מתקיים עבורו לכל השמה עבורו מחקיים $\alpha \in \mathsf{WFF}$

 $\perp = \alpha$ טאוטולוגיה אזי $\alpha \in \mathsf{WFF}$ טאוטולוגיה

 $\models (\neg \alpha)$ עבורו $\alpha \in \mathsf{WFF}$ שתירה: פסוק

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=\overline{v}\left(eta
ight)$ מתקיים שקולים: פסוקים $lpha,eta\in\mathsf{WFF}$ עבורם לכל השמה v

 $\alpha \equiv \beta$ שקולים אזי $\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}$ סימון: יהיו

 $.v \models lpha$ מתקיים $lpha \in \Gamma$ עבורה עבורה לכל $\Gamma \subseteq WFF$ מתקיים $lpha \in \Gamma$

 $v \models \Gamma$ אזי אוי השמה על ידי השמה קבוצה קבוצה קבוצה קבוצה קבוצה רהא

 $v \models \alpha$ מתקיים $v \models \Gamma$ מתקיים עבורו לכל השמה v המניימת $v \models \alpha$ מתקיים אזיי $\alpha \in \mathsf{WFF}$ מתקיים

 $\Gamma \models \alpha$ אזי מ־ר מכטית מים פסוק נובע מסוק ויהי ויהי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ אזי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$

טענה: יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \bullet$
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \bullet$
 - $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \bullet$
 - $.(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha) \bullet$
 - $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \bullet$
 - $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \bullet$
 - $\neg (\neg \alpha) \equiv \alpha \bullet$
 - $\neg (\alpha \land \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor (\neg \beta) \bullet$
 - $\neg (\alpha \lor \beta) \equiv (\neg \alpha) \land (\neg \beta) \bullet$
 - $.(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor \beta \bullet$

```
.\gamma \models \alpha מתקיים lpha \in \mathsf{WFF} למה: יהי \gamma \in \mathsf{WFF} סתירה אזי לכל
                                                             \Gamma \models \beta אזי \Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta וכן \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta עבורם \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} ויהיו \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} עבורם.
                                                         .\Gamma \models (\neg \alpha) אזי \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta וכן \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta אזי \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} אזי רבורם \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} אזי תהא
                                                                                                                          (\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta)) אזי \alpha, \beta \in WFF טענה: יהיו
                                                                                                                         הצבת פסוק בפסוק: יהיו lpha, arphi \in \mathsf{WFF} ויהי פסוק אטומי אזי הצבת מוק בפסוק:
                                                                                                                                                                      \alpha (\varphi/p) = \varphi אז \alpha = p אם •
                                                                                                                                    lpha\left(arphi/p
ight)=lpha אזי lpha
eq p אטומי וכן lpha פסוק אטומי וכן
                                                                                                                \alpha(\varphi/p) = \neg \beta(\varphi/p) אזי \alpha = \neg \beta עבורו \beta \in \mathsf{WFF}
                                       \alpha\left(\varphi/p\right)=\beta\left(\varphi/p\right)\circ\gamma\left(\varphi/p\right) אזי \alpha=\beta\circ\gamma אם בינארית פעולה בינארית פעולה \beta,\gamma\in\mathsf{WFF} אם קיימים
                                                                                                                        lpha\left(arphi/p
ight)\in\mathsf{WFF} אזי אזי p\in\mathsf{Var}\left(lpha
ight) ויהי lpha,arphi\in\mathsf{WFF} איזי
                                                                                 הצבת בסוקים בפסוק: יהיו p_1 \dots p_n ויהיו lpha, arphi_1 \dots arphi_n \in \mathsf{WFF} היהיו יהיו
                                                                                                                      lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=arphi_{i} אזי i\in\left[n
ight] עבור lpha=p_{i}
                                                                                        lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=lpha אז אז i\in\left[n
ight] לכל לכל lpha
eq p_{i} אם lpha פסוק אטומי וכן
                                                                      lpha \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) = 
eg eta \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) אם קיים eta \in \mathsf{WFF} עבורו lpha = \neg eta אזי lpha = \neg eta
lpha\left(arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight)=eta\left(arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight)\circ אם קיימים eta,\gamma\in שולה בינארית עבורה lpha=eta\circ\gamma אם קיימים eta,\gamma\in
                                                                                                                                                                                      \gamma \left( \varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n \right)
             .\overline{v}\left(lpha\left(arphi/p
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אזי v'\left(p_{j}
ight)=\left\{egin{array}{c}v^{(p_{j})}&i
eq j\\\overline{v}(arphi)&i=j\end{array}
ight. השמה נגדיר השמה v השמה עסענה: יהיו lpha,arphi\in\mathbb{W} אזי מינה אזי מומי ותהא יחשמה ערה השמה נגדיר השמה מוחדים אזי מינה מוחדים וותהא יחשמה ערכה.
מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו p_n יהיו יהיו \alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathsf{WFF} השמה נגדיר השמה עדיר השמה מסקנה הקשר בין הצבות השמה עדיר יהיו
       \overline{v}\left(lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אזי v'\left(p_j
ight)=\left\{egin{array}{ll} v(p_j) & j\notin [n] \\ \overline{v}(arphi_j) & j\in [n] \end{array}
ight. טאוטולוגיה. lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight) טאוטולוגיה יהי lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight) ויהיו lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight) טאוטולוגיה.
                                                                                                                         .NNF = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}} :NNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                    lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{NNF} משפט: יהי אזי קיים אזי קיים
                                                                                                                                                         .Conj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}} יימון:
                                                                                                                                                           .DNF =X_{	ext{Conj},\{ee{}ullet} :DNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                    lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m DNF} אזי קיים lpha\in {
m WFF} אזי יהי
                                                                                                                                                          Disj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\lor\}} יימון:
                                                                                                                                                             .CNF = X_{\mathrm{Disj},\{\wedge\}} :CNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                    lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{CNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF} אזי קיים
                                  A\subseteq N אזי A\subseteq M אזי A\subseteq N מערכת הוכחה: יהי
                                                                                         הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.
                                                                                                       N מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי מערכת מערכת הוכחה
                                                                                                       A אזי אוכחה מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי אקסיומת של מערכת הוכחה
                                                                                                     F מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי בללי היסק של מערכת הוכחה:
                                                                                                                   X_{A,F} אזי המשפטים: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                                            \vdash_{\sigma} \varphi אזי משפט \varphi \in Nויהי הוכחה מערכת מערכת מערכת S
                                                     (\Sigma,N,A,F,\Gamma) אזי \Gamma\subseteq N מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה בעלת הנחות:
                                                        X_{A \cup \Gamma, F} מערכת הנכחה בעלת הנחות אזי (\Sigma, N, A, F, \Gamma) מערכת הנכחה בעלת הנחות אזי
                                                    arphi מערכת יצירה אל סדרת יהי ויהי arphi\in N יכיח עלת מערכת הוכחה מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הוכחה
                                                                                  \Gamma \vdash_{c} \varphiיכיח אזי \varphi \in N הנחות ויהי הנכחה תהיינה מערכת מערכת מערכת הוכחה הנכחה \Gamma \subseteq N
                                                                                                                                                   טענה: תהא \varphi \in N אזי מערכת הוכחה מערכת מענה:
                                                      A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G ותהא A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G אזי קיימת A \subseteq G סופית עבורה A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי קיימת A \subseteq G מתקיים A \subseteq G אזי A \subseteq G כלל היסק המקיים A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G כלל הניתוק: תהא A \subseteq G מערכת הוכחה אזי A \subseteq G
```

```
מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך
```

