קטע/אינטרוול: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי

- $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$.
- $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$.
- $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$.
- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$.
- $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$.
- $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$.
- $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$.
- $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}$.
- $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

שדה סדור: שדה $\mathbb{F}$ ויחס סדר חזק $<$ על $\mathbb{F}$ המקיימים

- טריכוטומיה/לינאריות: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\,(x<y)\vee(x>y)\vee(x=y)$.
- קומפטביליות עם חיבור: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}.x<y\Longrightarrow x+z<y+z$.
- קומפטביליות עם כפל: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\forall z>0_{\mathbb{F}}.x<y\Longrightarrow x\cdot z<y\cdot z$.

שדה בעל תכונת ארכימדס: שדה $\mathbb{F}$ עבורו $\forall x\in\mathbb{F}.\exists n\in\mathbb{N}.x<\sum_{i=0}^{n}1$.

טענה: $\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ארכימדס.

הערך השלם/ערך שלם תחתון: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lfloor x\rfloor=[x]=\max\left(n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\right)$.

הערך השברי: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\{x\}=x-[x]$.

ערך שלם עליון: $\lceil x\rceil=\min\left(n\in\mathbb{Z}\mid x\le n\right)$.

טענה: $\nexists q\in\mathbb{Q}.q^2=2$.

טענה: $\nexists x\in\mathbb{Q}.\forall a\in\left\{y\in\mathbb{Q}.y^2\le2\right\}.\forall b\in\left\{y\in\mathbb{Q}_+\mid y^2\ge2\right\}.a\le x\le b$.

חסם מלעיל: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

קבוצת החסמים מלעיל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A$ חסם מלעיל של $x\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\overline{B}_A\ne\varnothing$.

חסם מלרע: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

קבוצת החסמים מלרע: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\underline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A$ חסם מלרע של $x\}$.

קבוצה חסומה מלרע: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\underline{B}_A\ne\varnothing$.

קבוצה חסומה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת (חסומה מלעיל)$\wedge$(חסומה מלרע).

מקסימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

סימון: המקסימום של A הוא $\max\left(A\right)$.

מינימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

סימון: המינימום של A הוא $\min\left(A\right)$.

אקסיומת השלמות: יהיו $\varnothing\ne X,Y\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le y)\Longrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le c\le y)$.

טענה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\overline{B}_A\ne\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\min\left(\overline{B}_A\right)$.

מסקנה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\underline{B}_A\ne\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: $\mathbb{R}$ הוא השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את $\mathbb{Q}$.

סופרמום/חסם עליון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\sup\left(A\right)=\min\left(\overline{B}_A\right)$.

אינפימום/חסם תחתון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(A\right)=\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(\exists\max\left(A\right)\Longrightarrow\sup\left(A\right)=\max\left(A\right))\wedge(\exists\min\left(A\right)\Longrightarrow\inf\left(A\right)=\min\left(A\right))$.

טענה: יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(a,b\right)=a\wedge\sup\left(a,b\right)=b$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b\in\mathbb{R}$ חסם מלעיל של A התב"ש

- $b=\sup\left(A\right)$.
- $\forall d\in\overline{B}_A.b\le d$.
- $\forall a\in\mathbb{R}.a<b\Longrightarrow a\notin\overline{B}_A$.

מסקנה: תהא $\varnothing\ne A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\sup\left(A\right)-\varepsilon<a\le\sup\left(A\right)$.

מסקנה: תהא $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $b = \sup(A) \iff (\forall x \in A.x \leq b) \land (\forall \varepsilon > 0.\exists x \in A.x > b - \varepsilon)$.

טענה: תהיינה $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ חסומות אזי

- $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
- $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- $\sup(-A) = -\inf(A)$.

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+.\exists b \in \mathbb{R}_+.b^2 = c$.

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+.\forall n \in \mathbb{N}.\exists b \in \mathbb{R}_+.b^n = c$.

קבוצה צפופה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A \subseteq B$ המקיימת $\forall b \in B.\forall \varepsilon > 0.\exists a \in A.\ |b-a| < \varepsilon$.

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}$ אזי (S צפופה ב־$\mathbb{R}$) $\iff$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}.a < b \implies (a,b) \cap S \neq \varnothing$).

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{Q}.a < b \implies |(a,b) \cap \mathbb{Q}| = \aleph_0$.

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{Q}.a < b \implies \exists r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}.a < r < b$.

טענה: $\forall x, y \in \mathbb{R}.x < y \implies \exists q \in \mathbb{Q}.x < q < y$.

מסקנה: ($\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$)$\land$(לכל $a < b$ מתקיים כי $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$).

עצרת: יהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & else \end{cases}$.

בחר: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

זהות פסקל: יהי $n, k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

למה: יהיו $a_1 \ldots a_n \geq 0$ המקיימים $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ אזי $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$.

אי־שיוויון הממוצעים: יהיו $a_1 \ldots a_n > 0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$.

טענה: $(a_1 = \ldots = a_n) \iff \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}\right)$.

אי־שיוויון ברנולי: $\forall x > -1.\forall n \in \mathbb{N}.\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

אי־שיוויון ברנולי המוכלל: $\forall n \in \mathbb{N}.\forall x \in \mathbb{R}^n.\ |\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

הערך המוחלט: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי

- $(|a| \geq b) \iff ((b \leq a) \lor (a \leq -b))$.
- $(|a| \leq b) \iff (-b \leq a \leq b)$.

אי־שיוויון המשולש (אש"מ): יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $|a+b| \leq |a| + |b|$.

אי־שיוויון המשולש המוכלל: יהיו $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $|a-b| \leq |a| + |b|$.

מסקנה: יהיו $x, y, z \in \mathbb{R}$ אזי $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$.

אי־שיוויון המשולש ההפוך: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $||a| - |b|| \leq |a-b|$.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $\forall \varepsilon > 0.\ |a-b| < \varepsilon$ אזי $a = b$.

טענה: יהי $r \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

סדרה: פונקציה $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

סימון: תהא a סדרה אזי $a_n = a(n)$, $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$.

הגדרה: תהא a_n סדרה אזי

- סדרה חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n > 0$.
- סדרה אי שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \geq 0$.
- סדרה שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n < 0$.
- סדרה אי חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \leq 0$.

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה אזי

- עולה ממש: $\forall n, m \in \mathbb{N}.n < m \implies a_n < a_m$.

- עולה: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\Longrightarrow a_n\le a_m$.
- יורדת ממש: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\Longrightarrow a_n>a_m$.
- יורדת: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\Longrightarrow a_n\ge a_m$.

סדרה חסומה מלעיל: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.a_n<M$.

סדרה חסומה מלרע: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.M<a_n$.

סדרה חסומה: סדרה a באשר a חסומה מלרע וכן a חסומה מלעיל.

סדרה מתכנסת/גבול סופי: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_n-L\right|<\varepsilon$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ תהא a סדרה עבורה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $a_n\to L$.

טענה: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{n\to\infty}r=r$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

טענה: יהי $q\in(0,1)$ אזי $q^n\to0$.

טענה: יהי $c>0$ אזי $\sqrt[n]{c}\to1$.

טענה: $\sqrt[n]{n}\to1$.

טענה: יהי $\alpha\in\mathbb{Q}_+$ אזי $\frac{1}{n^\alpha}\to0$.

משפט יחידות הגבול: יהיו $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ תהא a סדרה עבורה $\lim_{n\to\infty}a_n=L_1$ וכן $\lim_{n\to\infty}a_n=L_2$ אזי $L_1=L_2$.

משפט: יהי $L\in\mathbb{R}$ תהא a סדרה עבורה $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|L\right|$.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=0\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=0\right)$.

טענה: תהיינה a,b סדרות עבורן $\left|\left\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\ne b_n\right\}\right|\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}b_n=L\right)$.

טענה: תהא a סדרה ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}a_{n+k}=L\right)$.

סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה עבורה $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.M<a_n$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

סדרה מתבדרת למינוס אינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה עבורה $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n<-M$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

טענה: יהי $a>1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a^n=\infty$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}n=\infty$.

טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$.

למה: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי a חסומה.

מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\left|\left\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\notin(L-\varepsilon,L+\varepsilon)\right\}\right|\in\mathbb{N}\right)$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $\forall r\in(0,\left|L\right|).\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_n\right|>r$.

סימון: תהא a סדרה מונוטונית אזי

- a יורדת ממש אזי $\left(a_n\to L\right)\Longleftrightarrow\left(a_n\downarrow L\right)$.
- a עולה ממש אזי $\left(a_n\to L\right)\Longleftrightarrow\left(a_n\uparrow L\right)$.
- a יורדת אזי $\left(a_n\to L\right)\Longleftrightarrow\left(a_n\searrow L\right)$.
- a עולה אזי $\left(a_n\to L\right)\Longleftrightarrow\left(a_n\nearrow L\right)$.

טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיימות סדרות $a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ עבורן $\left(a_n\searrow x\right)\wedge\left(b_n\nearrow x\right)$.

טענה ייצוג עשרוני: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיים $a:\mathbb{Z}\to\{0,\ldots,9\}$ המקיים $x=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i\cdot10^{-i}$.

סימון פיתוח מחזורי אינסופי: יהי $d_1\ldots d_n\in\{0\ldots9\}$ אזי $\overline{d_1\ldots d_n}=d_1\ldots d_nd_1\ldots d_n\ldots$.

טענה: יהי $q\in\mathbb{R}$ אזי $\left(q\in\mathbb{Q}\right)\Longleftrightarrow\left(\exists a\in\mathbb{N}.\exists a_1\ldots a_n,b_1\ldots b_\ell\left\{0\ldots9\right\}.q=a.a_1\ldots a_n\overline{b_1\ldots b_\ell}\right)$.

משפט אוקלידס: $\mathbb{P}$ חסומה מלרע אך לא מלעיל.

סדרות אוקלידס־מולין: סדרה p עבורה $p_1\in\mathbb{P}$ וכן $p_n\in\left\{p\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_i\right)\right\}$ לכל $n\in\mathbb{N}_+$.

משפט דריכלה: יהי $\theta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ אזי $\left|\left\{\langle p,q\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\mid\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\right\}\right|\ge\aleph_0$.

מספר מקורב רע: מספר $a\in\mathbb{R}$ עבורו $\forall p\in\mathbb{Q}.\forall q\in\mathbb{N}.\left(\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\right)\Longrightarrow\left(\exists c\in\mathbb{R}.\frac{c}{q^2}<\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\right)$.

חשבון גבולות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהיינה $\left(a_n\right),\left(b_n\right)$ סדרות המקיימות $\left(a_n\to a\right)\wedge\left(b_n\to b\right)$ אזי

- $a_n+b_n\to a+b$.

- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.
- אם $b \neq 0$ וכן $\forall n \in \mathbb{N}.b_n \neq 0$ אזי $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

למה: יהי $L \in \mathbb{R}$ תהא d_n סדרה אי־שלילית עבורה $d_n \to L$ אזי $L \geq 0$.

טענה: תהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n \to L$ ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{L}$.

סימון: יהיו a_n, b_n סדרות עבורן $\exists N \in \mathbb{N}.\forall n \geq N.a_n \leq b_n$ אזי $a_n \precsim b_n$.

סימון: יהיו a_n, b_n סדרות עבורן $\exists N \in \mathbb{N}.\forall n \geq N.a_n < b_n$ אזי $a_n \prec b_n$.

מונוטוניות גבולות: תהיינה a_n, b_n סדרות מתכנסות אזי $(a_n \precsim b_n) \Longrightarrow (\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n)$.

משפט הסנדוויץ': תהיינה a_n, b_n, c_n סדרות המקיימות $a_n \precsim b_n \precsim c_n$ אזי $(a_n, c_n \to L) \Longrightarrow (b_n \to L)$.

טענה: תהא a_n סדרה חסומה ותהא b_n סדרה המקיימת $b_n \to 0$ אזי $a_n b_n \to 0$.

מסקנה: תהא a_n סדרה חסומה אזי $\frac{a_n}{n} \to 0$.

משפט: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\exists b \in B^{\mathbb{N}}.b_n \to \sup(B)$.

מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי $\exists b \in B^{\mathbb{N}}.b_n \to \inf(B)$.

טענה: תהיינה a_n, b_n סדרות אזי

- $(a_n \to \infty) \wedge (a_n \precsim b_n) \Longrightarrow (b_n \to \infty)$.
- $(a_n \to -\infty) \wedge (b_n \precsim a_n) \Longrightarrow (b_n \to -\infty)$.

מבחן השורש: תהא a_n סדרה אי שלילית אזי $(\exists \alpha \in [0,1).a_n \prec \alpha^n) \Longrightarrow (a_n \to 0)$.

מבחן השורש הגבולי: יהי $p \in \mathbb{R}$ ותהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n^{\frac{1}{n}} \to p$ אזי

- $0 \leq p < 1 \Longrightarrow a_n \to 0$.
- $p > 1 \Longrightarrow a_n \to \infty$.

סימון: תהא a_n סדרה חסומה מלעיל אזי $\sup(a_n) = \sup(\mathrm{Im}(a))$.

סימון: תהא a_n סדרה חסומה מלרע אזי $\inf(a_n) = \inf(\mathrm{Im}(a))$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי

- אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי $a_n \nearrow \sup(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי $a_n \nearrow \infty$.
- אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי $a_n \searrow \inf(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי $a_n \searrow -\infty$.

מבחן המנה הגבולי: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ אזי

- $(L < 1) \Longrightarrow (a_n \to 0)$.
- $(L > 1) \Longrightarrow (a_n \to \infty)$.

התכנסות צ'זארו: תהא a_n סדרה אזי $(C)\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n}$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a_n סדרה המקיימת $a_n \to a$ במובן הרחב אזי $(C)\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

משפט התכנסות ממוצע הנדסי: תהא a_n סדרה חיובית המקיימת $a_n \to a$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} a_i} \to a$.

משפט ד'אלאמבר: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to c$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{a_n} \to c$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $a \to L$ במובן הרחב ותהא $t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=1}^{n} t_k \to \infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} t_k} \to L$.

משפט שטולץ: תהא a סדרה ותהא $b \uparrow \infty$ סדרה נניח כי $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L$ במובן הרחב אזי $\frac{a_n}{b_n} \to L$.

טענה: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in (2,3]$.

קבוע אוילר: $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

טענה: תהא $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $a_n \to \infty$ אזי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$.

תת סדרה/סדרה חלקית (ת"ס): תהא a סדרה ותהא $n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה אזי $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה של a אזי

- (a חסומה מלעיל)$\Longleftarrow$(b חסומה מלעיל).
- (a חסומה מלרע)$\Longleftarrow$(b חסומה מלרע).
- $(a \to L) \Longrightarrow (b \to L)$.
- (a מונוטונית)$\Longleftarrow$(b מונוטונית).

טענה: תהא a סדרה ללא מקסימום אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

טענה: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מונוטונית.

הלמה של קנטור על קטעים מקוננים: תהיינה a,b סדרות המקיימות $b-a\to 0$ וגם $\forall n\in\mathbb{N}.\left(a_n\le b_n\right)\wedge\left(\left[a_{n+1},b_{n+1}\right]\subseteq\left[a_n,b_n\right]\right)$ אזי $\left|\bigcap_{n=0}^{\infty}\left[a_n,b_n\right]\right|=1$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C}=[0,1]\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

סימון: $\mathbb{R}_\infty=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$.

גבול חלקי: תהא a סדרה אזי $x\in\mathbb{R}_\infty$ עבורו קיימת תת סדרה b עבורה $b\to x$ במובן הרחב.

סימון: תהא a סדרה אזי $\mathcal{P}(a)=\{L\in\mathbb{R}\mid a \text{ גבול חלקי של } L\}$, $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\{L\in\mathbb{R}_\infty\mid a \text{ גבול חלקי של } L\}$.

טענה: תהא a סדרה אזי

- (a אינה חסומה מלעיל)$\Longleftrightarrow$($\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$).
- (a אינה חסומה מלרע)$\Longleftrightarrow$($-\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$).

טענה: תהא a סדרה אזי $\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|>0$.

משפט: תהא a סדרה אזי $\left(L\in\mathcal{P}\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\left|\left\{a_n\mid\left|a_n-L\right|<\varepsilon\right\}\right|=\aleph_0\right)$.

מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי $\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\subseteq\left[\inf(a),\sup(a)\right]$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim\left(\sup(a)\right)=\sup\left(\mathcal{P}\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\overline{\lim}(a)=\lim\left(\sup(a)\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim\left(\inf(a)\right)=\inf\left(\mathcal{P}\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\underline{\lim}(a)=\lim\left(\inf(a)\right)$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow$$\left(\left(\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\right)\wedge\left(\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|=1\right)\right)$.

משפט: תהא a סדרה חסומה אזי $\min\left(\mathcal{P}\right),\max\left(\mathcal{P}\right)$ קיימים.

טענה: יהיו $b_1\ldots b_m:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ זרות בזוגות המקיימות $\left(\biguplus b_i=\mathbb{N}\right)\wedge\left(b_i\uparrow\infty\right)$ ותהא a סדרה אזי $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\bigcup_{i=1}^{m}\widehat{\mathcal{P}}\left(a_{b_i}\right)$.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.\left(x-\varepsilon,x+\varepsilon\right)\subseteq A$.

טענה: תהא $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ באשר A_i פתוחה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ פתוחה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות פתוחות אזי $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ פתוחה.

קבוצה סגורה: קבוצה $B\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\mathbb{R}\backslash B$ פתוחה.

טענה: תהא $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ באשר B_i סגורה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$ סגורה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות סגורות אזי $\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ סגורה.

נקודת הצטברות: תהא $S\subseteq\mathbb{R}$ אזי $x\in\mathbb{R}$ המקיימת $\exists a\in\left(S\backslash\{x\}\right)^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n=x$.

טענה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- B קבוצה סגורה.
- $\forall a\in B^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n\in B$.
- $\{x\in\mathbb{R}\mid B \text{ נקודת הצטברות של } x\}\subseteq B$.

משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים $\mathcal{P}(a)$ קבוצה סגורה.

כמעט תמיד: פרידקט $P(n)$ המקיים $\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N.P(n)$.

שכיח: פרידקט $P(n)$ המקיים $\left|\{n\in\mathbb{N}\mid P(n)\}\right|=\aleph_0$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow$$\left(\limsup a=\liminf a\right)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in[-\infty,\infty]$ אזי

- $\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\le L\right)\Longrightarrow\left(\limsup a\le L\right)$.
- $\left(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\ge L\right)\Longrightarrow\left(\limsup a\ge L\right)$.
- $\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\ge L\right)\Longrightarrow\left(\liminf a\ge L\right)$.
- $\left(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\le L\right)\Longrightarrow\left(\liminf a\ge L\right)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in\mathbb{R}$ התב"ש

- $\limsup a=L$.

- $\forall\varepsilon>0.\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_n<L+\varepsilon\right)\wedge\left(\forall\varepsilon>0.\forall N\in\mathbb{N}.\exists n\geq N.a_n>L-\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה a,b סדרות המקיימות $a_n\preccurlyeq b_n$ אזי $(\liminf a\leq\liminf b)\wedge(\limsup a\leq\limsup b)$.

סדרת קושי: סדרה a המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m,n\geq N.\left|a_m-a_n\right|<\varepsilon$.

למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow$(a סדרת קושי).

סכום אינסופי: יהי $k\in\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{i=k}^{\infty}a_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^{n}a_i$.

טור: תהא a סדרה אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$.

סימון: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור אזי $\sum a_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$.

סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרה אזי $S_n^a=\sum_{i=0}^{n}a_i$.

טור מתכנס: תהא a סדרה אזי $\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_i=L\right)\Longrightarrow\left(S_n^a\to L\right)$.

טור גאומטרי: יהי $a\neq0$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$.

משפט: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow\left(|r|<1\right)$.

הטור ההרמוני: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty$.

משפט: תהא a סדרה אזי ($\sum_{i=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow\left(a_n\to0\right)$.

קריטריון קושי: יהי $\sum a_n$ טור אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m>N.\forall k\in\mathbb{N}.\left|\sum_{n=m}^{m+k}a_n\right|<\varepsilon\right)$.

חשבון טורים: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ טורים ויהי $\xi\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}\xi a_n$ מתכנס).

הגדרה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור אזי

- טור חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n>0$.
- טור אי שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\geq0$.
- טור שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n<0$.
- טור אי חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\leq0$.

טור מתכנס בהחלט: טור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ המקיים $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור מתכנס בהחלט אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס.

סימון: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים חיוביים עבורם ממקום מסויים $a_n\leq b_n$ אזי $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$.

משפט ההשוואה: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים המקיימים $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$ אזי

- ($\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ מתכנס)$\Longrightarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר)$\Longrightarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר).

מבחן ההשוואה הגבולי: יהיו a_n,b_n סדרות חיוביות המקיימות $\frac{a_n}{b_n}\to L$ במובן הרחב אזי

- $\left(\left(\sum a_n<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\sum b_n<\infty\right)\right)\Longleftarrow\left(L\in(0,\infty)\right)$.
- $\left(\left(\sum a_n<\infty\right)\Longleftarrow\left(\sum b_n<\infty\right)\right)\Longleftarrow\left(L=0\right)$.
- $\left(\left(\sum a_n<\infty\right)\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\right)\right)\Longleftarrow\left(L=\infty\right)$.

