קטע/אינטרוול: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי

- $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$.
- $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$.
- $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$.
- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$.
- $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$.
- $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$.
- $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$.
- $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}$.
- $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

שדה סדור: שדה $\mathbb{F}$ ויחס סדר חזק $<$ על $\mathbb{F}$ המקיימים

- טריכוטומיה/לינאריות: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\,(x<y)\vee(x>y)\vee(x=y)$.
- קומפטביליות עם חיבור: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}.x<y\Longrightarrow x+z<y+z$.
- קומפטביליות עם כפל: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\forall z>0_{\mathbb{F}}.x<y\Longrightarrow x\cdot z<y\cdot z$.

שדה בעל תכונת ארכימדס: שדה $\mathbb{F}$ עבורו $\forall x\in\mathbb{F}.\exists n\in\mathbb{N}.x<\sum_{i=0}^{n}1$.

טענה: $\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ארכימדס.

הערך השלם/ערך שלם תחתון: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lfloor x\rfloor=[x]=\max\left(n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\right)$.

הערך השברי: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\{x\}=x-[x]$.

ערך שלם עליון: $\lceil x\rceil=\min\left(n\in\mathbb{Z}\mid x\le n\right)$.

טענה: $\nexists q\in\mathbb{Q}.q^2=2$.

טענה: $\nexists x\in\mathbb{Q}.\forall a\in\left\{y\in\mathbb{Q}.y^2\le 2\right\}.\forall b\in\left\{y\in\mathbb{Q}_+\mid y^2\ge 2\right\}.a\le x\le b$.

חסם מלעיל: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

קבוצת החסמים מלעיל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid$ חסם מלעיל של A $x\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\overline{B}_A\neq\varnothing$.

חסם מלרע: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

קבוצת החסמים מלרע: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\underline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid$ חסם מלרע של A $x\}$.

קבוצה חסומה מלרע: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\underline{B}_A\neq\varnothing$.

קבוצה חסומה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת (חסומה מלעיל)$\wedge$(חסומה מלרע).

מקסימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

סימון: המקסימום של A הוא $\max\left(A\right)$.

מינימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

סימון: המינימום של A הוא $\min\left(A\right)$.

אקסיומת השלמות: יהיו $\varnothing\neq X,Y\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le y)\Longrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le c\le y)$.

טענה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\overline{B}_A\neq\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\min\left(\overline{B}_A\right)$.

מסקנה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\underline{B}_A\neq\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: $\mathbb{R}$ הוא השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את $\mathbb{Q}$.

סופרמום/חסם עליון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\sup\left(A\right)=\min\left(\overline{B}_A\right)$.

אינפימום/חסם תחתון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(A\right)=\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(\exists\max\left(A\right)\Longrightarrow\sup\left(A\right)=\max\left(A\right))\wedge(\exists\min\left(A\right)\Longrightarrow\inf\left(A\right)=\min\left(A\right))$.

טענה: יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(a,b\right)=a\wedge\sup\left(a,b\right)=b$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b\in\mathbb{R}$ חסם מלעיל של A התב"ש

- $b=\sup\left(A\right)$.
- $\forall d\in\overline{B}_A.b\le d$.
- $\forall a\in\mathbb{R}.a<b\Longrightarrow a\notin\overline{B}_A$.

מסקנה: תהא $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\sup\left(A\right)-\varepsilon<a\le\sup\left(A\right)$.

מסקנה: תהא $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $b = \sup(A) \Longleftrightarrow (\forall x \in A.x \leq b) \wedge (\forall \varepsilon > 0.\exists x \in A.x > b - \varepsilon)$.

טענה: תהיינה $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ חסומות אזי

- $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
- $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- $\sup(-A) = -\inf(A)$.

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+.\exists b \in \mathbb{R}_+.b^2 = c$.

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+.\forall n \in \mathbb{N}.\exists b \in \mathbb{R}_+.b^n = c$.

קבוצה צפופה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A \subseteq B$ המקיימת $\forall b \in B.\forall \varepsilon > 0.\exists a \in A.\left|b-a\right| < \varepsilon$.

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}$ אזי (S צפופה ב־$\mathbb{R}$) $\Longleftrightarrow$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}.a < b \Longrightarrow (a,b) \cap S \neq \varnothing$).

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{Q}.a < b \Longrightarrow \left|(a,b) \cap \mathbb{Q}\right| = \aleph_0$.

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{Q}.a < b \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.a < r < b$.

טענה: $\forall x, y \in \mathbb{R}.x < y \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Q}.x < q < y$.

מסקנה: ($\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$)$\wedge$(לכל $a < b$ מתקיים כי $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$).

עצרת: יהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & else \end{cases}$.

בחר: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

זהות פסקל: יהי $n, k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

למה: יהיו $a_1 \ldots a_n \geq 0$ המקיימים $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ אזי $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$.

אי־שיוויון הממוצעים: יהיו $a_1 \ldots a_n > 0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$.

טענה: $(a_1 = \ldots = a_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}\right)$.

אי־שיוויון ברנולי: $\forall x > -1.\forall n \in \mathbb{N}.\left(1+x\right)^n \geq 1 + nx$.

אי־שיוויון ברנולי המוכלל: $\forall n \in \mathbb{N}.\forall x \in \mathbb{R}^n.\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|$.

הערך המוחלט: $\left|x\right| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי

- $(\left|a\right| \geq b) \Longleftrightarrow ((b \leq a) \vee (a \leq -b))$.
- $(\left|a\right| \leq b) \Longleftrightarrow (-b \leq a \leq b)$.

אי־שיוויון המשולש (אש"מ): יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\left|a+b\right| \leq \left|a\right| + \left|b\right|$.

אי־שיוויון המשולש המוכלל: יהיו $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|$.

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\left|a-b\right| \leq \left|a\right| + \left|b\right|$.

מסקנה: יהיו $x, y, z \in \mathbb{R}$ אזי $\left|x-y\right| \leq \left|x-z\right| + \left|z-y\right|$.

אי־שיוויון המשולש ההפוך: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\left|\left|a\right| - \left|b\right|\right| \leq \left|a-b\right|$.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $\forall \varepsilon > 0.\left|a-b\right| < \varepsilon$ אזי $a = b$.

טענה: יהי $r \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

סדרה: פונקציה $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

סימון: תהא a סדרה אזי $a_n = a(n)$, $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$.

הגדרה: תהא a_n סדרה אזי

- סדרה חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n > 0$.
- סדרה אי שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \geq 0$.
- סדרה שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n < 0$.
- סדרה אי חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \leq 0$.

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה אזי

- עולה ממש: $\forall n, m \in \mathbb{N}.n < m \Longrightarrow a_n < a_m$.

- עולה: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\Longrightarrow a_n\leq a_m$.
- יורדת ממש: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\Longrightarrow a_n>a_m$.
- יורדת: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\Longrightarrow a_n\geq a_m$.

