פעולה בינארית: פונקציה $*:A\times A\to A$ ונסמן $a*b:=*\left(\langle a,b\rangle\right)$.

אסוציטיביות/קיבוציות: $\forall a,b,c\in A.a*(b*c)=(a*b)*c$.

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: $\forall a,b\in A.a*b=b*a$.

איבר יחידה: $e\in G$ המקיים $\forall g\in G.e*g=g*e=g$.

איבר הופכי/נגדי: יהי $g\in G$ אזי $h\in G$ המקיים $g*h=h*g=e_G$.

מונואיד: תהא קבוצה G ופעולה בינארית $*$ אזי זוג סדור $\langle G,*\rangle$ המקיים ($*$ אסוציטיבית)$\wedge$(קיים איבר יחידה).

חבורה: $\langle G,*\rangle$ המקיים (מונואיד)$\wedge$(קיים איבר הופכי).

סימון: e_G איבר יחידה בחבורה כללית, 1_G אם הפעולה מסומנת ב־$*$, 0_G אם הפעולה מסומנת ב־$+$.

הגדרה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $A^\times=\{a\in A\mid\exists h\in A.a*h=h*a=e_A\}$.

טענה: $\left\langle A^\times,*\restriction_{A^\times\times A^\times}\right\rangle$ חבורה.

הגדרה: $\left(S_A=A\overset{1-1}{\underset{onto}{\to}}A\right)\wedge\left(S_n=S_{[n]}\right)$.

חבורת התמורות: $\langle S_A,\circ\rangle$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq2}$ אזי $x\sim_n y\iff n\mid x-y$ יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$.

טענה: $\left(\mathbb{Z}/\sim_n=\left\{[0]_{\sim_n},\ldots,[n-1]_{\sim_n}\right\}\right)\wedge\left([x]_{\sim_n}+[y]_{\sim_n}=[x+y]_{\sim_n}\right)$.

חבורת השאריות: $\langle\mathbb{Z}/\sim_n,+\rangle$.

פונקציית אוילר: כמות המספרים הזרים הקטנים מאשר $n\in\mathbb{N}$ הוא $\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

טענה: יהיו $e_1,e_2\in G$ איברי יחידה אזי $e_1=e_2$.

טענה: $(\forall a,b,c\in G.a*b=e_G=c*a)\implies(b=c)$.

מסקנה: יהי $a\in G$ וכן $h_1,h_2\in G$ הופכיים אל a אזי $h_1=h_2$.

סימון: יהי $a\in G$ אזי ההופכי שלו הינו a^{-1}.

הגדרה: $\left(a^0=e_G\right)\wedge\left(a^{n+1}=a*a^n\right)\wedge\left(a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n\right)$.

סדר: $\text{ord}(a)=\min\{n\in\mathbb{N}_+\mid a^n=e_G\}$.

משפט: $|G|<\aleph_0\implies\exists a\in G.\text{ord}(a)\leq|G|$.

תת חבורה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה אזי $H\subseteq G$ המקיימת $\left\langle H,*\restriction_{H\times H}\right\rangle$ חבורה.

סימון: תהא G חבורה וכן $H\subseteq G$ תת חבורה אזי $H\leq G$.

בוחן תת חבורה: תהא $H\subseteq G$ תת קבוצה אזי (H חבורה)$\iff$(H סגורה לפעולה $*$)$\wedge$($e_G\in H$)$\wedge$($\forall h\in H.h^{-1}\in H$).

איזומורפיזם בין חבורות: $f:G\overset{1-1}{\underset{onto}{\to}}H$ המקיימת $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$.

חוק הפילוג: $((b+c)*a=b*a+c*a)\wedge(a*(b+c)=a*b+a*c)$.

חוג עם יחידה: $\langle R,+,*\rangle$ המקיים ($\langle R,+\rangle$ חבורה אבלית)$\wedge$($\langle R,*\rangle$ מונואיד)$\wedge$(חוק הפילוג).

איזומורפיזם בין חוגים: $f:R\overset{1-1}{\underset{onto}{\to}}F$ המקיימת ($f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$)$\wedge$($f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$)$\wedge$($f(1_R)=1_F$).

חוג הפולינומים: יהי $\langle R,+,\cdot\rangle$ חוג חילופי אזי $\langle R[x],+,\cdot\rangle$.

נוסחאת המעלות: $\deg(p+q)\leq\max(\deg(p),\deg(q))$ וגם $\deg(p\cdot q)\leq\deg(p)+\deg(q)$.

הגדרה: $T^{-1}=\left\{t^{-1}\mid t\in T\right\}$.

תת החבורה שנוצרת על ידי T: $\langle T\rangle=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{\overset{n}{\underset{i=1}{*}}a_i\mid a\in\left(T\cup T^{-1}\right)^n\right\}=\left\{a_1*\ldots*a_n\mid a_1,\ldots,a_n\in T\cup T^{-1}\right\}$.

משפט: $\forall H\geq T.\langle T\rangle\leq H$, במילים אחרות $\langle T\rangle$ תת החבורה הקטנה ביותר ביחס ההכלה שמכילה את T.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי $\forall g\in G.|\langle g\rangle|=\text{ord}(g)$.

מנה של חבורה: יהיו $H\leq G$ אזי $g_1\sim_H g_2\iff g_1*g_2^{-1}\in H$.

סימון: יהיו $H\leq G$ אזי $G/H=G/\sim_H$.

משפט: תהא G חבורה אזי $(|G|=|G/H|\cdot|H|)\wedge(\forall g\in G.\text{ord}(g)\mid|G|)$.

משפט: תהא G חבורה עבורה $|G|\in\mathbb{P}$ אזי (G אבלית)$\wedge(\forall g\neq e_G.\langle g\rangle=G)$.

מחלק אפס: יהי R חוג אזי $a\in R\setminus\{0\}$ המקיים $\exists b\in R\setminus\{0\}.a*b=0_G$.

תחום שלמות: $\langle R,+,*\rangle$ המקיים ($\langle R,+,*\rangle$ חוג אבלי)$\wedge$(לא קיימים מחלקי אפס).

חוק צמצום: יהי R תחום שלמות אזי $\forall a\neq0_R.\forall b,c\in R.(a*c=a*b)\implies(c=b)$.

שדה: $\langle\mathbb{F},+,*\rangle$ המקיים ($\langle\mathbb{F},+,*\rangle$ חוג)$\wedge$($\langle\mathbb{F}\setminus\{0_\mathbb{F}\},*\rangle$ חבורה אבלית)$\wedge$($0_\mathbb{F}\neq1_\mathbb{F}$).

