פולינום טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על a אזי $P_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.
שארית טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על a אזי $R_n(f,a)(x) = f(x) - P_n(f,a)(x)$.
טור טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ חלקה על a אזי $P(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.
פונקציה קדומה:

- תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F' = f$.
- תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in (a,b)$ ומקיימת $F'_+(a) = f(a)$ וכן $F'_-(b) = f(b)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי $\int f = \left\{F \in \mathbb{R}^I \mid F' = f\right\}$.
טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G' = f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}.G = F + c)$.
הערה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $F \in \int f$ אזי מקובל לסמן $\int f = F + c$ עבור $c \in \mathbb{R}$.
טענה: תהיינה $f,g \in \mathbb{R}^I$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int (f+g) = \left(\int f\right) + \left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ אזי $\int (\alpha f) = \alpha \left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v \in \mathbb{R}^I$ גזירות אזי $\int uv' = u \cdot v - \int u'v$.
טענה החלפת משתנים: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $F \in \int f$ אזי $F \circ g = \int ((f \circ g) \cdot g')$.
חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ המקיימות $a = x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
סימון: תהא $\{x_0, \ldots, x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
מדד העדינות: תהא $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi) = \max_{i=1}^{n} |\Delta x_i|$.
עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$.
טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2) \le \lambda(\Pi_1)$.
נקודות מתאימות: תהא $\{x_0, \ldots, x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1 \ldots t_n\}$ המקיימות $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.$\forall i \in \{1 \ldots n\}$.
סכום רימן: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\}) = \sum f(t_i)\Delta x_i$.
אינטגרביליות רימן: $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L \in \mathbb{R}$ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\}) - L| < \varepsilon$.
אינטגרל רימן מסויים: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L = \int_a^b f$.
סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.
הערה: יהיו $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,d\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.
הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.
סימון: $R([a,b]) = \left\{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \mid f \text{ אינטגרבילית רימן}\right\}$.
הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} S(f,\Pi,\{t_i\})$.
טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c \cdot dt = c(b-a)$.
טענה: $D(x) \notin R(\mathbb{R})$.
משפט: תהא $f \in R([a,b])$ אזי f חסומה.
סכום דרבו עליון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$.
סכום דרבו תחתון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$.
למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi) = \sup_{\{t_i\} \text{נקודות מתאימות}} S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi) = \inf_{\{t_i\} \text{נקודות מתאימות}} S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \ge \overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \le \underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1, Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \le \overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
האינטגרל העליון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f) = \inf_{\Pi \text{ חלוקה}} \overline{\Sigma}(f,\Pi)$.
האינטגרל התחתון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f) = \sup_{\Pi \text{ חלוקה}} \underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ חסומה אזי $\int_a^b f=\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f,J)=\sup_{x,y\in J}(f(x)-f(y))$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0\in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\iff(\lim_{\delta\to0}\omega(f,[x_0-\delta,x_0+\delta])=0)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\iff(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\operatorname{len}(I).\omega(f,I)<\varepsilon)$.

תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p_1\dots p_m\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+m\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-m\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)\ge\overline{I}(f)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$ אזי $f\in R([a,b])$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: $C([a,b])\subseteq R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי $f\in R([a,b])$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $f_{\restriction_{[a,b]}}\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $(f\in R([a,b]))\wedge(f\in R([b,c]))$ אזי $f\in R([a,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in[a,d]$ עבורה $f\in R([a,d])$ אזי $f\in R([b,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,c])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([b,c])$ אזי $f\in R([a,c])$.

טענה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases}y & x=b\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $g\in R([a,c])$.

מסקנה: נגדיר $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אזי $f\in R([-1,1])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ תהא $H\in C(\mathbb{R})$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $(f+g),(cf)\in R([a,b])$.
- $(f\cdot g),(H\circ f),|f|\in R([a,b])$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\{(a_i,b_i)\}_{i=0}^\infty$ עבורם $A\subseteq\bigcup(a_i,b_i)$ וכן $\sum(b_i-a_i)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $|A|\le\aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.|b-a|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_A}=g_{\restriction_A}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases}y_i & x\in\{b_1\dots b_m\}\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^c g(x)\,dx$.

