קטע/אינטרוול: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$

- $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$.
- $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$.
- $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$.
- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$.
- $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$.
- $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$.
- $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$.
- $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}$.
- $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

שדה סדור: שדה $\mathbb{F}$ ויחס סדר חזק $<$ על $\mathbb{F}$ המקיים

- טריכוטומיה/לינאריות: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\left(x<y\right)\vee\left(x>y\right)\vee\left(x=y\right)$.
- קומפטביליות עם חיבור: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}.x<y\Longrightarrow x+z<y+z$.
- קומפטביליות עם כפל: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\forall z>0_{\mathbb{F}}.x<y\Longrightarrow x\cdot z<y\cdot z$.

תכונת ארכימדס: $\forall x\in\mathbb{F}.\exists n\in\mathbb{N}.x<\sum_{i=0}^{n}1$.

טענה: $\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ארכימדס.

הערך השלם/ערך שלם תחתון: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lfloor x\rfloor=[x]=\max\left(n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\right)$.

הערך השברי: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\{x\}=x-[x]$.

ערך שלם עליון: $\lceil x\rceil=\min\left(n\in\mathbb{Z}\mid x\le n\right)$.

טענה: $\nexists q\in\mathbb{Q}.q^{2}=2$.

טענה: $\nexists x\in\mathbb{Q}.\forall a\in\left\{y\in\mathbb{Q}.y^{2}\le2\right\}.\forall b\in\left\{y\in\mathbb{Q}_{+}\mid y^{2}\ge2\right\}.a\le x\le b$.

חסם מלעיל: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

קבוצת החסמים מלעיל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_{A}=\{x\in\mathbb{R}\mid A$ חסם מלעיל של $x\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\overline{B}_{A}\ne\varnothing$.

חסם מלרע: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

קבוצת החסמים מלרע: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\underline{B}_{A}=\{x\in\mathbb{R}\mid A$ חסם מלרע של $x\}$.

קבוצה חסומה מלרע: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\underline{B}_{A}\ne\varnothing$.

קבוצה חסומה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת (חסומה מלעיל)$\wedge$(חסומה מלרע).

מקסימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

סימון: המקסימום של A הוא $\max\left(A\right)$.

מינימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

סימון: המינימום של A הוא $\min\left(A\right)$.

אקסיומת השלמות: יהיו $\varnothing\ne X,Y\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le y\right)\Longrightarrow\left(\exists c\in\mathbb{R}.\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le c\le y\right)$.

טענה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\overline{B}_{A}\ne\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\min\left(\overline{B}_{A}\right)$.

מסקנה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\underline{B}_{A}\ne\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\max\left(\underline{B}_{A}\right)$.

טענה: $\mathbb{R}$ הוא השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את $\mathbb{Q}$.

סופרמום/חסם עליון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\sup\left(A\right)=\min\left(\overline{B}_{A}\right)$.

אינפימום/חסם תחתון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(A\right)=\max\left(\underline{B}_{A}\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(\exists\max\left(A\right)\Longrightarrow\sup\left(A\right)=\max\left(A\right)\right)\wedge\left(\exists\min\left(A\right)\Longrightarrow\inf\left(A\right)=\min\left(A\right)\right)$.

טענה: יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(a,b\right)=a\wedge\sup\left(a,b\right)=b$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b\in\mathbb{R}$ חסם מלעיל של A התב"ש

- $b=\sup\left(A\right)$.
- $\forall d\in\overline{B}_{A}.b\le d$.
- $\forall a\in\mathbb{R}.a<b\Longrightarrow a\notin\overline{B}_{A}$.

מסקנה: תהא $\varnothing\ne A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\sup\left(A\right)-\varepsilon<a\le\sup\left(A\right)$.

מסקנה: תהא $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $b=\sup(A) \iff (\forall x \in A.x \leq b) \land (\forall \varepsilon > 0.\exists x \in A.x > b-\varepsilon)$.

טענה: תהיינה $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ חסומות

- $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
- $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- $\sup(-A) = -\inf(A)$.

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+.\exists b \in \mathbb{R}_+.b^2 = c$.

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+.\forall n \in \mathbb{N}.\exists b \in \mathbb{R}_+.b^n = c$.

קבוצה צפופה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A \subseteq B$ המקיימת $\forall b \in B.\forall \varepsilon > 0.\exists a \in A.\,|b-a| < \varepsilon$.

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}$ אזי (S צפופה ב־$\mathbb{R}$) $\iff$ ($\forall a,b \in \mathbb{R}.a<b \implies (a,b)\cap S \neq \varnothing$).

טענה: $\forall a,b \in \mathbb{Q}.a<b \implies |(a,b)\cap\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

טענה: $\forall a,b \in \mathbb{Q}.a<b \implies \exists r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.a<r<b$.

טענה: $\forall x,y \in \mathbb{R}.x<y \implies \exists q \in \mathbb{Q}.x<q<y$.

מסקנה: ($\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$)$\land$(לכל $a<b$ מתקיים כי $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$).

עצרת: יהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ (n-1)!\cdot n & else \end{cases}$.

בחר: יהיו $n,k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

זהות פסקל: יהי $n,k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$.

למה: יהיו $a_1 \ldots a_n \geq 0$ המקיימים $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ אזי $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$.

אי־שיוויון הממוצעים: יהיו $a_1 \ldots a_n > 0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$.

טענה: $(a_1 = \ldots = a_n) \iff \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\right)$.

אי־שיוויון ברנולי: $\forall x > -1.\forall n \in \mathbb{N}.\,(1+x)^n \geq 1+nx$.

אי־שיוויון ברנולי המוכלל: $\forall n \in \mathbb{N}.\forall x \in \mathbb{R}^n.\,\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

הערך המוחלט: $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.

טענה: $(|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b) \land (|a| \geq b \iff (b \leq a) \lor (a \leq -b))$.

אי־שיוויון המשולש (אש"מ): יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ אזי $|a+b| \leq |a|+|b|$.

אי־שיוויון המשולש המוכלל: יהיו $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

מסקנה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ אזי $|a-b| \leq |a|+|b|$.

מסקנה: יהיו $x,y,z \in \mathbb{R}$ אזי $|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$.

אי־שיוויון המשולש ההפוך: יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ אזי $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

טענה: $\forall a,b \in \mathbb{R}.\,(\forall \varepsilon > 0.\,|a-b| < \varepsilon) \implies a=b$.

טענה: יהי $r \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

סדרה: $a \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

סימון: תהא a סדרה אזי $a_n = a(n)$, $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$.

הגדרה: תהא a_n סדרה

- סדרה חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n > 0$.
- סדרה אי שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \geq 0$.
- סדרה שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n < 0$.
- סדרה אי חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \leq 0$.

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה

- עולה ממש: $\forall n,m \in \mathbb{N}.n<m \implies a_n < a_m$.
- עולה: $\forall n,m \in \mathbb{N}.n<m \implies a_n \leq a_m$.
- יורדת ממש: $\forall n,m \in \mathbb{N}.n<m \implies a_n > a_m$.

- יורדת: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\Longrightarrow a_{n}\geq a_{m}$.

סדרה חסומה מלעיל: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}<M$.

סדרה חסומה מלרע: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.M<a_{n}$.

סדרה חסומה: (חסומה מלרע)$\wedge$(חסומה מלעיל).

סדרה מתכנסת/גבול סופי: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L)\Longleftrightarrow(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_{n}-L\right|<\varepsilon)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_{n}=L\right)\Longleftrightarrow(a_{n}\to L)$.

טענה: $(\forall r\in\mathbb{R}.\lim_{n\to\infty}r=r)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)$.

טענה: $\left(\forall\alpha\in\mathbb{Q}_{+}.\frac{1}{n^{\alpha}}\to0\right)\wedge\left(\sqrt[n]{n}\to1\right)\wedge\left(\forall c>0.\sqrt[n]{c}\to1\right)\wedge\left(\forall q\in(0,1).q^{n}\to0\right)$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L_{1})\wedge(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L_{2})\Longrightarrow L_{1}=L_{2}$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L)\Longrightarrow(\lim_{n\to\infty}\left|a_{n}\right|=\left|L\right|)$.

טענה: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_{n}=0)\Longleftrightarrow(\lim_{n\to\infty}\left|a_{n}\right|=0)$.

טענה: תהיינה a,b סדרות עבורן $\left|\{n\in\mathbb{N}\mid a_{n}\neq b_{n}\}\right|\in\mathbb{N}$ אזי $(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L)\Longleftrightarrow(\lim_{n\to\infty}b_{n}=L)$.

טענה: תהא a סדרה נגדיר $b_{n+k}=a_{n}$ אזי $(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L)\Longleftrightarrow(\lim_{n\to\infty}b_{n}=L)$.

סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה

- $(\lim_{n\to\infty}a_{n}=\infty)\Longleftrightarrow(\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.M<a_{n})$.
- $(\lim_{n\to\infty}a_{n}=-\infty)\Longleftrightarrow(\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_{n}<-M)$.

טענה: $(\lim_{n\to\infty}n=\infty)\wedge(\forall a>1.\lim_{n\to\infty}a^{n}=\infty)$.

טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_{n}=0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n}}=\infty$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_{n}=L$ אזי a חסומה.

מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.

טענה: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L)\Longleftrightarrow(\forall\varepsilon>0.\left|\{n\in\mathbb{N}\mid a_{n}\notin(L-\varepsilon,L+\varepsilon)\}\right|\in\mathbb{N})$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_{n}=L$ אזי $\forall r\in(0,\left|L\right|).\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_{n}\right|>r$.

סימון: תהא a סדרה מונוטונית

- a יורדת ממש אזי $(a_{n}\to L)\Longleftrightarrow(a_{n}\downarrow L)$.
- a עולה ממש אזי $(a_{n}\to L)\Longleftrightarrow(a_{n}\uparrow L)$.
- a יורדת אזי $(a_{n}\to L)\Longleftrightarrow(a_{n}\searrow L)$.
- a עולה אזי $(a_{n}\to L)\Longleftrightarrow(a_{n}\nearrow L)$.

טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיימות סדרות $a,b\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ עבורן $(a_{n}\searrow x)\wedge(b_{n}\nearrow x)$.

ייצוג עשרוני: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיים $a\in\{0,\ldots,9\}^{\mathbb{Z}}$ המקיים $x=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{i}\cdot10^{-i}$.

פיתוח מחזורי אינסופי: יהיו $d_{1}\ldots d_{n}$ אזי $\overline{d_{1}\ldots d_{n}}=d_{1}\ldots d_{n}d_{1}\ldots d_{n}\ldots$.

טענה: יהי $q\in\mathbb{R}$ אזי $\left(q=a.a_{1}\ldots a_{n}\overline{b_{1}\ldots b_{\ell}}\right)\Longleftrightarrow(q\in\mathbb{Q})$.

משפט אוקלידס: $\mathbb{P}$ חסומה מלרע אך לא מלעיל.

סדרות אוקלידס־מולין: יהי $p_{1}\in\mathbb{P}$ נגדיר $p_{n}\in\left\{p\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_{i}\right)\right\}$.

טענה: עבור $p_{1}=2$ ועבור p_{n} מינימלי לא ידוע אם $\operatorname{Im}(p)=\mathbb{P}$.

משפט דריכלה: $\forall\theta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\left|\left\{\langle p,q\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\mid\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2}}\right\}\right|\geq\aleph_{0}$.

מספר מקורב רע: $a\in\mathbb{R}$ המקיים $\forall p\in\mathbb{Q}.\forall q\in\mathbb{N}.\left(\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2}}\right)\Longrightarrow\left(\exists c\in\mathbb{R}.\frac{c}{q^{2}}<\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\right)$.

חשבון גבולות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהיינה $(a_{n}),(b_{n})$ סדרות המקיימות $(a_{n}\to a)\wedge(b_{n}\to b)$

- $a_{n}+b_{n}\to a+b$.
- $a_{n}\cdot b_{n}\to a\cdot b$.
- $(b\neq0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.b_{n}\neq0)\Longrightarrow\left(\frac{a_{n}}{b_{n}}\to\frac{a}{b}\right)$.

למה: תהא d_{n} סדרה המקיימת $\forall n\in\mathbb{N}.d_{n}\geq0$ אזי $(d_{n}\to d)\Longrightarrow(d\geq0)$.

טענה: תהא a_{n} סדרה אי שלילית המקיימת $a_{n}\to L$ ויהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\sqrt[k]{a_{n}}\to\sqrt[k]{L}$.

סימון: יהיו a_{n},b_{n} סדרות

- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_{n}\leq b_{n})\Longrightarrow(a_{n}\preccurlyeq b_{n})$.
- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_{n}<b_{n})\Longrightarrow(a_{n}\prec b_{n})$.

מונוטוניות גבולות: תהיינה a_n,b_n סדרות מתכנסות אזי $(a_n \preccurlyeq b_n) \implies (\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n)$.

משפט הסנדוויץ': תהיינה a_n,b_n,c_n סדרות המקיימות $a_n \preccurlyeq b_n \preccurlyeq c_n$ אזי $(a_n,c_n \to L) \implies (b_n \to L)$.

טענה: תהא a_n סדרה חסומה ותהא b_n סדרה המקיימת $b_n \to 0$ אזי $a_n b_n \to 0$.

מסקנה: תהא a_n סדרה חסומה אזי $\frac{a_n}{n} \to 0$.

משפט: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\exists b \in B^{\mathbb{N}}.b_n \to \sup(B)$.

מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי $\exists b \in B^{\mathbb{N}}.b_n \to \inf(B)$.

טענה: תהיינה a_n,b_n סדרות

- $(a_n \to \infty) \wedge (a_n \preccurlyeq b_n) \implies (b_n \to \infty)$.
- $(a_n \to -\infty) \wedge (b_n \preccurlyeq a_n) \implies (b_n \to -\infty)$.

