

**אלגברה:** תהא  $\Omega$  קבוצה אזי  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  המקיימת

- $\Omega \in \mathcal{F}$

- $\forall E \in \mathcal{F}. E^c \in \mathcal{F}$

- לכל  $E \subseteq \mathcal{F}$  סופית מתקיים  $\bigcup E \in \mathcal{F}$

**למה:** תהא  $\mathcal{F}$  אלגברה אזי  $\emptyset \in \mathcal{F}$

**למה:** תהא  $\mathcal{F}$  אלגברה ותהא  $E \subseteq \mathcal{F}$  סופית אזי  $\bigcap E \in \mathcal{F}$

**$\sigma$ -אלגברה:** תהא  $\Omega$  קבוצה אזי  $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$  המקיימת

- $\Omega \in \mathcal{F}$

- $\forall E \in \mathcal{F}. E^c \in \mathcal{F}$

- לכל  $E \subseteq \mathcal{F}$  בת מנייה מתקיים  $\bigcup E \in \mathcal{F}$

**למה:** תהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה אזי  $\emptyset \in \mathcal{F}$

**למה:** תהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה ותהא  $E \subseteq \mathcal{F}$  בת מנייה אזי  $\bigcap E \in \mathcal{F}$

**משפט:** תהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה מעל  $\Omega$  אזי  $\mathcal{F}$  הינה אלגברה מעל  $\Omega$

**פונקציה אדטיבית:** פונקציה  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת לכל  $B_1 \dots B_n \in \mathcal{A}$  זרות בזוגות מתקיים  $\mu(\biguplus_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$

**מידה על אלגברה:** תהא  $\mathcal{F}$  אלגברה אזי  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  אדטיבית.

**פונקציה  $\sigma$ -אדטיבית:** פונקציה  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת לכל  $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$  זרות בזוגות מתקיים  $\mu(\biguplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$

**מידה על  $\sigma$ -אלגברה:** תהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה אזי  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$   $\sigma$ -אדטיבית.

**מרחב מדיד:** תהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה מעל  $\Omega$  אזי  $(\Omega, \mathcal{F})$

**קבוצה מדידה:** תהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה מעל  $\Omega$  אזי  $E \in \mathcal{F}$

**למה:** תהא  $\mu$  מידה על  $\mathcal{F}$  המקיימת  $\mu(E) > 0$  אזי  $\exists E \in \mathcal{F}. \mu(\emptyset) = 0$

**למה:** תהא  $\mu$  מידה מעל  $\sigma$ -אלגברה  $\mathcal{F}$  אזי  $\mu$  אדטיבית.

**למה:** תהא  $\mu$  מידה ותהיינה  $A, B \in \mathcal{F}$  עבורן  $A \subseteq B$  אזי  $\mu(A) \leq \mu(B)$

**סדרת קבוצות מונוטונית:** תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה ותהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  אזי

- מונוטונית עולה חלש:  $\forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1}$

- מונוטונית יורדת חלש:  $\forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n$

**סופרמום:** תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה ותהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  אזי  $\sup(A) = \bigcup_{i=0}^\infty A_i$

**אינפימום:** תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה ותהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  אזי  $\inf(A) = \bigcap_{i=0}^\infty A_i$

**גבול עליון:** תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה ותהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  אזי  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^\infty \bigcup_{i=n}^\infty A_i$

**גבול תחתון:** תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה ותהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  אזי  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^\infty \bigcap_{i=n}^\infty A_i$

**גבול:** תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה ותהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  עבורה  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$

**טענה:** תהא  $\mu$  מידה מעל  $\sigma$ -אלגברה  $\mathcal{F}$  ותהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$  עבורה  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B)$

**מרחב מידה:** תהא  $\mathcal{F}$  אלגברה/ $\sigma$ -אלגברה מעל  $\Omega$  ותהא  $\mu$  מידה על  $\mathcal{F}$  אזי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

**מידת הסתברות:** תהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה מעל  $\Omega$  אזי מידה  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  המקיימת  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

**מרחב הסתברות:** מרחב מידה  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  עבורו  $\mu$  מידת הסתברות.

**מרחב התוצאות:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות אזי  $\Omega$

**מאורע:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות אזי  $E \in \mathcal{F}$

**מרחב המאורעות:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות אזי  $\mathcal{F}$

**אינווריאנטיות להזזות:** מרחב הסתברות  $(\mathcal{F}, \mathbb{P})$  עבורו לכל  $A \subseteq (0, 1]$  ולכל  $b \in (0, 1]$  באשר  $A + b \subseteq (0, 1]$  מתקיים

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A + b)$$

**טענה:** לכל מרחב הסתברות  $(\mathbb{P}, (0, 1], 2^{(0, 1]})$  לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.

**קבוצה פתוחה:**  $A \subseteq \mathbb{R}$  עבורה  $\forall x \in A. \exists \varepsilon > 0. (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$

