רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1,\dots,a_n\}$ מתקיים $(a\in\{a_1,\dots,a_n\})\iff((a=a_1)\vee\dots\vee(a=a_n))$.

סימון: תהא Σ קבוצה אזי $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Sigma^i$.

טענה: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת

- $B\subseteq S$.
- S סגורה להפעלת F.
- מינימליות: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ עבורה $B\subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S\subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}\subseteq\Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq X_{B,F}$.

עולם באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי Σ.

בסיס באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי B.

טענה: תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid(B\subseteq Y)\wedge(Y\ \text{סגורה להפעלת}\ F)\}$.

מסקנה הוכחה באינדוקציה מבנית: יהי Σ עולם ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$ אזי $X_{B,F}\subseteq Y$.

אינווריאנטה: יהי Σ עולם ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$ אזי Y.

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על $\mathbb{N}$ אזי $(p(0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.p(n)\Longrightarrow p(n+1)))\Longrightarrow(\forall n\in\mathbb{N}.p(n))$.

סדרת יצירה: יהי $a\in X_{B,F}$ אזי $(a_1,\dots,a_n)$ עבורה $a_n=a$ וכן לכל $i\in[n]$ מתקיים $(a_i\in B)\vee(a_i$ מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ-$\{a_1,\dots,a_{i-1}\}$).

טענה: יהי $a\in\Sigma^*$ אזי $(a\in X_{B,F})\iff$(קיימת סדרת יצירה ל-a).

מסקנה: $X_{B,F}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a\in\Sigma^*\mid n\ \text{בעלת סדרת יצירה באורך}\ a\}$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma=\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow,(,)\}\cup\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a\in\Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי

- $\wedge(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\wedge\omega_2)\text{"}$.
- $\vee(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\vee\omega_2)\text{"}$.
- $\Longrightarrow(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\Longrightarrow\omega_2)\text{"}$.
- $\neg(\omega_1)=\text{"}(\neg\omega_1)\text{"}$.

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $\text{WFF}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p\in\text{WFF}$ עבורו $p\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p\in\text{WFF}$ אזי (p פסוק אטומי)$\vee$(הפסוק p מתחיל עם "(" ונגמר עם ")").

מסקנה: יהיו $q_1,q_2\in\text{WFF}$ אזי $q_1(q_2\notin\text{WFF}$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α פסוק אטומי.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\wedge\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\vee\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\Longrightarrow\gamma)$.
- קיים ויחיד $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=(\neg\beta)$.

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם $\mathcal{O}(\text{len}(\alpha))$ לבדיקה האם $\alpha\in\text{WFF}$.

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\neg$.
2. $\wedge,\vee$.
3. $\Longrightarrow$.

אמת: true, T.

שקר: false, F.

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

סימון: תהא $\circ\in\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ אזי טבלת האמת של $\circ$ הינה $TT_\circ$.

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	p	$q \lor p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

q	p	$q \land p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	$\neg q$
true	false
false	true

השמה: פונקציה $v:\{p_i\}\to\{F,T\}$.

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\overline{v}:\mathsf{WFF}\to\{F,T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\overline{v}(p)=v(p)$.
- יהי α פסוק אזי $\overline{v}(\neg\alpha)=TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\overline{v}(\beta\circ\gamma)=TT_{\circ}(\overline{v}(\beta),\overline{v}(\gamma))$.

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורה $\overline{v}(\alpha)=T$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\mathsf{WFF}$ מסופקת על ידי v אזי $v\models\alpha$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\mathsf{WFF}$ לא מסופקת על ידי v אזי $v\not\models\alpha$.

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $\mathsf{Var}:\mathsf{WFF}\to\mathcal{P}(\{p_i\})$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\mathsf{Var}(p)=\{p\}$.
- יהי α פסוק אזי $\mathsf{Var}(\neg\alpha)=\mathsf{Var}(\alpha)$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\mathsf{Var}(\beta\circ\gamma)=\mathsf{Var}(\beta)\cup\mathsf{Var}(\gamma)$.

משפט התלות הסופית: תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורה $\forall p\in\mathsf{Var}(\alpha).v_1(p)=v_2(p)$ אזי $\overline{v_1}(\alpha)=\overline{v_2}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_{α}.

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K\subseteq\{\land,\lor,\neg,\Longrightarrow\}$ עבורה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו $TT=TT_{\alpha}$.

טענה: $\{\land,\lor,\neg,\Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg,\land,\lor\in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v\models\alpha$.

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: יהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ טאוטולוגיה אזי $\models\alpha$.

סתירה: פסוק $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו $\models(\neg\alpha)$.

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha,\beta\in\mathsf{WFF}$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\overline{v}(\alpha)=\overline{v}(\beta)$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\mathsf{WFF}$ שקולים אזי $\alpha\equiv\beta$.

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha\in\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v\models\Gamma$.

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ אזי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v\models\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ ויהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ פסוק נובע סמנטית מ־Γ אזי $\Gamma\models\alpha$.

טענה: יהיו $\alpha,\beta,\gamma\in\mathsf{WFF}$ אזי

- $(\alpha\land\beta)\lor\gamma\equiv(\alpha\lor\gamma)\land(\beta\lor\gamma)$.
- $(\alpha\lor\beta)\land\gamma\equiv(\alpha\land\gamma)\lor(\beta\land\gamma)$.
- $(\alpha\land\beta)\equiv(\beta\land\alpha)$.
- $(\alpha\lor\beta)\equiv(\beta\lor\alpha)$.
- $(\alpha\land\beta)\land\gamma\equiv\alpha\land(\beta\land\gamma)$.
- $(\alpha\lor\beta)\lor\gamma\equiv\alpha\lor(\beta\lor\gamma)$.
- $\neg(\neg\alpha)\equiv\alpha$.
- $\neg(\alpha\land\beta)\equiv(\neg\alpha)\lor(\neg\beta)$.
- $\neg(\alpha\lor\beta)\equiv(\neg\alpha)\land(\neg\beta)$.

- $(\alpha\implies\beta)\equiv(\neg\alpha)\vee\beta$.

למה: יהי $\gamma\in\text{WFF}$ סתירה אזי לכל $\alpha\in\text{WFF}$ מתקיים $\gamma\models\alpha$.

טענה: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ עבורם $\Gamma\cup\{\alpha\}\models\beta$ וכן $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\models\beta$ אזי $\Gamma\models\beta$.

טענה: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ עבורם $\Gamma\cup\{\alpha\}\models\beta$ וכן $\Gamma\cup\{\alpha\}\models\neg\beta$ אזי $\Gamma\models(\neg\alpha)$.