מבחן השורש: תהא a_n סדרה אי שלילית אזי $(\exists \alpha \in [0,1).a_n \prec \alpha^n) \implies (a_n \to 0)$.

מבחן השורש הגבולי: יהי $p \in \mathbb{R}$ ותהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n^{\frac{1}{n}} \to p$

- $0 \le p < 1 \implies a_n \to 0$.
- $p > 1 \implies a_n \to \infty$.

סימון: תהא a_n סדרה חסומה מלעיל אזי $(\sup(a_n) = \sup(\operatorname{Im}(a))) \wedge (\inf(a_n) = \inf(\operatorname{Im}(a)))$.

משפט: תהא a_n סדרה

- אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי $a_n \nearrow \sup(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי $a_n \nearrow \infty$.
- אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי $a_n \searrow \inf(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי $a_n \searrow -\infty$.

מבחן המנה הגבולי: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$

- $(L < 1) \implies (a_n \to 0)$.
- $(L > 1) \implies (a_n \to \infty)$.

התכנסות צ'זארו: תהא a_n סדרה אזי $(C)\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n}$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a_n סדרה המקיימת $a_n \to a$ במובן הרחב אזי $(C)\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

משפט התכנסות ממוצע הנדסי: תהא a_n סדרה חיובית המקיימת $a_n \to a$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} a_i} \to a$.

משפט ד'אלאמבר: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to c$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{a_n} \to c$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $a \to L$ במובן הרחב ותהא $t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=1}^{n} t_k \to \infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} t_k} \to L$.

משפט שטולץ: תהא a סדרה ותהא $b \uparrow \infty$ סדרה נניח כי $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \to L$ במובן הרחב אזי $\frac{a_n}{b_n} \to L$.

טענה: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

מסקנה: $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in (2,3]$.

טענה: תהא $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $a_n \to \infty$ אזי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$.

תת סדרה/סדרה חלקית (ת"ס): תהא a סדרה ותהא $n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה אזי $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה

- a חסומה מלעיל $\Longleftarrow$ b חסומה מלעיל.
- a חסומה מלרע $\Longleftarrow$ b חסומה מלרע.
- $a \to L \implies b \to L$.
- a מונוטונית $\Longleftarrow$ b מונוטונית.

טענה: תהא a סדרה המקיימת $\nexists \max(a)$ אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

טענה: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מונוטונית.

הלמה של קנטור על קטעים מקוננים: תהיינה a,b סדרות המקיימות $b-a \to 0$ וגם $\forall n \in \mathbb{N}.(a_n \le b_n) \wedge ([a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n])$ אזי $\left|\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n]\right| = 1$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

סימון: $\mathbb{R}_{\infty} = \mathbb{R} \cup \{\infty,-\infty\}$.

גבול חלקי: תהא a סדרה אזי $x\in\mathbb{R}_\infty$ עבורו קיימת תת סדרה b עבורה $b\to x$ במובן הרחב.

סימון: תהא a סדרה אזי $\mathcal{P}(a)=\{L\in\mathbb{R}\mid L\text{ גבול חלקי של }a\}$, $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\{L\in\mathbb{R}_\infty\mid L\text{ גבול חלקי של }a\}$.

טענה: תהא a סדרה

- a אינה חסומה מלעיל $\iff \infty\in\widehat{\mathcal{P}}$.
- a אינה חסומה מלרע $\iff -\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|>0$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(L\in\mathcal{P})\iff(\forall\varepsilon>0.\left|\{a_n\mid|a_n-L|<\varepsilon\}\right|=\aleph_0)$.

מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי $\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\subseteq[\inf(a),\sup(a)]$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim(\sup(a))=\overline{\lim}(a)=\sup(\mathcal{P})$, $\lim(\inf(a))=\underline{\lim}(a)=\sup(\mathcal{P})$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת) $\iff\left(\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|=1\right)\wedge\left(\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\right)$.

משפט: תהא a סדרה חסומה אזי $\exists\min(\mathcal{P}),\max(\mathcal{P})$.

טענה: יהיו $b_1\ldots b_m\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זרות בזוגות המקיימות $(\bigcup b_i=\mathbb{N})\wedge(b_i\uparrow\infty)$ ותהא a סדרה אזי $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\bigcup_{i=1}^m\widehat{\mathcal{P}}(a_{b_i})$.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A$.

טענה: תהיינה $A_1,A_2,\ldots$ סדרת קבוצות פתוחות אזי ($\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ פתוחה)$\wedge$($\bigcap_{i=1}^n A_i$ פתוחה).

קבוצה סגורה: $B\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\mathbb{R}\backslash B$ פתוחה.

טענה: תהיינה $B_1,B_2,\ldots$ סדרת קבוצות סגורות אזי ($\bigcup_{i=1}^n B_i$ סגורה)$\wedge$($\bigcap_{i=1}^\infty B_i$ סגורה).

נקודת הצטברות: תהא $S\subseteq\mathbb{R}$ אזי $x\in\mathbb{R}$ המקיימת $\exists a\in(S\backslash\{x\})^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n=x$.

טענה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- B קבוצה סגורה.
- $\forall a\in B^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n\in B$.
- $\{x\in\mathbb{R}\mid x\text{ נקודת הצטברות של }B\}\subseteq B$.

משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים $\mathcal{P}(a)$ קבוצה סגורה.

כמעט תמיד: פרידקט $P(n)$ המקיים $\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.P(n)$.

שכיח: פרידקט $P(n)$ המקיים $\left|\{n\in\mathbb{N}\mid P(n)\}\right|=\aleph_0$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\iff(\limsup a=\liminf a)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in[-\infty,\infty]$

- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\leq L)\Longrightarrow(\limsup a\leq L)$.
- $(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\geq L)\Longrightarrow(\limsup a\geq L)$.
- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\geq L)\Longrightarrow(\liminf a\geq L)$.
- $(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\leq L)\Longrightarrow(\liminf a\geq L)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in\mathbb{R}$ התב"ש

- $\limsup a=L$.
- $\forall\varepsilon>0.(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_n<L+\varepsilon)\wedge(\forall\varepsilon>0.\forall N\in\mathbb{N}.\exists n\geq N.a_n>L-\varepsilon)$.

משפט: תהיינה a,b סדרות המקיימות $a_n\precsim b_n$ אזי $(\liminf a\leq\liminf b)\wedge(\limsup a\leq\limsup b)$.

סדרת קושי: סדרה a המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m,n\geq N.|a_m-a_n|<\varepsilon$.

למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\iff$(a סדרת קושי).

סכום אינסופי: יהי $k\in\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{i=k}^\infty a_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^n a_i$.

טור: תהא a סדרה אזי $\sum_{i=0}^\infty a_i$.

סימון: יהי $\sum_{n=0}^\infty a_n$ טור אזי $\sum a_n=\sum_{n=0}^\infty a_n$.

סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרה אזי $S_n^a=\sum_{i=0}^n a_i$.

טור מתכנס: תהא a סדרה אזי $(S_n^a\to L)\Longrightarrow(\sum_{i=0}^\infty a_i=L)$.

טור גאומטרי: יהי $a\neq0$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^\infty ar^n$.

משפט: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum_{n=0}^\infty ar^n$ מתכנס)$\iff(|r|<1)$.

הטור ההרמוני: $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$.

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty$.

משפט: תהא a סדרה אזי ($\sum_{i=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$$(a_n\to0)$.

קריטריון קושי: יהי $\sum a_n$ טור אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$$\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m>N.\forall k\in\mathbb{N}.\left|\sum_{n=m}^{m+k}a_n\right|<\varepsilon\right)$.

חשבון טורים: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ טורים ויהי $\xi\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$

- $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ מתכנס.
- $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\xi a_n$ מתכנס.

הגדרה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור

- טור חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n>0$.
- טור אי שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\geq0$.
- טור שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n<0$.
- טור אי חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\leq0$.

טור מתכנס בהחלט: טור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ המקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|$ מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור מתכנס בהחלט אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס.

סימון: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים חיוביים עבורם ממקום מסויים $a_n\leq b_n$ אזי $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$.

משפט ההשוואה: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים המקיימים $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$

- ($\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר).

מבחן ההשוואה הגבולי: יהיו a_n,b_n סדרות חיוביות המקיימות $\frac{a_n}{b_n}\to L$ במובן הרחב

- $L\in(0,\infty)\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\Longleftrightarrow\sum a_n<\infty\right)$.
- $L=0\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\Longrightarrow\sum a_n<\infty\right)$.
- $L=\infty\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\Longleftarrow\sum a_n<\infty\right)$.

מבחן השורש: יהי $\sum a_n$ טור אי שלילי (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $a_n^{\frac{1}{n}}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתכנס).

מבחן השורש הגבולי: יהי $\sum a_n$ טור חיובי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow$$\left(\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)<1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longrightarrow$$\left(\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)>1\right)$.

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי

- (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתכנס).
- (כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq1$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתבדר).

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow$$\left(\lim\left(\sup\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)<1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longrightarrow$$\left(\lim\left(\inf\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)>1\right)$.

משפט העיבוי: תהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$($\sum2^na_{2^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $m\geq2$ ותהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$($\sum m^na_{m^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum\frac{1}{n^x}$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$$(x>1)$.

משפט לייבניץ: תהא $a_n\searrow0$ אזי $\sum\left(-1\right)^na_n$ מתכנס.

טור מתכנס בתנאי: טור $\sum a_n$ מתכנס המקיים $\sum\left|a_n\right|$ מתבדר.

טענה: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=m}^{n}a_k\left(b_{k+1}-b_k\right)=\left(a_nb_{n+1}-a_mb_m\right)-\sum_{k=m+1}^{n}b_k\left(a_k-a_{k-1}\right)$.

התמרת אבל: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m\left(b_k-b_{k+1}\right)$.

קריטריון דריכלה: תהא $b\to0$ סדרה מונוטונית ותהא a סדרה עבורה S_n^a חסומה אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

קריטריון אבל: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

משפט: $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}=\infty$.

משפט: יהי $\sum a_n=L$ טור ותהא $b\underset{b_0=0}{\in}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}a_k=L$.

למה: תהא a סדרה ותהא $b\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש עבורה $b_0=0$ וכן $\left(a_i\right)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1}$ בעלי אותו סימן וגם $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}a_k=L$ אזי $\sum a_n=L$.

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתכנס ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

סימון: תהא a_n סדרה אזי $\left(a_n^+ = \frac{|a_n|+a_n}{2}\right) \wedge \left(a_n^- = \frac{|a_n|-a_n}{2}\right)$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בהחלט)$\Longleftrightarrow$($\sum a_n^+$ מתכנס)$\wedge$($\sum a_n^-$ מתכנס).

משפט: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בתנאי)$\Longrightarrow \left(\sum a_n^+ = \infty = \sum a_n^-\right)$.

משפט רימן: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי $\forall S \in [-\infty, \infty] . \exists \sigma \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{N} . \sum a_{\sigma(n)} = S$.

טענה: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי קיים $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג עבורו $\nexists \sum a_{\sigma(n)}$.

משפט קושי: יהיו $p, q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט אזי $\sum \sum a_{p(n)} b_{q(k)} = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.

טור חזקות: תהא a_n סדרה ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k \left(x - x_0\right)^k$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט עבור $x \in (-|q|, |q|)$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס בהחלט} & x \in (-R, R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R, R] \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0, \infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי$\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty \Longrightarrow R = 0\right) \wedge \left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0 \Longrightarrow R = \infty\right)$.

מכפלת קושי: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות אזי $\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$.

טענה: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות המתכנסים עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ מתכנס עבור q.

התכנסות צ'זארו: יהי $\sum a_n$ טור אזי $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n}$.

טענה: יהי $\sum a_n$ טור אזי $\sum_{i=0}^{n-1} a_n \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n}$.

פונקציה מונוטונית: תהא $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

- עולה ממש: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- עולה: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
- יורדת ממש: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.
- יורדת: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי x^n מונוטונית עולה ממש בקטע $[0, \infty)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left(f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}\right) \Longleftarrow \left(f(x) = x^n\right)$.

טענה: יהיו $n, m, k, \ell \in \mathbb{N}$ המקיימים $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell}$ אזי $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x^k\right)^{\frac{1}{\ell}}$.

טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהיינה $a, b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימות $a_n, b_n \searrow b$ אזי $\lim\left(c^{a_n}\right) = \lim\left(c^{b_n}\right)$.

הגדרה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ יהי $b \in \mathbb{R}$ ותהא $b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $b_n \searrow b$

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.
- $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$.
- $a^b = \lim a^{b_n}$.

פונקציית החזקה: יהי $\alpha > 0$ נגדיר $f \in [0, \infty)^{[0, \infty)}$ כך $f(x) = x^{\alpha}$.

פונקציית החזקה: יהי $\alpha < 0$ נגדיר $f \in (0, \infty)^{(0, \infty)}$ כך $f(x) = x^{\alpha}$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

משפט: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\left(x^a x^b = x^{a+b}\right) \wedge \left(\left(x^a\right)^b = x^{ab}\right) \wedge \left((yx)^a = y^a x^a\right)$.

טענה: יהי $x > 1$ ויהיו $0 < r < \ell$ אזי $x^r < x^{\ell}$.

טענה: יהי $0 < x < 1$ ויהיו $0 < r < \ell$ אזי $x^r > x^{\ell}$.

הפונקציה המעריכית: יהי $0 < \alpha \neq 1$ נגדיר $f \in (0, \infty)^{\mathbb{R}}$ כך $f(x) = a^x$.

