```
עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. \Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O} עבורה f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}
ight)
                                                                                     .C^{\omega}\left(A,B
ight)=\{f:A
ightarrow B\mid סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי f\} אנליטית אזי
יריעה אנליטית x-מימת סביבה \mathcal{O} של xוכן קיימת עבורה לכל x\in\mathcal{M} פיימת איימת x\in\mathcal{M} עבורה לכל אוכן x\in\mathcal{M}
                                                          עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. \Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O} אנליטית מקומית עבורה f:G	o\mathbb{R}^{n-k}
                                                                                                                                                               . עקומה: יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n שהינה חד־מימדית \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                 . שהינה דו־מימדית \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n משטח: יריעה
                                                                                                                           . מימדית n-1 שהינה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מימדית מימר n-1
                                                                                                                                                                  . טענה: \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n הינה היפר־משפט חלק\mathbb{S}^n
                                                                                                                                                     הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.
יריעה לכל \mathcal{M}\cap\mathcal{U}_{lpha} אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_{lpha} פתוחות עבורן פתוחות לכל אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M} וכן \mathcal{M} יריעה לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                                                                   .(\alpha \in \Lambda
                                                             (יריעה), אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (בורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} יריעה) קיימת סביבה x \in \mathcal{M} יריעה), יריעה אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (\mathcal{M} \cap \mathcal{U}
                  עבורה r\in C^m (G,\mathbb{R}^n) אני פתוחה אזי G\subseteq \mathbb{R}^k מימדית ותהא T־יריעה T-יריעה T-יריעה T-יריעה ארייריעה ארייריעה אוי תהא
                                                                                                                                                                                                                          .r(G) = \mathcal{M}
       \operatorname{Lank}\left(\mathcal{D}_{r}\left(x
ight)
ight)=k מתקיים x\in G מתקיים עבורה לכל r\in C^{1}\left(G,\mathbb{R}^{n}
ight) פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית: תהא
                                                          f^{-1}\in C\left(B,A
ight) הפיכה עבורה f\in C\left(A,B
ight) אזי אזי B\subseteq\mathbb{R}^{m} ותהא A\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                       . פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית r:G	o A שהינה הומאומורפיזם. פתוחה אזי פרמטריזציה ותהא מובה: תהא A\subseteq\mathbb{R}^n שהינה הומאומורפיזם.
וכן קיימות \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha עבורן ביחס ל־\mathcal{M} עבורן קיימות (קיימות קיימות יריעה) אזי אזי \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי אזי (\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha) פתוחות ביחס ל־\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי (\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha) פתוחות ביחס ל־
                                            \mathcal{U}_{lpha}\left(G_{lpha}
ight)=\mathcal{U}_{lpha} עבורן r_{lpha}\subseteq C^{m}\left(G_{lpha},\mathbb{R}^{n}
ight) טובות טובות פרמטריזציות פרמטריזציות עבורן קיימות פרמטריזציות פרמטריזציות טובות אנדי \left\{G_{lpha}\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{k}
ight)
                          . (עבורה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} יריעה)\iff (לכל \mathcal{M} \in \mathcal{M} קיימת סביבה \mathcal{M} עבורה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי אזי (לכל אזי מובה).
(f_1\dots f_{n-k})(x)=0 המקיימת x\in\mathcal{U} עבורה לכל עבורה אזי \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית: תהא
                                                                                                                                                                                            מתקיים כי \{\nabla f_i(x)\} בת"ל.
עבורו x\in\mathcal{U} עבורו (לכל איזי איזי אויאות אויאות אויאות איזי איזי איזי f_1\dots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורו פתוחה תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית
                                                                                                                      . (rank \left(\mathcal{D}_{(f_1\dots f_{n-k})}\left(x
ight)
ight)=n-k מתקיים \left(f_1\dots f_{n-k}
ight)\left(x
ight)=0
                             תיאלית מערכת משוואות רגולרית: תהא מערכת משוואות איז מערכת משוואות רגולרית: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k פתוחה איז מערכת משוואות רגולרית: תהא
                                                                                                                                        \{(f_1\dots f_{n-k})=0\}=\mathcal{M} עבורה \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                  .(לכל \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n בעלת הצגה סתומה רגולרית) קיימת סביבה עבורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} יריעה)
                                                                                 \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\} אליפסואיד: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי a,b,c\in\mathbb{R} טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\}
                                                                               . \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1
ight\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} אזי היפרבולואיד דו־יריעתי: יהינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. מענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                                                                               .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} אזי \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1
ight\} אזי .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\} טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                              f(t,
ho)=egin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(
ho) \\ \gamma_1(t)\sin(
ho) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} המוגדרת f:I	imes(0,2\pi)	o\mathbb{R}^3 עקומה אזי \gamma:I	o(0,\infty)	imes\mathbb{R} המוגדרת
\gamma של f אזי משפט הסיבוב עקומה עבורה \gamma פרמטריזציה טובה של \gamma:Im(\gamma) אזי משפט אזי משפט \gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R} אזי משפט הינו
                                                                                                                                                                                          \operatorname{Im}\left(f\right) פרמטריזציה טובה של
                                                     f(x)=-rac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,rac{\|x\|^2-1}{2}
ight) כך f:\mathbb{R}^n	o\mathbb{S}^n נגדיר n\in\mathbb{N}_+ נגדיר n\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                                                                                           \mathbb{S}^1 טורוס: משטח הסיבוב של
```

עבורה לכל  $M\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה וכן קיימת סביבה  $M\subseteq\mathbb{R}^n$  עבורה לכל  $M\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה וכן קיימת של  $T^m$ 

יריעה חלקה x של  $\mathcal{O}$  של ביבה סביבה  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  פתוחה וכן קיימת עבורה לכל  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  עבורה לכל איימת  $x\in\mathcal{M}$ 

