C^m-יריעה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^m\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי $C^\omega\left(A,B\right)=\left\{f:A\to B\mid \text{אנליטית מקומית } f\right\}$.

יריעה אנליטית k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f:G\to\mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

עקומה: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה חד־מימדית.

משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה דו־מימדית.

היפר־משטח/על־משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה $n-1$ מימדית.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה היפר־משפט חלק.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות עבורן $\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}_\alpha$ יריעה לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m-יריעה k-מימדית ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r\in C^m\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $r\left(G\right)=\mathcal{M}$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r\in C^1\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה לכל $x\in G$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_r\left(x\right)\right)=k$.

הומאומורפיזם: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f\in C\left(A,B\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C\left(B,A\right)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r:G\to A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ עבורן $\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן קיימות $\left\{G_\alpha\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^k\right)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha\subseteq C^m\left(G_\alpha,\mathbb{R}^n\right)$ עבורן $r_\alpha\left(G_\alpha\right)=\mathcal{U}_\alpha$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{U}$ המקיימת $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים כי $\left\{\nabla f_i\left(x\right)\right\}$ בת"ל.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1\ldots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי ($\left\{f_1\ldots f_{n-k}\right\}$ מערכת משוואות רגולרית)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{U}$ עבורו $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{\left(f_1\cdots f_{n-k}\right)}\left(x\right)\right)=n-k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m-יריעה k-מימדית ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{M}=\left\{\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)=0\right\}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\right\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $\left(0,0,0\right)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma:I\to\left(0,\infty\right)\times\mathbb{R}$ עקומה אזי $f:I\times\left(0,2\pi\right)\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f\left(t,\rho\right)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\cos(\rho)\\ \gamma_1(t)\sin(\rho)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma:I\to\left(0,\infty\right)\times\mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(\gamma\right)$ אזי משפט הסיבוב f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(f\right)$.

טורוס: משטח הסיבוב של $\mathbb{S}^1$.

סימון: נסמן טורוס בעזרת $\mathbb{T}^2$.

משטח אוריינטבילי: משטח $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורו קיימת $N\in C\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n}\right)$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{M}.\left(\left|N\left(x\right)\right|=1\right)\wedge\left(N\left(x\right)\perp x\right)$.

למה: טבעת מוביוס אינו משטח אוריינטבילי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $a\times b=\begin{pmatrix}a_{2}b_{3}-a_{3}b_{2}\\ a_{3}b_{1}-a_{1}b_{3}\\ a_{1}b_{2}-a_{2}b_{1}\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $\left(u\times v\right)\perp v$ וכן $\left(u\times v\right)\perp u$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $\left(u\in\text{span}\left(v\right)\right)\Longleftrightarrow\left(u\times v=0\right)$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $\det\left(u,v,u\times v\right)=\left\Vert u\times v\right\Vert ^{2}\geq0$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^{3}$ אזי $\left|v\times u\right|=\left\Vert v\right\Vert \left\Vert u\right\Vert \sin\left(\angle\left(v,u\right)\right)$.

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ממימד k: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה המקיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן קיים $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם עבורו $f\left(A\right)=f\left(\mathcal{U}\right)\cap\left(\mathbb{R}^{k}\times\left\{ 0_{n-k}\right\} \right)$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קבוצה אזי פרידיקט P עבורו לכל $a\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה P מתקיימת על $A\cap\mathcal{U}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ התב"ש

- $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית.
- $\mathcal{M}$ מקומית גרף של פונקציה $f\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{n}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\left\{ f_{i}\right\} _{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל־$\mathbb{R}^{k}$.

מסקנה: תהא $r:G\to\mathbb{R}^{n}$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a\in G$ קיימת סביבה $W\subseteq\mathbb{R}^{n}$ של $\left(a,0_{n-k}\right)$ וקיים דיפאומורפיזם $s:W\to s\left(W\right)$ עבורו $s_{\restriction_{W\cap\left(G\times0_{n-k}\right)}}=r$.

הערה: יריעה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^{d}$ פתוחה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^{d}$ סגורה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq A$ אזי ($\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־A)$\Longleftrightarrow$($\forall x\in\mathcal{U}.\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\cap A\subseteq\mathcal{U}$).

