פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי $A\times A\to A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית על A אזי $a*b=*\left(a,b\right)$.

חבורה: תהא G קבוצה אזי $*:G\times G\to G$ עבורה קיים $e\in G$ עבורו

- אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in G$ מתקיים $a*\left(b*c\right)=\left(a*b\right)*c$.
- איבר יחידה: לכל $a\in G$ מתקיים $a*e=e*a=a$.
- איבר הופכי: לכל $a\in G$ קיים $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $S\left(X\right)=\left\{ f:X\to X\mid \text{הפיכה } f\right\}$.

חבורת התמורות: תהא X קבוצה אזי $\left(S\left(X\right),\circ\right)$.

טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_{n}=S\left(\left[n\right]\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|S_{n}\right|=n!$.

חבורת המטריצות: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\text{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.

החבורות החיבוריות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},+\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ אזי $A^{*}=A^{\times}=A\backslash\left\{ 0\right\}$.

החבורות הכפליות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Q}^{*},\mathbb{R}^{*},\mathbb{C}^{*}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},\cdot\right)$.

החבורה הטריוואלית: יהי x אזי $\left(\left\{ x\right\},\text{Id}\right)$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sim_{n}\subseteq\mathbb{Z}^{2}$ המוגדרת $\left(x\sim_{n}y\right)\Longleftrightarrow\left(n|\left(x-y\right)\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_{n}=\mathbb{Z}_{n}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $+:C_{n}\times C_{n}\to C_{n}$ המוגדרת $\left[x\right]_{\sim_{n}}+\left[y\right]_{\sim_{n}}=\left[x+y\right]_{\sim_{n}}$.

חבורת שאריות החלוקה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|C_{n}\right|=n$.

חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה לכל $g,h\in G$ מתקיים $g*h=h*g$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge3}$ אזי $\left(S_{n},\circ\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(\text{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$ אבלית.

חבורה סופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\in\mathbb{N}$.

חבורה אינסופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\ge\aleph_{0}$.

סדר של חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה סופית אזי $\text{ord}\left(G\right)=\left|G\right|$.

סדר של חבורה: תהא G חבורה אינסופית אזי $\text{ord}\left(G\right)=\infty$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $o\left(G\right)=\text{ord}\left(G\right)$.

תת־חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי $\left(H,*_{\upharpoonright_{H\times H}}\right)$ עבורה

- סגירות לכפל: לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b\in H$.
- סגירות להופכי: לכל $a\in H$ מתקיים $a^{-1}\in H$.
- איבר יחידה: יהי e איבר היחידה של G אזי $e\in H$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ עבורה $\left(H,*_{\upharpoonright_{H\times H}}\right)$ תת־חבורה אזי $H\le G$.

למה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\in\mathcal{P}\left(G\right)\backslash\left\{ \varnothing\right\}$ אזי $\left(H\le G\right)\Longleftrightarrow$(לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b^{-1}\in H$).

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהיינה $A,B\subseteq G$ אזי $A*B=\left\{ a*b\mid\left(a\in A\right)\wedge\left(b\in B\right)\right\}$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה תהא $H\subseteq G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\left\{ g\right\}*H$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(n\mathbb{Z},+\right)\le\left(\mathbb{Z},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\left(\text{SL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)\le\left(\text{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $R_{n}=\left\{ z\in\mathbb{C}\mid z^{n}=1\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(R_{n},\cdot\right)\le\left(\mathbb{C}^{*},\cdot\right)$.

טענה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $G\le G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $\{e\} \le G$.

איבר פיתול: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $g \in G$ עבורו קיים $n \in \mathbb{N}_+$ המקיים $g^n = e$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $T(G) = \{g \in G \mid \text{איבר פיתול } g\}$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אבלית אזי $T(G) \le G$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי קיים ויחיד $e \in G$ עבורו $a * e = e * a = a$ לכל $a \in G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי קיים ויחיד $b \in G$ עבורו $a * b = e = b * a$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $a \in G$ ויהי $b \in G$ איבר הופכי ל־a אזי $a^{-1} = b$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהיו $a,b \in G$ אזי $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c \in G$ עבורם $a * b = a * c$ אזי $b = c$.

מסקנה כלל צמצום מימין: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c \in G$ עבורם $b * a = c * a$ אזי $b = c$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $g \in G$ אזי $g^0 = e$.

הגדרה: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ אזי $g^n = g * g^{n-1}$.

סימון: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = (g^n)^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = \left(g^{-1}\right)^n$.

חבורת המכפלה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות נגדיר $(g,h)\cdot(g',h') = (g*g', h\otimes h')$ לכל $g,g' \in G$ ולכל $h,h' \in H$ אזי $(G \times H, \cdot)$.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי חבורת המכפלה הינה חבורה.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי (חבורת המכפלה אבלית)$\Longleftrightarrow$(H,G אבליות).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K \le G$ אזי $(H*K \le G)\Longleftrightarrow(HK = KH)$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K \le G$ אזי $(H \cup K \le G)\Longleftrightarrow(H \cap K \in \{H,K\})$.

הגדרה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y) = \{\pi \in S(X) \mid \forall y \in Y. \pi(y) = y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y) \le S(X)$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $\{H_i\}_{I \in I} \subseteq \mathcal{P}(G)$ באשר $H_i \le G$ לכל $i \in I$ אזי $\bigcap_{i \in I} H_i \le G$.

הגדרה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\mathcal{F}(X) = \{H \le G \mid X \subseteq H\}$.

החבורה שנוצרת על ידי תת־קבוצה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle \le G$.

טענה מינימליות החבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $X \subseteq G$ ותהא $H \le G$ עבורה $X \subseteq H$ אזי $\langle X \rangle \subseteq H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \;\middle|\; (k \in \mathbb{N}) \wedge \left(x \in X^k\right) \wedge \left(s \in \{\pm 1\}^k\right)\right\}$.

קבוצת יוצרים של חבורה: תהא G חבורה אזי $X \subseteq G$ עבורה $\langle X \rangle = G$.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

חבורה ציקלית: חבורה G עבורה קיים $g \in G$ המקיים $\langle g \rangle = G$.