טענה: ($\mathbb{F}$ שדה)$\Longleftarrow$($\mathbb{F}$ תחום שלמות).

משפט: (R תחום שלמות סופי)$\Longleftarrow$(R שדה).

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(n \in \mathbb{P}) \Longleftrightarrow$($\langle \mathbb{Z}_n, +, * \rangle$ שדה).

מציין של שדה: $\text{char}(\mathbb{F}) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}\}$ ואחרת $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$.

טענה: $\text{char}(\mathbb{F}) \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

הבינום של ניוטון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\forall a, b \in \mathbb{F}. (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה עבורו $\text{char}(\mathbb{F}) = p \neq 0$ אזי $\forall a, b \in \mathbb{F}. \forall k \notin \{0, p\}. \left(\binom{p}{k} \cdot a = 0\right) \wedge \left((a+b)^p = a^p + b^p\right)$.

המשפט הקטן של פרמה: $\forall p \in \mathbb{P}. \forall a \in \mathbb{Z}_p. a^p \equiv a \mod p$.

קוסט/מחלקה שמאלית: יהיו $H \leq G$ חבורות ויהי $g \in G$ אזי $g * H = \{g * h \mid h \in H\}$.

קוסט/מחלקה ימנית: יהיו $H \leq G$ חבורות ויהי $g \in G$ אזי $H * g = \{h * g \mid h \in H\}$.

סימון: $G/H = \{g * H \mid g \in G\}$, $H \backslash G = \{H * g \mid g \in G\}$.

טענה: $(G/H) \wedge (H \backslash G)$ חלוקות של G.

טענה: $|G/H| = |H \backslash G|$.

אינדקס: יהיו $H \leq G$ חבורות אזי $[G : H] = |G/H|$.

משפט לגראנז': יהיו $H \leq G$ חבורות סופיות אזי $(|H| \mid |G|) \wedge \left([G : H] = \frac{|G|}{|H|}\right)$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $N \leq G$ המקיימת $\forall g \in G. gN = Ng$.

סימון: תהא G חבורה וכן $N \leq G$ תת חבורה נורמלית אזי $N \trianglelefteq G$.

כפל קבוצות: תהיינה $B, A \leq G$ חבורות אזי $A * B = \{a * b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

משפט: יהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי (H נורמלית)$\Longleftrightarrow ((g_1 H) * (g_2 H) = (g_1 * g_2) H)$.

טענה: (G/H חבורה עם כפל קבוצות)$\Longleftrightarrow$(H נורמלית).

משוואה: יהיו f, g פונקציות עבורן $\text{dom}(g) = \text{dom}(f)$ אזי הטענה $f(x) = g(x)$.

הגדרה: תהא X קבוצה עבורה $\text{dom}(g) = \text{dom}(f) = X^n$ אזי המשוואה מעל X עם n משתנים.

קבוצת פתרונות: תהא $f \in X^B$ ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{sols}_A(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$.

מערכת משוואות: יהיו n משוואות $f_i(x) = g_i(x)$ אזי $E = \langle f_1(x) = g_1(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x) \rangle$.

סימון: תהא מערכת משוואות E אזי E_i תהיה משוואה מספר i.

קבוצת פתרונות של מערכת: $\text{sols}_A(E) = \bigcap_{i=1}^{n} \text{sols}_A(E_i)$.

שקילות: E, E' מערכות/משוואות עבורן $\text{sols}_A(E) = \text{sols}_A(E')$.

טענה: תהא h חח"ע אזי $\text{sols}((h \circ f)(x) = (h \circ g)(x)) = \text{sols}(f(x) = g(x))$.

קבוצה אלגברית: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה קיימת מערכת משוואות E מעל $\mathbb{R}$ עם n משתנים המקיימת $\text{sols}(E) = A$.

פונקציה ליניארית: $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ המקיימת $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}. f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

משוואה ליניארית: תהא f פונקציה ליניארית אזי $f(x_1, \ldots, x_n) = b$.

מערכת משוואות ליניארית: מערכת משוואות שכל המשוואות בה ליניאריות.

סימון: כדי לייצג מערכת משוואות ליניארית נכתוב

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^2$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee(\mathbb{R}^2)$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^3$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee$(מישור)$\vee(\mathbb{R}^3)$.

סימון: $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

חיבור nיות: $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 * \beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n * \beta_n\end{pmatrix}$.

כפל nיה בסקלר: יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ אזי $\begin{pmatrix}\lambda * \alpha_1\\ \vdots\\ \lambda * \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} * \lambda$.

nית ה־0: $\begin{pmatrix}0_{\mathbb{F}}\\ \vdots\\ 0_{\mathbb{F}}\end{pmatrix} = \overline{0}$.

טענה: $\forall \overline{v} \in \mathbb{F}^n.\forall t \in \mathbb{F}.\left(t * \overline{v} = \overline{0}\right) \iff \left(t = 0_{\mathbb{F}}\right) \vee \left(\overline{v} = \overline{0}\right)$.

משוואה לינארית הומוגנית: משוואה לינארית $f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 0$.

טענה: תהא מערכת משוואות לינאריות הומוגניות E אזי $\overline{0} \in \text{sols}\left(E\right)$.

משפט: תהא E מערכת משוואות לינאריות הומוגניות אזי $\text{sols}\left(E\right)$ סגורה ביחס לחיבור וקטורים וכפילה בסקלר.

סימון: תהא E מערכת משוואות לינאריות אזי E_0 מערכת המשוואות הלינאריות ההומגניות עם אותן פונקציות לינאריות.

משפט: $\forall p \in \text{sols}\left(E\right).\text{sols}\left(E\right) = \text{sols}\left(E_0\right) + p$.

מטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n}\end{pmatrix}$$

סימון: $\left(A\right)_{i,j} = a_{i,j}$.

סדר מטריצה: מטריצה A תקרא מסדר $m \times n$ אם יש לה m שורות ו־n עמודות.

הגדרה: קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ מעל R תסומן $M_{m\times n}\left(R\right)$.

סימון: $C_j\left(A\right)$ הינה העמודה ה־jית, $R_i\left(A\right)$ הינה השורה ה־iית.

מטריצת ה־0: תהא מטריצה $A \in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים $\forall i \in [m].\forall j \in [n].\left(A\right)_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}$.

מטריצה ריבועית: $A \in M_{m\times m}\left(\mathbb{F}\right)$.