טענה: יהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ אזי $(\alpha\models\beta)\iff(\models(\alpha\implies\beta))$.

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha,\varphi\in\text{WFF}$ ויהי p פסוק אטומי אזי

- אם $\alpha=p$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)=\varphi$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha\neq p$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)=\alpha$.
- אם קיים $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=\neg\beta$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)=\neg\beta\left({}^{\varphi}/_{p}\right)$.
- אם קיימים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha=\beta\circ\gamma$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)=\beta\left({}^{\varphi}/_{p}\right)\circ\gamma\left({}^{\varphi}/_{p}\right)$.

טענה: יהיו $\alpha,\varphi\in\text{WFF}$ ויהי $p\in\text{Var}(\alpha)$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)\in\text{WFF}$.

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha,\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ ויהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי

- אם $\alpha=p_i$ עבור $i\in[n]$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)=\varphi_i$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha\neq p_i$ לכל $i\in[n]$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)=\alpha$.
- אם קיים $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=\neg\beta$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)=\neg\beta\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$.
- אם קיימים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha=\beta\circ\gamma$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)=\beta\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)\circ\gamma\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$.

טענה: יהיו $\alpha,\varphi\in\text{WFF}$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j)=\begin{cases}v(p_j) & i\neq j\\ \overline{v}(\varphi) & i=j\end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)\right)=\overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו $\alpha,\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ יהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j)=\begin{cases}v(p_j) & j\notin[n]\\ \overline{v}(\varphi_j) & j\in[n]\end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)\right)=\overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ ויהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$ טאוטולוגיה.

הצורה הנורמלית NNF: $\text{NNF}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{NNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.

סימון: $\text{Conj}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}}$.

הצורה הנורמלית DNF: $\text{DNF}=X_{\text{Conj},\{\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{DNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.

סימון: $\text{Disj}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\vee\}}$.

הצורה הנורמלית CNF: $\text{CNF}=X_{\text{Disj},\{\wedge\}}$.

משפט: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{CNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.

מערכת הוכחה: יהי Σ אלפבית תהא $N\subseteq\Sigma^*$ תהא $A\subseteq N$ ותהא $F\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(N^n\to N\right)$ אזי (Σ,N,A,F).

הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.

נוסחאות של מערכת הוכחה: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי N.

אקסיומות של מערכת הוכחה: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי A.

כללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי F.

קבוצת המשפטים: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי $X_{A,F}$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi\in N$ משפט אזי $\underset{S}{\vdash}\varphi$.

מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה ותהא $\Gamma\subseteq N$ אזי (Σ,N,A,F,Γ).

קבוצת הטענות היכיחות מהנחות: תהא (Σ,N,A,F,Γ) מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי $X_{A\cup\Gamma,F}$.

הוכחה: תהא (Σ,N,A,F,Γ) מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי $\varphi\in N$ יכיח אזי סדרת יצירה של φ.

סימון: תהא S מערכת הוכחה תהיינה $\Gamma\subseteq N$ הנחות ויהי $\varphi\in N$ יכיח אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.

טענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi\in N$ אזי

- מונוטוניות: תהא $\Delta\subseteq N$ עבורה $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$ ותהא $\Delta\subseteq\Gamma$ אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.
- קומפקטיות: תהא $\Gamma\subseteq N$ עבורה $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$ אזי קיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית עבורה $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$.
- טרנזיטיביות: תהיינה $\Delta,\Gamma\subseteq N$ באשר $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$ וכן לכל $\alpha\in\Delta$ מתקיים $\Gamma\underset{S}{\vdash}\alpha$ אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $f \in F$ כלל היסק המקיים $f(x_1,\dots,x_n)=y$ אזי $f:\frac{x_1\dots x_n}{y}$.

כלל הניתוק (Modus Ponens): תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי $\mathrm{MP}:\frac{(\alpha\Longrightarrow\beta),\alpha}{\beta}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

- אלפבית: $\Sigma=\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg,\Longrightarrow,(,)\}$.
- נוסחאות: $N=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\neg,\Longrightarrow\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1=(\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$.
  - $A_2=((\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\gamma))\Longrightarrow((\alpha\Longrightarrow\beta)\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow\gamma)))$.
  - $A_3=(((\neg\alpha)\Longrightarrow(\neg\beta))\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$.
- כללי היסק: $F=\{\mathrm{MP}\}$.

טענה: יהיו α,β נוסחאות ב־HPC אזי

- $\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash}(\alpha\Longrightarrow\alpha)$.
- $\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash}((\neg\alpha)\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow\beta))$.
- $\{\neg\alpha\}\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash}(\alpha\Longrightarrow\beta)$.

מסקנה: יהיו α,β נוסחאות ב־HPC באשר $\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash}(\neg\alpha)$ אזי $\{\alpha\}\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash}\beta$.

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון $\vdash$ הוא במערכת HPC.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HPC אזי $(\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta)\Longleftrightarrow(\Gamma\vdash(\alpha\Longrightarrow\beta))$.

סימון: תהא מערכת הוכחה S ותהא $\Gamma\subseteq N$ אזי $\mathrm{Ded}(\Gamma)=\{\alpha\in N\mid\Gamma\vdash\alpha\}$.

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $\vdash((\neg(\neg\alpha))\Longrightarrow\alpha)$.

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט הנאותות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $\left(\Gamma\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash}\alpha\right)\Longrightarrow(\Gamma\models\alpha)$.

למה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α,β,γ נוחסאות מעל HPC אזי
$((\Gamma\vdash(\alpha\Longrightarrow\beta))\wedge(\Gamma\vdash(\beta\Longrightarrow\gamma)))\Longrightarrow(\Gamma\vdash(\alpha\Longrightarrow\gamma))$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HPC אזי
$((\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta)\wedge(\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta))\Longrightarrow(\Gamma\vdash\beta)$.

קבוצת הנחות עקבית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\Gamma\underset{S}{\nvdash}\alpha$.

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ אינה עקבית)$\Longleftrightarrow$(קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\left(\Gamma\underset{S}{\vdash}(\neg\alpha)\right)\wedge\left(\Gamma\underset{S}{\vdash}\alpha\right)$).

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות עקבית מעל S עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית מעל S המקיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ מתקיים $\Delta=\Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC עבורה $\Gamma\vdash\alpha$ אזי $\alpha\in\Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\alpha\in\Gamma)\vee(\neg\alpha\in\Gamma)$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהיינה α,β נוסחאות מעל HPC אזי
$(\Gamma\vdash(\alpha\Longrightarrow\beta))\Longleftrightarrow((\neg\alpha\in\Gamma)\vee(\beta\in\Gamma))$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Δ עבורה $\Gamma\subseteq\Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(Γ ספיקה).

משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma\models\alpha)\Longrightarrow\left(\Gamma\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash}\alpha\right)$.

מסקנה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma\models\alpha)\Longleftrightarrow(\Gamma\vdash\alpha)$.

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית Δ ספיקה).

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\mathrm{WFF}$ אזי $\mathrm{Ass}(\Gamma)=\{v\in\{p_i\}\to\{F,T\}\mid v\models\Gamma\}$.

טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\}\to\{F,T\})\backslash\mathrm{Ass}(\Gamma)\mid\Gamma\subseteq\mathrm{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על $\{p_i\}\to\{F,T\}$.

טענה: הטופולוגיה $\{(\{p_i\}\to\{F,T\})\backslash\mathrm{Ass}(\Gamma)\mid\Gamma\subseteq\mathrm{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

הגדרה: יהי G גרף פשוט לא מכוון תהא $f:V\to\text{WFF}$ חח"ע ויהיו $(v,u)\in E$ אזי $\varphi_G:E\to\text{WFF}$ כך $\varphi_G\left((v,u)\right)=\text{"}f\left(v\right)\implies f\left(u\right)\text{"}$.

טענה: יהי G גרף פשוט לא מכוון ותהא $f:V\to\text{WFF}$ חח"ע אזי (G הינו 2־צביע)$\Longleftrightarrow$($\left\{\varphi_G\left(e\right)\mid e\in E\right\}$ ספיקה).

מסקנה: יהי G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו 2־צביע)$\Longleftrightarrow$(לכל $G'\le G$ סופי G' הינו 2־צביע).

טענה: יהי G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו k־צביע)$\Longleftrightarrow$(לכל $G'\le G$ סופי G' הינו k־צביע).

קבוצת השמות גדירה: קבוצה $K\subseteq\{p_i\}\to\{F,T\}$ עבורה קיימת $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ המקיימת $K=\text{Ass}\left(\Gamma\right)$.

טענה: $\varnothing$ גדירה.

טענה: $\{p_i\}\to\{F,T\}$ גדירה.

טענה: לכל v השמה $\{v\}$ גדירה.

טענה: קיימת $K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}\to\{F,T\}\right)$ שאינה גדירה.

סימון: $K_{\text{finite}}=\left\{v\in\{p_i\}\to\{F,T\}\mid\left|v^{-1}\left(\{T\}\right)\right|<\aleph_0\right\}$.

טענה: K_{finite} אינה גדירה.

קבוצת השמות גדירה באופן סופי: קבוצה $K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}\to\{F,T\}\right)$ עבורה קיימת $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ סופית המקיימת $K=\text{Ass}\left(\Gamma\right)$.

משפט: תהא $K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}\to\{F,T\}\right)$ התב"ש

- K גזירה וכן $K^{\mathcal{C}}$ גדירה.
- K גדירה באופן סופי.
- K גדירה על ידי פסוק יחיד.

מילון: יהי Σ אלפבית אזי $\left(\left\{c_i\in\Sigma\mid i\in\mathbb{N}\right\},\left\{R_{n,i}\subseteq\Sigma^n\mid i,n\in\mathbb{N}\right\},\left\{f_{n,i}\subseteq\Sigma^n\to\Sigma\mid i,n\in\mathbb{N}\right\}\right)$.

סימני קבוע במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי C.

סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי R.

סימני פונקציה במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי F.

מילון סופי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ בעל מספר סופי של סימנים.

מילון יחסי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ חסר סימני פונקציה.

לוגיקה מסדר ראשון: יהי Σ אלפבית ויהי σ מילון אזי $\left(\left\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\right\},\left\{\text{"("},\text{")"}\right\},\left\{\neg,\vee,\wedge,\implies\right\},\left\{\forall,\exists\right\},\sigma\right)$.

משתנים בלוגיקה מסדר ראשון: $\left\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\right\}$.

סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: $\left\{\text{"("},\text{")"}\right\}$.

קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון: $\left\{\neg,\vee,\wedge,\implies\right\}$.

כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: $\left\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\right\}$.

סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: תהא L לוגיקה מסדר ראשון אזי המילון D בה.

שמות עצם מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\left\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{c_i\mid i\in\mathbb{N}\right\},\left\{f_{i,n}\mid i,n\in\mathbb{N}\right\}}$.

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי σ מילון ויהי t שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- t משתנה.
- t סימן קבוע.
- קיים ויחיד סימן פונקציה $f_{i,n}$ ושמות עצם $t_1\ldots t_n$ עבורם $t=f\left(t_1\ldots t_n\right)$.

הגדרה: יהי σ מילון יהי x משתנה ותהא $\alpha\in\sigma$ אזי

- $\forall\left(\alpha,x\right)=\text{"}\forall x\alpha\text{"}$.
- $\exists\left(\alpha,x\right)=\text{"}\exists x\alpha\text{"}$.

נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $\left\{R_{n,i}\left(t_1\ldots t_n\right)\mid\left(i,n\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(t_1\ldots t_n\text{ שמות עצם}\right)\right\}$.

נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\left\{R_{n,i}\left(t_1\ldots t_n\right)\mid\left(i,n\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(t_1\ldots t_n\text{ שמות עצם}\right)\right\},\left\{\wedge,\vee,\neg,\implies,\forall,\exists\right\}}$.

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α נוסחה אטומית.
- קיימת ויחידה נוסחה β עבורה $\alpha=\text{" }\left(\neg\beta\right)\text{ "}$.
- קיימות ויחידות נוסחאות β,γ וכן פעולה בולינארית $\circ$ עבורן $\alpha=\text{" }\left(\beta\circ\gamma\right)\text{ "}$.
- קיימת ויחידה נוסחה β וכן משתנה x וכן כמת Q עבורם $\alpha=\text{"}Qx\beta\text{"}$.

משתנה חופשי בשם עצם: נגדיר $\text{FV}:\left\{t\mid\sigma\text{ שם עצם במילון } t\right\}\to\mathcal{P}\left(\left\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\right\}\right)$ כך

- יהי $c\in\sigma$ סימן קבוע אזי $\text{FV}(c)=\varnothing$.
- יהי $x\in\sigma$ משתנה אזי $\text{FV}(x)=\{x\}$.
- יהיו $t_1\dots t_n$ שמות עצם ויהי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $\text{FV}(f(t_1\dots t_n))=\bigcup\text{FV}(t_i)$.