למה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\langle g \rangle = \left\{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{n+m} = g^n * g^m$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$.

למה: תהא G חבורה אזי (G ציקלית)$\Longleftrightarrow$(קיים $g \in G$ עבורו $G = \left\{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$).

מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.

סדר של איבר: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) = \text{ord}(\langle g \rangle)$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) = \min\{n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n = e\}$.

הערה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g)$ לא קיים אזי $\text{ord}(g) = \infty$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ באשר $\text{ord}(g) < \infty$ אזי $(g^n = e) \Longleftrightarrow (\text{ord}(g) \mid n)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $i \in \mathbb{Z}_n$ אזי $(\langle i \rangle = \mathbb{Z}_n)\Longleftrightarrow$($i,n$ זרים).

טענה: תהא G חבורה ציקלית ותהא $H \le G$ אזי H ציקלית.

טענה: $(\mathbb{Q},+)$ אינה נ"ס.

קוסט ימני: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $H * g$.

קוסט שמאלי: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $g * H$.

נציג של קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי Hg קוסט ימני אזי g.

נציג של קוסט שמאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי אזי g.

מסקנה: תהא G חבורה אבלית תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $Hg = gH$.

מסקנה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H) \Longleftrightarrow (gH = H)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H) \Longleftrightarrow (Hg = H)$

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי ${}^{G}/_{H} = \{gH \mid g \in G\}$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי ${}_{H}\backslash^{G} = \{Hg \mid g \in G\}$.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי ${}^{G}/_{H}$ חלוקה של G.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי $\left(g_2^{-1}g_1 \in H\right) \iff (g_1H = g_2H)$.

הקוסט הטריוואלית: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי eH.

אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $[G : H] = |{}^{G}/_{H}|$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $[G : H] = |{}_{H}\backslash^{G}|$.

טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H \le G$ אזי $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot [G : H]$.

משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא $H \le G$ אזי $\text{ord}(H) \mid \text{ord}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ותהא $K \le H$ אזי $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי לכל $g \in G\backslash\{e\}$ מתקיים $G = \langle g \rangle$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי G ציקלית.

מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(n, p) = 1$ אזי $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

למה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \le G$ חבורות סופיות אזי $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p > q$ ותהא G חבורה באשר $|G| = pq$ אזי לכל $H, K \le G$ באשר $\text{ord}(H) = p$ וכן $\text{ord}(K) = p$ מתקיים $K = H$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 3}$ אזי $({}^{S_n}/_{\text{Stab}(1)}) \cap \left({}_{\text{Stab}(1)}\backslash^{S_n}\right) = \{\text{Stab}(1)\}$.

קוסט כפול: תהא G חבורה תהיינה $H, K \le G$ ויהי $g \in G$ אזי HgK.

טענה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \le G$ אזי $\{HgK \mid g \in G\}$ חלוקה של G.

הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי $\varphi : G \to H$ המקיימת

- שימור איבר יחידה: $\varphi(e_G) = e_H$.
- שימור כפל: לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
- שימור הופכי: לכל $g \in G$ מתקיים $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

טענה: תהיינה G, H חבורות ותהא $\varphi : G \to H$ אזי (φ הומומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1}$).

גרעין של הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי

- $\text{Im}(\varphi) \le H$.
- $\ker(\varphi) \le G$.
- (φ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\ker(\varphi) = \{e_G\}$).

טענה: תהיינה G, H, K חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $\psi : H \to K$ הומומורפיזם אזי $\psi \circ \varphi$ הומומורפיזם.

טענה: תהיינה G, H חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(\varphi(g)) \mid \text{ord}(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם.

טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא G חבורה אזי $\varphi : G \to \{e\}$ המוגדרת $\varphi(g) = e$ לכל $g \in G$ הינה הומומורפיזם.

טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $\text{Id} : H \to G$ הינו הומומורפיזם.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $\det : \text{GL}(V) \to \mathbb{F}^*$ הינו הומומורפיזם.

מטריצת תמורה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \to \text{GL}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(\rho(\sigma))_{i,j} = \left\{\begin{smallmatrix} 1 & j = \sigma(i) \\ 0 & \text{else} \end{smallmatrix}\right.$ לכל $i, j \in [n]$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ תהא $\sigma\in S_n$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\rho\left(\sigma\right)\cdot v=\begin{pmatrix}v_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ v_{\sigma(n)}\end{pmatrix}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\rho:S_n\to\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\det\left(\rho\left(\sigma\right)\right)\in\left\{\pm1\right\}$.

סימן של תמורה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathrm{sign}:S_n\to\left\{\pm1\right\}$ המוגדרת $\mathrm{sign}=\det\circ\rho$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי sign הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}\left(\sigma\right)=\frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}\left(\sigma\right)=\left(-1\right)^{\left|\left\{(i,j)\in[n]^2\mid(i<j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))\right\}\right|}$.

חבורת התמורות הזוגיות: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n=\ker\left(\mathrm{sign}\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n\leq S_n$.

איזומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם הפיך $\varphi:G\to H$.

סימון: תהיינה G,H חבורות איזומורפיות אזי $G\cong H$.

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם אזי φ^{-1} איזומורפיזם.

למה: תהיינה G,H,K חבורות יהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם ויהי $\psi:H\to K$ איזומורפיזם אזי $\psi\circ\varphi$ איזומורפיזם.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה של חבורות אזי $\cong$ יחס שקילות על $\mathcal{A}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong R_n$.

טענה: תהיינה G,H חבורות תהא $S\subseteq G$ באשר $\left\langle S\right\rangle=G$ ויהיו $\varphi,\psi:G\to H$ הומומורפיזמים באשר $\varphi_{\restriction_S}=\psi_{\restriction_S}$ אזי $\varphi=\psi$.

מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם חח"ע $\varphi:G\to H$.

אפימורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם על $\varphi:G\to H$.

