גודל מעגל בוליאני: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ ויהי C מעגל בוליאני בעל n חוטים וכן m קלטים אזי $\text{Size}\left(C\right)=n+m$.

עומק מעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $\text{depth}\left(C\right)$ הינו אורך המסלול המקסימלי מקלט לפלט.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq3}$ אזי $\vee_{n}:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ המוגדרת $\vee_{n}\left(x\right)=\bigvee_{i=1}^{n}x_{i}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq3}$ אזי $\wedge_{n}:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ המוגדרת $\wedge_{n}\left(x\right)=\bigwedge_{i=1}^{n}x_{i}$.

מעגל בוליאני בעל fan-in לא מוגבל: מעגל בוליאני מעל בסיס הפונקציות הבוליאניות $\left\{\wedge,\vee,\neg\right\}\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\vee_{n}\right\}\right)\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\wedge_{n}\right\}\right)$.

הערה: אלא אם נאמר אחרת מעגל בוליאני הוא בעל fan-in מוגבל.

טענה: תהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C בעל fan-in לא מוגבל המחשב את f בגודל $\mathcal{O}\left(n\cdot2^{n}\right)$ ובעומק 2.

טענה: תהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C המחשב את f בגודל $\mathcal{O}\left(n\cdot2^{n}\right)$ ובעומק $n+\log_{2}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא L שפה אזי קיימת משפחת מעגלים $\mathcal{C}$ מגודל $\mathcal{O}\left(n\cdot2^{n}\right)$ ומעומק $n+\log\left(n\right)$ המחשבת את L.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי קיימת $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ עבורה לכל מעגל בוליאני C המחשב אותה מתקיים $\text{Size}\left(C\right)\geq\frac{2^{n}}{2n}$.

הגודל של פונקציה בוליאנית: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי $\text{Size}\left(f\right)=\min\left\{\text{Size}\left(C\right)\mid\left(\text{מעגל } C\right)\wedge\left(f \text{ מחשבת את } C\right)\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי $\text{Size}\left(f\right)\leq15\cdot\left(2^{n}-1\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי $\text{Size}\left(f\right)=\mathcal{O}\left(\frac{2^{n}}{n}\right)$.

מסקנה שאנון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\max\left\{\text{Size}\left(f\right)\mid f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}\right\}=\Theta\left(\frac{2^{n}}{n}\right)$.

משפט: קיים $C\in\mathbb{R}_{+}$ עבורו לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימת $n\leq S<C\cdot\frac{2^{n}}{n}$ קיימת $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ באשר f חשיבה על ידי מעגל מגודל $S\left(n\right)+10n$ וכן f לא חשיבה על ידי מעגל מגודל $S\left(n\right)$.

הגדרה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{Size}\left(S\left(n\right)\right)=\left\{L\subseteq\left\{0,1\right\}^{*}\mid S\left(n\right) \text{ חשיבה על ידי משפחת מעגלים מגודל לכל היותר } L\right\}$.

מסקנה: $\text{Size}\left(2^{n}\right)=\mathcal{P}\left(\left\{0,1\right\}^{*}\right)$.

מסקנה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה $n\leq S\left(n\right)\leq\frac{2^{n}}{n}$ אזי $\text{Size}\left(S\left(n\right)\right)\subsetneq\text{Size}\left(S\left(n\right)+10n\right)$.

הגדרה: $\text{Size}\left(\text{poly}\right)=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{Size}\left(n^{c}\right)$.

חתך מקסימלי: יהי G גרף אזי חתך $\left(A,B\right)$ עבורו $\left|E\left(A,B\right)\right|\geq\left|E\left(C,D\right)\right|$ לכל חתך $\left(C,D\right)$.

סימון: יהי G גרף ויהי $\left(A,B\right)$ חתך מקסימלי אזי $\text{MC}\left(G\right)=\left|E\left(A,B\right)\right|$.

למה: יהי G גרף אזי $\mathbb{E}_{\text{חתך }\left(A,B\right)}\left[\left|E\left(A,B\right)\right|\right]=\frac{\left|E\left(G\right)\right|}{2}$.

טענה: יהי G גרף אזי קיים חתך $\left(A,B\right)$ עבורו $E\left(A,B\right)\geq\frac{\left|E\left(G\right)\right|}{2}$.

מסקנה אלגוריתם איטי למציאת חתך גדול: תהא E קבוצה יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\left\{v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ קבוצה אזי

```
function SlowBigCut(E, {v_1 ... v_n}):
    S ← P({v_1 ... v_n})
    for r ∈ {0,1}^n do
        S ← {v_i | r_i = 1}
        if |E(S, S̄)| ≥ |E|/2 then return S
    end
```

טענה: תהא E קבוצה יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\left\{v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ קבוצה אזי SlowBigCut בעלת סיבוכיות זמן ריצה $\Omega\left(2^{n}\right)$.

