

קטע/אינטרוול: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

שדה סדור: שדה \mathbb{F} יוחס סדר חזק $<$ על \mathbb{F} המקיים

- טריכוטומיה/לינאריות: $\forall x, y \in \mathbb{F}. (x < y) \vee (x > y) \vee (x = y)$
- קומפטיביליות עם חיבור: $\forall x, y, z \in \mathbb{F}. x < y \implies x + z < y + z$
- קומפטיביליות עם כפל: $\forall x, y \in \mathbb{F}. \forall z > 0_{\mathbb{F}}. x < y \implies x \cdot z < y \cdot z$

תכונת ארכימדס: $\forall x \in \mathbb{F}. \exists n \in \mathbb{N}. x < \sum_{i=0}^n 1$

טענה: \mathbb{R} מקיים את תכונת ארכימדס.

הערך השלם/ערך שלם תחתון: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$

הערך השברי: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $\{x\} = x - [x]$

ערך שלם עליון: $[x] = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$

טענה: $\nexists q \in \mathbb{Q}. q^2 = 2$

טענה: $a \leq x \leq b \iff \forall y \in \mathbb{Q}. y^2 \leq 2 \iff \forall b \in \mathbb{Q}_+. y^2 \geq 2 \iff \nexists x \in \mathbb{Q}. \forall a \in \{y \in \mathbb{Q}. y^2 \leq 2\}$

חסם מלעיל: $x \in \mathbb{R}$ שמקיים $\forall y \in A. y \leq x$

קבוצת החסמים מלעיל: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ חסם מלעיל של } A\}$

קבוצה חסומה מלעיל: $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $\overline{B}_A \neq \emptyset$

חסם מלרע: $x \in \mathbb{R}$ שמקיים $\forall y \in A. x \leq y$

קבוצת החסמים מלרע: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\underline{B}_A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ חסם מלרע של } A\}$

קבוצה חסומה מלרע: $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $\underline{B}_A \neq \emptyset$

קבוצה חסומה: $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $(\text{חסומה מלעיל}) \wedge (\text{חסומה מלרע})$.

מקסימום: $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ שמקיים $\forall y \in A. y \leq x$

סימון: המקסימום של A הוא $\max(A)$

מינימום: $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ שמקיים $\forall y \in A. x \leq y$

סימון: המינימום של A הוא $\min(A)$

אקסיומת השלמות: יהיו $\emptyset \neq X, Y \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(\forall x \in X. \forall y \in Y. x \leq y) \implies (\exists c \in \mathbb{R}. \forall x \in X. \forall y \in Y. x \leq c \leq y)$

טענה: $(\overline{B}_A \neq \emptyset) \implies \exists \min(\overline{B}_A)$. $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$

מסקנה: $(\underline{B}_A \neq \emptyset) \implies \exists \max(\underline{B}_A)$. $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$

טענה: \mathbb{R} הוא השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את \mathbb{Q} .

סופרמום/חסם עליון: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\sup(A) = \min(\overline{B}_A)$

אינפמום/חסם תחתון: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\inf(A) = \max(\underline{B}_A)$

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(\exists \max(A) \implies \sup(A) = \max(A)) \wedge (\exists \min(A) \implies \inf(A) = \min(A))$

טענה: יהיו $a < b \in \mathbb{R}$ אזי $\inf(a, b) = a \wedge \sup(a, b) = b$

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b \in \mathbb{R}$ חסם מלעיל של A ה"ש"

• $b = \sup(A)$

• $\forall d \in \overline{B}_A. b \leq d$

• $\forall a \in \mathbb{R}. a < b \implies a \notin \overline{B}_A$

מסקנה: תהא $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\sup(A) - \varepsilon < a \leq \sup(A) \iff \exists a \in A$. $\forall \varepsilon > 0$

מסקנה: $b = \sup(A) \iff (\forall x \in A. x \leq b) \wedge (\forall \varepsilon > 0. \exists x \in A. x > b - \varepsilon)$ אזי $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

טענה: תהיינה $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ חסומות

- $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$
- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
- $\sup(-A) = -\inf(A)$

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+. \exists b \in \mathbb{R}_+. b^2 = c$

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+. \forall n \in \mathbb{N}. \exists b \in \mathbb{R}_+. b^n = c$

קבוצה צפופה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A \subseteq B$ המקיימת $\forall b \in B. \forall \varepsilon > 0. \exists a \in A. |b - a| < \varepsilon$

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(S \text{ צפופה ב-}\mathbb{R}) \iff (a, b) \cap S \neq \emptyset \iff (\forall a, b \in \mathbb{R}. a < b \implies (a, b) \cap S \neq \emptyset)$

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{Q}. a < b \implies |(a, b) \cap \mathbb{Q}| = \aleph_0$

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{Q}. a < b \implies \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. a < r < b$

טענה: $\forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \implies \exists q \in \mathbb{Q}. x < q < y$

מסקנה: $(\mathbb{Q} \text{ צפופה ב-}\mathbb{R}) \wedge (\text{לכל } a < b \text{ מתקיים כי } [a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset)$

עצרת: יהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & \text{else} \end{cases}$$

בחר: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

זהות פסקל: יהי $n, k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

למה: יהיו $a_1 \dots a_n \geq 0$ המקיימים $\prod_{i=1}^n a_i = 1$ אזי $\sum_{i=1}^n a_i \geq n$

אי-שוויון הממוצעים: יהיו $a_1 \dots a_n > 0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$

טענה: $\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \right) \iff (a_1 = \dots = a_n)$

אי-שוויון ברנולי: $\forall x > -1. \forall n \in \mathbb{N}. (1+x)^n \geq 1+nx$

אי-שוויון ברנולי המוכלל: $\forall n \in \mathbb{N}. \forall x \in \mathbb{R}^n. |\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$

הערך המוחלט: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

טענה: $(|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b) \wedge (|a| \geq b \iff (b \leq a) \vee (a \leq -b))$

אי-שוויון המשולש (אש"מ): יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $|a+b| \leq |a| + |b|$

אי-שוויון המשולש המוכלל: יהיו $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $|\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $|a-b| \leq |a| + |b|$

מסקנה: יהיו $x, y, z \in \mathbb{R}$ אזי $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$

אי-שוויון המשולש ההפוך: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $||a| - |b|| \leq |a-b|$

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{R}. (\forall \varepsilon > 0. |a-b| < \varepsilon) \implies a = b$

טענה: יהי $r \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

סדרה: $a \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

סימון: תהא a סדרה אזי $a_n = a(n), a = (a_n)_{n=0}^\infty$

הגדרה: תהא a_n סדרה

- סדרה חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0$
- סדרה אי שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}. a_n \geq 0$
- סדרה שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}. a_n < 0$
- סדרה אי חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq 0$

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה

- עולה ממש: $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \implies a_n < a_m$
- עולה: $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \implies a_n \leq a_m$
- יורדת ממש: $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \implies a_n > a_m$

• יורדת: $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \implies a_n \geq a_m$.