מטריצת מקדמים: עוד סימון אפשרי לייצוג מערכת לינארית של משוואות הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} & b_m\end{array}\right)$$

מטריצת המקדמים המצומצמת:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n}\end{pmatrix}$$

עמודת המקדמים החופשיים:

$$\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

איבר פותח בשורה: $\min\left(j\in[n]\mid(A)_{i,j}\neq0\right)$.

מטריצה מדורגת: מטריצה המקיימת כי (כל שורות האפסים נמצאות למטה)$\wedge$(בכל שורה שיש בה איבר פותח האיבר הפותח הינו מימין ממש לאיבר הפותח בשורה מעליו).

מטריצה מדורגת קנונית: מטריצה מדורגת המקיימת כי (כל האיברים הפותחים הם 1)$\wedge$(בכל עמודה של איבר פותח שאר אברי העמודה הם 0).

שורת סתירה: שורה מהצורה $(0,\ldots,0|b)$ באשר $b\neq0$.

אלגוריתם: תהא $A\in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת קנונית

- אם קיימת שורת סתירה, $\text{sols}(A)=\varnothing$.
- אם לא קיימת שורת סתירה, נניח כי בעמודות $I=\{i_1\ldots i_k\}$ לא קיים איבר פותח אזי

$$\text{sols}(A)=\left\{v\in\mathbb{F}^n\;\middle|\;\forall i\notin I.v_i=(A)_{i,n+1}-\sum_{j\in I}\left((A)_{i,j}v_j\right)\right\}$$

פעולה אלמנטרית: פונקציה $\varphi:M_{m\times n}(\mathbb{F})\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $\text{sols}(A)=\text{sols}(\varphi(A))$.$\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

הפעולות האלמנטריות של גאוס: (החלפת שורה $\varphi_{R_i\leftrightarrow R_j}(A)$)$\wedge$(הכפלה בסקלר $\varphi_{R_i\to\lambda R_i}(A)$)$\wedge$(חיבור שורה $\varphi_{R_i\to R_i+R_j}(A)$).

שקילות שורה (ש"ש): $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עבורן קיימות פעולות אלמנטריות $\varphi_1\ldots\varphi_n$ המקיימות $(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_n)(A)=B$.

משפט גאוס: $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

אלגוריתם גאוס: $\mathcal{O}\left(n^2m\right)$

$$\begin{aligned}
&\text{row}=1\\
&\text{for }\ (1\leq\text{col}\leq n)\\
&\qquad\text{if }\ \left(\exists\min(j)\geq\text{row}.\,(A)_{j,\text{col}}\neq0\right)\\
&\qquad\qquad\text{if }\ (j\neq\text{row})\\
&\qquad\qquad\qquad R_j\leftrightarrow R_{\text{row}}\\
&\qquad\qquad R_{\text{row}}\to\frac{1}{(A)_{\text{row},\text{col}}}R_{\text{row}}\\
&\qquad\qquad\text{for }\ (1\leq k\leq m\wedge k\neq\text{row})\\
&\qquad\qquad\qquad R_k\to R_k-(A)_{k,\text{col}}R_{\text{row}}\\
&\qquad\qquad\text{row}+=1
\end{aligned}$$

מסקנה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מדורגת קנונית ללא שורת סתירה בעלת k שורות ללא איבר פותח אזי $|\text{sols}(A)|=|\mathbb{F}|^k$.

הדלתא של קרונקר: $\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & else\end{cases}$.

מטריצת היחידה: $I_n\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $(I_n)_{i,j}=\delta_{i,j}$.

משפט: תהא $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אזי (למערכת $(A|0)$ יש פתרון יחיד)$\Longleftrightarrow$(הצורה הקנונית של A היא I_n).

משפט: מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו־n נעלמים שקולה למשוואה אחת של m־יות.

צירוף לינארי: יהיו $\langle\vec{v_1},\ldots,\vec{v_n}\rangle\in(\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{v_i}$ עבור $\alpha\in\mathbb{F}^n$.

כפל מטריצה ב־n־יה: $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).\forall\vec{v}\in\mathbb{F}^n.A\vec{v}=\sum_{i=1}^nC_i(A)\vec{v_i}$.

משפט: $(A\cdot(\underline{v}+\underline{u})=A\cdot\underline{v}+A\cdot\underline{u})\wedge(A\cdot(\alpha\cdot\underline{v})=\alpha\cdot(A\cdot\underline{v}))\wedge$(יש מחלקי אפס).

מטריצת סיבוב: $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

מטריצת ונדרמונד: מטריצה שבא כל עמודה או שורה הינה סדרה הנדסית.

פולינום לגראנז' ה־i: $\left(\prod_{k=1}^{j-1}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)\left(\prod_{k=j+1}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)$ $P_i\left(x\right)=$, מתקיים $P_i\left(x_j\right)=\delta_{i,j}$.

סימון: יהי $\left(\mathbb{F}^m\right)^n\ni\langle v_1,\ldots,v_n\rangle$ נגדיר $\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.

הגדרה: נגדיר $e_j\in\mathbb{F}^n$ כך $\left(e_j\right)_i=\delta_{j,i}$.

מטריצת תמורה: יהי $\sigma\in S_n$ נגדיר $P\left(\sigma\right)=\begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \ldots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$ מתקיים $\left(P\left(\sigma\right)\cdot v\right)_i=v_{\sigma^{-1}(i)}$.

משפט אי הפרישה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ וכן B הצורה הקנונית אזי $\left(\exists i.R_i\left(B\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(\exists b\in\mathbb{F}^m.\text{sols}\left(A|b\right)=\varnothing\right)$.

מסקנה: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(n<m\right)\Longrightarrow\left(\exists b\in\mathbb{F}^m.\text{sols}\left(A|b\right)=\varnothing\right)$.

סימון: $M_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)=M_n\left(\mathbb{F}\right)$.

מסקנה: $\forall A\in M_n\left(\mathbb{F}\right).\left(\forall b\in\mathbb{F}^n.\text{sols}\left(A|b\right)\neq\varnothing\right)\Longrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^n.\left|\text{sols}\left(A|b\right)\right|=1\right)$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^n\right)^m$ נגדיר $\text{span}\left(v\right)=\left\{\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i\mid\alpha\in\mathbb{F}^m\right\}$.

סדרה פורשת: סדרה $v\in\left(\mathbb{F}^n\right)^m$ שמקיימת $\text{span}\left(v\right)=\mathbb{F}^n$.

הגדרה: נגדיר $T:\left(\mathbb{F}^n\right)^m\times\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ כך α $\begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}=T_{\vec{v}}\left(\alpha\right)$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ על)$\Longleftrightarrow$($\vec{v}$ פורשת).