סדרה חסומה מלעיל: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.a_n<M$.

סדרה חסומה מלרע: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.M<a_n$.

סדרה חסומה: סדרה a באשר a חסומה מלרע וכן a חסומה מלעיל.

סדרה מתכנסת/גבול סופי: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_n-L\right|<\varepsilon$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ תהא a סדרה עבורה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $a_n\to L$.

טענה: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{n\to\infty}r=r$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

טענה: יהי $q\in(0,1)$ אזי $q^n\to0$.

טענה: יהי $c>0$ אזי $\sqrt[n]{c}\to1$.

טענה: $\sqrt[n]{n}\to1$.

טענה: יהי $\alpha\in\mathbb{Q}_+$ אזי $\frac{1}{n^\alpha}\to0$.

משפט יחידות הגבול: יהיו $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ תהא a סדרה עבורה $\lim_{n\to\infty}a_n=L_1$ וכן $\lim_{n\to\infty}a_n=L_2$ אזי $L_1=L_2$.

משפט: יהי $L\in\mathbb{R}$ תהא a סדרה עבורה $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|L\right|$.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=0\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=0\right)$.

טענה: תהיינה a,b סדרות עבורן $\left|\left\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\neq b_n\right\}\right|\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}b_n=L\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)$.

טענה: תהא a סדרה ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_{n+k}=L\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)$.

סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה עבורה $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.M<a_n$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

סדרה מתבדרת למינוס אינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה עבורה $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n<-M$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

טענה: יהי $a>1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a^n=\infty$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}n=\infty$.

טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$.

למה: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי a חסומה.

מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\left|\left\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\notin(L-\varepsilon,L+\varepsilon)\right\}\right|\in\mathbb{N}\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $\forall r\in(0,\left|L\right|).\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_n\right|>r$.

סימון: תהא a סדרה מונוטונית אזי

- a יורדת ממש אזי $\left(a_n\to L\right)\Longleftrightarrow\left(a_n\downarrow L\right)$.
- a עולה ממש אזי $\left(a_n\to L\right)\Longleftrightarrow\left(a_n\uparrow L\right)$.
- a יורדת אזי $\left(a_n\to L\right)\Longleftrightarrow\left(a_n\searrow L\right)$.
- a עולה אזי $\left(a_n\to L\right)\Longleftrightarrow\left(a_n\nearrow L\right)$.

טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיימות סדרות $a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ עבורן $\left(a_n\searrow x\right)\wedge\left(b_n\nearrow x\right)$.

טענה ייצוג עשרוני: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיים $a:\mathbb{Z}\to\{0,\ldots,9\}$ המקיים $x=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i\cdot10^{-i}$.

סימון פיתוח מחזורי אינסופי: יהיו $d_1\ldots d_n\in\{0\ldots9\}$ אזי $\overline{d_1\ldots d_n}=d_1\ldots d_nd_1\ldots d_n\ldots$.

טענה: יהי $q\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\exists a\in\mathbb{N}.\exists a_1\ldots a_n,b_1\ldots b_\ell\left\{0\ldots9\right\}.q=a.a_1\ldots a_n\overline{b_1\ldots b_\ell}\right)\Longleftrightarrow\left(q\in\mathbb{Q}\right)$.

משפט אוקלידס: $\mathbb{P}$ חסומה מלרע אך לא מלעיל.

סדרות אוקלידס־מולין: סדרה p עבורה $p_1\in\mathbb{P}$ וכן $p_n\in\left\{p\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_i\right)\right\}$ לכל $n\in\mathbb{N}_+$.

משפט דריכלה: יהי $\theta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ אזי $\left|\left\{\langle p,q\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\mid\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\right\}\right|\geq\aleph_0$.

מספר מקורב רע: מספר $a\in\mathbb{R}$ עבורו $\forall p\in\mathbb{Q}.\forall q\in\mathbb{N}.\left(\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\right)\Longrightarrow\left(\exists c\in\mathbb{R}.\frac{c}{q^2}<\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\right)$.

חשבון גבולות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהיינה $\left(a_n\right),\left(b_n\right)$ סדרות המקיימות $\left(a_n\to a\right)\wedge\left(b_n\to b\right)$ אזי

- $a_n+b_n\to a+b$.

- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.
- אם $b \neq 0$ וכן $\forall n \in \mathbb{N}.b_n \neq 0$ אזי $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

למה: יהי $L \in \mathbb{R}$ ותהא d_n סדרה אי־שלילית עבורה $d_n \to L$ אזי $L \geq 0$.

טענה: תהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n \to L$ ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{L}$.

סימון: יהיו a_n, b_n סדרות עבורן $\exists N \in \mathbb{N}.\forall n \geq N.a_n \leq b_n$ אזי $a_n \preccurlyeq b_n$.

סימון: יהיו a_n, b_n סדרות עבורן $\exists N \in \mathbb{N}.\forall n \geq N.a_n < b_n$ אזי $a_n \prec b_n$.

מונוטוניות גבולות: תהיינה a_n, b_n סדרות מתכנסות אזי $(a_n \preccurlyeq b_n) \implies (\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n)$.

משפט הסנדוויץ': תהיינה a_n, b_n, c_n סדרות המקיימות $a_n \preccurlyeq b_n \preccurlyeq c_n$ אזי $(a_n, c_n \to L) \implies (b_n \to L)$.

טענה: תהא a_n סדרה חסומה ותהא b_n סדרה המקיימת $b_n \to 0$ אזי $a_n b_n \to 0$.

מסקנה: תהא a_n סדרה חסומה אזי $\frac{a_n}{n} \to 0$.

משפט: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\exists b \in B^{\mathbb{N}}.b_n \to \sup(B)$.

מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי $\exists b \in B^{\mathbb{N}}.b_n \to \inf(B)$.

טענה: תהיינה a_n, b_n סדרות אזי

- $(a_n \to \infty) \wedge (a_n \preccurlyeq b_n) \implies (b_n \to \infty)$.
- $(a_n \to -\infty) \wedge (b_n \preccurlyeq a_n) \implies (b_n \to -\infty)$.

מבחן השורש: תהא a_n סדרה אי שלילית אזי $(\exists \alpha \in [0,1).a_n \prec \alpha^n) \implies (a_n \to 0)$.

מבחן השורש הגבולי: יהי $p \in \mathbb{R}$ ותהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n^{\frac{1}{n}} \to p$ אזי

- $0 \leq p < 1 \implies a_n \to 0$.
- $p > 1 \implies a_n \to \infty$.

סימון: תהא a_n סדרה חסומה מלעיל אזי $\sup(a_n) = \sup(\operatorname{Im}(a))$.