אוטומורפיזם: תהא G חבורה אזי איזומורפיזם $\varphi:G\to G$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Aut}\left(G\right)=\left\{\varphi:G\to G\mid \text{אוטומורפיזם } \varphi\right\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\left(\mathrm{Aut}\left(G\right),\circ\right)$ חבורה.

חבורת קליין: $K=C_2\times C_2$.

טענה: חבורת קליין הינה אבלית.

טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.

טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־C_4.

פונקציית הצמדה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $c_g:G\to G$ המוגדרת $c_g\left(x\right)=gxg^{-1}$ לכל $x\in G$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי c_g אוטומורפיזם.

אוטומורפיזם פנימי: תהא G חבורה אזי אוטומורפיזם $\varphi:G\to G$ עבורו קיים $g\in G$ המקיים $\varphi=c_g$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Inn}\left(G\right)=\left\{c_g\mid g\in G\right\}$.

תת־חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $H\leq G$ עבורה לכל $g\in G$ מתקיים $c_g\left(H\right)=H$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ נורמלית אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ התב"ש

- $H\trianglelefteq G$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gHg^{-1}=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gH=Hg$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg\subseteq H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $H\subseteq g^{-1}Hg$.
- $G/H={}_H\backslash G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ באשר $\left[G:H\right]=2$ אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Inn}\left(G\right)\trianglelefteq\mathrm{Aut}\left(G\right)$.

תת־חבורה אופיינית: תהא G חבורה אזי $K\leq G$ עבורה לכל $\varphi\in\mathrm{Aut}\left(G\right)$ מתקיים $\varphi\left(K\right)=K$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $K\leq G$ אופיינית אזי $K\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H\trianglelefteq G$ ותהא $K\leq H$ אופיינית ב־H אזי $K\trianglelefteq G$.

מרכז של חבורה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)=\left\{ g\in G\mid\forall h\in G.gh=hg\right\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)\trianglelefteq G$.

חבורת הייזנברג: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}\right)=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}1 & a & b\\ & 1 & c\\ & & 1\end{smallmatrix}\right)\mid a,b,c\in\mathbb{F}\right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}\right)$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{Z}\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{F}\right)\right)\cong\left(\mathbb{F},+\right)$.

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי $\ker\left(\varphi\right)\trianglelefteq G$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_{n}\trianglelefteq S_{n}$.

חבורה פשוטה: חבורה G עבורה לכל $H\trianglelefteq G$ מתקיים $H\in\left\{ \left\{ e\right\} ,G\right\}$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי C_{p} פשוטה.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ פשוטה.

הגדרה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ נגדיר $*:{}^{G}/_{N}\times{}^{G}/_{N}\to{}^{G}/_{N}$ כך $\left(gN\right)*\left(hN\right)=\left(g*h\right)N$.

חבורת המנה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי $\left({}^{G}/_{N},*\right)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי חבורת המנה הינה חבורה.

העתקת המנה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי $q:G\to{}^{G}/_{N}$ המוגדרת $q\left(g\right)=gN$.

טענה: תהא G חבורה תהא $N\trianglelefteq G$ ותהא q העתקת המנה אזי

- q הינה הומומורפיזם.
- $\ker\left(q\right)=N$.
- q על.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $(H\trianglelefteq G)\Longleftrightarrow$(קיים אוטומורפיזם $\varphi:G\to G$ עבורו $H=\ker\left(\varphi\right)$).

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_{n}$.

משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי ${}^{G}/_{\ker\left(\varphi\right)}\cong\mathrm{Im}\left(\varphi\right)$.

טענה: תהא G חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $G\cong\mathbb{Z}$.
- קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $G\cong\mathbb{Z}_{n}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\left|{}^{G}/_{\mathcal{Z}\left(G\right)}\right|\notin\mathbb{P}$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $H,K\trianglelefteq G$ באשר $HK=G$ וכן $H\cap K=\left\{ e\right\}$ אזי $G\cong H\times K$.

מסקנה משפט השאריות הסיני: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ זרים אזי $\mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_{n}\times\mathbb{Z}_{m}$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית תהא $H\leq G$ מאינדקס p ותהא $N\trianglelefteq G$ מאינדקס p באשר $H\neq N$ אזי $G=HN$ וכן $p^{2}|\mathrm{ord}\left(G\right)$.

חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H,K חבורות ויהי $\varphi:K\to\mathrm{Aut}\left(H\right)$ הומומורפיזם נגדיר $\left(h,k\right)\cdot\left(h',k'\right)=\left(h\cdot\varphi\left(k\right)\left(h'\right),k\cdot k'\right)$ לכל $h,h'\in H$ ולכל $k,k'\in K$ אזי $\left(H\times K,\cdot\right)$.

סימון: תהיינה H,K חבורות ויהי $\varphi:K\to\mathrm{Aut}\left(H\right)$ אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה $H\rtimes_{\varphi}K$.

טענה: תהיינה H,K חבורות ויהי $\varphi:K\to\mathrm{Aut}\left(H\right)$ אזי $H\rtimes_{\varphi}K$ הינה חבורה.

טענה: תהיינה H,K חבורות נגדיר $\varphi:K\to\mathrm{Aut}\left(H\right)$ כך $\varphi\left(k\right)=\mathrm{Id}_{H}$ לכל $k\in K$ אזי $H\rtimes_{\varphi}K\cong H\times K$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathrm{Aff}\left(\mathbb{F}\right)=\left\{ f:\mathbb{F}\to\mathbb{F}\mid\exists a\in\mathbb{F}^{\times}\left(\exists b\in\mathbb{F}\left(\forall x\in\mathbb{F}\left(f\left(x\right)=ax+b\right)\right)\right)\right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\left(\mathrm{Aff}\left(\mathbb{F}\right),\circ\right)$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה נגדיר $\varphi:\mathbb{F}^{\times}\to\mathrm{Aut}\left(\mathbb{F}\right)$ כך $\varphi\left(a\right)\left(b\right)=ab$ לכל $a\in\mathbb{F}^{\times}$ ולכל $b\in\mathbb{F}$ אזי $\mathrm{Aff}\left(\mathbb{F}\right)\cong\mathbb{F}\rtimes_{\varphi}\mathbb{F}^{\times}$.