**קבוצה סגורה:**  $A \subseteq \mathbb{R}$  עבורה  $A^c$  פתוחה.

**טענה:** תהיינה  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$   $\sigma$ -אלגבראות מעל  $\Omega$  אזי  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$  הינה  $\sigma$ -אלגברה מעל  $\Omega$

**$\sigma$ -אלגברה בורלית מעל  $\mathbb{R}$ :** תהיינה  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  כל  $\sigma$ -אלגבראות מעל  $\mathbb{R}$  המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

**קבוצה בורלית:**  $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$

**טענה:**  $\sigma$ -אלגברה בורלית הינה  $\sigma$ -אלגברה מעל  $\mathbb{R}$ .

**טענה:** תהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה מעל  $\mathbb{R}$  המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$ .

**טענה:** תהא  $\Omega$  קבוצה תהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה מעל  $\Omega$  ותהא  $A \subseteq \Omega$  אזי  $\{E \cap A \mid E \in \mathcal{F}\}$  הינה  $\sigma$ -אלגברה מעל  $A$ .

**$\sigma$ -אלגברה בורלית מעל  $(0, 1]$ :**  $\mathfrak{B}_{(0,1]} = \{B \cap (0, 1] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$ .

**מידת לבג:** תהא  $B \in \mathfrak{B}$  אזי  $\lambda(B) = \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\}$ .

**טענה:**  $(\lambda, \mathfrak{B}_{(0,1]}, (0, 1])$  מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

**מרחב אחיד על  $A$ :** עבור  $A \subseteq \mathbb{R}$  אזי  $(A, \mathfrak{B}_A, \lambda)$ .

**$\sigma$ -אלגברה נוצרת:** תהא  $\Omega$  קבוצה תהא  $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$  ותהיינה  $\{F_i\}_{i \in I}$  כל ה- $\sigma$ -אלגבראות מעל  $\Omega$  המכילות את  $\mathcal{T}$  אזי  $\sigma(\mathcal{T}) = \bigcap_{i \in I} F_i$ .

**הצילינדר של ה- $\sigma$ -אלגברה הנוצרת:** תהא  $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$  ו- $\sigma$ -אלגברה  $\sigma(\mathcal{T})$  אזי  $\mathcal{T}$ .

**טענה:** תהא  $\Omega$  קבוצה ותהא  $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$  נסמן  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\emptyset, \Omega\}$ , לכל סודר עוקב  $\alpha + 1$  נסמן

$\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_{\alpha} \cup \{A^c \mid A \in \mathcal{F}_{\alpha}\} \cup \{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_{\alpha}\}$  נסמן  $\mathcal{F}_{\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}_{\alpha}$  אזי  $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$  באשר  $\omega_1$  הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

**טענה:** תהא  $\Omega$  קבוצה תהא  $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$  ויהיו  $\omega, \kappa \in \Omega$  עבורן  $\omega \in A \iff \kappa \in A$  ויהיו  $\forall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \iff \kappa \in A$  אזי  $\forall A \in \sigma(\mathcal{T}). \omega \in A \iff \kappa \in A$ .

**משתנה מקרי/פונקציה מדידה:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות אזי  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  עברה  $X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$  עבור  $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ .

**פונקציה מדידה בורל:**  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $\varphi^{-1}[B] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$  עבור  $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ .

**סימון:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות ויהי  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  מ"מ נגדיר  $\mathbb{P}_X : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}[B])$ .

**טענה:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות ויהי  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  מ"מ אזי  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_X)$  מרחב הסתברות.

**טענה:** תהא  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ותהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  אזי

$$\bullet f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$

$$\bullet f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

$$\bullet f^{-1}[A^c] = f^{-1}[A]^c$$

**טענה:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F})$  מרחב מדיד ותהא  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $\{E \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}[E] \in \mathcal{F}\}$  הינה  $\sigma$ -אלגברה מעל  $\mathbb{R}$ .

**משפט:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות ותהא  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $X$  מ"מ  $\iff (\forall t \in \mathbb{R}. X^{-1}[(-\infty, t)] \in \mathcal{F})$ .

**$\sigma$ -אלגברה נוצרת על ידי משתנה מקרי:** יהי  $X$  מ"מ על מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  אזי  $\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}[B] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\})$ .

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ על מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  אזי

$$\bullet \text{יהי } c \in \mathbb{R} \text{ אזי } cX \text{ מ"מ.}$$

$$\bullet X + Y \text{ מ"מ.}$$

$$\bullet XY \text{ מ"מ.}$$

$$\bullet \text{יהי } Z \text{ מ"מ על } (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu) \text{ אזי } f \circ X \text{ מ"מ.}$$

**טענה:** תהא  $f \in C(\mathbb{R})$  ותהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$  פתוחה אזי  $f^{-1}[\mathcal{U}]$  פתוחה.

