

פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי $A \times A \rightarrow A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית על A אזי $a * b = *(a, b)$.

חבורה: תהא G קבוצה אזי $G \times G \rightarrow G : *$ עבודה קיים $e \in G$ המקיים

- אסוציאטיביות: לכל $a, b, c \in G$ מתקיים $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- איבר יחידה: לכל $a \in G$ מתקיים $a * e = e * a = a$.
- איבר הופכי: לכל $a \in G$ קיים $b \in G$ עבורו $a * b = e = b * a$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $\{f : X \rightarrow X \mid f \text{ הפיכה}\}$ $S(X)$.

חבורת התמורות: תהא X קבוצה אזי $(S(X), \circ)$.

טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות מעל X הינה חבורה.

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $S_n = S([n])$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $|S_n| = n!$.

חבורת המטריצות: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי חבורת המטריצות בגודל n מעל \mathbb{F} הינה חבורה.

החבורות החיבוריות: תהא $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ אזי $(\mathbb{F}, +)$.

סימון: תהא $A \subseteq \mathbb{C}$ אזי $A^* = A^\times = A \setminus \{0\}$.

החבורות הכפליות: תהא $\mathbb{F}^* \in \{\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*\}$ אזי (\mathbb{F}^*, \cdot) .

החבורה הטריטוראלית: יהי x אזי $(\{x\}, \text{Id})$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sim_n \subseteq \mathbb{Z}^2$ המוגדרת $(x \sim_n y) \iff (n \mid (x - y))$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}^2 / \sim_n$.

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n = \mathbb{Z}_n$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n \times C_n \rightarrow C_n : +$ המוגדרת $[x]_{\sim_n} + [y]_{\sim_n} = [x + y]_{\sim_n}$.

חבורת שאריות החלוקה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(C_n, +)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי חבורת שאריות החלוקה ב- n הינה חבורה.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $|C_n| = n$.

הערה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי נשכן $\{0, \dots, n-1\} \hookrightarrow \mathbb{Z}_n$ כך $[i]_{\sim_n} \mapsto (i \% n)$.

חבורה אבילית/חילופית/קומוטטיבית: חבורה $(G, *)$ עבודה לכל $g, h \in G$ מתקיים $g * h = h * g$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ אזי (S_n, \circ) אינה אבילית.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$ אינה אבילית.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $(C_n, +)$ אבילית.

חבורה סופית: חבורה $(G, *)$ עבודה $|G| \in \mathbb{N}$.

חבורה אינסופית: חבורה $(G, *)$ עבודה $|G| \geq \aleph_0$.

סדר של חבורה: תהא $(G, *)$ חבורה סופית אזי $\text{ord}(G) = |G|$.

סדר של חבורה: תהא G חבורה אינסופית אזי $\text{ord}(G) = \infty$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה אזי $\text{ord}(G) = o(G)$.

תת־חבורה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $H \subseteq G$ אזי $(H, *_|_{H \times H})$ עבודה

- סגירות לכפל: לכל $a, b \in H$ מתקיים $a * b \in H$.
- סגירות להופכי: לכל $a \in H$ מתקיים $a^{-1} \in H$.
- איבר יחידה: יהי e איבר היחידה של G אזי $e \in H$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $H \subseteq G$ עבודה $(H, *_|_{H \times H})$ תת־חבורה אזי $H \leq G$.

למה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $H \in \mathcal{P}(G) \setminus \{\emptyset\}$ $(H \leq G) \iff (a * b^{-1} \in H \mid a, b \in H)$ (לכל $a, b \in H$ מתקיים $a * b^{-1} \in H$).

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה ותהינה $A, B \subseteq G$ אזי $A * B = \{a * b \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה תהא $H \subseteq G$ ויהי $g \in G$ אזי $g * H = \{g\} * H$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(n\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי \mathbb{F} שדה אזי $(SL_n(\mathbb{F}), \cdot) \leq (GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$.

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $R_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(R_n, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה אזי $G \leq G$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה אזי $\{e\} \leq G$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה אזי קיים ויחיד $e \in G$ עבורו $a * e = e * a = a$ לכל $a \in G$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי קיים ויחיד $b \in G$ עבורו $a * b = e = b * a$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה יהי $a \in G$ ויהי $b \in G$ איבר הופכי ל- a אזי $a^{-1} = b$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ויהיו $a, b \in G$ אזי $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי $(a^{-1})^{-1} = a$.

מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא $(G, *)$ חבורה ויהיו $a, b, c \in G$ עבורם $a * b = a * c$ אזי $b = c$.

מסקנה כלל צמצום מימין: תהא $(G, *)$ חבורה ויהיו $a, b, c \in G$ עבורם $b * a = c * a$ אזי $b = c$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה ויהי $g \in G$ אזי $g^0 = e$.

הגדרה: תהא $(G, *)$ חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ אזי $g^n = g * g^{n-1}$.

סימון: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = (g^n)^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = (g^{-1})^n$.

חבורת המכפלה: תהיינה $(H, \otimes), (G, *)$ חבורות נגדיר $(g, h) \cdot (g', h') = (g * g', h \otimes h')$ לכל $g, g' \in G$ ולכל $h, h' \in H$ אזי $(G \times H, \cdot)$.

טענה: תהיינה $(H, \otimes), (G, *)$ חבורות אזי חבורת המכפלה של G, H הינה חבורה.

טענה: תהיינה $(H, \otimes), (G, *)$ חבורות אזי $(H, G) \text{ אבלי} \iff (H, G) \text{ אבלי}$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהיינה $H, K \leq G$ אזי $H * K \leq G \iff HK = KH$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהיינה $H, K \leq G$ אזי $(H \cup K \leq G) \iff ((K \subseteq H) \vee (H \subseteq K))$.

הגדרה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y) = \{\pi \in S(X) \mid \forall y \in Y. \pi(y) = y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y) \leq S(X)$.

מסקנה: תהא G חבורה תהא I ותהא $\{H_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(G)$ באשר $H_i \leq G$ לכל $i \in I$ אזי $\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$.

הגדרה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\}$.

החבורה שנוצרת על ידי תת־קבוצה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle \leq G$.

טענה מינימליות החבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $X \subseteq G$ ותהא $H \leq G$ עבורה $X \subseteq H$ אזי $\langle X \rangle \subseteq H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \left\{ \prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (x \in X^k) \wedge (s \in \{\pm 1\}^k) \right\}$.

קבוצת יוצרים של חבורה: תהא G חבורה אזי $X \subseteq G$ עבורה $\langle X \rangle = G$.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

חבורה ציקלית: חבורה G עבורה קיים $g \in G$ המקיים $\langle g \rangle = G$.

למה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{n+m} = g^n * g^m$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$.

למה: תהא G חבורה אזי $(G \text{ ציקלית}) \iff (G \text{ קיים } g \in G \text{ עבורו } G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\})$.

מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלי.

סדר של איבר: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) = \text{ord}(\langle g \rangle)$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) = \min \{n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n = e\}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ באשר $\text{ord}(g) < \infty$ אזי $(\text{ord}(g) \mid n) \iff (g^n = e)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $i \in \mathbb{Z}_n$ אזי $\langle i \rangle = \langle i \rangle = \mathbb{Z}_n \iff (i, n) = 1$ (זרים).

טענה: תהא G חבורה ציקלית ותהא $H \leq G$ אזי H ציקלית.