סימון: יהי $P\subseteq\mathbb{R}^{2}$ מצולע משוכלל אזי $\mathrm{Iso}\left(P\right)=\left\{ \varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}\mid\left(\text{איזומטריה }\varphi\right)\wedge\left(\varphi\left(P\right)=P\right)\right\}$.

החבורה הדיהדרלית: יהי $P\subseteq\mathbb{R}^{2}$ מצולע משוכלל בעל n קודקודים אזי $D_{n}=\mathrm{Iso}\left(P\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq2}$ אזי $\left(D_{n},\circ\right)$ חבורה.

סימון: תהא X קבוצה ויהיו $\varphi_{1}\ldots\varphi_{n}$ פרידיקטים על X אזי $\left\langle X\mid\varphi_{1}\ldots\varphi_{n}\right\rangle =\left\{ x\in\left\langle X\right\rangle \mid\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_{i}\left(x\right)\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq2}$ אזי $D_{n}\cong\left\langle r,s\mid s^{2}=e,r^{n}=e,srs=r^{-1}\right\rangle$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq2}$ אזי

- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\left\{ D_{n},\left\langle sr,r^{2}\right\rangle ,\left\langle s,r^{2}\right\rangle \right\} \cup\left\{ H\leq\left\langle r\right\rangle \right\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_{n}.
- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\left\{ D_{n}\right\} \cup\left\{ H\leq\left\langle r\right\rangle \right\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_{n}.

טענה: $\mathcal{H}(\mathbb{F}_2)\cong D_4$.

טענה: תהא G חבורה יהי $K\le G$ יהי $H\trianglelefteq G$ באשר $HK=G$ וכן $H\cap K=\{e\}$ ונגדיר $\varphi:K\to\mathrm{Aut}(H)$ כך $\varphi(k)=c_k$ לכל $k\in K$ אזי $G\cong H\rtimes_\varphi K$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ ונגדיר $\varphi:C_2\to\mathrm{Aut}(C_n)$ כך $\varphi(k)=c_k$ לכל $k\in K$ אזי $D_n\cong C_n\rtimes_\varphi C_2$.

טענה: $K\trianglelefteq A_4$.

חבורה פתירה: חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0\ldots G_n\le G$ המקיימות

- $G_n=G$ וכן $G_0=\{e\}$.
- $G_{i-1}\trianglelefteq G_i$ לכל $i\in[n]$.
- ${}^{G_i}/_{G_{i-1}}$ אבלית לכל $i\in[n]$.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי G פתירה.

טענה: תהא G חבורה פשוטה באשר G אינה אבלית אזי G אינה פתירה.

משפט: יהי $n\in[4]$ אזי S_n פתירה.

חבורה נילפוטנטית: חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0\ldots G_n\le G$ המקיימות

- $G_n=G$ וכן $G_0=\{e\}$.
- $G_{i-1}\trianglelefteq G$ לכל $i\in[n]$.
- ${}^{G_i}/_{G_{i-1}}\le\mathcal{Z}\left({}^{G}/_{G_{i-1}}\right)$ לכל $i\in[n]$.

טענה: תהא G חבורה נילפוטנטית אזי G פתירה.

משפט האיזומורפיזם השני: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי ${}^{H}/_{(H\cap N)}\cong{}^{(HN)}/_{N}$.

טענה: תהא G חבורה ותהיינה $N,K\trianglelefteq G$ באשר $K\le N$ אזי ${}^{N}/_{K}\trianglelefteq{}^{G}/_{N}$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה $N,K\trianglelefteq G$ באשר $K\le N$ אזי ${}^{G}/_{N}\cong{}^{({}^{G}/_{K})}/_{({}^{N}/_{K})}$.

משפט ההתאמה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי קיימת $\Phi:\{H\le G\mid N\le H\}\to\{H\mid H\le{}^{G}/_{N}\}$ חח"ע ועל המקיימת

- לכל $K\trianglelefteq G$ המקיימת $K\le N$ מתקיים $\Phi(K)\trianglelefteq{}^{G}/_{N}$.
- משמרת מנות: לכל $K\trianglelefteq G$ המקיימת $K\le N$ מתקיים ${}^{G}/_{K}\cong{}^{\Phi(G)}/_{\Phi(K)}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי (N נורמלית מקסימלית)$\iff$(${}^{G}/_{N}$ פשוטה).

פעולה שמאלית של חבורה על קבוצה: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי פונקציה $f:G\times X\to X$ המקיימת

- לכל $x\in X$ מתקיים $f(e,x)=x$.
- לכל $g,h\in G$ ולכל $x\in X$ מתקיים $f(g\cdot h,x)=f(g,f(h,x))$.

הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.

סימון: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $f:G\times X\to X$ פעולה על G אזי $f(g,x)=g.x$.

סימון: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $G\curvearrowright X=\{f:G\times X\to X\mid \text{פעולה } f\}$.

הפעולה השמאלית: תהא G חבורה נגדיר $f\in G\curvearrowright G$ כך $f(g,x)=gx$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.

הפעולה הימנית: תהא G חבורה נגדיר $f\in G\curvearrowright G$ כך $f(g,x)=xg^{-1}$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.

הערה: מכאן והלאה נאמר כי G פועלת על X ונסמן $g.x$ את הפעולה.

מסלולים: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ ויהי $x\in X$ אזי $\mathrm{orb}_\alpha(x)=\{g.x\mid g\in G\}$.

סימון: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $o(x)=\mathrm{orb}(x)$.

פעולה טרנזיטיבית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f\in G\curvearrowright X$ עבורה קיים $x\in X$ המקיים $o(x)=X$.

מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $\mathrm{Stab}_G(x)=\{g\in G\mid g.x=x\}$.

סימון: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $\mathrm{Fix}_G(x)=\mathrm{Stab}_G(x)$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $\mathrm{Stab}_G(x)\le G$.