סינוס: נגדיר $\sin : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ בתור היחס בין הצלע ממול הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

סינוס: $\forall k \in \mathbb{N} . \sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$

קוסינוס: נגדיר $\cos : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ בתור היחס בין הצלע ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

קוסינוס: $\forall k \in \mathbb{N} . \cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$

טנגנס: נגדיר $\tan : \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ כך $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

קוטנגנס: נגדיר $\cot:\mathbb{R}\backslash\left\{ \pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\} \to\mathbb{R}$ כך $\tan\left(x\right)=\frac{\cos\left(x\right)}{\sin\left(x\right)}$.

טענה: זהויות טריגונומטריות.

הגדרה: $\left(\arcsin=\sin^{-1}\right)\wedge\left(\arccos=\cos^{-1}\right)\wedge\left(\arctan=\tan^{-1}\right)\wedge\left(\text{arccot}=\cot^{-1}\right)$.

לוגריתם: יהי $a>0$ נסמן $f\left(x\right)=a^{x}$ אזי $\left(f\right)^{-1}=\log_{a}$.

סימון (הלוגריתם הטבעי): $\ln=\log_{e}$.

טענה: זהויות לוגרתמיות.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\exists a\in\mathbb{R}_{+}.f\left(x+a\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה זוגית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה אי־זוגית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

קטע מנוקב/סביבה: יהי $\delta>0$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $I_{x}=\left(x-\delta,x+\delta\right)\backslash\left\{ x\right\}$.

פונקציה מתכנסת/גבול סופי: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימות $a<x_{0}<b$ תהא $f:A\to\mathbb{R}$

- בנקודה: $A=I_{x_{0}}$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי מימין: $A=\left(x_{0},b\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(x_{0},\min\left\{ x_{0}+\delta,b\right\} \right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\downarrow x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי משמאל: $A=\left(a,x_{0}\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(\max\left\{ x_{0}-\delta,a\right\} ,x_{0}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\uparrow x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- באינסוף: $A=\left(a,\infty\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\geq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to\infty\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to\infty\right)\right)$.
- במינוס אינסוף: $A=\left(-\infty,b\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\leq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to-\infty\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to-\infty\right)\right)$.

פונקציה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימות $a<x_{0}<b$

- בנקודה: תהא $f:I_{x_{0}}\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=-\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.f\left(x\right)<-M\right)$.
- חד צדדי מימין: תהא $f:\left(x_{0},b\right)\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0},\min\left\{ x_{0}+\delta,b\right\} \right).f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=-\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0},\min\left\{ x_{0}+\delta,b\right\} \right).f\left(x\right)<-M\right)$.
- חד צדדי משמאל: תהא $f:\left(a,x_{0}\right)\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(\max\left\{ x_{0}-\delta,a\right\} ,x_{0}\right).f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=-\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(\max\left\{ x_{0}-\delta,a\right\} ,x_{0}\right).f\left(x\right)<-M\right)$.
- באינסוף: תהא $f:\left(a,\infty\right)\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\geq\delta.f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\geq\delta.f\left(x\right)<-M\right)$.
- במינוס אינסוף: תהא $f:\left(-\infty,b\right)\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\leq\delta.f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\leq\delta.f\left(x\right)<-M\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A^{\pm}=A\cup\left\{ x_{0}^{+}\mid x_{0}\in A\right\} \cup\left\{ x_{0}^{-}\mid x_{0}\in A\right\}$.

סימון: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}_{\infty}^{\pm}$ ותהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(f\left(x\right)\xrightarrow[x\to x_{0}]{}L\right)$ במובן הרחב.

משפט: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $(\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1)\wedge(\lim_{x\to x_0} f(x)=L_2)\Longrightarrow(L_1=L_2)$.

טענה: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)\iff(\lim_{x\to x_0} f(x)=L)$.

פונקציית דריכלה: $D(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

חשבון גבולות: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}_{\infty}$ ויהיו $f,g:I_{x_0}\to\mathbb{R}$

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$.
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x)$.

למה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}_{\infty}$ אזי $\lim_{x\to x_0} x=x_0$.

מסקנה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}$ ויהי $p\in\mathbb{R}[x]$ אזי $\lim_{x\to x_0} p(x)=p(x_0)$.

משפט: יהיו $x_0,y_0\in\mathbb{R}^{\pm}_{\infty}$ ותהיינה $g\in\mathbb{R}^{I_{y_0}}$ וכן $f\in I_{y_0}^{I_{x_0}}$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=\lim\limits_{x\to y_0} g(x)$.

טענה: יהיו $x_0,y_0\in\mathbb{R}^{\pm}_{\infty}$ ותהיינה $g,f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g\left(\lim\limits_{x\to y_0} f(x)\right)$.

פונקציה אלמנטרית: הרכבה/סכום/כפל/הופכית של $\left(\bigcup\{\{\log_a(x),a^x\}\mid a>0\}\right)\cup\mathbb{R}[x]\cup\{\sin,\cos\}\cup\{x^a\mid a\in\mathbb{R}\}$.

טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי $\forall a\in\text{Dom}(f).\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

משפט: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $|\sin(x)|\le|x|$.

למה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}$ אזי $\lim_{x\to x_0}\cos(x)=\cos(x_0)$.

מסקנה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}$ אזי $\lim_{x\to x_0}\sin(x)=\sin(x_0)$.

סימון: יהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ המקיימות $\forall x\in I.f(x)\le g(x)$ אזי $f(x)\preccurlyeq g(x)$.

מונוטוניות גבולות: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}_{\infty}$ ותהיינה $f,g:\mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x)\preccurlyeq g(x)$ אזי $\lim_{x\to x_0} f(x)\le\lim_{x\to x_0} g(x)$.

כלל הסנדוויץ': יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}_{\infty}$ ותהיינה $f,g,h:\mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x)\preccurlyeq g(x)\preccurlyeq h(x)$ אזי $\left(f(x),h(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L\right)\Longrightarrow\left(g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L\right)$ במובן הרחב.

למה: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$

- רציפות בנקודה: $x_0\in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית מימין בנקודה: $x_0\in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית משמאל בנקודה: $x_0\in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

פונקציה רציפה: $f:I\to\mathbb{R}$ המקיימת

- קושי: $\forall x_0\in I.\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- היינה: $\forall x_0\in I.\forall y\in I^{\mathbb{N}}.(y_n\to x_0)\Longrightarrow(\lim_{n\to\infty} f(y_n)=f(x_0))$.

פתוחה יחסית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $B\subseteq A$ המקיימת $\forall x\in B.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A\subseteq B$.

משפט: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על I)$\iff$(לכל $B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה $f^{-1}[B]$ פתוחה יחסית אל I).

טענה: תהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ותהא $c\in(a,b)$ אזי (f רציפה על a)$\iff$($f_{\restriction_{(a,c]}}$ רציפה על c)$\wedge$($f_{\restriction_{[c,b)}}$ רציפה על c).

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $C(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\mid \text{רציפה על } I\ f\right\}$.

טענה: תהא $f\in C((a,b))$ רציפה מונוטונית עולה

- ($f[(a,b)]$ חסומה מלעיל)$\Longleftarrow(\lim_{x\to b^-} f(x)=\sup f[(a,b)])$.
- ($f[(a,b)]$ אינה חסומה מלעיל)$\Longleftarrow(\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty)$.
- ($f[(a,b)]$ חסומה מלרע)$\Longleftarrow(\lim_{x\to b^-} f(x)=\inf f[(a,b)])$.
- ($f[(a,b)]$ חסומה אינה מלרע)$\Longleftarrow(\lim_{x\to b^-} f(x)=-\infty)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה על x_0 המקיימת $f(x_0)>0$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $\forall x\in I.f(x)>0$.

מסקנה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפות על x_0 המקיימות $f(x_0)>g(x_0)$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $\forall x\in I.f(x)>g(x)$.

טענה: יהיו $f,g\in C(\mathbb{R})$ אזי $(\forall q\in\mathbb{Q}.f(q)=g(q))\Longrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}.f(x)=g(x))$.

נקודת אי־רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $x_0\in I$ המקיימת

- סליקה: $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.
- סוג ראשון/קפיצה: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

- סוג שני: $\left(\nexists\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)\right)\vee\left(\nexists\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)\right)$.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על x_0)$\iff\left(\forall y\in\mathbb{N}^I.\left(y_n\to x_0\right)\implies\left(\lim f\left(y_n\right)\in\mathbb{R}\right)\right)$.

פונקציית רימן: $R\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \exists p,q\in\mathbb{Z}.\left(\gcd\left(p,q\right)=1\right)\wedge\left(x=\frac{p}{q}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

טענה: $\left(\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}R\left(x\right)=0\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.R\left(x\right)=R\left(x+1\right)\right)$.

חשבון רציפות: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}$ ויהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ רציפות על x_0 אזי $f+g,f\cdot g,f^g$ רציפות על x_0.

טענה: תהא $f:A\to B$ רציפה על x_0 וכן $g:B\to C$ רציפה על $f\left(x_0\right)$ אזי $g\circ f$ רציפה על x_0.

מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה וכן $g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\lim_{x\to x_0}f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\lim_{x\to x_0}g\left(x\right)\right)$.

פונקציה רציונאלית: יהיו $p,q\in\mathbb{R}\left[x\right]$ אזי $\frac{p}{q}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי כמות נקודות האי־רציפות לכל היותר בת מנייה.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)\implies\left(\exists x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\right)$.

משפט ויירשטראס הראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

משפט ויירשטראס השני: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\exists\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)$.

משפט ערך הביניים: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\forall y\in\left(\min\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right),\max\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right)\right).\exists c\in\left(a,b\right).f\left(c\right)=y$.

למה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$ אזי $\exists\zeta\in\left[a,b\right].f\left(\zeta\right)=0$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\left(\left[a,b\right]\right)=\left[\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)\right]$.

קטע מוכלל: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x,y\in A.\forall\lambda\in\left[0,1\right].\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\in A$.

למה: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ חח"ע אזי f מונוטונית ממש.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\wedge\left(f^{-1}\in C\left(f\left(I\right)\right)\right)$.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\iff\left(f\in C\left(I\right)\right)$.

מסקנה: יהי $a>0$ אזי $x^a,a^x\in C\left(\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $a_n\to a>0$ סדרה חיובית וכן $b_n\to b$ סדרה אזי $a_n^{b_n}\to a^b$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{odd}$ ויהי $p\in\mathbb{R}_n\left[x\right]\backslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ אזי $\exists\zeta\in\mathbb{R}.p\left(\zeta\right)=0$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{I_n\right\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $\left[a,b\right]$ קומפקטית.

פונקציה רציפה במידה שווה (במ"ש): $f\in\mathbb{R}^A$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A.\forall y\in\left(x-\delta,x+\delta\right).\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ רציפה במ"ש אזי f רציפה.

תנאי ליפשיץ: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ עבורה $\exists M>0.\forall x,y\in A.\left|\frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{x-y}\right|<M$ אזי f רציפה במ"ש.

משפט קנטור: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f רציפה במ"ש על $\left[a,b\right]$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ רציפה במ"ש על $\left(a,b\right],\left[c,d\right)$ אזי f רציפה במ"ש על $\left(a,d\right)$.

פרה־קומפקטיות: תהא $D\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^D$ רציפה במ"ש אזי $\forall x\in D^{\mathbb{N}}.\left(\lim_{n\to\infty}x_n\in\mathbb{R}\right)\implies\left(\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)\in\mathbb{R}\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right]\right)$ אזי (f רציפה במ"ש)$\iff\left(\lim_{x\to a^+}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right)\right)$ אזי (f רציפה במ"ש)$\iff\left(\lim_{x\to a^+}f\left(x\right),\lim_{x\to b^-}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[a,\infty\right)\right)$ המקיימת $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי f רציפה במ"ש על $\left[a,\infty\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ רציפה במ"ש אזי f חסומה.

מודולוס הרציפות: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\omega_f\left(\delta\right)=\sup\left\{\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\mid\left(x_1,x_2\in I\right)\wedge\left(\left|x_1-x_2\right|<\delta\right)\right\}$.

גזירות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$

- נגזרת בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית מימין בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'_+\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית משמאל בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'_-\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$ אזי $f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$.

נגזרת: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $f':I\to\mathbb{R}$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\frac{df}{dx}\left(x\right)=\frac{d}{dx}f\left(x\right)=f'\left(x\right)$.

טענה: יהי חלקיק ותהיינה $x,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי $x'(t)=v(t)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I^{\pm}$ אזי (f גזירה בנקודה x_0)$\Longleftarrow$(f רציפה בנקודה x_0).

קירוב בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I$ אזי $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]\backslash\mathbb{R}_{n-1}[x]$ המקיימת $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

סדר הקירוב: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ויהי $p(x)$ קירוב בנקודה x_0 אזי $\deg(p)$.

דיפרנציאבילית בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $x_0\in I$ עבורה (f רציפה על x_0)$\wedge$(קיים קירוב מסדר ראשון של f בנקודה x_0).

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I$ אזי (f דיפרנציאבילית בנקודה x_0)$\Longleftrightarrow$(f גזירה בנקודה x_0).

חשבון גזירות: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ גזירות בנקודה x_0

- $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.
- $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
- $(g(x_0)\neq0)\Longrightarrow\left(\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right)$.

משפט: תהא $x_0\in I$ ותהא $f\in C(I)$ מונוטונית חזק גזירה על $f^{-1}(y_0)$ אזי $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

מסקנה: $\tan'=\frac{1}{\cos^2}$, $(e^x)'=e^x$, $(x^r)'=rx^{r-1}$, $\arctan'=\frac{1}{1+x^2}$.