- $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$ אלפבית:
 - $N = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$:נוסחאות:
- , $A_2=((\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\gamma))\Longrightarrow((\alpha\Longrightarrow\beta)\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow\gamma)))$, $A_1=(\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$:אקטיומות: $A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$
 - $F = \{MP\}$ כללי היסק:

אזי HPC־טענה: יהיו lpha,eta נוסחאות ב

- $\begin{array}{c} . \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \alpha) \ \bullet \\ . \vdash_{\mathrm{HPC}} ((\neg \alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta)) \ \bullet \end{array}$
 - $. \{ \neg \alpha \} \vdash_{\mathsf{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet$

 $\{lpha\} \ igcap_{
m HPC} \ eta$ אזי אויי איזי אויים אדר באשר אויים אויים אויים מסקנה: יהיו lpha, eta ווסחאות ב־HPC מסקנה:

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון ⊢ הוא במערכת HPC.

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$ אזי HPC משפט הדידוקציה: תהיינה הנחות מעל

.Ded $(\Gamma)=\{\alpha\in N\mid \Gamma\vdash\alpha\}$ אזי איי ותהא S ותהא מערכת הוכחה סימון: תהא מערכת הוכחה

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $((\neg(\neg\alpha))\Longrightarrow\alpha)$ אזי $(\Gamma\models\alpha)\Longrightarrow\alpha$ אזי ($\Gamma\models\alpha)\Longrightarrow\alpha$ נוסחה מעל S מערכת הוכחה מערכת הוכחה S עבורה לכל S הנחות מעל S ולכל S מערכת הוכחה מערכת הוכחה מערכת הוכחה אזי S עבורה לכל S הנחות מעל S ולכל S הנחות מעל S הנחו

 $(\Gamma \models lpha) \Longrightarrow \left(\Gamma \vdash_{S} lpha
ight)$ מערכת הוכחה S מערכת הוכחה לכל G הנחות מעל G הנחות מעל מתקיים עבורה לכל מערכת הוכחה מערכת הוכחה שלמה: למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט: HPC מערכת נאותה.