. עבורה  $\Gamma_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$  עבורה של קואורדינטות עד כדי פרמוטציה על  $f \in C^m \left( G, \mathbb{R}^{n-k} \right)$ 

```
. טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} יריעה דו־מימדית
                                                               טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M} אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.
                                                                              . טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M} אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.
                                                                                                            a 	imes b = \left(egin{array}{c} a_2b_3 - a_3b_2 \ a_3b_1 - a_1b_3 \ a_1b_2 - a_1b_1 \end{array}
ight) אזי a,b \in \mathbb{R}^3 יהיו
                                                                                                                 (u \times v) \perp u וכן (u \times v) \perp v אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                            (u \times v = 0) \iff (u \in \text{span}(v)) אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                          \det(u,v,u\times v)=\|u\times v\|^2>0 אזי u,v\in\mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                            |v \times u| = \|v\| \|u\| \sin\left(\angle\left(v,u\right)\right) אזי u,v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
וכן קיים אוכן A\subset \mathcal{U} סביבה המקיימת על \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n עבורה איימת \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n סביבה המקיימת איים קבוצה ניתנת ליישור על A\subset\mathcal{U}
                                                                                                f(A) = f(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}) דיפאומורפיזם עבורו f: \mathcal{U} \to \mathcal{V}
עבורה P מתקיימת מקומית: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n קבוצה אזי פרידיקט עבורו לכל עבורו לכל A\subseteq\mathbb{R}^n עבורה על
                                                                                                                                                                                                 A \cap \mathcal{U}
                                                                                                                                      משפט: תהא k\in\mathbb{N}_+ ויהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n התב"ש
                                                                                                                                                                 .יריעה k־מימדית \mathcal{M}
                                              . עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. עד כדי f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}
ight) איז פונקציה של פונקציה \mathcal{M}
                                                                                              r:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^n מקומית בעלת פרמטריזציה טובה \mathcal M • מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית \mathcal M • מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית \mathcal M • מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל\mathcal M •
מסקנה: תהא W\subseteq\mathbb{R}^n של (a,0_{n-k}) של וקיים דיפאומורפיזם קיימת סביבה r:G	o\mathbb{R}^n של וקיים דיפאומורפיזם
                                                                                                                 .s_{\restriction_{W\cap \left(G	imes 0_{n-k}
ight)}}=r עבורו s:W	o s\left(W
ight) הינה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.
                                            \mathcal{U}=W\cap A פתוחה עבורה אזיW\subseteq\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזיA\subseteq\mathbb{R}^d אזיA\subseteq\mathbb{R}^d אזי
                                              \mathcal{U}=W\cap A סגורה עבורה אזי W\subset\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזי A\subset\mathbb{R}^d אזי אזי סגורה סגורה סגורה אזי
                                         (\forall x \in \mathcal{U}. \exists r > 0.B_r(x) \cap A \subseteq \mathcal{U}) \Longleftrightarrow (Aמשפט: תהא \mathcal{U} \subseteq A ותהא \mathcal{U} \subseteq A אזי שמיט: תהא אוי ווהא משפט: משפט מחוחה ביחס ל־
                                              \mathcal{U}\in\{A,\varnothing\} פתוחה מתקיים A\subseteq \mathbb{R}^d מתקיים A\subseteq\mathbb{R}^d עבורה לכל קבוצה קשירה:
                       \mathcal{U},\mathcal{U}\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית לA\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי (A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית לA\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי (A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\}
פתוחה f^{-1}\left(\mathcal{U}\right) פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי f אזי f:A\to B אוי היינה A,B\subseteq\mathbb{R}^d פתוחה יחסית ל־A,B\subseteq\mathbb{R}^d
arphi^{-1} וכן פתוחה arphi פתוחה יריעה arphi:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^k החסית ותהא שפה: תהא יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה איריעה איריעה איריעה מימדית מחחה יחסית ותהא
                                                                                                                                                            (\mathcal{U}, \varphi) פרמטרזיציה טובה אזי
                                                      \mathcal{A} אטלס: תהא \mathcal{A} = \mathcal{M} יריעה \mathcal{A}־מימדית אזי קבוצה של מפות אינ איי איי איי א\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n אטלס:
             . מפה. (r(\mathcal{U}),r^{-1}) אזי r(\mathcal{U}) אזי רגולרית של פרמטריזציה חח"ע פרמטריזציה ותהא מימדית ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מפה.
                                                                                                            \mathbb{RP}^n = \left\{ vv^T \mid v \in \mathbb{S}^n 
ight\} אזי n \geq 2 המרחב הפרוייקיבי: יהי n \geq 2
                                                                                                                   . יריעה n מימדית. \mathbb{RP}^n\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^2} אזי n\geq 2 יריעה n מימדית.
                                               arphi_{1,2}=arphi_2\circarphi_1^{-1} המוגדרת arphi_{1,2}:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^k מפות אזי מעבר: תהיינה \left(\mathcal{U}_1,arphi_1
ight),\left(\mathcal{U}_2,arphi_2
ight) מפות אזי
                                     a_i\in\{1,2\} טענה: תהיינה arphi_i\left(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2
ight) מפות ותהא מפות ותהא מפות מפות A\subseteq\mathbb{R}^k מפות ותהא מפות \mathcal{U}_1,arphi_1
ight), (\mathcal{U}_2,arphi_2)
                                                                  . טענה: \varphi_{1,2} דיפאומורפיזם A\subseteq\mathbb{R}^k מפות ותהא מפות (\mathcal{U}_1,\varphi_1)\,,(\mathcal{U}_2,\varphi_2) דיפאומורפיזם
f \circ \varphi^{-1} הינה f \circ \varphi^{-1} מיריעה: תהא f \circ \varphi^{-1} יריעה f \circ \varphi^{-1} מינדיעה: עבורה לכל מפה f \circ \varphi^{-1} מיריעה: f \circ \varphi^{-1} מיריעה: f \circ \varphi^{-1}
                                                                      C^{lpha} הינה מדרגת מדרגת הינה לכל היותר f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^m אזי מיריעה לכל יריעה מדרגת הינה לכל מיריעה
עבורו \mathcal{M} של \{(\mathcal{U}_lpha,arphi_lpha)\}_{lpha\in\Lambda} יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזיי M\subseteq\mathbb{R}^n אזיי M\subseteq\mathbb{R}^n אייים אטלס \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אייים מימדית ותהא
                                                                                                                                                          \alpha \in \Lambda לכל C^{\alpha} הינה f \circ \varphi^{-1}
                                                                                                          . אטלס \mathcal{M}יריעה \mathcal{M}־מימדית אזי קיים ל\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אטלס.
```

 $\exists x \in \mathcal{M}. (|N\left(x
ight)| = 1) \land (N\left(x
ight) \perp x)$  המקיימת  $N \in C\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n
ight)$  עבורו קיימת  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  המקיימת אוריינטבילי:

 $\mathbb{T}^2$  סימוו: נסמו טורוס בעזרת

למה: טבעת מוביוס אינו משטח אוריינטבילי.

```
\operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)
                                         אזי p מפה באשר \mathcal U סביבה של ותהא p\in\mathcal M ותהא מימדית יריעה \mathcal M\subseteq\mathbb R^n יריעה אייי איי
                                                                                                                                                                                             T_{p}(\mathcal{M}) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\omega^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)
                                                                                                  \dim\left(T_p\left(\mathcal{M}
ight)
ight)=\dim\left(\mathcal{M}
ight) אזי p\in\mathcal{M} יריעה ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: תהא
                                     p טענה: תהא M \subseteq \mathbb{R}^n הירעה ל-מימדית תהא אוי p \in \mathcal{M} ותהא m \in \mathbb{R}^n הצגה סתומה רגולרית בסביבה של
                                                                                                                                                                                                         T_p(\mathcal{M}) = \ker (\mathcal{D}_f(p))
                                                                                                                                 \dot{\gamma}=rac{d\gamma}{dt} אזי אזי C^1 מסילה \gamma:(a,b)	o \mathcal{M} אהירות: תהא
                                                                                                                             \dot{\gamma}\left(t
ight)\in T_{\gamma\left(t
ight)}\left(\mathcal{M}
ight) אזי C^{1} מסילה \gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathcal{M} איזי
                T_{p}(\mathcal{M})=\left\{\dot{\gamma}\left(0
ight)\mid\left(\gamma\in C^{1}\left(\left(-arepsilon,arepsilon
ight),\mathcal{M}
ight)
ight)\wedge\left(\gamma\left(0
ight)=p
ight)
ight\} אזי p\in\mathcal{M} אזי אינים: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} יריעה
\gamma_i\left(0
ight)=p מסילות המקיימות \gamma_1,\gamma_2:(-arepsilon,arepsilon)	o \mathcal{M} ותהיינה ותהיינה f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) תהא p\in\mathcal{M} תהא יריעות תהא
                                                                                                                                         \left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0
ight)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}\right)\right)\left(0
ight) אזי \dot{\gamma}_{i}\left(0
ight)=v וכן
\mathcal{D}_{p}f:T_{p}\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow T_{f(p)}\left(\mathcal{M}'
ight) אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעות: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' איזי יריעות: תהיינה
                                         \dot{\gamma}\left(0
ight)=v וכן \gamma\left(0
ight)=p המקיימת \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} עבור מסילה \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} עבור מסילה עבור מסילה
                                                                . העתקה לינארית. \mathcal{D}_p f אזי f \in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}') ותהא p \in \mathcal{M} העתקה לינארית. תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}'
                                             משפט כלל השרשרת: תהיינה M, \mathcal{M}', \mathcal{M}'' יריעות תהא f \in C^{lpha}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') יריעות M, \mathcal{M}', \mathcal{M}'' משפט כלל השרשרת: משפט כלל השרשרת: מאיזי
                                                                                                                                                                                        \mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right)=\mathcal{D}_{f(p)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)
                                                       \mathcal{L}(\mathcal{D}_{p}f)\left(v
ight)=\mathcal{D}_{p}\left(f
ight)\cdot v אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעות היינה \mathcal{M},\mathcal{M}' אזי יריעות תהא
                                                טענה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעה פומה הצגה סתומה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא
                                                                                                                                                       T_p\left(\mathcal{M}\right) = \operatorname{span}\left(\left\{\nabla F_1\left(p\right), \dots, \nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\}^{\perp}\right)
\left\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{1}
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{k}
ight)
ight\} אזי p\in\mathcal{M} יריעה תהא יריעה תהא p\in\mathcal{M} ותהא משנה: תהא מפה באשר ש סביבה של p\in\mathcal{M}
                                                                                                                                                                                                                     T_{p}\left(\mathcal{M}\right) בסיס של
                                                                T_p\left(\mathcal{M}
ight) להיות הבסיס הסטנדרטי של \left\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_1
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_k
ight)
ight\} הערה: נגדיר את
 (\mathcal{V},\psi) עתהא p\in\mathcal{M} מפה ב־\mathcal{M} באשר \mathcal{M} סביבה של p\in\mathcal{M} תהא p\in\mathcal{M} תהא f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}') יריעות תהא יריעות תהא
[\mathcal{D}_p f]_{i,j} = rac{\partial \left(\psi \circ f \circ arphi^{-1}
ight)_i}{\partial x_j} אזי f\left(p
ight) אזי f\left(p
ight) באשר \mathcal{M}' \subseteq \mathbb{R}^n באשר g \in C^{lpha}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) ותהא g \in \mathcal{C}^{lpha}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) ותהא g \in \mathcal{C}^{lpha}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) באשר g \in \mathcal{C}^{lpha}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) ותהא איריעה תהא g \in \mathcal{C}^{lpha}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) ותהא איריעה תהא איריעה תהא
                                                                                             \mathcal{D}_pf=\left(\mathcal{D}_pg\right)_{\restriction_{T_p(\mathcal{M})}} אזי g_{\restriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}=f וכן p סביבה של v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) ותהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אזי איי נגזרת כיוונית: תהא
                      L_vf=\sum_{i=1}^k v_i\cdot rac{\partial \left(f\circarphi^{-1}
ight)}{\partial x_i} אוי v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) ותהא p מפה בסביבה של מפה בסביבה של f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אוי f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight)
                                                                                                                       .rac{\partial f}{\partial v}=L_v f אזי v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) ותהא ותהא f\in C^lpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אזי
                                                                        v \perp T_p(\mathcal{M}) עבורו v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} אזי v \in \mathcal{M} אזי על־משטח על־משטח על־משטח עבורו יהי
                                           \|v\|=1 עבורו עבורו v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} אזי וקטור נורמל עבורו על־משטח על־משטח על־משטח על־משטח עבורו M\subseteq\mathbb{R}^n
טענה: יהי p \subseteq \mathcal{N} אזי איי וקטור נורמל יחידה וורמל ורמל וורמא p \in \mathcal{M} על־משטח תהא על־משטח וותהא וותהא p \in \mathcal{M} ותהא וותהא
                                                                                                                                                                                                                                                  ל־p.
```