כלל השרשרת: תהא $x_0\in I$ תהא $f\in C(I)$ גזירה על x_0 וכן $g\in C(f(I))$ גזירה על $f(x_0)$ אזי $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

נגזרת מסדר גבוה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה אזי $\left(f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'\right)\wedge\left(f^{(0)}=f\right)$.

הפרש דיסקרטי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $(\Delta f)(x)=f(x+1)-f(x)$.

הגדרה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\Delta^{(k+1)}f=\Delta\left(\Delta^{(k)}f\right)\right)\wedge\left(\Delta^{(0)}f=\Delta f\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה עבורה f' רציפה.

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(C^0(I)=C(I)\right)\wedge\left(C^n(I)=\left\{f\in C^{n-1}(I)\mid f \text{ גזירה ברציפות}\right\}\right)$.

פונקציה חלקה: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $f\in C^{\infty}(I)=\bigcap_{n=0}^{\infty}C^n(I)$.

כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ גזירות אזי $(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$.

נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא $f\in\mathbb{R}^I$

- מקסימום: $x_0\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f(x)\le f(x_0)$.
- מינימום: $x_0\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f(x_0)\le f(x)$.

משפט פרמה: תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) ותהא $x_0\in(a,b)$ נקודת קיצון אזי $f'(x_0)=0$.

משפט רול: תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) המקיימת $f(a)=f(b)$ אזי $\exists c\in(a,b).f'(c)=0$.

משפט לגרנז': תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) אזי $\exists c\in(a,b).f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה אזי (f' חסומה)$\Longleftarrow$(f רציפה במ"ש).

טענה: $\forall x>0.e^x>1+x$.

טענה: $\forall x,y\in\mathbb{R}.\ |\sin(x)-\sin(y)|\le|x-y|$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f'(x)=0$ אזי $\exists a\in\mathbb{R}.f(x)=a$.

מסקנה: תהיינה $g,h\in\mathbb{R}^I$ המקיימות $g'=h'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.g=h+c$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $f=f'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.f(x)=e^x$.

משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה $f,g\in C([a,b])$ גזירות על (a,b) אזי $\exists x_0\in(a,b).\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'(x)>0$ אזי f עולה ממש.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'(x)<0$ אזי f יורדת ממש.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה פעמיים על $x_0\in I$ ומתקיים $f'(x_0)=0$

- אם $f''(x_0)>0$ אזי x_0 מינימום מקומי של f.
- אם $f''(x_0)<0$ אזי x_0 מקסימום מקומי של f.

משפט: תהא $f\in C([a,b))$ גזירה על (a,b) המקיימת $\lim_{x\to a^+}f'(x)\in\mathbb{R}$ אזי $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}f'(x)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה ברציפות אזי $f'(x_0)>0\Longrightarrow\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f'(x)>0$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה אזי ($f'_+(a)<0$ גורר a לא מינימום מקומי)$\wedge$($f'_-(b)>0$ גורר b לא מקסימום מקומי).

משפט דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה אזי $\forall y\in(\min(f'(a),f'(b)),\max(f'(a),f'(b))).\exists c\in(a,b).f'(c)=y$.

כלל לופיטל: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ גזירות ותהא $x\in I_{\infty}^{\pm}$ נניח כי $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מתכנס במובן הרחב

- $\left(\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.
- $\left(\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.

אי־שיוויון יאנג: יהיו $x,y>0$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ מתקיים $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\ge xy$.

אי־שיוויון הולדר: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי $\sum_{i=1}^n |x_iy_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

אי־שיוויון מינקובסקי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי
$\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא $f,g\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I^\pm$
- $f\in O(g) \iff \left(\exists c>0.\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).|f(x)|\le c|g(x)|\right)$. אינטואיטיבית $f\le g$
- $f\in\Omega(g) \iff (g\in O(f))$. אינטואיטיבית $f\ge g$
- $f\in o(g) \iff \left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0\right)$. אינטואיטיבית $f<g$
- $f\in\omega(g) \iff (g\in o(f))$. אינטואיטיבית $f>g$
- $f\in\Theta(g) \iff (f\in O(g)\land f\in\Omega(g))$. אינטואיטיבית $f=g$
- $f\sim g \iff \left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1\right)$. אינטואיטיבית $f=g$ בדיוק של קבועים

למה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I$ אזי $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to x_0]{} c\neq 0\right)\Longrightarrow f\in\Theta(g)$.

מזדהה עד סדר: $f,g\in\mathbb{R}^I$ גזירות n פעמים על x_0 המקיימות $\forall k\in\{0\ldots n\}.f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ מזדהות עד סדר n על x_0 אזי $f-g\in o\left((x-x_0)^n\right)$.

מסקנה: תהא $h\in\mathbb{R}^I$ רציפה על x_0 וכן $h\in o\left((x-x_0)^n\right)$ אזי (h גזירה n פעמים על x_0)$\land$($h^{(k)}(x_0)=0$).

פולינום טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $p\in\mathbb{R}_n[x]\backslash\mathbb{R}_{n-1}[x]$ שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\left((x-x_0)^k\right)^{(j)}(x_0)=\begin{cases} j! & j=k \\ 0 & else\end{cases}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי פולינום הטיילור הוא $P_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

שארית: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$.

משפט פאנו: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x)\in o\left(|x-x_0|^n\right)$.

למה: תהא $g\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים המקיימת $g^{(k)}(x_0)=0$. $\forall k\in\{0\ldots n\}$ אזי
$\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).g(x)=\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

משפט השארית של לגרנז': תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי
$\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ אזי $\forall x\in(a,b).\left(\exists M\in\mathbb{R}.\forall k\in\mathbb{N}.\left|f^{(k)}(x)\right|<M\right)\Longrightarrow\left(R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ עבורה $\forall x\in(a,b).R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ אזי $f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ ותהא a סדרה המקיימת $\forall x\in(a,b).\left|f^{(m)}(x)\right|<a_m$ אזי
$\forall c\in\mathbb{R}.\left(\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m!}c^m=0\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in[x_0-c,x_0+c].f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$

מסקנה: $\left(\cos(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\land\left(\sin(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\land\left(e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}\right)$.

מסקנה: $e\notin\mathbb{Q}$.

משפט השארית של קושי: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי
$\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$.

מסקנה: יהי $|x|<1$ אזי $\arctan(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}((a,b))$ המקיימת $f^{(k)}(x_0)=0$. $\forall k\in\{0\ldots n\}$ וכן $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$
- $n\in\mathbb{N}_{even}$ אזי x_0 אינה נקודת קיצון של f.
- $n\in\mathbb{N}_{odd}$
  - $f^{(n+1)}(x_0)>0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.
  - $f^{(n+1)}(x_0)<0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.

פונקציה קמורה: $f\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in\left[0,1\right].f\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right)\le\alpha f\left(x\right)+\left(1-\alpha\right)f\left(y\right)$.

פונקציה קעורה: $f\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in\left[0,1\right].f\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right)\ge\alpha f\left(x\right)+\left(1-\alpha\right)f\left(y\right)$.

נקודת פיתול: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי x_{0} המקיימת (f קעורה מאחד מצדדיה)$\wedge$(f קמורה מאחד מצדדיה).

משפט שלושת המיתרים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ קמורה אזי לכל $x_{1}<x_{2}<x_{3}$ מתקיים $\frac{f(x_{2})-f(x_{1})}{x_{2}-x_{1}}\le\frac{f(x_{3})-f(x_{1})}{x_{3}-x_{1}}\le\frac{f(x_{3})-f(x_{2})}{x_{3}-x_{2}}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה פעמיים

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''\left(x\right)>0$ אזי f קמורה.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''\left(x\right)<0$ אזי f קעורה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $f\in C\left(\left(a,b\right)\right)$.

פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ לכל $x\in\left(a,b\right)$ ומקיימת $F'_{+}\left(a\right)=f\left(a\right)$ וכן $F'_{-}\left(b\right)=f\left(b\right)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\int f=\left\{ F\in\mathbb{R}^{I}\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $\left(G'=f\right)\iff\left(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c\right)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int\left(f+g\right)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int\left(\alpha f\right)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int\left(\left(f\circ g\right)\cdot g'\right)$.

חלוקה: יהי $\left[a,b\right]$ אזי $\Pi=\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ המקיימות $a=x_{0}<x_{1}\ldots<x_{n-1}<x_{n}=b$.

סימון: תהא $\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\Delta x_{i}=x_{i}-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i=1}^{n}\left|\Delta x_{i}\right|$.

עידון: תהא Π_{1} חלוקה אזי חלוקה Π_{2} המקיימת $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$.

טענה: תהא Π_{1} חלוקה וכן Π_{2} עידון אזי $\lambda\left(\Pi_{2}\right)\le\lambda\left(\Pi_{1}\right)$.

נקודות מתאימות: תהא $\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\left\{ t_{1}\ldots t_{n}\right\}$ המקיימות $\forall i\in\left\{ 1\ldots n\right\} .t_{i}\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{ t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)=\sum f\left(t_{i}\right)\Delta x_{i}$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\left\{ t_{i}\right\}$ מתקיים $\left|S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)-L\right|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_{a}^{b}f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_{a}^{b}f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{a}^{b}f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R\left(\left[a,b\right]\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid f\text{ אינטגרבילית רימן}\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_{a}^{b}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{ t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_{a}^{b}c\cdot\mathrm{d}t=c\left(b-a\right)$.

טענה: $D\left(x\right)\notin R\left(\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i},x_{i-1}]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i},x_{i-1}]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sup_{\left\{ t_{i}\right\} \text{נקודות מתאימות}}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\inf_{\left\{ t_{i}\right\} \text{נקודות מתאימות}}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \geq \overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \leq \underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f) = \inf_{\text{חלוקה } \Pi} \overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f) = \sup_{\text{חלוקה } \Pi} \underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f \in R([a,b])) \Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$).

מסקנה: תהא $f \in R([a,b])$ חסומה אזי $\int_a^b f = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.

תנודה: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f,J) = \sup_{x,y\in J}(f(x) - f(y))$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0 \in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\Longleftrightarrow (\lim_{\delta\to 0} \omega(f,[x_0-\delta,x_0+\delta]) = 0)$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow (\forall I \subseteq J.\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > \text{len}(I).\omega(f,I) < \varepsilon)$.

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi) = \sum_{i=1}^n \omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi) = \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \cup \{p\} = \Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) + \lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \geq \underline{\Sigma}(f,\Pi_2) - \lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \cup \{p_1 \dots p_m\} = \Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) + m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \geq \underline{\Sigma}(f,\Pi_2) - m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}(f,\Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \underline{\Sigma}(f,\Pi) + \varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi) \geq \overline{I}(f) \geq \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \varepsilon$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ אזי $f \in R([a,b])$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f \in R([a,b])) \Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$).

משפט: $C([a,b]) \subseteq R([a,b])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f \in R([a,b])$.

סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b \in [a,c]$ עבורה $f_{\restriction_{[a,b]}} \in R([a,b])$ אזי $f \in R([a,b])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b \in [a,c]$ עבורה $(f \in R([a,b])) \wedge (f \in R([b,c]))$ אזי $f \in R([a,c])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b < c \in [a,d]$ עבורה $f \in R([a,d])$ אזי $f \in R([b,c])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b \in (a,c).f \in R([a,b])$ אזי $f \in R([a,c])$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b \in (a,c).f \in R([b,c])$ אזי $f \in R([a,c])$.

טענה: תהא $f \in R([a,c])$ נגדיר $g(x) = \begin{cases} y & x = b \\ f)x(& \text{else} \end{cases}$ אזי $g \in R([a,c])$.

מסקנה: נגדיר $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אזי $f \in R([-1,1])$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f \in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f,g \in R([a,b])$ תהא $H \in C(\mathbb{R})$ וכן $c \in \mathbb{R}$

- $(f+g),(cf) \in R([a,b])$.
- $(f\cdot g),(H\circ f),|f| \in R([a,b])$.

קבוצה ממידה אפס: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $\{(a_i,b_i)\}_{i=0}^\infty$ עבורם $A \subseteq \bigcup(a_i,b_i)$ וכן $\sum(b_i - a_i) < \varepsilon$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $|A| \leq \aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A \subseteq B$ המקיימת $\forall b \in B.\forall\varepsilon > 0.\exists a \in A.|b - a| < \varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g \in R([a,b])$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_A} = g_{\restriction_A}$ אזי $\int_a^b f = \int_a^b g$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases} y_i & x\in\{b_1\dots b_m\}\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f=\int_a^c g$.

משפט ליניאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,c])$ ויהי $b\in(a,c)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $f\ge 0$ אזי $\int_a^b f\ge 0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^b f\ge\int_a^b g$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ רציפה המקיימת $f\ge 0$ וכן $\int_a^b f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\le\sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R([a,b])$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F\in C([a,b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b(f\cdot g)=f(x_0)\int_a^b g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ יהיו $x_1\dots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\dots x_n\}$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]|_a^b=f(b)-f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\varphi\in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ המקיימת $(\varphi(\alpha)=a)\wedge(\varphi(\beta)=b)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty).f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b].f\in R([a,b])$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.(a<b)\Longrightarrow(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R([a,c])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I \;\middle|\; \int_I f \text{ קיים וסופי}\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ אזי

- ליניאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ויהי $c\in(a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^\omega f\ge\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'(x)=f(x)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F(b)-F(a)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,\omega))$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}[f\cdot g]|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $\varphi\in C^1([c,\eta),[a,\omega))$ המקיימת $\varphi(c)=a$ וכן $\lim_{b\to\eta}\varphi(b)=\omega$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in(a,\omega).\forall b_1,b_2\in[B,\omega).\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow(f\in R([a,\omega)))$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\le\int_a^\omega|f|$.