אזי HPC אזי מעל מעל מוחסאות $lpha,eta,\gamma$ ותהיינה HPC למה: תהיינה Γ הנחות מעל

 $.((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$

אזי HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה α, β ותהיינה HPC משפט היינה Γ הנחות מעל

 $((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \land (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$

 $\Gamma \not \models \alpha$ המקיימת S נוסחה מעל עבורה קיימת מעל קבוצת הנחות אזי Γ אזי אזי הוכחה מערכת תהא מערכת הנחות מעל אזי Γ α נוסחה מעל S המקיימת מענה: תהא מערכת הוכחה הנחה הנחה הנחות מעל S הנחות מעל הנחה מעל אזי (Γ הנחות מעל הנחה מעל אזי (Γ

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי ($\Gamma \bigctrup A) \left(\Gamma \bigctrup A) \left(\Gamma \bigctrup A) \left(\Gamma \cap A)$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מעל עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית אזי T קבוצת הנחות עקבית מעלית: תהא מערכת הוכחה S אזי קבוצת הנחות עקבית מעלית: תהא מערכת הוכחה $\Gamma = \Delta$ מתקיים $\Gamma \subseteq \Delta$ ממקיימת S מעל

 $.lpha\in\Gamma$ איי איי HPC איי הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC איי איי $\Gamma\vdash\alpha$ איי קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל

 $(\alpha \in \Gamma) \lor (\neg \alpha \in \Gamma)$ אזי HPC איזי מקסימלית מעל מקסימלית עקבית מקסימלית מעל אויר ותהא $\alpha \in \Gamma$

אזי HPC אוני α,β נוסחאות עקבית מעל אור אורר עקבית עקבית עקבית עקבית קבוצת הנחות עקבית מעל

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \iff ((\neg \alpha \in \Gamma) \lor (\beta \in \Gamma))$

אזי Γ ספיקה. אזי HPC איזי מקסימלית עקבית הנחות עקבוצת הנחות סענה: תהא

 $\Gamma\subseteq \Delta$ טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Γ

. ספיקה Γ אזי HPC טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית הנחות סענה:

 Γ ספיקה). אזי (Γ עקבית) קבוצת הנחות מעל HPC מסקנה: תהא

משפט: HPC מערכת שלמה.

 $(\Gamma \vdash \alpha) \Longleftrightarrow (\Gamma \models \alpha)$ אזי HPC מסקנה: תהיינה HPC מסקנה מעל

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי אז (Γ ספיקה) שפיקה $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

.Ass $(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \to \{F,T\} \mid v \models \Gamma\}$ אזי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ תהא

 $\{p_i\} o \{F,T\}$ טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\} o \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על

. הינה קומפקטית. $\{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \mathsf{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathsf{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

קב $arphi_G:E o { t WFF}$ אזי $(v,u)\in E$ חח"ע ויהיו $f:V o { t WFF}$ אזי מכוון תהא

 $.\varphi_G((v,u)) = "f(v) \Longrightarrow f(u)"$

```
.(סטענה: יהי G) איז איז G חח"ע איז f:V	o WFF ספיקה עלא מכוון ותהא G ספיקה איז G חח"ע איז וותהא
                    .(סופי G' סופי G' סופי G' סופי G' הינו G הינו G' בביע) אזי (G הינו G' בינו G' מסקנה: יהי
                     .(סטענה: סטופי G' סופי G' סופי G' סופי אר הינו G' בביע) איז איז מכוון אזי היי G גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי
                     K=\operatorname{Ass}\left(\Gamma\right) המקיימת \Gamma\subseteq\operatorname{WFF} השמות גדירה: קבוצה K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}\right) עבורה קיימת
                                                                 גדירה, \{v\} השמה v גדירה, לכל \{p_i\} \rightarrow \{F,T\} גדירה, לכל \emptyset
                                                                               . טענה: קיימת K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}\to\{F,T\}\right) שאינה גדירה
                                                                      K_{\text{finite}} = \left\{ v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid \left| v^{-1} \left( \{T\} \right) \right| < \aleph_0 \right\} שימון:
                                                                                                                .טענה: אינה גדירה K_{
m finite}
משפט: תהא K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) התב"ש
                                                                                                          . גזירה וכן K^{\mathcal{C}} גדירה K
                                                                                                             גדירה באופן סופי. K ullet
                                                                                                      . גדירה על ידי פסוק יחיד K ullet
                     \{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i,n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n 	o \Sigma \mid i,n \in \mathbb{N}\}\} מילון: יהי \Sigma אלפבית אזי
                                                                                       C מילון אזי (C,R,F) מילון אזי
                                                                                        R מילון אזי (C,R,F) סימני יחס במילון: יהי
                                                                                    F מילון אזי (C,R,F) מילון: יהי
                                                                מילון סופי של סימנים. \Sigma אלפבית אזי מילון אלפבית מספר סופי של סימנים.
                                                                         מילון יחסי: יהי \Sigma אלפבית אזי מילון \sigma חסר סימני פונקציה.
               \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{"(",")"\}, \{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\}, \{\forall, \exists\}, \sigma\} מילון אזי \sigma מילון אזי \sigma אלפבית ויהי \sigma אלפבית ויהי
                                                                                         \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} משתנים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                         סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: {"(",")"}.
                                                                             \{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\} :קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון
                                                                                           \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} כמתים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                               בה. בה איי המילון אזי המילון לוגיקה מסדר האשון: תהא בה לוגיקה מסדר האשון אזי המילון בה.
                                                           X_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i|i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}|i,n\in\mathbb{N}\}} איי מילון: יהי יהי מילון מילון אזי
                              משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי \sigma מילון ויהי שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
                                                                                                                            .משתנה t
                                                                                                                       .סימן קבוע t \bullet
                                              t=f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight) עבורם t_{1}\dots t_{n} ושמות עצם ויחיד סימן פונקציה f_{i,n}
                                                                                   אזי \alpha \in \sigma אזי משתנה ותהא \sigma מילון יהי משתנה מהגדרה:
                                                                                                               \forall (\alpha, x) = \forall x \alpha •
                                                                                                                \exists (\alpha, x) = "\exists x \alpha" \bullet
```