סדרה חסומה מלעיל: סדרה a המקיימת $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. a_n < M$.

סדרה חסומה מלרע: סדרה a המקיימת $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. M < a_n$.

סדרה חסומה: (חסומה מלרע) \wedge (חסומה מלעיל).

סדרה מתכנסת/גבול סופי: תהא a סדרה אזי $(\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. |a_n - L| < \varepsilon) \iff (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $(a_n \rightarrow L) \iff \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \right)$.

טענה: $(\forall r \in \mathbb{R}. \lim_{n \rightarrow \infty} r = r) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \right)$.

טענה: $(\forall \alpha \in \mathbb{Q}_+. \frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0) \wedge (\sqrt[n]{n} \rightarrow 1) \wedge (\forall c > 0. \sqrt[n]{c} \rightarrow 1) \wedge (\forall q \in (0, 1). q^n \rightarrow 0)$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2) \implies L_1 = L_2$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|)$.

טענה: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0) \iff (\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0)$.

טענה: תהיינה a, b סדרות עבורן $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\} \in \mathbb{N}$ אזי $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L) \iff (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L)$.

טענה: תהא a סדרה נגדיר $b_{n+k} = a_n$ אזי $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L) \iff (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L)$.

סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה

• $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty) \iff (\forall M > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. M < a_n)$.

• $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty) \iff (\forall M > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. a_n < -M)$.

טענה: $(\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty) \wedge (\forall a > 1. \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty)$.

טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אזי a חסומה.

מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.

טענה: תהא a סדרה אזי $(\forall \varepsilon > 0. |\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\}| \in \mathbb{N}) \iff (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L)$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אזי $\forall r \in (0, |L|). \exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. |a_n| > r$.

סימון: תהא a סדרה מונוטונית

• $(a_n \downarrow L) \iff (a_n \rightarrow L)$ אזי a יורדת ממש

• $(a_n \uparrow L) \iff (a_n \rightarrow L)$ אזי a עולה ממש

• $(a_n \searrow L) \iff (a_n \rightarrow L)$ אזי a יורדת

• $(a_n \nearrow L) \iff (a_n \rightarrow L)$ אזי a עולה

טענה: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי קיימות סדרות $a, b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ עבורן $(a_n \searrow x) \wedge (b_n \nearrow x)$.

ייצוג עשרוני: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי קיים $a \in \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{Z}}$ המקיים $x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$.

פיתוח מחזורי אינסופי: יהיו $d_1 \dots d_n$ אזי $d_1 \dots d_n d_1 \dots d_n \dots$ אזי $\overline{d_1 \dots d_n} = d_1 \dots d_n d_1 \dots d_n \dots$.

טענה: יהי $q \in \mathbb{R}$ אזי $(q \in \mathbb{Q}) \iff (q = a.a_1 \dots a_n \overline{b_1 \dots b_\ell})$.

משפט אוקלידס: \mathbb{P} חסומה מלרע אך לא מלעיל.

סדרות אוקלידס-מולין: יהי $p_1 \in \mathbb{P}$ נגדיר $p_n \in \left\{ p \in \mathbb{P} \mid p \left(1 + \prod_{i=1}^{n-1} p_i \right) \right\}$.

טענה: עבור $p_1 = 2$ ועבור p_n מינימלי לא ידוע אם $\text{Im}(p) = \mathbb{P}$.

משפט דריכלה: $\left| \left\{ \langle p, q \rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \mid \left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \right\} \right| \geq \aleph_0$.

מספר מקורב רע: $a \in \mathbb{R}$ המקיים $\left(\left| \theta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \right) \implies \left(\exists c \in \mathbb{R}. \frac{c}{q^2} < \left| \theta - \frac{p}{q} \right| \right)$.

חשבון גבולות: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ותהיינה $(a_n), (b_n)$ סדרות המקיימות $(a_n \rightarrow a) \wedge (b_n \rightarrow b)$.

• $a_n + b_n \rightarrow a + b$

• $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

• $(b \neq 0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}. b_n \neq 0) \implies \left(\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \right)$.

למה: תהא d_n סדרה המקיימת $\forall n \in \mathbb{N}. d_n \geq 0$ אזי $(d_n \rightarrow d) \implies (d \geq 0)$.

טענה: תהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n \rightarrow L$ ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{L}$.

סימון: יהיו a_n, b_n סדרות

• $(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n \leq b_n) \implies (a_n \preceq b_n)$

• $(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n < b_n) \implies (a_n \prec b_n)$

מונוטוניות גבולות: תהיינה a_n, b_n סדרות מתכנסות אזי $(a_n \leq b_n) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$.
משפט הסנדוויץ': תהיינה a_n, b_n, c_n סדרות המקיימות $a_n \leq b_n \leq c_n$ אזי $(b_n \rightarrow L) \implies (a_n, c_n \rightarrow L)$.
טענה: תהא a_n סדרה חסומה ותהא b_n סדרה המקיימת $a_n b_n \rightarrow 0$ אזי $b_n \rightarrow 0$.

מסקנה: תהא a_n סדרה חסומה אזי $\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$.

משפט: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\exists b \in B. b_n \rightarrow \sup(B)$.

מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי $\exists b \in B. b_n \rightarrow \inf(B)$.