טענה: $(\mathbb{Q}, +)$ אינה נ"ס.

קוסט ימני: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $H * g$.

קוסט שמאלי: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $g * H$.

נציג של קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי Hg קוסט ימני אזי g .

נציג של קוסט שמאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי אזי g .

מסקנה: תהא G חבורה אבלית תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $Hg = gH$.

מסקנה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $(gH = H) \iff (g \in H)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $(Hg = H) \iff (g \in H)$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $G/H = \{gH \mid g \in G\}$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי ${}_H G = \{Hg \mid g \in G\}$.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי G/H חלוקה של G .

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי $(g_1H = g_2H) \iff (g_1^{-1}g_2 \in H)$.

הקוסט הטריבואלית: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי eH .

אינדקס של תת-חבורה בחבורה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $[G : H] = |G/H|$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $[G : H] = |{}_H G|$.

טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot [G : H]$.

משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי $\text{ord}(H) \mid \text{ord}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ותהא $K \leq H$ אזי $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי לכל $g \in G \setminus \{e\}$ מתקיים $G = \langle g \rangle$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי G ציקלית.

מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ באשר $\text{gcd}(n, p) = 1$ אזי $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

למה: תהא G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ חבורות סופיות אזי $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p > q$ ותהא G חבורה באשר $|G| = pq$ אזי לכל $H, K \leq G$ באשר $\text{ord}(H) = p$ וכן $\text{ord}(K) = q$ מתקיים $K = H$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ אזי $(S_n / \text{Stab}(1)) \cap (\text{Stab}(1) \setminus S_n) = \{\text{Stab}(1)\}$.

קוסט כפול: תהא G חבורה תהינה $H, K \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי HgK .

טענה: תהא G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ אזי $\{HgK \mid g \in G\}$ חלוקה של G .

הומומורפיזם: תהינה G, H חבורות אזי $\varphi : G \rightarrow H$ המקיימת

• שימור איבר יחידה: $\varphi(e_G) = e_H$.

• שימור כפל: לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

• שימור הופכי: לכל $g \in G$ מתקיים $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

טענה: תהינה G, H חבורות ותהא $\varphi : G \rightarrow H$ אזי $(\varphi$ הומומורפיזם) \iff (לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1}$).

גרעין של הומומורפיזם: תהינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.

למה: תהינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי

• $\text{Im}(\varphi) \leq H$.

• $\ker(\varphi) \leq G$.

• $(\ker(\varphi) = \{e_G\}) \iff (\varphi$ חח"ע).

טענה: תהינה G, H, K חבורות יהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם ויהי $\psi : H \rightarrow K$ הומומורפיזם אזי $\psi \circ \varphi$ הומומורפיזם.

טענה: תהינה G, H חבורות יהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(\varphi(g)) \mid \text{ord}(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם.

טענה הומומורפיזם הטריבואלי: תהא G חבורה אזי $\varphi : G \rightarrow \{e\}$ המוגדרת $\varphi(g) = e$ לכל $g \in G$ הינה הומומורפיזם.

טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $\text{Id} : H \rightarrow G$ הינו הומומורפיזם.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי V מ"ו מעל \mathbb{F} אזי $\det : \text{GL}(V) \rightarrow \mathbb{F}^*$ הינו הומומורפיזם.

מטריצת תמורה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(\rho(\sigma))_{i,j} = \begin{cases} 1 & j = \sigma(i) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ לכל $i, j \in [n]$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ תהא $\sigma \in S_n$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\rho(\sigma) \cdot v = \begin{pmatrix} v_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ v_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\sigma \in S_n$ אזי $\det(\rho(\sigma)) \in \{\pm 1\}$.

סימן של תמורה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\text{sign} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ המוגדרת $\text{sign} = \det \circ \rho$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי sign הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\sigma \in S_n$ אזי $\text{sign}(\sigma) = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod_{i < j} (i - j)}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\sigma \in S_n$ אזי $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{|\{(i,j) \in [n]^2 \mid (i < j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))\}|}$.

חבורת התמורות הזוגיות: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_n = \ker(\text{sign})$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_n \leq S_n$.

איזומורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי הומומורפיזם הפיך $\varphi : G \rightarrow H$.

סימון: תהיינה G, H חבורות איזומורפיות אזי $G \cong H$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ איזומורפיזם אזי φ^{-1} איזומורפיזם.

למה: תהיינה G, H, K חבורות יהי $\varphi : G \rightarrow H$ איזומורפיזם ויהי $\psi : H \rightarrow K$ איזומורפיזם אזי $\psi \circ \varphi$ איזומורפיזם.

טענה: תהא A קבוצה של חבורות אזי \cong יחס שקילות על A .

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n \cong R_n$.

טענה: תהיינה G, H חבורות תהא $S \subseteq G$ באשר $\langle S \rangle = G$ ויהיו $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ הומומורפיזמים באשר $\varphi|_S = \psi|_S$ אזי $\varphi = \psi$.

מונומורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי הומומורפיזם חח"ע $\varphi : G \rightarrow H$.

אפימורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי הומומורפיזם על $\varphi : G \rightarrow H$.

אוטומורפיזם: תהא G חבורה אזי איזומורפיזם $\varphi : G \rightarrow G$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\text{Aut}(G) = \{\varphi : G \rightarrow G \mid \varphi \text{ אוטומורפיזם}\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $(\text{Aut}(G), \circ)$ חבורה.

חבורת קליין: $K = C_2 \times C_2$.

טענה: חבורת קליין הינה אבליה.

טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.

טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל- C_4 .

פונקציית הצמדה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $c_g : G \rightarrow G$ המוגדרת $c_g(x) = gxg^{-1}$ לכל $x \in G$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי c_g אוטומורפיזם.

אוטומורפיזם פנימי: תהא G חבורה אזי אוטומורפיזם $\varphi : G \rightarrow G$ עבורו קיים $g \in G$ המקיים $\varphi = c_g$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\text{Inn}(G) = \{c_g \mid g \in G\}$.

תת-חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $H \leq G$ עבורה לכל $g \in G$ מתקיים $c_g(H) = H$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ נורמלית אזי $H \trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ התב"ש

$\bullet H \trianglelefteq G$

\bullet לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}Hg = H$

\bullet לכל $g \in G$ מתקיים $gHg^{-1} = H$

\bullet לכל $g \in G$ מתקיים $gH = Hg$

\bullet לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}Hg \subseteq H$

\bullet לכל $g \in G$ מתקיים $H \subseteq g^{-1}Hg$

$\bullet G/H = {}_H \backslash G$

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ באשר $[G : H] = 2$ אזי $H \trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$.

תת-חבורה אופיינית: תהא G חבורה אזי $K \leq G$ עבורה לכל $\varphi \in \text{Aut}(G)$ מתקיים $\varphi(K) = K$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $K \leq G$ אופיינית אזי $K \text{ char } G$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $K \text{ char } G$ אזי $K \trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \trianglelefteq G$ ותהא $K \text{ char } H$ אזי $K \trianglelefteq G$.

מרכז של חבורה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G. gh = hg\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) \trianglelefteq G$.

חבורת הייזנברג: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$

טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ חבורה.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathbb{F})) \cong (\mathbb{F}, +)$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_n \trianglelefteq S_n$.

