קיצורים ישנים:
קיצורי יוונית:
קיצורי קבוצות:
קיצורי גבולות:
קיצורי סימונים:
קיצורי מילים:

רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1,\ldots,a_n\}$ מתקיים $((a=a_1)\vee\ldots\vee(a=a_n))\iff(a\in\{a_1,\ldots,a_n\})$.

סימון: תהא Σ אלפבית אזי Σ^* כל המחרוזות הסופיות באלפבית.

טענה: יהי עולם Σ תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\left\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\right\}$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת

- $B\subseteq S$.
- S סגורה להפעלת F.
- מינימליות: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ עבורה $B\subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S\subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: יהי עולם Σ תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\left\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\right\}$ אזי $X_{B,F}\subseteq\Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq X_{B,F}$.

טענה: תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\left\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\right\}$ אזי $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid(B\subseteq Y)\wedge(F \text{ סגורה להפעלת } Y)\}$.

מסקנה: יהי עולם Σ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$ אזי $X_{B,F}\subseteq Y$.

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על $\mathbb{N}$ אזי $(p(0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.p(n)\implies p(n+1)))\implies(\forall n\in\mathbb{N}.p(n))$.

סדרת יצירה: יהי $a\in X_{B,F}$ אזי $(a_1,\ldots,a_n)$ עבורה $a_n=a$ וכן לכל $i\in[n]$ מתקיים $(a_i\in B)\vee(a_i$ מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ־$\{a_1,\ldots,a_{i-1}\})$.

טענה: יהי $a\in\Sigma^*$ אזי $(a\in X_{B,F})\iff$(קיימת סדרת יצירה ל־a).

מסקנה: $X_{B,F}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a\in\Sigma^*\mid n \text{ בעלת סדרת יצירה באורך } a\}$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma=\{\wedge,\vee,\neg,\implies,(,)\}\cup\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a\in\Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי

- $\wedge(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\wedge\omega_2)\text{"}$.
- $\vee(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\vee\omega_2)\text{"}$.
- $\implies(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\implies\omega_2)\text{"}$.
- $\neg(\omega_1)=\text{"}(\neg\omega_1)\text{"}$.

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $\mathrm{WFF}=X_{\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\implies\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p\in\mathrm{WFF}$ עבורו $p\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p\in\mathrm{WFF}$ אזי $(p$ פסוק אטומי$)\vee($הפסוק p מתחיל עם "(" ונגמר עם ")"$)$.

מסקנה: יהיו $q_1,q_2\in\mathrm{WFF}$ אזי $q_1(q_2\notin\mathrm{WFF}$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha\in\mathrm{WFF}$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α פסוק אטומי.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\wedge\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\vee\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\implies\gamma)$.
- קיים ויחיד $\beta\in\mathrm{WFF}$ עבורו $\alpha=(\neg\beta)$.

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם $\mathcal{O}(\mathrm{len}(\alpha))$ לבדיקה האם $\alpha\in\mathrm{WFF}$.

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\neg$.
2. $\wedge,\vee$.
3. $\implies$.

אמת: T, true.

שקר: F, false.

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

סימון: תהא $\circ\in\{\wedge,\vee,\neg,\implies\}$ אזי טבלת האמת של $\circ$ הינה $TT_\circ$.

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	$\neg q$
true	false
false	true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

השמה: פונקציה $v:\{p_i\}\to\{F,T\}$.

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\overline{v}:\mathsf{WFF}\to\{F,T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\overline{v}(p)=v(p)$.
- יהי α פסוק אזי $\overline{v}(\neg\alpha)=TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\overline{v}(\beta\circ\gamma)=TT_{\circ}(\overline{v}(\beta),\overline{v}(\gamma))$.

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורה $\overline{v}(\alpha)=T$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\mathsf{WFF}$ מסופקת על ידי v אזי $v\models\alpha$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\mathsf{WFF}$ לא מסופקת על ידי v אזי $v\not\models\alpha$.

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $\mathsf{Var}:\mathsf{WFF}\to\mathcal{P}(\{p_i\})$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\mathsf{Var}(p)=\{p\}$.
- יהי α פסוק אזי $\mathsf{Var}(\neg\alpha)=\mathsf{Var}(\alpha)$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\mathsf{Var}(\beta\circ\gamma)=\mathsf{Var}(\beta)\cup\mathsf{Var}(\gamma)$.

משפט התלות הסופית: תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורה $v_1(p)=v_2(p)$.$\forall p\in\mathsf{Var}(\alpha)$ אזי $\overline{v_1}(\alpha)=\overline{v_2}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_α.

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K\subseteq\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ עבורה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו $TT=TT_\alpha$.

טענה: $\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg,\wedge,\vee\in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v\models\alpha$.

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: יהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ טאוטולוגיה אזי $\models\alpha$.

סתירה: פסוק $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו $\models(\neg\alpha)$.

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha,\beta\in\mathsf{WFF}$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\overline{v}(\alpha)=\overline{v}(\beta)$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\mathsf{WFF}$ שקולים אזי $\alpha\equiv\beta$.

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha\in\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v\models\Gamma$.

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ אזי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v\models\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ ויהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ פסוק נובע סמנטית מ־Γ אזי $\Gamma\models\alpha$.

טענה: יהיו $\alpha,\beta,\gamma\in\mathsf{WFF}$ אזי

- $(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma\equiv(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$.
- $(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma\equiv(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$.
- $(\alpha\wedge\beta)\equiv(\beta\wedge\alpha)$.
- $(\alpha\vee\beta)\equiv(\beta\vee\alpha)$.
- $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$.
- $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\equiv\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$.
- $\neg(\neg\alpha)\equiv\alpha$.
- $\neg(\alpha\wedge\beta)\equiv(\neg\alpha)\vee(\neg\beta)$.
- $\neg(\alpha\vee\beta)\equiv(\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)$.
- $(\alpha\Longrightarrow\beta)\equiv(\neg\alpha)\vee\beta$.

למה: יהי $\gamma \in \text{WFF}$ סתירה אזי לכל $\alpha \in \text{WFF}$ מתקיים $\gamma \models \alpha$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$ אזי $\Gamma \models \beta$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ אזי $\Gamma \models (\neg\alpha)$.

טענה: יהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ אזי $(\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta))$.

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ ויהי p פסוק אטומי אזי

- אם $\alpha = p$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) = \varphi$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) = \alpha$.
- אם קיים $\beta \in \text{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) = \neg\beta\left({}^{\varphi}/_{p}\right)$.
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) = \beta\left({}^{\varphi}/_{p}\right) \circ \gamma\left({}^{\varphi}/_{p}\right)$.

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ ויהי $p \in \text{Var}(\alpha)$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) \in \text{WFF}$.

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ ויהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי

- אם $\alpha = p_i$ עבור $i \in [n]$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) = \varphi_i$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p_i$ לכל $i \in [n]$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) = \alpha$.
- אם קיים $\beta \in \text{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) = \neg\beta\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$.
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) = \beta\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) \circ \gamma\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$.

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & i \neq j \\ \overline{v}(\varphi) & i = j \end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)\right) = \overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ יהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & j \notin [n] \\ \overline{v}(\varphi_j) & j \in [n] \end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)\right) = \overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ ויהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$ טאוטולוגיה.

הצורה הנורמלית NNF: $\text{NNF} = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{NNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

סימון: $\text{Conj} = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge\}}$.

הצורה הנורמלית DNF: $\text{DNF} = X_{\text{Conj}, \{\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{DNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

סימון: $\text{Disj} = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\vee\}}$.

הצורה הנורמלית CNF: $\text{CNF} = X_{\text{Disj}, \{\wedge\}}$.

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{CNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

מערכת הוכחה: יהי Σ אלפבית תהא $N \subseteq \Sigma^*$ תהא $A \subseteq N$ ותהא $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (N^n \to N)$ אזי (Σ, N, A, F).

נוסחאות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי N.

אקסיומות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי A.

כללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי F.

קבוצת המשפטים: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $X_{A,F}$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ משפט אזי $\underset{S}{\vdash} \varphi$.

מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$.

קבוצת הטענות היכיחות מהנחות: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי $X_{A \cup \Gamma, F}$.

הוכחה: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי סדרת יצירה של φ.

סימון: תהא S מערכת הוכחה תהיינה $\Gamma \subseteq N$ הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$.

טענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ אזי

- מונוטוניות: תהא $\Delta \subseteq N$ עבורה $\Delta \underset{S}{\vdash} \varphi$ ותהא $\Delta \subseteq \Gamma$ אזי $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$.
- קומפקטיות: תהא $\Gamma \subseteq N$ עבורה $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$ אזי קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \underset{S}{\vdash} \varphi$.
- טרנזיטיביות: תהיינה $\Delta, \Gamma \subseteq N$ באשר $\Delta \underset{S}{\vdash} \varphi$ וכן לכל $\alpha \in \Delta$ מתקיים $\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha$ אזי $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $f \in F$ כלל היסק המקיים $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ אזי $f : \frac{x_1 \ldots x_n}{y}$.

כלל הניתוק (Ponens Modus): תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $\text{MP} : \frac{(\alpha \Longrightarrow \beta), \alpha}{\beta}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

- אלפבית: $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$.
- נוסחאות: $N = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$.
- אקסיומות: $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$, $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$, $A_3 = (((\neg\alpha) \Longrightarrow (\neg\beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
- כללי היסק: $F = \{\mathrm{MP}\}$.

טענה: יהיו α, β נוסחאות ב־HPC אזי

- $\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \alpha)$.
- $\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash} ((\neg\alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta))$.
- $\{\neg\alpha\} \underset{\mathrm{HPC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \beta)$.

מסקנה: יהיו α, β נוסחאות ב־HPC באשר $\underset{\mathrm{HPC}}{\vdash} (\neg\alpha)$ אזי $\{\alpha\} \underset{\mathrm{HPC}}{\vdash} \beta$.

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון $\vdash$ הוא במערכת HPC.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $(\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \Longleftrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta))$.

טענה: תהא α נוסחא מעל HPC אזי $\vdash ((\neg(\neg\alpha)) \Longrightarrow \alpha)$.

מערכת הוכחה נאותה: מערכת הוכחה S עבורה לכל Γ הנחות מעל S ולכל α נוסחה מעל S מתקיים $\left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right) \Longrightarrow (\Gamma \models \alpha)$.

מערכת הוכחה שלמה: מערכת הוכחה S עבורה לכל Γ הנחות מעל S ולכל α נוסחה מעל S מתקיים $(\Gamma \models \alpha) \Longrightarrow \left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right)$.

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט: HPC מערכת נאותה.

למה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β, γ נוסחאות מעל HPC אזי $((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \wedge (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \wedge (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$.

קבוצת הנחות עקבית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\Gamma \underset{S}{\nvdash} \alpha$.

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ אינה עקבית)$\Longleftrightarrow$(קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\left(\Gamma \underset{S}{\nvdash} \alpha\right) \wedge \left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right)$).

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית מעל S המקיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ מתקיים $\Delta = \Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC עבורה $\Gamma \vdash \alpha$ אזי $\alpha \in \Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\alpha \in \Gamma) \vee (\neg\alpha \in \Gamma)$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $((\neg\alpha \in \Gamma) \vee (\beta \in \Gamma)) \Longleftrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta))$.

משפט: HPC מערכת שלמה.