טענה: קיימת מ"ט אקראית M_{supp} עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $r\leftarrow\left\{0,1\right\}^{\log(n)+1}$ מתקיים כי $M_{\text{supp}}\left(1^{n};r\right)$ מחזירה מ"מ $X_{1}\ldots X_{n}:\left[\log\left(n\right)+1\right]\to\left\{0,1\right\}$ עבורם

- $X_{1}\ldots X_{n}$ ב"ת בזוגות.
- $\mathbb{P}\left(X_{i}=1\right)=\frac{1}{2}$ לכל $i\in\left[n\right]$.
- M_{supp} רצה בזמן $\text{poly}\left(n\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $r\in\left\{0,1\right\}^{\log(n)+1}$ ותהא $\left\{v_{1}\ldots v_{n}\right\}$ קבוצה אזי $S_{\text{supp}}=\left\{v_{i}\mid M_{\text{supp}}\left(1^{n};r\right)_{i}=1\right\}$.

טענה: יהי G גרף באשר $V=\left\{v_{1}\ldots v_{n}\right\}$ אזי $\mathbb{E}_{r\leftarrow\left\{0,1\right\}^{\log(n)+1}}\left[\left|E\left(S_{\text{supp}},\overline{S_{\text{supp}}}\right)\right|\right]=\frac{\left|E\right|}{2}$.

מסקנה אלגוריתם מהיר למציאת חתך גדול: תהא E קבוצה יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\left\{v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ קבוצה אזי

function $\texttt{FastBigCut}(E, \{v_1 \dots v_n\})$**:**

- $S \leftarrow \mathcal{P}(\{v_1 \dots v_n\})$
- **for** $r \in \{0,1\}^{\log(n)+1}$ **do**
  - $X \leftarrow M_{\text{supp}}(1^n; r)$
  - $S \leftarrow \{v_i \mid X_i = 1\}$
  - **if** $|E(S, \overline{S})| \geq \frac{|E|}{2}$ **then return** S
- **end**

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי FastBigCut בעלת סיבוכיות זמן ריצה $\text{poly}(n)$.

סימון: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ תהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה ויהי $r \in \{0,1\}^n$ אזי $S_r = \{v_i \mid r_i = 1\}$.

אלגוריתם למציאת חתך גדול עם תוחלת מותנית: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי

function $\texttt{CEBigCut}(E, \{v_1 \dots v_n\})$**:**

- $S \leftarrow \mathcal{P}(\{v_1 \dots v_n\})$
- $a \leftarrow \bigcup_{i=0}^{n} \{0,1\}^i$
- $a \leftarrow \epsilon$
- **for** $i \in [1 \dots, n]$ **do**
  - $c_0 \leftarrow \mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n} \left[\left| E\left(S_r, \overline{S_r}\right) \right| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}), (r_i = 0) \right]$
  - $c_1 \leftarrow \mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n} \left[\left| E\left(S_r, \overline{S_r}\right) \right| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}), (r_i = 1) \right]$
  - $a_i \leftarrow \arg\max_{\ell \in \{0,1\}} (c_\ell)$
- **end**
- **return** S_a

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי לכל $i \in [n]$ באיטרציה ה־i של CEBigCut מתקיים $\mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n} \left[\left| E\left(S_r, \overline{S_r}\right) \right| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}) \right] = \left| \{(v_i, v_j) \in E \mid (i, j \leq k) \wedge (a_i \neq a_j)\} \right| + \frac{1}{2} \left| \{(v_i, v_j) \in E \mid (i > k) \vee (j > k)\} \right|$.

מסקנה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי CEBigCut בעלת סיבוכיות זמן ריצה $\text{poly}(n)$.

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי לכל $i \in [n]$ באיטרציה ה־i של CEBigCut מתקיים $\mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n} \left[\left| E\left(S_r, \overline{S_r}\right) \right| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}) \right] \geq \frac{|E|}{2}$.

מסקנה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי $E\left(\text{CEBigCut}, \overline{\text{CEBigCut}}\right) \geq \frac{|E|}{2}$.

הגדרה: תהיינה $s, d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אזי $\mathsf{AC}(s,d) = \left\{ L \subseteq \{0,1\}^* \;\middle|\; \substack{L(C)=L \\ \text{Size}(C_n) \leq s(n) \\ \text{depth}(C_n) \leq d(n)} \text{ קיימת משפחת מעגלים } C \text{ בעלת fan-in לא מוגבל עבורה} \right\}$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathsf{AC}^k = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathsf{AC}\left(n^c, \log^k(n)\right)$.

הגדרה: תהיינה $s, d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אזי $\mathsf{NC}(s,d) = \left\{ L \subseteq \{0,1\}^* \;\middle|\; \substack{L(C)=L \\ \text{Size}(C_n) \leq s(n) \\ \text{depth}(C_n) \leq d(n)} \text{ קיימת משפחת מעגלים } C \text{ עבורה} \right\}$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathsf{NC}^k = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \mathsf{NC}\left(n^c, \log^k(n)\right)$.