טענה: תהיינה a_n, b_n סדרות

$$\bullet (a_n \rightarrow \infty) \wedge (a_n \leq b_n) \implies (b_n \rightarrow \infty)$$

$$\bullet (a_n \rightarrow -\infty) \wedge (b_n \leq a_n) \implies (b_n \rightarrow -\infty)$$

מבחן השורש: תהא a_n סדרה אי שלילית אזי $(\exists \alpha \in [0, 1). a_n < \alpha^n) \implies (a_n \rightarrow 0)$

מבחן השורש הגבולי: יהי $p \in \mathbb{R}$ ותהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $\frac{1}{a_n} \rightarrow p$

$$\bullet 0 \leq p < 1 \implies a_n \rightarrow 0$$

$$\bullet p > 1 \implies a_n \rightarrow \infty$$

סימון: תהא a_n סדרה חסומה מלעיל אזי $(\sup(a_n) = \sup(\text{Im}(a))) \wedge (\inf(a_n) = \inf(\text{Im}(a)))$

משפט: תהא a_n סדרה

\bullet אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי $a_n \nearrow \sup(a_n)$

\bullet אם a_n מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי $a_n \nearrow \infty$

\bullet אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי $a_n \searrow \inf(a_n)$

\bullet אם a_n מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי $a_n \searrow -\infty$

מבחן המנה הגבולי: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$

$$\bullet (L < 1) \implies (a_n \rightarrow 0)$$

$$\bullet (L > 1) \implies (a_n \rightarrow \infty)$$

התכנסות צ'זארו: תהא a_n סדרה אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n} = (C)$

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a_n סדרה המקיימת $a_n \rightarrow a$ במובן הרחב אזי $(C) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

משפט התכנסות ממוצע הנדסי: תהא a_n סדרה חיובית המקיימת $a_n \rightarrow a$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} a_i} \rightarrow a$

משפט ד'אלאמבר: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow c$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow c$

למה: תהא a סדרה המקיימת $a \rightarrow L$ במובן הרחב ותהא $t \in \mathbb{N}$ המקיימת $\sum_{k=1}^n t_k \rightarrow \infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^n t_k a_k}{\sum_{k=1}^n t_k} \rightarrow L$

משפט שטולץ: תהא a סדרה ותהא $b \uparrow \infty$ סדרה נניח כי $\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \rightarrow L$ במובן הרחב אזי $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L$

טענה: $(1 + \frac{1}{n})^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

מסקנה: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \in (2, 3]$

טענה: תהא $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $a_n \rightarrow \infty$ אזי $(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} \rightarrow e$

תת סדרה/סדרה חלקית (ת"ס): תהא a סדרה ותהא $n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה אזי $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה

$\bullet a$ חסומה מלעיל $\iff b$ חסומה מלעיל.

$\bullet a$ חסומה מלרע $\iff b$ חסומה מלרע.

$$\bullet a \rightarrow L \implies b \rightarrow L$$

$\bullet a$ מונוטונית $\iff b$ מונוטונית.

טענה: תהא a סדרה המקיימת $\nexists \max(a)$ אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

טענה: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מונוטונית.

הלמה של קנטור על קטעים מקוננים: תהיינה a, b סדרות המקיימות $b - a \rightarrow 0$ וגם

$$|\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n]| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. (a_n \leq b_n) \wedge ([a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n])$$

קבוצת קנטור: $C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} (\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}})$

משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

סימון: $\mathbb{R}_{\infty} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

גבול חלקי: תהא a סדרה אזי $x \in \mathbb{R}_\infty$ עבורו קיימת תת סדרה b עבורה $b \rightarrow x$ במובן הרחב.

סימון: תהא a סדרה אזי L גבול חלקי של a $\mathcal{P}(a) = \{L \in \mathbb{R} \mid L \text{ גבול חלקי של } a\}$, $\hat{\mathcal{P}}(a) = \{L \in \mathbb{R}_\infty \mid L \text{ גבול חלקי של } a\}$.

טענה: תהא a סדרה

• a אינה חסומה מלעיל $\iff \infty \in \hat{\mathcal{P}}$.

• a אינה חסומה מלרע $\iff -\infty \in \hat{\mathcal{P}}$.

טענה: תהא a סדרה אזי $|\hat{\mathcal{P}}| > 0$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(L \in \mathcal{P}) \iff (\forall \varepsilon > 0. |\{a_n \mid |a_n - L| < \varepsilon\}| = \aleph_0)$.

מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \subseteq [\inf(a), \sup(a)]$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim(\inf(a)) = \underline{\lim}(a) = \sup(\mathcal{P})$, $\lim(\sup(a)) = \overline{\lim}(a) = \sup(\mathcal{P})$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(a \text{ מתכנסת}) \iff (\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}) \wedge (|\hat{\mathcal{P}}| = 1)$.

משפט: תהא a סדרה חסומה אזי $\min(\mathcal{P}), \max(\mathcal{P})$.

טענה: יהיו $b_1 \dots b_m \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זרות בזוגות המקיימות $(b_i \uparrow \infty) \wedge (\bigcup b_i = \mathbb{N})$ ותהא a סדרה אזי $\hat{\mathcal{P}}(a) = \bigcup_{i=1}^m \hat{\mathcal{P}}(a_{b_i})$.

קבוצה פתוחה: $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $\forall x \in A. \exists \varepsilon > 0. (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$.

טענה: תהיינה A_1, A_2, \dots סדרת קבוצות פתוחות אזי $(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)$ פתוחה $\wedge (\bigcap_{i=1}^n A_i)$ פתוחה.

קבוצה סגורה: $B \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $B \setminus B$ פתוחה.

טענה: תהיינה B_1, B_2, \dots סדרת קבוצות סגורות אזי $(\bigcup_{i=1}^n B_i)$ סגורה $\wedge (\bigcap_{i=1}^\infty B_i)$ סגורה.

נקודת הצטברות: תהא $S \subseteq \mathbb{R}$ אזי $x \in \mathbb{R}$ המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$. $\exists a \in (S \setminus \{x\})^{\mathbb{N}}$.

טענה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ התב"ש

• B קבוצה סגורה.

• $\forall a \in B^{\mathbb{N}}. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in B$.

• $\{x \in \mathbb{R} \mid B \text{ נקודת הצטברות של } x\} \subseteq B$.

משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים $\mathcal{P}(a)$ קבוצה סגורה.

כמעט תמיד: פרידקט $P(n)$ המקיים $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. P(n)$.

שכיח: פרידקט $P(n)$ המקיים $|\{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}| = \aleph_0$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(a \text{ מתכנסת}) \iff (\limsup a = \liminf a)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L \in [-\infty, \infty]$

• $(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. a_n \leq L) \implies (\limsup a \leq L)$.

• $(\forall N \in \mathbb{N}. \exists n > N. a_n \geq L) \implies (\limsup a \geq L)$.