משפט ליניאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b\alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,c])$ ויהי $b\in(a,c)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $f\ge 0$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\le\sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R([a,b])$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ אזי $F\in C([a,b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(x_0)\int_a^b g(x)\,dx$.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(a)\int_a^{x_0}g(x)\,dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)\,dx$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ אזי $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ יהיו $x_1\ldots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]|_a^b=f(b)-f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

הלמה של בונה: תהא $\substack{f\in C([a,b])\\ f\in C^1((a,b))}$ עבורה $(f'\ge 0)\vee(f'\le 0)$ ותהא $g\in C([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(a)\int_a^{x_0}g(x)\,dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)\,dx$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ אזי $R_n(f,a)(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\substack{\varphi\in[a,b]^{[\alpha,\beta]}\\ \varphi\in C^1([\alpha,\beta])}$ המקיימת $\substack{\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=-\int_0^{2\pi}f'(x)\,\frac{\sin(nx)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,dx\right|\le\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}(k-2n)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^m\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^m\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty).f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^\infty f=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b].f\in R([a,b])$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.(a<b)\implies(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R([a,c])$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\mid\text{קיים וסופי }\int_I f\right\}$.

הערה: מכאן כל המשפטים יהיו חד צדדים ימינה אך תקפים לכל סוגי הקטעים עם שינויים קלים.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ויהי $c\in(a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^\omega f\ge\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'(x)=f(x)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F(b)-F(a)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,\omega))$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}[f\cdot g]|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $\substack{\varphi\in[a,\omega)^{[c,\eta)}\\ \varphi\in C^1([c,\eta))}$ המקיימת $\substack{\varphi(c)=a\\ \lim_{b\to\eta}\varphi(b)=\omega}$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in(a,\omega).\forall b_1,b_2\in[B,\omega).\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)\iff(f\in R([a,\omega)))$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega |f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega |f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\le\int_a^\omega |f|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\iff$($F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega).f,g\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega g<\infty\right)\implies\left(\int_a^\omega f<\infty\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega).f,g\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f=\infty\right)\implies\left(\int_a^\omega g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\int_1^\infty f<\infty\right)\iff\left(\sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta(s)(s-1)=1$.

משפט אבל: תהא $g\in C([a,\omega))\cap R([a,\omega))$ ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg<\infty$.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C([a,\omega))$ עבורה $G(x)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$ אזי $\int_a^\omega fg<\infty$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\iff\left(\forall x\in I.\lim_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C(I))\not\Longrightarrow(f\in C(I))$.
- אינטגרביליות רימן: $(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I))\not\Longrightarrow(f\in R(I))$.
- גבול האינטגרל: נניח $\substack{f\in R(I)\\ \forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I)}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)\not\Longrightarrow\left(\int_I f=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=L\right)\not\Longrightarrow(f'(x)=L)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\iff(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.|f_n(x)|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\wedge\left(g_n\xrightarrow{\text{u}}g\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{\text{u}}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon)\iff\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C(I)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in C(I)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $\underset{\forall n<m.f_m<f_n}{f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f}$ באשר $f\in C([a,b])$ אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ באשר $f\in C([a,b])$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R([a,\omega))$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi\in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.|f_n|\le\Psi$ אזי $(\forall b\in[a,\omega).f\in R([a,b]))\wedge\left(\int_a^\omega f\right.$ מתכנסת בהחלט$\left.\right)\wedge\left(\int_a^\omega f=\lim_{n\to\infty}\int_a^\omega f_n\right)$.

טענה: $\int_0^\infty e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: תהיינה $f_n \in C^1([a,b])$ עבורה $f_n' \xrightarrow{u} g$ ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n \xrightarrow{u} f$ וכן $f' = g$.

סימון: תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n} f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} f_n = f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty} u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} u_n = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} u_i$.

משפט M בוחן של ויירשטראס: תהיינה $u_n \in \mathbb{R}^I$ ותהא $M \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ וכן $\forall x \in \mathbb{R}.\forall n \in \mathbb{N}.\, |u_n(x)| \le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} a_m (b_k - b_{k+1})$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנסת במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n \xrightarrow{u} 0$ וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנסת במ"ש.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a \in (0,1)$ ויהי $b \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ עבורם $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_0(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}\right) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}.\triangle_0(x+1) = \triangle_0(x)) \wedge \left(\triangle_k = \frac{\triangle_0(4^k x)}{4^k}\right)$.