**מסקנה:** תהא  $f \in C(\mathbb{R})$  אזי  $f$  מ"מ על  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ .

**פונקציית התפלגות מצטברת (פה"מ):** יהי  $X$  מ"מ על מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  אזי  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  המקיימת  $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ על מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  אזי

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$$

$$\bullet F_X \text{ מונוטונית עולה.}$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow a^+} F_X(t) = F_X(a)$$

**משתנים מקריים שויי התפלגות:**  $X, Y$  מ"מ עבורם  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ .

**למה:** תהא  $\Omega$  קבוצה תהא  $\mathcal{F}_0 \subseteq 2^{\Omega}$  סגורה לחיתוכים סופיים עברה  $\Omega \in \mathcal{F}_0$  ותהא  $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$  סגורה להפרשים וסגורה לגבולות

אינסופיים עברה  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$  אזי  $\sigma(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{F}$ .

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ אזי  $(F_X = F_Y) \iff (\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y)$ .

**תומך של משתנה מקרי:** יהי  $X$  מ"מ אזי  $\text{supp}(X) = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(t - \varepsilon < X < t + \varepsilon) > 0\}$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ אזי  $\text{supp}(X)$  הקבוצה הסגורה המינימלית ב- $\mathbb{R}$  עברה  $\mathbb{P}(X \in \text{supp}(X)) = 1$ .

**אטום של משתנה מקרי:** יהי  $X$  מ"מ אזי  $t \in \mathbb{R}$  המקיים  $\mathbb{P}(X = t) > 0$ .

**קבוצת האטומים:** יהי  $X$  מ"מ אזי  $t \in \mathbb{R}$  אטום של  $X$  אזי  $A_X = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ אטום של } X\}$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ אזי  $|A_X| \leq \aleph_0$ .

**משתנה מקרי בדיד:** משתנה מקרי  $X$  המקיים  $\mathbb{P}(X \in A_X) = 1$ .

**פונקציית צפיפות:**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה למקוטעין המקיימת  $f \geq 0$  וכן  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ .

**משתנה מקרי רציף:** משתנה מקרי  $X$  עבורו קיימת  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית צפיפות עבורה לכל  $a < b$  מתקיים

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

**סימון:** יהי  $X$  מ"מ רציף אזי  $f_X$  פונקציית הצפיפות של  $X$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ אזי  $(X \text{ רציף}) \iff (\mathbb{P}(X \in A_X) = 0)$ .

**הערה:** לא כל משתנה מקרה הוא בדיד או רציף, ובמקרה זה  $0 < \mathbb{P}(X \in A_X) < 1$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ רציף אזי

$$\bullet \text{ יהי } t \in \mathbb{R} \text{ אזי } \mathbb{P}(X = t) = 0$$

$$\bullet F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ רציף ותהא  $a \in \mathbb{R}$  עבורה  $f_X \in C(a)$  אזי  $F'_X(a) = f_X(a)$ .

**האחוזון ה- $p$ :** יהי  $X$  מ"מ עבורו  $F_X$  עולה ממש עד אשר  $F_X = 1$  ויהי  $p \in (0, 1)$  אזי  $x_p \in \mathbb{R}$  המקיים  $F_X(x_p) = p$ .

**האחוזון ה- $p$ :** יהי  $X$  מ"מ עבורו  $F_X$  עולה ויהי  $p \in (0, 1)$  אזי  $x_p = \sup \{t \mid F_X(t) \leq p\}$ .

**טענה:** תהא  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  וכן  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  אזי קיים מ"מ  $X$  על

מרחב הסתברות  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  עבורו  $F_X = F$ .

**סימון:** תהא  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  וכן  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  אזי

$$X^*(s) = \sup \{t \mid F(t) \leq s\}$$

**טענה:** תהא  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  וכן  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  אזי  $X^*$  מ"מ על

$$((0, 1), \mathfrak{B}_{(0,1)}, \lambda)$$

**משפט:** תהא  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  וכן  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$  אזי  $F_{X^*} = F$ .

**טענה:** יהי  $\lambda > 0$  יהיו  $X_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$  מ"מ יהי  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$  מ"מ ויהי  $k \in \mathbb{N}$  אזי  $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k)$ .

**תהליך פואסון:** משתנים מקריים  $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  כך שלכל  $t \in \mathbb{R}_+$  המ"מ  $N_t$  סופר את מספר האירועים בלתי תלויים שקרו עד זמן  $t$ , בפרט  $N_0 = 0$  וכן  $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poi}(\lambda t)$  באשר  $\lambda$  ממוצע האירועים ליחידת זמן.

