רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1,\dots,a_n\}$ מתקיים $((a=a_1)\vee\dots\vee(a=a_n)) \Longleftrightarrow (a\in\{a_1,\dots,a_n\})$.

סימון: תהא Σ אלפבית אזי Σ^* כל המחרוזות הסופיות באלפבית.

טענה: יהי עולם Σ תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^* \mid i\in I\}$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת

- $B\subseteq S$.
- S סגורה להפעלת F.
- מינימליות: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ עבורה $B\subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S\subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: יהי עולם Σ תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^* \mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}\subseteq\Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq X_{B,F}$.

טענה: תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^* \mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^* \mid (B\subseteq Y)\wedge(\text{סגורה להפעלת } F \ Y)\}$.

מסקנה: יהי עולם Σ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$ אזי $X_{B,F}\subseteq Y$.

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על $\mathbb{N}$ אזי $(p(0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.p(n)\Longrightarrow p(n+1)))\Longrightarrow(\forall n\in\mathbb{N}.p(n))$.

סדרת יצירה: יהי $a\in X_{B,F}$ אזי $(a_1,\dots,a_n)$ עבורה $a_n=a$ וכן לכל $i\in[n]$ מתקיים $(a_i\in B)\vee$(a_i מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ־$\{a_1,\dots,a_{i-1}\}$).

טענה: יהי $a\in\Sigma^*$ אזי $(a\in X_{B,F})\Longleftrightarrow$(קיימת סדרת יצירה ל־$a$).

מסקנה: $X_{B,F}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a\in\Sigma^* \mid \text{בעלת סדרת יצירה באורך } n \ a\}$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma=\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow,(,)\}\cup\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a\in\Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1,\omega_2\in\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי

- $\wedge(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\wedge\omega_2)\text{"}$.
- $\vee(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\vee\omega_2)\text{"}$.
- $\Longrightarrow(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\Longrightarrow\omega_2)\text{"}$.
- $\neg(\omega_1)=\text{"}(\neg\omega_1)\text{"}$.

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $\text{WFF}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p\in\text{WFF}$ עבורו $p\in\{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p\in\text{WFF}$ אזי (p פסוק אטומי)$\vee$(הפסוק p מתחיל עם "(" ונגמר עם ")").

מסקנה: יהיו $q_1,q_2\in\text{WFF}$ אזי $q_1(q_2\notin\text{WFF}$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α פסוק אטומי.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\wedge\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\vee\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\Longrightarrow\gamma)$.
- קיים ויחיד $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=(\neg\beta)$.

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ ביטוי אזי

```
function IsWellFormedFormula (α)
| if α ∈ {p_i | i ∈ ℕ}
|     return true
|
| if (α[0] = "(") ∧ (α[−1] = ")")
|     α.DeleteFirst ()
|     α.DeleteLast ()
| else return false
|
| if α[0] = "¬"
|     α.DeleteFirst ()
|     return IsWellFormedFormula (α)
| else
|     (LeftParentheses, RightParentheses, i) ← 0
|     while (LeftParentheses ≠ RightParentheses) ∨ (LeftParentheses = 0)
|     |     if α[i] = "("
|     |     |     LeftParentheses ← LeftParentheses + 1
|     |     if α[i] = ")"
|     |     |     RightParentheses ← RightParentheses + 1
|     |     i ← i + 1
|     if α[i + 1] ∉ {∧, ∨, ¬, ⟹}
|     |     return false
|     else
|     |     (β, γ) ← (α[: i + 1], α[i + 2 :])
|     |     return (IsWellFormedFormula (β)) ∧ (IsWellFormedFormula (γ))
```

טענה: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ ביטוי אזי $(\alpha \in \text{WFF}) \iff (\text{IsWellFormedFormula}(\alpha) = \text{true})$.

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\neg$.
2. $\wedge, \vee$.
3. $\Longrightarrow$.

אמת: true, T.

שקר: false, F.

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

סימון: תהא $\circ \in \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow\}$ אזי טבלת האמת של $\circ$ הינה $TT_\circ$.

טענה: יהיו p, q פסוקים אזי

q	p	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	$\neg q$
true	false
false	true

השמה: פונקציה $v : \{p_i\} \to \{F, T\}$.

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\overline{v} : \text{WFF} \to \{F, T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\overline{v}(p) = v(p)$.
- יהי α פסוק אזי $\overline{v}(\neg\alpha) = TT_\neg(\overline{v}(\alpha))$.
- יהיו β, γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\overline{v}(\beta \circ \gamma) = TT_\circ(\overline{v}(\beta), \overline{v}(\gamma))$.

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha \in \text{WFF}$ עבורה $\overline{v}(\alpha) = T$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in \text{WFF}$ מסופקת על ידי v אזי $v \models \alpha$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in \text{WFF}$ לא מסופקת על ידי v אזי $v \not\models \alpha$.

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $A:\text{WFF}\to\mathcal{P}\left(\{p_i\}\right)$ המוגדרת
- יהי p פסוק אטומי אזי $A\left(p\right)=\{p\}$.
- יהי α פסוק אזי $A\left(\neg\alpha\right)=A\left(\alpha\right)$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $A\left(\beta\circ\gamma\right)=A\left(\beta\right)\cup A\left(\gamma\right)$.