קבוצה קשירה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל־A מתקיים $\mathcal{U}\in\left\{ A,\varnothing\right\}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ אזי (A קשירה)$\Longleftrightarrow$(לא קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset A$ פתוחות יחסית ל־A עבורן $A\in\left\{ \mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\right\}$).

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{d}$ ותהא $f:A\to B$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\mathcal{U}\subseteq B$ פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי $f^{-1}\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה יחסית ל־A).

מפה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{k}$ הפיכה עבורה $\varphi\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטרזיציה טובה אזי $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$.

אטלס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי קבוצה של מפות $\mathcal{A}$ עבורה $\bigcup\left\{ \mathcal{C}_{1}\mid\mathcal{C}\in\mathcal{A}\right\} =\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $r:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{n}$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\left(r\left(\mathcal{U}\right),r^{-1}\right)$ מפה.

המרחב הפרוייקיבי: יהי $n\geq2$ אזי $\mathbb{RP}^{n}=\left\{ vv^{T}\mid v\in\mathbb{S}^{n}\right\}$.

טענה: יהי $n\geq2$ אזי $\mathbb{RP}^{n}\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^{2}}$ יריעה n מימדית.

העתקת מעבר: תהיינה $\left(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1}\right),\left(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2}\right)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{k}$ המוגדרת $\varphi_{1,2}=\varphi_{2}\circ\varphi_{1}^{-1}$.

טענה: תהיינה $\left(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1}\right),\left(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2}\right)$ מפות ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה אזי $\varphi_{i}\left(\mathcal{U}_{1}\cap\mathcal{U}_{2}\right)$ פתוחה עבור $i\in\left\{ 1,2\right\}$.

טענה: תהיינה $\left(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1}\right),\left(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2}\right)$ מפות ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה אזי $\varphi_{1,2}$ דיפאומורפיזם.

פונקציה C^{α} מיריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^{α}.

הערה: נניח כי $\mathcal{M}$ יריעה C^{α} אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ הינה לכל היותר מדרגת חלקות C^{α}.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\left\{ \left(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha}\right)\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^{α} לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי קיים ל־$\mathcal{M}$ אטלס.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $\dim\left(\mathcal{M}\right)=k$.

פונקציה C^{α} בין יריעות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית ותהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה ℓ-מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ הינה C^{α}.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''\right)$ אזי $g\circ f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}''\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(לכל $p\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ של p עבורה קיימת $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ המקיימת $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$).

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ של $\mathcal{M}$ ולכל מפה $(\mathcal{V},\psi)$ של $\mathcal{M}'$ מתקיים כי $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^{α}).

דיפאומורפיזם C^{α}: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה f הפיכה וכן $f,f^{-1}\in C^{\alpha}$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות דיפאומורפיות אזי $\dim\left(\mathcal{M}\right)=\dim\left(\mathcal{M}'\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהיינה $\left(\mathcal{U},\varphi\right),\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפות באשר $\mathcal{U},\mathcal{V}$ סביבות של p אזי $\text{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)=\text{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)$.

המרחב המשיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\text{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $\dim\left(T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\right)=\dim\left(\mathcal{M}\right)$.

וקטור מהירות: תהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}$.

טענה: תהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}\left(t\right)\in T_{\gamma(t)}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\left\{\dot{\gamma}\left(0\right)\mid\left(\gamma\in C^{1}\left(\left(-\varepsilon,\varepsilon\right),\mathcal{M}\right)\right)\wedge\left(\gamma\left(0\right)=p\right)\right\}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהיינה $\gamma_{1},\gamma_{2}:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ מסילות המקיימות $\gamma_{i}\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma_{i}}\left(0\right)=v$ אזי $\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}\right)\right)\left(0\right)$.

נגזרת של פונקציה בין יריעות: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}f:T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\to T_{f(p)}\left(\mathcal{M}'\right)$ המוגדרת $\left(\mathcal{D}_{p}f\right)\left(v\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma\right)\right)\left(0\right)$ עבור מסילה $\gamma:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma}\left(0\right)=v$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}f$ העתקה לינארית.