סדרה בת"ל (בלתי תלויה לינארית): סדרה $v\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n$ המקיימת $\left(\alpha=0\right)\Longleftrightarrow\left(\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=0\right).\forall\alpha\in\mathbb{F}^n$.

בסיס: $v\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n$ בת"ל ופורשת.

טענה: יהיו $v\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n$ ונגדיר $A=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

- (v פורשת)$\Longleftrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\left|\text{sols}\left(A\underline{x}=b\right)\right|>0\right)$.
- (v בת"ל)$\Longleftrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\left|\text{sols}\left(A\underline{x}=b\right)\right|<2\right)$.
- (v בסיס)$\Longleftrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\left|\text{sols}\left(A\underline{x}=b\right)\right|=1\right)$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\vec{v}$ בת"ל).

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n$ אזי $\text{LD}\left(v\right)=\left\{\alpha\in\mathbb{F}^n\mid\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=0\right\}$.

הערה: (v בת"ל)$\Longleftrightarrow\left(\text{LD}\left(v\right)=\{0\}\right)$.

הנפרשת/ספאן: תהא $K\subseteq\mathbb{F}^n$ אזי $\text{span}\left(K\right)=\left\{u\in\mathbb{F}^n\mid\exists m\in\mathbb{N}_+.\exists v\in K^m.\exists\alpha\in\mathbb{F}^m.u=\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i\right\}\cup\{0\}$.

משפט: (v בת"ל $\Longleftarrow$ כל תת סדרה של v בת"ל)$\wedge$(v פורשת $\Longleftarrow$ כל על סדרה של v פורשת).

משפט: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n$ בת"ל וסדרה $u\in\mathbb{F}^m$ מתקיים ($v^\frown\langle u\rangle$ בת"ל)$\Longleftrightarrow\left(u\notin\text{span}\left(v\right)\right)$.

טענה: $\forall v\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n.\forall u\in\mathbb{F}^m.\left(\text{span}\left(v\right)=\text{span}\left(v^\frown\langle u\rangle\right)\right)\Longleftrightarrow\left(u\in\text{span}\left(v\right)\right)$.

טענה: $\forall v\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n.\forall i\in[n].\left(v_i\in\text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\exists x\in\text{LD}\left(v\right).x_i\neq0\right)$.

משפט: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n$ התב"ש

- v בת"ל.
- $\forall i\in[n].v_i\notin\text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)$.
- $\forall i\in[n].v_i\notin\text{span}\left(v_{\restriction_{[i-1]}}\right)$.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ פחות מ־n ־יות לא פורשות.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ יותר מ־n ־יות ת"ל.

מסקנה: מעל $\mathbb{F}^n$ לכל בסיס B מתקיים $|B|=n$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n$, כל שניים מהשלושה שקולים

- v בת"ל.

- v פורשת.
- $n=m$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ התב"ש

- לכל b למערכת $Ax=b$ קיים פתרון.
- עמודות A פורשות.
- קיים b למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בת"ל.
- לכל b למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בסיס.

כפל מטריצות: $\forall\left\langle A,B\right\rangle \in M_{k\times m}\left(\mathbb{F}\right)\times M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\forall i\in\left[k\right].\forall j\in\left[m\right].\left(AB\right)_{i,j}=\sum_{t=1}^{m}\left(A\right)_{i,t}\left(B\right)_{t,j}$.

נוסחה: $\left(BA\right)_{i,j}=R_i\left(B\right)\cdot C_j\left(A\right)$.

טענה: $C_i\left(YX\right)=YC_i\left(X\right)$, $R_i\left(YX\right)=R_i\left(Y\right)X$.

כפל מטריצה בסקלר: $\left(\alpha A\right)_{i,j}=\alpha\left(A\right)_{i,j}$.

מטריצה סקלארית: αI_n.

טענה: $A\left(\alpha B\right)=\alpha\left(AB\right)$.

טענה: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(AI_n=A\right)\wedge\left(I_mA=A\right)$.

מסקנה: $\left\langle M_n\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right\rangle$ מונואיד.

מטריצות מתחלפות: $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימות $AB=BA$.

שחלוף: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(A^T\right)_{i,j}=\left(A\right)_{j,i}$.

הערה: $R_i\left(A^T\right)=C_i\left(A\right)$.

טענה: $\left(A^T\right)^T=A$, $\left(\alpha A\right)^T=\alpha\left(A^T\right)$, $\left(AB\right)^T=B^TA^T$.

מטריצה סימטרית: $A^T=A$.

מטריצה אנטי סימטרית: $A^T=-A$.

חיבור מטריצות: $\forall A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(A+B\right)_{i,j}=\left(A\right)_{i,j}+\left(B\right)_{ij}$.

טענה: $\left\langle M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right),+\right\rangle$ חבורה אבלית וסגורה לכפל בסקלר.

טענה: $\left(A\left(B+C\right)=AB+AC\right)\wedge\left(\left(A+B\right)^T=A^T+B^T\right)$.

הפיכות: תהא $A_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- הפיכה משמאל: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).BA=I_n$.
- הפיכה מימין: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).AB=I_m$.
- הפיכה: (הפיכה משמאל)$\wedge$(הפיכה מימין).

טענה: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\forall B,C\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).\left(AB=I_m\right)\wedge\left(CA=I_n\right)\Longrightarrow B=C$.

מסקנה: אם קיימת הופכית היא יחידה.

סימון: ההופכית של A היא A^{-1}.

מטריצה אלכסונית: $\left(A\right)_{i,j}=\begin{cases}\lambda_i & i=j\\ 0 & else\end{cases}$.

משפט: מטריצה בעלת שורת עמודות/שורות אפסים לא הפיכה.

הערה: $R\left(-\theta\right)R\left(\theta\right)=I_2=R\left(\theta\right)R\left(-\theta\right)$.

טענה: $\left(\left(A^{-1}\right)^{-1}=A\right)\wedge\left(\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T\right)\wedge\left(\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\right)$.

משפט: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\Longleftrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\text{sols}\left(A|b\right)\neq\varnothing\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longleftrightarrow\left(\left|\text{sols}\left(A|0\right)\right|\leq1\right)$.
- (A הפיכה)$\Longleftrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\left|\text{sols}\left(A|b\right)\right|=1\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\Longleftarrow$(עמודות A פורשות)$\wedge\left(m\leq n\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longleftarrow$(עמודות A בת"ל)$\wedge\left(m\geq n\right)$.

- (A הפיכה)$\Longleftarrow$(עמודות A בסיס)$\wedge(m=n)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש
- A הפיכה משמאל.
- A הפיכה.
- A הפיכה מימין.
- A^T הפיכה.