עבורה  $f:\mathcal{M} o\mathcal{M}'$  יריעה  $f:\mathcal{M} o\mathcal{M}'$  יריעה  $\mathcal{M}'\subset\mathbb{R}^m$  יריעה  $\mathcal{M}'\subset\mathbb{R}^n$  יריעה  $\mathcal{M}'\subset\mathbb{R}^n$  יריעה אזיי

p של p של  $p\in \mathbb{R}^n$  של  $p\in \mathcal{M}$  פיימת סביבה  $p\in \mathcal{M}$  אזי  $p\in \mathcal{M}$  של  $p\in \mathcal{M}$  איז און אינה  $p\in \mathcal{M}$  של  $p\in \mathcal{M}$  של אינה. תהא

 $\mathcal{M}'$  של  $\mathcal{M}'$  ולכל מפה ( $\mathcal{U},\psi$ ) של  $\mathcal{M}$  ולכל מפה ( $\mathcal{U},\varphi$ ) של אזי ( $\mathcal{U},\varphi$ ) איי אזי ( $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$  איי ולכל מפה  $\mathcal{M},\mathcal{M}'$  יריעות ותהא

 $g\circ f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}'')$  אזי  $g\in C^{lpha}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$  ותהא  $f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$  איזי יריעות תהא  $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$  טענה: תהיינה

סטענה: תהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה  $\mathcal{M}$ ־מימדית תהא  $p\in\mathcal{M}$  ותהיינה  $p\in\mathcal{M}$  סביבות של  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  מפות באשר  $\mathcal{M}$ 

 $f,f^{-1}\in C^{lpha}$  עבורה  $f:\mathcal{M} o\mathcal{M}'$  יריעות אזי  $\mathcal{M},\mathcal{M}'$  עבורה ירינה יריעות אזי יריעות אזי יריעות אזי

 $\dim\left(\mathcal{M}
ight)=\dim\left(\mathcal{M}'
ight)$  איריעות דיפאומורפיות אזי  $\mathcal{M},\mathcal{M}'$  מסקנה: תהיינה

 $\dim\left(\mathcal{M}
ight)=k$  יריעה k־מימדית אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה  $\mathcal{M}$ 

 $.C^lpha$  הינה  $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}^m$ 

.( $g_{
estriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}=f$  המקיימת  $g\in C^{lpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)$ 

מתקיים כי  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  הינה מתקיים

$$(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det \left( egin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, 1}{\sqrt{1 + \|\nabla f(p)\|^2}} 
ight)$$
 איז איז בצורה לא פורמלית מתקיים  $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det \left( egin{array}{c} (v_1)_1 & \ldots & (v_{n-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{i-1} & \ldots & (v_{n-1})_{i-1} \\ (v_1)_{i+1} & \ldots & (v_{n-1})_{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_n & \ldots & (v_{n-1})_n \end{array} 
ight) e_i$  איז בצורה לא פורמלית מתקיים  $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = \det \left( egin{array}{c} e_1 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (v_1)_n & \ldots & (v_{n-1})_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (v_n)_n & \ldots & (v_n)_n \\ \end{bmatrix}$ 

$$egin{pmatrix} \left(egin{array}{c} e_n & | & & & \\ e_n & | & & & \\ \end{matrix}
ight) \end{pmatrix}$$
 טענה: יהיו  $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$  אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.  $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$  אזי  $v_1\ldots v_m\in\mathbb{R}^n$  דטרמיננטת גראם: יהיו  $v_1\ldots v_m\in\mathbb{R}^n$  אזי  $v_1\ldots v_m\in\mathbb{R}^n$  טענה: יהיו  $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ 

- $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \perp v_i$  מתקיים  $i \in [n-1]$  לכל
  - $||v_1 \times \ldots \times v_{n-1}|| = \sqrt{\Gamma(v_1 \ldots v_{n-1})} \bullet$
  - $\det(v_1 \times \ldots \times v_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}) \ge 0 \bullet$

pטענה: יהי  $\frac{\partial r}{\partial x_1} imes \dots imes \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$  אזי p אזי פרמטריזציה פרמטריזציה וקטור נורמל  $p \in \mathcal{M}$  על־משטח תהא  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  יהי

 $\partial^{lpha}f=rac{\partial^{|lpha|}}{\partial x^{lpha}}(f)$  אזי  $lpha\in\mathbb{N}^{k}$  ותהא  $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$  אזי  $f\in C^{\infty}$ 

סימון: תהיינה f(x) אוז f(x) אוז f(x) סימון: תהיינה f(x) אוז f(x) אוז f(x) אוז f(x) סימון: תהיינה f(x) אוז f(x) אונר כלל לייבניץ: תהיינה f(x) ותהא f(x) ותהא f(x) ותהא f(x) ותהא f(x) בתוחה אוז f(x) ב . עבור  $a_{\alpha}$  וכן  $m \in \mathbb{N}$  חלקות