סימון: תהא a_n סדרה חסומה מלרע אזי $\inf(a_n) = \inf(\operatorname{Im}(a))$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי

- אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי $a_n \nearrow \sup(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי $a_n \nearrow \infty$.
- אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי $a_n \searrow \inf(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי $a_n \searrow -\infty$.

מבחן המנה הגבולי: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ אזי

- $(L < 1) \implies (a_n \to 0)$.
- $(L > 1) \implies (a_n \to \infty)$.

התכנסות צ'זארו: תהא a_n סדרה אזי $(C)\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n}$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a_n סדרה המקיימת $a_n \to a$ במובן הרחב אזי $(C)\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

משפט התכנסות ממוצע הנדסי: תהא a_n סדרה חיובית המקיימת $a_n \to a$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} a_i} \to a$.

משפט ד'אלאמבר: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to c$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{a_n} \to c$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $a \to L$ במובן הרחב ותהא $t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=1}^{n} t_k \to \infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} t_k} \to L$.

משפט שטולץ: תהא a סדרה ותהא $\infty \uparrow b$ סדרה נניח כי $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L$ במובן הרחב אזי $\frac{a_n}{b_n} \to L$.

טענה: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in (2,3]$.

קבוע אוילר: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

טענה: תהא $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $a_n \to \infty$ אזי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$.

תת סדרה/סדרה חלקית (ת"ס): תהא a סדרה ותהא $n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה אזי $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה של a אזי

- (a חסומה מלעיל)$\Longrightarrow$(b חסומה מלעיל).
- (a חסומה מלרע)$\Longrightarrow$(b חסומה מלרע).
- $(a \to L) \implies (b \to L)$.
- (a מונוטונית)$\Longrightarrow$(b מונוטונית).

טענה: תהא a סדרה ללא מקסימום אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

טענה: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מונוטונית.

הלמה של קנטור על קטעים מקוננים: תהיינה a,b סדרות המקיימות $b-a\to 0$ וגם $\forall n\in\mathbb{N}.\left(a_n\le b_n\right)\wedge\left(\left[a_{n+1},b_{n+1}\right]\subseteq\left[a_n,b_n\right]\right)$ אזי $\left|\bigcap_{n=0}^{\infty}\left[a_n,b_n\right]\right|=1$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C}=[0,1]\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

סימון: $\mathbb{R}_\infty=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$.

גבול חלקי: תהא a סדרה אזי $x\in\mathbb{R}_\infty$ עבורו קיימת תת סדרה b עבורה $b\to x$ במובן הרחב.

סימון: תהא a סדרה אזי $\mathcal{P}(a)=\{L\in\mathbb{R}\mid \text{גבול חלקי של } a\ L\}$, $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\{L\in\mathbb{R}_\infty\mid \text{גבול חלקי של } a\ L\}$.

טענה: תהא a סדרה אזי

- (a אינה חסומה מלעיל)$\iff$($\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$).
- (a אינה חסומה מלרע)$\iff$($-\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$).

טענה: תהא a סדרה אזי $\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|>0$.

משפט: תהא a סדרה אזי $\left(L\in\mathcal{P}\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\left|\left\{a_n\mid\left|a_n-L\right|<\varepsilon\right\}\right|=\aleph_0\right)$.

מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי $\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\subseteq\left[\inf(a),\sup(a)\right]$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim\left(\sup(a)\right)=\sup\left(\mathcal{P}\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\overline{\lim}(a)=\lim\left(\sup(a)\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim\left(\inf(a)\right)=\inf\left(\mathcal{P}\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\underline{\lim}(a)=\lim\left(\inf(a)\right)$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\iff$($\left(\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\right)\wedge\left(\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|=1\right)$).

משפט: תהא a סדרה חסומה אזי $\min\left(\mathcal{P}\right),\max\left(\mathcal{P}\right)$ קיימים.

טענה: יהיו $b_1\ldots b_m:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ זרות בזוגות המקיימות $\left(\biguplus b_i=\mathbb{N}\right)\wedge\left(b_i\uparrow\infty\right)$ ותהא a סדרה אזי $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\bigcup_{i=1}^{m}\widehat{\mathcal{P}}\left(a_{b_i}\right)$.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.\left(x-\varepsilon,x+\varepsilon\right)\subseteq A$.

טענה: תהא $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ באשר A_i פתוחה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ פתוחה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות פתוחות אזי $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ פתוחה.

קבוצה סגורה: קבוצה $B\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\mathbb{R}\backslash B$ פתוחה.

טענה: תהא $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ באשר B_i סגורה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$ סגורה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות סגורות אזי $\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ סגורה.

נקודת הצטברות: תהא $S\subseteq\mathbb{R}$ אזי $x\in\mathbb{R}$ המקיימת $\exists a\in\left(S\backslash\{x\}\right)^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n=x$.

טענה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- B קבוצה סגורה.
- $\forall a\in B^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n\in B$.
- $\{x\in\mathbb{R}\mid \text{נקודת הצטברות של } B\ x\}\subseteq B$.

משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים $\mathcal{P}(a)$ קבוצה סגורה.

כמעט תמיד: פרידקט $P(n)$ המקיים $\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N.P(n)$.

שכיח: פרידקט $P(n)$ המקיים $\left|\{n\in\mathbb{N}\mid P(n)\}\right|=\aleph_0$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\iff$($\limsup a=\liminf a$).

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in[-\infty,\infty]$ אזי

- $\left(\limsup a\le L\right)\Longrightarrow\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\le L\right)$.
- $\left(\limsup a\ge L\right)\Longrightarrow\left(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\ge L\right)$.
- $\left(\liminf a\ge L\right)\Longrightarrow\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\ge L\right)$.
- $\left(\liminf a\ge L\right)\Longrightarrow\left(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\le L\right)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in\mathbb{R}$ התב"ש

- $\limsup a=L$.

- $\forall\varepsilon>0.\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_{n}<L+\varepsilon\right)\wedge\left(\forall\varepsilon>0.\forall N\in\mathbb{N}.\exists n\geq N.a_{n}>L-\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה a,b סדרות המקיימות $a_n \preccurlyeq b_n$ אזי $(\liminf a\leq\liminf b)\wedge(\limsup a\leq\limsup b)$.

סדרת קושי: סדרה a המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m,n\geq N.\left|a_{m}-a_{n}\right|<\varepsilon$.

למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow$(a סדרת קושי).

סכום אינסופי: יהי $k\in\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{i=k}^{\infty}a_{i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^{n}a_{i}$.

טור: תהא a סדרה אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_{i}$.

סימון: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ טור אזי $\sum a_{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$.

סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרה אזי $S_{n}^{a}=\sum_{i=0}^{n}a_{i}$.

טור מתכנס: תהא a סדרה אזי $\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i}=L\right)\Longrightarrow\left(S_{n}^{a}\to L\right)$.