טענה: תהא φ פונקציה אלמנטרית אזי $\varphi(AB)=\varphi(A)B$.

מטריצה אלמנטרית: $E_\varphi=\varphi(I_m)$.

מסקנה: $\varphi(A)=E_\varphi A$.

טענה: $E_\varphi^{-1}=R_{\varphi^{-1}}$.

אלגוריתם: $(A\mid I)\sim\left(I\mid A^{-1}\right)$.

מטריצה נילפוטנטית: $\exists m\in\mathbb{N}.A^m=0$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A הפיכה)$\Longleftrightarrow(A\sim I)$.

מסקנה: (A,B הפיכות)$\Longleftrightarrow$(AB הפיכה).

הגדרה: $\text{Par}(\{v_1,\ldots,v_m\})=\left\{\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i\mid\alpha\in[0,1]^m\right\}$.

טענה: A הפיכה $\Longleftrightarrow\text{Vol}(\text{Par}(A))\neq0$ (הנפח של המקבילון).

לינארית על פי שורה: פונקציה שמקיימת
$$f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i+R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}.$$

פונקציית נפח: פונקציה $\mathcal{N}:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ (לינארית על פי שורה)$\wedge(\mathcal{N}(I)=1)\wedge((\exists i\neq j.R_i(A)=R_j(A))\Longrightarrow\mathcal{N}(A)=0)$.

טענה: אם ב־A יש שורת אפסים אז $\mathcal{N}(A)=0$.

משפט: תהא φ פעולה אלמנטרית אזי
$$\mathcal{N}(\varphi(A))=\mathcal{N}(A)\cdot\begin{cases}\lambda & \varphi=f_{R_i\to\lambda R_i}\\ -1 & \varphi=f_{R_i\leftrightarrow R_j}\\ 1 & \varphi=f_{R_i\to R_i+\lambda R_j}\end{cases}.$$

מסקנה: יהיו A,B שקולות שורה אזי $(\mathcal{N}(A)=0)\Longleftrightarrow(\mathcal{N}(B)=0)$.

מסקנה: (A הפיכה)$\Longleftrightarrow(\mathcal{N}(A)\neq0)$.

מסקנה: $\mathcal{N}(E_\varphi A)=\mathcal{N}(E_\varphi)\mathcal{N}(A)$.

משפט: יהיו $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ פונקציות נפח אזי $\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_2$.

מסקנה: $\mathcal{N}(AB)=\mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.

מסקנה: $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}\left(A^T\right)$.

מינור: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $i,j\in[n]$ אזי $A_{i,j}\in M_{n-1}(\mathbb{F})$ כך שמתקיים
$$(A_{i,j})_{r,s}=\begin{cases}(A)_{r,s} & (r\leq i-1)\wedge(s\leq j-1)\\ (A)_{r+1,s} & (r\geq i)\wedge(s\leq j-1)\\ (A)_{r,s+1} & (r\leq i-1)\wedge(s\geq j)\\ (A)_{r+1,s+1} & (r\geq i)\wedge(s\geq j)\end{cases}$$

דטרמיננטה: פונקציית הנפח היחידה תיקרא $\det^n$.

הערה: $\forall A\in M_1(\mathbb{F}).\det(A)=(A)_{1,1}$.

פיתוח דטרמיננטה על פי עמודה: יהי $j\in[n]$ אזי $\det_j^n(A)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+j}(A)_{k,j}\det_j^{n-1}(A_{k,j})$.

מסקנה: $\forall j,i\in[n].\det_j^n(A)=\det_i^n(A)$.

סימון: $\det_j^n = \det$.

סימון: $\det(A) = |A|$.

פיתוח דטרמיננטה על פי שורה: יהי $i \in [n]$ אזי $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} (A)_{i,k} \det(A_{i,k})$.

מטריצה מצורפת: $(\text{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} |A_{j,i}|$.

טענה: $\text{adj}(A^T) = (\text{adj}(A))^T$.

משפט: $A \cdot \text{adj}(A) = |A| I = \text{adj}(A) \cdot A$.

מסקנה: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A)$.

כלל קרמר: תהא מערכת משוואת $Ax = b$ כאשר A הפיכה אזי $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ כאשר $C_j(A_i) = \begin{cases} b & i = j \\ C_j(A) & else \end{cases}$.

הגדרה: תהא $\sigma \in S_n$ נגדיר יחס שקילות $a \sim_{\text{cycle}} b \iff \exists i \in \mathbb{N}. \sigma^i(a) = b$.

ציקלוס/מחזור: $[a]_{\sim_{\text{cycle}}}$.

פירוק תמורה לציקלוסים זרים: כל תמורה ניתנת לפירוק יחיד של ציקלוסים.

חילוף: $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}(x) = \begin{cases} j & x = i \\ i & x = j \\ x & else \end{cases}$.

טענה: כל מחזור ניתן לכתיבה כהרכבה של חילופים.

מסקנה: כל תמורה ניתנת לכתיבה כהרכבה של חילופים.

טענה: $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$.

סימון: $\text{sign}(\sigma) = \det(P(\sigma))$.

טענה:

- יהי $E_{R_i \leftrightarrow R_j}, \ldots, E_{R_\lambda \leftrightarrow R_\theta}$ אזי $E_{R_i \leftrightarrow R_j} \cdot \ldots \cdot E_{R_\lambda \leftrightarrow R_\theta} = P(\sigma)$.
- אם $(P(\sigma))_{i,j} = 1$ אז $P(\sigma)_{i,j}$ מטריצת תמורה.
- $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$.

מטריצת תמורה זוגית: $\text{sign}(\sigma) = 1$.

מטריצת תמורה איזוגית: $\text{sign}(\sigma) = -1$.

טענה: (Id זוגית)$\wedge$($\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ אי זוגית).

טענה: $P(\sigma\tau) = P(\sigma) P(\tau)$.

מסקנה: $\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma)\,\text{sign}(\tau)$.

אי סדר של תמורה: זוג סדור $\langle i, j \rangle$ שמקיים $(i < j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))$.

אי הסדרים של איבר: $z(\sigma, i) = |\{j > i \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}|$.

אי הסדרים של תמורה: $N(\sigma) = |\{\langle i, j \rangle \mid (j > i) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))\}|$.

משפט: $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$.

דטרמיננטה על פי תמורה: $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (A)_{i,\sigma(i)}\right)$.

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{Z}). |A| \in \mathbb{Z}$.

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{Z}). (\|A\| = 1) \implies \left(A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})\right)$.