אופרטור  $\overline{\mathcal{U}}$  אופרטור  $\mathcal{M}$  על  $\mathcal{M}$  על  $\mathcal{M}$  באשר  $\mathcal{M}$  עבורה לכל מפה  $\mathcal{M}$  עבורה אזי  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  אופרטור דיפרנציאלי: תהא יריעה אזי  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה אזי . מתקיים  $a_{lpha}$  וכן  $m\in\mathbb{N}$  וכן  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  וכן  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  וכן לכל מפה  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים כי  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  וכן לכל מפה  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים כי  $m\in\mathbb{N}$  עבורה  $m\in\mathbb{N}$  וכן לכל מפה  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים כי  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  וכן לכל מפה  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים כי

 $.C^{m}$  העתקה  $x \mapsto \mathcal{D}_{x} \varphi \left( v \left( x \right) \right)$ 

הינה  $L_v\left(f
ight)(x)=L_{v(x)}\left(f
ight)$  המוגדרת  $L_v:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$  הינה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  המוגדרת  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ 

 $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \neq 0\}}$  אזי  $f \in C(\mathcal{M})$  תומך: תהא

 $.C_{C}^{\infty}\left(\mathcal{U}
ight)=\left\{ f\in C^{\infty}\left(\mathcal{U}
ight)\mid$  קומפקטית supp  $(f)\}$  פתוחה אזי  $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$  יריעה ותהא  $\mathcal{M}$  יריעה ותהא

 $f_{
ho u}=g_{
ho u}$  עבורן  $f,g\in C_C^\infty$  פתוחה ולכל עבורה לכל  $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$  עבורה לכל עבורה אזי  $L:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$  עבורן אופרטור מקומי: תהא  $L(f)_{\mid_{\mathcal{U}}} = L(g)_{\mid_{\mathcal{U}}}$  מתקיים

 $\|f\|_{W,n}=\sup_{\substack{x\in w\ |lpha|< n}}\|(\partial^{lpha}f)\left(x
ight)\|$  אזי  $n\in\mathbb{N}$  ויהי  $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}
ight)$  פתוחה תהא  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ 

טענה: תהא  $|lpha| \leq n$  פתוחה תהא  $|lpha| \leq n$  תהא עבורה  $x \in \mathcal{W}$  עבורה  $f \in C^\infty(\mathcal{W})$  ויהי ויהי  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$  אזי קיימת עבורה  $g \in C^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$  וכן  $\delta \in (0, \varepsilon)$ 

- $.g_{\upharpoonright_{B_{\frac{\delta}{2}}(x)}} = 0 \bullet$   $.g_{\upharpoonright_{\mathcal{W} \backslash B_{\delta}(x)}} = 0 \bullet$
- $.\|f-g\|_{W,n}<\varepsilon \bullet$

 $oxed{a}_{eta}(lpha)=\prod_{i=1}^kinom{lpha_i}{eta_i}$  אזי  $lpha,eta\in\mathbb{N}^k$  סימון: יהיו

משפט פיטרה: תהא  $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$  יריעה ותהא יריעה ותהא  $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ 

- אופרטור מקומי. L
- .supp  $(L(f)) \subseteq \text{supp}(f)$  מתקיים  $f \in C^{\infty}(\mathcal{M})$ 
  - אופרטור דיפרנציאלי. L

x סביבה של  $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$  אזי קיימת  $x\in\mathcal{V}$  אזי מקומי ותהא אופרטור לינארי  $L:C^\infty\left(\mathcal{V}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{V}
ight)$  סביבה של  $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$  סביבה של  $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \leq C\,\|f\|_{\mathcal{W},n}$  מתקיים  $f\in C_C^\infty\left(\mathcal{W}ackslash\{x\}
ight)$  עבורה עבורם לכל C>0 וכן  $n\in\mathbb{N}$  וכן קיים  $\overline{\mathcal{W}}$  וכן  $n\in\mathbb{N}$  פתוחה עבורה קיימים  $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$  פתוחה אופרטור לינארי אופרטור לינארי  $L:C^\infty\left(\mathcal{V}\right)\to C^\infty\left(\mathcal{V}\right)$  פתוחה עבורה קיימים  $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$  אופרטור דיפרנציאלי מסדר  $f\in C^\infty_C\left(\mathcal{W}\right)$  עבורם לכל C>0

עבורן  $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathbb{R}^n
ight)$  אזי קיימות של X אזי קיימות  $X\subseteq\mathbb{R}^n$  עבורן  $X\subseteq\mathbb{R}^n$ 

- $0 \le \rho_i \le 1$  מתקיים  $i \in \mathbb{N}$  לכל
- .supp  $(\rho_i)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$  עבורו  $\alpha\in\Lambda$  קיים  $i\in\mathbb{N}$  •
- $|\{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i(\mathcal{W}) \neq 0\}| \in \mathbb{N}$  עבורה  $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה סביבה פתוחה  $x \in X$  לכל
  - $\sum_{i\in\mathbb{N}}
    ho_{i}\left(x
    ight)=1$  מתקיים  $x\in X$  לכל

. אופרטור דיפרנציאלי אופרטור לינארי מקומי אזי אופרטור דיפרנציאלי ויהי  $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}
ight) o C^{\infty}\left(\mathcal{V}
ight)$  אופרטור אופרטור דיפרנציאלי.

עבורן  $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$  אזי קיימות X של X איז פתוח ב־ $\{\mathcal{U}_lpha\}_{lpha\in\Lambda}$  ויהי  $X\subseteq\mathcal{M}$  ויהי איי פתוח ב־ $\{\mathcal{U}_lpha\}_{lpha\in\Lambda}$ 

- $0 \le \rho_i \le 1$  מתקיים  $i \in \mathbb{N}$  לכל
- .supp  $(\rho_i)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$  עבורו  $\alpha\in\Lambda$  קיים  $i\in\mathbb{N}$  לכל
- $|\{i\in\mathbb{N}\mid \rho_i\left(\mathcal{W}
  ight)
  eq0\}|\in\mathbb{N}$  עבורה  $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$  שביבה פתוחה  $x\in X$  לכל
  - $\sum_{i\in\mathbb{N}}
    ho_{i}\left(x
    ight)=1$  מתקיים  $x\in X$  לכל

 $\Pi\left(v_1\dots v_k
ight)=\left\{\sum_{i=1}^k t_i v_i\mid orall i\in[k]\ . t_i\in[0,1]
ight\}$  איז  $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^n$  מקבילון: יהיו  $v_k\in\mathbb{R}^n$  איז  $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^n$  מפת מקבילון: יהיו  $v_k\in\mathbb{R}^n$  איז  $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^n$  מפת מקבילון: יהיו

טענה: יהיו  $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^k$  אזי

- $\operatorname{Vol}_{k}\left(\left(\begin{smallmatrix}v_{1}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right),\ldots,\left(\begin{smallmatrix}v_{k}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right)\right) = \left|\det\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\right| \bullet$
- . $\operatorname{Vol}_k\left(Tv_1,\ldots,Tv_k
  ight)=\operatorname{Vol}_k\left(v_1,\ldots,v_k
  ight)$  אזי  $T\in O\left(n
  ight)$  תהא

זניחה  $\varphi\left(E\cap\mathcal{U}\right)$  מתקיים כי מפה ליריעה:  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  זניחה מניחה ביחס ליריעה: תהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אניחה ביחס ליריעה:  $\mathbb{R}^k$ ב-

(לכל  $(\mathcal{M}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ ) איזי אזי  $E \subseteq \mathcal{M}$  אזי ותהא  $\mathcal{M}$  ותהא אזי אטלס של  $\{(\mathcal{U}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$  יריעה  $\mathcal{M}$ ־מתקיים כי  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  זניחה ב־ $\mathbb{R}^k$ .