משפט כלל השרשרת: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right)=\mathcal{D}_{f(p)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_{p}f\right)\left(v\right)=\mathcal{D}_{p}\left(f\right)\cdot v$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{F=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית עבור סביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\text{span}\left(\left\{\nabla F_{1}\left(p\right),\ldots,\nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\}^{\perp}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_{1}\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_{k}\right)\right\}$ בסיס של $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

הערה: נגדיר את $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_{1}\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}\left(e_{k}\right)\right\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p תהא $\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}'$ באשר $\mathcal{V}$ סביבה של $f\left(p\right)$ אזי $\left[\mathcal{D}_{p}f\right]_{i,j}=\frac{\partial\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)_{i}}{\partial x_{j}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ באשר $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של p וכן $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$ אזי $\mathcal{D}_{p}f=\left(\mathcal{D}_{p}g\right)_{\restriction T_{p}(\mathcal{M})}$.

נגזרת כיוונית: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_{v}f=\mathcal{D}_{p}f\left(v\right)$.

טענה: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה בסביבה של p ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_{v}f=\sum_{i=1}^{k}v_{i}\cdot\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_{i}}$.

טענה: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}=L_{v}f$.

וקטור נורמל: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{0\right\}$ עבורו $v\perp T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

וקטור נורמל יחידה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי וקטור נורמל $v\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{0\right\}$ עבורו $\|v\|=1$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{f=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא Γ_{f} הצגה כגרף בסביבה של p אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1}},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n}},1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^{2}}}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מכפלה מצולבת: יהיו $v_1\dots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי $v_1\times\dots\times v_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\left(-1\right)^{i+1}\det\begin{pmatrix}\left(v_1\right)_1 & \dots & \left(v_{n-1}\right)_1\\ \vdots & & \vdots\\ \left(v_1\right)_{i-1} & \dots & \left(v_{n-1}\right)_{i-1}\\ \left(v_1\right)_{i+1} & \dots & \left(v_{n-1}\right)_{i+1}\\ \vdots & & \vdots\\ \left(v_1\right)_n & \dots & \left(v_{n-1}\right)_n\end{pmatrix}e_i$.

הערה: יהיו $v_1\dots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי בצורה לא פורמלית מתקיים $v_1\times\dots\times v_{n-1}=\det\begin{pmatrix}e_1 & | & & |\\ \vdots & v_1 & \dots & v_{n-1}\\ e_n & | & & |\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1\dots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.

דטרמיננטת גראם: יהיו $v_1\dots v_m\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Gamma\left(v_1\dots v_m\right)=\det\begin{pmatrix}\left\langle v_1,v_1\right\rangle & \dots & \left\langle v_1,v_m\right\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \left\langle v_m,v_1\right\rangle & \dots & \left\langle v_m,v_m\right\rangle\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1\dots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי

- לכל $i\in[n-1]$ מתקיים $v_1\times\dots\times v_{n-1}\perp v_i$.
- $\left\Vert v_1\times\dots\times v_{n-1}\right\Vert=\sqrt{\Gamma\left(v_1\dots v_{n-1}\right)}$.
- $\det\left(v_1\times\dots\times v_{n-1},v_1,\dots,v_{n-1}\right)\geq0$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא r פרמטריזציה בסביבה של p אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}\times\dots\times\frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ וקטור נורמל ל־p.

סימון: תהא $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^k$ אזי $\partial^{\alpha}f=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}\left(f\right)$.

סימון: תהיינה $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^{k}\binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^k$ אזי $\partial^{\alpha}\left(f\cdot g\right)=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^k\\ |\beta|\leq|\alpha|}}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\beta}\left(f\right)\partial^{\alpha-\beta}\left(g\right)$.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $D:C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ לינארית עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ על $\mathcal{M}$ באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית מתקיים $\mathcal{D}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^k\\ |\alpha|\leq m}}a_{\alpha}\left(x\right)\cdot\partial^{\alpha}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן a_{α} חלקות.

שדה וקטורי C^m: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $v:\mathcal{M}\to\bigcup_{p\in\mathcal{M}}T_p\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה $v\left(p\right)\in T_p\left(\mathcal{M}\right)$ וכן לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $x\mapsto\mathcal{D}_x\varphi\left(v\left(x\right)\right)$ העתקה C^m.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי $L_v:C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $L_v\left(f\right)\left(x\right)=L_{v(x)}\left(f\right)$ הינה אופרטור דיפרנציאלי.