מבחן השורש: יהי $\sum a_n$ טור אי שלילי (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $a_n^{\frac{1}{n}}<q$)$\Longrightarrow$($\sum a_n$ מתכנס).

מבחן השורש הגבולי: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)<1$).
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longleftarrow$($\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)>1$).

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

- (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$)$\Longrightarrow$($\sum a_n$ מתכנס).
- (כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq1$)$\Longrightarrow$($\sum a_n$ מתבדר).

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\lim\left(\sup\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)<1$).
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longleftarrow$($\lim\left(\inf\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)>1$).

משפט העיבוי: תהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$($\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $m \geq 2$ ותהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$($\sum m^n a_{m^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי ($\sum \frac{1}{n^x}$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$ $(x > 1)$.

משפט לייבניץ: תהא $a_n \searrow 0$ אזי $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

טור מתכנס בתנאי: טור $\sum a_n$ מתכנס המקיים $\sum |a_n|$ מתבדר.

טענה: תהיינה a, b סדרות אזי $\sum_{k=m}^{n} a_k \left(b_{k+1} - b_k\right) = \left(a_n b_{n+1} - a_m b_m\right) - \sum_{k=m+1}^{n} b_k \left(a_k - a_{k-1}\right)$.

התמרת אבל: תהיינה a, b סדרות אזי $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} a_m \left(b_k - b_{k+1}\right)$.

קריטריון דריכלה: תהא $b \to 0$ סדרה מונוטונית ותהא a סדרה עבורה S_n^a חסומה אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

קריטריון אבל: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

משפט: $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$.

משפט: יהי $\sum a_n = L$ טור ותהא $\underset{b_0=0}{b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ עולה ממש אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L$.

למה: תהא a סדרה ותהא $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש עבורה $b_0 = 0$ וכן $\left(a_i\right)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1}$ בעלי אותו סימן וגם $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L$ אזי $\sum a_n = L$.

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתכנס ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

סימון: תהא a_n סדרה אזי $\left(a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}\right) \wedge \left(a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}\right)$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בהחלט)$\Longleftrightarrow$($\sum a_n^+$ מתכנס)$\wedge$($\sum a_n^-$ מתכנס).

משפט: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בתנאי)$\Longleftarrow$ $\left(\sum a_n^+ = \infty = \sum a_n^-\right)$.

משפט רימן: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי $\forall S \in [-\infty, \infty] . \exists \sigma \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{N} . \sum a_{\sigma(n)} = S$.

טענה: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי קיים $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג עבורו $\nexists \sum a_{\sigma(n)}$.

משפט קושי: יהיו $p, q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט אזי $\sum \sum a_{p(n)} b_{q(k)} = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.

טור חזקות: תהא a_n סדרה ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k \left(x - x_0\right)^k$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט עבור $x \in (-|q|, |q|)$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ עבורו

- יהי $x \in (-R, R)$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט.
- יהי $x \notin [-R, R]$ אזי $\sum a_k x^k$ מתבדר.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0, \infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty\right) \Longrightarrow (R = 0)\right) \wedge \left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0\right) \Longrightarrow (R = \infty)\right)$.

מכפלת קושי: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות אזי $\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$.

טענה: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות המתכנסים עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ מתכנס עבור q.

התכנסות צ'זארו: יהי $\sum a_n$ טור אזי $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n}$.

טענה: יהי $\sum a_n$ טור אזי $\sum_{i=0}^{n-1} a_n \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n}$.

פונקציה מונוטונית: תהא $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי

- עולה ממש: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- עולה: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
- יורדת ממש: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.
- יורדת: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי x^n מונוטונית עולה ממש בקטע $[0, \infty)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left(f(x) = x^n\right) \Longrightarrow \left(f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}\right)$.

טענה: יהיו $n, m, k, \ell \in \mathbb{N}$ המקיימים $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell}$ אזי $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x^k\right)^{\frac{1}{\ell}}$.

טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהיינה $a, b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימות $a_n, b_n \searrow b$ אזי $\lim\left(c^{a_n}\right) = \lim\left(c^{b_n}\right)$.

הגדרה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ יהי $b \in \mathbb{R}$ ותהא $b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $b_n \searrow b$ אזי

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

- $x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{m}\right)^{\frac{1}{n}}$.
- $a^{b}=\lim_{n\to\infty}a^{b_n}$.

פונקציית החזקה: יהי $\alpha>0$ נגדיר $f\in[0,\infty)^{[0,\infty)}$ כך $f\left(x\right)=x^{\alpha}$.

פונקציית החזקה: יהי $\alpha<0$ נגדיר $f\in(0,\infty)^{(0,\infty)}$ כך $f\left(x\right)=x^{\alpha}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

משפט: יהיו $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ אזי $\left(yx\right)^{a}=y^{a}x^{a}$.

משפט: יהיו $a,b,x\in\mathbb{R}$ אזי $\left(x^{a}\right)^{b}=x^{ab}$.

משפט: יהיו $a,b,x\in\mathbb{R}$ אזי $x^{a}x^{b}=x^{a+b}$.

טענה: יהי $x>1$ ויהיו $0<r<\ell$ אזי $x^{r}<x^{\ell}$.

טענה: יהי $0<x<1$ ויהיו $0<r<\ell$ אזי $x^{r}>x^{\ell}$.

הפונקציה המעריכית: יהי $0<\alpha\neq1$ נגדיר $f\in(0,\infty)^{\mathbb{R}}$ כך $f\left(x\right)=a^{x}$.

סינוס: נגדיר $\sin:[0,2\pi]\to[-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ממול הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

סינוס: $\forall k\in\mathbb{N}.\sin\left(x+2\pi k\right)=\sin\left(x\right)$

קוסינוס: נגדיר $\cos:[0,2\pi]\to[-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

קוסינוס: $\forall k\in\mathbb{N}.\cos\left(x+2\pi k\right)=\cos\left(x\right)$

טנגנס: נגדיר $\tan:\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ כך $\tan\left(x\right)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

קוטנגנס: נגדיר $\cot:\mathbb{R}\backslash\left\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ כך $\cot\left(x\right)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

טענה: זהויות טריגונומטריות.

הגדרה: $\arcsin=\sin^{-1}$.

הגדרה: $\arccos=\cos^{-1}$.

הגדרה: $\arctan=\tan^{-1}$.

הגדרה: $\text{arccot}=\cot^{-1}$.

לוגריתם: יהי $a>0$ נסמן $f\left(x\right)=a^{x}$ אזי $\left(f\right)^{-1}=\log_{a}$.

סימון (הלוגריתם הטבעי): $\ln=\log_{e}$.

טענה: זהויות לוגרתמיות.

פונקציה מחזורית: פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\exists a\in\mathbb{R}_{+}.f\left(x+a\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה זוגית: פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה אי־זוגית: פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

קטע מנוקב: יהי $\delta>0$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $I_{x}=\left(x-\delta,x+\delta\right)\backslash\left\{x\right\}$.

פונקציה מתכנסת/גבול סופי: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימות $a<x_{0}<b$ תהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי

- בנקודה: $A=I_{x_{0}}$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי מימין: $A=\left(x_{0},b\right)$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(x_{0},\min\left\{x_{0}+\delta,b\right\}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\downarrow x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי משמאל: $A=\left(a,x_{0}\right)$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\uparrow x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- באינסוף: $A=\left(a,\infty\right)$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\geq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to\infty\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to\infty\right)\right)$.
- במינוס אינסוף: $A=\left(-\infty,b\right)$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\leq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to-\infty\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to-\infty\right)\right)$.

פונקציה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ויהיו $a,b \in \mathbb{R}$ המקיימות $a < x_0 < b$

- בנקודה: תהא $f : I_{x_0} \to \mathbb{R}$
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in I_{x_0}.f(x) > M\right) \iff \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty\right)$.
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in I_{x_0}.f(x) < -M\right) \iff \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right)$.
- חד צדדי מימין: תהא $f : (x_0,b) \to \mathbb{R}$ אזי
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in (x_0, \min\{x_0+\delta,b\}).f(x) > M\right) \iff \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty\right)$.
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in (x_0, \min\{x_0+\delta,b\}).f(x) < -M\right) \iff \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\right)$.
- חד צדדי משמאל: תהא $f : (a,x_0) \to \mathbb{R}$ אזי
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in (\max\{x_0-\delta,a\}, x_0).f(x) > M\right) \iff \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty\right)$.
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in (\max\{x_0-\delta,a\}, x_0).f(x) < -M\right) \iff \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty\right)$.
- באינסוף: תהא $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ אזי
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta \in \mathbb{R}.\forall x \geq \delta.f(x) > M\right) \iff \left(\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\right)$.
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta \in \mathbb{R}.\forall x \geq \delta.f(x) < -M\right) \iff \left(\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\right)$.
- במינוס אינסוף: תהא $f : (-\infty,b) \to \mathbb{R}$ אזי
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta \in \mathbb{R}.\forall x \leq \delta.f(x) > M\right) \iff \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\right)$.
  - $\left(\forall M > 0.\exists \delta \in \mathbb{R}.\forall x \leq \delta.f(x) < -M\right) \iff \left(\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\right)$.

סימון: $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$.

סימון: יהי $L \in \hat{\mathbb{R}}$ יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ ותהא $f : I \to \mathbb{R}$ עבורה $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אזי $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$.

משפט: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ אזי $\left(\left(\lim_{x\to a} f(x) = L_1\right) \wedge \left(\lim_{x\to a} f(x) = L_2\right)\right) \implies (L_1 = L_2)$.

טענה: יהי $L \in \hat{\mathbb{R}}$ תהא $f : I \to \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ עבורם $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ וכן $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ אזי $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

פונקציית דריכלה: נגדיר $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך $D(x) = \begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q} \\ 1 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבון גבולות: יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ ויהיו $f,g : I_a \to \mathbb{R}$ אזי

- $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$.
- $\lim_{x\to a} (f(x) g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$.

למה: יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ אזי $\lim_{x\to a} x = a$.

מסקנה: יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x]$ אזי $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

משפט: יהיו $a,b \in \hat{\mathbb{R}}$ תהא $g : I_b \to \mathbb{R}$ ותהא $f : I_a \to I_b$ המקיימת $\lim_{x\to a} f(x) = b$ אזי $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{x\to b} g(x)$.

פונקציה אלמנטרית: הרכבה/סכום/כפל/הופכית של $\left(\bigcup \{\{\log_a(x), a^x\} \mid a > 0\}\right) \cup \mathbb{R}[x] \cup \{\sin,\cos\} \cup \{x^a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי $\forall a \in \text{Dom}(f).\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

משפט: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $|\sin(x)| \leq |x|$.

למה: יהי $a \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$.

מסקנה: יהי $a \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$.

סימון: יהיו $f,g : I \to \mathbb{R}$ המקיימות $\forall x \in I.f(x) \leq g(x)$ אזי $f(x) \preccurlyeq g(x)$.

מונוטוניות גבולות: יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ ותהיינה $f,g : I \to \mathbb{R}$ המקיימות $f(x) \preccurlyeq g(x)$ אזי $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

כלל הסנדוויץ': יהי $L \in \hat{\mathbb{R}}$ יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ ותהיינה $f,g,h : \mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x) \preccurlyeq g(x) \preccurlyeq h(x)$ אזי $\left(f(x), h(x) \xrightarrow[x\to a]{} L\right) \implies \left(g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L\right)$.

למה: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

רציפות: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי

- רציפות בנקודה: $a \in I$ עבורה $\lim_{x\to a} f(x) = f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית מימין בנקודה: $a \in I$ עבורה $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית משמאל בנקודה: $a \in I$ עבורה $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(x_0)$.

פונקציה רציפה בצורת קושי: פונקציה $f : I \to \mathbb{R}$ המקיימת $\forall a \in I.\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

פונקציה רציפה בצורת היינה: פונקציה $f : I \to \mathbb{R}$ המקיימת $\forall a \in I.\forall x \in I^{\mathbb{N}}.\left((x_n \to a) \implies \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)\right)\right)$.

משפט: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי (f רציפה בצורת קושי)$\iff$(f רציפה בצורת הנייה).

פתוחה יחסית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $B\subseteq A$ המקיימת $B\subseteq A$ המקיימת $\forall x\in B.\exists\varepsilon>0.\left(x-\varepsilon,x+\varepsilon\right)\cap A\subseteq B$.

משפט: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על I)$\Longleftrightarrow$(לכל $B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה $f^{-1}\left(B\right)$ פתוחה יחסית ל־I).

טענה: תהא $f:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}$ ותהא $c\in\left(a,b\right)$ אזי (f רציפה על c)$\Longleftrightarrow$(($f_{\upharpoonright_{(a,c]}}$ רציפה על c)$\wedge$($f_{\upharpoonright_{[c,b)}}$ רציפה על c)).

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $C\left(I\right)=\left\{ f:I\to\mathbb{R}\mid I\text{ רציפה על }f\right\}$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right)\right)$ רציפה מונוטונית עולה

- ($f\left[\left(a,b\right)\right]$ חסומה מלעיל)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^{-}}f\left(x\right)=\sup f\left[\left(a,b\right)\right]$).
- ($f\left[\left(a,b\right)\right]$ אינה חסומה מלעיל)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^{-}}f\left(x\right)=\infty$).
- ($f\left[\left(a,b\right)\right]$ חסומה מלרע)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^{-}}f\left(x\right)=\inf f\left[\left(a,b\right)\right]$).
- ($f\left[\left(a,b\right)\right]$ חסומה אינה מלרע)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^{-}}f\left(x\right)=-\infty$).

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה על a המקיימת $f\left(a\right)>0$ אזי קיימת סביבה I של a עבורה $\forall x\in I.f\left(x\right)>0$.

מסקנה: תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפות על a המקיימות $f\left(a\right)>g\left(a\right)$ אזי קיימת סביבה I של a עבורה $\forall x\in I.f\left(x\right)>g\left(x\right)$.

טענה: יהיו $f,g\in C\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left(\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x\right)=g\left(x\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall q\in\mathbb{Q}.f\left(q\right)=g\left(q\right)\right)$.

נקודת אי־רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $a\in I$ המקיימת

- סליקה: $\lim_{x\to a}f\left(x\right)\neq f\left(a\right)$.
- סוג ראשון/קפיצה: $\lim_{x\to a^{-}}f\left(x\right)\neq\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right)$.
- סוג שני: ($\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right)$ לא קיים) $\vee$ ($\lim_{x\to a^{-}}f\left(x\right)$ לא קיים).

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\Longleftrightarrow$($\left(\forall y\in\mathbb{N}^{I}.\left(y_{n}\to a\right)\Longrightarrow\left(\lim f\left(y_{n}\right)\text{ קיים וסופי}\right)\right)$).

פונקציית רימן: נגדיר $R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך $R\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \exists p,q\in\mathbb{Z}.\left(\gcd\left(p,q\right)=1\right)\wedge\left(x=\frac{p}{q}\right)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $R\left(x\right)=R\left(x+1\right)$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a}R\left(x\right)=0$.

טענה חשבון רציפות: יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ רציפות על a אזי $f+g,f\cdot g,f^{g}$ רציפות על a.

טענה: תהא $f:A\to B$ רציפה על a וכן $g:B\to C$ רציפה על $f\left(a\right)$ אזי $g\circ f$ רציפה על a.

מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה ותהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\lim_{x\to a}g\left(x\right)\right)$.

פונקציה רציונאלית: יהיו $p,q\in\mathbb{R}\left[x\right]$ אזי $\frac{p}{q}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\forall x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי כמות נקודות האי־רציפות לכל היותר בת מנייה.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\exists x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=f\left(x_{0}\right)\right)\Longleftarrow\left(\forall x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

משפט ויירשטראס הראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

משפט ויירשטראס השני: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\exists\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)$.

משפט ערך הביניים: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\forall y\in\left(\min\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right),\max\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right)\right).\exists c\in\left(a,b\right).f\left(c\right)=y$.

למה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$ אזי $\exists\zeta\in\left[a,b\right].f\left(\zeta\right)=0$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\left(\left[a,b\right]\right)=\left[\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)\right]$.

קטע מוכלל: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x,y\in A.\forall\lambda\in\left[0,1\right].\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\in A$.

למה: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ חח"ע אזי f מונוטונית ממש.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\wedge\left(f^{-1}\in C\left(f\left(I\right)\right)\right)$.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\Longleftrightarrow\left(f\in C\left(I\right)\right)$.

מסקנה: יהי $a>0$ אזי $x^{a},a^{x}\in C\left(\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $a_{n}\to a>0$ סדרה חיובית וכן $b_{n}\to b$ סדרה אזי $a_{n}^{b_{n}}\to a^{b}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ ויהי $p\in\mathbb{R}_{n}\left[x\right]\backslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ אזי $\exists\zeta\in\mathbb{R}.p\left(\zeta\right)=0$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{ I_{n}\right\} _{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_{n}$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_{0}}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_{n}$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $\left[a,b\right]$ קומפקטית.

פונקציה רציפה במידה שווה (במ"ש): $f\in\mathbb{R}^{A}$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A.\forall y\in\left(x-\delta,x+\delta\right).\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{A}$ רציפה במ"ש אזי f רציפה.

תנאי ליפשיץ: תהא $f\in\mathbb{R}^{A}$ עבורה $\exists M>0.\forall x,y\in A.\left|\frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{x-y}\right|<M$ אזי f רציפה במ"ש.

משפט קנטור: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f רציפה במ"ש על $\left[a,b\right]$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{A}$ רציפה במ"ש על $\left[c,d\right],\left(a,b\right]$ אזי f רציפה במ"ש על $\left(a,d\right)$.

פרה־קומפקטיות: תהא $D\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^{D}$ רציפה במ"ש אזי $\left(\lim_{n\to\infty}f\left(x_{n}\right)\in\mathbb{R}\right)\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}x_{n}\in\mathbb{R}\right).\forall x\in D^{\mathbb{N}}$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right]\right)$ אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow\left(\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right)\right)$ אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow\left(\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right),\lim_{x\to b^{-}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[a,\infty\right)\right)$ המקיימת $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי f רציפה במ"ש על $\left[a,\infty\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ רציפה במ"ש אזי f חסומה.

מודולוס הרציפות: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\omega_{f}\left(\delta\right)=\sup\left\{ \left|f\left(x_{1}\right)-f\left(x_{2}\right)\right|\mid\left(x_{1},x_{2}\in I\right)\wedge\left(\left|x_{1}-x_{2}\right|<\delta\right)\right\}$.

גזירות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי

- נגזרת בנקודה: תהא $x_{0}\in I$ אזי $f'\left(x_{0}\right)=\lim_{x\to x_{0}}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)}{x-x_{0}}$.
- נגזרת חד צדדית מימין בנקודה: תהא $x_{0}\in I$ אזי $f'_{+}\left(x_{0}\right)=\lim_{x\to x_{0}^{+}}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)}{x-x_{0}}$.
- נגזרת חד צדדית משמאל בנקודה: תהא $x_{0}\in I$ אזי $f'_{-}\left(x_{0}\right)=\lim_{x\to x_{0}^{-}}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)}{x-x_{0}}$.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_{0}\in I$ אזי $f'\left(x_{0}\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_{0}+h\right)-f\left(x_{0}\right)}{h}$.

נגזרת: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $f':I\to\mathbb{R}$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\frac{df}{dx}\left(x\right)=\frac{d}{dx}f\left(x\right)=f'\left(x\right)$.

טענה: יהי חלקיק ותהיינה $x,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי $x'\left(t\right)=v\left(t\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_{0}\in I^{\pm}$ אזי (f גזירה בנקודה x_{0})$\Longleftarrow$(f רציפה בנקודה x_{0}).

קירוב בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_{0}\in I$ אזי $p\left(x\right)\in\mathbb{R}_{n}\left[x\right]\backslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ המקיימת $\lim_{x\to x_{0}}\frac{f\left(x\right)-p\left(x\right)}{\left(x-x_{0}\right)^{n}}=0$.

סדר הקירוב: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $p\left(x\right)$ קירוב בנקודה x_{0} אזי $\deg\left(p\right)$.

דיפרנציאבילית בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $x_{0}\in I$ עבורה (f רציפה על x_{0})$\wedge$(קיים קירוב מסדר ראשון של f בנקודה x_{0}).

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_{0}\in I$ אזי (f דיפרנציאבילית בנקודה x_{0})$\Longleftrightarrow$(f גזירה בנקודה x_{0}).