 $\{R_{n,i}\left(t_1\dots t_n
ight)\mid (i,n\in\mathbb{N})\land ($ נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $t_1\dots t_n\}$ שמות עצם $X_{\{R_{n,i}(t_1...t_n)|(i,n\in\mathbb{N})\land ($ נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $t_1...t_n)\},\{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow,orall,\exists\}$ נוסחאות מעל מילון: יהי

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: σ מילון ותהא σ מילון מהיים בדיוק אחד מהבאים משפט מקריאה היחידה לנוסחאות:

- . נוסחה אטומית α
- $\alpha = "(\neg \beta)$ עבורה β עבורה נוסחה •
- $\alpha = (\beta \circ \gamma)$ עבורן $\alpha \circ \beta$ וכן פעולה בולינארית $\alpha \circ \beta$ וכן פעולה נוסחאות β
 - $\alpha = "Qx\beta$ " עבורם Q עבורם α וכן משתנה α וכן משתנה β

כך FV : $\{t \mid \sigma$ שם עצם במילון ש $t\} o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}
ight)$ כך כדיר

- .FV $(c)=\varnothing$ יהי $c\in\sigma$ סימן קבוע אזי •
- $FV(x) = \{x\}$ משתנה אזי $x \in \sigma$ יהי
- $\mathsf{FV}\left(f\left(t_{1}\dots t_{n}\right)\right)=ig|\mathsf{JFV}\left(t_{i}\right)$ יהיו אזי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $t_{1}\dots t_{n}$

כך FV : $\{arphi \mid \sigma \mid \sigma$ נוסחה במילון $arphi \} o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}
ight)$ כך

```
\mathrm{FV}(R\left(t_{1}\dots t_{n}
ight))=\bigcup\mathrm{FV}\left(t_{i}
ight) אזי יחס אזי ויהי R\in\sigma ויהי שמות עצם ויהי t_{1}\dots t_{n}
```

 $FV(\neg \varphi) = FV(\varphi)$ אזי נוסחה φ נוסחה φ

.FV $(\varphi \circ \psi) = {\sf FV} \, (\varphi) \cup {\sf FV} \, (\psi)$ איי איי פעולה פעולה ויהי פעולה ייהי פעולה φ, ψ נוסחאות ייהי •

 $\operatorname{FV}(Qx\varphi)=\operatorname{FV}(\varphi)\setminus\{x\}$ עבורם Q עבור משתנה x יהי משתנה φ יהי נוסחה φ

 $\mathrm{FV}\left(arphi
ight)=arphi$ עבורה עבורה: נוסחה לוסחה כנוסחה

סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

.∀,∃ .1

.¬ .2

 $.\land,\lor$.3

.⇒ .4

וכן $n\in\mathbb{N}$ חח"ע לכל $R:\{R_{n,i}\} o D^n$ חח"ע וכן $C:\{c_i\} o D$ ותהא חח"ע לכל $D
eq \emptyset$ וכן $(D,C\left(c_{0}\right),\ldots,R\left(R_{2,0}\right),\ldots,f\left(f_{0,0}\right))$ חח"ע אזי $F:\left\{ f_{n,i}
ight\}
ightarrow (D^{n}
ightarrow D)$

D אזי σ אזי מבנה על σ מילון ויהי σ מילון יהי מבנה:

 $D^M=D$ אזי אזי מילון ויהי D מבנה על σ בעל תחום D אזי מילון ויהי

 $(C(c_0),\ldots,R(R_{2.0}),\ldots,f(f_{0.0}))$ אזי מבנה על σ מילון ויהי σ מילון ויהי σ מילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי $f_{n,i}^{M}=F\left(f_{n,i}
ight)$ וכן $R_{n,i}^{M}=R\left(R_{n,i}
ight)$ וכן $c_{i}^{M}=C\left(c_{i}
ight)$ אזי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי

 $.v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\to D^M$ אזי מבנה על מבנה Mויהי מילון יהי השמה: יהי מילון מבנה מ

השמה v יהי ותהא השמה ערך לשם עצם: יהי מילון יהי מילון יהי מילון יהי השמח מילון יהי השמח מילון יהי השמח מילון יהי

 $\overline{v}\left(c_{i}
ight)=c_{i}^{M}$ יהי $c_{i}\in\sigma$ סימן קבוע אזי $c_{i}\in\sigma$

 $\overline{v}\left(x_{i}\right)=v\left(x_{i}\right)$ יהי $x_{i}\in\sigma$ משתנה אזי $x_{i}\in\sigma$