פעולה חופשית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f\in G\curvearrowright X$ עבורה לכל $x\in X$ מתקיים $\mathrm{Stab}_G(x)=\{e\}$.

למה: תהא G חבורה תהא X קבוצה תהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ ויהי $g\in G$ אזי $\alpha(g)\in S(X)$.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ אזי $\varphi_\alpha:G\to S(X)$ המוגדרת $\varphi_\alpha(g)(x)=\alpha(g,x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ אזי φ_α הומומורפיזם.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \to S\left(X\right)$ הומומורפיזם אזי $\alpha_{\varphi} : G \times X \to X$ המוגדרת $\alpha_{\varphi}\left(g,x\right) = \varphi\left(g\right)\left(x\right)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \to S\left(X\right)$ הומומורפיזם אזי α_{φ} פעולה.

למה מסלול מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $\left|o\left(x\right)\right| = \left[G : \text{Stab}_{G}\left(x\right)\right]$.

למה של ברנסייד: תהא X קבוצה ותהא G חבורה סופית הפועלת על X אזי $\left|\left\{o\left(x\right) \mid x \in X\right\}\right| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\left|\left\{x \in X \mid g.x = x\right\}\right|$.

הפעולה על הקוסטים השמאליים: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $\alpha \in G \curvearrowright {}^{G}/_{H}$ המוגדרת $\alpha\left(g, g'H\right) = gg'H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.

פעולות אקווריאנטיות/שקולות: תהיינה X,Y קבוצות ותהא G חבורה אזי $\left(\alpha,\beta\right) \in \left(G \curvearrowright X\right) \times \left(G \curvearrowright Y\right)$ עבורן קיימת $F : X \to Y$ חח"ע ועל המקיימת $F\left(\alpha\left(g,x\right)\right) = \beta\left(g, F\left(x\right)\right)$ לכל $g \in G$ ולכל $x \in X$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית ויהי $x \in X$ עבורו $X = o\left(x\right)$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים של ${}^{G}/_{\text{Stab}_{G}\left(x\right)}$ אקוורינאנטית ל־α.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי קיימת $H \leq G$ עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים אקווריאנטית ל־α.

טענה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $\left\{o\left(x\right) \mid x \in X\right\}$ חלוקה של X.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי לכל $x \in X$ מתקיים $X = o\left(x\right)$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ איזומטריות של $\mathbb{R}^3$ ותהא $p \in \bigcup_{i=1}^{n}\varphi_i\left(P \times \{0\}\right)$ אזי $\text{Poly}\left(p\right) = \left|\left\{\varphi_i\left(P \times \{0\}\right) \mid p \in \varphi_i\left(P \times \{0\}\right)\right\}\right|$.

גוף אפלטוני: קבוצה קמורה לא זניחה $K \subseteq \mathbb{R}^3$ עבורה קיים מצולע משוכלל $P \subseteq \mathbb{R}^2$ וקיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן
- פאות איזומטריות: $\partial K = \bigcup_{i=1}^{n}\varphi_i\left(P \times \{0\}\right)$.
- קודקוד משותף זהה כמות: לכל קודקודים $v_1, v_2 \in K$ מתקיים $\text{Poly}\left(v_1\right) = \text{Poly}\left(v_2\right)$.

מספר פאות של גוף אפלטוני: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $n \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו קיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן $\partial K = \bigcup_{i=1}^{n}\varphi_i\left(P \times \{0\}\right)$ באשר $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}\left(P\right) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\text{איזומטריה } \varphi\right) \wedge \left(\varphi\left(K\right) = K\right)\right\}$.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}_{+}\left(P\right) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\text{איזומטריה משמרת אוריינטציה } \varphi\right) \wedge \left(\varphi\left(K\right) = K\right)\right\}$.

הגדרה סימון שלפלי: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני בעל $n \in \mathbb{N}$ פאות ויהי $v \in K$ קודקוד אזי $\left\{n, \text{Poly}\left(k\right)\right\}$.

הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.

דודקהדרון: גוף אפלטוני $K \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל סימון שלפלי $\{5,3\}$.

טענה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{Iso}_{+}\left(D\right) \cong A_5$.

מסקנה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{ord}\left(\text{Iso}_{+}\left(D\right)\right) = 60$.

משפט קיילי: תהא G חבורה אזי קיימת קבוצה X וקיימת $H \leq S\left(X\right)$ עבורה $G \cong H$.

מסקנה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}\left(G\right) = \aleph_0$ אזי קיימת $H \leq S\left(\mathbb{N}\right)$ עבורה $G \cong H$.

משפט קושי: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p|\text{ord}\left(G\right)$ אזי קיים $g \in G$ עבורו $\text{ord}\left(g\right) = p$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p|\text{ord}\left(G\right)$ אזי קיימת $H \leq G$ ציקלית עבורה $\text{ord}\left(H\right) = p$.

טענה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}\left(G\right) = 6$ אזי $G \cong \mathbb{Z}_6$ או $G \cong S_3$.

פעולת ההצמדה: תהא G חבורה אזי $\alpha \in G \curvearrowright G$ המוגדרת $\alpha\left(g,h\right) = c_g\left(h\right)$.

סימון: תהא G חבורה ויהיו $h,g \in G$ אזי $h^g = g^{-1}hg$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $g,h,k \in G$ אזי $h^{g \cdot k} = \left(h^g\right)^k$.

מחלקת הצמידות: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $\left[h\right] = \left\{ghg^{-1} \mid g \in G\right\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $\left[h\right] = o\left(h\right)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי $\left\{\left[h\right] \mid h \in G\right\}$ חלוקה של G.

הממרכז של איבר: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G\left(h\right) = \left\{g \in G \mid gh = hg\right\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $C_G\left(h\right) = \text{Stab}_{G}\left(h\right)$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G\left(h\right) \leq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G\right) = \bigcap_{g\in G} C_G\left(g\right)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)$ אופיינית.