• $(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. a_n \geq L) \implies (\liminf a \geq L)$.

• $(\forall N \in \mathbb{N}. \exists n > N. a_n \leq L) \implies (\liminf a \leq L)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$ התב"ש

• $\limsup a = L$.

• $\forall \varepsilon > 0. (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n < L + \varepsilon) \wedge (\forall \varepsilon > 0. \forall N \in \mathbb{N}. \exists n \geq N. a_n > L - \varepsilon)$.

משפט: תהיינה a, b סדרות המקיימות $a_n \leq b_n$ אזי $(\liminf a \leq \liminf b) \wedge (\limsup a \leq \limsup b)$.

סדרת קושי: סדרה a המקיימת $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall m, n \geq N. |a_m - a_n| < \varepsilon$.

למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.

משפט: תהא a סדרה אזי $(a \text{ מתכנסת}) \iff (a \text{ סדרת קושי})$.

סכום אינסופי: יהי $k \in \mathbb{Z}$ אזי $\sum_{i=k}^\infty a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=k}^n a_i$.

טור: תהא a סדרה אזי $\sum_{i=0}^\infty a_i$.

סימון: יהי $\sum_{n=0}^\infty a_n$ טור אזי $\sum_{n=0}^\infty a_n$.

סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרה אזי $S_n^a = \sum_{i=0}^n a_i$.

טור מתכנס: תהא a סדרה אזי $(\sum_{i=0}^\infty a_i = L) \implies (S_n^a \rightarrow L)$.

טור גאומטרי: יהי $a \neq 0$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^\infty ar^n$.

משפט: יהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $(\sum_{n=0}^\infty ar^n \text{ מתכנס}) \iff (|r| < 1)$.

הטור ההרמוני: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$.

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(\sum_{i=0}^{\infty} a_n)$ מתכנס $\iff (a_n \rightarrow 0)$.
קריטריון קושי: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור אזי $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתכנס $\iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall m > N. \forall k \in \mathbb{N}. \left| \sum_{n=m}^{m+k} a_n \right| < \varepsilon)$.
חשבון טורים: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ טורים ויהי $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס $\iff \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ מתכנס.

• $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס $\iff \sum_{n=0}^{\infty} \xi a_n$ מתכנס.

הגדרה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור

• טור חיובי: $\forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0$.

• טור אי שלילי: $\forall n \in \mathbb{N}. a_n \geq 0$.

• טור שלילי: $\forall n \in \mathbb{N}. a_n < 0$.

• טור אי חיובי: $\forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq 0$.

טור מתכנס בהחלט: טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ המקיים $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בהחלט אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס.

סימון: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים עבורם ממקום מסוים $a_n \leq b_n$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

משפט ההשוואה: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ טורים המקיימים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

• $(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ מתכנס $\iff (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתכנס.

• $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתבדר $\iff (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתבדר.

מבחן ההשוואה הגבולי: יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות המקיימות $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow L$ במובן הרחב

• $L \in (0, \infty) \implies (\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty)$.

• $L = 0 \implies (\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty)$.

• $L = \infty \implies (\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty)$.

מבחן השורש: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור אי שלילי (קיים $q \in (0, 1)$ עבורו כמעט תמיד $a_n^{\frac{1}{n}} < q$) $\iff (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתכנס.

מבחן השורש הגבולי: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור חיובי

• $(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \left(a_k^{\frac{1}{k}} \right) \right) < 1) \implies (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתכנס.

• $(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \left(a_k^{\frac{1}{k}} \right) \right) > 1) \implies (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתבדר.

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור חיובי

• (קיים $q \in (0, 1)$ עבורו כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$) $\iff (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתכנס.

• (כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$) $\iff (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתבדר.

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור חיובי

• $(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \right) < 1) \implies (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתכנס.

• $(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} \right) \right) > 1) \implies (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתבדר.

משפט העיבוי: תהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתכנס $\iff (\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n})$ מתכנס.

מסקנה: יהי $m \geq 2$ ותהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$ מתכנס $\iff (\sum_{n=0}^{\infty} m^n a_{m^n})$ מתכנס.

מסקנה: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x})$ מתכנס $\iff (x > 1)$.

משפט לייבניץ: תהא $a_n \searrow 0$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס.

טור מתכנס בתנאי: טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס המקיים $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתבדר.

טענה: תהיינה a, b סדרות אזי $(a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n) = \sum_{k=m+1}^n b_k (a_k - a_{k-1}) - \sum_{k=m}^n a_k (b_{k+1} - b_k)$.

התמרת אבל: תהיינה a, b סדרות אזי $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k a_m (b_k - b_{k+1})$.

קריטריון דריכלה: תהא $b \rightarrow 0$ סדרה מונוטונית ותהא a סדרה עבורה S_n^a חסומה אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

קריטריון אבל: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

משפט: $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$.

משפט: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$ ויהא $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L$.

למה: תהא a סדרה ותהא $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש עבורה $b_0 = 0$ וכן $(a_i)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1}$ בעלי אותו סימן וגם $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L$.

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתכנס והי $p \in \mathbb{N}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

סימון: תהא a_n סדרה אזי $\left(a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}\right) \wedge \left(a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}\right)$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי $(\sum a_n \text{ מתכנס בהחלט}) \iff (\sum a_n^+ \text{ מתכנס}) \wedge (\sum a_n^- \text{ מתכנס})$.

משפט: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט והי $p \in \mathbb{N}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי $(\sum a_n \text{ מתכנס בתנאי}) \iff (\sum a_n^+ = \infty = \sum a_n^-)$.

משפט רימן: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי $\sum_{\text{onto}} \frac{1-1}{\text{onto}} a_{\sigma(n)} = S$ $\forall S \in [-\infty, \infty]$.

טענה: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי קיים $\sigma \in \mathbb{N}$ זיווג עבורו $\sum a_{\sigma(n)} \neq \sum a_n$.

משפט קושי: יהיו $p, q \in \mathbb{N}$ תמורות והיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט אזי $\sum a_{p(n)} b_{q(k)} = (\sum a_n) (\sum b_n)$.

טור חזקות: תהא a_n סדרה והי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k (x - x_0)^k$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט עבור $x \in (-|q|, |q|)$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס בהחלט} & x \in (-R, R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R, R] \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0, \infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty \implies R = 0\right) \wedge \left(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0 \implies R = \infty\right)$.

