פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_+(a)=f(a)$ וכן $F'_-(b)=f(b)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^I\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\Longleftrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int(f+g)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int(\alpha f)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^I$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int((f\circ g)\cdot g')$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^n|\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\ldots t_n\}$ המקיימות $\forall i\in\{1\ldots n\}.t_i\in[x_{i-1},x_i]$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-L|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a,b])=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid f\text{ אינטגרבילית רימן}\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot\mathrm{d}t=c(b-a)$.

טענה: $D(x)\notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f\in R([a,b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}\text{ נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{ נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)=\int_{a}^{b}f$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי $\omega\left(f,J\right)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה ויהי $x_{0}\in J$ אזי (f רציפה על x_{0})$\Longleftrightarrow\left(\lim_{\delta\to0}\omega\left(f,\left[x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right]\right)=0\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow\left(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}\left(I\right).\omega\left(f,I\right)<\varepsilon\right)$.

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right)\Delta x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p_{1}\ldots p_{m}\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\ge\overline{I}\left(f\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

משפט: $C\left(\left[a,b\right]\right)\subseteq R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $f_{\upharpoonright_{\left[a,b\right]}}\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\wedge\left(f\in R\left(\left[b,c\right]\right)\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,d\right]}$ חסומה ויהיו $b<c\in\left[a,d\right]$ עבורה $f\in R\left(\left[a,d\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$ אזי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\left\{ \left(a_{i},b_{i}\right)\right\} _{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_{i},b_{i}\right)$ וכן $\sum\left(b_{i}-a_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\left|A\right|\le\aleph_{0}$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\upharpoonright_{A}}=g_{\upharpoonright_{A}}$ אזי $\int_{a}^{b}f=\int_{a}^{b}g$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_{i} & x\in\left\{ b_{1}\ldots b_{m}\right\} \\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_{a}^{c}f=\int_{a}^{c}g$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{b}\alpha f+\beta g=\alpha\int_{a}^{b}f+\beta\int_{a}^{b}g$.

משפט לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ ויהי $b\in\left(a,c\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f+\int_{b}^{c}f=\int_{a}^{c}f$.

הגדרה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=-\int_{b}^{a}f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\ge0$ אזי $\int_{a}^{b}f\ge0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_{a}^{b}f\ge\int_{a}^{b}g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ רציפה המקיימת $f\ge0$ וכן $\int_{a}^{b}f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m\left(b-a\right)\le\int_{a}^{b}f\le M\left(b-a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_{a}^{b}f\right|\le\int_{a}^{b}\left|f\right|\le\sup_{\left[a,b\right]}\left(\left|f\right|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$ אזי $F\in C\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $0\le g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}\left(f\cdot g\right)=f\left(x_{0}\right)\int_{a}^{b}g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$ אזי $F'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_{a}^{b}f=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ יהיו $x_{1}\ldots x_{n}\in\left[a,b\right]$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]\backslash\left\{ x_{1}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $\left[f\right]|_{a}^{b}=f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f'g=\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $\varphi\in C^{1}\left(\left[\alpha,\beta\right],\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $\left(\varphi\left(\alpha\right)=a\right)\wedge\left(\varphi\left(\beta\right)=b\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^{1}\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx\right|\le\frac{2\pi\sup\left(\left|f'\right|\right)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=\left[a,\infty\right)$ וכן $\forall b\in\left[a,\infty\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{\infty}f=\lim\limits_{b\to\infty}\int_{a}^{b}f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=\left(-\infty,b\right]$ וכן $\forall a\in\left(-\infty,b\right].f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{-\infty}^{b}f=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_{a}^{b}f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.\left(a<b\right)\Longrightarrow\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)$ אזי $\int_{-\infty}^{\infty}f=\int_{-\infty}^{0}f+\int_{0}^{\infty}f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=\left(a,b\right]$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[c,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim\limits_{r\to a^{+}}\int_{r}^{b}f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=\left[a,b\right)$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim\limits_{r\to b^{-}}\int_{a}^{r}f$.

אינטגרל: תהא $f:\left(a,b\right]\to\mathbb{R}$ כך שלכל $c\in\left(a,b\right]$ מתקיים $f\in R\left(\left[c,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim_{\varepsilon\to0^{+}}\int_{a+\varepsilon}^{b}f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R\left(I\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{I}\mid\int_{I}f\text{ קיים וסופי}\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\left\{ \infty\right\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{\omega}\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\int_{a}^{\omega}f+\beta\int_{a}^{\omega}g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהי $c\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{a}^{c}f+\int_{c}^{\omega}f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_{a}^{\omega}f\ge\int_{a}^{\omega}g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ על $\left[a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\lim_{b\to\omega}F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f'g=\lim_{b\to\omega}\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{\omega}fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $\substack{\varphi\in\left[a,\omega\right)^{\left[c,\eta\right)}\\ \varphi\in C^{1}\left(\left[c,\eta\right)\right)}$ המקיימת $\substack{\varphi\left(c\right)=a\\ \lim_{b\to\eta}\varphi\left(b\right)=\omega}$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{c}^{\eta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in\left(a,\omega\right).\forall b_{1},b_{2}\in\left[B,\omega\right).\left|\int_{b_{1}}^{b_{2}}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow\left(f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ אינו מתכנס אך $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_{a}^{\omega}f\right|\le\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt\right.$ חסומה על $\left.\left[a,\omega\right)\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימות $\forall b\in\left(a,\omega\right).f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימות $\forall b\in\left(a,\omega\right).f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_{a}^{\omega}g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\left(\int_{1}^{\infty}f<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^{\infty}f\left(n\right)\le\int_{1}^{\infty}f\le\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^{n}}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.