מסקנה: $\det(A) \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_{n^2}]$.

נורמה: יהי $v \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ אזי f רציפה.

מסקנה: $\det$ רציפה.

מסקנה: $\forall A \in M_n^\times(\mathbb{F}). \exists \varepsilon. \forall B \in M_n(\mathbb{F}). \left(\forall i, j. (B)_{i,j} \in \left((A)_{i,j} - \varepsilon, (A)_{i,j} + \varepsilon\right)\right) \implies B \in M_n^\times(\mathbb{F})$.

מרחב וקטורי (מ"ו): $\langle V, +, * \rangle$ המקיים

- $\langle V, + \rangle$ חבורה אבלית.
- $* : \mathbb{F} \times V \to V$ המקיימת
  - $\forall v \in V. 1_{\mathbb{F}} * v = v$.

- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v\in V.\,(\alpha*\beta)*v=\alpha*(\beta*v)$.
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v,u\in V.\,((\alpha+\beta)*v=\alpha*v+\beta*v)\wedge(\alpha*(v+u)=\alpha*v+\alpha*u)$.

טענה: $(\forall\alpha\in\mathbb{F}.\alpha\cdot 0_V=0_V)\wedge(\alpha*v=0_V\iff(\alpha=0_\mathbb{F})\vee(v=0_V))\wedge(-1_\mathbb{F}*v=-v)\wedge(\forall v\in V.0_\mathbb{F}*v=0_V)$.

תת מרחב וקטורי (תמ"ו): קבוצה $\mathcal{U}\subseteq V^n$ המקיימת $(\forall v\in\mathcal{U}.\forall a\in\mathbb{F}.a\cdot v\in\mathcal{U})\wedge(\forall u,v\in\mathcal{U}.u+v\in\mathcal{U})\wedge(0\in\mathcal{U})$.

טענה: יהיו U,V תמ"ו אזי $U\cap V$ תמ"ו.

צירוף לינארי: יהיו $v\in V^n$, צירוף לינארי של v הינו ביטוי מהצורה $\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i$ בעבור $\alpha\in\mathbb{F}^n$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v\in V^m$ נגדיר $\text{span}(v)=\left\{\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i\mid\alpha\in\mathbb{F}^m\right\}$.

סדרה בת"ל: סדרה $v\in V^n$ שמקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^n.\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=0\iff\alpha=0$.

בסיס: $v\in V$ בת"ל ופורשת.

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v\in V^n$ נגדיר $\text{LD}(v)=\left\{\alpha\in\mathbb{F}^n\mid\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=0\right\}$.

טענה: $(A\subseteq\text{span}(B)\implies\text{span}(A)\subseteq\text{span}(B))\wedge(A\subseteq B\implies\text{span}(A)\subseteq\text{span}(B))$.

טענה: תהא $K\subseteq V$ אזי $\text{span}(K)$ הינו התמ"ו הקטן ביותר ביחס ההכלה המכיל את K.

$\wedge(\text{span}(\text{span}(A))=\text{span}(A))\wedge(\text{span}(\varnothing)=\{0\})$.

משפט ההחלפה של ריס: תהא $v\in V^n$ פורשת ו־$u\in V^m$ בת"ל

- $m\le n$.
- קיימים $1\le i_1\dots i_m\le n$ כך שהקבוצה $\{u_1\dots u_k\}\cup\{v_j\mid j\notin\{i_1\dots i_k\}\}$ פורשת.

מסקנה: יהיו A,B בסיסים אזי $|A|=|B|$.

מימד: יהי B בסיס $\dim_\mathbb{F}(V)=|B|$.

נ"ס (נוצר סופית): מ"ו V שמקיים $\exists v\in V^k.\text{span}(v)=V$.

משפט: V נ"ס $\Longleftarrow$ קיים בסיס ל־V.

מסקנה: יהי V נ"ס

- פחות מ־$\dim(V)$ וקטורים לא פורשים.
- יותר מ־$\dim(V)$ וקטורים ת"ל.

משפט 2 מתוך 3: יהי V מ"ו נ"ס ויהי $B\in V^k$, כל שניים מהשלושה שקולים

- B בת"ל.
- B פורשת.
- $\dim(V)=k$.

משפט: תהא V נ"ס, לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים כי U נ"ס.

מסקנה: לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים $\dim(U)\le\dim(V)$.

משפט: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $(U\subseteq W)\wedge(\dim(U)=\dim(W))\iff U=W$.

סכום מרחבים וקטורים: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $U+W=\{u+w\mid u\in U\wedge w\in W\}$ תמ"ו של V.

משפט: אם $U=\text{span}(A)$, $W=\text{span}(B)$ אז $W+U=\text{span}(A\cup B)$.

מסקנה: אם $U,W,T\subseteq V$ תמ"ו אז $U,W\subseteq T\implies U+W\subseteq T$.

משפט: אם $U\cap W=\{0\}$ אז לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U+W$.

סכום ישר: אם $U\cap W=\{0\}$ אז $U\oplus W=U+W$.

משפט האפיון של סכום ישר: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו התב"ש

- $U\oplus W$.
- לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U+W$.
- $\forall k\in U+W.\exists!\,\langle u,w\rangle\in U\times W.u+w=k$.

מסקנה: $\dim(U\oplus W)=\dim(U)+\dim(W)$.

משפט המימד הראשון: יהיו U,W תמ"ו אזי $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.

קואורדינטות: יהי $b\in V^n$ בסיס ויהי $v\in V$ אזי $\iota\alpha\in\mathbb{F}^n.v=\sum_{i=1}^n\alpha_ib_i$.

סימון: $[v]_B=\iota\alpha\in\mathbb{F}^n.v=\sum_{i=1}^n\alpha_iB_i$.

העתקת קואורדינטות: יהי B בסיס נגדיר $Q_B:V\to\mathbb{F}^{\dim(V)}$ כך $Q_B(v)=[v]_B$.

משפט:

- $Q_B^{-1}(\alpha)=\sum_{i=1}^{\dim(V)}\alpha_i b_i$.
- $(Q(\alpha v)=\alpha Q(v))\wedge(Q(v+w)=Q(v)+Q(w))$.
- $v_1\dots v_k$ בת"ל $\iff$ $Q_B(v_1)\dots Q_B(v_k)$ בת"ל.
- $v\in\text{span}(v_1\dots v_k)\iff Q_B(v)\in\text{span}(Q_B(v_1)\dots Q_B(v_k))$.

מרחב העמודות: $\mathcal{C}(A)=\text{span}(\{C_i(A)\mid i\in[n]\})$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}(A)=\text{span}(\{R_i(A)\mid i\in[m]\})$.