מסקנה: תהיינה $s, d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אזי $\mathsf{NC}(s,d) \subseteq \mathsf{AC}(s,d)$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathsf{AC}^k \subseteq \mathsf{NC}^{k+1}$.

פונקציית זוגיות: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{parity} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ המוגדרת $\text{parity}(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$.

טענה: קיים מעגל C המחשב את parity_n מגודל $\mathcal{O}(n)$ ועומק $\mathcal{O}(\log(n))$.

מסקנה: $\text{parity} \in \mathsf{NC}^1$.

פולינום מולטי־לינארי (מ"ל): יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ בעל דרגה 1.

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית: תהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל עבורו $f(x) = p(x)$ לכל $x \in \{0,1\}^n$.

טענה: תהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ אזי קיים פולינום מ"ל יחיד המחשב את f.

סימון: תהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל המחשב את f אזי $\deg(f) = \deg(p)$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\deg(\vee_n) = n$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\deg(\text{parity}_n) = n$.

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה ε: יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל עבורו $\mathbb{P}_{x \leftarrow \{0,1\}^n}(p(x) = f(x)) \geq 1 - \varepsilon$.

טענה: הפולינום 1 מחשב את $\vee_n$ בממוצע עם שגיאה $\frac{1}{3}$.

התפלגות משפחת פולינומים מחשבת פונקציה בוליאנית עם שגיאה ε: יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ אזי קבוצת פולינומים מ"ל $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ עבורה לכל $x \in \{0,1\}^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{p \leftarrow P}(p(x) = f(x)) \geq 1 - \varepsilon$.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ תהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ותהא $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ מ"ל המחשבת את f עם שגיאה ε אזי קיים $p \in P$ המחשב בממוצע את f עם שגיאה ε.

סימון: יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $(x \leftarrow \Omega) : \Omega \to \Omega$ הינו מ"מ באשר $\mathbb{P}((x \leftarrow \Omega) = \omega) = \mathbb{P}(\omega)$.

הערה: תהא A קבוצה סופית אזי $x \leftarrow A$ הינו המ"מ כאשר A עם ההתפלגות האחידה.

סימון: יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $S_{j,k} \leftarrow \mathcal{P}([n])$ לכל $k \in \{0 \ldots \log(n)\}$ ולכל $j \in \left[c \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$ אזי $R_\vee(x) = 1 - \prod_{k,j}\left(1 - \sum_{i \in S_{j,k}} x_i\right)$.

למה: יהי $x \in \{0,1\}^n$ עבורו $\vee_n(x) = 0$ אזי $R_\vee(x) = 0$ לכל $S_{j,k} \leftarrow \mathcal{P}([n])$.

למה: יהי $x \in \{0,1\}^n$ ותהיינה $S_{j,k} \leftarrow \mathcal{P}([n])$ עבורן קיימים j,k המקיימים $|S_{j,k} \cap \{i \mid x_i = 1\}| = 1$ אזי $R_\vee(x) = 1$ וכן $\vee_n(x) = 1$.

למה: יהי $k \in \mathbb{N}$ ויהי $x \in \{0,1\}^n$ עבורו $2^{k-1} \leq |\{i \mid x_i = 1\}| \leq 2^k$ אזי $\mathbb{P}_{S \leftarrow \mathcal{P}([n])}(|S \cap I| = 1) \geq \frac{1}{2e}$.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\log(n) \cdot \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ שמחשבת את $\vee_n$ עם שגיאה ε.

טענה: תהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל $s(n)$ ועומק $d(n)$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצת פולינומים מ"ל $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\left(\log(n) \cdot \log\left(\frac{s(n)}{\varepsilon}\right)\right)^{d(n)}\right)$ המחשבת את f עם שגיאה ε.

מסקנה: תהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל $s(n)$ ועומק $d(n)$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום מ"ל $p \in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\left(\log(n) \cdot \log\left(\frac{s(n)}{\varepsilon}\right)\right)^{d(n)}\right)$ המחשב את f בממוצע עם שגיאה ε.

למה: יהי $\delta > 0$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ מ"ל המחשב את parity_n בממוצע עם שגיאה $\frac{1}{2} + \delta$ אזי $\deg(p) = \Omega(\delta\sqrt{n})$.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ מ"ל המחשב את parity_n בממוצע עם שגיאה ε אזי $\deg(p) = \Omega(\sqrt{n})$.

מסקנה: יהי C מעגל המחשב את parity_n בעל fan-in לא מוגבל ועומק $d(n)$ אזי $\text{Size}(C) \geq 2^{\Omega\left(n^{\frac{1}{4 \cdot d(n)}}\right)}$.

משפט: $\text{parity} \notin \text{AC}^0$.

מסקנה: $\text{AC}^0 \subsetneq \text{NC}^1$.