אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}$.
- לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\emptyset \in \mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$.

σ־אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת

- $\Omega \in \mathcal{F}$.
- $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}$.
- לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\emptyset \in \mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$.

משפט: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $\mathcal{F}$ הינה אלגברה מעל Ω.

פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu : A \to \mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1 \ldots B_n \in \mathcal{A}$ מתקיים $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(B_i\right)$.

מידה על אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ אדטיבית.

פונקציה σ־אדטיבית: פונקציה $\mu : A \to \mathbb{R}$ המקיימת לכל $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ מתקיים $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i\right)$.

מידה על σ־אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ σ־אדטיבית.

מרחב מדיד: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $(\Omega, \mathcal{F})$.

קבוצה מדידה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $E \in \mathcal{F}$.

למה: תהא μ מידה על $\mathcal{F}$ המקיימת $\exists E \in \mathcal{F}.\mu(E) < 0$ אזי $\mu(\emptyset) = 0$.

למה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ אזי μ אדטיבית.

למה: תהא μ מידה ותהיינה $A, B \in \mathcal{F}$ עבורן $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \le \mu(B)$.

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי

- מונוטונית עולה חלש: $\forall n \in \mathbb{N}.A_n \subseteq A_{n+1}$.
- מונוטונית יורדת חלש: $\forall n \in \mathbb{N}.A_{n+1} \subseteq A_n$.

סופרמום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\sup(A) = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

אינפימום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\inf(A) = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

גבול עליון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$.

גבול תחתון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$.

גבול: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ עבורה $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ אזי $\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$.

טענה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ ותהא $A : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n\to\infty} A_n = B$ אזי $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B)$.

מרחב מידה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה/σ־אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על $\mathcal{F}$ אזי $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

מידת הסתברות: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ המקיימת $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

מרחב הסתברות: מרחב מידה $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ עבורו μ מידת הסתברות.

מרחב התוצאות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מאורע: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $E \in \mathcal{F}$.

מרחב המאורעות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $\mathcal{F}$.

אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $((0,1],\mathcal{F},\mathbb{P})$ עבורו לכל $A\subseteq(0,1]$ ולכל $b\in(0,1]$ באשר $A+b\subseteq(0,1]$ מתקיים $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A+b)$.

טענה: לכל מרחב הסתברות $\left((0,1],2^{(0,1]},\mathbb{P}\right)$ לא מתקיימת אינוריאנטיות להזזות.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A$.

קבוצה סגורה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה A^C פתוחה.

טענה: תהיינה $\{F_i\}_{i\in I}$ σ־אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i\in I}F_i$ הינה σ־אלגברה מעל Ω.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}$: תהיינה $\{F_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\bigcap_{i\in I}F_i$.

קבוצה בורלית: $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

טענה: σ־אלגברה בורלית הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$ המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω ותהא $A\subseteq\Omega$ אזי $\{E\cap A\mid E\in\mathcal{F}\}$ הינה σ־אלגברה מעל A.

σ־אלגברה בורלית מעל $(0,1]$: $\mathfrak{B}_{(0,1]}=\{B\cap(0,1]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$.

מידת לבג: תהא $B\in\mathfrak{B}$ אזי $\lambda(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)\mid B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right\}$.

טענה: $\left((0,1],\mathfrak{B}_{(0,1]},\lambda\right)$ מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

σ־אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ ותהיינה $\{F_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל Ω המכילות את $\mathcal{T}$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\bigcap_{i\in I}F_i$.

הצילינדר של ה־σ־אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ ו־σ־אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי $\mathcal{T}$.

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0=T\cup\{\emptyset,\Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha+1$ נסמן

$$\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\mid A_n\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}$$

ולכל סודר גבול λ נסמן

$$\mathcal{F}_{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha}$$

אזי $\sigma(\mathcal{T})=\mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ ויהיו $\omega,\kappa\in\Omega$ עבורן $\forall A\in\mathcal{T}.\omega\in A\iff\kappa\in A$ אזי $\forall A\in\sigma(\mathcal{T}).\omega\in A\iff\kappa\in A$.