 $.\overline{v}\left(f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight)
ight)=f^{M}\left(\overline{v}\left(t_{1}
ight)\dots\overline{v}\left(t_{n}
ight)
ight)$ יהיו שמות עצם ויהי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $t_{1}\dots t_{n}$

 $\forall x \in \mathsf{FV}(t).v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right)$ שם עצם עבורו t שם עצם תהיינה v_1,v_2 משפט מבנה על מ $.\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t)$ אזי

> השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי σ משתנה ויהי σ מילון יהי מילון יהי מילון יהי σ מבנה על σ $v\left[d/x_{j}
> ight](x_{i})=\left\{egin{array}{ll} v(x_{i}) & i
> eq j \\ d & \mathrm{else} \end{array}
> ight.$ ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא אזי

$$.(\overline{v}\left(R\left(t_{1}\dots t_{n}
ight))=T)\Longleftrightarrow\left(\left(\overline{v}\left(t_{1}
ight),\dots,\overline{v}\left(t_{n}
ight)
ight)\in R^{M}
ight)$$
 יהיו שמות עצם ויהי $R\in\sigma$ סימן יחס אזי $t_{1}\dots t_{n}$

$$.\overline{v}\left(\alpha\circ\beta\right)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\alpha\right),\overline{v}\left(\beta\right)\right)$$
אזי בינארי קשר היינה α,β נוסחאות ויהי קשר בינארי \bullet

.
$$(\overline{v}\,(\exists x arphi) = T) \Longleftrightarrow \left(\exists d \in D^M\left(\overline{v\left[d/x
ight]}\,(arphi) = T
ight)
ight)$$
 . $(\overline{v}\,(\forall x arphi) = T) \Longleftrightarrow \left(\forall d \in D^M\left(\overline{v\left[d/x
ight]}\,(arphi) = T
ight)
ight)$. $(\overline{v}\,(\forall x arphi) = T)$

 $orall x \in \mathsf{FV}(t)$. $v_1(x) = v_2(x)$ משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי m מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ותהא $.\overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi)$ אזי

 $.\overline{v}\left(arphi
ight)=T$ עבורה על מילון מבנה על מילון מבנה על מילון מבנה u תהא מבנה מבנה: יהי

 $M,v \models arphi$ אזי אזי M מבנה על מילון σ תהא תהא σ נוסחה ספיקה ב־M מבנה על מילון יהי

 $M,v \models \varphi$ מבנה ותהא v השמה עבורם $M,v \models \varphi$ מילון תהא $v \models \sigma$ מבנה ותהא v השמה עבורם σ

 $\overline{v}\left(arphi
ight)=T$ מתקיים מתקיים עבורה לכל Γ עבורה לכל עבורה לכל σ מתקיים ע מתקיים σ מתקיים מתקיים σ $M,v\models\Gamma$ אאי א מבנה על מילון σ תהא σ השמה ותהא σ קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M

 $M,v\models arphi$ מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה M והשמה מילון אזי נוסחה מילון אזי נוסחה ספיקה: יהי

סימון: יהי σ מילון תהא T אז (M,v) אז השמה תהא T אז מוסחה עבורה אם נוסחה עבורה אם פוער נוסחאות ותהא σ מילון של

 $\{arphi\} \stackrel{t}{\models} \psi$ וכן $\{\psi\} \stackrel{t}{\models} \varphi$ עבורן φ, ψ עבורן ותהא v השמה v מילון ותהא מילון ותהא יהי σ מילון ותהא