**טענה:** יהי  $\lambda > 0$  יהי  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  ויהיו  $a, b > 0$  אזי  $\mathbb{P}(X > a + b \mid X > a) = \mathbb{P}(X > b)$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ המקיים  $\mathbb{P}(X > a + b \mid X > a) = \mathbb{P}(X > b)$   $\forall a, b > 0$  אזי קיים  $\lambda > 0$  עבורו  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

**טענה:** הזמן הבינומופעי של תהליך פואסון עם קצב  $\lambda$  מופעים ליחידת זמן מתפלג  $\text{Exp}(\lambda)$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ רציף ותהא  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  על, עולה ממש וגזירה אזי  $f_{\varphi \circ X}(t) = \frac{f_X(\varphi^{-1}(t))}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ רציף ותהא  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  על, יורדת ממש וגזירה אזי  $f_{\varphi \circ X}(t) = -\frac{f_X(\varphi^{-1}(t))}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$ .

**הגדרה:** יהי  $X$  מ"מ אזי  $X^+ = \max\{X, 0\}$ ,  $X^- = \min\{X, 0\}$ .

**תוחלת:** יהי  $X$  מ"מ בדיד אזי  $\mathbb{E}[X] = \sum_{c \in A_X} c \cdot \mathbb{P}(X = c)$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ בדיד אזי  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-]$ .

**משתנה מקרי אינטגרבילי:** מ"מ בדיד  $X$  עבורו  $\mathbb{E}[X]$  סופי.

**משתנה מקרי סימטרי:** יהי  $a \in \mathbb{R}$  אזי מ"מ  $X$  עבורו  $\mathbb{P}(X \geq a + k) = \mathbb{P}(X \leq a - k)$   $\forall k \in \mathbb{R}$ .

**טענה:** יהי  $a \in \mathbb{R}$  ויהי  $X$  מ"מ בדיד אינטגרבילי סימטרי סביב  $a$  אזי  $\mathbb{E}[X] = a$ .

**טענה לינאריות התוחלת:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  ויהי  $X$  מ"מ בדיד אינטגרבילי אזי  $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$ .

**משתנה מקרי שולט:** יהיו  $X, Y$  מ"מ אזי  $X$  שולט על  $Y$  אם  $Y \leq X$ .

**טענה מונוטוניות התוחלת:** יהיו  $X \geq Y$  מ"מ בדידים אזי  $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ .

**תוחלת:** יהי  $X$  מ"מ אזי

$$\bullet \mathbb{E}[X^+] = \sup \{\mathbb{E}[Y] \mid (0 \leq Y \leq X^+) \wedge (Y \text{ מ"מ בדיד})\}$$

$$\bullet \mathbb{E}[X^-] = -\sup \{\mathbb{E}[Y] \mid (0 \leq Y \leq -X^-) \wedge (Y \text{ מ"מ בדיד})\}$$

$$\bullet \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-]$$

**משתנה מקרי אינטגרבילי:** מ"מ  $X$  עבורו  $\mathbb{E}[X]$  סופי.

**טענה לינאריות התוחלת:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  ויהי  $X$  מ"מ אינטגרבילי אזי  $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$ .

**טענה מונוטוניות התוחלת:** יהיו  $X \geq Y$  מ"מ אזי  $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ .

**טענה נוסחת הזנב:** יהי  $X$  מ"מ אזי  $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(t)) dt + \int_{-\infty}^0 (0 - F_X(t)) dt$

**מסקנה:** יהי  $X$  מ"מ רציף אזי  $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^\infty t f_X(t) dt$

**משתנה מקרי שולט סטוכסטית:** יהיו  $X, Y$  מ"מ אזי  $X$  שולט סטוכסטית על  $Y$  אם  $F_Y \geq F_X$

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ עבורם  $\mathbb{P}(Y \leq X) = 1$  אזי  $X$  שולט סטוכסטית על  $Y$ .

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ

• אם  $X$  שולט סטוכסטית על  $Y$  אזי  $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X]$

• אם  $\mathbb{P}(Y \leq X) = 1$  אזי  $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X]$

• חיבוריות:  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

**טענה אי־שוויון מרקוב:** יהי  $X \geq 0$  מ"מ אינטגרבילי ויהי  $b > 0$  אזי  $\mathbb{P}(X \geq b) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{b}$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא  $\varphi$  מדידה בורל אזי  $\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \sum_{c \in A_X} \varphi(c) \cdot \mathbb{P}(X = c)$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ רציף ותהא  $\varphi$  רציפה למקוטעין אזי  $\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \int_{-\infty}^\infty \varphi(t) f_X(t) dt$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ חסום אזי  $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 X^*(t) dt$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ חסום מלרע אזי  $\mathbb{E}[X] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} X^*(t) dt$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ חסום מלעיל אזי  $\mathbb{E}[X] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 X^*(t) dt$

**שונויות:** יהי  $X$  מ"מ אינטגרבילי אזי  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

**סטיית תקן:** יהי  $X$  מ"מ אינטגרבילי אזי  $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ אינטגרבילי אזי  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ אינטגרבילי ויהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$

**טענה אי־שוויון צ'בישב:** יהי  $X$  מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי  $a > 0$  אזי  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$