חשבון גזירות: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות בנקודה x_{0} אזי

- $\left(f\pm g\right)'\left(x_{0}\right)=f'\left(x_{0}\right)\pm g'\left(x_{0}\right)$.
- $\left(f\cdot g\right)'\left(x_{0}\right)=f'\left(x_{0}\right)g\left(x_{0}\right)+f\left(x_{0}\right)g'\left(x_{0}\right)$.
- $\left(g\left(x_{0}\right)\neq0\right)\Longrightarrow\left(\left(\frac{f}{g}\right)'\left(x_{0}\right)=\frac{f'\left(x_{0}\right)g\left(x_{0}\right)-f\left(x_{0}\right)g'\left(x_{0}\right)}{g\left(x_{0}\right)^{2}}\right)$.

משפט: תהא $x_{0}\in I$ ותהא $f\in C\left(I\right)$ מונוטונית חזק גזירה על $f^{-1}\left(y_{0}\right)$ אזי $\left(f^{-1}\right)'\left(y_{0}\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(y_{0}\right)\right)}$.

מסקנה: $\tan'\left(x\right)=\frac{1}{\cos^{2}\left(x\right)}$.

מסקנה: $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$.

מסקנה: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\left(x^{r}\right)'=rx^{r-1}$.

מסקנה: $\arctan'\left(x\right)=\frac{1}{1+x^{2}}$.

כלל השרשרת: תהא $x_{0}\in I$ תהא $f\in C\left(I\right)$ גזירה על x_{0} וכן $g\in C\left(f\left(I\right)\right)$ גזירה על $f\left(x_{0}\right)$ אזי $\left(g\circ f\right)'\left(x_{0}\right)=g'\left(f\left(x\right)\right)\cdot f'\left(x\right)$.

נגזרת מסדר גבוה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה אזי $\left(f^{\left(0\right)}=f\right)\wedge\left(f^{\left(n+1\right)}=\left(f^{\left(n\right)}\right)'\right)$.

הפרש דיסקרטי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\Delta f\right)\left(x\right)=f\left(x+1\right)-f\left(x\right)$.

הגדרה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\Delta^{\left(0\right)}f=\Delta f\right)\wedge\left(\Delta^{\left(k+1\right)}f=\Delta\left(\Delta^{\left(k\right)}f\right)\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה עבורה f' רציפה.

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(C^{n}\left(I\right)=\left\{ f\in C^{n-1}\left(I\right)\mid f\text{ גזירה ברציפות}\right\} \right)\wedge\left(C^{0}\left(I\right)=C\left(I\right)\right)$.

פונקציה חלקה: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $f\in C^{\infty}\left(I\right)=\bigcap_{n=0}^{\infty}C^{n}\left(I\right)$.

כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $\left(f\cdot g\right)^{\left(n\right)}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}f^{\left(k\right)}\left(x\right)\cdot g^{\left(n-k\right)}\left(x\right)$.

נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי

- מקסימום: $x_{0}\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right).f\left(x\right)\leq f\left(x_{0}\right)$.
- מינימום: $x_{0}\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right).f\left(x_{0}\right)\leq f\left(x\right)$.

משפט פרמה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ גזירה על $\left(a,b\right)$ ותהא $x_{0}\in\left(a,b\right)$ נקודת קיצון אזי $f'\left(x_{0}\right)=0$.

משפט רול: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ גזירה על $\left(a,b\right)$ המקיימת $f\left(a\right)=f\left(b\right)$ אזי $\exists c\in\left(a,b\right).f'\left(c\right)=0$.

משפט לגרנז': תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ גזירה על $\left(a,b\right)$ אזי $\exists c\in\left(a,b\right).f'\left(c\right)=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה אזי (f' חסומה)$\Longleftarrow$(f רציפה במ"ש).

טענה: $\forall x > 0.e^x > 1 + x$.

טענה: $\forall x, y \in \mathbb{R}. \left|\sin\left(x\right) - \sin\left(y\right)\right| \leq |x - y|$.

טענה: תהא $f \in C\left(\mathbb{R}\right)$ גזירה המקיימת $\forall x \in \mathbb{R}.f'\left(x\right) = 0$ אזי $\exists a \in \mathbb{R}.f\left(x\right) = a$.

מסקנה: תהיינה $g, h \in \mathbb{R}^I$ המקיימות $g' = h'$ אזי $\exists c \in \mathbb{R}.g = h + c$.

טענה: תהא $f \in C\left(\mathbb{R}\right)$ גזירה המקיימת $f = f'$ אזי $\exists c \in \mathbb{R}.f\left(x\right) = e^x$.

משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה $f, g \in C\left(\left[a, b\right]\right)$ גזירות על $\left(a, b\right)$ אזי $\exists x_0 \in \left(a, b\right).\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה אזי

- אם לכל $x \in I$ מתקיים $f'\left(x\right) > 0$ אזי f עולה ממש.
- אם לכל $x \in I$ מתקיים $f'\left(x\right) < 0$ אזי f יורדת ממש.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה פעמיים על I ומתקיים $x_0 \in I$ ומתקיים $f'\left(x_0\right) = 0$ אזי

- אם $f''\left(x_0\right) > 0$ אזי x_0 מינימום מקומי של f.
- אם $f''\left(x_0\right) < 0$ אזי x_0 מקסימום מקומי של f.

משפט: תהא $f \in C\left(\left[a, b\right)\right)$ גזירה על $\left(a, b\right)$ המקיימת $\lim_{x \to a^+} f'\left(x\right) \in \mathbb{R}$ אזי $f'_+\left(a\right) = \lim_{x \to a^+} f'\left(x\right)$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה ברציפות אזי $f'\left(x_0\right) > 0 \Longrightarrow \exists \delta > 0.\forall x \in \left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right).f'\left(x\right) > 0$.

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה אזי ($f'_+\left(a\right) < 0$ גורר a לא מינימום מקומי)$\wedge$($f'_-\left(b\right) > 0$ גורר b לא מקסימום מקומי).

משפט דרבו: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה אזי $\forall y \in \left(\min\left(f'\left(a\right), f'\left(b\right)\right), \max\left(f'\left(a\right), f'\left(b\right)\right)\right).\exists c \in \left(a, b\right).f'\left(c\right) = y$.

כלל לופיטל: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות ותהא $x \in I_\infty^\pm$ נניח כי $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ מתכנס במובן הרחב אזי

- $\left(\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = 0 = \lim_{x \to x_0} g\left(x\right)\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.
- $\left(\lim_{x \to x_0} g\left(x\right) = \infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.

אי־שיוויון יאנג: יהיו $x, y > 0$ ויהיו $p, q > 0$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ מתקיים $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

אי־שיוויון הולדר: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ ויהיו $p, q > 0$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

אי־שיוויון מינקובסקי: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ ויהיו $p, q > 0$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי
$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא $f, g \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I^\pm$ אזי

- $f \in O\left(g\right) \Longleftrightarrow \left(\exists c > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in \left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right).\left|f\left(x\right)\right| \leq c\left|g\left(x\right)\right|\right)$. אינטואיטיבית $f \leq g$
- $f \in \Omega\left(g\right) \Longleftrightarrow \left(g \in O\left(f\right)\right)$. אינטואיטיבית $f \geq g$
- $f \in o\left(g\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\right)$. אינטואיטיבית $f < g$
- $f \in \omega\left(g\right) \Longleftrightarrow \left(g \in o\left(f\right)\right)$. אינטואיטיבית $f > g$
- $f \in \Theta\left(g\right) \Longleftrightarrow \left(f \in O\left(g\right) \wedge f \in \Omega\left(g\right)\right)$. אינטואיטיבית $f = g$
- $f \sim g \Longleftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\right)$. אינטואיטיבית $f = g$ בדיוק של קבועים

למה: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I$ אזי $f \in \Theta\left(g\right) \Longleftarrow \left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} \xrightarrow[x \to x_0]{} c \neq 0\right)$.

מזדהה עד סדר: $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות n פעמים על x_0 המקיימות $\forall k \in \{0 \ldots n\}.f^{(k)}\left(x_0\right) = g^{(k)}\left(x_0\right)$.

טענה: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ מזדהות עד סדר n על x_0 אזי $f - g \in o\left(\left(x - x_0\right)^n\right)$.

מסקנה: תהא $h \in \mathbb{R}^I$ רציפה על x_0 וכן $h \in o\left(\left(x - x_0\right)^n\right)$ אזי (h גזירה n פעמים על x_0)$\wedge$($h^{(k)}\left(x_0\right) = 0$).

פולינום טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $p \in \mathbb{R}_n\left[x\right] \backslash \mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

למה: יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $\left(\left(x - x_0\right)^k\right)^{(j)}\left(x_0\right) = \begin{cases} j! & j = k \\ 0 & else \end{cases}$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי פולינום הטיילור הוא $P_n\left(x\right) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x - x_0\right)^k$.

שארית: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n\left(x\right) = f\left(x\right) - P_n\left(x\right)$.

משפט פאנו: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n\left(x\right) \in o\left(\left|x - x_0\right|^n\right)$.

למה: תהא $g\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים המקיימת $g^{(k)}(x_0)=0$.$\forall k\in\{0\dots n\}$ אזי $\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).g(x)=\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

משפט השארית של לגרנז': תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי $\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ אזי $\forall x\in(a,b).\left(\exists M\in\mathbb{R}.\forall k\in\mathbb{N}.\left|f^{(k)}(x)\right|<M\right)\Longrightarrow\left(R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ עבורה $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.$\forall x\in(a,b)$ אזי $f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ ותהא a סדרה המקיימת $\left|f^{(m)}(x)\right|<a_m$.$\forall x\in(a,b)$ אזי $\forall c\in\mathbb{R}.\left(\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m!}c^m=0\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in[x_0-c,x_0+c].f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$.

מסקנה: $\left(\cos(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\wedge\left(\sin(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\wedge\left(e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}\right)$.

מסקנה: $e\notin\mathbb{Q}$.

משפט השארית של קושי: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי $\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$.

מסקנה: יהי $|x|<1$ אזי $\arctan(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}((a,b))$ המקיימת $f^{(k)}(x_0)=0$.$\forall k\in\{0\dots n\}$ וכן $f^{(n+1)}(x_0)\neq0$ אזי

- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי x_0 אינה נקודת קיצון של f.
- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי
  - אם $f^{(n+1)}(x_0)>0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.
  - אם $f^{(n+1)}(x_0)<0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.

פונקציה קמורה: $f\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$.$\forall x,y\in I.\forall\alpha\in[0,1]$.

פונקציה קעורה: $f\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $f(\alpha x+(1-\alpha)y)\ge\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$.$\forall x,y\in I.\forall\alpha\in[0,1]$.

נקודת פיתול: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי x_0 המקיימת (f קעורה מאחד מצדדיה)$\wedge$(f קמורה מאחד מצדדיה).

משפט שלושת המיתרים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ קמורה אזי לכל $x_1<x_2<x_3$ מתקיים $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה פעמיים אזי

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)>0$ אזי f קמורה.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)<0$ אזי f קעורה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $f\in C((a,b))$.

פונקציה קדומה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.

פונקציה קדומה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_+(a)=f(a)$ וכן $F'_-(b)=f(b)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^I\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\Longleftrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int(f+g)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int(\alpha f)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^I$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int((f\circ g)\cdot g')$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\dots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\dots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^n|\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\dots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\dots t_n\}$ המקיימות $t_i\in[x_{i-1},x_i]$.$\forall i\in\{1\dots n\}$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\left\{ t_{i}\right\}$ מתקיים $\left|S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)-L\right|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_{a}^{b}f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_{a}^{b}f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{a}^{b}f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R\left([a,b]\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid\text{אינטגרבילית רימן } f\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_{a}^{b}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\left(\Pi\right)\to0}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{ t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_{a}^{b}c\cdot\mathrm{d}t=c\left(b-a\right)$.

טענה: $D\left(x\right)\notin R\left(\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i},x_{i-1}]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i},x_{i-1}]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sup_{\text{נקודות מתאימות}\left\{ t_{i}\right\}}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\inf_{\text{נקודות מתאימות}\left\{ t_{i}\right\}}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\geq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\leq\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_{1},Π_{2} חלוקות אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}\left(f\right)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\text{חלוקה }\Pi}\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\leq\underline{I}\left(f\right)\leq\overline{I}\left(f\right)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left([a,b]\right)\right)\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ חסומה אזי $\int_{a}^{b}f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי $\omega\left(f,J\right)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה ויהי $x_{0}\in J$ אזי (f רציפה על x_{0})$\Longleftrightarrow\left(\lim_{\delta\to0}\omega\left(f,[x_{0}-\delta,x_{0}+\delta]\right)=0\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow\left(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\mathrm{len}\left(I\right).\omega\left(f,I\right)<\varepsilon\right)$.

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,[x_{i-1},x_{i}]\right)\Delta x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\geq\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p_{1}\ldots p_{m}\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\geq\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\leq\underline{I}\left(f\right)\leq\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\geq\overline{I}\left(f\right)\geq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left([a,b]\right)\right)\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

משפט: $C\left([a,b]\right)\subseteq R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $f_{\restriction_{[a,b]}}\in R\left([a,b]\right)$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $(f\in R([a,b]))\wedge(f\in R([b,c]))$ אזי $f\in R([a,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in[a,d]$ עבורה $f\in R([a,d])$ אזי $f\in R([b,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,c])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([b,c])$ אזי $f\in R([a,c])$.

טענה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases} y & x=b\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $g\in R([a,c])$.

מסקנה: נגדיר $f(x)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אזי $f\in R([-1,1])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ תהא $H\in C(\mathbb{R})$ וכן $c\in\mathbb{R}$
- $(f+g),(cf)\in R([a,b])$.
- $(f\cdot g),(H\circ f),|f|\in R([a,b])$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\{(a_i,b_i)\}_{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup(a_i,b_i)$ וכן $\sum(b_i-a_i)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $|A|\leq\aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.|b-a|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction A}=g_{\restriction A}$ אזי $\int_a^b f=\int_a^b g$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases} y_i & x\in\{b_1\ldots b_m\}\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f=\int_a^c g$.

משפט ליניאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,c])$ ויהי $b\in(a,c)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $f\geq 0$ אזי $\int_a^b f\geq 0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_a^b f\geq\int_a^b g$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ רציפה המקיימת $f\geq 0$ וכן $\int_a^b f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $m\leq f\leq M$ אזי $m(b-a)\leq\int_a^b f\leq M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b|f|\leq\sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R([a,b])$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F\in C([a,b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $0\leq g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b(f\cdot g)=f(x_0)\int_a^b g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ יהיו $x_1\ldots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]|_a^b=f(b)-f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\varphi\in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ המקיימת $(\varphi(\alpha)=a)\wedge(\varphi(\beta)=b)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x$.

טענה דעיכת מקדמי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|\leq\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי
- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty).f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^\infty f=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b].f\in R([a,b])$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.(a<b)\implies(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{r\to a^+}\int_r^b f$.

- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left([a,c]\right)$ אזי $\int_{a}^{r}f$ $\int_{a}^{b}f=\lim\limits_{r\to b^{-}}\int_{a}^{r}f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R\left(I\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{I}\mid\int_{I}f\text{ קיים וסופי}\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\left\{ \infty\right\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R\left([a,\omega)\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{\omega}\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\int_{a}^{\omega}f+\beta\int_{a}^{\omega}g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left([a,\omega)\right)$ ויהי $c\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{a}^{c}f+\int_{c}^{\omega}f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R\left([a,\omega)\right)$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_{a}^{\omega}f\geq\int_{a}^{\omega}g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left([a,\omega)\right)$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\lim_{b\to\omega}F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left([a,\omega)\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f'g=\lim_{b\to\omega}\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{\omega}fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R\left([a,\omega)\right)$ ותהא $\varphi\in C^{1}\left([c,\eta),[a,\omega)\right)$ המקיימת $\varphi\left(c\right)=a$ וכן $\lim_{b\to\eta}\varphi\left(b\right)=\omega$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{c}^{\eta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $\left(f\in R\left([a,\omega)\right)\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in\left(a,\omega\right).\forall b_{1},b_{2}\in[B,\omega).\left|\int_{b_{1}}^{b_{2}}f\right|<\varepsilon\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left([a,b]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left([a,b]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ אינו מתכנס אך $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_{a}^{\omega}f\right|\leq\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$.

טענה: תהא $0\leq f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)\Longleftrightarrow$($F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0\leq f\leq g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in\left(a,\omega\right).f,g\in R\left([a,b]\right)$ אזי

- $\left(\int_{a}^{\omega}g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)$.
- $\left(\int_{a}^{\omega}f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_{a}^{\omega}g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\leq f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\int_{1}^{\infty}f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\leq f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^{\infty}f\left(n\right)\leq\int_{1}^{\infty}f\leq\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$.

משפט אבל: תהא $g\in C\left([a,\omega)\right)\cap R\left([a,\omega)\right)$ ותהא $f\in C^{1}\left([a,\omega)\right)$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_{a}^{\omega}fg$ מתכנס.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C\left([a,\omega)\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_{a}^{x}g$ חסומה ותהא $f\in C^{1}\left([a,\omega)\right)$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $\int_{a}^{\omega}fg$ מתכנס.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^{I}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\iff\left(\forall x\in I.\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

סימון: $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)\iff\left(f_{n}\xrightarrow{p.w.}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $\left(f\in C\left(I\right)\right)\centernot\Longleftarrow\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(f\in R\left(I\right)\right)\centernot\Longleftarrow\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in R\left(I\right)\right)$.
- גבול האינטגרל: נניח $f\in R\left(I\right)$ וכן $\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in R\left(I\right)$ אזי $\left(\int_{I}f=L\right)\centernot\Longleftarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}\int_{I}f_{n}=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_{n} גזירה אזי $\left(f'\left(x\right)=L\right)\centernot\Longleftarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}'\left(x\right)=L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^{I}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\iff\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=0\right)$.

סימון: $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)\iff\left(f_{n}\xrightarrow{u}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{u}f\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

חסומה במידה אחידה: $f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.\left|f_{n}\left(x\right)\right|\leq M$.

למה: תהיינה $f_{n},g_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_{n}\xrightarrow{u}f\right)\wedge\left(g_{n}\xrightarrow{u}g\right)$ אזי $f_{n}g_{n}\xrightarrow{u}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\left(\exists f\in\mathbb{R}^{I}.f_{n}\xrightarrow{u}f\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.\left|f_{n}\left(x\right)-f_{m}\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה $f_{n}\in C\left(I\right)$ עבורן $f_{n}\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in C\left(I\right)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{ I_{n}\right\} _{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_{n}$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_{0}}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_{n}$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n \in C([a,b])$ ותהא $f \in C([a,b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ וכן $\forall n < m. f_m < f_n$ אזי $f_n \xrightarrow{u} f$.

מסקנה: תהיינה $f_n \in C([a,b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ באשר $f \in C([a,b])$ וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $f_n \xrightarrow{u} f$.

טענה: תהיינה $f_n \in R([a,b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $f \in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f_n \in R([a,b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

משפט: תהיינה $f_n \in C^1([a,b])$ עבורה $f_n' \xrightarrow{u} g$ ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n \xrightarrow{u} f$ וכן $f' = g$.

סימון: תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n} f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} f_n = f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty} u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} u_n = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} u_i$.

משפט בוחן M של וויירשטראס: תהיינה $u_n \in \mathbb{R}^I$ ותהא $M \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ וכן $\forall x \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} a_m (b_k - b_{k+1})$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנס במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n \xrightarrow{u} 0$ וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנס במ"ש.

למה: תהא $f \in C([0,1])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין עבורה $\max|f - \varphi| < \varepsilon$.

למה: תהא $f \in C([0,1])$ ויהי $N \in \mathbb{N}$ נגדיר $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין כך $\varphi(x) = f(0) + N \sum_{k=0}^{N-1} (f(a_{k+1}) - 2f(a_k) + f(a_{k-1})) \max\{x - a_k, 0\}$ אזי $\varphi(a_m) = f(a_m)$. $\forall m \in \{0 \ldots N\}$.

למה: קיימות $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורן $\lim_{n\to\infty} \max_{[-1,1]} |p_n(x) - |x|| = 0$.

משפט וויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $\exists p \in \mathbb{R}[x]. \max_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

משפט וויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ אזי קיימות $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורן $p_n \xrightarrow{u} f$.

הגדרה: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n \xrightarrow{u} f$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n \in R([a,\omega))$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi \in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n \in \mathbb{N}. |f_n| \le \Psi$ אזי $\left(\forall b \in [a,\omega). f \in R([a,b])\right) \wedge \left(\int_a^{\omega} f \text{ מתכנסת בהחלט}\right) \wedge \left(\int_a^{\omega} f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^{\omega} f_n\right)$.

טענה: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ ויהי $r < |q|$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|, |r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0,\infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס} & x \in (-R,R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R,R] \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמר: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty\right) \Longrightarrow (R = 0)\right) \wedge \left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0\right) \Longrightarrow (R = \infty)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < 0$ אזי $\lim\limits_{r\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־$-R$).

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ מתכנס בהחלט ותהא $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_i=\sum_{i=0}^{\infty}a_{p(i)}$.

טענה מכפלות קושי: יהיו $p,q\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_nx^n,\sum b_nx^n$ טורי חזקות מתכנסים בהחלט על I אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)$.