טענה: תהא G חבורה אזי ${}^{G}/_{\mathcal{Z}\left(G\right)} \cong \text{Inn}\left(G\right)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g\in G$ אזי $|[g]|=[G:C_G(g)]$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו g,h,k באשר $k=ghg^{-1}$ אזי $|C_G(k)|=|C_G(h)|$.

משפט משוואת מחלקות הצמידות: תהא G חבורה סופית ותהא $C\subseteq G$ קבוצת נציגים של $\{[h]\mid h\in G\}$ אזי $\sum_{g\in C}\frac{1}{|C_G(g)|}=1$.

טענה: תהא G חבורה סופית אזי $\mathcal{Z}(G)=\bigcup\{[g]\mid (g\in G)\wedge(|[g]|=1)\}$.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ תהיינה $\alpha,\beta\in S_n$ באשר $\beta=\left(\begin{smallmatrix}m_{1,1} & \dots & m_{1,\ell_1}\end{smallmatrix}\right)\circ\ldots\circ\left(\begin{smallmatrix}m_{b,1} & \dots & m_{b,\ell_b}\end{smallmatrix}\right)$ פירוק למעגלים זרים אזי $\alpha\beta\alpha^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}\alpha(m_{1,1}) & \dots & \alpha(m_{1,\ell_1})\end{smallmatrix}\right)\circ\ldots\circ\left(\begin{smallmatrix}\alpha(m_{b,1}) & \dots & \alpha(m_{b,\ell_b})\end{smallmatrix}\right)$.

למה: A_5 פשוטה.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 5}$ ותהא $H\trianglelefteq A_n$ עבורה קיים מעגל π בגודל שלוש המקיים $\pi\in H$ אזי $H=A_n$.

למה: A_6 פשוטה.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 5}$ אזי A_n פשוטה ואינה אבלית.

הישר הפרויקטיבי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ונגדיר $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{F}^2\backslash\{0\}\;\middle|\;\exists\lambda\in\mathbb{F}^\times\,(x=\lambda y)\right\}$ אזי $\mathbb{FP}=\left(\mathbb{F}^2\backslash\{0\}\right)/_R$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}))=\{\lambda I_n\mid\lambda\in\mathbb{F}^\times\}$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F})={}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}/_{\mathcal{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}))}$.

חבורת־p: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|G|=p^n$.

משפט: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורת־p אזי $\mathcal{Z}(G)\neq\{e\}$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה מסדר p^2 אזי G אבלית.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורת־p אזי G נילפוטנטית.

תת־חבורת־p סילו: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd(p,m)=1$ ותהא G חבורה באשר $|G|=p^k\cdot m$ אזי $H\leq G$ באשר $|H|=p^k$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא $H\leq G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\Longleftrightarrow$(H חבורת־p וכן לכל $K\leq G$ חבורה־p מתקיים $|K|\leq|H|$).

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\Longleftrightarrow$(H חבורת־p וכן $p\nmid[G:H]$).

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $\mathrm{Syl}_p(G)=\{H\leq G\mid G\text{ תת־חבורה־}p\text{ סילו של }H\}$.

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p=\left|\mathrm{Syl}_p(G)\right|$.

למה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ באשר $\gcd(p,m)=1$ אזי $p\nmid\binom{p^n\cdot m}{p^n}$.

משפט סילו הראשון: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי קיימת $H\leq G$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p\geq 1$.

המנרמל של חבורה: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $N_G(H)=\left\{g\in G\mid gHg^{-1}=H\right\}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $N_G(H)\leq G$ וכן $H\trianglelefteq N_G(H)$.

למה: יהי $p\in\mathbb{P}$ יהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd(p,m)=1$ תהא G חבורה באשר $|G|=p^k\cdot m$ ותהיינה $H,K\leq G$ חבורות־p־סילו באשר $H\neq K$ אזי $H\nsubseteq N_G(K)$.

משפט סילו השני: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהיינה H,K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g\in G$ עבורו $gHg^{-1}=K$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא H תת־חבורה־p סילו של G אזי $(H\trianglelefteq G)\Longleftrightarrow(n_p=1)$.

קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $Y\subseteq X$ עבורה לכל $g\in G$ ולכל $y\in Y$ מתקיים $g.y\in Y$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ותהא $Y\subseteq X$ אזי (Y הינה G־שמורה)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\mathcal{O}\subseteq X$ עבורה $Y=\bigcup_{x\in\mathcal{O}}o(x)$).

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ונגדיר $\alpha\in G\curvearrowright\mathrm{Syl}_p(G)$ כך $\alpha(g,H)=gHg^{-1}$ אזי α טרנזיטיבית.

למה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה תהא $H\leq G$ תת־חבורת־p סילו תהא $R\subseteq\mathrm{Syl}_p(G)$ באשר $H\in R$ וכן R הינה H־שמורה אזי $|R|\equiv 1\mod p$.

משפט סילו השלישי: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p\equiv 1\mod p$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ יהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd(p,m)=1$ ותהא G חבורה באשר $|G|=p^k\cdot m$ אזי $n_p|m$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p|\mathrm{ord}(G)$.

מסקנה משפטי סילו: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי

1. קיימת $H\leq G$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.

2. תהיינה H,K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g\in G$ עבורו $K=gHg^{-1}$.
3. $n_p\equiv 1 \mod p$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $H\le S_p$ באשר $|H|=p$ אזי קיים p־מעגל $\pi\in S_p$ עבורו $H=\langle\pi\rangle$.

מסקנה משפט ווילסון: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $(p-1)!\equiv -1 \mod p$.

טענה: יהיו $p,q\in\mathbb{P}$ באשר $p<q$ וכן $q\ne 1 \mod p$ ותהא G חבורה מסדר pq אזי G ציקלית.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}_{>2}$ ותהא G חבורה מסדר $2p$ אזי $G\cong C_{2p}$ או $G\cong D_p$.

טענה: תהא G חבורה סופית יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $P\le G$ תת־חבורת־p אזי $N_G(N_G(P))=N_G(P)$.

סימון: תהא $(A,+)$ חבורה אזי $e_A=0$ וכן $-x=x^{-1}$ לכל $x\in A$ וכן $g^n=ng$ לכל $n\in\mathbb{Z}$ ולכל $g\in A$.

