טופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X,\varnothing\in\mathcal{T}$.
- תהיינה $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{T}$ אזי $\bigcup\mathcal{U}\in\mathcal{T}$.
- תהיינה $\{U_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\mathcal{T}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\mathcal{T}$.

מרחב טופולוגי (מ"ט): תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ טופולוגיה על X אזי $(X,\mathcal{T})$.

קבוצה פתוחה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגיה אזי $U\subseteq X$ המקיימת $U\in\mathcal{T}$.

קבוצה סגורה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגיה אזי $E\subseteq X$ המקיימת $X\backslash E\in\mathcal{T}$.

טענה: תהא $\mathcal{P}(X)\supseteq\mathcal{T}$ עבורה $X,\varnothing\in\mathcal{T}$ וכן $(\bigcup\mathcal{U}\in\mathcal{T})$ $\forall\mathcal{U}\subseteq\mathcal{T}.$ אזי ($\mathcal{T}$ טופולוגיה)$\Longleftrightarrow$(לכל $U,V\in\mathcal{T}$ מתקיים $U\cap V\in\mathcal{T}$).

הטופולוגיה הטריויאלית: תהא X קבוצה אזי $\{X,\varnothing\}$.

הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X)$.

הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: יהי (X,ρ) מרחב מטרי אזי $\mathcal{T}(X,\rho)=\{U\subseteq X\mid\forall x\in U.\exists r>0.B_r(x)\subseteq U\}$.

הטופולוגיה הקו־סופית: תהא X קבוצה אזי $\{A\subseteq X\mid |X\backslash A|<\aleph_0\}\cup\{\varnothing\}$.

משפט: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{C}=\{E\subseteq X\mid X\backslash E\in\mathcal{T}\}$ אזי
- $X,\varnothing\in\mathcal{C}$.
- תהיינה $\{E\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{C}$ אזי $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha\in\mathcal{T}$.
- תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\mathcal{C}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in\mathcal{T}$.

בסיס לטופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $\bigcup\mathcal{B}=X$.
- תהיינה $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ עבורן $B_1\cap B_2\neq\varnothing$ ותהא $x\in B_1\cap B_2$ אזי קיימת $B_3\in\mathcal{B}$ עבורה $x\in B_3$ וכן $B_3\subseteq B_1\cap B_2$.

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיס אזי
$\mathcal{T}(\mathcal{B})=\{U\subseteq X\mid\forall x\in U.\exists B\in\mathcal{B}.(x\in B)\wedge(B\subseteq U)\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ טופולוגיה על X.

סימון: $\mathcal{B}_E=\{(a,b)\mid a<b\}$ וכן $\mathcal{B}_{\text{Sorg}}=\{[a,b)\mid a<b\}$ וכן $\mathcal{B}_K=\mathcal{B}_E\cup\left\{(a,b)\setminus\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}_+\right\}\mid a<b\right\}$.

טענה: $\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_{\text{Sorg}},\mathcal{B}_K$ בסיסים של $\mathbb{R}$.

הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית: $\mathbb{R}=(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathcal{B}_E))$.

הישר של זורגנפריי: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}=(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{Sorg}}))$.

טופולוגיית־K: $\mathbb{R}_K=(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$.

משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})=\{U\subseteq X\mid\exists A\subseteq\mathcal{B}.U=\bigcup A\}$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיסים עבורם $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$ וכן $\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{B}_1)$ אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}_1)=\mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$.

טופולוגיה עדינה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_2$.

טופולוגיה גסה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_1$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{T}$ עבורו $\forall U\in\mathcal{T}.\forall x\in U.\exists A\in\mathcal{A}.(x\in A)\wedge(A\subseteq U)$ אזי $\mathcal{A}$ בסיס של $\mathcal{T}$.

טענה: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי $\{(a,b)\mid a<b\}\cup\{[a,b)\mid\forall x\in X.a\leq x\}\cup\{(a,b]\mid\forall x\in X.x\leq b\}$ בסיס.

טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי
$\mathcal{T}(\{(a,b)\mid a<b\}\cup\{[a,b)\mid\forall x\in X.a\leq x\}\cup\{(a,b]\mid\forall x\in X.x\leq b\})$.

תת בסיס: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה $\bigcup\mathcal{S}=X$.

הטופולוגיה הנוצרת מתת־בסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי
$\mathcal{T}(\mathcal{S})=\left\{U\subseteq X\mid\exists A_1\ldots A_k\subseteq\mathcal{S}.U=\bigcup\left(\bigcap_{i=1}^{k}A\right)\right\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ טופולוגיה על X.

טופולוגיית זריצקי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{T}(\{\{a\in\mathbb{F}^n\mid f(a)\neq0\}\mid f\in\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]\})$.

סביבה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $x\in X$ אזי $U\in\mathcal{T}$ עבורה $x\in U$.

פנים של קבוצה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\text{int}(A)=\mathring{A}=\bigcup_{\substack{U\subseteq A\\U\in\mathcal{T}}}U$.

סגור של קבוצה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\text{cl}(A)=\overline{A}=\bigcap_{\substack{A\subseteq E\\E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{T}}}E$.

שפה של קבוצה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\partial A=\overline{A}\backslash\text{int}(A)$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $A\subseteq X$ ויהי $x\in X$ התב"ש

- $x \in \overline{A}$.
- לכל $U \in \mathcal{T}$ המקיים $x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \varnothing$.
- יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי לכל $B \in \mathcal{B}$ המקיים $x \in B$ מתקיים $B \cap A \neq \varnothing$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{X \backslash A}\right)$.

מסקנה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ אזי $(x \in \partial A)\Longleftrightarrow$(לכל $U \in \mathcal{T}$ המקיימת $x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \varnothing$ וכן $U \cap A^{\mathcal{C}} \neq \varnothing$).

קבוצה צפופה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט אזי $A \subseteq X$ המקיימת $X = \overline{A}$.

נקודת הצטברות: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $x \in X$ עבורו לכל סביבה U של x מתקיים $U \cap A \backslash \{x\} \neq \varnothing$.

גבול: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $x \in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $y \in X$ עבורן לכל סביבה U של y החל ממקום מסוים $x_n \in U$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $A \subseteq \left\{x \in X \mid \exists a \in A^{\mathbb{N}}. \lim_{n\to\infty} a_n = x\right\} \subseteq \overline{A}$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A} = A \cup \{x \in X \mid A \text{ נקודת הצטברות של } x\}$.

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ אזי (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($\{x \in X \mid A \text{ נקודת הצטברות של } x\} \subseteq A$).

פונקציה רציפה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים אזי $f : X \to Y$ עבורה $\forall U \in \mathcal{S}. f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

משפט: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f : X \to Y$ התב"ש
- f רציפה.
- לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה.
- לכל $E \subseteq Y$ סגורה מתקיים כי $f^{-1}(E)$ סגורה.
- לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

הומיאומורפיזם: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים אזי $f : X \to Y$ רציפה חח"ע ועל עבורה f^{-1} רציפה.

טענה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f : X \to Y$ חח"ע ועל התב"ש
- f הומיאומורפיזם.
- תהא $U \subseteq Y$ אזי (U פתוחה)$\Longleftrightarrow$($f^{-1}(U)$ פתוחה).
- תהא $E \subseteq Y$ אזי (E סגורה)$\Longleftrightarrow$($f^{-1}(E)$ סגורה).
- לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

הטופולוגיה המושרית על קבוצה מפונקציה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f : X \to Y$ אזי $\mathcal{T}_X = \left\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{S}\right\}$.

טענה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f : X \to Y$ אזי $(X,\mathcal{T}_X)$ מ"ט.

מסקנה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f : X \to Y$ אזי f רציפה על $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{S})$.