משפט: יהי $\sum a_kz^k$ טור חזקות מרוכב המתכנס עבור $w\in\mathbb{C}$ ויהי $r<|w|$ אזי $\sum a_kz^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $\overline{B}_r\left(0\right)$.

משפט אוילר: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta}=\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\cos\left(z\right)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.
- $\sin\left(z\right)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R\left([a,b]\right)$ אזי $u+iv\in R\left([a,b]\right)$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}\left([a,b]\right)$ אזי $\int_a^b\left(u+iv\right)=\int_a^bu+i\int_a^bv$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי

- $\int_a^b\left(f+g\right)=\int_a^bf+\int_a^bg$.
- $\int_a^bf=\int_a^cf+\int_c^bf$.
- $\int_a^bcf=c\int_a^bf$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^bf}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}\left([a,b]\right)$ אזי $\frac{d}{dx}\left(u+iv\right)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי $|f|\in R\left([a,b]\right)$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^xf\left(t\right)\mathrm{d}t\right)'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^bf\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי $\int_a^bf'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^bfg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי $\left|\int_a^bf\right|\le\int_a^b|f|$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R\left(\mathbb{T}\right)=\left\{f\in R\left([0,2\pi]\right)\mid\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)\right\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n\left(t\right)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n\left(t\right)\in R\left(\mathbb{T}\right)$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{c_n\right\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $\left(c_m\neq0\right)\vee\left(c_{-m}\neq0\right)$ אזי m.

טענה: $R\left(\mathbb{T}\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

טענה: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על $C\left(\mathbb{T}\right)$.

טענה: $\langle e_n,e_m\rangle=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(m\right)=\langle f,e_m\rangle$.

טענה: יהי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(k\right)=c_k$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_n\left(t\right)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\langle f,g\rangle=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)\overline{\hat{g}\left(n\right)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\|f\|^2=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^2$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(m\right)=\langle f,e_m\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\left(S_mf\right)\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_n\left(t\right)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(-n\right)=\overline{\hat{f}\left(n\right)}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$($S_{m}f$ ממשית).

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\left|k\right|\le m$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp e_{k}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp S_{m}f$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left\Vert f\right\Vert ^{2}=\left\Vert S_{m}f\right\Vert ^{2}+\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}\le\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_{2}: תהיינה $f_{n},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}g\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\left\Vert f_{n}-g\right\Vert =0\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_{2} איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\Vert g\right\Vert \le\sup\left|g\right|$.

מסקנה: תהיינה $f_{n}\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{u}f\right)\Longrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_{n}\in\mathbb{C}\left[x\right]$ עבורה $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t\in\left[0,2\pi\right]}\left|p\left(t\right)-f\left(t\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\left\Vert p-f\right\Vert <\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי קיימים p_{n} פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{m\to\infty}\left\Vert S_{m}f-f\right\Vert =0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}=\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

מסקנה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ המקיימות $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}\left(n\right)=\hat{g}\left(n\right)$ אזי בכל נקודת רציפות של f,g מתקיים $f=g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\Vert f-\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\right\Vert ^{2}\ge\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהיינה $f_{m},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורן $0\xrightarrow[m\to\infty]{}\left\Vert f_{m}-g\right\Vert$ אזי $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f_{m}}\left(n\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}\hat{g}\left(n\right)$.

טור פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $S_{N}f\xrightarrow{p.w.}g$ כאשר $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)e^{int}$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$ אזי $S_{N}f\xrightarrow{u}f$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[-\pi,\pi\right)}$ המוגדרת $f\left(t\right)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}i}{n}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=0\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}\sin\left(nt\right)}{n}$.
- יהי $r\in\left[0,\pi\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{u}f$ על $\left[-r,r\right]$.
- $S_{m}f\xrightarrow{p.w.}f$ על $\left(-\pi,\pi\right)$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[0,2\pi\right]}$ המוגדרת $f\left(t\right)=\frac{\left(\pi-t\right)^{2}}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{1}{2n^{2}}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=\frac{\pi^{2}}{12}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\frac{\pi^{2}}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos\left(nt\right)}{n^{2}}$.
- $S_{m}f\xrightarrow{u}f$ על $\left[0,2\pi\right]$.

מסקנה: $\frac{\pi^{4}}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k^{2}}$.

טענה: יהי $\alpha\notin\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\alpha\right)^{2}}=\frac{\pi^{2}}{\sin^{2}\left(\pi\alpha\right)}$.

למה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f'}\left(n\right)=in\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}\left(f'\right)=\left(S_{m}f\right)'$.

למה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f^{\left(k\right)}}\left(n\right)=i^{k}n^{k}\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$.

משפט: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$ אזי $f\in C^{k-2}\left(\mathbb{T}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$.
מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{u}f$.
תנאי ליפשיץ מקומי: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $a\in\mathbb{R}$ עבורה $\exists\delta>0.\exists M>0.\forall x\in\left(a-\delta,a+\delta\right).\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|<M\left|x-a\right|$.
הערה: יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\left(a-\delta,a+\delta\right)\right)$ אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a.
משפט: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ותהא $a\in\mathbb{T}$ עבורן f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a אזי $S_{N}f\left(a\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}f\left(a\right)$.
מטריקה/מרחק: תהא A קבוצה אזי $d:A^{2}\to\left[0,\infty\right)$ המקיימת
- חיוביות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)\geq0$.
- חיוביות ממש: $\forall x,y\in A.\left(d\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(x=y\right)$.
- סימטריות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$.
- אי־שיוויון המשולש: $\forall x,y,z\in A.d\left(x,y\right)\leq d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right)$.

מרחב מטרי: תהא X קבוצה ותהא $d:X^{2}\to\left[0,\infty\right)$ מטריצה אזי $\left(X,d\right)$.
גבול: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in X$ עבורן $d\left(a_{n},L\right)\to0$ אזי $a_{n}\to L$.
טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ויהיו $L_{1},L_{2}\in X$ עבורם $\left(a_{n}\to L_{1}\right)\wedge\left(a_{n}\to L_{2}\right)$ אזי $L_{1}=L_{2}$.
מרחק מנהטן: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $d_{1}\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$.
סימון: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $d_{p}\left(x,y\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ אזי $\ell_{p}^{n}=\left(\mathbb{R}^{n},d_{p}\right)$.
טענה: ℓ_{p}^{n} מרחב מטרי.
מרחק יוניפורמי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $d_{\infty}\left(x,y\right)=\max_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$.
סימון: $\ell_{\infty}^{n}=\left(\mathbb{R}^{n},d_{\infty}\right)$.
טענה: ℓ_{∞}^{n} מרחב מטרי.
סימון: יהיו $f,g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sup\left|f-g\right|$ אזי $C\left(\left[a,b\right]\right)=\left(C\left(\left[a,b\right]\right),d\right)$.
טענה: $C\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.
סימון: יהיו $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sqrt{\int_{a}^{b}\left|f-g\right|^{2}}$ ונגדיר יחס שקילות $\left(f\sim g\right)\iff\left(d\left(f,g\right)=0\right)$ אזי $L_{2}\left(\left[a,b\right]\right)=\left(\nicefrac{R\left(\left[a,b\right]\right)}{\sim},d\right)$.
טענה: $L_{2}\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.
טענה: יהי V מ"ו ותהא $\nu:V\to\left[0,\infty\right)$ נורמה על V נגדיר $d\left(x,y\right)=\nu\left(x-y\right)$ אזי $\left(V,d\right)$ מרחב מטרי.
נורמת ℓ_{p}^{n}: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert x\right\Vert _{p}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$.
נורמת ℓ_{∞}^{n}: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert x\right\Vert _{\infty}=\max_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|$.
למה: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי
- $\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\leq\left\Vert x\right\Vert _{2}\leq\sqrt{n}\left\Vert x\right\Vert _{\infty}$.
- $\left\Vert x\right\Vert _{2}\leq\left\Vert x\right\Vert _{1}\leq\sqrt{n}\left\Vert x\right\Vert _{2}$.

מסקנה: תהא $\left\{ x^{\left(m\right)}\right\} \subseteq\mathbb{R}^{n}$ סדרה ותהא $y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(\lim_{m\to\infty}\left\Vert x^{\left(m\right)}-y\right\Vert _{2}=0\right)\iff\left(\forall i\in\left[n\right].\lim_{m\to\infty}x_{i}^{\left(m\right)}=y_{i}\right)$.
כדור פתוח: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)<r\right\}$.
כדור סגור: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)\leq r\right\}$.
ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)=r\right\}$.
נקודה פנימית: תהא $A\subseteq X$ אזי $x\in A$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\subseteq A$.
פנים של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\left\{ x\in A\mid A\text{ נקודה פנימית של }x\right\}=\overset{\circ}{A}=\text{int}\left(A\right)$.
קבוצה פתוחה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $A=\text{int}\left(A\right)$.
למה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\text{int}\left(\text{int}\left(A\right)\right)=\text{int}\left(A\right)$.
משפט: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי
- יהיו $\left\{ A_{i}\right\}$ פתוחות אזי $\bigcup A_{i}$ פתוחה.
- יהיו $\left\{ A_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ פתוחות אזי $\bigcap A_{i}$ פתוחה.
- $\varnothing,X$ פתוחות.

סביבה: יהי $a\in X$ אזי $A\subseteq X$ פתוחה עבורה $a\in A$.
טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\text{int}\left(A\right)=\bigcup\left\{ B\subseteq A\mid B\text{ פתוחה}\right\}$.
קבוצה סגורה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $X\backslash A$ פתוחה.

נקודת סגור: תהא $X \subseteq A$ אזי $a \in X$ עבורה $\forall r > 0.B_r(a) \cap A \neq \varnothing$.

סגור של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\mathrm{cl}(A) = \overline{A} = \{a \in X \mid$ נקודת סגור של A $a\}$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ אזי (A סגורה)$\iff$($A = \overline{A}$).

למה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A} = X \backslash \mathrm{int}(X \backslash A)$ וכן $\mathrm{int}(A) = X \backslash \overline{(X \backslash A)}$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A} = \bigcap \{A \subseteq B \mid$ סגורה $B\}$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ ותהא $a \in X$ אזי ($a \in \overline{A}$)$\iff$(קיימת סדרה $x_n \in A$ עבורה $x_n \to a$).

נקודת הצטברות: תהא $A \subseteq X$ אזי $a \in X$ המקיימת $\forall r > 0. (B_r(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \varnothing$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ ותהא $a \in X$ אזי (a הצטברות של A)$\iff$(קיימת סדרה $x_n \in A \backslash \{a\}$ עבורה $x_n \to a$).

שפה של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A} = \overline{A} \backslash \mathrm{int}(A)$.

קבוצה צפופה: קבוצה $Y \subseteq X$ עבורה $\overline{Y} = X$.

טענה: תהא $Y \subseteq X$ אזי (Y צפופה)$\iff$(לכל $A \subseteq X$ פתוחה באשר $A \neq \varnothing$ מתקיים $Y \cap A \neq \varnothing$).

מרחב מטרי ספרבילי: מרחב מטרי (X,d) עבורו קיימת $Y \subseteq X$ צפופה לכל היותר בת מנייה.

קבוצה חסומה: קבוצה $A \subseteq X$ עבורה $\exists r > 0.\exists a \in X.A \subseteq B_r(a)$.

קוטר של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ חסומה אזי $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$.

טענה: תהא $\left\{x^{(m)}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה $x^{(m_j)}$ מתכנסת.

מסקנה: לכל קבוצה חסומה ואינסופית קיימת נקודת הצטברות.

סדרת קושי: סדרה $\{x_n\} \subseteq X$ המקיימת $\forall \varepsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}.\forall k,m \geq N.d(x_k, x_m) < \varepsilon$.

למה: סדרת קושי הינה חסומה.

טענה: סדרה מתכנסת הינה סדרת קושי.

מרחב מטרי שלם: מרחב מטרי (X,d) עבורו כל סדרת קושי מתכנסת.

משפט: $\mathbb{R}^n$ סטנדרטי שלם, $C([a,b])$ שלם, ℓ_2 שלם.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי שלם ותהא $Y \subseteq X$ אזי ((Y,d) שלם)$\iff$(Y סגורה).

מרחבים מטריים איזומטריים: מרחבים מטריים $(X,d),(Y,\rho)$ עבורם קיימת $f : X \to Y$ חח"ע ועל המקיימת $\forall x,y \in X.d(x,y) = d((x), f(y))$.

השלמה של מרחב מטרי: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי (Y,ρ) מרחב מטרי שלם עבורו $X \subseteq Y$ צפופה וכן $\rho_{\restriction_{X^2}} = d$.

כיסוי פתוח: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ אזי קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ עבורן $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

מרחב קומפקטי: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X קיימות $\{\beta_i\}_{i=1}^m \in I$ עבורן $X = \bigcup_{i=1}^m A_{\beta_i}$.

קבוצה קומפקטית: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי $B \subseteq X$ עבורו (B,d) מרחב קומפקטי.

טענה קבוצה פתוחה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $Y \subseteq X$ אזי ($U \subseteq Y$ פתוחה ב־(Y,d))$\iff$(קיימת $V \subseteq X$ פתוחה עבורה $U = V \cap Y$).

טענה קבוצה סגורה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $Y \subseteq X$ אזי ($U \subseteq Y$ סגורה ב־(Y,d))$\iff$(קיימת $V \subseteq X$ סגורה עבורה $U = V \cap Y$).

טענה: תהא $K \subseteq X$ קומפקטית אזי K חסומה וכן K סגורה.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\iff$(לכל סדרה יורדת $\{K_i\}_{i=1}^\infty \subseteq X$ סגורות לא ריקות אזי $\bigcap_{i=1}^\infty K_i \neq \varnothing$).

קומפקטיות סדרתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\iff$((X,d) קומפקטי סדרתית).

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (A קומפקטית)$\iff$(A סגורה וחסומה).

גבול: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים תהא $f : X \to Y$ תהא $a \in X$ ותהא $L \in Y$ אזי

- קושי: $(\lim_{x\to a} f(x) = L) \iff (\forall \varepsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in B(a,\delta).f(x) \in B(L,\varepsilon))$.
- היינה: $(\lim_{x\to a} f(x) = L) \iff \left(\forall x \in (X \backslash \{a\})^{\mathbb{N}}.(x_k \to a) \implies (f(x_k) \to L)\right)$.

רציפות בנקודה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f : X \to Y$ אזי $a \in X$ עבורה $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

משפט: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f : X \to Y$ אזי (f רציפה)$\iff$(לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה).

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $f : X \to \mathbb{R}^m$ אזי (f רציפה)$\iff$(לכל $i \in [m]$ מתקיים כי f_i רציפה).

רציפות במידה שווה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $A \subseteq X$ אזי $f : A \to Y$ עבורה $\forall \varepsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall x,y \in A.(d(x,y) < \delta) \implies (\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon)$.

משפט: תהיינה $f,g:X\to\mathbb{R}^n$ רציפות ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\alpha f+\beta g$ רציפה וכן $\langle f,g\rangle$ רציפה.

משפט רציפות ההרכבה: יהיו $(X,d),(Y,\rho),(Z,\eta)$ מרחבים מטריים תהא $a\in X$ תהא $f:X\to Y$ רציפה על a ותהא $g:f(X)\to Z$ רציפה על $f(a)$ אזי $g\circ f$ רציפה על a.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קומפקטית.

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(כל $f\in C(X,\mathbb{R})$ הינה חסומה).

משפט קנטור: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.

משפט ויירשטראס: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה אזי קיימים $a,b\in X$ עבורם $f(X)=[f(a),f(b)]$.

מסקנה: תהיו $\nu,\eta:X\to\mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $c,C\in\mathbb{R}$ עבורם $c\nu\le\eta\le C\nu$.

מסילה: פונקציה $\gamma\in C([a,b],X)$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma:[a,b]\to X$ עבורה $\gamma(a)=\gamma(b)$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma:[a,b]\to X$ עבורה $\gamma\restriction_{(a,b]},\gamma\restriction_{[a,b)}$ חח"ע.

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma:[0,1]\to X$ מסילה אזי $-\gamma:[0,1]\to X$ המוגדרת $-\gamma(t)=\gamma(1-t)$.

מרחב מטרי קשיר מסילתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל $x,y\in X$ קיימת עקומה $\gamma:[0,1]\to X$ המקיימת $\gamma(0)=x$ וכן $\gamma(1)=y$.

משפט תכונת דרבו: יהי (X,d) מרחב מטרי קשיר מסילתית תהא $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה יהיו $x,y\in X$ ותהא $c\in\mathbb{R}$ עבורה $f(x)<c<f(y)$ אזי קיים $z\in X$ עבורו $f(z)=c$.

תחום: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה מסילתית.

מרחב מטרי קשיר: מרחב מטרי (X,d) עבורו הקבוצות היחידות שפתוחות וסגורות במקביל הן $X,\varnothing$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קשיר מסילתית)$\Longleftarrow$((X,d) קשיר).

טענה: תהא $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ אזי A רציפה.

טענה: תהיינה $A,B\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$.

מסקנה: תהא $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left\|A^k\right\|\le\|A\|^k$.

משפט: תהא $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ ונגדיר $f\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ כך $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}x$ אזי f רציפה.

אקספוננט: תהא $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ נגדיר $e^A\in M_n(\mathbb{R})$ כך $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$.

מסקנה: תהא $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי e^A מתכנסת וכן $\left\|e^A\right\|\le e^{\|A\|}$.

הגדרה: תהא $\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ מסילה אזי נגדיר מסילה $\Phi\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ כך $\Phi\eta=\begin{cases}\frac{1}{2}(\eta_2(4t),\eta_1(4t)) & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-1),\eta_2(4t-1))+\left(0,\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-2),\eta_2(4t-2))+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}(-\eta_2(4t-3),-\eta_1(4t-3))+\left(1,\frac{1}{2}\right) & \frac{3}{4}\le t\le 1\end{cases}$.

נורמה של עקומה: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי $\|\gamma\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}\|\gamma(t)\|$.

מרחק של עקומות: תהיינה $\gamma,\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומות אזי $d(\gamma,\eta)=\|\gamma-\eta\|_\infty$.

טענה: תהיינה $\gamma,\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומות אזי $d(\Phi\gamma,\Phi\eta)=\frac{1}{2}d(\gamma,\eta)$.

עקום פביאנו: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי $\gamma_\infty=\lim_{n\to\infty}\Phi^n\gamma$.

טענה: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי γ_∞ רציפה וכן $\gamma_\infty([0,1])$ קומפקטית.

משפט: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי $\gamma_\infty([0,1])$ צפופה ב־$[0,1]^2$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל אזי (Y,ρ) קומפקטי וכן f^{-1} רציפה.

טענה: לא קיימת פונקציה רציפה חח"ע ועל ב־$[0,1]\to[0,1]^2$.

עקומה פוליגונלית: עקומה לינארית למקוטעין.

אורך עקומה פוליגונלית: תהא γ עקומה פוליגונלית בעלת חלקים לינאריים בקטעים $[\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)]$ אזי $L(\gamma)=\sum_{i=1}^{M}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$.

מסקנה: תהא γ עקומה פוליגונלית אזי $L(\gamma)=\int_0^1\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

עקומה בעלת אורך ביחס לחלוקה: תהא Π חלוקה של $[a,b]$ אזי עקומה γ עבורה קיים חסם עליון לאורך של עקומה פוליגונלית בין הנקודות $\{\gamma(t_i)\}$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^m)$ עקומה אזי $L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

כדור פתוח: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|<r\}$.

כדור סגור: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|\le r\right\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|=r\right\}$.

תיבה פתוחה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j<x_j<b_j\right\}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{\Pi}_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\le x_j\le b_j\right\}$.

נקודה פנימית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r\left(x\right)\subseteq M$.

פנים של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\{x$ נקודה פנימית של $M\mid x\in M\}=\overset{\circ}{M}=\operatorname{int}\left(M\right)$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $M=\overset{\circ}{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.B_r\left(x\right)\subseteq\mathbb{R}^n\backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r\left(x\right)\cap M=\{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\{x$ נקודת שפה של $M\mid x\in M\}=\partial M$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M\subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{M}=\overset{\circ}{M}\cup\partial M$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (x נקודה חיצונית של M)$\Longleftrightarrow$(x נקודה פנימית של $\mathbb{R}^n\backslash M$).

מסקנה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (M פתוחה)$\Longleftrightarrow$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.M\subseteq B_r\left(0\right)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$).

סימון: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{(k)}=a\left(k\right)$.

גבול: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k\to\infty}\left\|a^{(k)}-L\right\|=0$ אזי $\lim_{k\to\infty}a^{(k)}=L$.

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x\to a}$ וכן $\xrightarrow[x\to a]{}$.

משפט: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right)\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_j\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a^{(m)}-a^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a_j^{(m)}-a_j^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $a\in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_i)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty}a^{(k_i)}\in K$).

הערה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f=\langle f_1,\ldots,f_m\rangle$ כאשר $f_i:A\to\mathbb{R}$.