טענה: תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי $\alpha\in\text{WFF}$ עבורה $v_1\left(p\right)=v_2\left(p\right)$. $\forall p\in A\left(\alpha\right)$ אזי $\overline{v_1}\left(\alpha\right)=\overline{v_2}\left(\alpha\right)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_α.

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K\subseteq\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ עבורה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו $TT=TT_\alpha$.

טענה: $\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg,\wedge,\vee\in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v\models\alpha$.

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ טאוטולוגיה אזי $\models\alpha$.

סתירה: פסוק $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו $\models\left(\neg\alpha\right)$.

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\overline{v}\left(\alpha\right)=\overline{v}\left(\beta\right)$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ שקולים אזי $\alpha\equiv\beta$.

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha\in\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v\models\Gamma$.

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ אזי $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v\models\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ ויהי $\alpha\in\text{WFF}$ פסוק נובע סמנטית מ־Γ אזי $\Gamma\models\alpha$.

טענה: יהיו $\alpha,\beta,\gamma\in\text{WFF}$ אזי
- $\left(\alpha\wedge\beta\right)\vee\gamma\equiv\left(\alpha\vee\gamma\right)\wedge\left(\beta\vee\gamma\right)$.
- $\left(\alpha\vee\beta\right)\wedge\gamma\equiv\left(\alpha\wedge\gamma\right)\vee\left(\beta\wedge\gamma\right)$.
- $\left(\alpha\wedge\beta\right)\equiv\left(\beta\wedge\alpha\right)$.
- $\left(\alpha\vee\beta\right)\equiv\left(\beta\vee\alpha\right)$.
- $\left(\alpha\wedge\beta\right)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge\left(\beta\wedge\gamma\right)$.
- $\left(\alpha\vee\beta\right)\vee\gamma\equiv\alpha\vee\left(\beta\vee\gamma\right)$.
- $\neg\left(\neg\alpha\right)\equiv\alpha$.
- $\neg\left(\alpha\wedge\beta\right)\equiv\left(\neg\alpha\right)\vee\left(\neg\beta\right)$.
- $\neg\left(\alpha\vee\beta\right)\equiv\left(\neg\alpha\right)\wedge\left(\neg\beta\right)$.
- $\left(\alpha\Longrightarrow\beta\right)\equiv\left(\neg\alpha\right)\vee\beta$.

למה: יהי $\gamma\in\text{WFF}$ סתירה אזי לכל $\alpha\in\text{WFF}$ מתקיים $\gamma\models\alpha$.

טענה: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ עבורם $\Gamma\cup\{\alpha\}\models\beta$ וכן $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\models\beta$ אזי $\Gamma\models\beta$.

טענה: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ עבורם $\Gamma\cup\{\alpha\}\models\beta$ וכן $\Gamma\cup\{\alpha\}\models\beta$ אזי $\Gamma\models\left(\neg\alpha\right)$.

טענה: יהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ אזי $\left(\alpha\models\beta\right)\Longleftrightarrow\left(\models\left(\alpha\Longrightarrow\beta\right)\right)$.

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha,\varphi\in\text{WFF}$ ויהי p פסוק אטומי אזי
- אם $\alpha=p$ אזי $\alpha\left(\varphi/p\right)=\varphi$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha\neq p$ אזי $\alpha\left(\varphi/p\right)=\alpha$.
- אם קיים $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=\neg\beta$ אזי $\alpha\left(\varphi/p\right)=\neg\beta\left(\varphi/p\right)$.
- אם קיימים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha=\beta\circ\gamma$ אזי $\alpha\left(\varphi/p\right)=\beta\left(\varphi/p\right)\circ\gamma\left(\varphi/p\right)$.

טענה: יהיו $\alpha,\varphi\in\text{WFF}$ ויהי $p\in A\left(\alpha\right)$ אזי $\alpha\left(\varphi/p\right)\in\text{WFF}$.

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha,\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ ויהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי
- אם $\alpha=p_i$ עבור $i\in[n]$ אזי $\alpha\left(\varphi_1/p_1\ldots\varphi_n/p_n\right)=\varphi_i$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha\neq p_i$ לכל $i\in[n]$ אזי $\alpha\left(\varphi_1/p_1\ldots\varphi_n/p_n\right)=\alpha$.
- אם קיים $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=\neg\beta$ אזי $\alpha\left(\varphi_1/p_1\ldots\varphi_n/p_n\right)=\neg\beta\left(\varphi_1/p_1\ldots\varphi_n/p_n\right)$.

- אם קיימים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha=\beta\circ\gamma$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)=\beta\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)\circ\gamma\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$.

טענה: יהיו $\alpha,\varphi\in\text{WFF}$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j)=\begin{cases}v(p_j) & i\neq j\\ \overline{v}(\varphi) & i=j\end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)\right)=\overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה: טענה: יהיו $\alpha,\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ יהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j)=\begin{cases}v(p_j) & j\notin[n]\\ \overline{v}(\varphi_j) & j\in[n]\end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)\right)=\overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ ויהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$ טאוטולוגיה.

קבוצת הצורות הנורמליות: $\text{NNF}=X_{\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)\mid i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}}$.

טענה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{NNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.