אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת
- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.
למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.
σ־אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת
- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.
למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.
משפט: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $\mathcal{F}$ הינה אלגברה מעל Ω.
פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1\ldots B_n\in\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}B_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(B_i\right)$.
מידה על אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ אדטיבית.
פונקציה σ־אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B_i\right)$.
מידה על σ־אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ σ־אדטיבית.
מרחב מדיד: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $(\Omega,\mathcal{F})$.
קבוצה מדידה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $E\in\mathcal{F}$.
למה: תהא μ מידה על $\mathcal{F}$ המקיימת $\exists E\in\mathcal{F}.\mu(E)<0$ אזי $\mu(\varnothing)=0$.
למה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ אזי μ אדטיבית.
למה: תהא μ מידה ותהיינה $A,B\in\mathcal{F}$ עבורן $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.
סדרת קבוצות מונוטונית: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי
- מונוטונית עולה חלש: $\forall n\in\mathbb{N}.A_n\subseteq A_{n+1}$.
- מונוטונית יורדת חלש: $\forall n\in\mathbb{N}.A_{n+1}\subseteq A_n$.

סופרמום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\sup(A)=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$.
אינפימום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\inf(A)=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i$.
גבול עליון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$.
גבול תחתון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i$.
גבול: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ עבורה $\liminf_{n\to\infty}A_n=\limsup_{n\to\infty}A_n$ אזי $\lim_{n\to\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n$.
טענה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n\to\infty}A_n=B$ אזי $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(B)$.
מרחב מידה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה/σ־אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על $\mathcal{F}$ אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.
מידת הסתברות: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ המקיימת $\mathbb{P}(\Omega)=1$.
מרחב הסתברות: מרחב מידה $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ עבורו μ מידת הסתברות.
מרחב התוצאות: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.
מאורע: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $E\in\mathcal{F}$.
מרחב המאורעות: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $\mathcal{F}$.
אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $((0,1],\mathcal{F},\mathbb{P})$ עבורו לכל $A\subseteq(0,1]$ ולכל $b\in(0,1]$ באשר $A+b\subseteq(0,1]$ מתקיים $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A+b)$.
טענה: לכל מרחב הסתברות $\left((0,1],2^{(0,1]},\mathbb{P}\right)$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.
קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A$.
קבוצה סגורה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $A^{\mathcal{C}}$ פתוחה.
טענה: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ σ־אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ הינה σ־אלגברה מעל Ω.
σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}$: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.
קבוצה בורלית: $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

טענה: σ־אלגברה בורלית הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$ המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω ותהא $A\subseteq\Omega$ אזי $\{E\cap A\mid E\in\mathcal{F}\}$ הינה σ־אלגברה מעל A.

σ־אלגברה בורלית מעל $(0,1]$: $\mathfrak{B}_{(0,1]}=\{B\cap(0,1]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$.

מידת לבג: תהא $B\in\mathfrak{B}$ אזי $\lambda(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)\mid B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\right\}$.

טענה: $\left((0,1],\mathfrak{B}_{(0,1]},\lambda\right)$ מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

מרחב אחיד על A: עבור $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(A,\mathfrak{B}_A,\lambda)$.

σ־אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ ותהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל Ω המכילות את $\mathcal{T}$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

הצילינדר של ה־σ־אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ ו־σ־אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי $\mathcal{T}$.

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha+1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\mid A_n\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha}$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\mathcal{F}_{\omega_1}$ כאשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T}\subseteq 2^{\Omega}$ ויהיו $\omega,\kappa\in\Omega$ עבורן $\forall A\in\mathcal{T}.\omega\in A\Longleftrightarrow\kappa\in A$ אזי $\forall A\in\sigma(\mathcal{T}).\omega\in A\Longleftrightarrow\kappa\in A$.

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ עבורה $\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1}[B]\in\mathcal{F}$.