תומך: תהא $f\in C\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\mathrm{supp}\left(f\right)=\overline{\left\{x\in\mathcal{M}\mid f\left(x\right)\neq0\right\}}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה אזי $C_C^{\infty}\left(\mathcal{U}\right)=\left\{f\in C^{\infty}\left(\mathcal{U}\right)\mid \text{קומפקטית } \mathrm{supp}\left(f\right)\right\}$.

אופרטור מקומי: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה ולכל $f,g\in C_C^{\infty}$ עבורן $f_{\restriction_{\mathcal{U}}}=g_{\restriction_{\mathcal{U}}}$ מתקיים $L\left(f\right)_{\restriction_{\mathcal{U}}}=L\left(g\right)_{\restriction_{\mathcal{U}}}$.

הגדרה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\Vert f\right\Vert_{W,n}=\sup_{\substack{x\in w\\ |\alpha|\leq n}}\left\Vert\left(\partial^{\alpha}f\right)\left(x\right)\right\Vert$.

טענה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ תהא $x\in\mathcal{W}$ עבורה $\left(\partial^{\alpha}f\right)\left(x\right)=0$ לכל $|\alpha|\leq n$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $\delta\in\left(0,\varepsilon\right)$ וכן $g\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ עבורן

- $g_{\restriction_{B_{\frac{\delta}{2}}(x)}}=0$.
- $g_{\restriction_{\mathcal{W}\backslash B_{\delta}(x)}}=0$.
- $\left\Vert f-g\right\Vert_{W,n}<\varepsilon$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^{k}\binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

משפט פיטרה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ לינארית התב"ש

- L אופרטור מקומי.
- לכל $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ מתקיים $\mathrm{supp}\left(L\left(f\right)\right)\subseteq\mathrm{supp}\left(f\right)$.
- L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $x\in\mathcal{V}$ אזי קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{W}}$ קומפקטית וכן קיים $n\in\mathbb{N}$ וכן $C>0$ עבורם לכל $f\in C_C^{\infty}\left(\mathcal{W}\backslash\left\{x\right\}\right)$ מתקיים $\left\Vert Lf\right\Vert_{\mathcal{W},0}\leq C\left\Vert f\right\Vert_{\mathcal{W},n}$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ פתוחה עבורה קיימים $n\in\mathbb{N}$ וכן $C>0$ עבורם לכל $f\in C_C^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ מתקיים $\left\Vert Lf\right\Vert_{\mathcal{W},0}\leq C\left\Vert f\right\Vert_{\mathcal{W},n}$ אזי L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n.

משפט פירוק יחידה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $\left\{\mathcal{U}_{\alpha}\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח של X אזי קיימות $\left\{\rho_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)$ עבורן

- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\leq\rho_i\leq1$.

- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\text{supp}\left(\rho_{i}\right)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $\left|\left\{ i\in\mathbb{N}\mid\rho_{i}\left(\mathcal{W}\right)\neq0\right\} \right|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}\left(x\right)=1$.

מסקנה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה ויהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי אזי L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $X\subseteq\mathcal{M}$ ויהי $\left\{ \mathcal{U}_{\alpha}\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח ב־$\mathcal{M}$ של X אזי קיימות $\left\{ \rho_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורן

- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le\rho_{i}\le1$.
- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\text{supp}\left(\rho_{i}\right)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\left|\left\{ i\in\mathbb{N}\mid\rho_{i}\left(\mathcal{W}\right)\neq0\right\} \right|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}\left(x\right)=1$.

מקבילון: יהיו $v_{1}\ldots v_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Pi\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{k}t_{i}v_{i}\mid\forall i\in\left[k\right].t_{i}\in\left[0,1\right]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $v_{1}\ldots v_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Vol}_{k}\left(\Pi\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\right)=\sqrt{\Gamma\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)}$.

טענה: יהיו $v_{1}\ldots v_{k}\in\mathbb{R}^{k}$ אזי

- $\text{Vol}_{k}\left(\left(\begin{smallmatrix}v_{1}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right),\ldots,\left(\begin{smallmatrix}v_{k}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right)\right)=\left|\det\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\right|$.
- תהא $T\in O\left(n\right)$ אזי $\text{Vol}_{k}\left(Tv_{1},\ldots,Tv_{k}\right)=\text{Vol}_{k}\left(v_{1},\ldots,v_{k}\right)$.