**פונקציה יוצרת מומנטים:** יהי  $X$  מ"מ אזי  $M_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת  $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ ויהי  $I$  קטע עבורו  $0 \in I$  וכן  $M_X \in C^n(I)$  אזי  $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ ויהי  $I$  קטע עבורו  $0 \in I$  וכן  $M_X(t)$  קיים וסופי על  $I$  אזי  $\mathbb{E}[|X|^n]$  מתכנס לכל  $n \in \mathbb{N}$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ ויהי  $\varepsilon > 0$  עבורו  $M_X(t)$  קיים וסופי על  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  אזי  $M_X(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n \mathbb{E}[X^n]}{n!}$

**σ-אלגברה בורלית מעל  $\mathbb{R}^n$ :** תהייה  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  כל ה-σ-אלגבראות מעל  $\mathbb{R}^n$  המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

**משתנה מקרי n-מימדי:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות אזי  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  עבורה  $X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$   $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$

**משפט:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות ותהא  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  אזי  $X$  מ"מ  $\iff (\forall t \in \mathbb{R}^n. \forall i \in [n]. X_i^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{F})$

**סימון:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות ויהי  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  מ"מ נגדיר  $\mathbb{P}_X : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$  כך  $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}[B])$

**טענה:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות ויהי  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  מ"מ אזי  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{P}_X)$  מרחב הסתברות.

**פונקציית התפלגות מצטברת משותפת:** יהי  $X$  מ"מ n-מימדי על  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  אזי  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  המקיימת

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n)$$

**טענה:** יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו־ערכי אזי

• יהי  $\ell \in \mathbb{R}$  אזי  $\lim_{k \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(k, \ell) = 0$

• יהי  $k \in \mathbb{R}$  אזי  $\lim_{\ell \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(k, \ell) = 0$

•  $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} F_{X,Y}(k, \ell) = 1$

• רציפות מימין: יהיו  $p, q \in \mathbb{R}$  אזי  $\lim_{k \rightarrow p^+} \lim_{\ell \rightarrow q^+} F_{X,Y}(k, \ell) = F_{X,Y}(p, q)$

**טענה:** יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו־ערכי ויהיו  $k_1 < k_2$  וכן  $\ell_1 < \ell_2$  אזי  $F_{X,Y}(k_2, \ell_2) + F_{X,Y}(k_1, \ell_1) \geq F_{X,Y}(k_2, \ell_1) + F_{X,Y}(k_1, \ell_2)$

**משתנים מקריים שויי התפלגות:**  $X, Y$  מ"מ n-מימדיים עבורם  $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

**טענה:** יהיו מ"מ n-מימדיים  $X, Y$  אזי  $(F_X = F_Y) \iff (\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y)$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ n-מימדי אזי  $X_i$  מ"מ חד-מימדי.

**משתנה מקרי שולי:** יהי  $X$  מ"מ n-מימדי אזי  $X_i$

**פונקציית התפלגות מצטברת שולית:** יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו־מימדי אזי

•  $F_X(t) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(t, y)$

•  $F_Y(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, t)$

**אטום:** יהי  $X$  מ"מ n-מימדי אזי  $a \in \mathbb{R}^n$  עבורו  $\mathbb{P}(X = a) > 0$

**קבוצת האטומים:** יהי  $X$  מ"מ n-מימדי אזי  $t$  אטום של  $X$   $\{t \in \mathbb{R}^n \mid X = t\}$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי אזי  $|A_X| \leq \aleph_0$ .

**משתנה מקרי בדיד:**  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי עבורו  $\mathbb{P}(X \in A_X) = 1$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי בדיד אזי  $\forall a \in A_X. \mathbb{P}_X(a) = \mathbb{P}(X = a)$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי אזי  $(X_i \text{ מ"מ בדיד לכל } i \in [n]) \iff (X \text{ מ"מ בדיד})$ .

**פונקציית צפיפות משותפת:**  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה למקוטעין המקיימת  $f \geq 0$  וכן  $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$ .

**משתנה מקרי רציף:**  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי עבורו קיימת  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציית צפיפות עבורה לכל  $a, b \in \mathbb{R}^n$  המקיימות  $a_i < b_i$  מתקיים

$$\mathbb{P}(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי אזי  $(X \text{ רציף}) \iff (\mathbb{P}(X \in A_X) = 0)$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי ויהי  $a \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\mathbb{P}(X = a) = 0$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי רציף אזי  $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a_n} \dots \int_{-\infty}^{a_1} f_X(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי רציף ותהא  $p: [n] \rightarrow [n]$  תמורה אזי  $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a_{p(n)}} \dots \int_{-\infty}^{a_{p(1)}} f_X(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי רציף ותהא  $a \in \mathbb{R}^n$  עבורה  $f_X \in C(a)$  אזי  $\frac{\partial^2 F_X}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 F_X}{\partial y \partial x}(a) = f_X(a)$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי רציף אזי  $X_i$  מ"מ רציף לכל  $i \in [n]$ .