טענה: $\mathcal{C}(A)=\{Ax\mid x\in\mathbb{F}^n\}=\text{Im}(T_A)$.

טענה: $\mathcal{R}(AB)\subseteq\mathcal{R}(B)$, $\mathcal{C}(AB)\subseteq\mathcal{C}(A)$.

משפט: $\dim(\mathcal{C}(A))=\dim(\mathcal{R}(A))$.

דרגה: $\text{rank}(A)=\dim(\mathcal{C}(A))$.

מרחב האפסות: $\mathcal{N}(A)=\dim(\text{sols}(A))$.

טענה: $\text{rank}(A)\le\min(n,m)$, $\text{rank}(AB)\le\min(\text{rank}(A),\text{rank}(B))$, $\text{rank}(A+B)\le\text{rank}(A)+\text{rank}(B)$.

טענה: אם A הפיכה אזי $\text{rank}(AB)=\text{rank}(B)$.

המשפט היסודי של הדירוג: יהיו $A,A'\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ש"ש
- $\text{sols}(A)=\text{sols}(A')$.
- $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(A')$.
- $\text{rank}(A)=\text{rank}(A')$.

טענה: $\text{sols}(A)=\text{LD}(\{C_i(A)\mid i\in[n]\})$.

מסקנה: תהא A מטריצה מדורגת קנונית אזי אין איבר פותח בעמודה ה־i $\iff$ $C_i(A)\in\text{span}(C_1(A),\dots,C_{i-1}(B))$.

משפט: יהיו $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ויהיו A',B' המטריצות הקנוניות שלהם בהתאמה, התב"ש
- $A\sim B$.
- $A'=B'$.
- $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(B)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי ($\text{rank}(A)=n$) $\iff$ (A הפיכה).

משפט הדרגה והאפסות: $n=\text{rank}(A)+\mathcal{N}(A)$.

פונקציה מטריציונית: $f:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ שמקיימת $\exists A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).f=T_A$.

הגדרה: $\ker(T_A)=T_A^{-1}[\{0\}]=\text{sols}(A)$.

טענה: $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).T_A=T_B\iff A=B$.

טענה: T_A לינארית.

העתקה לינארית/טרנספורמציה לינארית (ט"ל): יהיו U,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $T:V\to U$ שמקיימת כי T לינארית.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל מתקיים $(T(0)=0)\wedge(T(\sum_{i=1}^n\alpha_i v_i)=\sum_{i=1}^n\alpha_i T(v_i))$.

טענה: תהא $T:U\to W$ ט"ל ותהא $S:V\to U$ ט"ל אזי $T\circ S$ ט"ל.

משפט: תהא $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ אזי T לינארית $\iff$ T מטריציונית.

משפט: תהא $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ ט"ל אזי $C_i(A)=T(\delta_i)$.

טענה: $\text{Im}(T)$, $\ker(T)$ תמ"ו.

טענה: תהא T ט"ל אזי
- $\langle T(v_1)\dots T(v_n)\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\langle v_1\dots v_n\rangle$ בת"ל.
- $\langle v_1\dots v_n\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\langle T(v_1)\dots T(v_n)\rangle$ פורשת את $\text{Im}(T)$.

למה: תהא T ט"ל אזי
- נניח כי T חח"ע, $\langle v_1\dots v_n\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\langle T(v_1)\dots T(v_n)\rangle$ בת"ל.
- נניח כי T על, $\langle v_1\dots v_n\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\langle T(v_1)\dots T(v_n)\rangle$ פורשת.

מסקנה: תהא T ט"ל הפיכה ויהי $\langle b_1\dots b_n\rangle$ בסיס אזי $\langle T(b_1)\dots T(b_n)\rangle$ בסיס.

איזומורפיזם בין מרחבים וקטורים: $T:V\to U$ ט"ל הפיכה.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל
- T חח"ע $\iff$ $\ker(T)=\{0\}$.

- T על $\iff \dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)=\dim\left(U\right)$.
- $\forall u\in\text{Im}\left(T\right).\forall v\in T^{-1}\left[\left\{ u\right\} \right].T^{-1}\left[\left\{ u\right\} \right]=v+\ker\left(T\right)$.

משפט המימד השני: תהא $T:V\to U$ ט"ל $\dim\left(V\right)=\dim\left(\ker\left(T\right)\right)+\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $T:V\to U$ ט"ל, כל שניים מהשלושה שקולים

- T חח"ע.
- T על.
- $\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

טענה: $T:V\to U$ איזומורפיזם $\Longleftarrow\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

משפט: T איזומורפיזם $\iff T^{-1}$ איזומורפיזם.

משפט: לכל V מ"ו נ"ס מתקיים $V\cong\mathbb{F}^{\dim\left(V\right)}$.

מסקנה: יהיו V,W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $V\cong W\iff\dim\left(V\right)=\dim\left(W\right)$.

משפט: יהי $b\in V^{n}$ בסיס ויהי $c\in U^{n}$ אזי $T:V\to U$ המוגדרת $T\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[x\right]_{b}\right)_{i}\cdot c_{i}$ היא הט"ל היחידה שמקיימת $\forall i\in\left[n\right].T\left(b_{i}\right)=c_{i}$.

טענה: יהיו $T_{1},T_{2}:V\to U$ ט"ל ויהי b פורשת את V אזי $T_{1}=T_{2}\Longrightarrow\forall i\in\left[n\right].T_{1}\left(b_{i}\right)=T_{2}\left(b_{i}\right)$.

מרחב העתקות הלינאריות: $\text{Hom}\left(V,U\right)=\left\{ T\in V\to U\mid T\text{ ט"ל}\right\}$.

טענה: $\text{Hom}\left(V,U\right)$ מ"ו מעל השדה של V,U.

הערה: $\forall T_{1},T_{2}\in\text{Hom}\left(V,U\right).T_{1}\circ T_{2}\in\text{Hom}\left(V,U\right)$.

משפט: $\dim\left(\text{Hom}\left(V,U\right)\right)=\dim\left(V\right)\cdot\dim\left(U\right)$.

טענה: יהיו b,c בסיסים של V,U בהתאמה לכן $\left\{ T_{i,j}\left(b_{k}\right)=\begin{cases} c_{j} & i=k\\ 0 & else \end{cases}\,\middle|\,i,j\in\left[n\right]\right\}$ בסיס של $\text{Hom}\left(V,U\right)$.