קבוצה זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $\varphi\left(E\cap\mathcal{U}\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית יהי $\left\{ \left(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha}\right)\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ אטלס של $\mathcal{M}$ ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ אזי (E זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$(לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי $\varphi_{\alpha}\left(E\cap\mathcal{U}_{\alpha}\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^{k}$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהיינה $\left\{ E_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}\right)$ זניחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}$ זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}$.

קבוצת נקודות האי־רציפות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אזי $B_{f}=\left\{ x\in\mathcal{M}\mid x\text{ אינה רציפה על }f\right\}$.

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה

- f חסומה.
- $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטי.
- B_{f} זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן על יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{E}$ אינטגרבילית רימן על $\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי (E מדידה ז'ורדן ב־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$($\varphi\left(E\right)$ מדידה ז'ורדן ב־$\mathbb{R}^{k}$).

פונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית וכן קיימת מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ עבורה $\text{supp}\left(f\right)\subseteq\mathcal{U}$.

קבוצה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $A\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{A}$ נוחה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה $\left\{ \left(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i}\right)\right\}$ של $\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}_{i}$ נוחה לכל $i\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימות $f_{1}\ldots f_{n}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה $r_{i}:G_{i}\to\mathcal{M}$ פרמטריזציות טובות באשר $G_{i}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ וכן $i\in\left\{ 1,2\right\}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי

$$\int_{G_{1}}\left(f\circ r_{1}\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r_{1}\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r_{1}\right)\right)}\text{d}q=\int_{G_{2}}\left(f\circ r_{2}\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r_{2}\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r_{2}\right)\right)}\text{d}q.$$

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r\right)\right)}\text{d}q$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial r}{\partial x_{1}}\ldots\frac{\partial r}{\partial x_{k}}\right)}\text{d}q$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}=\left\{ f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid\left(\text{supp}\left(f\right)\subseteq\mathcal{U}\right)\wedge\left(f\text{ נוחה ואינטגרבילית רימן}\right)\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R_{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\dots f_n,g_1\dots g_m:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^n f_i$ וכן $f=\sum_{i=1}^m g_i$ אזי $\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{M}} f_i=\sum_{i=1}^m\int_{\mathcal{M}} g_i$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\dots f_n:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^n f_i$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f=\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{M}} f_i$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})=\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid \text{אינטגרבילית רימן } f\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R(\mathcal{M})\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f=\int_{\mathcal{M}}\mathrm{dVol}_k$.

מיצוי ז'ורדן של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $(E_i)_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{M})$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\mathcal{M}=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר B_f זניחה אזי אם קיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות סגורות $(E_i)_{i=1}^\infty$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\lim_{i\to\infty}\int_{E_i} f\cdot\mathbb{1}_{E_i}=L$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f=L$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $(E_i)_{i=1}^\infty$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\int_{\mathcal{M}} f=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{M}} f\cdot\mathbb{1}_{E_i}$.

נפח של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\mathrm{Vol}_k(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{M}} 1$.

מפות זרות: מפות $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ עבורן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

טענה: תהיינה $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^n$ מפות זרות בזוגות על $\mathcal{M}$ תהא $S\subseteq\mathcal{M}$ זניחה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\restriction_{\mathcal{M}\setminus(S\cup(\biguplus_{i=1}^n\mathcal{U}_i))}=0$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f=\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{U}_i} f$.

סימון: תהא $\gamma\in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\lim_{m\to\infty}\sup_{a=t_0<\ldots<t_m=b}\sum_{i=1}^m\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_1(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית ותהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Length}(\gamma)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{Length}(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $r,\theta\in C^1(\mathbb{R})$ נגדיר $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ כך $\gamma(t)=(r(t)\cos(\theta(t)),r(t)\sin(\theta(t)))$ אזי $\|\gamma'\|=\sqrt{r^2+r'}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_2(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^3$ יריעה דו־מימדית ותהא $r:G\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה באשר $G\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=\int_G\left|\frac{\partial r}{\partial x_1}(x)\times\frac{\partial r}{\partial x_2}(y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי $\mathrm{Area}(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

טענה: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\det(I+uv^T)=1+\langle u,v\rangle$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k})$ אזי $\mathrm{Vol}_k(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|\nabla f(x)\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k})$ ותהא $\alpha:\Gamma_f\to\mathbb{R}$ באשר $\alpha(x)$ הזווית בין הנורמל של Γ_f בנקודה x לבין ציר e_{k+1} אזי $\sqrt{1+\|\nabla f(x)\|^2}=\frac{1}{\cos(\alpha(x))}$.