**פונקציית צפיפות שולית:** יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו-מימדי אזי

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, y) dy \bullet$$

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t) dx \bullet$$

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי רציף ותהא  $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$  אזי  $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X$ .

**פונקציה מדידה בורל:**  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $\varphi^{-1}[B] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$  לכל  $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי ותהא  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  מדידה בורל אזי  $\varphi(X)$  מ"מ חד-מימדי.

**מסקנה:** יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו-מימדי אזי  $f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, s-x) dx$ .

**טענה:** יהי  $X$  מ"מ  $n$ -מימדי ותהא  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  בורלית רציפה למקוטעין אזי

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1 \dots x_n) f_X(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$$

**שונוות משותפת:** יהיו  $X, Y$  מ"מ על אותו מרחב הסתברות אזי  $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ .

**משתנים בלתי מתואמים:**  $X, Y$  מ"מ על אותו מרחב הסתברות עבורם  $\text{Cov}[X, Y] = 0$ .

**מקדם מתאם:** יהיו  $X, Y$  מ"מ אזי  $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ .

**משפט אי-שוויון קושי-שוורץ:** יהיו  $X, Y$  מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי  $\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]$ .

**מסקנה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי  $(\mathbb{E}[XY]^2 = \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]) \iff (\exists c \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(Y = cX) = 1)$ .

**מסקנה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ אזי  $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$ .

**מסקנה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ אזי

$$(\rho_{X,Y} = 1) \iff (\exists a > 0. \exists b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet$$

$$(\rho_{X,Y} = -1) \iff (\exists a < 0. \exists b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet$$

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ אזי  $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$ .

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ אזי

$$\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X] \bullet$$

$$\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X] \bullet$$

$$\text{Cov}[aX + b, Y] = a \text{Cov}[X, Y] \bullet$$

$$\text{Cov}[\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^m Y_i] = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m \text{Cov}[X_i, Y_i] \bullet$$

**משתנים מקריים בלתי תלויים:**  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ חד-מימדיים עבורם לכל מאורעות  $\{B_i\}_{i=1}^n$  המקיימים  $\forall k \in [n]. B_k \in \sigma(X_k)$  מתקיים

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)$$

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ ב"ת ותהינה  $\{g_i\}_{i=1}^n$  פונקציות מדידות בורל אזי  $\{g_i(X_i)\}_{i=1}^n$  מ"מ ב"ת.

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ אזי  $(\{X_i\}_{i=1}^n \text{ ב"ת}) \iff (F_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i))$ .

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ רציפים אזי  $(\{X_i\}_{i=1}^n \text{ ב"ת}) \iff (f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i))$ .

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ רציפים ותהינה  $\{g_i\}_{i=1}^n$  אי-שליליות רציפות למקוטעין המקיימות  $f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$  אזי  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ ב"ת.

**למה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ ב"ת אינטגרבייליים אזי  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$ .

**טענה:** יהיו  $X, Y$  מ"מ ב"ת אזי  $\text{Cov}[X, Y] = 0$ .

**מסקנה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי  $\text{Var}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$ .

**מסקנה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי  $M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$ .

**סטטיסטי הסדר:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי  $X_{(k)}$  הערך ה- $k$  בגודלו באוסף  $\{X_i\}_{i=1}^n$ .

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^n$  מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי

$$F_{X_{(k)}}(t) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot F_{X_1}(t)^i \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-i}$$

$$f_{X_{(k)}}(t) = n \cdot f_{X_1}(t) \cdot F_{X_1}(t)^{k-1} \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-k}$$

**מומוצע מדגמי:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי  $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}[X_1]$

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי  $\text{Var}[\bar{X}_n] \rightarrow 0$

**התכנסות משתנים מקריים:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ויהי  $X$  מ"מ אזי

$$(X_n \xrightarrow{D} X) \iff (\forall t \in \mathbb{R}. (F_X \in C(\{t\})) \implies (F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(t)))$$

$$(X_n \xrightarrow{p} X) \iff (\forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0)$$

$$(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \iff (\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\}^c) = 0)$$

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ויהי  $X$  מ"מ אזי  $(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \implies (X_n \xrightarrow{p} X) \implies (X_n \xrightarrow{D} X)$

**החוק החלש של המספרים הגדולים:** מ"מ  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  עבורם  $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{p} 0$

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט שני אזי  $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{p} 0$

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם  $\frac{\sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k]}{n^2} \rightarrow 0$  אזי  $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{p} 0$

**למה הלמה של קרונקר:** תהיינה  $a_n, b_n$  סדרות עבורן  $a_n \geq 0$  וכן  $b_n \uparrow \infty$  וכן  $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{b_n} < \infty$  אזי  $\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{b_n} \rightarrow 0$