מכפלת קושי: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n = (\sum a_n x^n) (\sum b_n x^n)$.

טענה: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות המתכנסים עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n$ מתכנס עבור q .

התכנסות צ'זארו: יהי $\sum a_n$ טור אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i}{n}$ (C) .

טענה: יהי $\sum a_n$ טור אזי $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_n \left(1 - \frac{i}{n}\right)$.

פונקציה מונוטונית: תהא $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

- עולה ממש: $\forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \implies f(x) < f(y)$
- עולה: $\forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \implies f(x) \leq f(y)$
- יורדת ממש: $\forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \implies f(x) > f(y)$
- יורדת: $\forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \implies f(x) \geq f(y)$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי x^n מונוטונית עולה ממש בקטע $[0, \infty)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}) \implies (f(x) = x^n)$.

טענה: יהיו $n, m, k, \ell \in \mathbb{N}$ המקיימים $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell}$ אזי $(x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^k)^{\frac{1}{\ell}}$.

טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהינה $a, b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימות $a_n, b_n \searrow b$ אזי $\lim (c^{a_n}) = \lim (c^{b_n})$.

הגדרה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ והי $b \in \mathbb{R}$ ותהא $b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $b_n \searrow b$

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
- $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$
- $a^b = \lim a^{b_n}$

פונקציית החזקה: יהי $0 < \alpha$ נגדיר $f \in [0, \infty)^{[0, \infty)}$ כך $f(x) = x^\alpha$.

פונקציית החזקה: יהי $0 > \alpha$ נגדיר $f \in (0, \infty)^{(0, \infty)}$ כך $f(x) = x^\alpha$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

משפט: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $((yx)^a = y^a x^a) \wedge ((x^a)^b = x^{ab}) \wedge (x^a x^b = x^{a+b})$.

טענה: יהי $x > 1$ והיו $0 < r < \ell$ אזי $x^r < x^\ell$.

טענה: יהי $0 < x < 1$ והיו $0 < r < \ell$ אזי $x^r > x^\ell$.

הפונקציה המעריכית: יהי $0 < \alpha \neq 1$ נגדיר $f \in (0, \infty)^{\mathbb{R}}$ כך $f(x) = a^x$.

סינוס: נגדיר $\sin : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ בתור היחס בין הצלע ממול הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

סינוס: $\forall k \in \mathbb{N}. \sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$

קוסינוס: נגדיר $\cos : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$ בתור היחס בין הצלע ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

קוסינוס: $\forall k \in \mathbb{N}. \cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$

טנגנס: נגדיר $\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

קוטנגנס: נגדיר $\cot : \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

טענה: טריגנומטריות זהויות.

הגדרה: $(\arcsin = \sin^{-1}) \wedge (\arccos = \cos^{-1}) \wedge (\arctan = \tan^{-1}) \wedge (\operatorname{arccot} = \cot^{-1})$.

לוגריתם: יהי $a > 0$ נסמן $f(x) = a^x$ אזי $\log_a(f)^{-1} = \log_a$.

סימון (הלוגריתם הטבעי): $\ln = \log_e$.

טענה: לוגריתמים זהויות.

פונקציה מחזורית: $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $f(x+a) = f(x)$ $\exists a \in \mathbb{R}_+$.

פונקציה זוגית: $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

פונקציה אי-זוגית: $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

קטע מנוקב/סביבה: יהי $\delta > 0$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $I_x = (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}$.

פונקציה מתכנסת/גבול סופי: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ויהי $a, b \in \mathbb{R}$ המקיימות $a < x_0 < b$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

• בנקודה: $A = I_{x_0}$

- קושי: $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0}. |f(x) - L| < \varepsilon)$

- היינה: $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L) \iff (\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \rightarrow x_0) \implies (f(y_n) \rightarrow L))$

• חד צדדי מימין: $A = (x_0, b)$

- קושי: $(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. x \in (x_0, \min\{x_0 + \delta, b\}) \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$

- היינה: $(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L) \iff (\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \downarrow x_0) \implies (f(y_n) \rightarrow L))$

• חד צדדי משמאל: $A = (a, x_0)$

- קושי: $(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. x \in (\max\{x_0 - \delta, a\}, x_0) \implies |f(x) - L| < \varepsilon)$

- היינה: $(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L) \iff (\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \uparrow x_0) \implies (f(y_n) \rightarrow L))$

• באינסוף: $A = (a, \infty)$

- קושי: $(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists M \in \mathbb{R}. \forall x \geq M. |f(x) - L| < \varepsilon)$

- היינה: $(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L) \iff (\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \rightarrow \infty) \implies (f(y_n) \rightarrow L))$

• במינוס אינסוף: $A = (-\infty, b)$

- קושי: $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists M \in \mathbb{R}. \forall x \leq M. |f(x) - L| < \varepsilon)$

- היינה: $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L) \iff (\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \rightarrow -\infty) \implies (f(y_n) \rightarrow L))$

פונקציה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ויהי $a, b \in \mathbb{R}$ המקיימות $a < x_0 < b$

• בנקודה: תהא $f : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$

- $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0}. f(x) > M)$

- $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0}. f(x) < -M)$

• חד צדדי מימין: תהא $f : (x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$

- $(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, \min\{x_0 + \delta, b\}) \implies f(x) > M)$

- $(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, \min\{x_0 + \delta, b\}) \implies f(x) < -M)$

• חד צדדי משמאל: תהא $f : (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$

- $(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (\max\{x_0 - \delta, a\}, x_0) \implies f(x) > M)$

- $(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (\max\{x_0 - \delta, a\}, x_0) \implies f(x) < -M)$

• באינסוף: תהא $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

- $(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f(x) > M)$

- $(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f(x) < -M)$

• במינוס אינסוף: תהא $f : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$

- $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \leq \delta. f(x) > M)$

- $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \leq \delta. f(x) < -M)$

סימון: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A^{\pm} = A \cup \{x_0^+ \mid x_0 \in A\} \cup \{x_0^- \mid x_0 \in A\}$.

סימון: יהי $x_0 \in \mathbb{R}_{\infty}^{\pm}$ ותהא $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $(f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L) \iff (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L)$ במובן הרחב.