טענה: תהא $0 \le f \in \mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $f \in R([a,b])$. $\forall b \in (a,\omega)$ אזי $\left(\int_a^\omega f < \infty\right) \Longleftrightarrow$ ($F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0 \le f \le g \in \mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $f,g \in R([a,b])$. $\forall b \in (a,\omega)$ אזי

- $\left(\int_a^\omega g < \infty\right) \Longrightarrow \left(\int_a^\omega f < \infty\right)$.
- $\left(\int_a^\omega f = \infty\right) \Longrightarrow \left(\int_a^\omega g = \infty\right)$.

משפט: תהא $0 \le f \in \mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty\right) \Longleftrightarrow \left(\int_1^\infty f < \infty\right)$.

טענה: תהא $0 \le f \in \mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f(n) \le \int_1^\infty f \le \sum_{n=1}^\infty f(n)$.

משפט אבל: תהא $g \in C([a,\omega)) \cap R([a,\omega))$ ותהא $f \in C^1([a,\omega))$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

משפט דיריכלה: תהא $g \in C([a,\omega))$ עבורה $G(x) = \int_a^x g$ חסומה ותהא $f \in C^1([a,\omega))$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega} f(x) = 0$ אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

למה של בונה: תהיינה $f,g \in R([a,b])$ באשר $0 \le g$ וכן g יורדת אזי קיים $x_0 \in [a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

למה של אבל: תהא $a_n \ge 0$ סדרה יורדת ותהא b_n סדרה עבורה $m < \sum_{k=1}^n b_k < M$. $\forall n \in \mathbb{N}$ אזי $a_1 m < \sum_{k=1}^n a_k b_k < a_1 M$.

משפט ערך ביניים שני: תהיינה $f,g \in R([a,b])$ באשר g מונוטונית אזי קיים $x_0 \in [a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f \in R([a,b])$ ותהא $\varphi \in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ עולה ממש המקיימת $(\varphi(\alpha) = a) \wedge (\varphi(\beta) = b)$ אזי $\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

טענה: תהא $f \in C^{n+1}([a,b])$ אזי $R_n(f,a)(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$.

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $k!! = \prod_{n=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 1}(k-2n)$.

למה: יהי $m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^m\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^m\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}$.

משפט אבל: תהא $g \in R([a,\omega))$ ותהא $f : [a,\omega) \to \mathbb{R}$ מונוטונית וחסומה אזי $fg \in R([a,\omega))$.

משפט דיריכלה: תהא $g \in R([a,b])$. $\forall b \in [a,\omega)$ עבורה $G(x) = \int_a^x g$ חסומה ותהא $f : [a,\omega) \to \mathbb{R}$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega} f(x) = 0$ אזי $fg \in R([a,\omega))$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \le n! \le \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ כך $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+} \zeta(s)(s-1) = 1$.

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g \in \mathbb{R}^I$ ויהי $f \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n \xrightarrow{\text{pointwise}} g\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in I.\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)\right)$.

סימון: $\left(f_n \xrightarrow{p.w.} f\right) \Longleftrightarrow \left(f_n \xrightarrow{\text{pointwise}} f\right)$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $f_n \in \mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $(\forall n \in \mathbb{N}.f_n \in C(I)) \not\Longrightarrow (f \in C(I))$.
- אינטגרביליות רימן: $(\forall n \in \mathbb{N}.f_n \in R(I)) \not\Longrightarrow (f \in R(I))$.
- גבול האינטגרל: נניח $f \in R(I)$ וכן $f_n \in R(I)$. $\forall n \in \mathbb{N}$ אזי $\left(\int_I f = L\right) \not\Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n = L\right)$.
- נגזרת: יהי $x \in I$ נניח f גזירה ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $(f'(x) = L) \not\Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g \in \mathbb{R}^I$ ויהי $f \in \left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n \xrightarrow{\text{uniform}} g\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0\right)$.

סימון: $\left(f_n \xrightarrow{u} f\right) \Longleftrightarrow \left(f_n \xrightarrow{\text{unifom}} f\right)$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\left(f_n \xrightarrow{u} f\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}.\forall x \in A.\forall n > N.|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n \in \mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M \in \mathbb{R}.\forall n \in \mathbb{N}.\forall x \in I.|f_n(x)| \le M$.

למה: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M \in \mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n \xrightarrow{u} f\right) \wedge \left(g_n \xrightarrow{u} g\right)$ אזי $f_n g_n \xrightarrow{u} fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{u}f\right)\iff(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C\left(I\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in C\left(I\right)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C\left([a,b]\right)$ ותהא $f\in C\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ וכן $\forall n<m.f_m<f_n$ אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ באשר $f\in C\left([a,b]\right)$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in R\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a\in(0,1)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cos\left(b^k\pi x\right)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0\left(4^kx\right)}{4^k}\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0\left(x+1\right)=\triangle_0\left(x\right)\right)\wedge\left(\triangle_0\left(x\right)=\left\{\begin{smallmatrix}x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1-x & \frac{1}{2}\le x\le1\end{smallmatrix}\right.\right)$.

טענה: $\triangle_n\xrightarrow{u}\triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט: תהיינה $f_n\in C^1\left([a,b]\right)$ עבורה $f_n'\xrightarrow{u}g$ ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\{f_n\left(x_0\right)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n\xrightarrow{u}f$ וכן $f'=g$.

סימון: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n}f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty}f_n=f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C\left([a,b]\right)$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b\sum_{i=0}^{\infty}u_n=\sum_{i=0}^{\infty}\int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C^1\left([a,b]\right)$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\sum u_i\left(x_0\right)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}u_i$.

משפט בוחן M של ויירשטראס: תהיינה $u_n\in\mathbb{R}^I$ ותהא $M\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}M_n<\infty$ וכן $\forall x\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\left|u_n\left(x\right)\right|\le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m\left(b_k-b_{k+1}\right)$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n}f_ig_i$ מתכנס במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n\xrightarrow{u}0$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n}f_ig_i$ מתכנס במ"ש.

למה: תהא $f\in C\left([0,1]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין עבורה $\max\left|f-\varphi\right|<\varepsilon$.

למה: תהא $f\in C\left([0,1]\right)$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ נגדיר $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין כך $\varphi\left(x\right)=f\left(0\right)+N\sum_{k=0}^{N-1}\left(f\left(a_{k+1}\right)-2f\left(a_k\right)+f\left(a_{k-1}\right)\right)\max\{x-a_k,0\}$ אזי $\forall m\in\{0\ldots N\}.\varphi\left(a_m\right)=f\left(a_m\right)$.

למה: קיימות $p_n\in\mathbb{R}\left[x\right]$ עבורן $\lim_{n\to\infty}\max_{[-1,1]}\left|p_n\left(x\right)-\left|x\right|\right|=0$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C\left([a,b]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי $\exists p\in\mathbb{R}\left[x\right].\max_{[a,b]}\left|f\left(x\right)-p\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C\left([a,b]\right)$ אזי קיימות $p_n\in\mathbb{R}\left[x\right]$ עבורן $p_n\xrightarrow{u}f$.

הגדרה: תהא $f\in C\left([0,1]\right)$ אזי $B_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$.

משפט: תהא $f\in C\left([0,1]\right)$ אזי $B_n\xrightarrow{u}f$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R\left([a,\omega)\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi\in R\left([a,\omega)\right)$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.\left|f_n\right|\le\Psi$ אזי $\left(\forall b\in[a,\omega).f\in R\left([a,b]\right)\right)\wedge\left(\int_a^{\omega}f\text{ מתכנסת בהחלט }\right)\wedge\left(\int_a^{\omega}f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{\omega}f_n\right)$.

טענה: $\int_0^{\infty}e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q\in\mathbb{R}$ ויהי $r<\left|q\right|$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-\left|r\right|,\left|r\right|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי קיים $R\in[0,\infty]$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases}\text{מתכנס} & x\in\left(-R,R\right)\\ \text{מתבדר} & x\notin[-R,R]\end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי $R\in[0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמר: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right)\Longrightarrow\left(R=\infty\right)\right)\wedge\left(\left(\limsup\left(\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right)\Longrightarrow\left(R=0\right)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}a_{k+m}x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty}a_k<0$ אזי $\lim\limits_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־$-R$).

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ מתכנס בהחלט ותהא $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_i=\sum_{i=0}^{\infty}a_{p(i)}$.

טענה מכפלות קושי: יהיו $p,q\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_nx^n,\sum b_nx^n$ טורי חזקות מתכנסים בהחלט על I אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)$.

סכים לפי אבל: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim\limits_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k=(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k$.

התכנסות צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}=(C)\lim_{n\to\infty}a_n$.

סכים לפי צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i=(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k$.

סימון: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $(C)\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$ וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.

משפט: יהי $\sum a_kz^k$ טור טור חזקות מרוכב המתכנס עבור $w\in\mathbb{C}$ ויהי $r<|w|$ אזי $\sum a_kz^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $\overline{B}_r(0)$.

משפט אוילר: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.
- $\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R([a,b])$ אזי $u+iv\in R([a,b])$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\int_a^b(u+iv)=\int_a^bu+i\int_a^bv$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי

- $\int_a^b(f+g)=\int_a^bf+\int_a^bg$.
- $\int_a^bf=\int_a^cf+\int_c^bf$.
- $\int_a^bcf=c\int_a^bf$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^bf}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\frac{d}{dx}(u+iv)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $|f|\in R([a,b])$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^xf(t)\,\mathrm{d}t\right)'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^bf(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\int_a^bf'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^bfg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\left|\int_a^bf\right|\le\int_a^b|f|$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f(x+T)=f(x)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R\left(\mathbb{T}\right)=\left\{ f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)\mid\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)\right\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_{n}\left(t\right)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_{n}\left(t\right)\in R\left(\mathbb{T}\right)$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $\left(c_{m}\neq0\right)\vee\left(c_{-m}\neq0\right)$ אזי m.

טענה: $R\left(\mathbb{T}\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

טענה: $\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle$ מכפלה פנימית על $C\left(\mathbb{T}\right)$.

טענה: $\left\langle e_{n},e_{m}\right\rangle =\begin{cases} 0 & n\neq m\\ 1 & n=m \end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(m\right)=\left\langle f,e_{m}\right\rangle$.

טענה: יהי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(k\right)=c_{k}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_{n}\left(t\right)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)\overline{\hat{g}\left(n\right)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\left\Vert f\right\Vert ^{2}=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(m\right)=\left\langle f,e_{m}\right\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\left(S_{m}f\right)\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_{n}\left(t\right)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(-n\right)=\overline{\hat{f}\left(n\right)}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$($S_{m}f$ ממשית).

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\left|k\right|\leq m$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp e_{k}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp S_{m}f$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left\Vert f\right\Vert ^{2}=\left\Vert S_{m}f\right\Vert ^{2}+\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}\leq\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_{2}: תהיינה $f_{n},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\left\Vert f_{n}-g\right\Vert =0\right)\Longleftrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}g\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_{2} איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\Vert g\right\Vert \leq\sup\left|g\right|$.

מסקנה: תהיינה $f_{n}\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}f\right)\Longrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{u}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_{n}\in\mathbb{C}\left[x\right]$ עבורה $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t\in\left[0,2\pi\right]}\left|p\left(t\right)-f\left(t\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\left\Vert p-f\right\Vert <\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי קיימים p_{n} פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{m\to\infty}\left\Vert S_{m}f-f\right\Vert =0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}=\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

מסקנה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ המקיימות $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}\left(n\right)=\hat{g}\left(n\right)$ אזי בכל נקודת רציפות של f,g מתקיים $f=g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}\geq\left\Vert f-\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהיינה $f_{m},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורן $\left\Vert f_{m}-g\right\Vert \xrightarrow[m\to\infty]{}0$ אזי $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f_{m}}\left(n\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}\hat{g}\left(n\right)$.

טור פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $S_{N}f\xrightarrow{p.w.}g$ באשר $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)e^{int}$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$ אזי $S_{N}f\xrightarrow{u}f$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[-\pi,\pi)}$ המוגדרת $f\left(t\right)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{(-1)^{n}i}{n}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=0\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}\sin(nt)}{n}$.
- יהי $r\in[0,\pi)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{u}f$ על $[-r,r]$.
- $S_{m}f\xrightarrow{p.w.}f$ על $(-\pi,\pi)$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ המוגדרת $f\left(t\right)=\frac{(\pi-t)^{2}}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{1}{2n^{2}}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=\frac{\pi^{2}}{12}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\frac{\pi^{2}}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos(nt)}{n^{2}}$.
- $S_{m}f\xrightarrow{u}f$ על $[0,2\pi]$.

מסקנה: $\frac{\pi^{4}}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^{2}}$.

טענה: יהי $\alpha\notin\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^{2}}=\frac{\pi^{2}}{\sin^{2}(\pi\alpha)}$.

למה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f'}\left(n\right)=in\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}\left(f'\right)=\left(S_{m}f\right)'$.

למה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f^{(k)}}\left(n\right)=i^{k}n^{k}\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$.

משפט: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$ אזי $f\in C^{k-2}\left(\mathbb{T}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{u}f$.

תנאי ליפשיץ מקומי: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $a\in\mathbb{R}$ עבורה $\exists\delta>0.\exists M>0.\forall x\in\left(a-\delta,a+\delta\right).\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|<M\left|x-a\right|$.

הערה: יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\left(a-\delta,a+\delta\right)\right)$ אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a.

משפט: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ותהא $a\in\mathbb{T}$ עבורן f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a אזי $S_{N}f\left(a\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}f\left(a\right)$.

קונבולוציה: תהיינה $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left(f*g\right)\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(t\right)g\left(x-t\right)\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי

- $f*g=g*f$.
- $f*\left(g+h\right)=f*g+f*h$.
- $\left(cf\right)*g=c\left(f*g\right)$.
- $\left(f*g\right)*h=f*\left(g*h\right)$.
- $f*g\in C\left(\mathbb{T}\right)$.
- $\widehat{f*g}\left(n\right)=\widehat{f}\left(n\right)\cdot\widehat{g}\left(n\right)$.