**מסקנה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם  $\sum_{n=1}^\infty \frac{\text{Var}[X_n]}{n^2} < \infty$  אזי  $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{p} 0$

**טענה:** תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה ותהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  אזי  $\limsup A_n = \{A_n \text{ אינסוף פעמים}\}$

**טענה:** תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה ותהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$  אזי  $\liminf A_n = \{A_n \text{ החל ממקום מסויים}\}$

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ויהי  $X$  מ"מ אזי  $(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \iff (\forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(\limsup \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0)$

**מאורעות בלתי תלויים:** מאורעות  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  המקיימים כי לכל  $I \subseteq \mathbb{N}$  סופית מתקיים  $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$

**טענה הלמה של בורל-קנטלי:** יהיו  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  מאורעות אזי

$$(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \iff (\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty)$$

$$(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1) \iff ((\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty) \wedge (\{A_n\}_{n=1}^\infty \text{ מאורעות ב"ת}))$$

**מסקנה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ויהי  $X$  מ"מ עבורם לכל  $\varepsilon > 0$  מתקיים  $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$  אזי  $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

**החוק החזק של המספרים הגדולים:** מ"מ  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  עבורם  $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{a.s.} 0$

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ בעלי מומנט רביעי חסום במידה אחידה עבורם  $\forall i \in \mathbb{N}. \mathbb{E}[X_i] = 0$  אזי  $\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} 0$

**מסקנה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ עבורם  $\forall i \in \mathbb{N}. \mathbb{E}[X_i] = 0$  וכן  $\sum_{n=1}^\infty \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$  אזי  $\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} 0$

**$\sigma$ -אלגברת הזנב:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ אזי  $\bigcap_{n=1}^\infty \sigma(\bigcup_{i=n}^\infty X_i)$

**מאורע זנב:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ותהא  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברת הזנב אזי  $A \in \mathcal{F}$

**חוק 0-1 של קולמוגורוב:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ב"ת ויהי  $A$  מאורע זנב אזי  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$

**מסקנה:** יהיו  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$  מאורעות ב"ת אזי

$$(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \iff (\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty)$$

$$(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1) \iff (\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty)$$

**התפלגות נורמלית סטנדרטית:** מ"מ  $Z$  עבורו  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

**טענה:** יהי  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  אזי  $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

**טענה:** יהי  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  יהי  $\mu \in \mathbb{R}$  ויהי  $\sigma \in \mathbb{R}_+$  אזי  $\sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

**מסקנה:** יהי  $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  אזי  $M_Z(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$

**טענה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ב"ת עבורם  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$  אזי  $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$

**מסקנה:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^\infty$  מ"מ ב"ת עבורם  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$  אזי  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

**משפט הגבול המרכזי:** יהיו  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  מ"מ ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט שני אזי  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\text{Var}(X_1)}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$

**תוחלת מותנית:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות יהי  $X$  מ"מ ותהא  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברה אזי  $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_0]$  מ"מ על  $\mathcal{F}_0$  עבורו לכל

$$A \in \mathcal{F}_0 \text{ מתקיים } \mathbb{E}[\chi_A \cdot X] = \mathbb{E}[\chi_A \cdot \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_0]]$$

**הגדרה:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות ויהיו  $X, Y$  מ"מ אזי  $\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[X | \sigma(Y)]$

**משתנה מקרי מותנה:** יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו-מימדי בדיד אזי  $X | Y = y$  מ"מ עבורו  $\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$

**מסקנה:** יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו-מימדי בדיד אזי  $\mathbb{E}[X | Y = y] = \sum x \cdot \mathbb{P}(X = x | Y = y)$

**משתנה מקרי מותנה:** יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו-מימדי רציף אזי  $X|Y$  מ"מ עבורו  $f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

**מסקנה:** יהי  $(X, Y)$  מ"מ דו-מימדי רציף אזי  $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x) dx$

**טענה:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות יהי  $X$  מ"מ ותהיינה  $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$   $\sigma$ -אלגברות אזי  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2] | \mathcal{F}_1]$

**מסקנה נוסחאת ההחלקה:** יהי  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  מרחב הסתברות ויהיו  $X, Y$  מ"מ אזי  $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$

**מסקנה:** יהי  $X$  מ"מ רציף ויהי  $A \in \mathcal{F}$  מאורע אזי  $\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A | X = x) f_X(x) dx$

## התפלגויות

**התפלגות ברנולי:** יהי  $p \in [0, 1]$  אזי

- המשתנה המקרי:  $X$  אינדיקטור להצלחה בניסוי בעל סיכוי הצלחה  $p$  וסיכוי כישלון  $1 - p$ .
- פונקציית הסתברות:  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \mathbb{P}(X = 1) = p$
- סימון:  $X \sim \text{Ber}(p)$
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = p$
- שונות:  $\text{Var}(X) = p(1 - p)$