.arphi מבנה על σ ולכל m מבנה לוכל m מבנה לוכל m השמה מתקיים (m,v) מדוד של יהי מילון אזי נוסחה σ עבורה לכל $\stackrel{t}{\models} \varphi$ יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t־תקפה אזי σ

```
M\models arphi עבורו M עבורו \sigma מילון תהא \sigma נוסחה אזי מבנה \sigma
                       M\models arphi מתקיים arphi\in \Gamma עבורה לכל \Gamma עבורה מילון \sigma אזי קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי
                                                                                                                                         M\models\Gamma אזי אזי בכונה ב־M מבנה על מילון \sigma ותהא ותהא \sigma קבוצת נוסחאות נכונה ב־M
                                                                                                                                                   M\models arphi מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה M עבורו יהי \sigma מילון מילון אזי נוסחה עבורה קיים מבנה
\Gamma \models \varphi אזי \varphi אזי \sigma מילון תהא \Gamma אז של \sigma מילון. יהי מילון תהא \sigma נוסחה עבורה אם \sigma נוסחה עבורה אם \sigma
                                                                                                                                       \{arphi\}\stackrel{v}{\models}\psi וכן \{\psi\}\stackrel{v}{\models}arphi עבורן arphi,\psi עבורן אזי נוסחאות \sigma מילון מילון אזי נוסחאות מישקולות: יהי
                                                                                           .arphi מתקיים M מתקיים מבנה על מבנה על עבורה לכל אזי נוסחה \sigma מילון אזי מילון אזי נוסחה מבנה על מבנה על מילון אזי נוסחה מילון אוני נו
                                                                                                                                                                        \sigmaיסימון: יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה v־תקפה אזי \varphi. מסקנה: יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה אזי (\models\varphi)\iff (\models\varphi) מסקנה: יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה תקפה אזי \exists x\varphi תקפה וכן \forall x\varphi תקפה.
                                                                                                                                                                                                 . מענה: יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה עבורה לעכה: יהי \sigma יהי מילון יהי מילון יהי מילון מענה:
                                                                                                          \Gamma = \varphi שענה: יהי \sigma מילון תהא \varphi קבוצת נוסחאות ותהא \varphi נוסחה אזי \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma קבוצת נוסחאות ותהא \varphi נוסחה אזי \sigma
                                                                                                                                                                                                                                                  \operatorname{FV}\left(arphi
ight)=arphi עבורה arphi מילון אזי נוסחה arphi
                                                                                                             \Gamma = \sigma ביאי (ר בוצת פסוקים ותהא \varphi נוסחה אזי (ר בוצת פסוקים ותהא \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא פסוקים ותהא פיים ותהא פיים ותהא פסוקים ותהא פסוקים ותהא פסוקים ותהא פסוקים ותהא פסוקים 
                                                            .(\Gamma \not\models \neg \varphi) מילון תהא \Gamma \cup \{\varphi\} הינה \varphi נוסחה אזי (\varphi \in \neg \varphi) מילון תהא \varphi קבוצת נוסחאות ותהא \varphi
                                                                                                            .(\varphi\Longleftrightarrow\psi))\Longleftrightarrowסענה: יהי \sigma מילון ותהיינה \varphi,\psi נוסחאות אזי (\varphi,\psi הן \varphiישקולות)
                                  .= עזרת את ונסמן את ונסמן \mathrm{Id}^M=\mathrm{Id}_M נגדיר ולכל מבנה M דו־מקומי אזי לכל דו־מקומי מילון בעל יחס שיוויון או דו־מקומי אזי לכל מבנה ו
                                                                                                                                                                                                          אזי משתנה x משתנה אזי אזי יהיו עצם יהיי יהיו יהיו יהיו
                                                                                                                                                                                                                                                                                                   s[r/x] = s אם s סימן קבוע אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        s[r/x] = r אז s = x אם s = x
                                                                                                                                                                                                                                                                                             s\left[ r/x
ight] =s אם s
eq x משתנה אזי
                                                                                                                                                                                                          s\left[r/x
ight]=f\left(t_1\left[r/x
ight]\ldots t_n\left[r/x
ight]
ight) אם s=f\left(t_1\ldots t_n
ight) אם \bullet
                                                                                                                                                                     הצבת שם עצם בנוסחה: תהא \varphi נוסחה יהי r שמות עצם ויהי x משתנה אזי
                                                                                                                                                                                                   .arphi\left[r/x
ight]=R\left(t_{1}\left[r/x
ight]\ldots t_{n}\left[r/x
ight]
ight) אם arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight) אם arphi
                                                                                                                                                                                                                                                                              .arphi\left[r/x
ight]=\lnot\left(lpha\left[r/x
ight]
ight) אזי arphi=\lnotlpha אם ה
                                                                                                                                                                                                                                                     .arphi\left[r/x
ight]=lpha\left[r/x
ight]\circeta\left[r/x
ight] אז arphi=lpha\circeta אם arphi
                                                                                                                                                                                                                                                                                               .arphi\left[r/x
ight]=orall xlpha אזי arphi=orall xlpha •
                                                                                                                                                                                                                                                                                               .arphi\left[r/x
ight]=\exists xlpha אזי arphi=\exists xlpha •
```

 $M,v\modelsarphi$ מבנה על מילון σ אזי נוסחה arphi עבורה לכל v השמה מתקיים מילון M

 $M \models \varphi$ אזי M מבנה על מילון σ ותהא ϕ נוסחה נכונה ב־M אזי מבנה על

 $.arphi\left[r/x
ight]=\exists y\left(lpha\left[r/x
ight]
ight)$ אזי x
eq y באשר $arphi=\exists ylpha$ שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא arphi נוסחה ויהי x משתנה אזי

 $.arphi\left[r/x
ight]=orall y\left(lpha\left[r/x
ight]
ight)$ אז אז arphi=orall ylpha באשר arphi=arphi באשר

- .r אזי שם עצם $arphi=R\left(t_{1}\dots t_{n}
 ight)$ אם ullet
- lphaאם הצבה להצבה ר אוי שם עצם אזי שם אזי להצבה בי arphi
- etaוכן ב־lpha וכן הצבה הופשי להצבה lpha שם עצם אזי שם עצם אזי אזי שם עצם יאזי שם אזי ש
- .rעצם שם אזי ב־ φ אזי חופשי או אינו מופיע או אינו $\varphi = \forall y \alpha$ •
- x אזי שם עצם אזי חופשי ב־arphi אזי אינו מופיע או אינו מופיע א arphi וכן $arphi=\exists y lpha$
- $y\notin \mathrm{FV}\left(r
 ight)$ וכן lphaה בה חופשי להצבה בי אזי שם עצם אזי אזי שם אזי אזי אזי פוכן $x\in \mathrm{FV}\left(arphi
 ight)$
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$ וכן lphaוכן הצבה בישר r אזי שם עצם r אזי שם עצם $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$ וכן $\varphi = \exists y \alpha$