חבורה פשוטה: חבורה G עבורה לכל $H \trianglelefteq G$ מתקיים $H \in \{\{e\}, G\}$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי C_p פשוטה.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ פשוטה.

הגדרה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ נגדיר $* : G/N \times G/N \rightarrow G/N$ כך $(gN) * (hN) = (g * h)N$.

חבורת המנה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $(G/N, *)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי חבורת המנה הינה חבורה.

העתקת המנה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $q : G \rightarrow G/N$ המוגדרת $q(g) = gN$.

טענה: תהא G חבורה תהא $N \trianglelefteq G$ ותהא q העתקת המנה אזי

• q הינה הומומורפיזם.

• $\ker(q) = N$.

• q על.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $(H \trianglelefteq G) \iff (\text{קיים אוטומורפיזם } \varphi : G \rightarrow G \text{ עבורו } H = \ker(\varphi))$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי $G/\ker(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$.

טענה: תהא G חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

• $G \cong \mathbb{Z}$.

• קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $G \cong \mathbb{Z}_n$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathbb{P} \notin |G/\mathcal{Z}(G)|$.

טענה מכפלה פנימית: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \trianglelefteq G$ באשר $HK = G$ וכן $H \cap K = \{e\}$ אזי $G \cong H \times K$.

מסקנה משפט השאריות הסיני: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ זרים אזי $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית תהא $H \leq G$ מאינדקס p ותהא $N \trianglelefteq G$ מאינדקס p באשר $H \neq N$ אזי $G = HN$ וכן

$p^2 \mid \text{ord}(G)$.

חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ הומומורפיזם נגדיר

$(h, k) \cdot (h', k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')$ לכל $h, h' \in H$ ולכל $k, k' \in K$ אזי $(H \times K, \cdot)$.

סימון: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה $H \rtimes_{\varphi} K$.

טענה: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ אזי $H \rtimes_{\varphi} K$ הינה חבורה.

טענה: תהיינה H, K חבורות נגדיר $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = \text{Id}_H$ לכל $k \in K$ אזי $H \rtimes_{\varphi} K \cong H \times K$.

סימון: יהי \mathbb{F} שדה אזי $\text{Aff}(\mathbb{F}) = \{f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \mid \exists a \in \mathbb{F}^{\times} (\exists b \in \mathbb{F} (\forall x \in \mathbb{F} (f(x) = ax + b)))\}$.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי $(\text{Aff}(\mathbb{F}), \circ)$ חבורה.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה נגדיר $\varphi : \mathbb{F}^{\times} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F})$ כך $\varphi(a)(b) = ab$ לכל $a \in \mathbb{F}^{\times}$ ולכל $b \in \mathbb{F}$ אזי $\text{Aff}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F} \rtimes_{\varphi} \mathbb{F}^{\times}$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל אזי $\{\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid (\varphi \text{ איזומטריה}) \wedge (\varphi(P) = P)\}$.

החבורה הזיהודרלית: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל בעל n קודקודים אזי $D_n = \text{Iso}(P)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי (D_n, \circ) חבורה.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $D_n \cong \langle r, s \mid s^2 = e, r^n = e, srs = r^{-1} \rangle$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

• אם $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\{D_n, \langle sr, r^2 \rangle, \langle s, r^2 \rangle\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n .

• אם $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\{D_n\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n .

טענה: $\mathcal{H}(\mathbb{F}_2) \cong D_4$.

טענה מכפלה חצי ישרה פנימית: תהא G חבורה תהא $K \leq G$ תהא $H \trianglelefteq G$ באשר $HK = G$ וכן $H \cap K = \{e\}$ ונגדיר $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = c_k$ לכל $k \in K$ אזי $G \cong H \rtimes_{\varphi} K$.
מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ונגדיר $\varphi : C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_n)$ כך $\varphi(k) = c_k$ לכל $k \in K$ אזי $D_n \cong C_n \rtimes_{\varphi} C_2$.
טענה: $K \trianglelefteq A_4$.

חבורה פתירה: חבורה G עבורה קיים $n \in \mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0 \dots G_n \leq G$ המקיימות

- $G_0 = \{e\}$ וכן $G_n = G$.

- $i \in [n]$ לכל $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$.

- $i \in [n]$ אבליה לכל G_i/G_{i-1} .

טענה: תהא G חבורה אבליה אזי G פתירה.

טענה: תהא G חבורה פשוטה באשר G אינה אבליה אזי G אינה פתירה.

משפט: יהי $n \in [4]$ אזי S_n פתירה.

חבורה נילפוטנטית: חבורה G עבורה קיים $n \in \mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0 \dots G_n \leq G$ המקיימות

- $G_0 = \{e\}$ וכן $G_n = G$.

- $i \in [n]$ לכל $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$.

- $i \in [n]$ לכל $G_i/G_{i-1} \leq Z(G/G_{i-1})$.

טענה: תהא G חבורה נילפוטנטית אזי G פתירה.

משפט האיזומורפיזם השני: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $H/(H \cap N) \cong (HN)/N$.

טענה: תהא G חבורה ותהייה $N, K \trianglelefteq G$ באשר $K \leq N$ אזי $N/K \trianglelefteq G/K$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהייה $N, K \trianglelefteq G$ באשר $K \leq N$ אזי $G/N \cong (G/K)/(N/K)$.

משפט ההתאמה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי קיימת $\{H \mid H \leq G/N\} \rightarrow \{H \mid H \leq G\}$ חח"ע ועל המקיימת

- משמרת נורמליות: לכל $K \trianglelefteq G$ המקיימת $N \leq K$ מתקיים $\Phi(K) \trianglelefteq G/N$.

- משמרת מנות: לכל $K \trianglelefteq G$ המקיימת $N \leq K$ מתקיים $G/K \cong \Phi(G)/\Phi(K)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $(N \text{ נורמלית מקסימלית}) \iff (G/N \text{ פשוטה})$.

פעולה שמאלית של חבורה על קבוצה: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי פונקציה $f : G \times X \rightarrow X$ המקיימת

- לכל $x \in X$ מתקיים $f(e, x) = x$.

- לכל $g, h \in G$ ולכל $x \in X$ מתקיים $f(g \cdot h, x) = f(g, f(h, x))$.

הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.

סימון: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $f : G \times X \rightarrow X$ פעולה על G אזי $f(g, x) = g.x$.

סימון: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $\{f : G \times X \rightarrow X \mid f \text{ פעולה}\}$ $G \curvearrowright X$.

הפעולה השמאלית: תהא G חבורה נגדיר $f \in G \curvearrowright G$ כך $f(g, x) = gx$ אזי f .

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.

הפעולה הימנית: תהא G חבורה נגדיר $f \in G \curvearrowright G$ כך $f(g, x) = xg^{-1}$ אזי f .

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.

הערה: מכאן והלאה נאמר כי G פועלת על X ונסמן $g.x$ את הפעולה.

מסלולים: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ ויהי $x \in X$ אזי $\text{orb}_{\alpha}(x) = \{g.x \mid g \in G\}$.

סימון: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $\text{orb}(x) = o(x)$.

פעולה טרנזיטיבית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f \in G \curvearrowright X$ עבורה קיים $x \in X$ המקיים $o(x) = X$.

מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$.

אוסף נקודות השבת: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $g \in G$ אזי $\text{Fix}_X(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $\text{Stab}_G(x) \leq G$.