משפט: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1) \wedge (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2) \implies (L_1 = L_2)$
טענה: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L) \iff (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x))$

פונקציית דריכלה:
$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

חשבון גבולות: יהי $x_0 \in \mathbb{R}_\infty^\pm$ ויהיו $f, g : I_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

• $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

למה: יהי $x_0 \in \mathbb{R}_\infty^\pm$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

מסקנה: יהי $x_0 \in \mathbb{R}^\pm$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x]$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$

משפט: יהיו $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $g \in \mathbb{R}^{I_{y_0}}$ וכן $f \in I_{y_0}^{I_{x_0}}$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow y_0} f(x) = y_0$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow y_0} g(x)$

טענה: יהיו $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ אזי $\lim_{x \rightarrow y_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow y_0} f(x)\right)$

פונקציה אלמנטרית: הרכבה/סכום/כפל/הופכית של $(\bigcup \{\log_a(x), a^x\} \mid a > 0\}) \cup \mathbb{R}[x] \cup \{\sin, \cos\} \cup \{x^a \mid a \in \mathbb{R}\}$

טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי $\forall a \in \text{Dom}(f) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

משפט: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $|\sin(x)| \leq |x|$

למה: יהי $x_0 \in \mathbb{R}^\pm$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$

מסקנה: יהי $x_0 \in \mathbb{R}^\pm$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$

סימון: יהיו $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימות $f(x) \leq g(x) \forall x \in I$ אזי $f(x) \preceq g(x)$

מונוטוניות גבולות: יהי $x_0 \in \mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $f, g : \mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x) \preceq g(x)$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

כלל הסנדוויץ': יהי $x_0 \in \mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $f, g, h : \mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x) \preceq g(x) \preceq h(x)$ אזי

$$\left(f(x), h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L \right) \implies \left(g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L \right)$$

למה: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

רציפות: תהא $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

• רציפות בנקודה: $x_0 \in I$ עברה $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

• רציפה חד צדדית מימין בנקודה: $x_0 \in I$ עברה $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

• רציפה חד צדדית משמאל בנקודה: $x_0 \in I$ עברה $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

פונקציה רציפה: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת

• קושי: $\forall x_0 \in I \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

• היינה: $(\forall x_0 \in I \cdot \forall y \in I^\mathbb{N} \cdot (y_n \rightarrow x_0) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x_0)))$

פתוחה יחסית: תהיינה $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $B \subseteq A$ המקיימת $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \subseteq B$ $\forall x \in B$

משפט: תהא $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $(f \text{ רציפה על } I) \iff (B \subseteq \mathbb{R} \text{ פתוחה } \implies f^{-1}[B] \text{ פתוחה יחסית אל } I)$

טענה: תהא $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $c \in (a, b)$ אזי $(f \text{ רציפה על } c) \iff (f|_{(a, c]} \text{ רציפה על } c) \wedge (f|_{[c, b)} \text{ רציפה על } c)$

סימון: תהא $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $C(I) = \{f \in \mathbb{R}^I \mid f \text{ רציפה על } I\}$

טענה: תהא $f \in C((a, b))$ רציפה מונוטונית עולה

• $(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup f[(a, b)]) \iff f \text{ חסומה מלעיל}$

• $(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty) \iff f \text{ אינה חסומה מלעיל}$

• $(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf f[(a, b)]) \iff f \text{ חסומה מלרע}$

• $(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty) \iff f \text{ חסומה אינה מלרע}$

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ רציפה על x_0 המקיימת $f(x_0) > 0$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $f(x) > 0 \forall x \in I$

מסקנה: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ רציפות על x_0 המקיימות $f(x_0) > g(x_0)$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $f(x) > g(x) \forall x \in I$

טענה: יהיו $f, g \in C(\mathbb{R})$ אזי $(\forall x \in \mathbb{R} \cdot f(x) = g(x)) \iff (\forall q \in \mathbb{Q} \cdot f(q) = g(q))$

נקודת אי־רציפות: תהא $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $x_0 \in I$ המקיימת

• סליקה: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

• סוג ראשון/קפיצה: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

• סוג שני: $\left(\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)\right) \vee \left(\nexists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)\right)$.

טענה: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית אזי כל נקודות הא־רציפות הן מסוג ראשון.

טענה: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ אזי f רציפה על x_0 $\iff (\forall y \in \mathbb{N}^I. (y_n \rightarrow x_0) \implies (\lim f(y_n) \in \mathbb{R}))$

פונקציית רימן: $R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \exists p, q \in \mathbb{Z}. (\gcd(p, q) = 1) \wedge \left(x = \frac{p}{q}\right) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

טענה: $(\forall x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}. R(x) = R(x+1))$

חשבון רציפות: יהי $x_0 \in \mathbb{R}^\pm$ ויהי $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות על x_0 אזי $f+g, f \cdot g, f^g$ רציפות על x_0 .

טענה: תהא $f: A \rightarrow B$ רציפה על x_0 וכן $g: B \rightarrow C$ רציפה על $f(x_0)$ אזי $g \circ f$ רציפה על x_0 .

מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ רציפה וכן $g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ אזי $f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$

פונקציה רציונאלית: יהיו $p, q \in \mathbb{R}[x]$ אזי $\frac{p}{q}$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ עבורה $\forall x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ אזי כמות נקודות הא־רציפות לכל היותר בת מנייה.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ אזי $(\exists x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)) \implies (\forall x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R})$

משפט ויירשטראס הראשון: תהא $f \in C([a, b])$ אזי f חסומה.

משפט ויירשטראס השני: תהא $f \in C([a, b])$ אזי $\exists \max(f([a, b])), \min(f([a, b]))$

משפט ערך הביניים: תהא $f \in C([a, b])$ אזי $\exists c \in (a, b). f(c) = y$ $\forall y \in (\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b)))$.