תת מרחב טופולוגי (ת"מ): יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A = \left\{U \subseteq A \mid \exists V \in \mathcal{T}. U = \mathrm{Id}^{-1}(V)\right\}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $(A,\mathcal{T}_A)$ מ"ט.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי $\mathcal{B}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ בסיס של $\mathcal{T}_A$.

טענה: יהי $A \subseteq X$ אזי
- תהא $U \subseteq A$ אזי (U פתוחה ביחס ל-$\mathcal{T}_A$)$\Longleftrightarrow$(קיימת V פתוחה ביחס ל-$\mathcal{T}$ עבורה $V \cap A = U$).
- תהא $E \subseteq A$ אזי (E סגורה ביחס ל-$\mathcal{T}_A$)$\Longleftrightarrow$(קיימת F פתוחה ביחס ל-$\mathcal{T}$ עבורה $F \cap A = E$).
- תהא $D \subseteq A$ אזי $\mathrm{cl}_X(D) \cap A = \mathrm{cl}_A(D)$.
- תהא $D \subseteq A$ אזי $\mathrm{int}_X(D) \cap A \subseteq \mathrm{int}_A(D)$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T}_X)$ מ"ט ויהי $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ת"מ אזי
- נניח כי Y פתוחה ב-X, תהא $A \subseteq Y$ פתוחה ב-Y אזי A פתוחה ב-X.
- נניח כי Y סגורה ב-X, תהא $A \subseteq Y$ סגורה ב-Y אזי A סגורה ב-X.

טענה: יהיו X,Z מ"ט יהי $Y \subseteq Z$ ת"מ ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f : X \to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X,Y מ"ט יהי $A \subseteq X$ ת"מ ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f_{\restriction_A} : A \to Y$ רציפה.

טענה: יהיו X,Z מ"ט יהי $Y \subseteq Z$ ת"מ ותהא $f : X \to Y$ רציפה עבורה $f(X) \subseteq Z$ אזי $f : X \to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X,Z מ"ט ותהא $f : X \to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(קיימות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ פתוחות עבורן $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = X$ וכן $f_{\restriction_{U_\alpha}}$ רציפה לכל $\alpha \in \Lambda$).

טענה: יהיו X,Y,Z מ"ט תהא $f : X \to Y$ רציפה ותהא $g : Y \to Z$ רציפה $g \circ f : X \to Z$ רציפה.

משפט למת ההדבקה: יהיו X,Y מ"ט תהיינה $A,B\subseteq X$ סגורות עבורן $X=A\cup B$ תהא $f:A\to Y$ רציפה ותהא $g:B\to Y$ רציפה עבורן $f=g$ על $A\cap B$ אזי $f\cup g:X\to Y$ רציפה.

סימון: יהיו X,Y מ"ט ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ורציפה נגדיר $\hat{f}:X\to f\left(X\right)$ כך $\hat{f}=f$.

שיכון: יהיו X,Y מ"ט אזי $f:X\to Y$ חח"ע ורציפה עבורה $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

העתקת מנה: יהיו X,Y מ"ט אזי $f:Y\to X$ פונקציה על המקיימת $\forall\mathcal{U}\subseteq X.\left(\mathcal{U}\in\mathcal{T}_{X}\right)\Longleftrightarrow\left(f^{-1}\left(\mathcal{U}\right)\in\mathcal{T}_{Y}\right)$.

הערה: יהיו X,Y מ"ט ותהא $f:Y\to X$ העתקת מנה אזי f רציפה.

טענה: יהיו X,Y,Z מ"ט תהא $f:X\to Y$ העתקת מנה ותהא $g:Y\to Z$ העתקת מנה אזי $g\circ f:X\to Z$ העתקת מנה.

משפט: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f:X\to A$ על אזי קיימת ויחידה טופולוגיה $\mathcal{T}_{A}$ על A עבורה f העתקת מנה.

טופולוגיית המנה המושרית: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f:X\to A$ על אזי טופולוגיה $\mathcal{T}_{A}$ על A עבורה f העתקת מנה.