משפט ארכימדס: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=2\pi h$.

מסקנה: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=2\pi hR$.

קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ היפר־משטחים מקבילים אזי $P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\max\{d(x,H_1),d(x,H_2)\}\leq d(H_1,H_2)\}$.

רוחב קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ היפר־משטחים אזי $\mathrm{Width}(P_{H_1,H_2})=d(H_1,H_2)$.

רוחב גוף: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\mathrm{Width}(K)=\inf_{\{K\subseteq P\mid \text{קורה } P\}}(\mathrm{Width}(P))$.

משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $\mathrm{Width}(K)\leq\sum_{i=1}^m\mathrm{Width}(P_i)$.

רוחב יחסי של קורה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ותהא P קורה אזי $\mathrm{Width}_K(P)=\inf_{m\in\mathbb{R}_+}\{m\in\mathbb{R}_+\mid\exists a\in\mathbb{R}^n.K\subseteq m\cdot P+a\}$.

השערת באנג: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\leq\sum_{i=1}^m\mathrm{Width}_K(P_i)$. השערה פתוחה

טענה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי עבורו $K=-K$ ויהיו $P_1\dots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^m \mathrm{Width}_K(P_i)$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq 0$ אזי $\varphi^{-1}(t)$ היפר־משטח.

טענה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq 0$ וכן $\varphi(\mathcal{V})=(a,b)$ ותהא $p\in\mathcal{V}$ אזי קיים $\delta>0$ עבורו לכל $f\in R(V_\delta(p))$ באשר $\mathrm{supp}(f)$ קומפקטית מתקיים $\int_{B_\delta(p)}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\mathrm{dVol}_{n-1}(x)\,\mathrm{d}t$.

משפט נוחסאת קו־שטח: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq 0$ וכן $\varphi(\mathcal{V})=(a,b)$ ותהא $f\in R(\mathcal{V})$ באשר $\mathrm{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\mathrm{dVol}_{n-1}(x)\,\mathrm{d}t$.

גרדיאנט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $u\in T_x(\mathcal{M})$ עבורו $\langle u,v\rangle=L_v\varphi(x)$ לכל $v\in T_x(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי הגרדיאנט של φ בנקודה x הוא $\nabla_x\varphi$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של $x\in\mathcal{M}$ ותהא $\psi\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ באשר $\psi_{\restriction\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}=\varphi_{\restriction\mathcal{U}}$ אזי $\nabla_x\varphi=\mathrm{Proj}_{T_x(\mathcal{M})}(\nabla_x\psi)$.

משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq 0$ וכן $\varphi(\mathcal{M})=(a,b)$ ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\mathrm{dVol}_{n-1}(x)\,\mathrm{d}t$.

מסקנה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R}^k)$ באשר $\mathrm{rank}(\mathcal{D}_x\varphi)=k$ ותהא $f\in R(\mathcal{V})$ באשר $\mathrm{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_{\varphi(\mathcal{V})}\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\sqrt{\det\left((\mathcal{D}_x\varphi)\cdot(\mathcal{D}_x\varphi)^T\right)}}\mathrm{dVol}_{n-1}(x)\,\mathrm{d}t$.

טענה: יהי $r>0$ אזי $\mathrm{Vol}_n(r\cdot\mathbb{S}^n)=r^n\cdot\mathrm{Vol}_n(\mathbb{S}^n)$.

טענה שטח פנים של ספרה: $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{M})=\left\{v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k\mid \mathcal{M} \text{ שדה וקטורי } C^\alpha \text{ מעל } v\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה C^α ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}\in\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ ולכל $i\in[k]$ מתקיים כי $\left\langle v(x),\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}(x)\right\rangle$ הינה C^α).

טענה: יהי v שדה וקטורי על $\mathcal{M}$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$($v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k$ הינה C^α).