למה: תהא $f \in C([a, b])$ המקיימת $f(a)f(b) < 0$ אזי $\exists \zeta \in [a, b]. f(\zeta) = 0$

מסקנה: תהא $f \in C([a, b])$ אזי $f([a, b]) = [\min(f([a, b])), \max(f([a, b]))]$

קטע מוכלל: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $\forall x, y \in A. \forall \lambda \in [0, 1]. \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$

למה: יהי I קטע מוכלל ותהא $f \in C(I)$ חח"ע אזי f מונוטונית ממש.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f \in C(I)$ מונוטונית ממש אזי $(f^{-1} \in C(f(I))) \wedge (f(I) \text{ קטע מוכלל})$

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f \in \mathbb{R}^I$ מונוטונית ממש אזי $(f(I) \text{ קטע מוכלל}) \iff (f \in C(I))$

מסקנה: יהי $a > 0$ אזי $x^a, a^x \in C(\mathbb{R})$

מסקנה: תהא $a > 0$ אזי $a_n \rightarrow a$ סדרה חיובית וכן $b_n \rightarrow b$ סדרה אזי $a_n^{b_n} \rightarrow a^b$

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{odd}$ ויהי $p \in \mathbb{R}_n[x] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[x]$ אזי $\exists \zeta \in \mathbb{R}. p(\zeta) = 0$

קבוצה קומפקטית: $A \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ קטעים פתוחים עבורם $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ מתקיים $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$

הלמה של היינה-בורל: יהיו $a < b$ אזי $[a, b]$ קומפקטית.

פונקציה רציפה במידה שווה (במ"ש): $f \in \mathbb{R}^A$ המקיימת $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in A. \forall y \in (x - \delta, x + \delta). |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^A$ רציפה במ"ש אזי f רציפה.

תנאי ליפשיץ: תהא $f \in \mathbb{R}^A$ עבורה $\exists M > 0. \forall x, y \in A. \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < M$ אזי f רציפה במ"ש.

משפט קנטור: תהא $f \in C([a, b])$ אזי f רציפה במ"ש על $[a, b]$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^A$ רציפה במ"ש על $[c, d], [a, b]$ אזי f רציפה במ"ש על (a, d) .

פרה-קומפקטיות: תהא $D \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $f \in \mathbb{R}^D$ רציפה במ"ש אזי $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}\right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \in \mathbb{R}\right)$

טענה: תהא $f \in C((a, b])$ אזי $(f \text{ רציפה במ"ש}) \iff (\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \in \mathbb{R})$

מסקנה: תהא $f \in C((a, b))$ אזי $(f \text{ רציפה במ"ש}) \iff (\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \in \mathbb{R})$

משפט: תהא $f \in C([a, \infty))$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in \mathbb{R}$ אזי f רציפה במ"ש על $[a, \infty)$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a, b)}$ רציפה במ"ש אזי f חסומה.

מודולוס הרציפות: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי $\omega_f(\delta) = \sup \{|f(x_1) - f(x_2)| \mid (x_1, x_2 \in I) \wedge (|x_1 - x_2| < \delta)\}$

גזירות: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

• נגזרת בנקודה: תהא $x_0 \in I$ אזי $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

• נגזרת חד צדדית מימין בנקודה: תהא $x_0 \in I$ אזי $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

• נגזרת חד צדדית משמאל בנקודה: תהא $x_0 \in I$ אזי $f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

טענה: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$ אזי $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

נגזרת: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $f': I \rightarrow \mathbb{R}$

סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי $\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$

טענה: יהי חלקיק ותהינה $x, v \in \mathbb{R}$ פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי $x'(t) = v(t)$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I^\pm$ אזי f גזירה בנקודה x_0 $\iff f$ רציפה בנקודה x_0 .

קירוב בנקודה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I$ אזי $x_0 \in I \setminus \mathbb{R}_{n-1}[x] \setminus \mathbb{R}_n[x]$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

סדר הקירוב: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ויהי $p(x)$ קירוב בנקודה x_0 אזי $\deg(p)$.

דיפרנציאבילית בנקודה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי $x_0 \in I$ עברה f רציפה על x_0 \wedge (קיים קירוב מסדר ראשון של f בנקודה x_0).

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I$ אזי f דיפרנציאבילית בנקודה x_0 $\iff f$ גזירה בנקודה x_0 .

חשבון גזירות: תהינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות בנקודה x_0

$$\bullet (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$\bullet (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$\bullet (g(x_0) \neq 0) \implies \left(\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \right)$$

משפט: תהא $x_0 \in I$ ותהא $f \in C(I)$ מונוטונית חזק גזירה על $f^{-1}(y_0)$ אזי $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

מסקנה: $\arctan' = \frac{1}{1+x^2}$, $(x^r)' = rx^{r-1}$, $(e^x)' = e^x$, $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$

כלל השרשרת: תהא $x_0 \in I$ ותהא $f \in C(I)$ גזירה על x_0 וכן $g \in C(f(I))$ גזירה על $f(x_0)$ אזי $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

נגזרת מסדר גבוה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה אזי $(f^{(n+1)} = (f^{(n)})')$ $\wedge (f^{(0)} = f)$

הפרש דיסקרטי: תהא $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ אזי $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$

הגדרה: תהא $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ אזי $(\Delta^{(k+1)}f = \Delta(\Delta^{(k)}f)) \wedge (\Delta^{(0)}f = f)$

פונקציה גזירה ברציפות: $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה עברה f' רציפה.

סימון: תהא $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(C^0(I) = C(I)) \wedge \{f \in C^{n-1}(I) \mid f \text{ גזירה ברציפות}\} = C^n(I)$

פונקציה חלקה: תהא $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $f \in C^\infty(I) = \bigcap_{n=0}^\infty C^n(I)$

כלל לייבניץ: תהינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות אזי $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$

נקודת קיצון מקומית/אקסטריםום: תהא $f \in \mathbb{R}^I$

• מקסימום: $\exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). f(x) \leq f(x_0)$ עברה $x_0 \in I$

• מינימום: $\exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). f(x_0) \leq f(x)$ עברה $x_0 \in I$

משפט פרמה: תהא $f \in C([a, b])$ גזירה על (a, b) ותהא $x_0 \in (a, b)$ נקודת קיצון אזי $f'(x_0) = 0$

משפט רול: תהא $f \in C([a, b])$ גזירה על (a, b) המקיימת $f(a) = f(b)$ אזי $f'(c) = 0$ $\exists c \in (a, b)$

משפט לגרנז': תהא $f \in C([a, b])$ גזירה על (a, b) אזי $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $\exists c \in (a, b)$

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה אזי f' חסומה $\iff f$ רציפה במ"ש.