גבול: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ תהא $a\in\mathbb{R}^n$ ותהא $L\in\mathbb{R}^m$ אזי

- היינה: אם $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{(k)}\to a\right)\Longrightarrow\left(f\left(x^{(k)}\right)\to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A\backslash\{a\}.\|x-a\|<\delta\Longrightarrow\|f\left(x\right)-L\|<\varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in A$ עבורה $f\left(a\right)=\lim_{x\to a}f\left(x\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי (f רציפה נקודתית עבור כל $b\in B$)$\Longleftrightarrow\left(f\in C\left(B\right)\right)$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי $\left(f\in C\left(b\right)\right)\Longleftrightarrow\left(f_1,\ldots,f_m\in C\left(b\right)\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f:A\to B$ הפיכה עבורה f,f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$.

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ כך $\gamma\left(t\right)=\left(1-t\right)a+tb$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b]=\operatorname{Im}\left(\gamma\right)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a,b\in M.[a,b]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r\left(a\right),\overline{B}_r\left(a\right)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to M$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\gamma\left(1\right)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_0}\left(\mathbb{R}^n\right)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\biguplus\mathcal{A}=M$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f\left(a\right)<f\left(b\right)$ מתקיים $\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]\subseteq f\left(\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ קשירה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ויירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f\left(\mathcal{K}\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\left\Vert x-y\right\Vert<\delta\Longrightarrow\left\Vert f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\Vert<\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^m\right)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $\left(\upsilon\left(a\right)\geq0\right)\wedge\left(\left(\upsilon\left(a\right)=0\right)\iff\left(a=0\right)\right)$.
- הומוגניות: $\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon\left(a+b\right)\leq\upsilon\left(a\right)+\upsilon\left(b\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.\upsilon\left(x\right)\leq c\left\Vert x\right\Vert$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon\in C\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.c\left\Vert x\right\Vert\leq\upsilon\left(x\right)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\leq\upsilon\leq b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon,\left\Vert\cdot\right\Vert$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\upsilon\left(x^{(k)}\right)\to0\right)\iff\left(\rho\left(x^{(k)}\right)\to0\right)$.

נורמת ℓ_p: עבור $p\in\mathbb{N}_+$ נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_p=\left(\sum_{i=1}^n\left|v_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_∞: נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\left|v_i\right|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(a)\\ \vdots\\ \gamma_m'(a)\end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert\right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)\Longrightarrow f\in C\left(a\right)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\mathrm{grad}f\left(a\right)=\left[L\right]_{\mathrm{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f\left(a\right)=\mathrm{grad}f\left(a\right)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hx_i)-f(a)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $f'_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)=\left(\nabla f\left(a\right)\right)_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(a\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(a\right)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי ($\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)$ קיימת לכל i)$\not\Longleftarrow$($f\in\mathcal{D}\left(a\right)$).

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)\iff\left(\forall i\in\left\{1\ldots m\right\}.f_i\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\mathcal{D}_f\left(a\right)=\begin{pmatrix}-\nabla f_1(a)-\\ \vdots\\ -\nabla f_m(a)-\end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_f\left(a\right)\right)_{i,j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי

- אם $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $f\in C(a)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}(a)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}(a)$.
- $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)$.
- תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$ וכן $\mathcal{D}_f\in C(\mathcal{U})$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות אזי $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$ אזי $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי $\left(f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\nabla f(a)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\mathcal{D}_f(a)\cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ קשירה מסילתית)$\Longleftrightarrow$($\mathcal{U}$ קשירה פוליגונלית).

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)\Longleftrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)$.

טענה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)\Longleftrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)$.

סימון: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in\{1\ldots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_i}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\{1\ldots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהיו $i,j\in\{1\ldots n\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_i},\frac{\partial f}{\partial x_j}\in C^1(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ אזי $|K|=\sum_{i=1}^n K_i$ וכן $\partial x^K=\partial x_1^{K_1}\ldots\partial x_n^{K_n}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_f\in C^k(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{|K|}f}{\partial x^K}(a)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\|Av\|_{\text{st}}\le\|A\|_{\text{st}}\cdot\|v\|_{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^k$ עבורן $f\in\mathcal{D}(a)$ וכן $g\in D(f(a))$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}(a)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}(a)=\mathcal{D}_g(f(a))\cdot\mathcal{D}_f(a)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mid(x\in\mathcal{U})\wedge(f(x)=y)\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $\Pi_c=\{x\in\mathcal{U}\mid f(x)=c\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $y-f(a)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $N_a=(-\nabla f(a),1)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a)\perp\Pi_{f(a)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f(x)\ge f(a)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f(x)\le f(a)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f(a)=0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in[m]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_i.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in[m]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_i.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_f(a)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_f(a)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ נגדיר $\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^n\\|V|=k}}\binom{k}{V_1,\ldots,V_n}\prod_{i=1}^n(a_i-b_i)^{V_i}\frac{\partial^k}{\partial x^V}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\left(\sum_{i=1}^n(a_i-b_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^k$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $f\in C^{k+1}\left(a\right)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{i}f\left(a\right)+\frac{1}{\left(k+1\right)!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{k+1}f\left(c\right)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_{f}\right)_{i,j}=f''_{x_{i},x_{j}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=f\left(a\right)+\left(x-a\right)^{t}H_{f}\left(c\right)\left(x-a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- ($H_{f}\left(a\right)$ חיובית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מינימום).
- ($H_{f}\left(a\right)$ שלילית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)>0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)<0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f'\left(x\right)=-\frac{F'_{x}\left(x,f\left(x\right)\right)}{F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)}$ על I_{x}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f\left(x\right)\in C^{k}\left(I_{x},I_{y}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(x\right)=-\frac{F'_{x_{i}}\left(x,f\left(x\right)\right)}{F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)}$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times\left(n+m\right)}{\mathcal{D}_{f}\left(a\right)}=\left(\underset{m\times n}{F'_{x}\left(a\right)},\underset{m\times m}{F'_{y}\left(a\right)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y_{1}}\ldots I_{y_{m}}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ ולכל $j\in\left[m\right]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_{j}}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)$ הפיכה יהיו $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y_{1}}\ldots I_{y_{m}}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ ולכל $j\in\left[m\right]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_{j}}$ ותהא $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=-F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)^{-1}\cdot F'_{x}\left(x,f\left(x\right)\right)$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $\nabla F\left(a\right)\neq0$ אזי משוואת המישור המשיק למשטח $\left\{ F=0\right\}$ הינו $\sum_{i=1}^{n}F'_{x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

דיפאומורפיזם C^{k}: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^{k}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathbb{R}^n\supseteq\mathcal{U}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $\mathcal{D}_f\left(a\right)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x\right)\right)=\mathcal{D}_f\left(x\right)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $A\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

- (A פתוחה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ קומפקטית).
- אם $\partial A\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\partial\left(f\left(A\right)\right)=f\left(\partial A\right)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ עבורה $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_f\left(a\right)\right)=m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g\left(a\right)=0$ וכן $\nabla f\left(a\right)\in\operatorname{span}\left\{\nabla g_i\left(a\right)\right\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g\left(a\right)=0$ וכן $\left\{\nabla g_i\left(a\right)\right\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\operatorname{sols}\left(g\right)\cap\mathcal{O}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $g\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ נגדיר $L\in C^1\left(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)$ כך $L\left(x_1\ldots x_n,\lambda_1,\ldots\lambda_m\right)=f\left(x_1\ldots x_n\right)-\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i\left(x_1\ldots x_n\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\lambda\in\mathbb{R}^m$ עבורה $\left(a,\lambda\right)$ נקודה קריטית של L).

דרגה של פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ אזי $\operatorname{rank}\left(f\left(a\right)\right)=\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_f\left(a\right)\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ עבורה $\forall x\in\mathcal{U}.\operatorname{rank}\left(f\left(x\right)\right)=k$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a קיימת $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של $f\left(a\right)$ קיימים דיפאומורפיזמים $\varphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ וכן $\psi:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^m$ וקיימת $\mathcal{W}\subseteq\varphi\left(\mathcal{O}\right)$ סביבה של $\varphi\left(a\right)$ עבורם $\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)=\left(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0\right)$ על $\mathcal{W}$.

הלמה של הדמר: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה קמורה של 0 יהי $p\geq1$ ותהא $f\in C^p\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ עבורה $f\left(0\right)=0$ אזי קיימת $g\in C^{p-1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $g\left(0\right)=\nabla f\left(0\right)$ וכן $f\left(x\right)=\sum_{i=1}^n x_i g\left(x\right)$.

הלמה של מורס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^3\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a וגם $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של 0 וכן דפיאומורפיזם $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ המקיים $\left(f\circ g\right)\left(x\right)-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^k x_i^2-\sum_{i=k+1}^n x_i^2$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $P_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in\left[n\right].a_j\leq x_j\leq b_j\right\}$.

תיבה מנוונת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $\exists i\in\left[n\right].a_i=b_i$ אזי $P_{a,b}$.

חלוקה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ לכל $i\in\left[n\right]$ תהיינה $\left\{t_i^0,\ldots,t_i^{\ell_i}\right\}$ חלוקה של $\left[a_i.b_i\right]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^n\left[t_i^{m_i},t_i^{m_i+1}\right]\mid\forall i\in\left[n\right].m_i\in\left[\ell_i-1\right]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $V\left(P\right)=\operatorname{Vol}\left(P\right)=\prod_{i=1}^n\left(b_i-a_i\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\left\{A_1,\ldots,A_k\right\}$ חלוקה של P אזי $\operatorname{Vol}\left(P\right)=\sum_{i=1}^k\operatorname{Vol}\left(A_i\right)$.

הערה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $P_{a,b}$ תיבה מנוונת אזי $\operatorname{Vol}\left(P_{a,b}\right)=0$.

סכום רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ תהא $\Pi=\left\{A_1,\ldots,A_k\right\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)}\in A_j$ אזי $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)=\sum_{j=1}^k f\left(x^{(j)}\right)\operatorname{Vol}\left(A_j\right)$.

קוטר קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $d\left(M\right)=\sup_{x,y\in M}\left\|x-y\right\|$.

מדד העדינות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi=\left\{A_1,\ldots,A_k\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i\leq i\leq k}d\left(A_i\right)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אזי $\int_P f\left(x\right)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f\in R\left(P\right)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\left\{A_1,\ldots,A_n\right\}$ חלוקה אזי $\overline{S}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^n\sup_{P_j}\left(f\right)\operatorname{Vol}\left(P_j\right)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\left\{A_1,\ldots,A_n\right\}$ חלוקה אזי $\underline{S}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^n\inf_{P_j}\left(f\right)\operatorname{Vol}\left(P_j\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi\right)\leq S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi_1\right)\leq\underline{S}\left(f,\Pi_2\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_2\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_1\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi_1\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_2\right)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}\left(f\right)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{S}\left(f,\Pi\right)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{S}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\overline{I}\left(f\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(P\right)\right)\iff\left(\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ חסומה אזי $\int_{P}f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\text{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^{n}\text{Vol}\left(P_{a,b}\right)$.

טענה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.

מסקנה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות ותהא $P\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\right)\le\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.

טענה: יהיו P_{1},P_{2} תיבות אזי $P_{1}\cap P_{2}$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\backslash\text{int}\left(P\right)\right)=0$.

קבוצה זניחה: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}P_{i}$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\text{זניחה }E\right\}$.

טענה: $\varnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\{ a\right\} \in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהיינה $\left\{ E_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}E_{i}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $A\subseteq E$ אזי $A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: $\mathbb{Q}^{n}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה לא מנוונת אזי $P\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

מסקנה: תהא $M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\text{int}\left(M\right)=\varnothing$.

טענה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה ותהא $f\in C\left(P,\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_{f}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_{f}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\left\{ C_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ בעלות אורך צלע $2^{-e_{i}}$ עבור $e_{i}\in\mathbb{N}$ עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_{i}$.

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, קבוצת קנטור זניחה.

תנודה של פונקציה בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי $\omega\left(f,a\right)=\lim_{\delta\to0^{+}}\omega\left(f,B_{\delta}\left(a\right)\cap A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\iff$($\omega\left(f,a\right)=0$).

למה של קנטור: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית יהי $M>0$ ותהא $f:K\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall k\in K.\omega\left(f,k\right)\le M$ אזי $\forall x\in K.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\omega\left(f,B_{\delta}\left(x\right)\cap K\right)<\omega_{0}+\varepsilon$.

כמעט לכל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E\subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A\backslash E$.

סימון: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}=\left\{ x\in P\mid\omega\left(f,x\right)\ge\varepsilon\right\}$.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}$ קומפקטית.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left\{ A\in\Pi\mid\left(A\cap B_{f,\frac{1}{k}}\ne\varnothing\right)\wedge\left(\omega\left(f,A\right)\ge\frac{1}{2k}\right)\right\}$ כיסוי של $B_{f,\frac{1}{k}}$.

קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\iff$($f\in R\left(P\right)$).

קבוצה מדידת ז'ורדן: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה עבורה ∂E זניחה.

טענה: תהיינה $E_{1},E_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי

- ∂E_{1} סגורה.
- $\partial\left(E_{1}\backslash E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cup E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cap E_{2}\right)\subseteq\partial E_{1}\cup\partial E_{2}$.

סימון: $J\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\text{ז'ורדן }E\right\}$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J$ אזי $A\backslash B,A\cup B,A\cap B\in J$.

פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}:\mathbb{R}^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ כך $\chi_{A}\left(x\right)=\begin{cases} 1 & x\in A\\ 0 & x\notin A \end{cases}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}\in C\left(\text{int}\left(A\right)\right)$ וכן $\chi_{A}\in C\left(\mathbb{R}^{n}\backslash A\right)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $A\subseteq P$ חסומה ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\cdot\chi_{A}\in R\left(P\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{P}f\cdot\chi_{A}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה תהיינה $P_{1},P_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבות סגורות עבורן $A\subseteq P_{1},P_{2}$ ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ אזי
- $\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{1}\right)\right)\iff\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{2}\right)\right)$.
- $\int_{P_{1}}f\cdot\chi_{A}=\int_{P_{2}}f\cdot\chi_{A}$.

מידה/נפח של תיבה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $V\left(A\right)=\text{Vol}\left(A\right)=\int_{A}\mathrm{d}x$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ אזי
- יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $af+bg\in R\left(A\right)$ וכן $\int_{A}\left(af+bg\right)=a\int_{A}f+b\int_{A}g$.
- נניח כי $f\geq0$ אזי $\int_{A}f\geq0$.
- נניח כי $f\geq g$ אזי $\int_{A}f\geq\int_{A}g$.
- נניח כי $m\leq f\leq M$ אזי $m\text{Vol}\left(A\right)\leq\int_{A}f\leq M\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $f\in R\left(A\right)\cap R\left(B\right)$ אזי $f\in R\left(A\cap B\right)$ וכן $f\in R\left(A\cup B\right)$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן $\text{Vol}\left(A\cap B\right)=0$ אזי $\int_{A\cup B}f=\int_{A}f+\int_{B}f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תחום ותהא $f\in C\left(A,\mathbb{R}\right)$ אזי $\exists c\in A.\int_{A}f=f\left(c\right)\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $f\in R\left(A\right)$ אזי $\left|f\right|\in R\left(A\right)$ וכן $\left|\int_{A}f\right|\leq\int_{A}\left|f\right|$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ כמעט על כל A אזי $\int_{A}f=\int_{A}g$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\int_{\text{int}\left(A\right)}f=\int_{A}f=\int_{\overline{A}}f$.

טענה: תהיינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\bigcup_{i=1}^{k}A_{i},\bigcap_{i=1}^{k}A_{i}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

מסקנה: תהיינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן לכל $i\neq j$ מתקיים $\text{Vol}\left(A_{i}\cap A_{j}\right)=0$ אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(A_{i}\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right)\iff\left(A+a\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right)$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Vol}\left(A\right)=\text{Vol}\left(A+a\right)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu:J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\to\mathbb{R}_{\geq0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu\left(\left[0,1\right]^{n}\right)=1$ אזי $\nu=\text{Vol}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה אזי $T\left(A\right)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $T\left(\partial A\right)=\partial\left(T\left(A\right)\right)$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ זניחה וחסומה אזי $T\left(E\right)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $T\left(A\right)\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ וכן $\text{Vol}\left(T\left(A\right)\right)=\text{Vol}\left(A\right)$.

משפט פוביני: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ עבורה $\iint_{P\times Q}f$ קיים אזי $\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ קיימים ובפרט $\iint_{P\times Q}f=\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ אזי $\int_{Q}f\left(a,y\right)\mathrm{d}y$ קיים כמעט לכל $a\in P$.

מסקנה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_{1},\varphi_{2}:B\to\mathbb{R}$ תהא $A=\left\{ \left(x,y\right)\in B\times\mathbb{R}\mid\varphi_{1}\left(x\right)\leq y\leq\varphi_{2}\left(x\right)\right\}$ ותהא $f\in R\left(A\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{B}\int_{\varphi_{1}\left(x\right)}^{\varphi_{2}\left(x\right)}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תהא $A\subseteq\prod_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{ y\right\} \right)\in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ כמעט לכל $y\in P_{n}$ ובפרט $\text{Vol}\left(A\right)=\int_{P_{n}}\text{Vol}\left(A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{ y\right\} \right)\right)\mathrm{d}y$.

שטח: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $S\left(D\right)=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי $m\left(D\right)=\iint_{D}\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מומנט מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי
- מומנט מסה לפי ציר x: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}y\cdot\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- מומנט מסה לפי ציר y: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}x\cdot\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\frac{M_{y}\left(D\right)}{m\left(D\right)},\frac{M_{x}\left(D\right)}{m\left(D\right)}\right)$.

נפח: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ אזי $V\left(E\right)=\iiint_{E}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי $m\left(E\right)=\iiint_{E}\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מומנט מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ z=0\right\}$: $M_{xy}\left(E\right)=\iiint_{E}z\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ y=0\right\}$: $M_{xz}\left(E\right)=\iiint_{E}y\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ x=0\right\}$: $M_{yz}\left(E\right)=\iiint_{E}x\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מרכז המסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$.

מקבילון: יהיו $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Par}(v_1 \dots v_n) = \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \forall i \in [n] . \alpha_i \in [0,1]\right\}$.

טענה: יהיו $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ אזי מתקיים $\text{Vol}(\text{Par}(v_1 \dots v_n)) = \left|\det\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix}\right|$.

תומך: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ אזי $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\}}$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $E \subseteq A$ אזי

- (E זניחה)$\Longleftarrow$($\varphi(E)$ זניחה).
- ($(\text{Vol}(E) = 0) \wedge (\overline{E} \subseteq A)$)$\Longleftarrow$($(\text{Vol}(\varphi(E)) = 0) \wedge \left(\overline{\varphi(E)} \subseteq B\right)$).
- (($\overline{E} \subseteq A$)$\wedge$(E ז'ורדן))$\Longleftarrow$(($\overline{\varphi(E)} \subseteq B$)$\wedge$($\varphi(E)$ ז'ורדן)).

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R(B)$ אזי $(f \circ \varphi)|\det \mathcal{D}_\varphi| \in R(A)$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R(B)$ אזי $(f \circ \varphi)|\varphi'| \in R(A)$ ובפרט $\int_B f = \int_A f(\varphi(t))|\varphi'| \, \text{d}t$.

דיפאומורפיזם אלמנטרי: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ פתוחות וחסומות אזי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם עבורו קיימת $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת $\varphi(x) = (x_1, \dots, \psi(x_i), \dots x_n)$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא $f \in R(B)$ אזי $\int_B f = \int_A f(\varphi(t))|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \, \text{d}t$.

טענה: תהיינה $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהיו $\varphi : B \to C$, $\psi : A \to B$ דיפאומורפיזם אלמנטריים ותהא $f \in R(A)$ אזי $\int_C f = \int_A f((\varphi \circ \psi)(t))|\det \mathcal{D}_{\varphi \circ \psi}(t)| \, \text{d}t$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ויהי $a \in A$ אזי קיימת $\mathcal{O} \subseteq A$ סביבה של a וכן $\psi_1 \dots \psi_m$ דיפאומורפיזם אלמנטריים עבורם $\varphi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_m$ על $\mathcal{O}$.

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R(B)$ אזי $\int_B f = \int_A f(\varphi(t))|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \, \text{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם תהא $E \subseteq A$ עבורה $\overline{E} \subseteq A$ ותהא $f \in R(\varphi(E))$ אזי $(f \circ \varphi)|\det \mathcal{D}_\varphi| \in R(E)$ ובפרט $\int_{\varphi(E)} f = \int_E f(\varphi(t))|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \, \text{d}t$.

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi : A \to B$ תהיינה $E \subseteq A$, $S \subseteq B$ זניחות עבורן $A \backslash E, S \backslash B$ פתוחות וכן $\varphi(A \backslash E) = S \backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על $A \backslash E$ ותהא $f \in R(S)$ אזי $(f \circ \varphi)|\det \mathcal{D}_\varphi| \in R(A \backslash E)$ ובפרט $\int_B f = \int_{A \backslash E} f(\varphi(t))|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \, \text{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi : A \to B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E \subseteq A$, $S \subseteq B$ זניחות עבורן $A \backslash E, S \backslash B$ פתוחות וכן $\varphi(A \backslash E) = S \backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם על $A \backslash E$ ותהא $f \in R(S)$ אזי $(f \circ \varphi)|\det \mathcal{D}_\varphi| \in R(A)$ ובפרט $\int_B f = \int_A f(\varphi(t))|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \, \text{d}t$.