 $\mathcal{M}$ טענה: תהא  $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$  אזי ל־ $\mathcal{M}$  זניחות ביחס ל־ $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}
ight)$  זניחה ביחס ל־ $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אריינה  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ 

 $\mathcal{M}$  יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  מענה: תהא

 $B_f=\{x\in\mathcal{M}\mid x$  אינה רציפה על  $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$  יריעה ותהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי אינה רציפה על  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  עבורה

- .חסומה  $f \bullet$
- . קומפקטי supp (f)
- $\mathcal{M}$ זניחה ביחס ל־ $B_f ullet$

 $\mathcal{M}$  יריעה אזי אינטגרבילית אינטגרבילית עבורה  $\mathbb{1}_E$  אינטגרבילית יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה אינטגרבילית אונטגרבילית אינטגרבילית אונטגרבילית או

 $arphi\left(E
ight)$ שפה ותהא  $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$  אזי ( $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$  אזי ורדן ב- $(\mathcal{U},arphi)$  מפה ותהא מפה ותהא מפה אזי וורדן ב- $(\mathcal{U},arphi)$  מפה אזי מפה ותהא מדידה אורדן ב- $(\mathbb{R}^k$ 

 $\operatorname{supp}(f)\subseteq\mathcal{U}$  אבורה עבורה  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  קומפקטית וכן קיימת מפה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$  עבורה  $\mathbb{R}^n$  נוחה.  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$  עבורה  $\mathbb{R}^n$  נוחה.

 $i\in\mathbb{N}$  נוחה לכל  $\mathcal{U}_i$  נוחה אזי קיים אטלס בן־מנייה  $\{(\mathcal{U}_i,arphi_i)\}$  של אזי קיים אטלס אזי קיים אטלס בן־מנייה  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ 

מסקנה: תהא  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  נוחות ואינטגרביליות רימן איי קיימות  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  נוחות ואינטגרביליות רימן איי קיימות  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  עבורן גורן גורן ביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטג

וכן  $G_i\subseteq\mathbb{R}^k$  באשר באשר פרמטרזיציות פרמטרזיציה וכך תהא היינה היינה פרמטרזיציה פרמטרזיציה בעלת פרמטרזיציה אינטגרבילית בעלת איי אינטגרבילית רימן אזי ותהא  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  ותהא וכך  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ 

אינטגרבילית רימן  $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$  ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  אינטגרבילית פרמטריזציה טובה  $f:\mathcal{M} o\mathcal{R}$  ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  אינטגרבילית פרמטריזציה טובה  $\int_{\mathcal{M}}f=\int_G(f\circ r)\,(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r\right)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r\right)\right)}\mathrm{d}q$  אזי אזי  $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$  ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  אינטגרבילית רימן מסקנה: תהא  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  יריעה  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  אינטגרבילית פרמטריזציה טובה  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  באשר

 $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$  ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  אינטגרבילית רימן  $f:G o\mathcal{M}$  אינטגרבילית אינטגרבילית  $G\subseteq\mathbb{R}^k$  איזי  $f:G o\mathcal{M}$  איזי  $f:G \to \mathcal{M}$  אינטגרבילית פרמטריזציה טובה  $f:G \to \mathcal{M}$  באשר  $f:G \to \mathcal{M}$  ותהא  $f:G \to \mathcal{M}$  אינטגרבילית רימן  $\int_{\mathcal{M}} f=\int_G (f\circ r)\,(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(rac{\partial r}{\partial x_1}\dotsrac{\partial r}{\partial x_k}
ight)}\mathrm{d}q}$  איזי

טענה: תהא  $f:\mathcal{M} o \mathbb{R}$  נוחות ואינטגרביליות רימן אינטגרביליות אינטגרביליות ואינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות ואינטגרביליות רימן  $\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{M}} g_i$  אזי  $f = \sum_{i=1}^m g_i$  וכן  $f = \sum_{i=1}^n f_i$ עבורן נוחות ואינטגרביליות רימן ותהיינה  $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$  נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן אינטגרביליות הייעה  $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$  אינטגרביליות רימן עבורן  $\int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i$  איז  $f = \sum_{i=1}^n f_i$  $R(\mathcal{M}) = \{f : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \mid \mathcal{M} \in \mathcal{M} \}$  אינטגרבילית אזי אינטגרבילית יריעה אזי אינטגרבילית יריעה  $\mathcal{M}$ . טענה: תהא  $\mathcal{M}$  יריעה אזי  $R(\mathcal{M})$  מרחב לינארי . מטקנה: תהא M יריעה אזי  $\int_{\mathcal{M}}:R\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow\mathbb{R}$  יריעה אזי יריעה מסקנה: תהא  $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}\mathrm{dVol}_{k}$  אזי  $f\in R\left(\mathcal{M}
ight)$  יריעה ותהא  $\mathcal{M}$  יריעה ותהא  $\bigcup_{i=1}^\infty E_i = \mathcal{M}$  יריעה איי ז'ורדן של יריעה: תהא איי  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה איי ז'ורדן אייריעה איי איריעה  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה איי אינטגרל אם קיים בורו לכל מיצוי ז'ורדן של  $L\in\mathbb{R}$  זניחה אזי אם ליים באשר  $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$  יריעה ותהא אינטגרל אינטגרל אינטגרל אינטגרל אייריעה ותהא  $\int_{\mathcal{M}}f=L$  אזי אוו $\lim_{i o\infty}\int_{E_i}f\cdot 1\!\!1_{E_i}=L$  מתקיים של אוי  $(E_i)_{i=1}^\infty$  אזי סגורות טענה: תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה ותהא לכל מיצוי ז'ורדן של מיצוי ז'ורדן של  $f \in R(\mathcal{M})$  אזי לכל מיצוי יריעה  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה ותהא  $.\int_{\mathcal M}f=\lim_{i o\infty}\int_{\mathcal M}f\cdot 1\!\!1_{E_i}$ נפח של יריעה: תהא  $\mathcal M\subseteq\mathbb R^n$  יריעה אזי אזי  $\mathcal M\subseteq\mathbb R^n$ .  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$  עבורן  $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$  מפות זרות: מפות מפות טענה: תהיינה  $f_{\upharpoonright_{\mathcal{M}\setminus(S\cup(\biguplus_{i=1}^n\mathcal{U}_i))}}=0$  מפות זרות בזוגות על איז תהא תהא איינה  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  אזי מפות זרות בזוגות על מפות זרות בזוגות על מענה:  $\int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{U}_i} f$ . Length  $(\gamma)=\lim_{m\to\infty}\sup_{a=t_0<\ldots< t_m=b}\sum_{i=1}^m\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\|$  אזי  $\gamma\in C\left([a,b]\,,\mathbb{R}^n\right)$  מימון: תהא  $\gamma\in C\left([a,b]\,,\mathbb{R}^n\right)$ .Length  $(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'\left(t\right)\|\,\mathrm{d}t$  אזי  $\gamma\in C^1\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$  טענה: תהא .Length  $(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_1\left(\mathcal{M}\right)$  איריעה חד־מימדית אזי  $\mathcal{M}$  יריעה תהא  $\mathcal{M}$ .Length  $(\mathcal{M})=$  Length  $(\gamma)$  יאיה טובה אזי  $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$  ותהא ותהא יריעה יריעה יריעה  $\mathcal{M}$  יריעה  $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ .Length  $(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'\left(t
ight)
ight)^2}\mathrm{d}t$  אזי  $f\in C^1\left(\mathcal{U}
ight)$  פתוחה ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$  אחי  $\|\gamma'\|=\sqrt{r^2+r'}$  אא  $\gamma\left(t
ight)=\left(r\left(t
ight)\cos\left( heta\left(t
ight)
ight),r\left(t
ight)\sin\left( heta\left(t
ight)
ight)
ight)$  כך  $\gamma:\left(a,b
ight) o \mathbb{R}^2$  נגדיר  $r, heta\in C^1\left(\mathbb{R}
ight)$  מסקנה: תהיינה .Area  $(\mathcal{M}) = \mathrm{Vol}_2\left(\mathcal{M}\right)$  אזי חד־מימדית יריעה  $\mathcal{M}$  יריעה  $\mathcal{M}$  יריעה חד־מימדית אזי  $G\subseteq\mathbb{R}^2$  אזי טענה: תהא  $G\subseteq\mathbb{R}^2$  יריעה דו־מימדית ותהא ותהא  $r:G o\mathcal{M}$  פרמטריזציה טובה באשר  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^3$ .Area  $(\mathcal{M}) = \int_{G} \left| \frac{\partial r}{\partial x_{1}} (x) \times \frac{\partial r}{\partial x_{2}} (y) \right| dxdy$ .Area  $(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|
abla f\left(x,y
ight)\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$  אזי  $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$  פתוחה ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$  אחי  $\det\left(I+uv^T
ight)=1+\langle u,v
angle$  אזי  $u,v\in\mathbb{R}^n$  טענה: תהיינה . $\operatorname{Vol}_k\left(\Gamma_f
ight)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|
abla f\left(x
ight)
ight\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$  אזי  $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}
ight)$  פתוחה ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$  מסקנה: תהא x בנקודה  $\alpha$  (x) באשר  $\alpha:\Gamma_f o \mathbb{R}$  ותהא ווהא  $f\in C^1$  ( $\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}$ ) פתוחה תהא פתוחה תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ . $\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x
ight)
ight\|^{2}}=rac{1}{\cos(lpha(x))}$  ציר איז  $e_{k+1}$  איז איז איז איז איז ארנימדס: יהיו  $P_{1},P_{2}$  מישורים מקבילים במרחק  $P_{1},P_{2}$  ויהי  $P_{1},P_{2}$  איז השטח הכלוא על צ .Area  $(\mathcal{M}) = 2\pi h$  $P_1$  בין  $R\cdot\mathbb{S}^2$  בין  $R\cdot\mathbb{S}^2$  ויהי  $R\cdot\mathbb{S}^2$  ויהי  $R\cdot\mathbb{S}^2$  בין במרחק ל־כות משורים מקבילים מחותכים את משקנה: יהיו .Area  $(\mathcal{M}) = 2\pi hR$ 