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f:\{$ ווסחאות $\} o \mathcal{P}\left(\{x_i\}
ight)$ כך

- $f(\varphi)=\varnothing$ אזי $\varphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
 ight)$
 - $.f\left(\varphi\right)=f\left(\alpha\right)$ אזי $\varphi=\neg\alpha$ שם •

- $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$ אזי $\varphi = \alpha \circ \beta$ אם
 - $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$ אזי $\varphi = \forall x \alpha$ אם φ
 - $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$ אזי $\varphi = \exists y \alpha$ אם •

עבור חדש עבור $y\in \mathrm{FV}(r)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור r שם עצם אזי (r חופשי להצבה ב־ φ (לכל $y\in \mathrm{FV}(r)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור $y\in \mathrm{FV}(r)$ עבר $y\in \mathrm{FV}(r)$ ט).

 $v\left[\overline{v}(r)/x
ight](y)=\left\{egin{array}{ll} v(y) & x
eq y \\ \overline{v}(r) & ext{else} \end{array}
ight.$ היי s שם עצם אזי נגדיר השמה s יהי s שם עצם איי נגדיר השמה s יהי s שם עצם איי נגדיר השמה איי נגדיר השמה s

 $.\overline{v}\left(s\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(s
ight)$ איז עצם איז משתנה ויהי x משתנה מסקנה: יהי s שם עצם יהי

 $.\overline{v}\left(arphi\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(arphi
ight)$ אזי arphi אזי אזי משתנה ויהי r מסקנה: תהא arphi נוסחה יהי x משתנה ויהי

 $\overline{v}\left(arphi
ight)=\overline{v\left[v(x)/y
ight]}\left(arphi\left[y/x
ight]
ight)$ אזי arphi מסקנה: תהא arphi נוסחה יהיx משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה בarphi אזי

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־ φ אזי

- $.(\exists x\varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi [y/x])) \bullet$
- $.(\forall x\varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi [y/x])) \bullet$

 $X_{\{arphi|}$ מוסחה חסרת כמתים :PNF הצורה הנורמלית

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי (φ בצורת PNF) (קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן α משתנים וכן בצורת φ בצורת (קיימת נוסחה α הסרת כמתים וכן φ בצורת ($\varphi=Q_1x_1\dots Q_nx_n\alpha$

טענה: תהיינה φ,ψ נוסחאות אזי

- $.(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)) \bullet$
- $(\exists x (\varphi \lor \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \lor (\exists x \psi)) \bullet$
- $.((\forall x\varphi)\lor\psi)\equiv^t(\forall x\,(\varphi\lor\psi))$ אזי $x\notin\mathrm{FV}\,(\psi)$ תהא
- $((\exists x\varphi) \land \psi) \equiv^t (\exists x (\varphi \land \psi))$ אזי $x \notin FV(\psi)$ תהא
 - $.(\neg(\forall x\varphi)) \equiv^t (\exists x(\neg\varphi)) \bullet$
 - $.(\neg(\exists x\varphi)) \equiv^t (\forall x(\neg\varphi)) \bullet$

 $.arphi\equiv^tlpha$ עבורה PNF משפט: תהא arphi נוסחה אזי קיימת נוסחה lpha בצורת

 $arphi=orall x_1\ldotsorall x_n$ המקיימת החסות אוניברסלי: פסוק arphi עבורו קיימת נוסחה חסרת כמתים באשר החסרת אוניברסלי: פסוק עבורו קיימת נוסחה חסרת כמתים באשר

 $arphi=orall x_1\ldotsorall x_n$ המקיימת arphi עבורו קיימת נוסחה lpha חסרת כמתים באשר $\{x_1\ldots x_n\}$ המקיימת arphi

 $(\sigma \cup \{c\})$ ספיקה מעל φ ($\sigma \cup \{c\}$) אזי σ טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל σ ויהי סימן קבוע אזי σ אזי σ אזי σ מילון תהא

 $a_1 \ldots a_n
otin \sigma$ סקולמיזציה למילון: יהי σ מילון ויהיו מילון סימני קבועים ופונקציות אזי סקולמיזציה למילון: יהי

 $a_1\dots a_n$ אזי קבועים סקולם: יהי σ מילון ויהי $\{a_1\dots a_n\}$ סקולמיזציה של סימני קבועים ל

 $a_1\dots a_n$ אזי אזי סקולם: יהי σ מילון ויהי $a_1\dots a_n$ סקולמיזציה של פונקציות מילון יהי מילון ויהי

סטענה: תהא $\forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\varphi\left[f^{(y_1 \ldots y_n)}/x\right] \right)) \Longleftrightarrow (\sigma)$ ספיק מעל סקולמיזציה $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x \varphi$ ספיק מעל סקולמיזציה $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x \varphi$ ספיק מעל סקולמיזציה σ של פונקציה σ של פונקציה σ

 φ) עבורו σ' עבורו ψ באשר ψ מעל מילון פסוק אוניברסלי ψ באשר ψ מעל מילון σ מעל מילון σ מעל מילון ϕ באשר ψ מעל מילון ψ באשר ψ (שספיק).