סימון: $\text{Hom}\left(V\right)=\text{Hom}\left(V,V\right)$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ ויהיו B,C בסיסים של V,U בהתאמה לכן $Q_{C}\circ T\circ Q_{B}^{-1}$ מטריציונית.

מטריצה מייצגת: המטריצה $\left[T\right]_{C}^{B}=A$ עבורה $Q_{C}\circ T\circ Q_{B}^{-1}=T_{A}$.

סימון: $\left[T\right]_{B}=\left[T\right]_{B}^{B}$.

מסקנה: $C_{i}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)=\left[T\left(B_{i}\right)\right]_{C}$.

מסקנה: $\left[T\right]_{C}^{B}\cdot\left[v\right]_{B}=\left[T\left(v\right)\right]_{C}$.

הטלה: יהיו $V=U\oplus W$ מ"ו אזי $P_{\left(U,W\right)}:V\to V$ המוגדרת $P_{\left(U,W\right)}\left(v\right)=\iota u\in U.\exists w\in W.u+w=v$.

טענה: $P_{\left(U,W\right)}$ ט"ל, $\text{Im}\left(P_{\left(U,W\right)}\right)=U$, $\ker\left(P_{\left(U,W\right)}\right)=W$, $P_{\left(U,W\right)}^{2}=P_{\left(U,W\right)}$.

הערה: $\left[T\right]_{C}^{B}\in M_{\dim\left(U\right)\times\dim\left(V\right)}\left(\mathbb{F}\right)$.

משפט:

- $\left(Q_{B}\right)_{\restriction_{\ker\left(T\right)}}:\ker\left(T\right)\to\text{sols}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)$ איזומורפיזם.
- $\left(Q_{C}\right)_{\restriction_{\text{Im}\left(T\right)}}:\text{Im}\left(T\right)\to\mathcal{C}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)$ איזומורפיזם.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)=\dim\left(\ker\left(T\right)\right)$, $\text{rank}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)=\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ אזי T הפיכה $\iff\left[T\right]_{C}^{B}$ הפיכה.

משפט: $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$, $S\in\text{Hom}\left(U,W\right)$ אז $\left[S\circ T\right]_{D}^{B}=\left[S\right]_{D}^{C}\cdot\left[T\right]_{C}^{B}$.

מסקנה: $\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)^{-1}=\left[T^{-1}\right]_{B}^{C}$.

מטריצת שינוי קואורדינטות: $\left[Id_{V}\right]_{C}^{B}$.

הערה: $C_{i}\left(\left[Id\right]_{C}^{B}\right)=\left[B_{i}\right]_{C}$.

מסקנה: $\left[T\right]_{C}^{B}=\left[Id\right]_{C}^{E}\cdot\left[T\right]_{E}^{D}\cdot\left[Id\right]_{D}^{B}$.

דמיון מטריצות: $\forall A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right).A\sim B\iff\exists P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right).P^{-1}BP=A$.

משפט: יהיו $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ התב"ש

- $B\sim A$.
- $\forall T\in\text{Hom}\left(V,U\right).A=\left[T\right]_{D}^{C}\Longrightarrow\exists C',D'.B=\left[T\right]_{D'}^{C'}$.
- $\exists T\in\text{Hom}\left(V,U\right).\left(\left[T\right]_{C}=A\right)\land\left(\left[T\right]_{D}=B\right)$.

טענה: A,B דומות אז $\det(A)=\det(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $\det(T)=\det([T]_B)$.

עקבה: $\text{trace}(A)=\sum_{i=1}^{n}(A)_{i,i}$.

טענה: $\text{trace}(AB)=\text{trace}(BA)$.$\forall A,B\in M_n(\mathbb{F})$.

מסקנה: A,B דומות $\Longleftarrow$ $\text{trace}(A)=\text{trace}(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $\text{trace}(T)=\text{trace}([T]_B)$.

מטריצות מתאימות: $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).A\sim_{\text{green}}B\Longleftrightarrow\exists P,Q\in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BQ^{-1}=A$.

הערה: A,B דומות $\Longleftarrow$ A,B מתאימות.

טענה: A,B מתאימות $\Longleftrightarrow$ $\text{rank}A=\text{rank}B$.

הגדרה: $[*]_C^B:\text{Hom}(V,W)\to M_{\dim(V)\times\dim(W)}(\mathbb{F})$ כך $[*]_C^B(T)=[T]_C^B$.

משפט: $[*]_C^B$ איזומורפיזם.

אלגברה: $\langle V,+,\cdot,*\rangle$ שמקיים ($\langle V,+,\cdot\rangle$ מ"ו)$\wedge$($*:V\times V\to V$).

אלגברת מטריצות: המרחב $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עם פעולת כפל מטריצות.

אלגברת Hom: המרחב $\text{Hom}(V,W)$ עם פעולת ההרכבה.

איזומורפיזם בין אלגברות: $T:A\to B$ ט"ל הפיכה שמקיימת $\forall\alpha,\beta\in A.T(\alpha*\beta)=T(\alpha)*T(\beta)$.

משפט: אם $[*]_B:\text{Hom}(V)\to M_{\dim(V)}(\mathbb{F})$ אז $[*]_B$ איזומורפיזם בין אלגברות.

מטריצת בלוקים:

$$\begin{pmatrix}A_{1,1} & \dots & A_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n}\end{pmatrix}$$

הערה: מספר העמודות והשורות בין מטריצות צמודות חייב להיות שווה.

סימון:

$$(A_{i,j})_{1\le i,j\le m}=\begin{pmatrix}A_{1,1} & \dots & A_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n}\end{pmatrix}$$

כפל מטריצת בלוקים: $(AB)_{i,j}=\sum_{t=1}^{m}A_{i,t}B_{t,j}$.

מטריצת בלוקים ריבועית: מטריצת בלוקים כך שמקיימת $\forall i.A_{i,i}\in M_n(\mathbb{F})$.

מטריצת בלוקים משולשית עליונה: $\left((A_{i,j})_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\le\ell\\ 0 & else\end{cases}$.

מטריצת בלוקים משולשית תחתונה: $\left((A_{i,j})_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\ge\ell\\ 0 & else\end{cases}$.

מטריצת בלוקים אלכסונית: מטריצת בלוקים משולשית תחתונה ועליונה.

הגדרה: $(\text{Diag}(A_{1,1},\dots,A_{n,n}))_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,k} & k=\ell\\ 0 & else\end{cases}$.

משפט: אם $(A_{i,j})_{1\le i,j\le m}$ משולשית אז $\det\left((A_{i,j})_{1\le i,j\le m}\right)=\prod_{i=1}^{n}\det(A_{i,i})$.