קואורדינטות קוטביות/פולריות: יהי $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ אזי $(\rho, \phi) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi]$ עבורן $x = \rho\cos(\phi)$ וכן $y = \rho\sin(\phi)$.

טענה: תהא $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי $|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| = \rho$.

קואורדינטות גליליות: יהי $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ אזי $(\rho, \phi, \iota) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi] \times \{z\}$ עבורן $x = \rho\cos(\phi)$ וכן $y = \rho\sin(\phi)$.

טענה: תהא $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי $|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| = \rho$.

קואורדינטות כדוריות: יהי $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ אזי $(\rho, \phi, \theta) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ עבורן $x = \rho\sin(\theta)\cos(\phi)$ וכן $y = \rho\sin(\theta)\sin(\phi)$ וכן $z = \rho\cos(\theta)$.

טענה: תהא $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי $|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| = \rho^2\sin(\theta)$.

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר z בקואורדינטות גליליות אזי $\text{Vol}(E) = 2\pi\iint_S \rho \text{d}\rho \text{d}z$.

מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ עבורן $f \le g$ תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סביב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}(E) = \pi\int_a^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right) \text{d}x$.

משפט פפוס: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ יהי $c \in \mathbb{R}^2$ מרכז המסה של S ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}(E) = 2\pi R_c \cdot \text{Vol}(S)$ באשר R_c רדיוס סיבוב c.

מיצוי ז'ורדן: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(E_k)_{k=1}^\infty$ סדרת קבוצות מדידות ז'ורדן עולה עבורה $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = E$.

טענה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ ויהי $(E_k)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E אזי $\lim_{k\to\infty} \text{Vol}(E_k) = \text{Vol}(E)$.

מסקנה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ יהי $(E_k)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E ותהא $f \in R(E)$ אזי $\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f = \int_E f$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ עבורם לכל $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E מתקיים $\forall k \in \mathbb{N}.f \in R(E_k)$ וכן $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$ קיים ושווה אזי $\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$.

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ של E המקיימת $\forall k \in \mathbb{N}.f \in R(E_k)$ וכן $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$ קיים אזי $\int_E f$ מתכנס.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} \mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$.

משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה $f, g : E \to \mathbb{R}$ עבורן $|f| \le g$ וכן $\forall A \in \mathcal{P}(E) \cap J(\mathbb{R}^n).(f \in R(A)) \iff (g \in R(A))$ וכן $\int_E g$ מתכנס אזי $\int_E f, \int_E |f|$ מתכנסים.

מסקנה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ אזי ($\int_E |f|$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E f$ מתכנס).

טענה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהא $f \in R(E)$ אזי $\forall \varepsilon > 0.\forall A \subseteq E.\left|\int_A f\right| > \frac{1}{2}\int_E |f| - \varepsilon$.

משפט: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא $f : E \to \mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי ($\int_E f$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E |f|$ מתכנס).

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה $f, g : E \to \mathbb{R}$ עבורן $\int_E f, \int_E g$ מתכנסים אזי $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$.

הערה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה E בעלת מיצוי ז'ורדן.

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f : B \to \mathbb{R}$ עבורה לכל $E \subseteq B$ ז'ורדן וקומפקטית מתקיים $f \in R(E)$ וכן $\int_B f$ מתכנס אזי $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \mathrm{d}t$.

פונקציית גאמא: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} \mathrm{d}x$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\Gamma(n) = (n-1)!$.

טענה: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma(t)$ מתכנס.

פונקציית בטא: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t, s) = \int_0^{\infty} x^{t-1} (1-x)^{s-1} \mathrm{d}x$.

טענה: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t, s)$ מתכנס.

טענה: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ ותהא $t_n \in [c, d]^{\mathbb{N}}$ עבורה $t_n \to \ell$ אזי $\forall x \in [a, b].f(x, t_n) \xrightarrow{u} f(x, \ell)$.

טענה: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ אזי $\int_a^b f(x, t) \mathrm{d}x \in C([c, d])$.

טענה: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a, b] \times [c, d])$ אזי $\int_a^b f(x, t) \mathrm{d}x \in C^1([c, d])$ וכן $\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(x, t) \mathrm{d}x\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \mathrm{d}x$.

משפט: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a, b] \times [c, d])$ ותהיינה $\alpha, \beta \in C^1([c, d], [a, b])$ אזי מתקיים $\frac{d}{dt}\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) \mathrm{d}x\right) = f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \mathrm{d}x$.

מסקנה: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t, s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathrm{Vol}(B_1^n(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

סימפלקס: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i \in [n].x_i \ge 0) \wedge (\sum_{i=1}^n x_i \le 1)\}$.

טענה נוסחת דירכלה: יהיו $p_1 \dots p_n > 0$ אזי $\int \cdots \int_{\Delta_n} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1}\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)}$.

מסקנה: יהיו $p_1 \dots p_n > 0$ ויהיו $\gamma_1 \dots \gamma_n > 0$ אזי $\int \cdots \int_{\substack{x_1, \dots x_n \ge 0 \\ \sum x_i^{\gamma_i} \le 1}} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1}\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \gamma_i} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{p_i}{\gamma_i}\right)}{\Gamma\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\gamma_i}\right)}$.

טענה: יהיו $p_1 \dots p_n > 0$ ותהא $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד אזי $\int \cdots \int_{\Delta_n} \psi(x_1 \dots x_n) \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1}\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)} \int_0^1 \psi(u) u^{(\sum p_i) - 1} \mathrm{d}u$.

יריעה C^m-k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in \mathcal{M}$ קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f \in C^m(G, \mathbb{R}^{n-k})$ עבורה $\Gamma_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in \mathcal{M}$ קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f \in C^{\infty}(G, \mathbb{R}^{n-k})$ עבורה $\Gamma_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהיינה A, B קבוצות אזי $C^{\omega}(A, B) = \{f : A \to B \mid \text{אנליטית מקומית } f\}$.

יריעה אנליטית k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in \mathcal{M}$ קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f : G \to \mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

עקומה: יריעה $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ שהינה חד־מימדית.

משטח: יריעה $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ שהינה דו־מימדית.

היפר־משטח/על־משטח: יריעה $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ שהינה $n-1$ מימדית.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה היפר־משטח חלק.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ פתוחות עבורן $\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}_\alpha$ יריעה לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m־יריעה k־מימדית ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r\in C^m(G,\mathbb{R}^n)$ עבורה $r(G)=\mathcal{M}$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r\in C^1(G,\mathbb{R}^n)$ עבורה לכל $x\in G$ מתקיים $\mathrm{rank}(\mathcal{D}_r(x))=k$.

הומאומורפיזם: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f\in C(A,B)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C(B,A)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r:G\to A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\{\mathcal{U}_\alpha\}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ פתוחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ עבורן $\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן קיימות $\{G_\alpha\}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha\subseteq C^m(G_\alpha,\mathbb{R}^n)$ עבורן $r_\alpha(G_\alpha)=\mathcal{U}_\alpha$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{U}$ המקיימת $(f_1\ldots f_{n-k})(x)=0$ מתקיים כי $\{\nabla f_i(x)\}$ בת״ל.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1\ldots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי ($\{f_1\ldots f_{n-k}\}$ מערכת משוואות רגולרית)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{U}$ עבורו $(f_1\ldots f_{n-k})(x)=0$ מתקיים $\mathrm{rank}\left(\mathcal{D}_{(f_1\ldots f_{n-k})}(x)\right)=n-k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m־יריעה k־מימדית ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{M}=\{(f_1\ldots f_{n-k})=0\}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\right\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $(0,0,0)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה אזי $f:I\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f(t,\rho)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\cos(\rho)\\\gamma_1(t)\sin(\rho)\\\gamma_2(t)\end{pmatrix}$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\mathrm{Im}(\gamma)$ אזי משטח הסיבוב f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\mathrm{Im}(f)$.

הטלה סטריאוגרפית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ נגדיר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n$ כך $f(x)=-\frac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\|x\|^2-1}{2}\right)$.

טורוס: משטח הסיבוב של $\mathbb{S}^1$.

סימון: נסמן טורוס בעזרת $\mathbb{T}^2$.

קו־אוריינטציה של יריעה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח אזי $N\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{M}.(|N(x)|=1)\wedge(N(x)\perp x)$.

למה: טבעת מוביוס אינו משטח קו־אוריינטבילי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^3$ אזי $a\times b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $(u\times v)\perp v$ וכן $(u\times v)\perp u$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $(u\in\mathrm{span}(v))\iff(u\times v=0)$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\det(u,v,u\times v)=\|u\times v\|^2\geq 0$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\|v\times u\|=\|v\|\|u\|\sin(\angle(v,u))$.

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ממימד k: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה המקיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן קיים $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם עבורו $f(A)=f(\mathcal{U})\cap\left(\mathbb{R}^k\times\{0_{n-k}\}\right)$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה אזי פרידיקט P עבורו לכל $a\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה P מתקיימת על $A\cap\mathcal{U}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ התב"ש
- $\mathcal{M}$ יריעה k-מימדית.
- $\mathcal{M}$ מקומית גרף של פונקציה $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל-$\mathbb{R}^k$.

מסקנה: תהא $r:G\to\mathbb{R}^n$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a\in G$ קיימת סביבה $W\subseteq\mathbb{R}^n$ של $(a,0_{n-k})$ וקיים דיפאומורפיזם $s:W\to s(W)$ עבורו $r=s_{\restriction_{W\cap(G\times 0_{n-k})}}$.

הערה: יריעה 0-מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq A$ אזי ($\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל-A)$\Longleftrightarrow$($\forall x\in\mathcal{U}.\exists r>0.B_r(x)\cap A\subseteq\mathcal{U}$).

קבוצה קשירה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל-A מתקיים $\mathcal{U}\in\{A,\varnothing\}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי (A קשירה)$\Longleftrightarrow$(לא קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset A$ פתוחות יחסית ל-A עבורן $A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\}$).

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $f:A\to B$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\mathcal{U}\subseteq B$ פתוחה יחסית ל-B מתקיים כי $f^{-1}(\mathcal{U})$ פתוחה יחסית ל-A).

מפה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^k$ הפיכה עבורה $\varphi(\mathcal{U})$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטריזציה טובה אזי $(\mathcal{U},\varphi)$.

אטלס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית אזי קבוצה של מפות $\mathcal{A}$ עבורה $\mathcal{M}=\bigcup\{\mathcal{C}_1\mid\mathcal{C}\in\mathcal{A}\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית ותהא $r:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r(\mathcal{U})$ אזי $\left(r(\mathcal{U}),r^{-1}\right)$ מפה.

המרחב הפרוייקיבי: יהי $n\geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^n=\left\{vv^T\mid v\in\mathbb{S}^n\right\}$.

טענה: יהי $n\geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^n\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ יריעה n מימדית.

העתקת מעבר: תהיינה $(\mathcal{U}_1,\varphi_1),(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ המוגדרת $\varphi_{1,2}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$.

טענה: תהיינה $(\mathcal{U}_1,\varphi_1),(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_i(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2)$ פתוחה עבור $i\in\{1,2\}$.

טענה: תהיינה $(\mathcal{U}_1,\varphi_1),(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}$ דיפאומורפיזם.

פונקציה C^α מיריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מתקיים כי $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α.

הערה: נניח כי $\mathcal{M}$ יריעה C^α אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ הינה לכל היותר מדרגת חלקות C^α.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ אזי (f הינה C^α)$\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית אזי קיים ל-$\mathcal{M}$ אטלס.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית אזי $\dim(\mathcal{M})=k$.

פונקציה C^α בין יריעות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית ותהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה ℓ-מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ הינה C^α.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהא $g\in C^\alpha(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$ אזי $g\circ f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}'')$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ אזי (f הינה C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל $p\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ של p עבורה קיימת $g\in C^\alpha(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ המקיימת $g_{\restriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}=f$).

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ אזי (f הינה C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ של $\mathcal{M}$ ולכל מפה $(\mathcal{V},\psi)$ של $\mathcal{M}'$ מתקיים כי $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α).

דיפאומורפיזם C^α: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה f הפיכה וכן $f,f^{-1}\in C^\alpha$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות דיפאומורפיות אזי $\dim\left(\mathcal{M}\right)=\dim\left(\mathcal{M}'\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהיינה $\left(\mathcal{U},\varphi\right),\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפות באשר $\mathcal{U},\mathcal{V}$ סביבות של p אזי $\text{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)=\text{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)$.

המרחב המשיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $T_p\left(\mathcal{M}\right)=\text{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi(p)}\left(\varphi^{-1}\right)\right)$.

הערה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_p\left(\mathcal{M}\right)\subseteq\mathbb{R}^n$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $\dim\left(T_p\left(\mathcal{M}\right)\right)=\dim\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{f=0\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $T_p\left(\mathcal{M}\right)=\ker\left(\mathcal{D}_p\left(f\right)\right)$.

וקטור מהירות: תהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 אזי $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}$.

טענה: תהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 אזי $\dot{\gamma}\left(t\right)\in T_{\gamma(t)}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_p\left(\mathcal{M}\right)=\left\{\dot{\gamma}\left(0\right)\mid\left(\gamma\in C^1\left(\left(-\varepsilon,\varepsilon\right),\mathcal{M}\right)\right)\wedge\left(\gamma\left(0\right)=p\right)\right\}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהיינה $\gamma_1,\gamma_2:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ מסילות המקיימות $\gamma_i\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma_i}\left(0\right)=v$ אזי $\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_1\right)\right)\left(0\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_2\right)\right)\left(0\right)$.

נגזרת של פונקציה בין יריעות: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_pf:T_p\left(\mathcal{M}\right)\to T_{f(p)}\left(\mathcal{M}'\right)$ המוגדרת $\left(\mathcal{D}_pf\right)\left(v\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma\right)\right)\left(0\right)$ עבור מסילה $\gamma:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma}\left(0\right)=v$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_pf$ העתקה לינארית.

משפט כלל השרשרת: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^\alpha\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהא $g\in C^\alpha\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''\right)$ אזי $\mathcal{D}_p\left(g\circ f\right)=\mathcal{D}_{f(p)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_p\left(f\right)$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_pf\right)\left(v\right)=\mathcal{D}_p\left(f\right)\cdot v$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{F=0\}$ הצגה סתומה רגולרית עבור סביבה של p אזי $T_p\left(\mathcal{M}\right)=\text{span}\left(\left\{\nabla F_1\left(p\right),\ldots,\nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\}^\perp\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_1\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_k\right)\right\}$ בסיס של $T_p\left(\mathcal{M}\right)$.

הערה: נגדיר את $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_1\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_k\right)\right\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $T_p\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $f\in C^\alpha\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p תהא $\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}'$ באשר $\mathcal{V}$ סביבה של $f\left(p\right)$ אזי $\left[\mathcal{D}_pf\right]_{i,j}=\frac{\partial\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)_i}{\partial x_j}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $g\in C^\alpha\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ באשר $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של p וכן $g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}=f$ אזי $\mathcal{D}_pf=\left(\mathcal{D}_pg\right)_{\restriction T_p(\mathcal{M})}$.

נגזרת כיוונית: תהא $f\in C^\alpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $v\in T_p\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_vf=\mathcal{D}_pf\left(v\right)$.

טענה: תהא $f\in C^\alpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m\right)$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה בסביבה של p ותהא $v\in T_p\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_vf=\sum_{i=1}^k v_i\cdot\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}$.

טענה: תהא $f\in C^\alpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $v\in T_p\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}=L_vf$.

וקטור נורמל: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ עבורו $v\perp T_p\left(\mathcal{M}\right)$.

וקטור נורמל יחידה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי וקטור נורמל $v\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ עבורו $\|v\|=1$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{f=0\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $\{f=0\}$ הצגה סתומה רגולרית של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא Γ_f הצגה כגרף בסביבה של p אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p),-1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^2}}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא Γ_f הצגה כגרף של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},-1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

מכפלה מצולבת: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי $v_1\times\ldots\times v_{n-1}=\sum_{i=1}^n\left(-1\right)^{i+1}\det\begin{pmatrix}\left(v_1\right)_1 & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_1\\ \vdots & & \vdots\\ \left(v_1\right)_{i-1} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{i-1}\\ \left(v_1\right)_{i+1} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{i+1}\\ \vdots & & \vdots\\ \left(v_1\right)_n & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_n\end{pmatrix}e_i$.

הערה: יהיו $v_1 \ldots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי בצורה לא פורמלית מתקיים $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = \det \begin{pmatrix} e_1 & | & & | \\ \vdots & v_1 & \ldots & v_{n-1} \\ e_n & | & & | \end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1 \ldots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.

דטרמיננטת גראם: יהיו $v_1 \ldots v_m \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Gamma(v_1 \ldots v_m) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1 \ldots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי

- לכל $i \in [n-1]$ מתקיים $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \perp v_i$.
- $\|v_1 \times \ldots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\Gamma(v_1 \ldots v_{n-1})}$.
- $\det(v_1 \times \ldots \times v_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}) \geq 0$.

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p \in \mathcal{M}$ ותהא r פרמטריזציה טובה בסביבה של p אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}(p) \times \ldots \times \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}(p)$ וקטור נורמל ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא r פרמטריזציה טובה של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \ldots \times \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

סימון: תהא $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ ותהא $\alpha \in \mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f)$.

סימון: תהיינה $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ ותהא $\alpha \in \mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha(f \cdot g) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^k \\ |\beta| \leq |\alpha|}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta(f) \partial^{\alpha-\beta}(g)$.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה אזי $D : C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ המקיימת $\mathcal{D}(f)(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^k \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \cdot \partial^\alpha f(x)$ עבור $m \in \mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $D : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ על $\mathcal{M}$ באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית מתקיים $\mathcal{D}(f \circ \varphi^{-1})(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^k \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \cdot \partial^\alpha(f \circ \varphi^{-1})(x)$ עבור $m \in \mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

שדה וקטורי C^m: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $v : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ עבורה $v(p) \in T_p(\mathcal{M})$ לכל $p \in \mathcal{M}$ וכן לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ מתקיים כי $x \mapsto \mathcal{D}_x \varphi(v(x))$ העתקה C^m.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי $L_v : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ המוגדרת $L_v(f)(x) = L_{v(x)}(f)$ הינה אופרטור דיפרנציאלי.

תומך: תהא $f \in C(\mathcal{M})$ אזי $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \neq 0\}}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה אזי $C_C^\infty(\mathcal{U}) = \{f \in C^\infty(\mathcal{U}) \mid \text{supp}(f) \text{ קומפקטית}\}$.

אופרטור מקומי: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $L : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ עבורה לכל $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה ולכל $f, g \in C_C^\infty$ עבורן $f_{\restriction_\mathcal{U}} = g_{\restriction_\mathcal{U}}$ מתקיים $L(f)_{\restriction_\mathcal{U}} = L(g)_{\restriction_\mathcal{U}}$.

הגדרה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^\infty(\mathcal{W})$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\|f\|_{W,n} = \sup_{\substack{x \in w \\ |\alpha| \leq n}} \|(\partial^\alpha f)(x)\|$.

טענה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^\infty(\mathcal{W})$ תהא $x \in \mathcal{W}$ עבורה $(\partial^\alpha f)(x) = 0$ לכל $|\alpha| \leq n$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\delta \in (0, \varepsilon)$ וכן $g \in C^\infty(\mathcal{W})$ עבורה

- $g_{\restriction_{B_{\frac{\delta}{2}}(x)}} = 0$.
- $g_{\restriction_{\mathcal{W} \setminus B_\delta(x)}} = 0$.
- $\|f - g\|_{W,n} < \varepsilon$.

סימון: יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

משפט פיטרה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $L : C^\infty(\mathcal{M}) \to C^\infty(\mathcal{M})$ לינארית התב"ש

- L אופרטור מקומי.
- לכל $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ מתקיים $\text{supp}(L(f)) \subseteq \text{supp}(f)$.
- L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $x \in \mathcal{V}$ אזי קיימת $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{W}}$ קומפקטית וכן קיים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_C^\infty(\mathcal{W} \backslash \{x\})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \leq C \|f\|_{\mathcal{W},n}$.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^\infty(\mathcal{V}) \to C^\infty(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ פתוחה עבורה קיימים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_C^\infty(\mathcal{W})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \leq C \|f\|_{\mathcal{W},n}$ אזי L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n.

משפט פירוק יחידה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ כיסוי פתוח של X אזי קיימות $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ עבורן

- לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leq \rho_i \leq 1$.

- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\mathrm{supp}\left(\rho_i\right)\subseteq\mathcal{U}_\alpha$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\left|\left\{i\in\mathbb{N}\mid\rho_i\left(\mathcal{W}\right)\neq0\right\}\right|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_i\left(x\right)=1$.