המקיים WFF מעל פסוק המקבל ומחזיר משתנים וכמתים arphi מעל מילון ללא שיוויון ומחזיר פסוק המקבל נוסחה חסרת משתנים וכמתים arphi

- .(ספיק) ספיק) ספיק) •
- .(טאוטולוגיה) מקפה) אוטולוגיה). תקפה

למה: תהא φ נוסחה חסרת משתנים וכמתים המורכבת מיחסים $\alpha_1\dots\alpha_k$ נגדיר השמה של $v\left(p_i\right)=(M\models\alpha_i)$ כך עוסחה חסרת משתנים וכמתים המורכבת מיחסים $\alpha_1\dots\alpha_k$ נגדיר השמה של $v\left(p_i\right)=(M\models\psi)\Longleftrightarrow(\overline{v}\left(\text{FOLWFF}\left(\psi\right)\right)=T\right)$

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה M מילון אזי שיוויון מבנה σ מילון המקיים מבנה הרברנד: יהי

- a = a לכל $a \in D^M$ לכל שם עצם שם איים $a \in D^M$
 - $\alpha^M \neq \beta^M$ יהיו אזי שמות עצם שונים אזי α, β

. בן־מנייה מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ויהי ויהי M מבנה הרברנד של מסקנה: יהי מילון בן־מנייה ויהי

 $D^M = \{arphi \mid \sigma$ שם עצם חסר משתנים ב־ $arphi \}$ הערה: מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב

 σ על M על מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד

טענה: יהי $v\left(x_{i}
ight)=t_{i}$ מבנה הרברנד מעל σ ותהא ותהא מבנה מבנה מבנה מבנה מעלה:

- $.\overline{v}\left(r
 ight)=r\left[{}^{t_{1}}\!/x_{1},\ldots,{}^{t_{n}}\!/x_{n}
 ight]$ אזי $\mathrm{FV}\left(r
 ight)=\left\{x_{1}\ldots x_{n}
 ight\}$ שם עצם באשר r יהי \bullet
- $(M,v\models\varphi)\Longleftrightarrow (M\modelsarphi\left[t_{1}/x_{1},\ldots,t_{n}/x_{n}
 ight])$ אזי FV $(arphi)=\{x_{1}\ldots x_{n}\}$ נוסחה באשר
 - . עבורו g עבורו g ספיקה) פיקה) ספיקה) ספיקה אזי (g עבורו g טפיקה) ספיקה).
- . תקפה) φ [s/x] מתקפה איי (קיים שם עצם סגור איי g עבורו (קיים שה g מחסה עבורה g מחסה עבורו g מחסה
 - . עצם סגור s מתקיים כי $\varphi[s/x]$ ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה) מתקיים כי φ
- . תקפה) $\varphi\left[s/x
 ight]$ מתקיים כי $\forall x arphi$ תקפה) פחה עבורה $\varphi\left[s/x
 ight]$ מתקיים כי $\forall x arphi$ תקפה).

(ספיק במבנה הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי פחק מיניברסלי אזי

אזי FV $(arphi)=\{x_1\dots x_n\}$ אזי בסיס: תהא arphi נוסחה חסרת כמתים באשר

.GroundInstance $(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi) = \{ \varphi \left[s_1/x_1, \dots, s_n/x_n \right] \mid GroundInstance \left(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \right) = \{ s_1 \dots s_n \}$

. GroundInstance $(\Gamma)=\bigcup_{\varphi\in\Gamma}$ GroundInstance (φ) אזי אוניברסליים אוניברסליים האזי קבוצת פסוקים אוניברסליים האזי

 Γ סטענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים וכמתים אזי (Γ ספיקה) ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- . ספיקה Γ
- ספיקה במבנה הרברנד. Γ
- .ספיקה GroundInstance (Γ)
- ספיקה במבנה הרברנד. GroundInstance (Γ)

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון ללא שיוויון תהא קבוצת נוחסאות ותהא מילון נוסחה אזי משפט הקומפקטיות:

- . ספיקה) אפיקה) שפיקה) לכל $\Delta\subseteq \Gamma$ טופית Δ ספיקה). (Γ שפיקה) לקיימת $\Delta\subseteq \Gamma$ טופית עבורה Γ שופית (Γ וורה φ סופית (Γ אור).

(x,y) משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\{E(\cdot,\cdot)\}$ המקיימת המיול ב־ $M\models \Gamma$ מיימת קבוצת נוסחאות מענה: יהיו עבורם $t_1 \dots t_n$ עבורים שמות עצם שמות על אזי (קיימים שמול כמתים מעל σ אזי (סתרים σ אזי (קיימים שמות עצם סגורים σ נוסחה ללא כמתים מעל σ . תקפה) $\varphi\left[t_{1}/x\right]\vee\ldots\vee\varphi\left[t_{n}/x\right]$