קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq A$ אזי ($\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־A)$\Longleftrightarrow$($\forall x\in\mathcal{U}.\exists r>0.B_r\left(x\right)\cap A\subseteq\mathcal{U}$).

קבוצה קשירה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל־A מתקיים $\mathcal{U}\in\{A,\varnothing\}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי (A קשירה)$\Longleftrightarrow$(לא קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset A$ פתוחות יחסית ל־A עבורן $A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\}$).

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $f:A\to B$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\mathcal{U}\subseteq B$ פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי $f^{-1}\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה יחסית ל־A).

C^m־יריעה k־מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^m\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k־מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי $C^\omega\left(A,B\right)=\{f:A\to B\mid \text{אנליטית מקומית } f\}$.

יריעה אנליטית k־מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f:G\to\mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

הערה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה 1־מימדית אזי $\mathcal{M}$ תיקרא עקומה.

הערה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה 2־מימדית אזי $\mathcal{M}$ תיקרא משטח.

הערה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה $(n-1)$־מימדית אזי $\mathcal{M}$ תיקרא היפר־משטח.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה יריעה חלקה $n-1$ מימדית.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(קיימות $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות עבורן $\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}_\alpha$ יריעה לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m־יריעה k־מימדית ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r\in C^m\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $r\left(G\right)=\mathcal{M}$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r\in C^1\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה לכל $x\in G$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_r\left(x\right)\right)=k$.

הומאומורפיזם: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f\in C\left(A,B\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C\left(B,A\right)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r:G\to A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(קיימות $\{\mathcal{U}_\alpha\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ עבורן $\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן קיימות $\{G_\alpha\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^k\right)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha\subseteq C^m\left(G_\alpha,\mathbb{R}^n\right)$ עבורן $r_\alpha\left(G_\alpha\right)=\mathcal{U}_\alpha$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{U}$ המקיימת $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים כי $\{\nabla f_i\left(x\right)\}$ בת"ל.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1\ldots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי ($\{f_1\ldots f_{n-k}\}$ מערכת משוואות רגולרית)$\Longleftrightarrow$(לכל $x\in\mathcal{U}$ עבורו $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)}\left(x\right)\right)=n-k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m־יריעה k־מימדית ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\{\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)=0\}=\mathcal{M}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\right\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $(0,0,0)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}\mid\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\right\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה אזי $f:I\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^{3}$ המוגדרת $f(t,\rho)=(\gamma_{1}(t)\cos(\rho),\gamma_{1}(t)\sin(\rho),\gamma_{2}(t))$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\mathrm{Im}(\gamma)$ אזי משפט הסיבוב f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\mathrm{Im}(f)$.

טורוס: משטח הסיבוב של $\mathbb{S}^{1}$.

סימון: נסמן טורוס בעזרת $\mathbb{T}^{2}$.

משטח אוריינטבילי: משטח $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורו קיימת $N\in C(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n})$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{M}.\left(|N(x)|=1\right)\wedge\left(N(x)\perp x\right)$.

למה: טבעת מוביוס אינו משטח אוריינטבילי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $a\times b=\left(\begin{smallmatrix}a_{2}b_{3}-a_{3}b_{2}\\ a_{3}b_{1}-a_{1}b_{3}\\ a_{1}b_{2}-a_{1}b_{1}\end{smallmatrix}\right)$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $(u\times v)\perp v$ וכן $(u\times v)\perp u$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $(u\times v=0)\iff(u\in\mathrm{span}(v))$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $\det(u,v,u\times v)=\|u\times v\|^{2}\geq0$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $|v\times u|=\|v\|\,\|u\|\sin(\angle(v,u))$.

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ממימד k: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה המקיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן קיים $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם עבורו $f(A)=f(\mathcal{U})\cap\left(\mathbb{R}^{k}\times\{0_{n-k}\}\right)$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קבוצה אזי פרידיקט P עבורו לכל $a\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה P מתקיימת על $A\cap\mathcal{U}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ התב"ש

- $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית.
- $\mathcal{M}$ מקומית גרף של פונקציה $f\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{n}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\{f_{i}\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל־$\mathbb{R}^{k}$.

מסקנה: תהא $r:G\to\mathbb{R}^{n}$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a\in G$ קיימת סביבה $W\subseteq\mathbb{R}^{n}$ של $(a,0_{n-k})$ וקיים דיפאומורפיזם $s:W\to s(W)$ עבורו $s_{\restriction_{W\cap(G\times0_{n-k})}}=r$.

מפה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{k}$ הפיכה עבורה $\varphi(\mathcal{U})$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטריזציה טובה אזי $(\mathcal{U},\varphi)$.

אטלס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי קבוצה של מפות $\mathcal{A}$ עבורה $\bigcup\{\mathcal{C}_{1}\mid\mathcal{C}\in\mathcal{A}\}=\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $r:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{n}$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r(\mathcal{U})$ אזי $\left(r(\mathcal{U}),r^{-1}\right)$ מפה.

העתקת מעבר: תהיינה $(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1}),(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2})$ מפות אזי $\varphi_{1,2}:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{k}$ המוגדרת $\varphi_{1,2}=\varphi_{2}\circ\varphi_{1}^{-1}$.

טענה: תהיינה $(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1}),(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2})$ מפות ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה אזי $\left(\varphi_{1,2}\right)_{\restriction_{A}}$ דיפאומורפיזם.