חבורת המכפלה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i\mid i\in I\}$ חבורות נגדיר $(g\cdot h)_i=g_i\cdot h_i$ לכל $g,h\in\prod_{i\in I}G_i$ ולכל $i\in I$ אזי $(\prod_{i\in I}G_i,\cdot)$.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i\mid i\in I\}$ חבורות אזי $\prod_{i\in I}G_i$ חבורה.

חבורת הסכום הישר החיצוני: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i\mid i\in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i\in I}G_n=\left\{g\in\prod_{i\in I}G_i \;\middle|\; |\{i\in I\mid g_i\ne e_{G_i}\}|\in\mathbb{N}\right\}$.

חבורת סכום ישר פנימי: חבורה G עבורה קיימת קבוצה I באשר $|I|\ge 2$ וקיימות $\{G_i\trianglelefteq G\mid i\in I\}$ באשר $G_i\cap\left(\bigoplus_{j\ne i}G_i\right)=\{e\}$ לכל $i\in I$ וכן $G=\bigoplus_{i\in I}G_n$.

הערה: נקרא לחבורת סכום ישר חיצוני חבורת סכום ישר.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i\mid i\in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i\in I}G_n\le\prod_{i\in I}G_i$.

חבורת פיתול: חבורה G עבורה $T(G)=G$.

חבורה חסרת פיתול: חבורה G עבורה לכל $T(G)=\{e\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית אזי ${}^{A}/_{T(A)}$ חסרת פיתול.

טענה: תהא G חבורה נ"ס ותהא $H\trianglelefteq G$ אזי ${}^{G}/_{H}$ נ"ס.

מסקנה: תהיינה G,H,K חבורות באשר $G\cong H\times K$ אזי (G נ"ס)$\Longleftrightarrow$(H,K נ"ס).

חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה אזי $\bigoplus_X\mathbb{Z}$.

בסיס של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X\mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי X.

דרגה של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X\mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי $|X|$.

הערה: תהא X קבוצה אזי נשכן בצורה טבעית את X בתוך החבורה האבלית החופשית עם בסיס X כך $x\mapsto e_x$.

משפט התכונה האוניברסלית: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $f:X\to G$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi:\bigoplus_X\mathbb{Z}\to G$ עבורו $\varphi(x)=f(x)$ לכל $x\in X$.

משפט תכונת ההרמה: תהא F חבורה אבלית חופשית תהיינה A,B חבורות אבליות יהי $\varphi:A\to B$ אפימורפיזם ויהי $\psi:F\to B$ הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם $\hat{\psi}:F\to A$ עבורו $\varphi\circ\hat{\psi}=\psi$.

טענה תכונת הפיצול: תהא A חבורה אבלית ותהא $B\le A$ באשר ${}^{A}/_{B}$ אבלית חופשית אזי $A\cong B\oplus{}^{A}/_{B}$.

משפט: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי A אבלית חופשית עם בסיס סופי.

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי קיים $k\in\mathbb{N}$ עבורו $A\cong\mathbb{Z}^k$.

למה: תהא A חבורת פיתול אבלית נ"ס אזי A סופית.

משפט: תהא A אבלית נ"ס אזי
- $A\cong{}^{A}/_{T(A)}\oplus T(A)$.
- קיים $k\in\mathbb{N}$ עבורו ${}^{A}/_{T(A)}\cong\mathbb{Z}^k$.
- $T(A)$ סופית.

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס אזי קיימת חבורה אבלית סופית B וקיים $k\in\mathbb{N}$ עבורם $A\cong\mathbb{Z}^k\oplus B$.

סימון: תהא G חבורה ויהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $G_p=\{x\in G\mid p|\mathrm{ord}(x)\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $A_p\le A$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p\in\mathbb{P}$ אזי A_p חבורת־p.

משפט גאוס: תהא A אבלית סופית אזי $A\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}}A_p$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית ויהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $n_p=1$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי $A=\bigoplus\left\{P\le A \;\middle|\; \exists p\in\mathbb{P}\left(P\in\mathrm{Syl}_p(A)\right)\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא A חבורה אבלית מסדר p^n ויהיו $x_1\dots x_{n+1}\in A$ אזי קיימים $a_1\dots a_{n+1}\in\mathbb{N}$ עבורם $\sum_{i=1}^{n+1}a_ix_i=0$ וכן קיים $i\in[n+1]$ עבורו $a_i\not\equiv 0 \mod p$.

הומומורפיזם נשג: תהיינה G,H חבורות באשר $H\le G$ אזי הומומורפיזם $\pi:G\to H$ עבורו $\pi_{\restriction_H}=\mathrm{Id}_H$.

טענה: תהא G אבלית ותהא $A\le G$ התב"ש

- קיימת $B\le G$ עבורה $B\cap A=\{e\}$ וכן $A+B=G$.
- קיימת $B\le G$ עבורה לכל $g\in G$ קיים ויחיד $a\in A$ וקיים ויחיד $b\in B$ עבורם $g=a+b$.
- קיים הומומורפיזם $\varphi:{}^{G}/_{A}\to G$ עבורו $\nu\circ\varphi=\mathrm{Id}_{G/A}$ באשר $\nu:G\to{}^{G}/_{A}$ העתקת המנה.
- קיימת נשג $\pi:G\to A$.

טענה: תהא A אבלית אזי (A נ"ס)$\iff$(קיים $k\in\mathbb{N}$ וקיימת $G\le\mathbb{Z}^k$ עבורם $A\cong{}^{\mathbb{Z}^k}/_{G}$).

חבורה p־אלמנטרית: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה לכל $g\in G$ מתקיים $\mathrm{ord}(g)\in\{1,p\}$.

משפט המבנה לחבורות־p אבליות סופיות: יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא A אבלית סופית בעלת סדר p^n אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $n_1\dots n_k\in\mathbb{N}_+$ באשר $n_{i+1}\le n_i$ לכל $i\in[k-1]$ וכן $\sum_{i=1}^k n_i=n$ עבורם $A\cong\bigoplus_{i=1}^k C_{p^{n_i}}$.