 $A_1, H_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max\{d(x, H_1), d(x, H_2)\} \leq d(H_1, H_2)\}$  קורה: יהיו  $A_1, H_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  היפר־משטחים מקבילים אזי

.Width  $(P_{H_1,H_2})=d$   $(H_1,H_2)$  איי היפר־משטחים  $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$  רוחב קורה: יהיו  $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$  גוף קמור איי  $K\subseteq\mathbb{R}^n$  אוף קמור איי  $K\subseteq\mathbb{R}^n$  רוחב גוף: יהי

.Width  $(K) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{Width } (P_i)$ 

 $R_{\mathcal{U}}=\{f:\mathcal{M} o\mathbb{R}\mid(\mathrm{supp}\,(f)\subseteq\mathcal{U})\land(\alpha_{\mathcal{U}})$  מפה אזי  $f\}$  נוחה ואינטגרבילית רימן $\mathcal{M}$  יריעה ותהא  $\mathcal{M}$  יריעה מפה אזי

טענה: תהא  $R_{\mathcal{U}}$  מרחב אזי מפה ( $\mathcal{U}, arphi$ ) מרחב לינארי.  $\mathcal{M}$  מרחב לינארי.

. מסקנה: תהא  $f_{\mathcal{M}}:R_{\mathcal{U}} o \mathbb{R}$  מפה אזי מפה ותהא יריעה ותהא יריעה ותהא מפה מפה מפה מפה מסקנה: מסקנה

```
.Width<sub>K</sub> (P) = \inf_{m \in \mathbb{R}_+} \{ m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists a \in \mathbb{R}^n . K \subseteq m \cdot P + a \}
השערת באנג: יהי K\subseteq \bigcup_{i=1}^m Width_K(P_i) אזי אוי K\subseteq \bigcup_{i=1}^m P_i קורות עבורן קומפקטי ויהיו ויהיו קומפקטי ויהיו אזי R\subseteq \mathbb{R}^n אזי השערת באנג:
. היפר־משטח arphi^{-1}\left(t
ight) אזי 
ablaarphi
eq 0 באשר arphi\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}
ight) היפר־משטח פתוחה תהא \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}
עבורו לכל \delta>0 אזי קיים arphi>0 אזי איי קיים arphi\in\mathcal{V} וכן arphi(\mathcal{V})=(a,b) וכן 
ablaarphi\neq0 באשר arphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) אזי קיים arphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R})
.\int_{B_{\delta}(p)}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר
                                                                                                                   \int_{\mathcal{V}} f = \int_{a}^{b} \int_{\mathcal{C}^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\|\nabla \mathcal{C}(x)\|} d\mathrm{Vol}_{n-1}(x) dt אוי supp (f)
v\in T_x\left(\mathcal{M}
ight) לכל \langle u,v
angle=L_varphi\left(x
ight) עבורו u\in T_x\left(\mathcal{M}
ight) לכל ותהא x\in\mathcal{M} ותהא arphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n לכל

abla x הוא arphi בנקודה x הוא x\in\mathcal{M} ותהא x\in\mathcal{M} ותהא arphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R}) יריעה תהא יריעה תהא
\psi_{
ho_{\mathcal{M}}}=arphi_{
ho_{\mathcal{M}}}=arphi_{
ho_{\mathcal{M}}} באשר \psi\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) ותהא x\in\mathcal{M} טענה: תהא \varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) באשר \psi\in\mathcal{M} באשר \psi\in\mathcal{M}
                                                                                                                                                                                          .\nabla_{x}\varphi=\operatorname{Proj}_{T_{x}(\mathcal{M})}\left(\nabla_{x}\psi\right) אזי
ותהא arphi\left(\mathcal{M}
ight)=(a,b) וכן 
ablaarphi\neq0 באשר arphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה תהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא ביריעה: תהא
\int_{\mathcal{M}}f=\int_a^b\int_{arphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) באשר f\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר g\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}^k
ight) באשר \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: יהי \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n תחום תהא
                                       \int_{\mathcal{V}} f = \int_{\varphi(\mathcal{V})} \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\sqrt{\det\left((\mathcal{D}_x\varphi)\cdot(\mathcal{D}_x\varphi)^T\right)}}} \mathrm{dVol}_{n-1}\left(x\right) \mathrm{d}t \int_{\mathbb{S}^n} f\left(x\right) \mathrm{dVol}_n = \int_{\mathbb{S}^n} f\left(Ax\right) \mathrm{dVol}_n אינטגרבילית רימן ותהא A \in O\left(n+1\right) אינטגרבילית רימן ותהא
                                                                                                              \mathrm{Vol}_n\left(r\cdot\mathbb{S}^n
ight)=r^n\cdot\mathrm{Vol}_n\left(\mathbb{S}^n
ight) אזי r>0 טענה: יהי r>0 טענה שטח פנים של ספירה: יהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                         \operatorname{Vol}_n\left(B_1\left(0
ight)
ight)=rac{\pi^{rac{n}{2}}}{\Gamma\left(rac{n}{2}+1
ight)} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי סענה נפח של ספירה: יהי
                                                                                 \mathfrak{X}^lpha\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{v:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^k\mid\mathcal{M} מעל C^lpha מעל v\} יריעה אזי v יריעה אזי v
                                                                                                                    .rac{\partialarphi^{-1}}{\partial x_i}\in\mathfrak{X}^{lpha}\left(\mathcal{U}
ight) מפה אזי \mathcal{C}^{lpha} יריעה \mathcal{C}^{lpha} ותהא ותהא \mathcal{C}^{lpha}
                      .(C^lpha הינה \left\langle v\left(x
ight),rac{\partial arphi^{-1}}{\partial x_i}\left(x
ight)
ight
angle מתקיים כי \left\langle v\left(x
ight),rac{\partial arphi^{-1}}{\partial x_i}\left(x
ight)
ight
angle הינה i\in[k] הינה איי (i\in[k]
                                                                                               (C^{lpha}) הינה v:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^kיהינה v אזי v:\mathcal{M} אזי v:\mathcal{M} טענה: יהי
\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} שדה וקטורי v:A \in \mathcal{A} מעל תת־קבוצה: תהא A\subseteq\mathcal{M} אזי A\subseteq\mathcal{M} אזי v:A \to \mathbb{R}^k עבורה עבורה מעל תת־קבוצה על תת־קבוצה עדה וקטורי
                                                                                                                                                                   .u_{
estriction_{A\cap\mathcal{U}}}=v_{
estriction_{A\cap\mathcal{U}}} עבורו עבורו u\in\mathfrak{X}^{m}\left(\mathcal{U}
ight)
\mathcal{M}טענה: תהא \mathcal{M} יריעה תהא A \subseteq \mathcal{U} ותהא \mathcal{M} יריעה תהא v:A \to \mathbb{R}^k ותהא v:A \to \mathbb{R}^k ותהא A \subseteq \mathcal{M} ותהא
                                                                                                                                                                                           u \in \mathfrak{X}^{\alpha}(\mathcal{U}) עבורה u \in \mathfrak{X}^{\alpha}(\mathcal{U})

abla 
abla arphi \in \mathfrak{X}^0\left(\mathcal{M}
ight) אזי arphi \in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה ותהא \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                   .(א בעל 2 אוריינטציות)(M) בעל 2 אוריינטציות) אוריינטציות) אוריינטציות) טענה: יהי
                                  עבורו F שדה וקטורי דרך M אזי F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) אוריינטציה של אוריינטציה של M\subseteq\mathbb{R}^n אזי אוריינטציה של M
                                                                                                                                                          .Flux_{F}\left(\mathcal{M}\right)=\int_{\mathcal{M}}\left\langle F\left(x\right),N\left(x\right)\right
angle dVol_{n-1}\left(x\right)
M אזי דרך שדות וקטוריים דרך F_1,F_2\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) עבורם F_1,F_2\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) אוריינטציה של אוריינטציה של אוריינטציה של
                                                                                                                                                .Flux_{\alpha F_1 + \beta F_2}(\mathcal{M}) = \alpha Flux_{F_1}(\mathcal{M}) + \beta Flux_{F_2}(\mathcal{M})
F עבורו F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) על־משטחים ויהי F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) על־משטחים ארים בעלי אוריינטציה בעלי אוריינטציה אויהי \mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                       \operatorname{Flux}_F\left(M_1\cup\mathcal{M}_2\right)=\operatorname{Flux}_F\left(\mathcal{M}_1\right)+\operatorname{Flux}_F\left(\mathcal{M}_2\right) אזי \mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2 דרה וקטורי דרך
                                                עלנה: יהי F שדה וקטורי דרך M אויינטציה N אויינטציה אוריינטציה M על־משטח בעל אוריינטציה אויינטציה אויינטציה אויינטציה אויינטציה אויינטציה אויינטציה אויי
                                                                                                                                                                                 .Flux_F(\mathcal{M}, N) = Flux_F(\mathcal{M}, -N)
                                                                                      .\operatorname{div}\left(F
ight)(x)=\sum_{i=1}^{n}rac{\partial F_{i}}{\partial x_{i}}\left(x
ight) אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי תהא
                  \mathrm{div}\left(F
ight)(x)=\mathrm{trace}\left(\mathcal{D}_{x}\left(f
ight)
ight) אזי f\left(x
ight)=F\left(x
ight) כך כך f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{n} נגדיר F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} נגדיר
                                       \operatorname{div}\left(A\circ F
ight)\left(A^{-1}x
ight)=\operatorname{div}\left(F
ight)\left(x
ight) אזי A\in\operatorname{GL}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) ותהא F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יהי
```