טור גאומטרי: יהי $a\neq0$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty}ar^{n}$.

משפט: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum_{n=0}^{\infty}ar^{n}$ מתכנס)$\Longleftrightarrow\left(|r|<1\right)$.

הטור ההרמוני: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty$.

משפט: תהא a סדרה אזי ($\sum_{i=0}^{\infty}a_{n}$ מתכנס)$\Longleftarrow\left(a_{n}\to0\right)$.

קריטריון קושי: יהי $\sum a_{n}$ טור אזי ($\sum a_{n}$ מתכנס)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m>N.\forall k\in\mathbb{N}.\left|\sum_{n=m}^{m+k}a_{n}\right|<\varepsilon\right)$.

חשבון טורים: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n},\sum_{n=0}^{\infty}b_{n}$ טורים ויהי $\xi\in\mathbb{R}\backslash\left\{ 0\right\}$

- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n}+b_{n}\right)$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}\xi a_{n}$ מתכנס).

הגדרה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ טור אזי

- טור חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}>0$.
- טור אי שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}\geq0$.
- טור שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}<0$.
- טור אי חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}\leq0$.

טור מתכנס בהחלט: טור $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ המקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{n}\right|$ מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ טור מתכנס בהחלט אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ מתכנס.

סימון: יהיו $\sum a_{n},\sum b_{n}$ טורים חיוביים עבורם ממקום מסויים $a_{n}\leq b_{n}$ אזי $\sum a_{n}\preccurlyeq\sum b_{n}$.

משפט ההשוואה: יהיו $\sum a_{n},\sum b_{n}$ טורים המקיימים $\sum a_{n}\preccurlyeq\sum b_{n}$ אזי

- ($\sum_{n=0}^{\infty}b_{n}$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ מתבדר)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ מתבדר).

מבחן ההשוואה הגבולי: יהיו a_{n},b_{n} סדרות חיוביות המקיימות $\frac{a_{n}}{b_{n}}\to L$ במובן הרחב אזי

- $\left(L\in\left(0,\infty\right)\right)\Longrightarrow\left(\left(\sum b_{n}<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\sum a_{n}<\infty\right)\right)$.
- $\left(L=0\right)\Longrightarrow\left(\left(\sum b_{n}<\infty\right)\Longrightarrow\left(\sum a_{n}<\infty\right)\right)$.
- $\left(L=\infty\right)\Longrightarrow\left(\left(\sum b_{n}<\infty\right)\Longleftarrow\left(\sum a_{n}<\infty\right)\right)$.

מבחן השורש: יהי $\sum a_{n}$ טור אי שלילי (קיים $q\in\left(0,1\right)$ עבורו כמעט תמיד $a_{n}^{\frac{1}{n}}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_{n}$ מתכנס).

מבחן השורש הגבולי: יהי $\sum a_{n}$ טור חיובי אזי

- ($\sum a_{n}$ מתכנס)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\sup\left(a_{n}^{\frac{1}{n}}\right)\right)<1\right)$.
- ($\sum a_{n}$ מתבדר)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\sup\left(a_{n}^{\frac{1}{n}}\right)\right)>1\right)$.

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_{n}$ טור חיובי אזי

- (קיים $q\in\left(0,1\right)$ עבורו כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_{n}}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_{n}$ מתכנס).
- (כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\geq1$)$\Longleftarrow$($\sum a_{n}$ מתבדר).

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_{n}$ טור חיובי אזי

- ($\sum a_{n}$ מתכנס)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\sup\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right)\right)<1\right)$.
- ($\sum a_{n}$ מתבדר)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\inf\left(\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right)\right)>1\right)$.

משפט העיבוי: תהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$($\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $m \ge 2$ ותהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$($\sum m^n a_{m^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי ($\sum \frac{1}{n^x}$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$ $(x > 1)$.

משפט לייבניץ: תהא $a_n \searrow 0$ אזי $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

טור מתכנס בתנאי: טור $\sum a_n$ מתכנס המקיים $\sum |a_n|$ מתבדר.

טענה: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=m}^{n} a_k \left(b_{k+1} - b_k\right) = \left(a_n b_{n+1} - a_m b_m\right) - \sum_{k=m+1}^{n} b_k \left(a_k - a_{k-1}\right)$.

התמרת אבל: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} a_m \left(b_k - b_{k+1}\right)$.

קריטריון דריכלה: תהא $b \to 0$ סדרה מונוטונית ותהא a סדרה עבורה S_n^a חסומה אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

קריטריון אבל: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

משפט: $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$.

משפט: יהי $\sum a_n = L$ טור ותהא $\underset{b_0=0}{b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ עולה ממש אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L$.

למה: תהא a סדרה ותהא $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש עבורה $b_0 = 0$ וכן $(a_i)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1}$ בעלי אותו סימן וגם $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L$ אזי $\sum a_n = L$.

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתכנס ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

סימון: תהא a_n סדרה אזי $\left(a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}\right) \wedge \left(a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}\right)$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בהחלט)$\Longleftrightarrow$($\sum a_n^+$ מתכנס)$\wedge$($\sum a_n^-$ מתכנס).

משפט: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בתנאי)$\Longleftarrow$ $\left(\sum a_n^+ = \infty = \sum a_n^-\right)$.

משפט רימן: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי $\forall S \in [-\infty, \infty] . \exists \sigma \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{N} . \sum a_{\sigma(n)} = S$.

טענה: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי קיים $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג עבורו $\nexists \sum a_{\sigma(n)}$.

משפט קושי: יהיו $p,q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט אזי $\sum \sum a_{p(n)} b_{q(k)} = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.

טור חזקות: תהא a_n סדרה ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k \left(x - x_0\right)^k$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט עבור $x \in \left(-|q|, |q|\right)$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ עבורו

- יהי $x \in (-R, R)$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט.
- יהי $x \notin [-R, R]$ אזי $\sum a_k x^k$ מתבדר.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0, \infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty\right) \Longrightarrow (R = 0)\right) \wedge \left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0\right) \Longrightarrow (R = \infty)\right)$.

מכפלת קושי: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות אזי $\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$.

טענה: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות המתכנסים עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ מתכנס עבור q.

התכנסות צ'זארו: יהי $\sum a_n$ טור אזי $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n}$.

טענה: יהי $\sum a_n$ טור אזי $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_n \left(1 - \frac{i}{n}\right)$.

פונקציה מונוטונית: תהא $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי

- עולה ממש: $\forall x,y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- עולה: $\forall x,y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \le f(y)$.
- יורדת ממש: $\forall x,y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.
- יורדת: $\forall x,y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \ge f(y)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי x^n מונוטונית עולה ממש בקטע $[0, \infty)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left(f(x) = x^n\right) \Longrightarrow \left(f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}\right)$.