מסקנה משפט המיון לחבורות אבליות סופיות: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $m_1\dots m_k\in\mathbb{N}_+$ באשר $m_i|m_{i+1}$ לכל $i\in[k-1]$ עבורם $A\cong\bigoplus_{i=1}^k C_{m_i}$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ קיימים ויחידים $p_1\dots p_k\in\mathbb{P}$ באשר $p_i\le p_{i+1}$ לכל $i\in[k-1]$ וקיימים ויחידים $t_1\dots t_k\in\mathbb{N}$ עבורם $A\cong\bigoplus_{i=1}^k C_{p_i^{t_i}}$.

מסקנה: תהיינה A,B,C אבליות סופיות באשר $A\oplus C\cong B\oplus C$ אזי $A\cong B$.

מסקנה: תהיינה A,B אבליות סופיות באשר $A\oplus A\cong B\oplus B$ אזי $A\cong B$.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A\le\mathbb{F}^\times$ סופית אזי A ציקלית.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}_p^\times$ ציקלית.

טענה: תהא A אבלית סופית ותהא $B\le A$ אזי קיימת $C\le A$ עבורה $C\cong{}^{A}/_{B}$.

קרקטר: תהא A אבלית אזי הומומורפיזם $\chi:A\to\mathbb{S}^1$.

החבורה הדואלית: תהא A חבורה אבלית אזי $\hat{A}=\left\{\chi:A\to\mathbb{S}^1 \mid \text{קרקטר } \chi\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong\widehat{C_n}$.

טענה: תהיינה A,B אבליות סופיות אזי $\widehat{A\times B}=\hat{A}\times\hat{B}$.

מסקנה: תהא A אלבית סופית אזי $A\cong\hat{A}$.

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}\backslash\{2\}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $U\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\right)=\left\{a\in{}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}} \mid \exists b\in{}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\,(a\cdot b=1)\right\}$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}\backslash\{2\}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $U\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\right)$ ציקלית.

משפט גאוס: תהא T חבורת פיתול אזי $T\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}}T_p$.

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty)=\left\{\frac{k}{p^n}\;\middle|\;(n\in\mathbb{N})\wedge(k\in\{0,\dots,p^n-1\})\right\}$.

חבורת פרופר: יהי $p\in\mathbb{P}$ נגדיר $\star:\mathbb{Z}(p^\infty)\times\mathbb{Z}(p^\infty)\to\mathbb{Z}(p^\infty)$ כך $a\star b=(a+b)-\lfloor a+b\rfloor$ אזי $(\mathbb{Z}(p^\infty),\star)$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty)$ חבורה.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty)\cong\left\{2^{\pi i\cdot\frac{k}{p^n}}\;\middle|\;(n\in\mathbb{N})\wedge(k\in\{0,\dots,p^n-1\})\right\}$.

טענה: ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}(p^\infty)$.

איבר מתחלק במספר: תהא G חבורה אבלית ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $a\in G$ עבורו קיים $b\in G$ המקיים $n\cdot b=a$.

חבורה חליקה: חבורה אבלית G עבורה לכל $a\in G$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי a מתחלק ב־n.

מסקנה: ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ חליקה.

טענה: תהיינה D,G חבורות אבליותת באשר D חליקה ויהי $\varphi:D\to G$ הומומורפיזם אזי $\mathrm{Im}(\varphi)$ חליקה.

טענה: תהא I קבוצה ותהא A_i חבורה אבלית לכל $i\in I$ אזי ($\bigoplus_{i\in I}A_i$ חליקה)$\iff$(A_i חליקה לכל $i\in I$).

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty)$ חליקה.

חבורה מצומצמת: חבורה G עבורה לכל $H\le G$ מתקיים כי H אינה חליקה.

טענה: תהא A אבלית תהא $B\le A$ אבלית ויהי $f:A\to B$ הומומורפיזם נשג אזי קיימת $C\le A$ באשר $C\cap B=\{0\}$ וכן $A=C\oplus B$.

מסקנה: תהא A אבלית ותהא $D\le A$ חליקה אזי קיימת $K\le A$ באשר $D\cap K=\{0\}$ וכן $A=D\oplus K$.

טענה: תהא A אבלית אזי קיימת $D\le A$ חליקה וקיימת $R\le A$ מצומצמת באשר $D\cap R=\{0\}$ וכן $A=D\oplus R$.

טענה: תהא D אבלית חליקה אזי $T\left(D\right)$ חליקה.

מסקנה: תהא A אבלית אזי קיימת $R\le A$ מצומצמת קיימת $D\le A$ חליקה וקיימת $F\le D$ חסרת פיתול באשר $D\cap R=\left\{ 0\right\}$ וכן $A=D\oplus R$ וכן $T\left(D\right)\cap F=\left\{ 0\right\}$ וכן $D=T\left(D\right)\oplus F$ וכן $A=T\left(D\right)\oplus F\oplus R$.

משפט: תהא F חבורה אבלית חליקה חסרת פיתול אזי קיימת קבוצה I עבורה $F\cong\bigoplus_{I}\mathbb{Q}$.

משפט: תהא T חבורת פיתול חליקה אבלית אזי קיים $p\in\mathbb{P}$ וקיימת קבוצה I עבורה $T\cong\bigoplus_{I}\mathbb{Z}\left(p^{\infty}\right)$.

קומוטטור: תהא G חבורה ויהיו $g,h\in G$ אזי $[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהיו $g,h\in G$ אזי $(gh=hg)\iff([g,h]=e)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $i,j,k\in[n]$ אזי $[I+e_{i,j},I+e_{j,k}]=e_{i,k}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $i,j,k,\ell\in[n]$ שונים אזי $[I+e_{i,j},I+e_{j,\ell}]=I$.

משפט הסיבובים של אויילר: תהא $A\in\mathrm{SO}\left(3\right)$ אזי קיים ויחיד $v\in\mathbb{S}_{+}^{2}$ עבורו $Av=v$.