גרעין דיריכלה: נגדיר $D_{N}\in R\left(\mathbb{T}\right)$ כך $D_{N}\left(x\right)=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}$.

למה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $D_{N}*f=S_{N}f$.

למה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\widehat{D_{N}}\left(n\right)=\begin{cases}1 & |n|\le N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$.

למה: יהי $y\in[-\pi,\pi]$ אזי $\left|D_{N}\left(y\right)\right|\le2N+1$.

למה: יהי $y\in[-\pi,\pi]$ אזי $D_{N}\left(y\right)=\begin{cases}2N+1 & y=0\\ \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & y\neq0\end{cases}$.

מסקנה: D_{N} זוגית ממשית וכן מתקיים $\left(y\in\left\{\frac{2\pi k}{2N+1}\mid k\in\{-N,\ldots,N\}\right\}\right)\Longleftrightarrow\left(D_{N}\left(y\right)=0\right)$.

למה: D_{N} בעלת N מינימום מקומיים וכן $N+1$ מקסימום מקומיים.

למה: יהי $y\in[-\pi,\pi]$ אזי $\left|D_{N}\left(y\right)\right|\le\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right|$.

מסקנה: יהי $y\in[-\pi,\pi]$ אזי $\left|D_{N}\left(y\right)\right|\le\frac{\pi}{|y|}$.

טענה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_{N}\left(y\right)\mathrm{d}y=1$.

טענה: $\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_{N}\left(y\right)\right|\mathrm{d}y\ggg1$.

סכומי פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $\left(\sigma_N f\right)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(x)$.

גרעין פייר: נגדיר $F_N \in R(\mathbb{T})$ כך $F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x)$.

למה: יהי $y \in [-\pi,\pi]$ אזי $F_N(y) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right)^2$.

למה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

למה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f = f * F_N$.

למה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $\widehat{F_N}(n) = \begin{cases} 1-\frac{|n|}{N+1} & |n|\le N \\ 0 & |n|>N \end{cases}$.

למה: יהי $\delta > 0$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $N \ge N_0$ מתקיים $\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\pi} F_N(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon$.

משפט פייר: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f \xrightarrow{u} f$.

משפט פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in [-\pi,\pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל אזי $\sigma_N f(a) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)}{2}$.

מסקנה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in [-\pi,\pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל וכן $S_N f(a) \to \ell$ אזי $\ell = \frac{\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)}{2}$.

מסקנה: $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ צפופים במ"ש ב־$C(\mathbb{T})$.

טענה: $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

מטריקה/מרחק: תהא A קבוצה אזי $d : A^2 \to [0,\infty)$ המקיימת

- חיוביות: $\forall x,y \in A. d(x,y) \ge 0$.
- חיוביות ממש: $\forall x,y \in A. \left(d(x,y)=0\right) \Longleftrightarrow (x=y)$.
- סימטריות: $\forall x,y \in A. d(x,y) = d(y,x)$.
- אי־שיוויון המשולש: $\forall x,y,z \in A. d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

מרחב מטרי: תהא X קבוצה ותהא $d : X^2 \to [0,\infty)$ מטריצה אזי (X,d).

גבול: יהי (X,d) מרחב מטרי תהא $a \in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $L \in X$ עבורן $d(a_n, L) \to 0$ אזי $a_n \to L$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי תהא $a \in X^{\mathbb{N}}$ ויהיו $L_1, L_2 \in X$ עבורם $(a_n \to L_1) \wedge (a_n \to L_2)$ אזי $L_1 = L_2$.

מרחק מנהטן: יהיו $x,y \in \mathbb{R}^n$ אזי $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

סימון: יהיו $x,y \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ אזי $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, d_p)$.

טענה: ℓ_p^n מרחב מטרי.

מרחק יוניפורמי: יהיו $x,y \in \mathbb{R}^n$ אזי $d_\infty(x,y) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

סימון: $\ell_\infty^n = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$.

טענה: ℓ_∞^n מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g \in C([a,b])$ נגדיר $d(f,g) = \sup|f-g|$ אזי $C([a,b]) = \left(C([a,b]), d\right)$.

טענה: $C([a,b])$ מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g \in R([a,b])$ נגדיר $d(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f-g|^2}$ ונגדיר יחס שקילות $(f \sim g) \Longleftrightarrow \left(d(f,g)=0\right)$ אזי $L_2([a,b]) = \left(R([a,b])/\sim, d\right)$.

טענה: $L_2([a,b])$ מרחב מטרי.

טענה: יהי V מ"ו ותהא $\nu : V \to [0,\infty)$ נורמה על V נגדיר $d(x,y) = \nu(x-y)$ אזי (V,d) מרחב מטרי.

נורמת ℓ_p^n: יהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_∞^n: יהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |x_i|$.

למה: יהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי

- $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$.
- $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$.

מסקנה: תהא $\left\{x^{(m)}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$ סדרה ותהא $y \in \mathbb{R}^n$ אזי $\left(\lim_{m\to\infty} \left\|x^{(m)} - y\right\|_2 = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\forall i \in [n]. \lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = y_i\right)$.

כדור פתוח: יהי $a \in X$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,a) < r\}$.

כדור סגור: יהי $a \in X$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,a) \le r\}$.

ספירה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x,a) = r\}$.

נקודה פנימית: תהא $A \subseteq X$ אזי $x \in A$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq A$.

פנים של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\mathrm{int}(A) = \overset{\circ}{A} = \{x \in A \mid x \text{ נקודה פנימית של } A\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $A \subseteq X$ עבורה $A = \mathrm{int}(A)$.

למה: תהא $X\subseteq A$ אזי $\mathrm{int}\left(\mathrm{int}\left(A\right)\right)=\mathrm{int}\left(A\right)$.

משפט: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי

- יהיו $\left\{ A_{i}\right\}$ פתוחות אזי $\bigcup A_{i}$ פתוחה.
- יהיו $\left\{ A_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ פתוחות אזי $\bigcap A_{i}$ פתוחה.
- $X,\varnothing$ פתוחות.

סביבה: יהי $a\in X$ אזי $A\subseteq X$ פתוחה עבורה $a\in A$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{int}\left(A\right)=\bigcup\left\{ B\subseteq A\mid B\text{ פתוחה}\right\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $X\backslash A$ פתוחה.

נקודת סגור: תהא $A\subseteq X$ אזי $a\in X$ עבורה $\forall r>0.B_{r}\left(a\right)\cap A\neq\varnothing$.

סגור של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{cl}\left(A\right)=\overline{A}=\left\{ a\in X\mid A\text{ נקודת סגור של }a\right\}$.

משפט: תהא $A\subseteq X$ אזי (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($A=\overline{A}$).

למה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\overline{A}=X\backslash\mathrm{int}\left(X\backslash A\right)$ וכן $\mathrm{int}\left(A\right)=X\backslash\overline{\left(X\backslash A\right)}$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\overline{A}=\bigcap\left\{ A\subseteq B\mid B\text{ סגורה}\right\}$.

משפט: תהא $A\subseteq X$ ותהא $a\in X$ אזי ($a\in\overline{A}$)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_{n}\in A$ עבורה $x_{n}\to a$).

נקודת הצטברות: תהא $A\subseteq X$ אזי $a\in X$ המקיימת $\forall r>0.\left(B_{r}\left(a\right)\backslash\left\{ a\right\} \right)\cap A\neq\varnothing$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ ותהא $a\in X$ אזי (a הצטברות של A)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_{n}\in A\backslash\left\{ a\right\}$ עבורה $x_{n}\to a$).

שפה של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\partial A=\overline{A}\cap\overline{X\backslash A}=\overline{A}\backslash\mathrm{int}\left(A\right)$.

קבוצה צפופה: קבוצה $Y\subseteq X$ עבורה $\overline{Y}=X$.

טענה: תהא $Y\subseteq X$ אזי (Y צפופה)$\Longleftrightarrow$(לכל $A\subseteq X$ פתוחה באשר $A\neq\varnothing$ מתקיים $Y\cap A\neq\varnothing$).

מרחב מטרי ספרבילי: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו קיימת $Y\subseteq X$ צפופה לכל היותר בת מנייה.

קבוצה חסומה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $\exists r>0.\exists a\in X.A\subseteq B_{r}\left(a\right)$.

קוטר של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ חסומה אזי $\mathrm{diam}\left(A\right)=\sup\left\{ d\left(x,y\right)\mid x,y\in A\right\}$.

טענה: תהא $\left\{ x^{\left(m\right)}\right\} \subseteq\mathbb{R}^{n}$ סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה $x^{\left(m_{j}\right)}$ מתכנסת.

מסקנה: לכל קבוצה חסומה ואינסופית קיימת נקודת הצטברות.

סדרת קושי: סדרה $\left\{ x_{n}\right\} \subseteq X$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall k,m\geq N.d\left(x_{k},x_{m}\right)<\varepsilon$.

למה: סדרת קושי הינה חסומה.

טענה: סדרה מתכנסת הינה סדרת קושי.

מרחב מטרי שלם: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו כל סדרת קושי מתכנסת.

משפט: $\mathbb{R}^{n}$ סטנדרטי שלם, $C\left(\left[a,b\right]\right)$ שלם, ℓ_{2} שלם.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי שלם ותהא $Y\subseteq X$ אזי ($\left(Y,d\right)$ שלם)$\Longleftrightarrow$(Y סגורה).

מרחבים מטריים איזומטריים: מרחבים מטריים $\left(X,d\right),\left(Y,\rho\right)$ עבורם קיימת $f:X\to Y$ חח"ע ועל המקיימת $\forall x,y\in X.d\left(x,y\right)=d\left(\left(x\right),f\left(y\right)\right)$.

השלמה של מרחב מטרי: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי $\left(Y,\rho\right)$ מרחב מטרי שלם עבורו $Y\subseteq X$ צפופה וכן $\rho_{\restriction_{X^{2}}}=d$.

משפט: לכל מרחב מטרי קיימת השלמה.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי בעל השלמות $\left(Y,\rho\right),\left(Z,\zeta\right)$ אזי $\left(Y,\rho\right),\left(Z,\zeta\right)$ איזומטריים.

נקודת שבת: תהא $f:X\to X$ אזי $a\in X$ עבורה $f\left(x\right)=x$.

העתקה מכווצת: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי $A\in\mathrm{Hom}\left(X\right)$ עבורה קיים $\lambda<1$ המקיים $\forall x,y\in X.d\left(Ax,y\right)\leq\lambda d\left(x,y\right)$.

משפט נקודת השבת של בנך: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A\in\mathrm{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת אזי קיים ויחיד $x\in X$ עבורו $Ax=x$.

מסקנה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $A\in\mathrm{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת ותהא $x\in X$ עבורה $Ax=x$ אזי לכל $y\in X$ מתקיים $x=\lim_{n\to\infty}A^{n}z$.

מסקנה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $A\in\mathrm{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת ותהא $x\in X$ עבורה $Ax=x$ אזי לכל $y\in X$ מתקיים $d\left(A^{n}y,x\right)\leq\frac{\lambda^{n}}{1-\lambda}d\left(y,Ay\right)$.

כיסוי פתוח: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ אזי קבוצות $\left\{ A_{\alpha}\right\} _{\alpha\in I}$ עבורן $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}A_{\alpha}$.

מרחב קומפקטי: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו לכל $\left\{ A_{\alpha}\right\} _{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X קיימות $\left\{ \beta_{i}\right\} _{i=1}^{m}\in I$ עבורן $X=\bigcup_{i=1}^{m}A_{\beta_{i}}$.

קבוצה קומפקטית: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי $B\subseteq X$ עבורו $\left(B,d\right)$ מרחב קומפקטי.

טענה קבוצה פתוחה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $X\subseteq Y$ אזי ($U\subseteq Y$ פתוחה ב־(Y,d))$\Longleftrightarrow$(קיימת $V\subseteq X$ פתוחה עבורה $U=V\cap Y$).

טענה קבוצה סגורה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $X\subseteq Y$ אזי ($U\subseteq Y$ סגורה ב־(Y,d))$\Longleftrightarrow$(קיימת $V\subseteq X$ סגורה עבורה $U=V\cap Y$).

טענה: תהא $K\subseteq X$ קומפקטית אזי K חסומה וכן K סגורה.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(לכל סדרה יורדת $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq X$ סגורות לא ריקות אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i\neq\varnothing$).

קומפקטיות סדרתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$((X,d) קומפקטי סדרתית).

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(A סגורה וחסומה).

מרחב פרה־קומפקטי: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל סדרה יש תת סדרה קושי.

אוסף פונקציות רציף במידה אחידה: סדרה $\{f_n\}\subseteq C([a,b])$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall n\in\mathbb{N}.\forall s,t\in[a,b].|s-t|<\delta\Longrightarrow|f_n(s)-f_n(t)|<t$.

משפט: תהא $\{f_n\}\subseteq C([a,b])$ סדרה אזי ($\{f_n\}$ פרה־קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($\{f_n\}$ חסומה במ"ש ורציפה במידה אחידה).

גבול: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים תהא $f:X\to Y$ תהא $a\in X$ ותהא $L\in Y$ אזי

- קושי: $(\lim_{x\to a}f(x)=L)\Longleftrightarrow(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in B(a,\delta).f(x)\in B(L,\varepsilon))$.
- היינה: $(\lim_{x\to a}f(x)=L)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in(X\backslash\{a\})^{\mathbb{N}}.(x_k\to a)\Longrightarrow(f(x_k)\to L)\right)$.