 $\operatorname{div}\left(f\cdot F
ight)=f\cdot\operatorname{div}\left(F
ight)+\left\langle 
abla f,F
ight
angle$  אזי  $f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight)$  ותהא  $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight)$  פענה: תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  פתוחה יהי

רוחב יחסי של קורה: יהי  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  גוף קמור קומפקטי ותהא קורה אזי

```
עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני Flux_F(\partial Q)=\sum Flux_F(E_i) איז עQ\in \mathsf{Cube}_\ell(x) ויהי x\in\mathbb{R}^n באשר \{E_i\}
\mathrm{div}\left(F
ight)(x)=\lim_{\substack{Q\in \mathsf{Cube}_{\ell}(x)\ \ell	o 0}} \frac{1}{\mathrm{Vol}_{n}(Q)}\mathrm{Flux}_{F}\left(\partial Q
ight) אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} פתוחה אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight) סביבה של x וקיימת \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} עבורה \mathcal{U}\in\mathbb{R}^{n} סביבה של \mathcal{U}\in\mathbb{R}^{n} פתוחה אזי \mathcal{U}\in\mathcal{U}
                                                                                                                                                                                                                        \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\} וכן f(x) = 0 וכן \nabla_x f \neq 0
                                                                                                                                                 \mathcal{J}^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}=\{x\in\partial\mathcal{U}\mid מכוחה אזי x\} נקודת שפה חלקה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n סימון: תהא
f\left(x
ight)=0 דוכן 
abla_x f
eq 0 המקיימת x\in \mathcal{U} וכן האא המקיימת \mathcal{U}\subseteq \mathbb{R}^n וכן האא האון: תהא של x\in \mathcal{U} פתוחה תהא
                                                                                                                                                                                                                .Smooth_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f) אזי \mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{f<0\} וכן
                                                  . סענה: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי קיימת \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n סביבה של x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} היפר־משטח \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                              \partial \mathcal{U}טענה: תהא \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה ל
                                                                                                                                                                                                                              יריעה. \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה.
                                                                                                                                                                                                .\partial\mathcal{U}=\partial^{	ext{sm}}\mathcal{U} עבורה עבורה פתוחה פתוחה קבוצה חלקה:
                                                          \lim_{arepsilon	o 0}rac{1}{arepsilon}{
m Vol}_n\left((\partial\mathcal{U}arkslash\partial^{
m sm}\mathcal{U})+B^n_arepsilon\left(0
ight)
ight)=0 עבורה עלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n
                    x\in\partial^{
m sm}\mathcal{U}:\mathcal{W}\cap\partial^{
m sm}\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n אזי אוי הוחה ותהא x\in\partial^{
m sm}\mathcal{U} נורמל יחידה. x\in\partial^{
m sm}\mathcal{U}:\mathcal{W}\cap\partial^{
m sm}\mathcal{U} פתוחה ותהא
                                            באשר x\in\partial^{	ext{sm}}\mathcal{U} אבורה לכל עבורה N:\partial^{	ext{sm}}\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n פתוחה אזי עבורה אונית קנונית לשפה חלקה: תהא
                                                                                                                                                                                                               .N_{
estriction_{\mathcal{W}\cap\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}}}=rac{
abla f}{\|
abla f\|} מתקיים Smooth_{\mathcal{U}}\left(x
ight)=\left(\mathcal{W},f
ight)
                                                         שטף: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathcal{W} ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} ויהי אזי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} שטף: תהא פתוחה באשר שפה כמעט חלקה תהא \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} אזי שטף: עלת שפה כמעט חלקה אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                               .Flux_{\mathit{F}}\left(\partial\mathcal{U}\right) = Flux_{\mathit{F}}\left(\partial^{sm}\mathcal{U}\right)
 A\in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^n
ight) אוריינטציה של M אוריינטציה של F עבורו F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) יהי של אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה של אינט אינט אינטציה של אוריינטציה שלי
                                                                                                                                                                                                                                                         .Flux_{A\circ F}\left(A\cdot\mathcal{M}\right)=\operatorname{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}\right) אזי
\mathrm{supp}\left(F\right)\subseteq B_{r}\left(a\right) באשר F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right) יהי i\in\left[n\right] לכל לכל g\in C^{1}\left(B_{r}\left(a\right),\mathbb{R}\right) תהא r>0 יהי a\in\mathbb{R}^{n} לכל לכל ויהי
                                                                                                                                                                                                                                             .
Flux_{F}\left(\partial\left\{ g<0
ight\} 
ight)=\int_{\left\{ q<0
ight\} }\operatorname{div}\left( F
ight) אזי
r>0 אזי קיים a\in\partial\mathcal{U}ackslash\partial\mathcal{U} תהא \mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^\mathrm{sm}\mathcal{U}
ight)<\infty חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תהא
                      \mathcal{F}עבורו לכל \mathcal{U}=\int_{\mathcal{U}}\operatorname{div}\left(F
ight) מתקיים \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} מתקיים \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} ולכל \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} המקיים \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} המקיים לכל \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}
                                                              אזי F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight) אזי \overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W} מסקנה: תהא \mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n וויהי וחלקה תהא חסומה פתוחה באשר אזי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{W}
                                                                                                                                                                                                                                                                                       .Flux_F\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\operatorname{div}\left(F\right)
                                                                                                                                                    למה: תהא X+B_{arepsilon}(0) אזי arepsilon>0 אזי קומפקטית ז'ורדן. X\subseteq\mathbb{R}^n מדידה א'ורדן.
                                                                         למה: תהא \psi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}
ight) קיימת arepsilon קיים אזי קיים אזי קיים עבורו לכל T\in\mathbb{R}^n המקיימת
                                                                                                                                                                                                                                                                                                            .0 < \psi < 1 \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                                                                  .\psi_{\upharpoonright_{X+B_{\varepsilon}(0)}}=1 •
```