משתנה חופשי בנוסחה: נגדיר $\text{FV}:\{\varphi\mid\sigma\text{ נוסחה במילון }\varphi\}\to\mathcal{P}(\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\})$ כך

- יהיו $t_1\dots t_n$ שמות עצם ויהי $R\in\sigma$ סימן יחס אזי $\text{FV}(R(t_1\dots t_n))=\bigcup\text{FV}(t_i)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\text{FV}(\neg\varphi)=\text{FV}(\varphi)$.
- תהיינה φ,ψ נוסחאות ויהי $\circ$ פעולה בוליאנית אזי $\text{FV}(\varphi\circ\psi)=\text{FV}(\varphi)\cup\text{FV}(\psi)$.
- תהא נוסחה φ יהי משתנה x ויהי כמת Q עבורם $\text{FV}(Qx\varphi)=\text{FV}(\varphi)\setminus\{x\}$.

נוסחה סגורה: נוסחה φ עבורה $\text{FV}(\varphi)=\varnothing$.

סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\forall,\exists$.
2. $\neg$.
3. $\wedge,\vee$.
4. $\Longrightarrow$.

מבנה עבור מילון: יהי σ מילון יהי $D\neq\varnothing$ ותהא $C:\{c_i\}\to D$ חח"ע וכן $R:\{R_{n,i}\}\to D^n$ חח"ע לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן $F:\{f_{n,i}\}\to(D^n\to D)$ חח"ע אזי $(D,C(c_0),\dots,R(R_{2,0}),\dots,f(f_{0,0}))$.

תחום של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי D.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ בעל תחום D אזי $D^M=D$.

פירוש של סימנים במילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $(C(c_0),\dots,R(R_{2,0}),\dots,f(f_{0,0}))$.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $c_i^M=C(c_i)$ וכן $R_{n,i}^M=R(R_{n,i})$ וכן $f_{n,i}^M=F(f_{n,i})$.

השמה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\to D^M$.

השמת ערך לשם עצם: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ יהי ותהא v השמה אזי

- יהי $c_i\in\sigma$ סימן קבוע אזי $\overline{v}(c_i)=c_i^M$.
- יהי $x_i\in\sigma$ משתנה אזי $\overline{v}(x_i)=v(x_i)$.
- יהיו $t_1\dots t_n$ שמות עצם ויהי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $\overline{v}(f(t_1\dots t_n))=f^M(\overline{v}(t_1)\dots\overline{v}(t_n))$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי t שם עצם עבורו $v_1(x)=v_2(x)$. $\forall x\in\text{FV}(t)$ אזי $\overline{v_1}(t)=\overline{v_2}(t)$.

השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי $x_j\in\sigma$ משתנה ויהי $d\in D^M$ אזי נגדיר השמה $v\left[{}^{d}/{}_{x_j}\right](x_i)=\begin{cases}v(x_i) & i\neq j\\ d & \text{else}\end{cases}$.

ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא v השמה אזי

- יהיו $t_1\dots t_n$ שמות עצם ויהי $R\in\sigma$ סימן יחס אזי $\left((\overline{v}(t_1),\dots,\overline{v}(t_n))\in R^M\right)\Longleftrightarrow(\overline{v}(R(t_1\dots t_n))=T)$.
- תהא α נוסחה אזי $\overline{v}(\neg\alpha)=TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$.
- תהיינה α,β נוסחאות ויהי $\circ$ קשר בינארי אזי $\overline{v}(\alpha\circ\beta)=TT_{\circ}(\overline{v}(\alpha),\overline{v}(\beta))$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\exists d\in D^M\left(\overline{v\left[{}^{d}/{}_{x}\right]}(\varphi)=T\right)\right)\Longleftrightarrow(\overline{v}(\exists x\varphi)=T)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\forall d\in D^M\left(\overline{v\left[{}^{d}/{}_{x}\right]}(\varphi)=T\right)\right)\Longleftrightarrow(\overline{v}(\forall x\varphi)=T)$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1,v_2 השמות ותהא φ נוסחה עבורה $v_1(x)=v_2(x)$. $\forall x\in\text{FV}(t)$ אזי $\overline{v_1}(\varphi)=\overline{v_2}(\varphi)$.

נוסחה ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי נוסחה φ עבורה $\overline{v}(\varphi)=T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא φ נוסחה ספיקה ב־M אזי $M,v\models\varphi$.

t־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה יהי M מבנה ותהא v השמה עבורם $M,v\models\varphi$ אזי (M,v).

קבוצת נוסחאות ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi\in\Gamma$ מתקיים $\overline{v}(\varphi)=T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא Γ קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M אזי $M,v\models\Gamma$.

נוסחה ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M והשמה v עבורם $M,v\models\varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא v השמה תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה אם (M,v) t־מודל של Γ אז (M,v) t־מודל של φ אזי $\Gamma\overset{t}{\models}\varphi$.

נוסחאות t-שקולות: יהי σ מילון ותהא v השמה אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\}\overset{t}{\models}\varphi$ וכן $\{\varphi\}\overset{t}{\models}\psi$.

נוסחה t-תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ ולכל v השמה מתקיים (M,v) t-מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t-תקפה אזי $\overset{t}{\models}\varphi$.

נוסחה נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי נוסחה φ עבורה לכל v השמה מתקיים $M,v\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא φ נוסחה נכונה ב־M אזי $M\models\varphi$.

v-מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה אזי מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi\in\Gamma$ מתקיים $M\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא Γ קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי $M\models\Gamma$.

נוסחה v-ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה אם M v-מודל של Γ אז M v-מודל של φ אזי $\Gamma\overset{v}{\models}\varphi$.

נוסחאות v-שקולות: יהי σ מילון אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\}\overset{v}{\models}\varphi$ וכן $\{\varphi\}\overset{v}{\models}\psi$.

נוסחה v-תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ מתקיים M v-מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה v-תקפה אזי $\overset{v}{\models}\varphi$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי $\left(\overset{t}{\models}\varphi\right)\Longleftrightarrow\left(\overset{v}{\models}\varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה תקפה אזי $\exists x\varphi$ תקפה וכן $\forall x\varphi$ תקפה.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ תקפה אזי φ תקפה.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)\Longrightarrow\left(\Gamma\overset{t}{\models}\varphi\right)$.