סימון: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ כך $\mathbb{P}_X(B)=\mathbb{P}\left(X^{-1}[B]\right)$.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ אזי

- $f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}\left[A^{\mathcal{C}}\right]=f^{-1}[A]^{\mathcal{C}}$.

טענה: יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדיד ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}$ אזי $\left\{E\subseteq\mathbb{R}\mid X^{-1}[E]\in\mathcal{F}\right\}$ הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

משפט: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}$ אזי (X מ"מ)$\Longleftrightarrow\left(\forall t\in\mathbb{R}.X^{-1}[(-\infty,t)]\in\mathcal{F}\right)$.

σ־אלגברה נוצרת על ידי משתנה מקרי: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי $\sigma(X)=\sigma\left(\left\{X^{-1}[B]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\right\}\right)$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי

- יהי $c\in\mathbb{R}$ אזי cX מ"מ.
- $X+Y$ מ"מ.
- XY מ"מ.
- יהי Z מ"מ על $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$ אזי $f\circ X$ מ"מ.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה אזי $f^{-1}[\mathcal{U}]$ פתוחה.

מסקנה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ אזי f מ"מ על $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$.

פונקציית התפלגות מצטברת (פה"מ): יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ המקיימת $F_X(t)=\mathbb{P}(X\le t)$.

טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי

- $\lim_{t\to\infty}F_X(t)=1$.
- $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0$.
- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t\to a^+}F_X(t)=F_X(a)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y$.

למה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}_0\subseteq 2^{\Omega}$ סגורה לחיתוכים סופיים עבורה $\Omega\in\mathcal{F}_0$ ותהא $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ סגורה להפרשים וסגורה לגבולות אינסופיים עבורה $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}$ אזי $\sigma(\mathcal{F}_0)\subseteq\mathcal{F}$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)\Longleftrightarrow(F_X=F_Y)$.

תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid\forall\varepsilon>0.\mathbb{P}(t-\varepsilon<X<t+\varepsilon)>0\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X)$ הקבוצה הסגורה המינימלית ב־$\mathbb{R}$ עבורה $\mathbb{P}(X\in\text{supp}(X))=1$.

אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $t\in\mathbb{R}$ המקיים $\mathbb{P}(X=t)>0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי $A_X=\{t\in\mathbb{R}\mid X \text{ אטום של } t\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $|A_X|\le\aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי X המקיים $\mathbb{P}(X\in A_X)=1$.

פונקציית צפיפות: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f\geq 0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי X עבורו קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a<b$ מתקיים $\mathbb{P}\left(a<X<b\right)=\int_{a}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

סימון: יהי X מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של X.

טענה: יהי X מ"מ רציף אזי

- יהי $t\in\mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}\left(X=t\right)=0$.
- $F_X\left(t\right)=\int_{-\infty}^{t}f_X\left(x\right)\mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $a\in\mathbb{R}$ עבורה $f_X\in C\left(a\right)$ אזי $F_X'\left(a\right)=f_X\left(a\right)$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ממש עד אשר $F_X=1$ ויהי $p\in\left(0,1\right)$ אזי $x_p\in\mathbb{R}$ המקיים $F_X\left(x_p\right)=p$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ויהי $p\in\left(0,1\right)$ אזי $x_p=\sup\left\{t\mid F_X\left(t\right)\leq p\right\}$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty}F\left(x\right)=0$ וכן $\lim_{x\to\infty}F\left(x\right)=1$ אזי קיים מ"מ X על מרחב הסתברות $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ עבורו $F_X=F$.

סימון: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty}F\left(x\right)=0$ וכן $\lim_{x\to\infty}F\left(x\right)=1$ אזי $X^{\star}\left(s\right)=\sup\left\{t\mid F_X\left(t\right)\leq s\right\}$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty}F\left(x\right)=0$ וכן $\lim_{x\to\infty}F\left(x\right)=1$ אזי $X^{\star}$ מ"מ.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty}F\left(x\right)=0$ וכן $\lim_{x\to\infty}F\left(x\right)=1$ אזי $F_{X^{\star}}=F$.