רציפות בנקודה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f:X\to Y$ אזי $a\in X$ עבורה $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

משפט: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f:X\to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $U\subseteq Y$ פתוחה מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה).

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $f:X\to\mathbb{R}^m$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $i\in[m]$ מתקיים כי f_i רציפה).

רציפות במידה שווה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $A\subseteq X$ אזי $f:A\to Y$ עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in A.(d(x,y)<\delta)\Longrightarrow(\rho(f(x),f(y))<\varepsilon)$.

משפט: תהיינה $f,g:X\to\mathbb{R}^n$ רציפות ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\alpha f+\beta g$ רציפה וכן $\langle f,g\rangle$ רציפה.

משפט רציפות ההרכבה: יהיו $(X,d),(Y,\rho),(Z,\eta)$ מרחבים מטריים תהא $a\in X$ תהא $f:X\to Y$ רציפה על a ותהא $g:f(X)\to Z$ רציפה על $f(a)$ אזי $g\circ f$ רציפה על a.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קומפקטית.

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(כל $f\in C(X,\mathbb{R})$ הינה חסומה).

משפט קנטור: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.

משפט ויירשטראס: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה אזי קיימים $a,b\in X$ עבורם $f(X)=[f(a),f(b)]$.

מסקנה: תהיו $\nu,\eta:X\to\mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $c,C\in\mathbb{R}$ עבורם $c\nu\le\eta\le C\nu$.

מסילה: פונקציה $\gamma\in C([a,b],X)$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma:[a,b]\to X$ עבורה $\gamma(a)=\gamma(b)$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma:[a,b]\to X$ עבורה $\gamma_{\restriction_{(a,b]}},\gamma_{\restriction_{[a,b)}}$ חח"ע.

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma:[0,1]\to X$ מסילה אזי $-\gamma:[0,1]\to X$ המוגדרת $-\gamma(t)=\gamma(1-t)$.

מרחב מטרי קשיר מסילתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל $x,y\in X$ קיימת עקומה $\gamma:[0,1]\to X$ המקיימת $\gamma(0)=x$ וכן $\gamma(1)=y$.

משפט תכונת דרבו: יהי (X,d) מרחב מטרי קשיר מסילתית תהא $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה יהיו $x,y\in X$ ותהא $c\in\mathbb{R}$ עבורה $f(x)<c<f(y)$ אזי קיים $z\in X$ עבורו $f(z)=c$.

תחום: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה מסילתית.

מרחב מטרי קשיר: מרחב מטרי (X,d) עבורו הקבוצות היחידות שפתוחות וסגורות במקביל הן $X,\varnothing$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קשיר מסילתית)$\Longleftarrow$((X,d) קשיר).

טענה: תהא $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ אזי A רציפה.

טענה: תהיינה $A,B\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$.

מסקנה: תהא $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left\|A^k\right\|\le\|A\|^k$.

משפט: תהא $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ ונגדיר $f\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ כך $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}x$ אזי f רציפה.

אקספוננט: תהא $A\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ נגדיר $e^A\in M_n(\mathbb{R})$ כך $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$.

מסקנה: תהא $A\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי e^A מתכנסת וכן $\left\|e^A\right\|\le e^{\|A\|}$.

הגדרה: תהא $\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ מסילה אזי נגדיר מסילה $\Phi\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ כך $\Phi\eta=\begin{cases}\frac{1}{2}(\eta_2(4t),\eta_1(4t)) & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-1),\eta_2(4t-1))+\left(0,\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-2),\eta_2(4t-2))+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}(-\eta_2(4t-3),-\eta_1(4t-3))+\left(1,\frac{1}{2}\right) & \frac{3}{4}\le t\le 1\end{cases}$.

נורמה של עקומה: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי $\|\gamma\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}\|\gamma(t)\|$.

מרחק של עקומות: תהיינה $\gamma,\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומות אזי $d(\gamma,\eta)=\|\gamma-\eta\|_\infty$.

טענה: תהיינה $\gamma,\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומות אזי $d(\Phi\gamma,\Phi\eta)=\frac{1}{2}d(\gamma,\eta)$.

עקום פביאנו: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי $\gamma_\infty=\lim_{n\to\infty}\Phi^n\gamma$.

טענה: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי γ_∞ רציפה וכן $\gamma_\infty([0,1])$ קומפקטית.

משפט: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי $\gamma_\infty([0,1])$ צפופה ב־$[0,1]^2$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל אזי (Y,ρ) קומפקטי וכן f^{-1} רציפה.

טענה: לא קיימת פונקציה רציפה חח"ע ועל ב־$[0,1]\to[0,1]^2$.

עקומה פוליגונלית: עקומה לינארית למקוטעין.

אורך עקומה פוליגונלית: תהא γ עקומה פוליגונלית בעלת חלקים לינאריים בקטעים $[\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)]$ אזי $L(\gamma)=\sum_{i=1}^M\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$.

מסקנה: תהא γ עקומה פוליגונלית אזי $L(\gamma)=\int_0^1\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

עקומה בעלת אורך ביחס לחלוקה: תהא Π חלוקה של $[a,b]$ אזי עקומה γ עבורה קיים חסם עליון לאורך של עקומה פוליגונלית בין הנקודות $\{\gamma(t_i)\}$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^m)$ עקומה אזי $L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

כדור פתוח: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|<r\}$.

כדור סגור: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|\le r\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|=r\}$.

תיבה פתוחה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j<x_j<b_j\}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{\Pi}_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\le x_j\le b_j\}$.

נקודה פנימית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\subseteq M$.

פנים של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{int}(M)=\overset{\circ}{M}=\{x\in M\mid$ נקודה פנימית של M $x\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $M=\overset{\circ}{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\subseteq\mathbb{R}^n\backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\cap M=\{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\partial M=\{x\in M\mid$ נקודת שפה של M $x\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M\subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{M}=\overset{\circ}{M}\cup\partial M$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (x נקודה חיצונית של M)$\Longleftrightarrow$(x נקודה פנימית של $\mathbb{R}^n\backslash M$).

מסקנה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (M פתוחה)$\Longleftrightarrow$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.M\subseteq B_r(0)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$).

סימון: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{(k)}=a(k)$.

גבול: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k\to\infty}\left\|a^{(k)}-L\right\|=0$ אזי $\lim_{k\to\infty}a^{(k)}=L$.

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x\to a}$ וכן $\xrightarrow[x\to a]{}$.

משפט: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right)\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_j\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\Vert a^{(m)}-a^{(p)}\right\Vert<\varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff\left(\forall j\in[n].\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\Vert a_j^{(m)}-a_j^{(p)}\right\Vert<\varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\iff$(לכל $a\in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_i)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty}a^{(k_i)}\in K$).

הערה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f=\langle f_1,\ldots,f_m\rangle$ כאשר $f_i:A\to\mathbb{R}$.

גבול: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ תהא $a\in\mathbb{R}^n$ ותהא $L\in\mathbb{R}^m$ אזי

- היינה: אם $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{(k)}\to a\right)\Longrightarrow\left(f\left(x^{(k)}\right)\to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A\backslash\left\{a\right\}.\left\Vert x-a\right\Vert<\delta\Longrightarrow\left\Vert f\left(x\right)-L\right\Vert<\varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in A$ עבורה $f\left(a\right)=\lim_{x\to a}f\left(x\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי (f רציפה נקודתית עבור כל $b\in B$)$\iff$($f\in C\left(B\right)$).

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי $\left(f\in C\left(b\right)\right)\iff\left(f_1,\ldots,f_m\in C\left(b\right)\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f:A\to B$ הפיכה עבורה f,f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$.

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ כך $\gamma\left(t\right)=\left(1-t\right)a+tb$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b]=\mathrm{Im}\left(\gamma\right)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a,b\in M.\left[a,b\right]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r\left(a\right),\overline{B}_r\left(a\right)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to M$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\gamma\left(1\right)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_0}\left(\mathbb{R}^n\right)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\biguplus\mathcal{A}=M$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f\left(a\right)<f\left(b\right)$ מתקיים $\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]\subseteq f\left(\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ קשירה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ויירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f\left(\mathcal{K}\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\left\Vert x-y\right\Vert<\delta\Longrightarrow\left\Vert f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\Vert<\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^m\right)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $\left(\upsilon\left(a\right)\geq0\right)\wedge\left(\left(\upsilon\left(a\right)=0\right)\iff\left(a=0\right)\right)$.
- הומוגניות: $\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon\left(a+b\right)\leq\upsilon\left(a\right)+\upsilon\left(b\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.\upsilon\left(x\right)\leq c\left\Vert x\right\Vert$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon\in C\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.c\left\Vert x\right\Vert\leq\upsilon\left(x\right)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\leq\upsilon\leq b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon,\left\Vert\cdot\right\Vert$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\rho\left(x^{(k)}\right)\to0\right)\iff\left(\upsilon\left(x^{(k)}\right)\to0\right)$.

נורמת ℓ_p: עבור $p\in\mathbb{N}_+$ נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_p=\left(\sum_{i=1}^n\left|v_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_∞: נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\left|v_i\right|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in(0,1)$ אזי $\gamma'(a)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in(0,1)$ אזי $\gamma'(a)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(a)\\ \vdots\\ \gamma_m'(a)\end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ המקיימת $f(x)=f(a)+L(x-a)+o(\|x-a\|)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}(a)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}(a)\Longrightarrow f\in C(a)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\text{grad}f(a)=[L]_{\text{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f(a)=\text{grad}f(a)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hx_i)-f(a)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $f'_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=(\nabla f(a))_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי ($\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ קיימת לכל i)$\not\Longleftarrow$($f\in\mathcal{D}(a)$).

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ המקיימת $f(x)=f(a)+L(x-a)+o(\|x-a\|)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $(f\in\mathcal{D}(a))\Longleftrightarrow(\forall i\in\{1\ldots m\}.f_i\in\mathcal{D}(a))$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\mathcal{D}_f(a)=\begin{pmatrix}-\nabla f_1(a)-\\ \vdots\\ -\nabla f_m(a)-\end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $(\mathcal{D}_f(a))_{i,j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי
- אם $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $f\in C(a)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}(a)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}(a)$.
- $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)$.
- תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$ וכן $\mathcal{D}_f\in C(\mathcal{U})$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות אזי $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$ $.\forall i\in[m].\forall j\in[n]$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$ $\forall i\in[m].\forall j\in[n].$ אזי $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי $\left(f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\nabla f(a)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\mathcal{D}_f(a)\cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ קשירה מסילתית)$\Longleftrightarrow$($\mathcal{U}$ קשירה פוליגונלית).

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)\Longleftarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)\Longleftrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)$.

טענה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)\Longleftrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)$.

סימון: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in\{1\ldots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_i}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\{1\ldots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהיו $i,j\in\{1\ldots n\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_i},\frac{\partial f}{\partial x_j}\in C^1(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ אזי $|K|=\sum_{i=1}^n K_i$ וכן $\partial x^K=\partial x_1^{K_1}\ldots\partial x_n^{K_n}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_f\in C^k(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{|K|}f}{\partial x^K}(a)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert Av\right\Vert _{\text{st}}\le\left\Vert A\right\Vert _{\text{st}}\cdot\left\Vert v\right\Vert _{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^{k}$ עבורן $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $g\in D\left(f\left(a\right)\right)$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}\left(a\right)=\mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right)\cdot\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\Gamma_{f}=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}\mid\left(x\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(f\left(x\right)=y\right)\right\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $\Pi_{c}=\left\{ x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)=c\right\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $y-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $N_{a}=\left(-\nabla f\left(a\right),1\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)\perp\Pi_{f\left(a\right)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי

- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\ge f\left(a\right)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\le f\left(a\right)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f\left(a\right)=0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי

- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_{i}.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_{i}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $\mathcal{D}_{\left(a,b\right)}^{k}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^{n}\\ \left|V\right|=k}}\binom{k}{V_{1},\ldots,V_{n}}\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)^{V_{i}}\frac{\partial^{k}}{\partial x^{V}}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathcal{D}_{\left(a,b\right)}^{k}f=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)^{k}$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $f\in C^{k+1}\left(a\right)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{i}f\left(a\right)+\frac{1}{\left(k+1\right)!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{k+1}f\left(c\right)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_{f}\right)_{i,j}=f''_{x_{i},x_{j}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=f\left(a\right)+\left(x-a\right)^{t}H_{f}\left(c\right)\left(x-a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- ($H_{f}\left(a\right)$ חיובית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מינימום).
- ($H_{f}\left(a\right)$ שלילית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)>0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)<0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f'\left(x\right)=-\frac{F'_{x}\left(x,f\left(x\right)\right)}{F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)}$ על I_{x}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f\left(x\right)\in C^{k}\left(I_{x},I_{y}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה

לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}(a)\neq0$ יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1}\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i},I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$ אזי לכל $i\in[n]$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=-\frac{F'_{x_i}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times(n+m)}{\mathcal{D}_f(a)}=\left(\underset{m\times n}{F'_x(a)},\underset{m\times m}{F'_y(a)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F'_y(a)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ וקיימת $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i},\prod_{j=1}^{m}I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_i}\right)$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F'_y(a)$ הפיכה יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ ותהא $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i},\prod_{j=1}^{m}I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_i}\right)$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$ אזי $\mathcal{D}_f(x)=-F'_y(x,f(x))^{-1}\cdot F'_x(x,f(x))$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $\nabla F(a)\neq0$ אזי משוואת המישור המשיק למשטח $\{F=0\}$ הינו $\sum_{i=1}^{n}F'_{x_i}(a)(x_i-a_i)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^1(\mathcal{U},\mathcal{V})$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^1(\mathcal{V},\mathcal{U})$.