פסוק: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה $\mathrm{FV}(\varphi)=\varnothing$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת פסוקים ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)\Longleftarrow\left(\Gamma\overset{t}{\models}\varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי ($\Gamma\cup\{\varphi\}$ הינה t-ספיקה)$\Longleftrightarrow$($\Gamma\overset{t}{\not\models}\neg\varphi$).

טענה: יהי σ מילון ותהיינה φ,ψ נוסחאות אזי (φ,ψ הן t-שקולות)$\Longleftrightarrow$($(\varphi\Longleftrightarrow\psi)$ תקפה).

הסגור האוניברסלי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\mathrm{FV}(\varphi)=\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\varphi^{\forall}=\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_n\varphi$.

הסגור היישי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\mathrm{FV}(\varphi)=\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\varphi^{\exists}=\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_n\varphi$.

סימון: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת נוסחאות אזי $\Gamma^{\forall}=\left\{\varphi^{\forall}\mid\varphi\in\Gamma\right\}$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה ויהי M מבנה אזי ($\varphi^{\forall}$ ספיק ב־M)$\Longleftrightarrow$($M\overset{v}{\models}\varphi$).

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma^{\forall}\overset{v}{\models}\varphi^{\forall}\right)\Longleftrightarrow\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)$.

איזומורפיזם בין מבנים: יהי σ מילון ויהיו M,N מבנים מעל σ אזי $G:D^M\to D^N$ חח"ע ועל עבורה

- לכל סימן קבוע $c\in\sigma$ מתקיים $G\left(c^M\right)=c^N$.
- לכל סימן פונקציה $f\in\sigma$ ולכל $a_1\ldots a_n\in D^M$ מתקיים $G\left(f^M\left(a_1\ldots a_n\right)\right)=f^N\left(G\left(a_1\right)\ldots G\left(a_n\right)\right)$.
- לכל סימן יחס $R\in\sigma$ ולכל $a_1\ldots a_n\in D^M$ מתקיים $\left(\left(a_1\ldots a_n\right)\in R^M\right)\Longleftrightarrow\left(\left(G\left(a_1\right)\ldots G\left(a_n\right)\right)\in R^N\right)$.

מבנים איזומורפיים: יהי σ מילון אזי מבנים M,N מעל σ עבורם קיים איזומורפיזם G מ־M ל־N.

טענה: יהי σ מילון יהיו M,N מבנים איזומורפיים מעל σ ויהי φ פסוק אזי $(M\models\varphi)\Longleftrightarrow(N\models\varphi)$.

הערה: יהי σ מילון בעל יחס שיוויון Id דו־מקומי אזי לכל מבנה M נגדיר $\mathrm{Id}^M=\mathrm{Id}_M$ ונסמן את היחס בעזרת $=$.

הצבת שם עצם בשם עצם: יהיו r,s שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- אם s סימן קבוע אזי $s\left[{}^{r}/_{x}\right]=s$.
- אם $s=x$ אזי $s\left[{}^{r}/_{x}\right]=r$.
- אם $s\neq x$ משתנה אזי $s\left[{}^{r}/_{x}\right]=s$.
- אם $s=f\left(t_1\ldots t_n\right)$ אזי $s\left[{}^{r}/_{x}\right]=f\left(t_1\left[{}^{r}/_{x}\right]\ldots t_n\left[{}^{r}/_{x}\right]\right)$.

הצבת שם עצם בנוסחה: תהא φ נוסחה יהי r שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi=R\left(t_1\ldots t_n\right)$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]=R\left(t_1\left[{}^{r}/_{x}\right]\ldots t_n\left[{}^{r}/_{x}\right]\right)$.
- אם $\varphi=\neg\alpha$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]=\neg\left(\alpha\left[{}^{r}/_{x}\right]\right)$.
- אם $\varphi=\alpha\circ\beta$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]=\alpha\left[{}^{r}/_{x}\right]\circ\beta\left[{}^{r}/_{x}\right]$.

- אם $\varphi = \forall x\alpha$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/{}_{x}\right] = \forall x\alpha$.
- אם $\varphi = \exists x\alpha$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/{}_{x}\right] = \exists x\alpha$.
- אם $\varphi = \forall y\alpha$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/{}_{x}\right] = \forall y\left(\alpha\left[{}^{r}/{}_{x}\right]\right)$.
- אם $\varphi = \exists y\alpha$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/{}_{x}\right] = \exists y\left(\alpha\left[{}^{r}/{}_{x}\right]\right)$.

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא φ נוסחה ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi = R\left(t_1 \ldots t_n\right)$ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α.
- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן ב־β.
- אם $\varphi = \forall y\alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi = \exists y\alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi = \forall y\alpha$ וכן $x \in \mathrm{FV}\left(\varphi\right)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y \notin \mathrm{FV}\left(r\right)$.
- אם $\varphi = \exists y\alpha$ וכן $x \in \mathrm{FV}\left(\varphi\right)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y \notin \mathrm{FV}\left(r\right)$.

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f : \{\text{נוסחאות}\} \to \mathcal{P}\left(\{x_i\}\right)$ כך

- אם $\varphi = R\left(t_1 \ldots t_n\right)$ אזי $f\left(\varphi\right) = \varnothing$.
- אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי $f\left(\varphi\right) = f\left(\alpha\right)$.
- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי $f\left(\varphi\right) = f\left(\alpha\right) \cup f\left(\beta\right)$.
- אם $\varphi = \forall x\alpha$ אזי $f\left(\varphi\right) = f\left(\alpha\right) \cup \{x\}$.
- אם $\varphi = \exists y\alpha$ אזי $f\left(\varphi\right) = f\left(\alpha\right) \cup \{x\}$.

למה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי (r חופשי להצבה ב־φ)$\Longleftrightarrow$(לכל $y \in \mathrm{FV}\left(r\right)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור y ב־$\varphi\left[{}^{r}/{}_{x}\right]$).

סימון: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי נגדיר השמה $v\left[{}^{\overline{v}(r)}/{}_{x}\right]\left(y\right) = \begin{cases} v(y) & x \neq y \\ \overline{v}(r) & \text{else} \end{cases}$.

מסקנה: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי $\overline{v}\left(s\left[{}^{r}/{}_{x}\right]\right) = \overline{v\left[{}^{\overline{v}(r)}/{}_{x}\right]}\left(s\right)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}\left(\varphi\left[{}^{r}/{}_{x}\right]\right) = \overline{v\left[{}^{\overline{v}(r)}/{}_{x}\right]}\left(\varphi\right)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}\left(\varphi\right) = \overline{v\left[{}^{v(x)}/{}_{y}\right]}\left(\varphi\left[{}^{y}/{}_{x}\right]\right)$.