 $.\psi_{\mathbb{R}^n\setminus(X+B_{3arepsilon}(0))}=0$  •  $.\left|rac{\partial\psi}{\partial x_i}
ight|\leq rac{C}{arepsilon}$  משפט הדיברגנץ: תהא  $i\in[n]$  חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה באשר  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  וויהי  $\mathcal{W}\in\mathbb{R}^n$  אזי  $F\in\mathfrak{X}^1$  ( $\mathcal{W}$ ) אזי  $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{W}$ 

N טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  ויהי  $\mathcal{V}$  ויהי  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$  נורמל חיצוני  $\mathcal{U}$  איזי  $\mathcal{U}$  איזי  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$  חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$  איזי  $\mathcal{U}$  איזי  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$  חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{U}$  ויהי  $\mathcal{U}$ 

פתוחה  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה עו פה אינטגרציה בחלקים: תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  חסומה ופתוחה עו שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה באשר  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהיינה  $f,g\in C^1$  ויהי  $f,g\in C^1$  ויהי  $f,g\in C^1$  ויהי  $f,g\in C^1$  תהיינה עו פתוחה עו שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  חסומה ופתוחה עו שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה עו שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  פתוחה עו שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  פתוחה  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  פתוחה עו שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  פתוחה עו שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  פתוחה  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$  פתוחה  $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$ 

באשר  $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$  יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה  $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$  אזי  $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$  באשר באשר כי הינה  $C^2$  איז  $C^2$  איז איז רעים בי איז הינה בינה  $C^2$ 

 $\Delta f=\sum_{i=1}^nrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$  אזי  $f\in C^1\left(\mathcal{U}
ight)$  פתוחה ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי  $\Delta f=\mathrm{div}\left(
abla f
ight)$  אזי  $f\in C^1\left(\mathcal{U}
ight)$  פתוחה ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ 

 $\operatorname{Cube}_\ell(x) = \{Q \subseteq \mathbb{R}^n \mid (x \in Q) \land (\ell \text{ hin } Q \text{ be}_\ell(x) = Q)\}$  אזי  $x \in \mathbb{R}^n$  איזי  $x \in \mathbb{R}^n$  איזי איזי  $x \in \mathbb{R}^n$ 

.  $\int_G \Delta u = \int_{\partial G} rac{\partial u}{\partial N}$  אזי  $C^2$  אזי . 1 .  $\int_G \langle \nabla u, \nabla v \rangle = -\int_G u \cdot \Delta v + \int_{\partial G} u \cdot rac{\partial v}{\partial N}$  אזי  $C^1$  אזי  $C^2$  אזי  $C^2$  . נניח כי  $C^2$  הינה  $C^2$  הינה  $C^2$  אזי  $C^2$  אזי  $C^2$  .

 $\int_G (u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u)=\int_{\partial G} \left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial N}
ight)$  אזי  $C^2$  הן u,v כי נניח כי

אנרגיית  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה באשר עבורה  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה באשר  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה באשר  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה אנרגיית  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה באשר  $\mathcal{W}$ 

 $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$  פתוחה באשר  $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^\mathrm{sm} G\right)<\infty$  פתוחה באשר עם שפה כמעט חלקה עבורה  $G\subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $\int_G \|\nabla v\|^2=-\int_G v\cdot\Delta v+\int_{\partial G} v\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$  אזי  $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$  ותהא  $G\subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא עורמל חיצוני ל־G

 $\Delta u=0$  המקיימת  $u\in C^{2}\left(G,\mathbb{R}
ight)$  פתוחה  $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$  המקיימת פונקציה הרמונית:

 $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$  טענה: תהא  $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$  חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$  תהא חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $u\in C^2(\mathcal{W},\mathbb{R})$  תהא ותהא  $u\in C^2(\mathcal{W},\mathbb{R})$  הרמונית אזי

- $.Flux_{\nabla u}(\partial G) = 0 \bullet$
- .Gבים מקומית קבועה u אזי ו $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}}=0$ נניח כי נניח פ
- Gבועה מקומית אזי uקבועה מקומית ב- נניח כי נניח כי נניח סיומית ב- י

 $f:\mathcal{J}_\mathcal{U}$   $f=rac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{U})}\int_\mathcal{U} f$  אינטגרבילית רימן אזי $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}$  תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  סימון: תהא

הרמונית  $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$  ותהא  $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$  משפט תכונת הערך הממוצע: תהא  $a\in\mathbb{R}^n$  יהי  $a\in\mathbb{R}^n$  יהי  $a\in\mathbb{R}^n$  ותהא u (a) u (a) אזי u (a) u (a) u (a) אזי u

 $u\left(a
ight)=\int_{B_{r}\left(a
ight)}u$  אזי או $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight)$  ותהא  $\overline{B_{r}\left(a
ight)}\subseteq\mathcal{W}$  פתוחה באשר  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  תהא  $a\in\mathbb{R}^{n}$  יהי  $a\in\mathbb{R}^{n}$  יהי  $a\in\mathbb{R}^{n}$  ותהא  $a\in\mathbb{R}^{n}$  ותהא

u אזי  $\max\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$  וכן G וכן G אזי  $u:\overline{G} o\mathbb{R}$  אזי תחום ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי המקסימום: יהי היי  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי תחום ותהא קבועה.

u אזי  $\min\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$  וכן G וכן המינמום: יהי  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  רציפה באשר  $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$  תחום ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי אזי הרעונה.

. משפט ליוביל: תהא  $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$  הרמונית וחסומה מלרע אזי קבועה משפט ליוביל:

. מסקנה: תהא  $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$  הרמונית וחסומה מלעיל אזי  $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ 

טענה אינטגרל פואסון: יהי אוי הא מומפקטי ותהא  $u\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}
ight)$  תהא תהא יהי אינטגרל פואסון: יהי אינטגרל פואסון: יהי מומפקטי ותהא מומפקטי ותהא

 $.u\left(a\right) = \frac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})(n-2)} \int_{\mathbb{R}^{n}} \frac{\Delta u(x)}{|x-a|^{n-2}} \mathrm{d}x$ 

משפט גרעין פואסון: תהא  $a\in B^n_1(0)$  משפט גרעין פואסון: תהא  $u_{\lceil B^n_1(0)} \to \mathbb{R}$  מתקיים  $u:\overline{B^n_1(0)} \to \mathbb{R}$  מתקיים

 $.u\left(a\right) = \frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\left(x\right) \cdot \frac{1 - \|a\|^{2}}{\|x - a\|^{n}} d\text{Vol}_{n-1}$ 

 $u\left(x
ight)=rac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}
ight)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y
ight)\cdotrac{1-\|x\|^{2}}{\|y-x\|^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y
ight)$  הינה  $u\left(x
ight)=rac{1}{Vol_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}
ight)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y
ight)\cdotrac{1-\|x\|^{2}}{\|y-x\|^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y
ight)$  הרמונית וכן  $u\left(x
ight)=\frac{1}{Vol_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}
ight)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y
ight)\cdotrac{1-\|x\|^{2}}{\|y-x\|^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y
ight)$  הרמונית וכן