טענה: $\triangle_n \xrightarrow{u} \triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $\exists p \in \mathbb{R}[x].\max_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ אזי קיימת $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורה $p_n \xrightarrow{u} f$.

הגדרה: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n \xrightarrow{u} f$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ ויהי $r < |q|$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|, |r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0,\infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס} & x \in (-R,R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R,R] \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right) \Longrightarrow (R=0)\right) \wedge \left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right) \Longrightarrow (R=\infty)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < 0$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{r \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי ($\sum k a_k x^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_k x^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי ($\sum k a_k x^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_k x^k$ מתכנס ב־$-R$).

סכים לפי אבל: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{r \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \ (A)$.

התכנסות צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n} \ (C)$.

סכים לפי צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i \ (C)$.

סימון: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell\ (C)$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\ (C)$.

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\ (C)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\ (A)$.

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho\ (A)$ וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R([a,b])$ אזי $u+iv\in R([a,b])$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\int_a^b(u+iv)=\int_a^b u+i\int_a^b v$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי
- $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.
- $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.
- $\int_a^b cf=c\int_a^b f$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^b f}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\frac{d}{dx}(u+iv)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\|f\|\in R([a,b])$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\left\|\int_a^b f\right\|\le\int_a^b\|f\|$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f(x+T)=f(x)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R(\mathbb{T})=\{f\in R([0,2\pi])\mid\forall x\in\mathbb{R}.f(x+2\pi)=f(x)\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n(t)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n(t)\in R(\mathbb{T})$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\{c_n\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $(c_m\neq0)\vee(c_{-m}\neq0)$ אזי m.

טענה: $R(\mathbb{T})$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R(\mathbb{T})$ אזי $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

טענה: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על $R(\mathbb{T})$.

טענה: $\langle e_n,e_m\rangle=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\langle f,e_m\rangle$.

סימון: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}(m)=\langle f,e_m\rangle$.

טענה: יהי $f(t)=\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}(k)=c_k$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f(t)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)e_n(t)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\langle f,g\rangle=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\|f\|^2=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}(n)\right|^2$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $\hat{f}(m)=\langle f,e_m\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $(S_mf)(t)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)e_n(t)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ אזי $\hat{f}(-n)=\overline{\hat{f}(n)}$.

מסקנה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$(S_mf ממשית).

טענה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ ויהי $|k|\le m$ אזי $(f-S_mf)\perp e_k$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $(f-S_mf)\perp S_mf$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $\|f\|^2=\|S_mf\|^2+\|f-S_mf\|^2$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}\le\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_{2}: תהיינה $f_{n},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\left\Vert f_{n}-g\right\Vert =0\right)\Longleftrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}g\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_{2} איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\Vert g\right\Vert \le\sup\left|g\right|$.

מסקנה: תהיינה $f_{n}\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f\right)\Longrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_{n}\in\mathbb{C}\left[x\right]$ עבורה $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t\in\left[0,2\pi\right]}\left|p\left(t\right)-f\left(t\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\left\Vert p-f\right\Vert <\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי קיימיים פולינומים טריגונומטריים p_{n} עבורם $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\Vert f-\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\right\Vert ^{2}\ge\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{m\to\infty}\left\Vert S_{m}f-f\right\Vert =0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}=\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[-\pi,\pi\right)}$ המוגדרת $f\left(t\right)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}i}{n}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=0\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}\sin\left(nt\right)}{n}$.
- יהי $r\in\left[0,\pi\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[-r,r\right]$.
- $S_{m}f\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ על $\left(-\pi,\pi\right)$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[0,2\pi\right]}$ המוגדרת $f\left(t\right)=\frac{\left(\pi-t\right)^{2}}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{1}{2n^{2}}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=\frac{\pi^{2}}{12}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\frac{\pi^{2}}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos\left(nt\right)}{n^{2}}$.
- $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[0,2\pi\right]$.

מסקנה: $\frac{\pi^{4}}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k^{2}}$.

למה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f'}\left(n\right)=in\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}\left(f'\right)=\left(S_{m}f\right)'$.

למה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f^{\left(k\right)}}\left(n\right)=i^{k}n^{k}\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$ אזי $f\in C^{k-2}\left(\mathbb{T}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$.