שדה וקטורי C^m מעל תת־קבוצה: תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ אזי $v:A\to\mathbb{R}^k$ עבורה $v(x)\in T_x(\mathcal{M})$ וכן לכל $p\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ וקיים $u\in\mathfrak{X}^m(\mathcal{U})$ עבורו $u_{\restriction A\cap\mathcal{U}}=v_{\restriction A\cap\mathcal{U}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ ותהא $v:A\to\mathbb{R}^k$ אזי (v שדה וקטורי C^α מעל A)$\Longleftrightarrow$(קיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה ב־$\mathcal{M}$ וקיימת $u\in\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$ עבורה $u_{\restriction\mathcal{U}}=v$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ אזי $\nabla\varphi\in\mathfrak{X}^0(\mathcal{M})$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ על־משטח קשיר אזי ($\mathcal{M}$ בעל 0 אוריינטציות)$\vee$($\mathcal{M}$ בעל 2 אוריינטציות).

שטף: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\mathrm{Flux}_F(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{M}}\langle F(x),N(x)\rangle\,\mathrm{dVol}_{n-1}(x)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהיו $F_1,F_2\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורם F_1,F_2 שדות וקטוריים דרך $\mathcal{M}$ אזי $\mathrm{Flux}_{\alpha F_1+\beta F_2}(\mathcal{M})=\alpha\mathrm{Flux}_{F_1}(\mathcal{M})+\beta\mathrm{Flux}_{F_2}(\mathcal{M})$.

טענה: יהיו $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים זרים עד כדי קבוצה זניחה בעלי אוריינטציה N_1,N_2 בהתאמה ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ אזי $\mathrm{Flux}_F(M_1\cup\mathcal{M}_2)=\mathrm{Flux}_F(\mathcal{M}_1)+\mathrm{Flux}_F(\mathcal{M}_2)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח בעל אוריינטציה N ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\mathrm{Flux}_F(\mathcal{M},N)=\mathrm{Flux}_F(\mathcal{M},-N)$.

דיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{div}(F)(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ נגדיר $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ כך $f(x)=F(x)$ אזי $\mathrm{div}(F)(x)=\mathrm{trace}(\mathcal{D}_x(f))$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $A\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{div}(A\circ F)\left(A^{-1}x\right)=\mathrm{div}(F)(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{div}(f\cdot F)=f\cdot\mathrm{div}(F)+\langle\nabla f,F\rangle$.

לפלסיאן: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f=\mathrm{div}(\nabla f)$.

סימון: תהא $x\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Cube}_\ell(x)=\{Q\subseteq\mathbb{R}^n\mid(x\in Q)\wedge(\text{אורך הצלע של } Q \text{ הוא } \ell)\wedge(\text{קובייה } Q)\}$.

הערה: תהא $x\in\mathbb{R}^n$ ויהי $Q\in\mathrm{Cube}_\ell(x)$ אזי $\mathrm{Flux}_F(\partial Q)=\sum\mathrm{Flux}_F(E_i)$ באשר $\{E_i\}$ פאות Q עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני ל־Q.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{div}(F)(x)=\lim_{\substack{Q\in\mathrm{Cube}_\ell(x)\\ \ell\to 0}}\frac{1}{\mathrm{Vol}_n(Q)}\mathrm{Flux}_F(\partial Q)$.

נקודת שפה חלקה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $x \in \partial\mathcal{U}$ עבורה קיימת $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של x וקיימת $f \in C^1(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ עבורה $\nabla_x f \neq 0$ וכן $f(x) = 0$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U} = \{x \in \partial\mathcal{U} \mid x \text{ נקודת שפה חלקה}\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה תהא $x \in \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ באשר $\mathcal{W}$ סביבה של x המקיימת $\nabla_x f \neq 0$ וכן $f(x) = 0$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\}$ אזי $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x) = (\mathcal{W}, f)$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x \in \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיימת $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של x עבורה $\mathcal{W} \cap \partial\mathcal{U}$ היפר־משטח.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־$\partial\mathcal{U}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ יריעה.

קבוצה חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\partial\mathcal{U} = \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$.

קבוצה בעלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \text{Vol}_n\left((\partial\mathcal{U} \backslash \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) + B_\varepsilon^n(0)\right) = 0$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x \in \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ עבורה $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x) = (\mathcal{W}, f)$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} : \mathcal{W} \cap \partial^{\text{sm}}\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ נורמל יחידה.