**התפלגות בינומית:** יהי  $p \in [0, 1]$  ויהי  $n \in \mathbb{N}_+$

- המשתנה המקרי:  $X$  מספר הניסויים שצלחו בביצוע  $n$  ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה  $p$  לניסוי.
- פונקציית הסתברות: יהי  $k \in \{0, \dots, n\}$  אזי  $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- סימון:  $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = np$
- שונות:  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

**התפלגות בינומית שלילית:** יהי  $p \in [0, 1]$  ויהי  $r \in \mathbb{N}$  אזי

- המשתנה המקרי:  $X \dots$
- פונקציית הסתברות: יהי  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0 \dots r - 1\}$  אזי  $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1 - p)^{k-r}$
- סימון:  $X \sim \text{NB}(n, p)$
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p}$
- שונות:  $\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

**התפלגות גאומטרית:** יהי  $p \in [0, 1]$  אזי

- המשתנה המקרי:  $X$  מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה  $p$  שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל.
- פונקציית הסתברות: יהי  $k \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$
- סימון:  $X \sim \text{Geo}(p)$
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$
- שונות:  $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

**התפלגות היפרגאומטרית:** יהי  $N \in \mathbb{N}$  ויהיו  $D, n \in \{0 \dots N\}$  אזי

- המשתנה המקרי:  $X \dots$
- פונקציית הסתברות: יהי  $k \in \{\max\{0, n + D - N\} \dots \min(n, D)\}$  אזי  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- סימון:  $X \sim \text{HG}(N, D, n)$
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \frac{nD}{N}$
- שונות:  $\text{Var}(X) = \frac{nD}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

**התפלגות היפרגאומטרית שלילית:** יהי  $N \in \mathbb{N}$  ויהי  $K \in \{0, \dots, N\}$  ויהי  $r \in \{0, \dots, N - K\}$  אזי

- המשתנה המקרי:  $X \dots$
- פונקציית הסתברות: יהי  $k \in \{0, \dots, K\}$  אזי  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k+r-1}{k} \binom{N-r-k}{K-k}}{\binom{N}{K}}$
- סימון:  $X \sim \text{NHG}(N, K, r)$
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \frac{rK}{N-K+1}$
- שונות:  $\text{Var}(X) = \left(\frac{r(N+1)K}{(N-K+1)(N-K+2)}\right) \left(1 - \frac{r}{N-K+1}\right)$

**התפלגות פואסונית:** יהי  $\lambda > 0$  אזי



- המשתנה המקרי:  $X$  מספר האירועים שקרו בפרק זמן נתון בעל קצב אירועים בפרק זמן זה  $\lambda$ .
- פונקציית הסתברות: יהי  $k \in \mathbb{N}$  אזי  $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .
- סימון:  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ .
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \lambda$ .
- שונות:  $\text{Var}(X) = \lambda$ .

**התפלגות אחידה בדידה:** יהיו  $a < b \in \mathbb{Z}$

- המשתנה המקרי:  $X$  בחירה אקראית של נקודה בקבוצה  $\{a \dots b\}$ .
- פונקציית הסתברות: יהי  $k \in \mathbb{R}$  אזי  $\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & k \in [a, b] \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .
- סימון:  $X \sim \text{Uni}(\{a \dots b\})$ .
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ .
- שונות:  $\text{Var}(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$ .

**התפלגות אחידה רציפה:** יהיו  $a < b$  אזי

- המשתנה המקרי:  $X$  בחירה אקראית של נקודה בקטע  $(a, b)$ .
- פונקציית התפלגות מצטברת:  $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a, b) \\ 1 & t \geq b \end{cases}$ .
- פונקציית צפיפות:  $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a, b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .
- סימון:  $X \sim \text{Uni}(a, b)$ .
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ .
- שונות:  $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

**התפלגות מעריכית:** יהי  $\lambda > 0$  אזי

- המשתנה המקרי:  $X$  משך חיים של תהליך הנמשך  $\lambda$  יחידות זמן בממוצע.
- פונקציית התפלגות מצטברת:  $F_X(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ .
- פונקציית צפיפות:  $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ .
- סימון:  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ .
- שונות:  $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

**התפלגות גאמא:** יהיו  $n, \lambda > 0$  אזי

- המשתנה המקרי:  $X$
- פונקציית התפלגות מצטברת:  $F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ .
- פונקציית צפיפות:  $f_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ .
- סימון:  $X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ .
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{\lambda}$ .
- שונות:  $\text{Var}(X) = \frac{n}{\lambda^2}$ .

**התפלגות נורמלית:** יהי  $\sigma \in \mathbb{R}_+$  ויהי  $\mu \in \mathbb{R}$  אזי

- המשתנה המקרי:  $X$
- פונקציית התפלגות מצטברת:  $F_X(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ .
- פונקציית צפיפות:  $f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$ .
- סימון:  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- תוחלת:  $\mathbb{E}[X] = \mu$ .
- שונות:  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .