

אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ המקיימת

• $\Omega \in \mathcal{F}$

• $\forall E \in \mathcal{F}. E^c \in \mathcal{F}$

• לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} אלגברה אזי $\emptyset \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$

σ -אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ המקיימת

• $\Omega \in \mathcal{F}$

• $\forall E \in \mathcal{F}. E^c \in \mathcal{F}$

• לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה אזי $\emptyset \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$

משפט: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי \mathcal{F} הינה אלגברה מעל Ω

פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1 \dots B_n \in \mathcal{A}$ מתקיים $\mu(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$

מידה על אלגברה: תהא \mathcal{F} אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ אדטיבית.

פונקציה σ -אדטיבית: פונקציה $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת לכל $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ מתקיים

$\mu(\bigcup_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$

מידה על σ -אלגברה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ σ -אדטיבית.

מרחב מדיד: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי (Ω, \mathcal{F})

קבוצה מדידה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי $E \in \mathcal{F}$

למה: תהא μ מידה על \mathcal{F} המקיימת $\mu(E) < \infty$ אזי $\mu(\emptyset) = 0$

למה: תהא μ מידה מעל σ -אלגברה \mathcal{F} אזי μ אדטיבית.

למה: תהא μ מידה ותהינה $A, B \in \mathcal{F}$ עבורן $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי

• מונוטונית עולה חלש: $\forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1}$

• מונוטונית יורדת חלש: $\forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n$

סופרמום: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\sup(A) = \bigcup_{i=0}^\infty A_i$

אינפימום: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\inf(A) = \bigcap_{i=0}^\infty A_i$

גבול עליון: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^\infty \bigcup_{i=n}^\infty A_i$

גבול תחתון: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^\infty \bigcap_{i=n}^\infty A_i$

גבול: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ עבורה $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$

טענה: תהא μ מידה מעל σ -אלגברה \mathcal{F} ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B)$

מרחב מידה: תהא \mathcal{F} אלגברה/ σ -אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על \mathcal{F} אזי $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

מידת הסתברות: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ המקיימת $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

מרחב הסתברות: מרחב מידה $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ עבורו μ מידת הסתברות.

מרחב התוצאות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω

מאורע: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $E \in \mathcal{F}$

מרחב המאורעות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי \mathcal{F}

אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $((0, 1], \mathcal{F}, \mathbb{P})$ עבורו לכל $A \subseteq (0, 1]$ ולכל $b \in (0, 1]$ באשר $A + b \subseteq (0, 1]$ מתקיים

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A + b)$

טענה: לכל מרחב הסתברות $((0, 1], 2^{(0, 1]}, \mathbb{P})$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.

קבוצה פתוחה: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה $\forall x \in A. \exists \varepsilon > 0. (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$

קבוצה סגורה: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה A^c פתוחה.

טענה: תהינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ σ -אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ הינה σ -אלגברה מעל Ω

σ -אלגברה בורלית מעל \mathbb{R} : תהינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ כל ה- σ -אלגבראות מעל \mathbb{R} המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

קבוצה בורלית: $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$

טענה: σ -אלגברה בורלית הינה σ -אלגברה מעל \mathbb{R} .

טענה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל \mathbb{R} המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω ותהא $A \subseteq \Omega$ אזי $\{E \cap A \mid E \in \mathcal{F}\}$ הינה σ -אלגברה מעל A .

σ -אלגברה בורלית מעל $(0, 1]$: $\mathfrak{B}_{(0,1]} = \{B \cap (0, 1] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$

מידת לבג: תהא $B \in \mathfrak{B}$ אזי $\lambda(B) = \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\}$

טענה: $((0, 1], \mathfrak{B}_{(0,1]}, \lambda)$ מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

σ -אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ותהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ כל ה σ -אלגבראות מעל Ω המכילות את \mathcal{T} אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

הצילינדר של ה σ -אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ו σ -אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי \mathcal{T} .

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\emptyset, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן

$\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_{\alpha} \cup \{A^c \mid A \in \mathcal{F}_{\alpha}\} \cup \{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_{\alpha}\}$ נסמן $\mathcal{F}_{\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}_{\alpha}$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ויהיו $\omega, \kappa \in \Omega$ עבורן $\forall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \iff \kappa \in A$ אזי $\forall A \in \sigma(\mathcal{T}). \omega \in A \iff \kappa \in A$.

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ עברה $X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ עבור $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ אזי

$$\bullet f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$

$$\bullet f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

$$\bullet f^{-1}[A^c] = f^{-1}[A]^c$$

טענה: יהי (Ω, \mathcal{F}) מרחב מדיד ותהא $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\{E \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}[E] \in \mathcal{F}\}$ הינה σ -אלגברה מעל \mathbb{R} .

משפט: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אזי X מ"מ $(X) \iff (\forall t \in \mathbb{R}. X^{-1}[(-\infty, t)] \in \mathcal{F})$.