פעולה חופשית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f \in G \curvearrowright X$ עבורה לכל $x \in X$ מתקיים $\text{Stab}_G(x) = \{e\}$.

למה: תהא G חבורה תהא X קבוצה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ ויהי $g \in G$ אזי $\alpha(g) \in S(X)$.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי $\varphi_{\alpha} : G \rightarrow S(X)$ המוגדרת $\varphi_{\alpha}(g)(x) = \alpha(g, x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי φ_{α} הומומורפיזם.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \rightarrow S(X)$ הומומורפיזם אזי $\alpha_{\varphi} : G \times X \rightarrow X$ המוגדרת $\alpha_{\varphi}(g, x) = \varphi(g)(x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \rightarrow S(X)$ הומומורפיזם אזי α_φ פעולה.

למה מסלול מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $|o(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$.

למה של ברנסייד: תהא X קבוצה ותהא G חבורה סופית הפועלת על X אזי $|\{o(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$.

הפעולה על הקוסטים השמאליים: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $\alpha \in G \curvearrowright G/H$ המוגדרת $\alpha(g, g'H) = gg'H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.

פעולות אקווריאנטיות/שקולות: תהיינה X, Y קבוצות ותהא G חבורה אזי $(\alpha, \beta) \in (G \curvearrowright X) \times (G \curvearrowright Y)$ עבורן קיימת

$F : X \rightarrow Y$ חח"ע ועל המקיימת $F(\alpha(g, x)) = \beta(g, F(x))$ לכל $g \in G$ ולכל $x \in X$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית ויהי $x \in X$ עבורו $o(x) = X$ אזי הפעולה על הקוסטים

השמאליים של $G/\text{Stab}_G(x)$ אקווריאנטית ל- α .

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי קיימת $H \leq G$ עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים

אקווריאנטית ל- α .

טענה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $\{o(x) \mid x \in X\}$ חלוקה של X .

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי לכל $x \in X$ מתקיים $o(x) = X$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל יהיו $\varphi_1 \dots \varphi_n$ איזומטריות של \mathbb{R}^3 ותהא $p \in \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ ותהא

$\text{Poly}(p) = |\{\varphi_i(P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i(P \times \{0\})\}|$.

גוף אפלטוני: קבוצה קמורה לא זניחה $K \subseteq \mathbb{R}^3$ עבורה קיים מצולע משוכלל $P \subseteq \mathbb{R}^2$ וקיימות איזומטריות $\varphi_1 \dots \varphi_n$ של \mathbb{R}^3 עבורן

• פאות איזומטריות: $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$.

• קודקוד משותף זהה כמות: לכל קודקודים $v_1, v_2 \in K$ מתקיים $\text{Poly}(v_1) = \text{Poly}(v_2)$.

מספר פאות של גוף אפלטוני: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $n \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו קיימות איזומטריות $\varphi_1 \dots \varphi_n$ של \mathbb{R}^3 עבורן

$\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ באשר $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \text{ איזומטריה} \wedge (\varphi(K) = K)\}$.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}_+(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \text{ איזומטריה משמרת אוריינטציה} \wedge (\varphi(K) = K)\}$.

הגדרה סימון שלפלי: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני בעל $n \in \mathbb{N}$ פאות ויהי $v \in K$ קודקוד אזי $\{n, \text{Poly}(k)\}$.

הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.

דודקהדרון: גוף אפלטוני $K \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל סימון שלפלי $\{5, 3\}$.

טענה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{Iso}_+(D) \cong A_5$.

מסקנה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{ord}(\text{Iso}_+(D)) = 60$.

משפט קיילי: תהא G חבורה אזי קיימת קבוצה X וקיימת $H \leq S(X)$ עבורה $G \cong H$.

מסקנה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = \aleph_0$ אזי קיימת $H \leq S(\mathbb{N})$ עבורה $G \cong H$.

משפט קושי: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p \mid \text{ord}(G)$ אזי קיים $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g) = p$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p \mid \text{ord}(G)$ אזי קיימת $H \leq G$ ציקלית עבורה $\text{ord}(H) = p$.

טענה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = 6$ אזי $G \cong \mathbb{Z}_6$ או $G \cong S_3$.

פעולת ההצמדה: תהא G חבורה אזי $\alpha \in G \curvearrowright G$ המוגדרת $\alpha(g, h) = c_g(h)$.

סימון: תהא G חבורה ויהיו $h, g \in G$ אזי $h^g = g^{-1}hg$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $g, h, k \in G$ אזי $h^{g \cdot k} = (h^g)^k$.

מחלקת הצמידות: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$.

טענה: תהא G חבורה מצוידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = o(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי $\{[h] \mid h \in G\}$ חלוקה של G .

הממרכז של איבר: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$.

טענה: תהא G חבורה מצוידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \text{Stab}_G(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) \leq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)$ אופיינית.

טענה: תהא G חבורה אזי $G/\mathcal{Z}(G) \cong \text{Inn}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $||[g]|| = [G : C_G(g)]$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו g, h, k באשר $k = ghg^{-1}$. אזי $|C_G(k)| = |C_G(h)|$.

משפט משוואת מחלקות הצמידות: תהא G חבורה סופית ותהא $C \subseteq G$ קבוצת נציגים של $\{[h] \mid h \in G\}$ אזי $\sum_{g \in C} \frac{1}{|C_G(g)|} = 1$.

טענה: תהא G חבורה סופית אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcup \{[g] \mid (g \in G) \wedge (|[g]| = 1)\}$.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ תהיינה $\alpha, \beta \in S_n$ באשר $\beta = (m_{1,1} \dots m_{1,\ell_1}) \circ \dots \circ (m_{b,1} \dots m_{b,\ell_b})$ אזי $\alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(m_{1,1}) \dots \alpha(m_{1,\ell_1})) \circ \dots \circ (\alpha(m_{b,1}) \dots \alpha(m_{b,\ell_b}))$.

למה: A_5 פשוטה.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ ותהא $H \trianglelefteq A_n$ עבודה קיים מעגל π בגודל שלוש המקיים $\pi \in H$ אזי $H = A_n$.

למה: A_6 פשוטה.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ אזי A_n פשוטה ואינה אבלית.

הישר הפרויקטיבי: יהי \mathbb{F} שדה ונגדיר $R = \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \mid \exists \lambda \in \mathbb{F}^\times (x = \lambda y)\}$ אזי $\mathbb{FP} = (\mathbb{F}^2 \setminus \{0\})/R$.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\mathcal{Z}(\text{GL}_n(\mathbb{F})) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\}$.

סימון: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\text{PGL}_n(\mathbb{F}) = \text{GL}_n(\mathbb{F})/\mathcal{Z}(\text{GL}_n(\mathbb{F}))$.

חבורת- p : יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי חבורה G עבודה קיים $n \in \mathbb{N}$ המקיים $|G| = p^n$.

משפט: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורת- p אזי $\mathcal{Z}(G) \neq \{e\}$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה מסדר p^2 אזי G אבלית.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורת- p אזי G נילפוטנטית.

תת-חבורת- p סילו: יהי $p \in \mathbb{P}$ יהיו $m, k \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(p, m) = 1$ ותהא G חבורה באשר $|G| = p^k \cdot m$ אזי $H \leq G$ באשר $|H| = p^k$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי $(H \text{ תת-חבורה-} p \text{ סילו}) \iff (H \text{ חבורת-} p \text{ וכן לכל } K \leq G \text{ חבורה-} p \text{ מתקיים } |K| \leq |H|)$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי $(H \text{ תת-חבורה-} p \text{ סילו}) \iff (H \text{ חבורת-} p \text{ וכן } p \nmid [G : H])$.