טענה: יהיו $n,m,k,\ell \in \mathbb{N}$ המקיימים $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell}$ אזי $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x^k\right)^{\frac{1}{\ell}}$.

טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהיינה $a,b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימות $a_n, b_n \searrow b$ אזי $\lim\left(c^{a_n}\right) = \lim\left(c^{b_n}\right)$.

הגדרה: יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ יהי $b \in \mathbb{R}$ ותהא $b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $b_n \searrow b$ אזי

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

- $.x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$
- $.a^b = \lim_{n\to\infty} a^{b_n}$

פונקציית החזקה: יהי $0 < \alpha$ נגדיר $f \in [0,\infty)^{[0,\infty)}$ כך $.f(x) = x^\alpha$

פונקציית החזקה: יהי $0 > \alpha$ נגדיר $f \in (0,\infty)^{(0,\infty)}$ כך $.f(x) = x^\alpha$

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $.\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

משפט: יהיו $a,b,x,y \in \mathbb{R}$ אזי $.(yx)^a = y^a x^a$

משפט: יהיו $a,b,x \in \mathbb{R}$ אזי $.(x^a)^b = x^{ab}$

משפט: יהיו $a,b,x \in \mathbb{R}$ אזי $.x^a x^b = x^{a+b}$

טענה: יהי $x > 1$ ויהיו $0 < r < \ell$ אזי $.x^r < x^\ell$

טענה: יהי $0 < x < 1$ ויהיו $0 < r < \ell$ אזי $.x^r > x^\ell$

הפונקציה המעריכית: יהי $0 < \alpha \neq 1$ נגדיר $f \in (0,\infty)^{\mathbb{R}}$ כך $.f(x) = a^x$

סינוס: נגדיר $\sin : [0,2\pi] \to [-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ממול הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

סינוס: $\forall k \in \mathbb{N}. \sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$

קוסינוס: נגדיר $\cos : [0,2\pi] \to [-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

קוסינוס: $\forall k \in \mathbb{N}. \cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$

טנגנס: נגדיר $\tan : \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ כך $.\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

קוטנגנס: נגדיר $\cot : \mathbb{R} \backslash \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ כך $.\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

טענה: זהויות טריגונומטריות.

הגדרה: $.\arcsin = \sin^{-1}$

הגדרה: $.\arccos = \cos^{-1}$

הגדרה: $.\arctan = \tan^{-1}$

הגדרה: $.\mathrm{arccot} = \cot^{-1}$

לוגריתם: יהי $a > 0$ נסמן $f(x) = a^x$ אזי $.(f)^{-1} = \log_a$

סימון (הלוגריתם הטבעי): $.\ln = \log_e$

טענה: זהויות לוגרתמיות.

פונקציה מחזורית: פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת $.\exists a \in \mathbb{R}_+ . f(x+a) = f(x)$

פונקציה זוגית: פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת $.\forall x \in \mathbb{R}. f(-x) = f(x)$

פונקציה אי־זוגית: פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת $.\forall x \in \mathbb{R}. f(-x) = -f(x)$

קטע מנוקב: יהי $\delta > 0$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $.I_x = (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$

פונקציה מתכנסת/גבול סופי: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ויהיו $a,b \in \mathbb{R}$ המקיימות $a < x_0 < b$ תהא $f : A \to \mathbb{R}$ אזי

- בנקודה: $A = I_{x_0}$ אזי
  - קושי: $.\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = L\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0}. |f(x) - L| < \varepsilon\right)$
  - היינה: $.\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = L\right) \iff \left(\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \to x_0) \implies (f(y_n) \to L)\right)$
- חד צדדי מימין: $A = (x_0, b)$ אזי
  - קושי: $.\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. x \in (x_0, \min\{x_0+\delta, b\}). |f(x) - L| < \varepsilon\right)$
  - היינה: $.\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\right) \iff \left(\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \downarrow x_0) \implies (f(y_n) \to L)\right)$
- חד צדדי משמאל: $A = (a, x_0)$ אזי
  - קושי: $.\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. x \in (\max\{x_0-\delta, a\}, x_0). |f(x) - L| < \varepsilon\right)$
  - היינה: $.\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L\right) \iff \left(\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \uparrow x_0) \implies (f(y_n) \to L)\right)$
- באינסוף: $A = (a, \infty)$ אזי
  - קושי: $.\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = L\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0. \exists M \in \mathbb{R}. \forall x \geq M. |f(x) - L| < \varepsilon\right)$
  - היינה: $.\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = L\right) \iff \left(\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \to \infty) \implies (f(y_n) \to \infty)\right)$
- במינוס אינסוף: $A = (-\infty, b)$ אזי
  - קושי: $.\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0. \exists M \in \mathbb{R}. \forall x \leq M. |f(x) - L| < \varepsilon\right)$
  - היינה: $.\left(\lim_{x\to\infty} f(x) = L\right) \iff \left(\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \to -\infty) \implies (f(y_n) \to -\infty)\right)$

פונקציה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$ המקיימות $a < x_0 < b$

- בנקודה: תהא $f : I_{x_0} \to \mathbb{R}$
  - $(\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in I_{x_0}.f(x) > M) \iff (\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty)$.
  - $(\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in I_{x_0}.f(x) < -M) \iff (\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$.
- חד צדדי מימין: תהא $f : (x_0, b) \to \mathbb{R}$ אזי
  - $(\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0, \min\{x_0 + \delta, b\}).f(x) > M) \iff \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty\right)$.
  - $(\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (x_0, \min\{x_0 + \delta, b\}).f(x) < -M) \iff \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\right)$.
- חד צדדי משמאל: תהא $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$ אזי
  - $(\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (\max\{x_0 - \delta, a\}, x_0).f(x) > M) \iff \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty\right)$.
  - $(\forall M > 0.\exists\delta > 0.\forall x \in (\max\{x_0 - \delta, a\}, x_0).f(x) < -M) \iff \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty\right)$.
- באינסוף: תהא $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ אזי
  - $(\forall M > 0.\exists\delta \in \mathbb{R}.\forall x \geq \delta.f(x) > M) \iff (\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty)$.
  - $(\forall M > 0.\exists\delta \in \mathbb{R}.\forall x \geq \delta.f(x) < -M) \iff (\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty)$.
- במינוס אינסוף: תהא $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ אזי
  - $(\forall M > 0.\exists\delta \in \mathbb{R}.\forall x \leq \delta.f(x) > M) \iff (\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty)$.
  - $(\forall M > 0.\exists\delta \in \mathbb{R}.\forall x \leq \delta.f(x) < -M) \iff (\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty)$.

סימון: $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

סימון: יהי $L \in \hat{\mathbb{R}}$ יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ ותהא $f : I \to \mathbb{R}$ עבורה $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אזי $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$.