מסקנה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ויהי $L:C^\infty\left(\mathcal{V}\right)\to C^\infty\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי אזי L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $X\subseteq\mathcal{M}$ ויהי $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח ב־$\mathcal{M}$ של X אזי קיימות $\left\{\rho_i\right\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathcal{M}\right)$ עבורן

- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le\rho_i\le1$.
- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\mathrm{supp}\left(\rho_i\right)\subseteq\mathcal{U}_\alpha$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\left|\left\{i\in\mathbb{N}\mid\rho_i\left(\mathcal{W}\right)\neq0\right\}\right|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_i\left(x\right)=1$.

מקבילון: יהיו $v_1\ldots v_k\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Pi\left(v_1\ldots v_k\right)=\left\{\sum_{i=1}^k t_iv_i\mid\forall i\in[k].t_i\in[0,1]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $v_1\ldots v_k\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_k\left(\Pi\left(v_1\ldots v_k\right)\right)=\sqrt{\Gamma\left(v_1\ldots v_k\right)}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_k\in\mathbb{R}^k$ אזי

- $\mathrm{Vol}_k\left(\left(\begin{smallmatrix}v_1\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right),\ldots,\left(\begin{smallmatrix}v_k\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right)\right)=\left|\det\left(v_1\ldots v_k\right)\right|$.
- תהא $T\in O\left(n\right)$ אזי $\mathrm{Vol}_k\left(Tv_1,\ldots,Tv_k\right)=\mathrm{Vol}_k\left(v_1,\ldots,v_k\right)$.

קבוצה זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $\varphi\left(E\cap\mathcal{U}\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^k$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית יהי $\left\{\left(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ אטלס של $\mathcal{M}$ ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ אזי (E זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$(לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי $\varphi_\alpha\left(E\cap\mathcal{U}_\alpha\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^k$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהיינה $\left\{E_i\right\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}\right)$ זניחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ אזי $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}$.

קבוצת נקודות האי־רציפות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אזי $B_f=\left\{x\in\mathcal{M}\mid x\text{ אינה רציפה על }f\right\}$.

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה

- f חסומה.
- $\mathrm{supp}\left(f\right)$ קומפקטי.
- B_f זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן על יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_E$ אינטגרבילית רימן על $\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי (E מדידה ז'ורדן ב־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$($\varphi\left(E\right)$ מדידה ז'ורדן ב־$\mathbb{R}^k$).

פונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathrm{supp}\left(f\right)$ קומפקטית וכן קיימת מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ עבורה $\mathrm{supp}\left(f\right)\subseteq\mathcal{U}$.

קבוצה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $A\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_A$ נוחה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה $\left\{\left(\mathcal{U}_i,\varphi_i\right)\right\}$ של $\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}_i$ נוחה לכל $i\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימות $f_1\ldots f_n:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^n f_i$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה $r_i:G_i\to\mathcal{M}$ פרמטריזציות טובות באשר $G_i\subseteq\mathbb{R}^k$ וכן $i\in\{1,2\}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי

$$\int_{G_1}\left(f\circ r_1\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r_1\right)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r_1\right)\right)}\mathrm{d}q=\int_{G_2}\left(f\circ r_2\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r_2\right)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r_2\right)\right)}\mathrm{d}q.$$

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_G\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r\right)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r\right)\right)}\mathrm{d}q$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^k$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_G\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\ldots\frac{\partial r}{\partial x_k}\right)}\mathrm{d}q$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}=\left\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid\left(\mathrm{supp}\left(f\right)\subseteq\mathcal{U}\right)\wedge\left(f\text{ נוחה ואינטגרבילית רימן}\right)\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R_{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\dots f_n,g_1\dots g_m:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^n f_i$ וכן $f=\sum_{i=1}^m g_i$ אזי $\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{M}}f_i=\sum_{i=1}^m\int_{\mathcal{M}}g_i$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\dots f_n:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^n f_i$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{M}}f_i$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})=\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid$ אינטגרבילית רימן $f\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R(\mathcal{M})\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}f\mathrm{dVol}_k$.

מיצוי ז'ורדן של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $(E_i)_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{M})$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\mathcal{M}$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר B_f זניחה אזי אם קיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\lim_{i\to\infty}\int_{E_i}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}=L$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=L$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\int_{\mathcal{M}}f=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{M}}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}$.

נפח של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\mathrm{Vol}_k(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{M}}1$.

מפות זרות: מפות $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ עבורן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

טענה: תהיינה $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^n$ מפות זרות בזוגות על $\mathcal{M}$ תהא $S\subseteq\mathcal{M}$ זניחה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\restriction_{\mathcal{M}\setminus(S\cup(\biguplus_{i=1}^n\mathcal{U}_i))}=0$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{U}_i}f$.

אינטגרל קווי מסוג ראשון: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathrm{Im}(\gamma)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אזי $\int_{\gamma}f\mathrm{dVol}_1$.

סימון: תהא $\gamma\in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\lim_{m\to\infty}\sup_{a=t_0<\ldots<t_m=b}\sum_{i=1}^m\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_1(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית ותהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Length}(\gamma)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{Length}(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $r,\theta\in C^1(\mathbb{R})$ נגדיר $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ כך $\gamma(t)=(r(t)\cos(\theta(t)),r(t)\sin(\theta(t)))$ אזי $\|\gamma'\|=\sqrt{r^2+r'}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_2(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^3$ יריעה דו־מימדית ותהא $r:G\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה באשר $G\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=\int_G\left|\frac{\partial r}{\partial x_1}(x)\times\frac{\partial r}{\partial x_2}(y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי $\mathrm{Area}(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

טענה: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\det\left(I+uv^T\right)=1+\langle u,v\rangle$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ אזי $\mathrm{Vol}_k(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|\nabla f(x)\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ ותהא $\alpha:\Gamma_f\to\mathbb{R}$ באשר $\alpha(x)$ הזווית בין הנורמל של Γ_f בנקודה x לבין ציר e_{k+1} אזי $\sqrt{1+\|\nabla f(x)\|^2}=\frac{1}{\cos(\alpha(x))}$.

משפט ארכימדס: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=2\pi h$.

מסקנה: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=2\pi hR$.

קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים מקבילים אזי $P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\max\{d(x,H_1),d(x,H_2)\}\le d(H_1,H_2)\}$.

רוחב קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים אזי $\mathrm{Width}(P_{H_1,H_2})=d(H_1,H_2)$.

רוחב גוף: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\mathrm{Width}(K)=\inf_{\{K\subseteq P\mid P\text{ קורה}\}}(\mathrm{Width}(P))$.

משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\dots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $\mathrm{Width}(K)\le\sum_{i=1}^m\mathrm{Width}(P_i)$.

רוחב יחסי של קורה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ותהא P קורה אזי $\mathrm{Width}_K(P)=\inf_{m\in\mathbb{R}_+}\{m\in\mathbb{R}_+\mid\exists a\in\mathbb{R}^n.K\subseteq m\cdot P+a\}$.

השערת באנג: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1 \dots P_m$ קורות עבורן $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} P_i$ אזי $1 \le \sum_{i=1}^{m} \text{Width}_K(P_i)$. השערה פתוחה

טענה: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי עבורו $K = -K$ ויהיו $P_1 \dots P_m$ קורות עבורן $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} P_i$ אזי $1 \le \sum_{i=1}^{m} \text{Width}_K(P_i)$.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\varphi \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi \neq 0$ אזי $\varphi^{-1}(t)$ על־משטח.

טענה: יהי $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi \neq 0$ וכן $\varphi(\mathcal{V}) = (a,b)$ ותהא $p \in \mathcal{V}$ אזי קיים $\delta > 0$ עבורו לכל $f \in R(V_\delta(p))$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית מתקיים $\int_{B_\delta(p)} f = \int_a^b \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|} \text{dVol}_{n-1}(x)\, \text{d}t$.

משפט נוחסאת קו־שטח: יהי $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi \neq 0$ וכן $\varphi(\mathcal{V}) = (a,b)$ ותהא $f \in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_\mathcal{V} f = \int_a^b \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|} \text{dVol}_{n-1}(x)\, \text{d}t$.

גרדיאנט: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ ותהא $x \in \mathcal{M}$ אזי $u \in T_x(\mathcal{M})$ עבורו $\langle u, v \rangle = L_v\varphi(x)$ לכל $v \in T_x(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ ותהא $x \in \mathcal{M}$ אזי הגרדיאנט של φ בנקודה x הוא $\nabla_x\varphi$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של $x \in \mathcal{M}$ ותהא $\psi \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ באשר $\psi_{\restriction_{\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}} = \varphi_{\restriction_\mathcal{U}}$ אזי $\nabla_x\varphi = \text{Proj}_{T_x(\mathcal{M})}(\nabla_x\psi)$.

משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi \neq 0$ וכן $\varphi(\mathcal{M}) = (a,b)$ ותהא $f \in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_\mathcal{M} f = \int_a^b \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|} \text{dVol}_{n-1}(x)\, \text{d}t$.

מסקנה: יהי $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R}^k)$ באשר $\text{rank}(\mathcal{D}_x\varphi) = k$ ותהא $f \in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_\mathcal{V} f = \int_{\varphi(\mathcal{V})} \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\sqrt{\det((\mathcal{D}_x\varphi)\cdot(\mathcal{D}_x\varphi)^T)}} \text{dVol}_{n-1}(x)\, \text{d}t$.

טענה: תהא $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהא $A \in O(n+1)$ אזי $\int_{\mathbb{S}^n} f(x)\, \text{dVol}_n = \int_{\mathbb{S}^n} f(Ax)\, \text{dVol}_n$.

טענה: יהי $r > 0$ אזי $\text{Vol}_n(r \cdot \mathbb{S}^n) = r^n \cdot \text{Vol}_n(\mathbb{S}^n)$.

טענה שטח פנים של ספירה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

טענה נפח של ספירה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_n(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{M}) = \{v : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^k \mid \text{שדה וקטורי } C^\alpha \text{ מעל } \mathcal{M} \text{ } v\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה C^α ותהא $(\mathcal{U}, \varphi)$ מפה אזי $\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$.

טענה: יהי $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ ולכל $i \in [k]$ מתקיים כי $\left\langle v(x), \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}(x) \right\rangle$ הינה C^α).

טענה: יהי v שדה וקטורי על $\mathcal{M}$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$($v : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^k$ הינה C^α).

שדה וקטורי C^m מעל תת־קבוצה: תהא $A \subseteq \mathcal{M}$ אזי $v : A \to \mathbb{R}^k$ עבורה $v(x) \in T_x(\mathcal{M})$ וכן לכל $p \in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ וקיים $u \in \mathfrak{X}^m(\mathcal{U})$ עבורו $u_{\restriction_{A\cap\mathcal{U}}} = v_{\restriction_{A\cap\mathcal{U}}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $A \subseteq \mathcal{M}$ ותהא $v : A \to \mathbb{R}^k$ אזי (v שדה וקטורי C^α מעל A)$\Longleftrightarrow$(קיימת $A \subseteq \mathcal{U}$ פתוחה ב־$\mathcal{M}$ וקיימת $u \in \mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$ עבורה $u_{\restriction_\mathcal{U}} = v$).

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ אזי $\nabla\varphi \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{M})$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ על־משטח קשיר אזי ($\mathcal{M}$ בעל 0 קו־אוריינטציות)$\vee$($\mathcal{M}$ בעל 2 קו־אוריינטציות).

שטף: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהי $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M}) = \int_\mathcal{M} \langle F(x), N(x) \rangle\, \text{dVol}_{n-1}(x)$.

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהיו $F_1, F_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורם F_1, F_2 שדות וקטוריים דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{\alpha F_1+\beta F_2}(\mathcal{M}) = \alpha\text{Flux}_{F_1}(\mathcal{M}) + \beta\text{Flux}_{F_2}(\mathcal{M})$.

טענה: יהיו $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטחים זרים עד כדי קבוצה זניחה בעלי קו־אוריינטציה N_1, N_2 בהתאמה ויהי $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ אזי $\text{Flux}_F(M_1 \cup \mathcal{M}_2) = \text{Flux}_F(\mathcal{M}_1) + \text{Flux}_F(\mathcal{M}_2)$.

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח בעל קו־אוריינטציה N ויהי $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M}, N) = \text{Flux}_F(\mathcal{M}, -N)$.

דיברגנץ: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(F)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ נגדיר $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ כך $f(x) = F(x)$ אזי $\text{div}(F)(x) = \text{trace}(\mathcal{D}_x(f))$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{div}(A \circ F)(A^{-1}x) = \text{div}(F)(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(f \cdot F) = f \cdot \text{div}(F) + \langle \nabla f, F \rangle$.

לפלסיאן: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f = \text{div}(\nabla f)$.

סימון: תהא $x\in\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Cube}_\ell\left(x\right)=\left\{Q\subseteq\mathbb{R}^n\mid\left(x\in Q\right)\wedge\left(\ell\text{ אורך הצלע של }Q\text{ הוא}\right)\wedge\left(Q\text{ קובייה}\right)\right\}$.

הערה: תהא $x\in\mathbb{R}^n$ ויהי $Q\in\text{Cube}_\ell\left(x\right)$ אזי $\text{Flux}_F\left(\partial Q\right)=\sum\text{Flux}_F\left(E_i\right)$ באשר $\left\{E_i\right\}$ פאות Q עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני ל־Q.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\text{div}\left(F\right)\left(x\right)=\lim_{\substack{Q\in\text{Cube}_\ell\left(x\right)\\ \ell\to0}}\frac{1}{\text{Vol}_n\left(Q\right)}\text{Flux}_F\left(\partial Q\right)$.

נקודת שפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $x\in\partial\mathcal{U}$ עבורה קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של x וקיימת $f\in C^1\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ עבורה $\nabla_x f\neq0$ וכן $f\left(x\right)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\left\{f<0\right\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}=\left\{x\in\partial\mathcal{U}\mid x\text{ נקודת שפה חלקה}\right\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה תהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ באשר $\mathcal{W}$ סביבה של x המקיימת $\nabla_x f\neq0$ וכן $f\left(x\right)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\left\{f<0\right\}$ אזי $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}\left(x\right)=\left(\mathcal{W},f\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של x עבורה $\mathcal{W}\cap\partial\mathcal{U}$ היפר־משטח.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־$\partial\mathcal{U}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ יריעה.

קבוצה חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial\mathcal{U}=\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$.

קבוצה בעלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\text{Vol}_n\left(\left(\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)+B_\varepsilon^n\left(0\right)\right)=0$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ עבורה $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}\left(x\right)=\left(\mathcal{W},f\right)$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}:\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ נורמל יחידה.

קו־אוריינטציה חיצונית קנונית לשפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $N:\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ באשר $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}\left(x\right)=\left(\mathcal{W},f\right)$ מתקיים $N_{\restriction_{\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}}=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

שטף: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ בעלת שפה כמעט חלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\partial\mathcal{U}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_F\left(\partial\mathcal{U}\right)=\text{Flux}_F\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)$.

למה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ יהי $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n\right)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ ותהא $A\in\text{GL}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\text{Flux}_{A\circ F}\left(A\cdot\mathcal{M}\right)=\text{Flux}_F\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $r>0$ תהא $g\in C^1\left(B_r\left(a\right),\mathbb{R}\right)$ באשר $\frac{\partial g}{\partial x_i}\neq0$ לכל $i\in[n]$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ באשר $\text{supp}\left(F\right)\subseteq B_r\left(a\right)$ אזי $\text{Flux}_F\left(\partial\left\{g<0\right\}\right)=\int_{\left\{g<0\right\}}\text{div}\left(F\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $a\in\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיים $r>0$ עבורו לכל $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיים $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ולכל $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}\right)$ המקיים $\text{supp}\left(F\right)\subseteq B_r\left(a\right)$ מתקיים $\text{Flux}_F\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה וחלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_F\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ויהי $\varepsilon>0$ אזי $X+B_\varepsilon\left(0\right)$ מדידה ז'ורדן.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית אזי קיים $C\in\mathbb{R}$ עבורו לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\psi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ המקיימת

- $0\le\psi\le1$.
- $\psi_{\restriction_{X+B_\varepsilon\left(0\right)}}=1$.
- $\psi_{\restriction_{\mathbb{R}^n\backslash\left(X+B_{3\varepsilon}\left(0\right)\right)}}=0$.
- לכל $i\in[n]$ מתקיים $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right|\le\frac{C}{\varepsilon}$.

משפט הדיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_F\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ ויהי N נורמל חיצוני ל־$\mathcal{U}$ אזי $\text{Vol}_n\left(\mathcal{U}\right)=\frac{1}{n}\int_{\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}\left\langle x,N\right\rangle\text{dVol}_{n-1}\left(x\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ תהיינה $f,g\in C^1\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\int_{\mathcal{U}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\cdot g\right)=\int_{\partial\mathcal{U}}\left(f\cdot g\cdot\left\langle N,v\right\rangle\right)-\int_{\mathcal{U}}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\right)$.

טענה נוסחאות גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $u,v:\mathcal{W}\to\mathbb{R}$ אזי

1. נניח כי u הינה C^2 אזי $\int_G\Delta u=\int_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial N}$.
2. נניח כי v הינה C^2 וכן u הינה C^1 אזי $\int_G\left\langle\nabla u,\nabla v\right\rangle=-\int_G u\cdot\Delta v+\int_{\partial G}u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.
3. נניח כי u,v הן C^2 אזי $\int_G\left(u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u\right)=\int_{\partial G}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial N}\right)$.

אנרגיית דיריכלה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_G\left\|\nabla v\right\|^2$.

מסקנה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_G\left\|\nabla v\right\|^2=-\int_G v\cdot\Delta v+\int_{\partial G}v\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.

פונקציה הרמונית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $u\in C^2\left(G,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $\Delta u=0$.

טענה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי

- $\mathrm{Flux}_{\nabla u}\left(\partial G\right)=0$.
- נניח כי $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}}=0$ אזי u קבועה מקומית ב־G.
- נניח כי $u_{\restriction_{\partial G}}$ קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב־G.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $⨍_{\mathcal{U}}f=\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{U})}\int_{\mathcal{U}}f$.

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=⨍_{\partial B_r(a)}u$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=⨍_{B_r(a)}u$.

טענה: תהא $f\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Delta f\left(a\right)=\lim_{r\to0}\frac{2n}{r^2}\left(⨍_{\partial B_r(a)}f-f\left(a\right)\right)$.

מסקנה עקרון המקסימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\max\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

מסקנה עקרון המינמום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\min\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

משפט ליוביל: תהא $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי u קבועה.

מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלעיל אזי u קבועה.

טענה אינטגרל פואסון: יהי $n\ge3$ תהא $u\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ באשר $\mathrm{supp}\left(u\right)$ קומפקטי ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $u\left(a\right)=\frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})(n-2)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta u(x)}{|x-a|^{n-2}}\mathrm{d}x$.

משפט גרעין פואסון: תהא $u:\overline{B_1^n\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר $u_{\restriction_{B_1^n(0)}}$ הרמונית אזי לכל $a\in B_1^n\left(0\right)$ מתקיים $u\left(a\right)=\frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u\left(x\right)\cdot\frac{1-\|a\|^2}{\|x-a\|^n}\mathrm{dVol}_{n-1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^2\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}\right)$ אזי $u:\overline{B_1^n\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $u\left(x\right)=\frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y\right)\cdot\frac{1-\|x\|^2}{\|y-x\|^n}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y\right)$ הינה הרמונית וכן $u_{\restriction_{\mathbb{S}^{n-1}}}=f$.

המרחב הדואלי: יהי V מ"ו ממשי אזי $V^*=\mathrm{Hom}\left(V,\mathbb{R}\right)$.

סימון: יהי V מ"ו ממשי יהי $\{e_1\ldots e_n\}$ בסיס של V ויהי $i\in[n]$ אזי $e_i^*:V\to\mathbb{R}$ המוגדרת $e_i^*\left(e_j\right)=\delta_{i,j}$.

טענה: יהי V מ"ו ממשי ויהי $\{e_1\ldots e_n\}$ בסיס של V אזי $\{e_1^*\ldots e_n^*\}$ בסיס של V^*.

המרחב הקו־משיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_p\left(\mathcal{M}\right)^*$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_p^*\left(\mathcal{M}\right)=T_p\left(\mathcal{M}\right)^*$.

קו־וקטורים: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in T_p^*\left(\mathcal{M}\right)$.

1־תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega:\mathcal{M}\to\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ המקיימת $\omega\left(x\right)\in T_x^*\left(\mathcal{M}\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω 1־תבנית דיפרנציאלית על $\mathcal{M}$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\omega_x=\omega\left(x\right)$.

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_x\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ אלא $\omega_x\in T_x^*\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\omega_x\left(u\right)=\left\langle v\left(x\right),u\right\rangle$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

נגזרת חיצונית: תהא $f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}f:\mathcal{M}\to\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ המוגדרת $\left(\mathrm{d}f\right)\left(x\right)\left(v\right)=\frac{\partial f}{\partial v}\left(x\right)$.

טענה: תהא $f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}f$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

טענה כלל לייבניץ': תהיינה $f,g\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}\left(f\cdot g\right)=f\cdot\mathrm{d}g+g\cdot\mathrm{d}f$.