סימון: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $\text{Syl}_p(G) = \{H \leq G \mid H \text{ תת-חבורה-} p \text{ סילו של } G\}$.

סימון: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p = |\text{Syl}_p(G)|$.

למה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהיו $n, m \in \mathbb{N}_+$ באשר $\gcd(p, m) = 1$ אזי $p \nmid \binom{p^n \cdot m}{p^n}$.

משפט סילו הראשון: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי קיימת $H \leq G$ באשר H תת-חבורה- p סילו של G .

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p \geq 1$.

המנרמל של חבורה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $N_G(H) \leq G$ וכן $H \trianglelefteq N_G(H)$.

למה: יהי $p \in \mathbb{P}$ יהיו $m, k \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(p, m) = 1$ ותהא G חבורה באשר $|G| = p^k \cdot m$ ותהיינה $H, K \leq G$ חבורות- p סילו באשר $H \neq K$ אזי $H \not\subseteq N_G(K)$.

משפט סילו השני: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית ותהיינה H, K תת-חבורות- p סילו של G אזי קיים $g \in G$ עבורו $gHg^{-1} = K$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית ותהא H תת-חבורה- p סילו של G אזי $(H \trianglelefteq G) \iff (n_p = 1)$.

קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $Y \subseteq X$ עבודה לכל $g \in G$ ולכל $y \in Y$ מתקיים $g.y \in Y$.

טענה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X ותהא $Y \subseteq X$ אזי $(Y \text{ הינה } G\text{-שמורה}) \iff (Y \text{ קיימת } \mathcal{O} \subseteq X \text{ עבודה } Y = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{O}(x))$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית ונגדיר $\alpha \in G \curvearrowright \text{Syl}_p(G)$ כך $\alpha(g, H) = gHg^{-1}$ אזי α טרנזיטיבית.

למה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה ותהא $H \leq G$ תת-חבורת- p סילו ותהא $R \subseteq \text{Syl}_p(G)$ באשר $H \in R$ וכן R הינה H -שמורה אזי $|R| \equiv 1 \pmod p$.

משפט סילו השלישי: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p \equiv 1 \pmod p$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ יהיו $m, k \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(p, m) = 1$ ותהא G חבורה באשר $|G| = p^k \cdot m$ אזי $n_p \mid m$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p \mid \text{ord}(G)$.

מסקנה משפטי סילו: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי

1. קיימת $H \leq G$ באשר H תת-חבורה- p סילו של G .

2. תהיינה H, K תת-חבורות- p סילו של G אזי קיים $g \in G$ עבורו $gHg^{-1} = K$.

$$3. n_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא $H \leq S_p$ באשר $|H| = p$ אזי קיים p -מעגל $\pi \in S_p$ עבורו $H = \langle \pi \rangle$.
מסקנה משפט וילסון: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p < q$ וכן $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ ותהא G חבורה מסדר pq אזי G ציקלית.
טענה: יהי $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ותהא G חבורה מסדר $2p$ אזי $G \cong C_{2p}$ או $G \cong D_p$.

טענה: תהא G חבורה סופית יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא $P \leq G$ תת־חבורת־ p אזי $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

סימון: תהא $(A, +)$ חבורה אזי $e_A = 0$ וכן $-x = x^{-1}$ לכל $x \in A$ וכן $g^n = ng$ לכל $n \in \mathbb{Z}$ ולכל $g \in A$.

חבורת המכפלה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות נגדיר $(g \cdot h)_i = g_i \cdot h_i$ לכל $g, h \in \prod_{i \in I} G_i$ ולכל $i \in I$ אזי $(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\prod_{i \in I} G_i$ חבורה.

חבורת הסכום הישר: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי

$$\bigoplus_{i \in I} G_n = \{g \in \prod_{i \in I} G_i \mid |\{i \in I \mid g_i \neq e_{G_i}\}| \in \mathbb{N}\}.$$

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i \in I} G_n \leq \prod_{i \in I} G_i$.

איבר פיתול: תהא G חבורה אזי $g \in G$ עבורו קיים $n \in \mathbb{N}_+$ המקיים $g^n = e$.

סימון: תהא G חבורה אזי g איבר פיתול $\mid g \in G$ $T(G) = \{g \in G \mid g \text{ איבר פיתול}\}$.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי $T(G) \leq G$.

חבורת פיתול: חבורה G עבורה $T(G) = G$.

חבורה חסרת פיתול: חבורה G עבורה $T(G) = \{e\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית אזי $A/T(A)$ חסרת פיתול.

טענה: תהא G חבורה נ"ס ותהא $H \trianglelefteq G$ אזי G/H נ"ס.

מסקנה: תהיינה G, H, K חבורות באשר $G \cong H \times K$ אזי $G \cong H \times K$ (נ"ס) $\iff H, K$ נ"ס).

חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה אזי $\bigoplus_X \mathbb{Z}$.

בסיס של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי X .

דרגה של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי $|X|$.

הערה: תהא X קבוצה אזי נשכן בצורה טבעית את X בתוך החבורה האבלית החופשית עם בסיס X כך $x \mapsto e_x$.

משפט התכונה האוניברסלית: תהא X קבוצה ותהא G חבורה ותהא $f : X \rightarrow G$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi : \bigoplus_X \mathbb{Z} \rightarrow G$ עבורו $\varphi(x) = f(x)$ לכל $x \in X$.

משפט תכונת ההרמה: תהא F חבורה אבלית חופשית תהיינה A, B חבורות אבליות יהי $\varphi : A \rightarrow B$ אפימורפיזם ויהי $\psi : F \rightarrow B$ הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם $\hat{\psi} : F \rightarrow A$ עבורו $\psi \circ \hat{\psi} = \varphi$.

טענה תכונת הפיצול: תהא A חבורה אבלית ותהא $B \leq A$ באשר A/B אבלית חופשית אזי $A \cong B \oplus A/B$.

משפט: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי A אבלית חופשית עם בסיס סופי.

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו $A \cong \mathbb{Z}^k$.

למה: תהא A חבורת פיתול אבלית נ"ס אזי A סופית.

משפט: תהא A אבלית נ"ס אזי

$$\bullet A \cong A/T(A) \oplus T(A).$$

$$\bullet \text{קיים } k \in \mathbb{N} \text{ עבורו } A/T(A) \cong \mathbb{Z}^k.$$

$$\bullet T(A) \text{ סופית.}$$

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס אזי קיימת חבורה אבלית סופית B וקיים $k \in \mathbb{N}$ עבורם $A \cong \mathbb{Z}^k \oplus B$.

סימון: תהא G חבורה ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $G_p = \{x \in G \mid p \mid \text{ord}(x)\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $A_p \leq A$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי A_p חבורת־ p .

משפט גאוס: תהא A אבלית סופית אזי $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $n_p = 1$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי $A = \bigoplus \{P \leq A \mid \exists p \in \mathbb{P} (P \in \text{Syl}_p(A))\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא A חבורה אבלית מסדר p^n ויהיו $x_1 \dots x_{n+1} \in A$ אזי קיימים $a_1 \dots a_{n+1} \in \mathbb{N}$ עבורם $\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0$ וכן קיים $i \in [n+1]$ עבורו $a_i \not\equiv 0 \pmod p$.

הומומורפיזם נשג: תהיינה G, H חבורות באשר $H \leq G$ אזי הומומורפיזם $\pi : G \rightarrow H$ עבורו $\pi|_H = \text{Id}_H$.

טענה: תהא G אבלית ותהא $A \leq G$ התב"ש

- קיימת $B \leq G$ עבורה $B \cap A = \{e\}$ וכן $A + B = G$.
- קיימת $B \leq G$ עבורה לכל $g \in G$ קיים ויחיד $a \in A$ וקיים ויחיד $b \in B$ עבורם $g = a + b$.
- קיים הומומורפיזם $\varphi : G/A \rightarrow G$ עבורו $\nu \circ \varphi = \text{Id}_{G/A}$ באשר $\nu : G \rightarrow G/A$ העתקת המנה.
- קיימת נשג $\pi : G \rightarrow A$.

טענה: תהא A אבלית אזי $(A \cong \mathbb{Z}^k/G \text{ עבור } G \leq \mathbb{Z}^k \text{ וקיימת } k \in \mathbb{N}) \iff (A \text{ "נ"ס})$.

חבורה p -אלמנטרית: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה לכל $g \in G$ מתקיים $\text{ord}(g) \in \{1, p\}$.

משפט המבנה לחבורות p -אבליות סופיות: יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא A אבלית סופית בעלת סדר p^n אזי קיים ויחיד $k \in \mathbb{N}$ וקיימים

ויחידים $n_1 \dots n_k \in \mathbb{N}_+$ באשר $n_{i+1} \leq n_i$ לכל $i \in [k-1]$ וכן $\sum_{i=1}^k n_i = n$ עבורם $A \cong \bigoplus_{i=1}^k C_{p^{n_i}}$.

מסקנה משפט המיון לחבורות אבליות סופיות: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k \in \mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $m_1 \dots m_k \in \mathbb{N}_+$ באשר

$A \cong \bigoplus_{i=1}^k C_{m_i}$ לכל $i \in [k-1]$ עבורם $m_i | m_{i+1}$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k \in \mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $p_1 \dots p_k \in \mathbb{P}$ באשר $p_i \leq p_{i+1}$ לכל $i \in [k-1]$ וקיימים

ויחידים $t_1 \dots t_k \in \mathbb{N}$ עבורם $A \cong \bigoplus_{i=1}^k C_{p_i^{t_i}}$.

מסקנה: תהיינה A, B, C אבליות סופיות באשר $A \oplus C \cong B \oplus C$ אזי $A \cong B$.

מסקנה: תהיינה A, B אבליות סופיות באשר $A \oplus A \cong B \oplus B$ אזי $A \cong B$.

מסקנה: יהי \mathbb{F} שדה ותהא $A \leq \mathbb{F}^\times$ סופית אזי A ציקלית.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי \mathbb{Z}_p^\times ציקלית.

טענה: תהא A אבלית סופית ותהא $B \leq A$ אזי קיימת $C \leq A$ עבורה $C \cong A/B$.

קרקטר: תהא A אבלית אזי הומומורפיזם $\chi : A \rightarrow \mathbb{S}^1$.

החבורה הדואלית: תהא A חבורה אבלית אזי $\hat{A} = \{\chi : A \rightarrow \mathbb{S}^1 \mid \chi \text{ קרקטר}\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n \cong \widehat{C_n}$.

טענה: תהיינה A, B אבליות סופיות אזי $\widehat{A \times B} = \hat{A} \times \hat{B}$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי $A \cong \hat{\hat{A}}$.

סימון: יהי $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $U(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \{a \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \mid \exists b \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} (a \cdot b = 1)\}$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $U(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ ציקלית.

משפט גאוס: תהא T חבורת פיתול אזי $T_p \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} T_p$.

סימון: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty) = \left\{ \frac{k}{p^n} \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (k \in \{0, \dots, p^n - 1\}) \right\}$.

חבורת פרופר: יהי $p \in \mathbb{P}$ נגדיר $\star : \mathbb{Z}(p^\infty) \times \mathbb{Z}(p^\infty) \rightarrow \mathbb{Z}(p^\infty)$ כך $a \star b = (a + b) - [a + b]$ אזי $(\mathbb{Z}(p^\infty), \star)$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty)$ חבורה.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty) \cong \left\{ 2^{\pi i \cdot \frac{k}{p^n}} \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (k \in \{0, \dots, p^n - 1\}) \right\}$.

טענה: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}(p^\infty)$.

איבר מתחלק במספר: תהא G חבורה אבלית ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $a \in G$ עבורו קיים $b \in G$ המקיים $n \cdot b = a$.

חבורה חליקה: חבורה אבלית G עבורה לכל $a \in G$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי a מתחלק ב- n .

מסקנה: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} חליקה.

טענה: תהיינה D, G חבורות אבליות באשר D חליקה ויהי $\varphi : D \rightarrow G$ הומומורפיזם אזי $\text{Im}(\varphi)$ חליקה.

טענה: תהא I קבוצה ותהא A_i חבורה אבלית לכל $i \in I$ אזי $(\bigoplus_{i \in I} A_i \text{ חליקה}) \iff (A_i \text{ חליקה לכל } i \in I)$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty)$ חליקה.

חבורה מצומצמת: חבורה G עבורה לכל $H \leq G$ מתקיים כי H אינה חליקה.

טענה: תהא A אבלית ותהא $B \leq A$ אבלית ויהי $f : A \rightarrow B$ הומומורפיזם נשג אזי קיימת $C \leq A$ באשר $C \cap B = \{0\}$ וכן

$A = C \oplus B$.

מסקנה: תהא A אבלית ותהא $D \leq A$ חליקה אזי קיימת $K \leq A$ באשר $D \cap K = \{0\}$ וכן $A = D \oplus K$.

טענה: תהא A אבלית אזי קיימת $D \leq A$ חליקה וקיימת $R \leq A$ מצומצמת באשר $D \cap R = \{0\}$ וכן $A = D \oplus R$.

טענה: תהא D אבלית חליקה אזי $T(D)$ חליקה.

מסקנה: תהא A אבלית אזי קיימת $R \leq A$ מצומצמת קיימת $D \leq A$ חליקה וקיימת $F \leq D$ חסרת פיתול באשר $D \cap R = \{0\}$ וכן $A = D \oplus R$ וכן $T(D) \cap F = \{0\}$ וכן $D = T(D) \oplus F$ וכן $A = T(D) \oplus F \oplus R$.

משפט: תהא F חבורה אבלית חליקה חסרת פיתול אזי קיימת קבוצה I עבורה $F \cong \bigoplus_I \mathbb{Q}$.

משפט: תהא T חבורת פיתול חליקה אבלית אזי קיים $p \in \mathbb{P}$ וקיימת קבוצה I עבורה $T \cong \bigoplus_I \mathbb{Z}(p^\infty)$.

משפט ארדש-טוראן: תהא G חבורה סופית לא אבלית אזי $\mathbb{P}(xy = yx) \leq \frac{5}{8}$.

טענה: קיימת חבורה סופית לא אבלית G עבורה $\mathbb{P}(xy = yx) = \frac{5}{8}$.

קומוטטור: תהא G חבורה ויהיו $g, h \in G$ אזי $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהיו $g, h \in G$ אזי $(gh = hg) \iff ([g, h] = e)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $i, j, k \in [n]$ אזי $[I + e_{i,j}, I + e_{j,k}] = e_{i,k}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $i, j, k, \ell \in [n]$ שונים אזי $[I + e_{i,j}, I + e_{j,\ell}] = I$.

משפט הסיבובים של אויילר: תהא $A \in \text{SO}(3)$ אזי קיים יחיד $v \in \mathbb{S}_+^2$ עבורו $Av = v$.

למה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהיו $g, h \in G$ באשר $[g, h] = e$ אזי $g \cdot \text{Fix}(h) = \text{Fix}(h)$.

הגדרה: תהא G חבורה אזי $[G, G] = \{[g, h] \mid g, h \in G\}$.

חבורת הנגזרת: תהא G חבורה אזי $G' = \langle [G, G] \rangle$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ עבורה $\varphi(X) = X$ לכל $\varphi \in \text{Aut}(G)$ אזי $\langle X \rangle \text{ char } G$.

למה: תהא G חבורה אזי $G' \text{ char } G$.

אבליזציה של חבורה: תהא G חבורה אזי $G^{ab} = G/G'$.

חבורה מושלמת: חבורה G עבורה $G = G'$.

טענה: תהא G חבורה פשוטה לא אבלית אזי G מושלמת.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ אזי A_n מושלמת.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ מושלמת.

טענה אור: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ ויהי $x \in A_n$ אזי קיימות $\pi, \sigma \in S_n$ עבורן $x = [\pi, \sigma]$.

למה אבליזציה: תהא G חבורה אזי

• G^{ab} אבלית.

• לכל חבורה H ולכל אפימורפיזם $\varphi : G \rightarrow H$ מתקיים $(\varphi(H) \text{ אבלית}) \iff (G' \leq \ker(\varphi))$.

• לכל $N \trianglelefteq G$ מתקיים $(N/G \text{ אבלית}) \iff (G' \leq N)$.

מסקנה: תהא G חבורה מושלמת תהא A חבורה אבלית ויהי $\varphi : G \rightarrow A$ הומומורפיזם אזי φ טריוואלי.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $S'_n = A_n$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $S_n^{ab} \cong \{\pm 1\}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $(\text{GL}_n(\mathbb{R}))' = \text{SL}_n(\mathbb{R})$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $(\text{GL}_n(\mathbb{R}))^{ab} = \mathbb{R}^\times$.

סדרת הנגזרת: תהא G חבורה אזי $G^{(0)} = G$ וכן $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

מסקנה: תהא G חבורה עבורה קיים $n \in \mathbb{N}$ המקיים $G^{(n)} = \{e\}$ אזי G פתירה.

סדרה נורמלית: תהא G חבורה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n \leq G$ המקיימות

• $G_0 = \{e\}$ וכן $G_n = G$

• $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$ לכל $i \in [n]$

משפט: תהא G חבורה אזי $(G \text{ פתירה}) \iff (G^{(n)} = \{e\} \text{ עבור } n \in \mathbb{N} \text{ קיים})$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי D_n פתירה.

חבורה מטאבליט: חבורה G עבורה $G^{(2)} = \{e\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $(G \text{ מטאבליט}) \iff (N \trianglelefteq G \text{ קיימת } N \trianglelefteq G \text{ אבלית עבורה } G/N \text{ אבלית}).$

תת-חבורה מקסימלית: תהא G חבורה אזי $M \leq G$ עבורה לכל $N \leq G$ מתקיים $M \not\leq N$.

תת-חבורת פרטיני: תהא G חבורה אזי $\Phi(G) = \bigcap_{M \leq G \text{ מקסימלית}} M$.

איבר לא-יוצר: תהא G חבורה אזי $g \in G$ עבורו לכל $X \subseteq G$ המקיימת $\langle X \cup \{g\} \rangle = G$ מתקיים $\langle X \rangle = G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\{g \in G \mid g \text{ לא-יוצר}\} = \Phi(G)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\text{char } G = \Phi(G)$.

טענה: תהא G חבורה באשר $G/Z(G)$ ציקלית אזי G אבלית.

הרחבה של חבורה אבלית בחבורה אבלית: תהא K חבורה אבלית ותהא L חבורה אבלית אזי חבורה G עברה קיים אפימורפיזם $\varphi : G \rightarrow K$ המקיים $\ker(\varphi) \cong L$.

הרחבה של חבורה בחבורה: תהא Q חבורה ותהא N חבורה אזי חבורה G עברה $N \leq G$ וכן $Q \cong G/N$.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי

- לכל $H \leq G$ מתקיים כי H סופית.
- לכל $N \leq G$ מתקיים כי G/N סופית.
- לכל הרחבה H של G ב- N מתקיים כי H סופית.

משפט: תהא G חבורת פיתול אזי

- לכל $H \leq G$ מתקיים כי H פיתול.
- לכל $N \leq G$ מתקיים כי G/N פיתול.
- לכל הרחבה H של G ב- N מתקיים כי H פיתול.

משפט: תהא G חבורה פתירה אזי

- לכל $H \leq G$ מתקיים כי H פתירה.
- לכל $N \leq G$ מתקיים כי G/N פתירה.
- לכל הרחבה H של G ב- N מתקיים כי H פתירה.

סדרת הרכב: תהא G חבורה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי סדרה נורמלית $G_0 \dots G_n \leq G$ עברה G_i/G_{i-1} פשוטה לכל $i \in [n]$.

גורמי הרכב: תהא G חבורה ותהא $G_0 \dots G_n \leq G$ סדרת הרכב אזי $\{G_1/G_0, \dots, G_n/G_{n-1}\}$.

סדרה מקסימלית: תהא G חבורה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי סדרה נורמלית $G_0 \dots G_n \leq G$ עברה לכל $i \in [n]$ לא קיים $H \leq G$ עבורו $G_i < H < G_{i+1}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $G_0 \dots G_n \leq G$ סדרה נורמלית אזי $(G_0 \dots G_n \text{ סדרת הרכב}) \iff (G_0 \dots G_n \text{ סדרה מקסימלית})$.

סדרות הרכב שקולות: תהא G חבורה אזי סדרות הרכב $G_0 \dots G_n \leq G$ וכן $H_0 \dots H_m \leq G$ עבורן קיימת $\pi : [n] \rightarrow [m]$ הפיכה המקיימת $G_i/G_{i-1} \cong H_{\pi(i)}/H_{\pi(i)-1}$ לכל $i \in [n]$.

עידון של סדרה נורמלית: תהא G חבורה ותהא $G_0 \dots G_n \leq G$ סדרה נורמלית אזי סדרה נורמלית $\tilde{G}_0 \dots \tilde{G}_m \leq G$ עברה $m \geq n$ וכן קיימת סדרה עולה ממש $i : \{0 \dots n\} \rightarrow \{0 \dots m\}$ באשר $i_0 = 0$ וכן $i_n = m$ וכן $\tilde{G}_{i_j} = G_j$ לכל $j \in \{0 \dots n\}$.

למה למת הפרפר של זסנאוס: תהא G חבורה תהיינה $A, B, A^*, B^* \leq G$ באשר $A \leq A^*$ וכן $B \leq B^*$ אזי

- $B(A \cap B^*) \leq B(A^* \cap B^*)$ וכן $A(B \cap A^*) \leq A(B^* \cap A^*)$.
- $(A(B^* \cap A^*)) / (A(B \cap A^*)) \cong (B(A^* \cap B^*)) / (B(A \cap B^*))$.

משפט העידון של שרייר: תהא G חבורה תהיינה $G_0 \dots G_n \leq G$ וכן $H_0 \dots H_m \leq G$ סדרות הרכב אזי קיים עידון $\tilde{G}_0 \dots \tilde{G}_N \leq G$ של $G_0 \dots G_n$ וקיים עידון $\tilde{H}_0 \dots \tilde{H}_M \leq G$ של $H_0 \dots H_m$ באשר $\tilde{G}_0 \dots \tilde{G}_N$ שקולה ל- $\tilde{H}_0 \dots \tilde{H}_M$.

משפט ז'ורדן-הולדר: תהא G חבורה אזי

- אם G סופית אזי G בעלת סדרת הרכב.
- לכל סדרות הרכב $G_0 \dots G_n \leq G$ וכן $H_0 \dots H_m \leq G$ מתקיים כי $G_0 \dots G_n$ שקולה ל- $H_0 \dots H_m$.

טענה: תהא G פתירה אזי $(G \text{ בעלת סדרת הרכב}) \iff (G \text{ סופית})$.

טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי קיימת סדרת הרכב $G_0 \dots G_n \leq G$ עברה קיים $i \in \{0 \dots n\}$ המקיים $G_i = H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $G_0 \dots G_n \leq G$ סדרת הרכב באשר קיים $i \in [n]$ עבורו G_i/G_{i-1} אינה אבלית אזי G אינה פתירה.

הסדרה המרכזית העולה: תהא G חבורה אזי $G^0 = \{e\}$ וכן $G^{i+1} \leq G$ מקיימת $G^{i+1}/G^i \cong Z(G/G^i)$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

טענה: תהא G חבורה אזי הסדרה המרכזית העולה יחידה.

הסדרה המרכזית היוצרת: תהא G חבורה אזי $G_0 = G$ וכן $G_{i+1} = \langle [G, G_i] \rangle$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $(G \text{ נילפוטנטית}) \iff (G \text{ קיים } n \in \mathbb{N} \text{ עבורו } G^n = G)$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(G^n = G) \iff (G^n = \{e\})$.

טענה: תהא G נילפוטנטית ונגדיר $n = \min \{m \in \mathbb{N} \mid G^m = G\}$ אזי $G_i \leq G^{n-i}$ לכל $i \in \{0 \dots n\}$.

טענה: תהיינה N, Q חבורות תהא G הרחבה של Q ב- N ותהא K פשוטה אזי $(K \text{ גורם הרכב של } G) \iff (K \text{ גורם הרכב של } Q \text{ או } N)$.

טענה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}_+$ ותהייה $H_1 \dots H_n, K_1 \dots K_m$ פשוטות לא טריוואליות באשר $\prod_{i=1}^m K_i \cong \prod_{i=1}^n H_i$ אזי $n = m$ וכן קיימת $\pi \in S_n$ עבורה $H_i \cong K_{\pi(i)}$ לכל $i \in [n]$.

סימון: יהי G גרף מכוון ותהא $e \in E(G)$ אזי $o(e) = e_1$ וכן $t(e) = e_2$.

מסלול מצומצם: יהי G גרף מכוון אזי מסלול σ עבורו לכל $e \in E(G)$ לא מתקיים כי (e, e^{-1}) תת-מסלול של σ .

החבורה היסודית של גרף: יהי G גרף מכוון ויהי $v \in V(G)$ אזי $\sigma \in \pi_1(G, v)$ מעגל מצומצם מ- v ל- v ב- G $\pi_1(G, v) = \{\sigma \mid \sigma \text{ מעגל מצומצם מ-} v \text{ ל-} v \text{ ב-} G\}$.

טענה: יהי G גרף מכוון ויהי $v \in V(G)$ אזי $\pi_1(G, v)$ המצוידת עם שרשור מסלולים הינה חבורה.

הערה: כאשר משרשרים מסלולים יש לצמצם תתי מסלולים מהצורה (e, e^{-1}) .

מסקנה: $\pi_1(\{v\}, \{(v, v)\}, v) \cong \mathbb{Z}$.

גרף השושנים: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $B_n = (\{v\}, \{(v, v, 1) \dots (v, v, n)\})$.

הערה: גרף השושנים הינו מולטי גרף בעל n לולאות עצמיות של v .

חבורה חופשית: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $F_n = \pi_1(B_n, v)$.

גרף קיילי: תהא G חבורה ותהא $S \subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $\text{Cay}(G, S) = (G, \{(g, gs) \mid (g \in G) \wedge (s \in S)\})$.

גרף טרנזיטיבי: גרף מכוון G המקיים כי $\text{Aut}(G)$ פועלת טרנזיטיבית על $V(G)$.

גרף רגולרי: גרף מכוון G המקיים כי לכל $v, u \in V(G)$ מתקיים $\deg(v) = \deg(u)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $S \subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $\text{Cay}(G, S)$ גרף טרנזיטיבי ורגולרי.

מילים ביוצרים: תהא G חבורה ותהא $S \subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $\bigcup_{n=0}^{\infty} (S \cup S^{-1})^n$.

יחס ביוצרים: תהא G חבורה ותהא $S \subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי מילה w עבורה $\prod_{i=1}^{\text{len}(w)} w_i = e$.

חבורת היחסים ביוצרים: תהא G חבורה ותהא $S \subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $R = \{w \mid w \text{ יחס ב-} S\}$.

מילה מצומצמת ביוצרים: תהא G חבורה ותהא $S \subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי מילה w עבורה לכל $x \in S$ לא מתקיים כי xx^{-1} תת-מילה של w וכן לא מתקיים כי $x^{-1}x$ תת-מילה של w .

חבורה חופשית: תהא X קבוצה אזי $F(X) = \{w \mid w \text{ מילה מצומצמת ב-} X\}$.

טענה: תהא X קבוצה אזי $F(X)$ המצוידת עם שרשור מילים הינה חבורה.

הערה: כאשר משרשרים מילים יש לצמצם תתי מילים מהצורה xx^{-1} וכן מילים מהצורה $x^{-1}x$.

הגדרה: תהא X קבוצה ויהי $x \in X$ נגדיר $\hat{x} \in S(F(X))$ כך $\hat{x}(\ell_1 \dots \ell_n) = \begin{cases} x\ell_1 \dots \ell_n & \ell_1 \neq x^{-1} \\ \ell_2 \dots \ell_n & \text{else} \end{cases}$.

הגדרה: תהא X קבוצה ויהי $x \in X$ נגדיר $\widehat{x^{-1}} \in S(F(X))$ כך $\widehat{x^{-1}}(\ell_1 \dots \ell_n) = \begin{cases} x^{-1}\ell_1 \dots \ell_n & \ell_1 \neq x \\ \ell_2 \dots \ell_n & \text{else} \end{cases}$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $\hat{F}(X) = \langle \{\hat{x} \mid x \in X\} \cup \{\widehat{x^{-1}} \mid x \in X\} \rangle$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $f : X \rightarrow G$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi : F(X) \rightarrow G$ עבורו $\varphi|_X = f$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $S \subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי R חבורה.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $S \subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $G \cong F(S)/R$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $S \subseteq G$ קבוצה יוצרת אזי $\langle S \mid R \rangle = F(S)/R$.