טענה: $\forall x > 0. e^x > 1 + x$

טענה: $\forall x, y \in \mathbb{R}. |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $\forall x \in \mathbb{R}. f'(x) = 0$ אזי $\exists a \in \mathbb{R}. f(x) = a$

מסקנה: תהינה $g, h \in \mathbb{R}^I$ המקיימות $g' = h'$ אזי $g = h + c$ $\exists c \in \mathbb{R}$

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $f = f'$ אזי $f(x) = e^x$ $\exists c \in \mathbb{R}$

משפט הערך הממוצע של קושי: תהינה $f, g \in C([a, b])$ גזירות על (a, b) אזי $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ $\exists x_0 \in (a, b)$

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה

• אם לכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) > 0$ אזי f עולה ממש.

• אם לכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) < 0$ אזי f יורדת ממש.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה פעמיים על $x_0 \in I$ ומתקיים $f'(x_0) = 0$

• אם $f''(x_0) > 0$ אזי x_0 מינימום מקומי של f .

• אם $f''(x_0) < 0$ אזי x_0 מקסימום מקומי של f .

משפט: תהא $f \in C([a, b])$ גזירה על (a, b) המקיימת $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \in \mathbb{R}$ אזי $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ גזירה ברציפות אזי $f'(x) > 0 \implies \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). f'(x) > 0$

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ גזירה אזי $f'_+(a) < 0$ גורר a לא מינימום מקומי $\wedge f'_-(b) > 0$ גורר b לא מקסימום מקומי.

משפט דרבו: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ גזירה אזי $f'(c) = y$ $\exists c \in (a, b)$ $\forall y \in (\min(f'(a), f'(b)), \max(f'(a), f'(b)))$

כלל לופיטל: תהינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות ותהא $x \in I^\pm$ נניח כי $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ מתכנס במובן הרחב

$$\begin{aligned} \bullet (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) &\implies \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \\ \bullet (\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty) &\implies \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \right) \end{aligned}$$

אי-שוויון יאנג: יהיו $x, y > 0$ והיה $p, q > 0$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ מתקיים $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$
אי-שוויון הולדר: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ והיה $p, q > 0$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$
אי-שוויון מינקובסקי: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ והיה $p, q > 0$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי $(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$

מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא $f, g \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I^\pm$

$$\begin{aligned} \bullet f \leq g &\text{ אינטואיטיבית } (\exists c > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). |f(x)| \leq c |g(x)|) \iff f \in O(g) \\ \bullet f \geq g &\text{ אינטואיטיבית } (g \in O(f)) \iff f \in \Omega(g) \\ \bullet f < g &\text{ אינטואיטיבית } (\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0) \iff f \in o(g) \\ \bullet f > g &\text{ אינטואיטיבית } (g \in o(f)) \iff f \in \omega(g) \\ \bullet f = g &\text{ אינטואיטיבית } (f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)) \iff f \in \Theta(g) \\ \bullet f \sim g &\text{ אינטואיטיבית } (\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1) \iff f \sim g \end{aligned}$$

למה: תהינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I$ אזי $f \in \Theta(g) \iff \left(\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c \neq 0 \right)$

מזדהה עד סדר: $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות n פעמים על x_0 המקיימות $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \forall k \in \{0 \dots n\}$

טענה: תהינה $f, g \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ מזדהות עד סדר n על x_0 אזי $f - g \in o((x - x_0)^n)$

מסקנה: תהא $h \in \mathbb{R}^I$ רציפה על x_0 וכן $h \in o((x - x_0)^n)$ אזי h גזירה n פעמים על x_0 ($h^{(k)}(x_0) = 0 \wedge (x_0 = 0)$)

פולינום טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $p \in \mathbb{R}_n[x] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[x]$ שמזדהה עם f עד סדר n על x_0

$$\text{למה: יהי } k \in \mathbb{N} \text{ ותהא } x_0 \in \mathbb{R} \text{ אזי } \left((x - x_0)^k \right)^{(j)}(x_0) = \begin{cases} j! & j = k \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם f עד סדר n על x_0

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי פולינום הטיילור הוא $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

שארית: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

משפט פאנו: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x) \in o(|x - x_0|^n)$

למה: תהא $g \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים המקיימת $g^{(k)}(x_0) = 0 \forall k \in \{0 \dots n\}$

$$\forall x \in (a, b). \exists c \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0)). g(x) = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

משפט השארית של לגרנז': תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי

$$\forall x \in (a, b). \exists c \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0)). R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

מסקנה: תהא $f \in C^\infty((a, b))$ אזי $\left(R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right) \implies (\exists M \in \mathbb{R}. \forall k \in \mathbb{N}. |f^{(k)}(x)| < M)$

מסקנה: תהא $f \in C^\infty((a, b))$ עבורה $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall x \in (a, b)$ אזי $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

מסקנה: תהא $f \in C^\infty((a, b))$ ותהא a סדרה המקיימת $|f^{(m)}(x)| < a_m \forall x \in (a, b)$

$$\forall c \in \mathbb{R}. \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m!} c^m = 0 \right) \implies \left(\forall x \in [x_0 - c, x_0 + c]. f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right)$$

מסקנה: $\left(\cos(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \wedge \left(\sin(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \wedge \left(e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} \right)$

מסקנה: $e \notin \mathbb{Q}$

משפט השארית של קושי: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי

$$\forall x \in (a, b). \exists c \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0)). R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - c)^n (x - x_0)$$

מסקנה: יהי $|x| < 1$ אזי $\arctan(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

טענה: תהא $f \in C^{n+1}((a, b))$ המקיימת $f^{(k)}(x_0) = 0 \forall k \in \{0 \dots n\}$ וכן $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$

$n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי x_0 אינה נקודת קיצון של f

$n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$

- $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f

- $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f

פונקציה קמורה: $f \in \mathbb{R}^I$ המקיימת $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ $\forall x, y \in I, \forall \alpha \in [0, 1]$.

פונקציה קעורה: $f \in \mathbb{R}^I$ המקיימת $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ $\forall x, y \in I, \forall \alpha \in [0, 1]$.

נקודת פיתול: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי x_0 המקיימת f קעורה מאחד מצדדיה \wedge קמורה מאחד מצדדיה).

משפט שלושת המיתרים: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ קמורה אזי לכל $x_1 < x_2 < x_3$ מתקיים

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה פעמיים

• אם לכל $x \in I$ מתקיים $f''(x) > 0$ אזי f קמורה.

• אם לכל $x \in I$ מתקיים $f''(x) < 0$ אזי f קעורה.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $f \in C((a, b))$.