משפט: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ אזי $((\lim_{x\to a} f(x) = L_1) \wedge (\lim_{x\to a} f(x) = L_2)) \implies (L_1 = L_2)$.

טענה: יהי $L \in \hat{\mathbb{R}}$ תהא $f : I \to \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ עבורם $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ וכן $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ אזי $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

פונקציית דיריכלה: נגדיר $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך $D(x) = \begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q} \\ 1 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבון גבולות: יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ ויהיו $f, g : I_a \to \mathbb{R}$ אזי

- $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x)) + (\lim_{x\to a} g(x))$.
- $\lim_{x\to a} (f(x) g(x)) = (\lim_{x\to a} f(x)) \cdot (\lim_{x\to a} g(x))$.

למה: יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ אזי $\lim_{x\to a} x = a$.

מסקנה: יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x]$ אזי $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

משפט: יהיו $a, b \in \hat{\mathbb{R}}$ תהא $g : I_b \to \mathbb{R}$ ותהא $f : I_a \to I_b$ המקיימת $\lim_{x\to a} f(x) = b$ אזי $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{x\to b} g(x)$.

פונקציה אלמנטרית: הרכבה/סכום/כפל/הופכית של $(\bigcup \{\{\log_a(x), a^x\} \mid a > 0\}) \cup \mathbb{R}[x] \cup \{\sin, \cos\} \cup \{x^a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי $\forall a \in \text{Dom}(f).\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

משפט: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $|\sin(x)| \leq |x|$.

למה: יהי $a \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$.

מסקנה: יהי $a \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$.

סימון: יהיו $f, g : I \to \mathbb{R}$ המקיימות $\forall x \in I.f(x) \leq g(x)$ אזי $f(x) \preccurlyeq g(x)$.

מונוטוניות גבולות: יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ ותהיינה $f, g : I \to \mathbb{R}$ המקיימות $f(x) \preccurlyeq g(x)$ אזי $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

כלל הסנדוויץ': יהי $L \in \hat{\mathbb{R}}$ יהי $a \in \hat{\mathbb{R}}$ ותהיינה $f, g, h : \mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x) \preccurlyeq g(x) \preccurlyeq h(x)$ אזי $\left(f(x), h(x) \xrightarrow[x\to a]{} L\right) \implies \left(g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L\right)$.

למה: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

רציפות: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי

- רציפות בנקודה: $a \in I$ עבורה $\lim_{x\to a} f(x) = f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית מימין בנקודה: $a \in I$ עבורה $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית משמאל בנקודה: $a \in I$ עבורה $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(x_0)$.

פונקציה רציפה בצורת קושי: פונקציה $f : I \to \mathbb{R}$ המקיימת $\forall a \in I.\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

פונקציה רציפה בצורת היינה: פונקציה $f : I \to \mathbb{R}$ המקיימת $\forall a \in I.\forall x \in I^{\mathbb{N}}.((x_n \to a) \implies (\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)))$.

משפט: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי (f רציפה בצורת קושי)$\iff$(f רציפה בצורת הנייה).

פתוחה יחסית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $B\subseteq A$ המקיימת $\forall x\in B.\exists\varepsilon>0.\left(x-\varepsilon,x+\varepsilon\right)\cap A\subseteq B$.

משפט: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על I)$\Longleftrightarrow$(לכל $B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה $f^{-1}\left(B\right)$ פתוחה יחסית ל־I).

טענה: תהא $f:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}$ ותהא $c\in\left(a,b\right)$ אזי (f רציפה על c)$\Longleftrightarrow$(($f_{\restriction_{(a,c]}}$ רציפה על c)$\wedge$($f_{\restriction_{[c,b)}}$ רציפה על c)).

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $C\left(I\right)=\{f:I\to\mathbb{R}\mid f\text{ רציפה על }I\}$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right)\right)$ רציפה מונוטונית עולה

- ($f\left[\left(a,b\right)\right]$ חסומה מלעיל)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^-}f\left(x\right)=\sup f\left[\left(a,b\right)\right]$).
- ($f\left[\left(a,b\right)\right]$ אינה חסומה מלעיל)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^-}f\left(x\right)=\infty$).
- ($f\left[\left(a,b\right)\right]$ חסומה מלרע)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^-}f\left(x\right)=\inf f\left[\left(a,b\right)\right]$).
- ($f\left[\left(a,b\right)\right]$ חסומה אינה מלרע)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^-}f\left(x\right)=-\infty$).

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה על a המקיימת $f\left(a\right)>0$ אזי קיימת סביבה I של a עבורה $\forall x\in I.f\left(x\right)>0$.

מסקנה: תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפות על a המקיימות $f\left(a\right)>g\left(a\right)$ אזי קיימת סביבה I של a עבורה $\forall x\in I.f\left(x\right)>g\left(x\right)$.

טענה: יהיו $f,g\in C\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left(\forall q\in\mathbb{Q}.f\left(q\right)=g\left(q\right)\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

נקודת אי־רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $a\in I$ המקיימת

- סליקה: $\lim_{x\to a}f\left(x\right)\neq f\left(a\right)$.
- סוג ראשון/קפיצה: $\lim_{x\to a^-}f\left(x\right)\neq\lim_{x\to a^+}f\left(x\right)$.
- סוג שני: ($\lim_{x\to a^+}f\left(x\right)$ לא קיים)$\vee$($\lim_{x\to a^-}f\left(x\right)$ לא קיים).

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\Longleftrightarrow$($\forall y\in\mathbb{N}^I.\left(y_n\to a\right)\Longrightarrow$ ($\lim f\left(y_n\right)$ קיים וסופי)).

פונקציית רימן: נגדיר $R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך $R\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \exists p,q\in\mathbb{Z}.\left(\gcd\left(p,q\right)=1\right)\wedge\left(x=\frac{p}{q}\right)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $R\left(x\right)=R\left(x+1\right)$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a}R\left(x\right)=0$.

טענה חשבון רציפות: יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ רציפות על a אזי $f+g,f\cdot g,f^g$ רציפות על a.

טענה: תהא $f:A\to B$ רציפה על a וכן $g:B\to C$ רציפה על $f\left(a\right)$ אזי $g\circ f$ רציפה על a.

מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה ותהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\lim_{x\to a}g\left(x\right)\right)$.

פונקציה רציונאלית: יהיו $p,q\in\mathbb{R}\left[x\right]$ אזי $\frac{p}{q}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי כמות נקודות האי־רציפות לכל היותר בת מנייה.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)\Longrightarrow\left(\exists x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\right)$.

משפט וויירשטראס הראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

משפט וויירשטראס השני: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\exists\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)$.

משפט ערך הביניים: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\forall y\in\left(\min\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right),\max\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right)\right).\exists c\in\left(a,b\right).f\left(c\right)=y$.