אוריינטציה חיצונית קנונית לשפה חלקה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $N : \partial^{\text{sm}}\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ באשר $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x) = (\mathcal{W}, f)$ מתקיים $N_{\restriction_{\mathcal{W} \cap \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

שטף: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ בעלת שפה כמעט חלקה תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\partial\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U}) = \text{Flux}_F(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})$.

למה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N אוריינטציה של $\mathcal{M}$ יהי $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ ותהא $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Flux}_{A \circ F}(A \cdot \mathcal{M}) = \text{Flux}_F(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $a \in \mathbb{R}^n$ יהי $r > 0$ תהא $g \in C^1(B_r(a), \mathbb{R})$ באשר $\frac{\partial g}{\partial x_i} \neq 0$ לכל $i \in [n]$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{R}^n)$ באשר $\text{supp}(F) \subseteq B_r(a)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\{g < 0\}) = \int_{\{g<0\}} \text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) < \infty$ תהא $a \in \partial\mathcal{U} \backslash \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיים $r > 0$ עבורו לכל $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיים $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$ ולכל $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ המקיים $\text{supp}(F) \subseteq B_r(a)$ מתקיים $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה וחלקה תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \text{div}(F)$.

למה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $X + B_\varepsilon(0)$ מדידה ז'ורדן.

למה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית אזי קיים $C \in \mathbb{R}$ עבורו לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ המקיימת

- $0 \leq \psi \leq 1$.
- $\psi_{\restriction_{X + B_\varepsilon(0)}} = 1$.
- $\psi_{\restriction_{\mathbb{R}^n \backslash (X + B_{3\varepsilon}(0))}} = 0$.
- לכל $i \in [n]$ מתקיים $\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right| \leq \frac{C}{\varepsilon}$.

משפט הדיברגנץ: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \text{div}(F)$.

טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) < \infty$ ויהי N נורמל חיצוני ל־$\mathcal{U}$ אזי $\text{Vol}_n(\mathcal{U}) = \frac{1}{n} \int_{\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}} \langle x, N \rangle \, \text{dVol}_{n-1}(x)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$ תהיינה $f, g \in C^1(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\int_{\mathcal{U}} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \cdot g\right) = \int_{\partial\mathcal{U}} (f \cdot g \cdot \langle N, v \rangle) - \int_{\mathcal{U}} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial v}\right)$.

טענה נוסחאות גרין: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $u, v : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ אזי

1. נניח כי u הינה C^2 אזי $\int_G \Delta u = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial N}$.
2. נניח כי v הינה C^2 וכן u הינה C^1 אזי $\int_G \langle \nabla u, \nabla v \rangle = -\int_G u \cdot \Delta v + \int_{\partial G} u \cdot \frac{\partial v}{\partial N}$.
3. נניח כי u, v הן C^2 אזי $\int_G (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) = \int_{\partial G} \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial N} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial N}\right)$.

אנרגיית דיריכלה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ אזי $\int_G \|\nabla v\|^2$.

מסקנה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ אזי $\int_G \|\nabla v\|^2 = -\int_G v \cdot \Delta v + \int_{\partial G} v \cdot \frac{\partial v}{\partial N}$.

פונקציה הרמונית: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $u \in C^2(G, \mathbb{R})$ המקיימת $\Delta u = 0$.

טענה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי

- $\text{Flux}_{\nabla u}\left(\partial G\right)=0$.
- נניח כי $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}}=0$ אזי u קבועה מקומית ב־G.
- נניח כי $u_{\restriction_{\partial G}}$ קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב־G.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\fint_{\mathcal{U}}f=\frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{U})}\int_{\mathcal{U}}f$.

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{B_{r}\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=\fint_{\partial B_{r}(a)}u$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{B_{r}\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=\fint_{B_{r}(a)}u$.

טענה: תהא $f\in C^{2}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Delta f\left(a\right)=\lim_{r\to0}\frac{2n}{r^{2}}\left(\fint_{\partial B_{r}(a)}f-f\left(a\right)\right)$.

מסקנה עקרון המקסימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\max\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

מסקנה עקרון המינמום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\min\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

משפט ליוביל: תהא $u:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי u קבועה.

מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלעיל אזי u קבועה.