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־φ אזי

- $\left(\exists x\varphi\right) \equiv^{t} \left(\exists y\left(\varphi\left[{}^{y}/{}_{x}\right]\right)\right)$.
- $\left(\forall x\varphi\right) \equiv^{t} \left(\forall y\left(\varphi\left[{}^{y}/{}_{x}\right]\right)\right)$.

הצורה הנורמלית PNF: $X_{\{\varphi \mid \text{נוסחה חסרת כמתים } \varphi\},\{\forall,\exists\}}$.

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי (φ בצורת PNF)$\Longleftrightarrow$(קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן $x_1 \ldots x_n$ משתנים וכן $Q_1 \ldots Q_n$ כמתים עבורם $\varphi = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \alpha$).

טענה: תהיינה φ, ψ נוסחאות אזי

- $\left(\forall x\left(\varphi \wedge \psi\right)\right) \equiv^{t} \left(\left(\forall x\varphi\right) \wedge \left(\forall x\psi\right)\right)$.
- $\left(\exists x\left(\varphi \vee \psi\right)\right) \equiv^{t} \left(\left(\exists x\varphi\right) \vee \left(\exists x\psi\right)\right)$.
- תהא $x \notin \mathrm{FV}\left(\psi\right)$ אזי $\left(\forall x\left(\varphi \vee \psi\right)\right) \equiv^{t} \left(\left(\forall x\varphi\right) \vee \psi\right)$.
- תהא $x \notin \mathrm{FV}\left(\psi\right)$ אזי $\left(\exists x\left(\varphi \wedge \psi\right)\right) \equiv^{t} \left(\left(\exists x\varphi\right) \wedge \psi\right)$.
- $\left(\neg\left(\forall x\varphi\right)\right) \equiv^{t} \left(\exists x\left(\neg\varphi\right)\right)$.
- $\left(\neg\left(\exists x\varphi\right)\right) \equiv^{t} \left(\forall x\left(\neg\varphi\right)\right)$.

משפט: תהא φ נוסחה אזי קיימת נוסחה α בצורת PNF עבורה $\alpha \equiv^{t} \varphi$.

פסוק אוניברסלי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}\left(\alpha\right) = \{x_1 \ldots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha$.

פסוק יישי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}\left(\alpha\right) = \{x_1 \ldots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_n \alpha$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל σ ויהי סימן קבוע $c \notin \sigma$ אזי ($\exists x\varphi$ ספיקה מעל σ)$\Longleftrightarrow$($\varphi\left[{}^{c}/{}_{x}\right]$ ספיקה מעל $\sigma \cup \{c\}$).

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ אזי ($\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x\varphi$ ספיק מעל σ)$\Longleftrightarrow$($\forall y_1 \ldots \forall y_n\left(\varphi\left[{}^{f(y_1 \cdots y_n)}/{}_{x}\right]\right)$ ספיק מעל המילון $\sigma \cup \{f\}$ באשר f פונקציה n־מקומית).

משפט סקולם: קיים אלגוריתם sk המקבל נוסחה φ מעל מילון σ ומחזיר פסוק אוניברסלי מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$($\mathrm{sk}\left(\varphi\right)$ ספיק).

סקולמיזציה למילון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי המילון המינימלי מעליו מוגדר $\mathrm{sk}\left(\varphi\right)$.

טענה: קיים אלגוריתם FOLWFF המקבל נוסחה חסרת משתנים וכמתים φ מעל מילון ללא שיוויון ומחזיר פסוק α מעל WFF המקיים

- (φ ספיק)$\iff$(α ספיק).
- (φ תקפה)$\iff$(α טאוטולוגיה).

למה: תהא φ נוסחה חסרת משתנים וכמתים מיחסים $\alpha_1 \dots \alpha_k$ נגדיר השמה של WFF כך $v\left(p_i\right) = \left(M \models \alpha_i\right)$ אזי $\left(\overline{v}\left(\mathrm{FOLWFF}\left(\psi\right)\right) = T\right) \iff \left(M \models \psi\right)$.

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה הרברנד: יהי σ מילון ללא שיוויון אזי מבנה M המקיים

- לכל $a \in D^M$ קיים שם עצם סגור α עבורו $\alpha^M = a$.
- יהיו α, β שמות עצם שונים אזי $\alpha^M \neq \beta^M$.

מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ויהי M מבנה הרברנד של σ אזי D^M בן־מנייה.

הערה: מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב $D^M = \left\{\varphi \mid \sigma\text{-שם עצם חסר משתנים ב} \; \varphi\right\}$.

מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד M על σ.

טענה: יהי M מבנה הרברנד מעל σ ותהא v השמה עבורה $v\left(x_i\right) = t_i$ אזי

- יהי r שם עצם באשר $\mathrm{FV}\left(r\right) = \left\{x_1 \dots x_n\right\}$ אזי $\overline{v}\left(r\right) = r\left[{}^{t_1}/_{x_1}, \dots, {}^{t_n}/_{x_n}\right]$.
- תהא φ נוסחה באשר $\mathrm{FV}\left(\varphi\right) = \left\{x_1 \dots x_n\right\}$ אזי $\left(M \models \varphi\left[{}^{t_1}/_{x_1}, \dots, {}^{t_n}/_{x_n}\right]\right) \iff \left(M, v \models \varphi\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי ($\exists x \varphi$ ספיקה)$\iff$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi\left[{}^{s}/_{x}\right]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\exists x \varphi$ פסוק אזי ($\exists x \varphi$ תקפה)$\iff$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi\left[{}^{s}/_{x}\right]$ תקפה).
- תהא φ נוסחה אזי ($\forall x \varphi$ ספיקה)$\iff$(לכל שם עצם סגור s מתקיים כי $\varphi\left[{}^{s}/_{x}\right]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\forall x \varphi$ פסוק אזי ($\forall x \varphi$ תקפה)$\iff$(לכל שם עצם חסר משתנים s מתקיים כי $\varphi\left[{}^{s}/_{x}\right]$ תקפה).

משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי (φ ספיק)$\iff$(φ ספיק במבנה הרברנד).

מופעי בסיס: תהא φ נוסחה חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}\left(\varphi\right) = \left\{x_1 \dots x_n\right\}$ אזי

$\mathrm{GroundInstance}\left(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi\right) = \left\{\varphi\left[{}^{s_1}/_{x_1}, \dots, {}^{s_n}/_{x_n}\right] \mid \text{שמות עצם חסרי משתנים} \; s_1 \dots s_n\right\}$.

סימון: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \mathrm{GroundInstance}\left(\varphi\right)$.

טענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים וכמתים אזי (Γ ספיקה)$\iff$(Γ ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- Γ ספיקה.
- Γ ספיקה במבנה הרברנד.
- $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)$ ספיקה.
- $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)$ ספיקה במבנה הרברנד.

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון ללא שיוויון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי

- (Γ ספיקה)$\iff$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).
- ($\Gamma \overset{t}{\models} \varphi$)$\iff$(קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \overset{t}{\models} \varphi$).
- ($\Gamma \underset{v}{\models} \varphi$)$\iff$(קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \underset{v}{\models} \varphi$).

טענה: יהיו x, y משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\left\{E\left(\cdot, \cdot\right)\right\}$ המקיימת ($M \models \Gamma$)$\iff$(יש מסלול ב־M מ־x ל־y).

משפט: יהי σ מילון בעל קבוע תהא φ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי ($\exists x \varphi$ תקפה)$\iff$(קיימים שמות עצם סגורים $t_1 \dots t_n$ עבורם $\varphi\left[{}^{t_1}/_{x}\right] \vee \dots \vee \varphi\left[{}^{t_n}/_{x}\right]$ תקפה).

מבנה הנקין: יהי σ מילון אזי מבנה H מעל σ עבורו לכל $a \in D^H$ קיים שם עצם סגור t עבורו $t^H = a$.

הערה: ניתן להגדיר מילון ומבנה לא בני־מנייה.

משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי σ מילון בן־מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ אזי (φ ספיקה)$\iff$(קיים מבנה בן־מנייה M מעל σ בו φ ספיקה).

משפט לוונהיים־סקולם העולה: יהי σ מילון בן־מנייה יהי M מבנה בן־מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ באשר φ ספיקה ב־M אזי לכל עוצמה אינסופית κ קיים מבנה M' מעוצמה κ מעל σ עבורו φ ספיקה ב־M'.

מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ותהא κ עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל σ המקיימת $\left(M \models \Gamma\right) \iff \left(\left|M\right| = \kappa\right)$.

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

סימון: יהי σ מילון אזי $\text{VALID}=\{\varphi \mid (\sigma \text{ נוסחה מעל } \varphi) \wedge (\varphi \text{ תקפה})\}$.

משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי σ מילון אזי $\text{VALID}\in\mathcal{RE}$.

משפט צ'רץ'־טיורינג: $\text{HALT}\le_m \text{VALID}$.

מסקנה: $\text{VALID}\notin\mathcal{R}$.

בעיית הריצוף: יהיו $R_1\dots R_n$ ריבועים בעלי צלע מאורך 1 וכן כל צלע שלהם צבועה בצבע אזי האם ניתן לרצף את $\mathbb{R}^2_{\ge 0}$ בעזרת הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

בעיית הריצוף: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ותהא $R:[n]^2\times\{\text{left},\text{right},\text{above},\text{below}\}\to\{\text{yes},\text{no}\}$ אזי $f:\mathbb{N}^2\to[n]$ עבורה

- לכל $m\in\mathbb{N}$ ולכל $n\in\mathbb{N}_+$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n-1\\m\end{smallmatrix}\right),\text{left}\right)=\text{yes}$.
- לכל $m,n\in\mathbb{N}$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n+1\\m\end{smallmatrix}\right),\text{right}\right)=\text{yes}$.
- לכל $m,n\in\mathbb{N}$ ולכל $n\in\mathbb{N}_+$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n\\m+1\end{smallmatrix}\right),\text{above}\right)=\text{yes}$.
- לכל $m\in\mathbb{N}_+$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n\\m-1\end{smallmatrix}\right),\text{below}\right)=\text{yes}$.

סימון: $\text{TILING}=\{(n,R,f)\mid R \text{ עבור } \text{ פתרון לבעיית הריצוף } f\}$.

משפט: $\text{VALID}\le_m\text{TILING}$.

מסקנה: $\text{TILING}\notin\mathcal{R}$.

יחס קונגרואנציה: יהי σ מילון אזי $E\in\sigma$ סימן יחס דו־מקומי המקיים

- רפלקסיבי: $\forall x\,(E(x,x))$.
- סימטרי: $\forall x\forall y\,(E(x,y)\Longrightarrow E(y,x))$.
- טרנזיטיבי: $\forall x\forall y\forall z\,((E(x,y)\wedge E(y,z))\Longrightarrow E(x,z))$.
- לכל $f\in\sigma$ סימן פונקציה מתקיים $\forall x_1\dots\forall x_n\forall y_1\dots\forall y_n\,((\bigwedge_{i=1}^n E(x_i,y_i))\Longrightarrow E(f(x_1\dots x_n),f(y_1\dots y_n)))$.
- לכל $R\in\sigma$ סימן יחס מתקיים $\forall x_1\dots\forall x_n\forall y_1\dots\forall y_n\,((\bigwedge_{i=1}^n E(x_i,y_i))\Longrightarrow(R(x_1\dots x_n)\Longleftrightarrow R(y_1\dots y_n)))$.

הערה: בהינתן מילון עם שיוויון σ ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן σ_E את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

מילון מחלקות קונגרואנציה: יהי מילון σ עם שיוויון ויהי M מבנה על σ אזי מבנה M_E מעל σ_E המקיים

- $D^{M'}={}^{D^M}/_{E}$.
- לכל סימן פונקציה $f\in\sigma$ מתקיים $f^{M'}([a_1]_E,\dots,[a_n]_E)=\left[f^M(a_1\dots a_n)\right]_E$.
- לכל סימן יחס $R\in\sigma$ מתקיים $R^{M'}([a_1]_E,\dots,[a_n]_E)\Longleftrightarrow R^M(a_1\dots a_n)$.

החלפת שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא φ נוסחה מעל מילון עם שיוויון σ באשר $f_1\dots f_n$ סימני הפונקציות ב־φ וכן $R_1\dots R_m$ סימני היחס ב־φ אזי $\varphi_E=\varphi\left[{}^{E}/_{=}\right]\wedge(E \text{ יחס שקילות})\wedge\left(\bigwedge_{i=1}^n(f_i \text{ יחס קונגרואנציה ביחס ל־} E)\right)\wedge\left(\bigwedge_{i=1}^m(E_i \text{ יחס קונגרואנציה ביחס ל־} E)\right)$.

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ עם שיוויון יהי M מבנה מעל σ ותהא v השמה נגדיר השמה $v_E:\{x_i\}\to D^{M_E}$ באשר $v_E(x_i)=[v(x_i)]_E$ אזי $(M,v\models\varphi)\Longleftrightarrow(M_E,v_E\models\varphi_E)$.

משפט: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ באשר φ מעל מילון עם שיוויון σ ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון ψ באשר ψ מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(ψ ספיק).

משפט: תהא Γ קבוצת נוסחאות מעל σ עם שיוויון אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(Γ_E ספיקה).

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון עם שיוויון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית Δ ספיקה).

המודל הסטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0,c_1,f_+,f_\times,R_>\}$ אזי מבנה $\mathcal{M}_\mathbb{N}$ עבורו

- $D^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}=\mathbb{N}$ וכן $c_0^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}=0$ וכן $c_1^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}=1$.
- $f_+^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}(a,b)=a+b$.
- $f_\times^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}(a,b)=a\times b$.
- $\left((a,b)\in R_>^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}\right)\Longleftrightarrow(a>b)$.

פסוקים נכונים אריתמטית: יהי מילון $\{c_0,c_1,f_+,f_\times,R_>\}$ אזי $\text{AT}=\{\alpha\mid(\mathcal{M}_\mathbb{N}\models\alpha)\wedge(\text{FV}(\alpha)=\varnothing)\}$.

מודל לא סטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0,c_1,f_+,f_\times,R_>\}$ אזי מבנה M עבורו $M\models\text{AT}$ וכן M אינו איזומורפי ל־$\mathcal{M}_\mathbb{N}$.

טענה: יהי M מודל לא סטדנרטי של הטבעיים אזי $\left|D^M\right|>\aleph_0$.

כלל ג'ן: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי $\text{Gen}:\frac{\alpha}{\forall x\alpha}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי σ מילון חסר שיוויון אזי

- אלפבית: $\Sigma=\sigma$.
- נוסחאות: $N=X_{\{t\mid t\text{ שם עצם}\},\{\neg,\Longrightarrow,\forall\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1=(\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$.
  - $A_2=((\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\gamma))\Longrightarrow((\alpha\Longrightarrow\beta)\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow\gamma)))$.
  - $A_3=(((\neg\alpha)\Longrightarrow(\neg\beta))\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$.
  - יהי t שם עצם חופשי להצבה במקום x ב־α אזי $A_4=((\forall x\alpha)\Longrightarrow\alpha\left[{}^{t}/_{x}\right])$
  - יהי $x\notin\text{FV}(\alpha)$ אזי $A_5=((\forall x(\alpha\Longrightarrow\beta))\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow(\forall x\beta)))$.
- כללי היסק: $F=\{\text{MP},\text{Gen}\}$.

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

משפט הנאותות: יהי σ מילון ללא שיוויון תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma\underset{\text{HC}}{\vdash}\alpha\right)\Longrightarrow\left(\Gamma\overset{v}{\models}\alpha\right)$.

טענה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ פסוק באשר $\underset{\text{HPC}}{\vdash}\alpha$ וכן $\text{Var}(\alpha)=\{p_1\dots p_n\}$ ויהיו $\varphi_1\dots\varphi_n$ נוסחאות אזי $\underset{\text{HC}}{\vdash}\alpha\left[{}^{\varphi_1}/_{p_1}\dots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right]$.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HC עבורן $\Gamma\cup\{\alpha\}\underset{\text{HC}}{\vdash}\beta$ וכן בהוכחה לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב־α אזי $\Gamma\underset{\text{HC}}{\vdash}(\alpha\Longrightarrow\beta)$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HC עבורן $\Gamma\cup\{\alpha\}\underset{\text{HC}}{\vdash}\beta$ וכן $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\underset{\text{HC}}{\vdash}\beta$ וכן בהוכחות לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב־α אזי $\Gamma\underset{\text{HC}}{\vdash}\beta$.

קבוצת נוסחאות σ־שלמה: יהיו σ,Σ מילונים באשר $\Sigma\subseteq\sigma$ אזי קבוצת נוסחאות Γ מעל Σ עבורה לכל פסוק φ מעל σ מתקיים $(\varphi\in\Gamma)\vee(\neg\varphi\in\Gamma)$.

קבוצת נוסחאות בעלת תכונת הנקין: יהי σ מילון אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל נוסחה φ באשר $\neg\forall x\varphi$ פסוק וכן $\neg\forall x\varphi\in\Gamma$ מתקיים שקיים סימן קבוע $c\in\sigma$ עבורו $\neg\varphi\left[{}^{c}/_{x}\right]\in\Gamma$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma\subseteq\sigma$ וקיימת Δ עקבית σ־שלמה מעל Σ המקיימת $\Gamma\subseteq\Delta$.

למה: יהי σ מילון תהא Γ עקבית תהא φ נוסחה באשר $\neg\forall x\varphi$ פסוק וכן $\neg\forall x\varphi\in\Gamma$ ויהי $c\notin\sigma$ סימן קבוע אזי $\Gamma\cup\{\neg\varphi\left[{}^{c}/_{x}\right]\}$ עקבית מעל $\sigma\cup\{c\}$.

משפט הנקין: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma\subseteq\sigma$ וקיימת Δ עקבית מעל Σ המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma\subseteq\Delta$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma\subseteq\sigma$ וקיימת Δ מעל Σ עקבית Σ־שלמה המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma\subseteq\Delta$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין יהי M מבנה ההרברנד מעל σ עבורו $((t_1\dots t_n)\in R^M)\Longleftrightarrow(R(t_1\dots t_n)\in\Gamma)$ לכל סימן יחס $R\in\sigma$ ולכל שמות עצם $t_1\dots t_n$ ותהא φ נוסחה אזי $(M\models\varphi)\Longleftrightarrow(\varphi\in\Gamma)$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין אזי קיים מבנה M עבורו $M\models\Gamma$.

משפט השלמות של גדל: יהי σ מילון ללא שיוויון תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma\overset{v}{\models}\alpha\right)\Longleftarrow\left(\Gamma\underset{\text{HC}}{\vdash}\alpha\right)$.

תורה של מבנה: יהי M מבנה מעל מילון σ אזי $\text{Th}(M)=\{\varphi\mid(M\models\varphi)\wedge(\text{FV}(\varphi)=\varnothing)\}$.

מסקנה: $\text{Th}(\mathcal{M}_{\mathbb{N}})=\text{AT}$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת פסוקים התב"ש

- לכל מבנים M,N המספקים את Γ מתקיים $\text{Th}(M)=\text{Th}(N)$.
- לכל פסוק φ מתקיים $(\Gamma\vdash\varphi)\vee(\Gamma\vdash(\neg\varphi))$.