למה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$ אזי $\exists\zeta\in\left[a,b\right].f\left(\zeta\right)=0$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\left(\left[a,b\right]\right)=\left[\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)\right]$.

קטע מוכלל: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x,y\in A.\forall\lambda\in\left[0,1\right].\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\in A$.

למה: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ חח"ע אזי f מונוטונית ממש.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\wedge\left(f^{-1}\in C\left(f\left(I\right)\right)\right)$.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\Longleftrightarrow\left(f\in C\left(I\right)\right)$.

מסקנה: יהי $a>0$ אזי $x^a,a^x\in C\left(\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $a_n\to a>0$ סדרה חיובית וכן $b_n\to b$ סדרה אזי $a_n^{b_n}\to a^b$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ ויהי $p\in\mathbb{R}_n\left[x\right]\backslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ אזי $\exists\zeta\in\mathbb{R}.p\left(\zeta\right)=0$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $\left[a,b\right]$ קומפקטית.

פונקציה רציפה במידה שווה (במ"ש): $f\in\mathbb{R}^A$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A.\forall y\in\left(x-\delta,x+\delta\right).\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ רציפה במ"ש אזי f רציפה.

תנאי ליפשיץ: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ עבורה $\exists M>0.\forall x,y\in A.\left|\frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{x-y}\right|<M$ אזי f רציפה במ"ש.

משפט קנטור: תהא $f \in C([a,b])$ אזי f רציפה במ״ש על $[a,b]$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^A$ רציפה במ״ש על $[c,d]$, $(a,b]$ אזי f רציפה במ״ש על (a,d).

פרה־קומפקטיות: תהא $D \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $f \in \mathbb{R}^D$ רציפה במ״ש אזי $\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{R}\right) \implies \left(\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}\right)$.$\forall x \in D^{\mathbb{N}}$.

טענה: תהא $f \in C((a,b])$ אזי (f רציפה במ״ש)$\iff(\lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R})$.

מסקנה: תהא $f \in C((a,b))$ אזי (f רציפה במ״ש)$\iff(\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R})$.

משפט: תהא $f \in C([a,\infty))$ המקיימת $\lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ אזי f רציפה במ״ש על $[a,\infty)$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ רציפה במ״ש אזי f חסומה.

מודולוס הרציפות: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| \mid (x_1, x_2 \in I) \wedge (|x_1 - x_2| < \delta)\}$.

גזירות: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי

- נגזרת בנקודה: תהא $x_0 \in I$ אזי $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית מימין בנקודה: תהא $x_0 \in I$ אזי $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית משמאל בנקודה: תהא $x_0 \in I$ אזי $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

טענה: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$ אזי $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

נגזרת: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי $f' : I \to \mathbb{R}$.

סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי $\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$.

טענה: יהי חלקיק ותהיינה $x, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי $x'(t) = v(t)$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I^{\pm}$ אזי (f גזירה בנקודה x_0)$\Longleftarrow$(f רציפה בנקודה x_0).

קירוב בנקודה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I$ אזי $p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \backslash \mathbb{R}_{n-1}[x]$ המקיימת $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

סדר הקירוב: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ויהי $p(x)$ קירוב בנקודה x_0 אזי $\deg(p)$.

דיפרנציאבילית בנקודה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי $x_0 \in I$ עבורה (f רציפה על x_0)$\wedge$(קיים קירוב מסדר ראשון של f בנקודה x_0).

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I$ אזי (f דיפרנציאבילית בנקודה x_0)$\iff$(f גזירה בנקודה x_0).

חשבון גזירות: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות בנקודה x_0 אזי

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$.
- $(g(x_0) \neq 0) \implies \left(\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right)$.

משפט: תהא $x_0 \in I$ ותהא $f \in C(I)$ מונוטונית חזק גזירה על $f^{-1}(y_0)$ אזי $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

מסקנה: $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

מסקנה: $(e^x)' = e^x$.

מסקנה: יהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $(x^r)' = rx^{r-1}$.

מסקנה: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

כלל השרשרת: תהא $x_0 \in I$ תהא $f \in C(I)$ גזירה על x_0 וכן $g \in C(f(I))$ גזירה על $f(x_0)$ אזי $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

נגזרת מסדר גבוה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה אזי $\left(f^{(0)} = f\right) \wedge \left(f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'\right)$.

הפרש דיסקרטי: תהא $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

הגדרה: תהא $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\Delta^{(0)} f = \Delta f\right) \wedge \left(\Delta^{(k+1)} f = \Delta\left(\Delta^{(k)} f\right)\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה עבורה f' רציפה.

סימון: תהא $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\left(C^n(I) = \left\{f \in C^{n-1}(I) \mid \text{גזירה ברציפות } f\right\}\right) \wedge \left(C^0(I) = C(I)\right)$.

פונקציה חלקה: תהא $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $f \in C^\infty(I) = \bigcap_{n=0}^{\infty} C^n(I)$.

כלל לייבניץ: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות אזי $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$.

נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי

- מקסימום: $x_0 \in I$ עבורה $\exists\delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). f(x) \leq f(x_0)$.
- מינימום: $x_0 \in I$ עבורה $\exists\delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). f(x_0) \leq f(x)$.

משפט פרמה: תהא $f \in C([a,b])$ גזירה על (a,b) ותהא $x_0 \in (a,b)$ נקודת קיצון אזי $f'(x_0) = 0$.

משפט רול: תהא $f \in C([a,b])$ גזירה על (a,b) המקיימת $f(a) = f(b)$ אזי $\exists c \in (a,b). f'(c) = 0$.

משפט לגרנז': תהא $f \in C([a,b])$ גזירה על (a,b) אזי $\exists c \in (a,b). f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה אזי (f' חסומה)$\Longrightarrow$(f רציפה במ"ש).

טענה: $\forall x>0.e^{x}>1+x$.

טענה: $\forall x,y\in\mathbb{R}.\left|\sin\left(x\right)-\sin\left(y\right)\right|\le\left|x-y\right|$.

טענה: תהא $f\in C\left(\mathbb{R}\right)$ גזירה המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f'\left(x\right)=0$ אזי $\exists a\in\mathbb{R}.f\left(x\right)=a$.

מסקנה: תהיינה $g,h\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימות $g'=h'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.g=h+c$.

טענה: תהא $f\in C\left(\mathbb{R}\right)$ גזירה המקיימת $f=f'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.f\left(x\right)=e^{x}$.

משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה $f,g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ גזירות על $\left(a,b\right)$ אזי $\exists x_{0}\in\left(a,b\right).\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{g\left(b\right)-g\left(a\right)}=\frac{f'\left(x_{0}\right)}{g'\left(x_{0}\right)}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה אזי

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'\left(x\right)>0$ אזי f עולה ממש.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'\left(x\right)<0$ אזי f יורדת ממש.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה פעמיים על I ומתקיים $x_{0}\in I$ ו־$f'\left(x_{0}\right)=0$ אזי

- אם $f''\left(x_{0}\right)>0$ אזי x_{0} מינימום מקומי של f.
- אם $f''\left(x_{0}\right)<0$ אזי x_{0} מקסימום מקומי של f.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right)\right)$ גזירה על $\left(a,b\right)$ המקיימת $\lim_{x\to a^{+}}f'\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי $f'_{+}\left(a\right)=\lim_{x\to a^{+}}f'\left(x\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירה ברציפות אזי $f'\left(x_{0}\right)>0\Longrightarrow\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right).f'\left(x\right)>0$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירה אזי ($f'_{+}\left(a\right)<0$ גורר a לא מינימום מקומי)$\wedge$($f'_{-}\left(b\right)>0$ גורר b לא מקסימום מקומי).

משפט דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירה אזי $\forall y\in\left(\min\left(f'\left(a\right),f'\left(b\right)\right),\max\left(f'\left(a\right),f'\left(b\right)\right)\right).\exists c\in\left(a,b\right).f'\left(c\right)=y$.

כלל לופיטל: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות ותהא $x\in I_{\infty}^{\pm}$ נניח כי $\lim_{x\to x_{0}}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ מתכנס במובן הרחב אזי

- $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=0=\lim_{x\to x_{0}}g\left(x\right)\right)\Longrightarrow\left(\lim_{x\to x_{0}}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to x_{0}}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}\right)$.
- $\left(\lim_{x\to x_{0}}g\left(x\right)=\infty\right)\Longrightarrow\left(\lim_{x\to x_{0}}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\lim_{x\to x_{0}}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}\right)$.

אי־שיוויון יאנג: יהיו $x,y>0$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ מתקיים $xy\le\frac{x^{p}}{p}+\frac{y^{q}}{q}$.

אי־שיוויון הולדר: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי $\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}y_{i}\right|\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_{i}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$.

אי־שיוויון מינקובסקי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי $\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}+y_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_{i}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$.

מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_{0}\in I^{\pm}$ אזי

- $f\in O\left(g\right)\iff\left(\exists c>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right).\left|f\left(x\right)\right|\le c\left|g\left(x\right)\right|\right)$. אינטואיטיבית $f\le g$
- $f\in\Omega\left(g\right)\iff\left(g\in O\left(f\right)\right)$. אינטואיטיבית $f\ge g$
- $f\in o\left(g\right)\iff\left(\lim_{x\to x_{0}}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=0\right)$. אינטואיטיבית $f<g$
- $f\in\omega\left(g\right)\iff\left(g\in o\left(f\right)\right)$. אינטואיטיבית $f>g$
- $f\in\Theta\left(g\right)\iff\left(f\in O\left(g\right)\wedge f\in\Omega\left(g\right)\right)$. אינטואיטיבית $f=g$
- $f\sim g\iff\left(\lim_{x\to x_{0}}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=1\right)$. אינטואיטיבית $f=g$ בדיוק של קבועים

למה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_{0}\in I$ אזי $\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\xrightarrow[x\to x_{0}]{}c\ne0\right)\Longrightarrow f\in\Theta\left(g\right)$.

מזדהה עד סדר: $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות n פעמים על x_{0} המקיימות $\forall k\in\left\{ 0\ldots n\right\} .f^{\left(k\right)}\left(x_{0}\right)=g^{\left(k\right)}\left(x_{0}\right)$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ מזדהות עד סדר n על x_{0} אזי $f-g\in o\left(\left(x-x_{0}\right)^{n}\right)$.

מסקנה: תהא $h\in\mathbb{R}^{I}$ רציפה על x_{0} וכן $h\in o\left(\left(x-x_{0}\right)^{n}\right)$ אזי (h גזירה n פעמים על x_{0})$\wedge$($h^{\left(k\right)}\left(x_{0}\right)=0$).

פולינום טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על x_{0} אזי $p\in\mathbb{R}_{n}\left[x\right]\backslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ שמזדהה עם f עד סדר n על x_{0}.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}$ ותהא $x_{0}\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\left(x-x_{0}\right)^{k}\right)^{\left(j\right)}\left(x_{0}\right)=\begin{cases} j! & j=k\\ 0 & else \end{cases}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על x_{0} אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם f עד סדר n על x_{0}.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על x_{0} אזי פולינום הטיילור הוא $P_{n}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{\left(k\right)}\left(x_{0}\right)}{k!}\left(x-x_{0}\right)^{k}$.

שארית: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על x_{0} אזי $R_{n}\left(x\right)=f\left(x\right)-P_{n}\left(x\right)$.

משפט פאנו: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על x_{0} אזי $R_{n}\left(x\right)\in o\left(\left|x-x_{0}\right|^{n}\right)$.

למה: תהא $g\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים המקיימת $g^{(k)}(x_0)=0$.$\forall k\in\{0\ldots n\}$ אזי $\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).g(x)=\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

משפט השארית של לגרנז': תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי $\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^{\infty}((a,b))$ אזי $\forall x\in(a,b).\left(\exists M\in\mathbb{R}.\forall k\in\mathbb{N}.\left|f^{(k)}(x)\right|<M\right)\Longrightarrow\left(R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{\infty}((a,b))$ עבורה $\forall x\in(a,b).R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ אזי $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

מסקנה: תהא $f\in C^{\infty}((a,b))$ ותהא a סדרה המקיימת $\left|f^{(m)}(x)\right|<a_m$.$\forall x\in(a,b)$ אזי $\forall c\in\mathbb{R}.\left(\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m!}c^m=0\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in[x_0-c,x_0+c].f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$.

מסקנה: $\left(\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\wedge\left(\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\wedge\left(e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$.

מסקנה: $e\notin\mathbb{Q}$.

משפט השארית של קושי: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי $\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$.

מסקנה: יהי $|x|<1$ אזי $\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}((a,b))$ המקיימת $f^{(k)}(x_0)=0$.$\forall k\in\{0\ldots n\}$ וכן $f^{(n+1)}(x_0)\neq0$ אזי

- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי x_0 אינה נקודת קיצון של f.
- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי
  - אם $f^{(n+1)}(x_0)>0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.
  - אם $f^{(n+1)}(x_0)<0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.

פונקציה קמורה: $f\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in[0,1].f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$.

פונקציה קעורה: $f\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in[0,1].f(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$.

נקודת פיתול: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי x_0 המקיימת (f קעורה מאחד מצדדיה)$\wedge$(f קמורה מאחד מצדדיה).

משפט שלושת המיתרים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ קמורה אזי לכל $x_1<x_2<x_3$ מתקיים $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה פעמיים אזי

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)>0$ אזי f קמורה.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)<0$ אזי f קעורה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $f\in C((a,b))$.