הטלה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $i\in[n]$ אזי $q_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת $q_i\left(u\right)=u_i$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $x_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת $x_i=q_i\circ\varphi$.

מערכת קואורדינטות מקומיות על יריעה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\{x_1\ldots x_k\}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ויהי $i\in[k]$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(p\right)=\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}\left(\varphi\left(p\right)\right)$.

הערה: מטרת הסימונים מלעיל הינה לאפשר קואורדינטות $x_1 \dots x_k$ על $\mathcal{M}$ כמו ב־$\mathbb{R}^k$.

טענה: תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $i \in [k]$ אזי $\mathrm{d}x_i$ 1־תבנית דיפרנציאלית ב־$\mathcal{U}$.

סימון: תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה על $\mathcal{M}$ תהא $p \in \mathcal{M}$ ויהי $i \in [n]$ אזי $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(p))$.

סימון: תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i \in [k]$ ויהי $p \in \mathcal{U}$ אזי $\mathrm{d}x_i|_p = \mathrm{d}x_i(p)$.

טענה: תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $x \in \mathcal{U}$ אזי $\{\mathrm{d}x_1|_x, \dots, \mathrm{d}x_k|_x\}$ בסיס של $T_x^*(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i \in [k]$ ויהי $p \in \mathcal{U}$ אזי $\mathrm{d}x_i|_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)^*$.

1־תבנית דיפרנציאלית C^m: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי 1־תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ של $\mathcal{M}$ ולכל $f_1 \dots f_k \in \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ באשר $\omega = \sum_{i=1}^k f_i \cdot \mathrm{d}x_i$ מתקיים $f_1 \dots f_k \in C^m(\mathcal{U})$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא ω 1־תבנית דיפרנציאלית אזי $(\omega \in C^m)\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו לכל $\alpha \in \Lambda$ ולכל $f_1 \dots f_k \in \mathcal{U}_\alpha \to \mathbb{R}$ באשר $\omega = \sum_{i=1}^k f_i \cdot \mathrm{d}x_i$ מתקיים $f_1 \dots f_k \in C^m(\mathcal{U}_\alpha)$).

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\Omega^1(\mathcal{M}) = \{\omega \mid \text{1-תבנית דיפרנציאלית } C^\infty \text{ על } \mathcal{M}\ \omega\}$.

טענה: תהא $f \in C^1(\mathcal{M})$ ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \mathrm{d}x_i$.

מסקנה: תהא $f \in C^{m+1}(\mathcal{M})$ אזי $\mathrm{d}f$ הינה 1־תבנית דיפרנציאלית C^m.

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $F \in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$ אזי $F^* : \Omega^1(\mathcal{N}) \to \Omega^1(\mathcal{M})$ המוגדרת $F^*(\omega,x,v) = \omega_{F(x)}(\mathcal{D}_x(F)\cdot v)$.

סימון: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה תהא $N \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $F \in C^1(M,N)$ אזי $(F_\omega^*)_x(v) = F^*(\omega,x,v)$.

אינטגרל קווי מסוג שני: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t$.

טענה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\int_\gamma : \Omega^1(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין תהא $\psi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma\circ\psi} \omega$.

העתקה לינארית שומרת אוריינטציה: העתקה $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ עבורה $\det([\varphi]_{\mathrm{st}}) > 0$.

דיפאומורפיזם שומר אוריינטציה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי דיפאומורפיזם $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ עבורו $\mathcal{D}_x(f)$ שומרת אוריינטרציה לכל $x \in \mathcal{U}$.

אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה פשוטה אזי $O : \mathrm{Im}(\gamma) \to \mathbb{R}^n$ רציפה למקוטעין עבורה $O(x) \in \left\{\pm\dot{\gamma}\left(\gamma^{-1}(x)\right)\right\}$.

הערה: אם המסילה לא פשוטה נפרק אותה מספר מסילות פשוטות ונחבר בסוף.

האוריינטציה הסטנדרטית של מסילה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה פשוטה C^1 למקוטעין אזי $O : \mathrm{Im}(\gamma) \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת $O(x) = \dot{\gamma}\left(\gamma^{-1}(x)\right)$.

טענה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי האוריינטציה הסטנדרטית של γ הינה אוריינטציה של $\mathrm{Im}(\gamma)$.

היפוך אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\overline{\gamma} : [a,b] \to \mathcal{M}$ המוגדרת $\overline{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$.

טענה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\int_{\overline{\gamma}} \omega = -\int_\gamma \omega$.

מסקנה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ ותהא $\omega \in \Omega^1([a,b])$ אזי $\int_a^b \omega = -\int_b^a \omega$.

שרשור מסילות: תהא $\gamma_1 : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\gamma_2 : [b,c] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t\in[a,b] \\ \gamma_2(t) & t\in(b,c] \end{cases}$.

טענה: תהא $\gamma_1 : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין תהא $\gamma_2 : [b,c] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$.

טענה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ באשר לכל $t \in [a,b]$ קיימת $\mathcal{U}$ סביבה של $\gamma(t)$ בה f הינה C^1 אזי $\int_\gamma \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

סימון: תהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ ותהא $x \in \mathcal{M}$ אזי $\|\omega_x\|_\infty = \max\{\omega_x(v) \mid (v \in T_x(\mathcal{M})) \wedge (\|v\| = 1)\}$.

טענה: תהא $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_\gamma \omega \le \mathrm{Length}(\gamma) \cdot \max_{t\in[a,b]} \left\|\omega_{\gamma(t)}\right\|_\infty$.

הערה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial^{\mathrm{sm}} G) < \infty$ אזי ניתן לחשוב על ∂G בתור איחוד סופי זר של מסילות סגורות.

אוריינטציית רגל שמאל: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial^{\mathrm{sm}} G) < \infty$ תהא N קו־אוריינטציה חיצונית של ∂G ותהיינה $\gamma_1 \dots \gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup \gamma_i = \partial G$ אזי אוריינטציה $O : \partial G \to \mathbb{R}^2$ עבורה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot O(x) = -N(x)$ לכל $x \in \partial G$.

טענה פרמטריזציה נורמלית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 אזי קיימות $\gamma_1\ldots\gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup\gamma_i=\partial G$ וכן לכל $i\in[m]$ ולכל $t\in\mathrm{Dom}\left(\gamma_i\right)$ מתקיים $\|\gamma_i'(t)\|=1$.

משפט גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $P,Q\in C^1\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\int_{\partial G}\left(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right)=\int_G\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

מסקנה נוסחת גאוס: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין אזי $\mathrm{Area}\left(G\right)=\frac{1}{2}\int_{\partial G}\left(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\right)$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

העתקה לינארית אנטי סימטרית: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $T\in\mathrm{Hom}\left(V^k,\mathbb{R}\right)$ עבורה לכל $u_1\ldots u_k\in V$ ולכל $i,j\in[k]$ שונים מתקיים כי $T\left(\left(\begin{smallmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_k\end{smallmatrix}\right)\right)=-T\left(R_{i\leftrightarrow j}\cdot\left(\begin{smallmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_k\end{smallmatrix}\right)\right)$.

הערה: יהיו $i,j\in[n]$ אזי $R_{i\leftrightarrow j}\in M_n\left(A\right)$ הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות i,j.

k־תבנית: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\bigwedge^k V^*=\left\{\omega\in\mathrm{Hom}\left(V^k,\mathbb{R}\right)\mid \text{אנטי סימטרית } \omega\right\}$.

סימון: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\bigwedge^0 V^*=\mathbb{R}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim\left(V\right)=n$ אזי $\det_n\in\bigwedge^n V^*$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהיו $u_1\ldots u_k\in V$ תלויים לינארית ותהא $\omega\in\bigwedge^k V^*$ אזי $\omega\left(u_1\ldots u_k\right)=0$.

מכפלת וודג'/מכפלת יתד: יהיו $\varphi_1\ldots\varphi_k\in V^*$ אזי $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\in\bigwedge^k V^*$ באשר $\left(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\right)\left(u_1\ldots u_k\right)=\det\left(\left(\varphi_i\left(u_j\right)\right)_{i,j\in[k]}\right)$ לכל $u_1\ldots u_k\in V$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהי $e_1\ldots e_n$ בסיס של V ויהי $k\in[n]$ אזי $\left\{e_{a_1}^*\wedge\ldots\wedge e_{a_k}^*\mid 1\le a_1<\ldots<a_k\le n\right\}$ בסיס של $\bigwedge^k V^*$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim\left(V\right)=n$ אזי $\dim\left(\bigwedge^k V^*\right)=\binom{n}{k}$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim\left(V\right)=n$ אזי $\bigwedge^n V^*=\mathrm{span}\left\{\det_n\right\}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $k,\ell\in\mathbb{N}$ אזי קיימת ויחידה $\wedge:\bigwedge^k V^*\times\bigwedge^\ell V^*\to\bigwedge^{k+\ell}V^*$ עבורה $\left(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\right)\wedge\left(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k\right)=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\wedge\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k$ לכל $\varphi_1\ldots\varphi_k,\psi_1\ldots\psi_\ell\in V^*$.

p־תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega:\mathcal{M}\to\mathrm{Hom}\left(\left(\mathbb{R}^n\right)^p,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $\omega\left(x\right)\in\bigwedge^p T_x^*\left(\mathcal{M}\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω p־תבנית דיפרנציאלית על $\mathcal{M}$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\omega_x=\omega\left(x\right)$.

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_x\in\mathrm{Hom}\left(\left(\mathbb{R}^n\right)^p,\mathbb{R}\right)$ אלא $\omega_x\in\bigwedge^p T_x^*\left(\mathcal{M}\right)$.

מכפלת וודג'/מכפלת יתד: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω p־תבנית דיפרנציאלית ותהא ν q־תבנית דיפרנציאלית אזי $\omega\wedge\nu$ הינה $(p+q)$־תבנית דיפרנציאלית באשר $\left(\omega\wedge\nu\right)_x=\omega_x\wedge\nu_x$.

סימון: תהא $a:[p]\to[k]$ באשר $1\le a_1<\ldots<a_k\le n$ אזי $\mathrm{d}x_{\{a_1\ldots a_p\}}=\mathrm{d}x_{a_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{a_p}$.

p־תבנית דיפרנציאלית C^m: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי p־תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ של $\mathcal{M}$ ולכל $f\in\mathcal{P}_p\left([k]\right)\to\left(\mathcal{U}\to\mathbb{R}\right)$ באשר $\omega=\sum_{I\in\mathcal{P}_p([k])}f_I\cdot\mathrm{d}x_I$ מתקיים $f_I\in C^m\left(\mathcal{U}\right)$ לכל $I\in\mathcal{P}_p\left([k]\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\Omega^p\left(\mathcal{M}\right)=\left\{\omega\mid \mathcal{M}\text{ על } C^\infty \text{ הינה } p\text{־תבנית דיפרנציאלית } \omega\right\}$.

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $F\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right)$ אזי $H^*:\Omega^p\left(\mathcal{N}\right)\to\Omega^p\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $H^*\left(\omega,x,v_1\ldots v_p\right)=\omega_{H(x)}\left(\mathcal{D}_x\left(H\right)\cdot v_1,\ldots,\mathcal{D}_x\left(H\right)\cdot v_p\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $H\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right)$ אזי $\left(H_\omega^*\right)_x\left(v\right)=H^*\left(\omega,x,v\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\mathcal{L}\subseteq\mathbb{R}^\ell$ יריעה תהא $H\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right)$ ותהא $G\in C^1\left(\mathcal{N},\mathcal{L}\right)$ אזי $\left(G\circ H\right)^*=H^*\circ G^*$.

נגזרת חיצונית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\mathrm{d}:\Omega^p\left(\mathcal{U}\right)\to\Omega^{p+1}\left(\mathcal{U}\right)$ המוגדרת $\mathrm{d}\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_p([k])}f_I\cdot\mathrm{d}x_I\right)=\sum_{I\in\mathcal{P}_p([k])}\left(\mathrm{d}f_I\wedge\mathrm{d}x_I\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי d לינארית.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\omega\in\Omega^p\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\omega\right)=0$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\Omega\left(\mathcal{U}\right)=\bigcup_{p\in\mathbb{N}_+}\Omega^p\left(\mathcal{U}\right)$.

אופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות דיפרנציאליות: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\mathrm{b}:\Omega\left(\mathcal{U}\right)\to\Omega\left(\mathcal{U}\right)$ באשר $\mathrm{b}\left(\omega\right)\in\Omega^{p+1}\left(\mathcal{U}\right)$ לכל $\omega\in\Omega^p\left(\mathcal{U}\right)$ המקיימת $\mathrm{b}\left(\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k\right)=\sum_{i=1}^k\left(-1\right)^{i+1}\left(\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_{i-1}\wedge\mathrm{b}\left(\alpha_i\right)\wedge\alpha_{i+1}\wedge\ldots\wedge\alpha_k\right)$ לכל $\alpha_1\ldots\alpha_k\in\mathcal{U}^*$.

טענה כלל לייבניץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי d מקיימת את כלל לייבניץ.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\mathrm{b}:\Omega\left(\mathcal{U}\right)\to\Omega\left(\mathcal{U}\right)$ לינארית המקיימת את כלל לייבניץ וכן $\mathrm{b}\left(\mathrm{b}\left(\omega\right)\right)=0$ לכל $\omega\in\Omega\left(\mathcal{U}\right)$ וכן $\mathrm{b}\left(f\right)=\mathrm{d}f$ לכל $f\in C^\infty\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\mathrm{b}=\mathrm{d}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{V})$ אזי $\mathrm{d}(F^*_\omega)=F^*_{\mathrm{d}\omega}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{V})$ אזי $(F^{-1})^*=(F^*)^{-1}$.

סימון: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{V})$ אזי $F^{-*}=(F^{-1})^*$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{M})$ ותהיינה $(\mathcal{U}_1,\varphi_1),(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_1^*\left(\mathrm{d}\left(\varphi_1^{-*}(\omega)\right)\right)=\varphi_2^*\left(\mathrm{d}\left(\varphi_2^{-*}(\omega)\right)\right)$.

הגדרה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{M})$ אזי $\mathrm{d}\omega\in\Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מתקיים $\varphi^{-*}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(\varphi^{-*}\omega)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $(\mathcal{M},\varphi)$ מפה ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{M})$ אזי $\mathrm{d}\omega=\varphi^*\left(\mathrm{d}\left(\varphi^{-*}\omega\right)\right)$.

הערה: בקבוצה $\mathbb{R}^n$ עצמה p-תבנית היא שקולה ל־p-תבנית דיפרנציאלית מהיות ומתקיים $T_p(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\det_n=\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n$.

אינגטרל: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f\in C(\mathcal{U})$ עבורה $f\cdot\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_k$ בעלת תומך קומפקטי אזי $\int_{\mathcal{U}}(f\cdot\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n)=\int_{\mathcal{U}}f(x)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$.

הערה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ויהי $\omega\in\Omega^k(\mathcal{U})$ אזי קיימת $f\in C(\mathcal{U})$ עבורה $\omega=f\cdot\det_k$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחומים יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^k(\mathcal{U})$ בעלת תומך קומפקטי אזי $\int_{\mathcal{U}}\omega=\mathrm{sign}\left(\det\left(\mathcal{D}(T)\right)\right)\cdot\int_{\mathcal{V}}T^*_\omega$.

תבנית נפח: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית אזי $\omega\in\Omega^k(\mathcal{M})$ עבורה $\omega_x\neq0$ לכל $x\in\mathcal{M}$.

תבניות נפח שקולות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית אזי תבניות נפח $\omega_1,\omega_2\in\Omega^k(\mathcal{M})$ עבורן קיימת $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר $f>0$ המקיימת $\omega_2=f\cdot\omega_1$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי שקילות תבניות נפח על $\mathcal{M}$ הינו יחס שקילות.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה קשירה אזי קיימות לכל היותר 2 מחלקות שקילות של תבניות נפח על $\mathcal{M}$.

אוריינטציה של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה קשירה אזי מחלקת שקילות של תבניות נפח על $\mathcal{M}$.

האוריינטציה האוקלידית הסטנדרטית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי מחלקת השקילות של $\det_n$.

תבנית נפח חיובית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית עם אוריינטציה אזי תבנית נפח $\eta\in\Omega^k(\mathcal{M})$ השייכת לאוריינטציה.

מפה משמרת אוריינטציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית עם אוריינטציה אזי מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ עבורה לכל η תבנית נפח חיובית על $\mathcal{U}$ מתקיים כי $\left(\varphi^{-1}\right)^*(\eta)$ תבנית נפח חיובית על $\mathbb{R}^k$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית עם אוריינטציה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי קיימת מפה משמרת אוריינטציה $(\mathcal{U},\psi)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית עם אוריינטציה תהיינה $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ מפות משמרות אוריינטציה ותהא $\omega\in\Omega^k(\mathcal{M})$ בעלת תומך קומפקטי עבורה $\mathrm{supp}(\omega)\subseteq\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ אזי $\int_{\varphi(\mathcal{U})}\varphi^{-*}_\omega=\int_{\psi(\mathcal{V})}\psi^{-*}_\omega$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית עם אוריינטציה תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה משמרת אוריינטציה ותהא $\omega\in\Omega^k(\mathcal{M})$ בעלת תומך קומפקטי עבורה $\mathrm{supp}(\omega)\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\int_{\mathcal{M}}\omega=\int_{\varphi(\mathcal{U})}\varphi^{-*}_\omega$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית תהא ω k-תבנית יהיו $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^\infty,\{(\mathcal{V}_i,\psi_i)\}_{i=1}^\infty$ כיסויים של $\mathrm{supp}(\omega)$ יהי $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ פירוק יחידה של $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ ויהי $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ פירוק יחידה של $\{(\mathcal{V}_i,\psi_i)\}_{i=1}^\infty$ אזי $\sum_{i=1}^\infty\int_{\mathcal{M}}(\rho_i\cdot\omega)=\sum_{i=1}^\infty\int_{\mathcal{M}}(\eta_i\cdot\omega)$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k-מימדית תהא ω k-תבנית יהי $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ כיסוי של $\mathrm{supp}(\omega)$ ויהי $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ פירוק יחידה של $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ אזי $\int_{\mathcal{M}}\omega=\sum_{i=1}^\infty\int_{\mathcal{M}}(\rho_i\cdot\omega)$.

משפט גרין בשפה של תבנית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial^{\mathrm{sm}}G)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא ω 1-תבנית על $\mathcal{W}$ אזי $\int_{\partial G}\omega=\int_G\mathrm{d}\omega$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

1-תבנית דיפרנציאלית סגורה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ עבורה $\mathrm{d}\omega=0$.

1-תבנית דיפרנציאלית מדוייקת: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ עבורה קיימת $f\in C^\infty(\mathcal{M})$ המקיימת $\omega=\mathrm{d}f$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ מדוייקת אזי ω סגורה.

1-תבנית דיפרנציאלית משמרת: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ עבורה לכל מסילה סגורה C^1 למקוטעין γ מתקיים $\int_\gamma\omega=0$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ אזי (ω משמרת)$\Longleftrightarrow$(קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין מתקיים $\int_\gamma\omega=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$).

טענה: תהא $\omega\in\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ סגורה אזי ω משמרת.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ אזי (ω מדוייקת)$\Longleftrightarrow$(ω משמרת).

מסקנה: תהא $\omega\in\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ אזי (ω סגורה)$\Longleftrightarrow$(ω מדוייקת)$\Longleftrightarrow$(ω משמרת).

שפה גאומטרית/קצה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\partial_{g}\mathcal{M}=\overline{\mathcal{M}}\backslash\mathcal{M}$.
נקודת קצה חלקה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $x\in\partial_{g}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה קיים $\delta>0$ וקיימת יריעה $\mathcal{N}\subseteq B_{\delta}\left(x\right)$ באשר $\mathcal{M}\cap B_{\delta}\left(x\right)\subseteq\mathcal{N}$ וקיימת $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ וקיימת פרמטריזציה טובה $r:\mathcal{V}\to\mathcal{N}$ עבורן $r^{-1}\left(x\right)\in\partial^{\text{sm}}\left(r^{-1}\left(\mathcal{N}\right)\right)$.
יריעה בעלת קצה חלק: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה כל $x\in\partial_{g}\mathcal{M}$ הינה נקודת קצה חלקה.
מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית בעלת קצה חלק אזי $\partial_{g}\mathcal{M}$ יריעה $(k-1)$-מימדית.
אוריינטציה מושרית על קצה חלק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית בעלת קצה חלק יהי N קו-אוריינטציה ותהא $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ תבנית נפח אזי $\omega^{\partial}\in\Omega^{k-1}\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $\omega_{x}^{\partial}\left(u_{1}\ldots u_{k-1}\right)=\omega_{x}\left(N\left(x\right),u_{1}\ldots u_{k-1}\right)$.
משפט סטוקס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית חסומה בעלת קצה חלק ותהא $\omega\in\Omega^{k-1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\int_{\mathcal{M}}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial_{g}\mathcal{M}}\omega$.