דיפאומורפיזם C^k: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^k(\mathcal{U},\mathcal{V})$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^k(\mathcal{V},\mathcal{U})$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}(f(x))=\mathcal{D}_f(x)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $A\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

- (A פתוחה)$\iff$($f(A)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\iff$($f(A)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\iff$($f(A)$ קומפקטית).
- אם $\partial A\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\partial(f(A))=f(\partial A)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ עבורה $\text{rank}(\mathcal{D}_f(a))=m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g(a)=0$ וכן $\nabla f(a)\in\text{span}\{\nabla g_i(a)\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g(a)=0$ וכן $\{\nabla g_i(a)\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\text{sols}(g)\cap\mathcal{O}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ נגדיר $L\in C^1(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ כך $L(x_1\ldots x_n,\lambda_1,\ldots\lambda_m)=f(x_1\ldots x_n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x_1\ldots x_n)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$)$\iff$(קיימת $\lambda\in\mathbb{R}^m$ עבורה (a,λ) נקודה קריטית של L).

דרגה של פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $\text{rank}(f(a))=\text{rank}(\mathcal{D}_f(a))$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ עבורה $\forall x\in\mathcal{U}.\text{rank}(f(x))=k$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a קיימת $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של $f(a)$ קיימים דיפאומורפיזמים $\varphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ וכן $\psi:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^m$ וקיימת $\mathcal{W}\subseteq\varphi(\mathcal{O})$ סביבה של $\varphi(a)$ עבורם $\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)(x)=(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$ על $\mathcal{W}$.

הלמה של הדמר: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה קמורה של 0 יהי $p\geq1$ ותהא $f\in C^p(\mathcal{U},\mathbb{R})$ עבורה $f(0)=0$ אזי קיימת $g\in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $g(0)=\nabla f(0)$ וכן $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i g(x)$.

הלמה של מורס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^3(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a וגם $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של 0 וכן דיפאומורפיזם $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ המקיים $(f\circ g)(x)-f(a)=\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\sum_{i=k+1}^{n}x_i^2$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $P_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\le x_j\le b_j\}$.

תיבה מנוונת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $\exists i\in[n].a_i=b_i$ אזי $P_{a,b}$.

חלוקה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ לכל $i\in[n]$ תהיינה $\left\{t_i^0,\ldots,t_i^{\ell_i}\right\}$ חלוקה של $[a_i.b_i]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^n\left[t_i^{m_i},t_i^{m_i+1}\right]\mid\forall i\in[n].m_i\in[\ell_i-1]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $V(P)=\text{Vol}(P)=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה של P אזי $\text{Vol}(P)=\sum_{i=1}^k\text{Vol}(A_i)$.

הערה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $P_{a,b}$ תיבה מנוונת אזי $\text{Vol}(P_{a,b})=0$.

סכום רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ תהא $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)}\in A_j$ אזי $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)=\sum_{j=1}^k f\left(x^{(j)}\right)\text{Vol}(A_j)$.

קוטר קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $d(M)=\sup_{x,y\in M}\|x-y\|$.

מדד העדינות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i\le i\le k}d(A_i)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אזי $\int_P f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f\in R(P)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f\in R(P)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1,\ldots,A_n\}$ חלוקה אזי $\overline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\sup_{P_j}(f)\text{Vol}(P_j)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1,\ldots,A_n\}$ חלוקה אזי $\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{P_j}(f)\text{Vol}(P_j)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי
$\underline{S}(f,\Pi)\le S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)\le\overline{S}(f,\Pi)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות אזי $\underline{S}(f,\Pi_1)\le\underline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_1)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}(f,\Pi_1)\le\overline{S}(f,\Pi_2)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{S}(f,\Pi)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{S}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $(f\in R(P))\iff\left(\underline{I}(f)=\overline{I}(f)\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f\in R(P)$ חסומה אזי $\int_P f=\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\text{Vol}(P_{\lambda a,\lambda b})=\lambda^n\text{Vol}(P_{a,b})$.

טענה: יהיו $P_1\ldots P_n$ תיבות עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}(P_i)\cap\text{int}(P_j)=\varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי
$\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right)=\sum_{i=1}^n\text{Vol}(P_i)$.

מסקנה: יהיו $P_1\ldots P_n$ תיבות ותהא $P\subseteq\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $\text{Vol}(P)\le\sum_{i=1}^n\text{Vol}(P_i)$.

טענה: יהיו P_1,P_2 תיבות אזי $P_1\cap P_2$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}(P\backslash\text{int}(P))=0$.

קבוצה זניחה: $E\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty P_i$ וכן $\sum_{i=0}^\infty\text{Vol}(P_i)<\varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)=\{E\subseteq\mathbb{R}^n\mid E\text{ זניחה}\}$.

טענה: $\varnothing\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, יהי $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\{a\}\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=0}^\infty$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^\infty E_i\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty\text{int}(P_i)$ וכן $\sum_{i=0}^\infty\text{Vol}(P_i)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\{P_i\}_{i=0}^n$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^n\text{int}(P_i)$ וכן $\sum_{i=0}^n\text{Vol}(P_i)<\varepsilon$.

טענה: תהא $E\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ ותהא $A\subseteq E$ אזי $A\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה לא מנוונת אזי $P\notin\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M\notin\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

מסקנה: תהא $M\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{int}(M)=\varnothing$.

טענה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה ותהא $f\in C(P,\mathbb{R})$ אזי $\Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי $\Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\{C_i\}_{i=0}^\infty$ בעלות אורך צלע 2^{-e_i} עבור $e_i\in\mathbb{N}$ עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}(P_i)\cap\text{int}(P_j)=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^\infty C_i$.

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, קבוצת קנטור זניחה.

תנודה של פונקציה בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי $\omega(f,a)=\lim_{\delta\to0^+}\omega(f,B_\delta(a)\cap A)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\Longleftrightarrow$($\omega\left(f,a\right)=0$).

למה של קנטור: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית יהי $M>0$ ותהא $f:K\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall k\in K.\omega\left(f,k\right)\leq M$ אזי $\forall x\in K.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\omega\left(f,B_{\delta}\left(x\right)\cap K\right)<\omega_{0}+\varepsilon$.

כמעט לכל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E\subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A\backslash E$.

סימון: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}=\left\{ x\in P\mid\omega\left(f,x\right)\geq\varepsilon\right\}$.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}$ קומפקטית.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left\{ A\in\Pi\mid\left(A\cap B_{f,\frac{1}{k}}\neq\varnothing\right)\wedge\left(\omega\left(f,A\right)\geq\frac{1}{2k}\right)\right\}$ כיסוי של $B_{f,\frac{1}{k}}$.

קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\Longleftrightarrow$($f\in R\left(P\right)$).

קבוצה מדידת ז'ורדן: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה עבורה ∂E זניחה.

טענה: תהיינה $E_{1},E_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי

- ∂E_{1} סגורה.
- $\partial\left(E_{1}\backslash E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cup E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cap E_{2}\right)\subseteq\partial E_{1}\cup\partial E_{2}$.

סימון: $J\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\text{ז'ורדן }E\right\}$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J$ אזי $A\backslash B,A\cup B,A\cap B\in J$.

פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}:\mathbb{R}^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ כך $\chi_{A}\left(x\right)=\left\{ \begin{smallmatrix}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A \end{smallmatrix}\right.$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}\in C\left(\text{int}\left(A\right)\right)$ וכן $\chi_{A}\in C\left(\mathbb{R}^{n}\backslash A\right)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $A\subseteq P$ חסומה ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\cdot\chi_{A}\in R\left(P\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{P}f\cdot\chi_{A}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה תהיינה $P_{1},P_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבות סגורות עבורן $A\subseteq P_{1},P_{2}$ ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ אזי

- $\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{1}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{2}\right)\right)$.
- $\int_{P_{1}}f\cdot\chi_{A}=\int_{P_{2}}f\cdot\chi_{A}$.

מידה/נפח של תיבה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $V\left(A\right)=\text{Vol}\left(A\right)=\int_{A}\text{d}x$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ אזי

- יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $af+bg\in R\left(A\right)$ וכן $\int_{A}\left(af+bg\right)=a\int_{A}f+b\int_{A}g$.
- נניח כי $f\geq0$ אזי $\int_{A}f\geq0$.
- נניח כי $f\geq g$ אזי $\int_{A}f\geq\int_{A}g$.
- נניח כי $m\leq f\leq M$ אזי $m\text{Vol}\left(A\right)\leq\int_{A}f\leq M\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $f\in R\left(A\right)\cap R\left(B\right)$ אזי $f\in R\left(A\cap B\right)$ וכן $f\in R\left(A\cup B\right)$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן $\text{Vol}\left(A\cap B\right)=0$ אזי $\int_{A\cup B}f=\int_{A}f+\int_{B}f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תחום ותהא $f\in C\left(A,\mathbb{R}\right)$ אזי $\exists c\in A.\int_{A}f=f\left(c\right)\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $f\in R\left(A\right)$ אזי $\left|f\right|\in R\left(A\right)$ וכן $\left|\int_{A}f\right|\leq\int_{A}\left|f\right|$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ כמעט על כל A אזי $\int_{A}f=\int_{A}g$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\int_{\text{int}\left(A\right)}f=\int_{A}f=\int_{\overline{A}}f$.

טענה: תהינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\bigcup_{i=1}^{k}A_{i},\bigcap_{i=1}^{k}A_{i}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

מסקנה: תהיינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן לכל $i\neq j$ מתקיים $\text{Vol}\left(A_{i}\cap A_{j}\right)=0$ אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(A_{i}\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(A+a\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right)$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Vol}\left(A\right)=\text{Vol}\left(A+a\right)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu:J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\to\mathbb{R}_{\geq0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu\left(\left[0,1\right]^{n}\right)=1$ אזי $\nu=\text{Vol}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה אזי $T\left(A\right)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $T\left(\partial A\right)=\partial\left(T\left(A\right)\right)$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ זניחה וחסומה אזי $T\left(E\right)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $T\left(A\right)\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ וכן $\text{Vol}\left(T\left(A\right)\right)=\text{Vol}\left(A\right)$.

משפט פוביני: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ עבורה $\iint_{P\times Q}f$ קיים אזי $\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ קיימים ובפרט $\iint_{P\times Q}f=\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ אזי $\int_{Q}f\left(a,y\right)\mathrm{d}y$ קיים כמעט לכל $a\in P$.

מסקנה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_{1},\varphi_{2}:B\to\mathbb{R}$ תהא $A=\left\{ \left(x,y\right)\in B\times\mathbb{R}\mid\varphi_{1}\left(x\right)\le y\le\varphi_{2}\left(x\right)\right\}$ ותהא $f\in R\left(A\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{B}\int_{\varphi_{1}\left(x\right)}^{\varphi_{2}\left(x\right)}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תהא $A\subseteq\prod_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{ y\right\} \right)\in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ כמעט לכל $y\in P_{n}$ ובפרט $\mathrm{Vol}\left(A\right)=\int_{P_{n}}\mathrm{Vol}\left(A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{ y\right\} \right)\right)\mathrm{d}y$.

שטח: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $S\left(D\right)=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי $m\left(D\right)=\iint_{D}\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מומנט מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי ציר x: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}y\cdot\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- מומנט מסה לפי ציר y: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}x\cdot\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\frac{M_{y}(D)}{m(D)},\frac{M_{x}(D)}{m(D)}\right)$.

נפח: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ אזי $V\left(E\right)=\iiint_{E}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי $m\left(E\right)=\iiint_{E}\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מומנט מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ z=0\right\}$: $M_{xy}\left(E\right)=\iiint_{E}z\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ y=0\right\}$: $M_{xz}\left(E\right)=\iiint_{E}y\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ x=0\right\}$: $M_{yz}\left(E\right)=\iiint_{E}x\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$.

מקבילון: יהיו $v_{1}\dots v_{n}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathrm{Par}\left(v_{1}\dots v_{n}\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}\mid\forall i\in\left[n\right].\alpha_{i}\in\left[0,1\right]\right\}$.

טענה: יהיו $v_{1}\dots v_{n}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי מתקיים $\mathrm{Vol}\left(\mathrm{Par}\left(v_{1}\dots v_{n}\right)\right)=\left|\det\begin{pmatrix}- & v_{1} & -\\ & \vdots\\ - & v_{n} & -\end{pmatrix}\right|$.

תומך: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\mathrm{supp}\left(f\right)=\overline{\left\{ x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)\neq0\right\} }$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $E\subseteq A$ אזי

- (E זניחה)$\Longleftarrow$($\varphi\left(E\right)$ זניחה).
- $\left(\left(\mathrm{Vol}\left(E\right)=0\right)\wedge\left(\overline{E}\subseteq A\right)\right)\Longleftarrow\left(\left(\mathrm{Vol}\left(\varphi\left(E\right)\right)=0\right)\wedge\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)\right)$.
- ((E ז'ורדן)$\wedge\left(\overline{E}\subseteq A\right)$)$\Longleftarrow$(($\varphi\left(E\right)$ ז'ורדן)$\wedge\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)$).

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\varphi'\right|\in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\varphi'\right|\mathrm{d}t$.

דיפאומורפיזם אלמנטרי: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות אזי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם עבורו קיימת $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\varphi\left(x\right)=\left(x_{1},\dots,\psi\left(x_{i}\right),\dots x_{n}\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B,C\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהיו $\varphi:B\to C$, $\psi:A\to B$ דיפאומורפיזים אלמנטריים ותהא $f\in R\left(A\right)$ אזי $\int_{C}f=\int_{A}f\left(\left(\varphi\circ\psi\right)\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi\circ\psi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ויהי $a\in A$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq A$ סביבה של a וכן $\psi_{1}\dots\psi_{m}$ דיפאומורפיזים אלמנטריים עבורם $\varphi=\psi_{1}\circ\ldots\circ\psi_{m}$ על $\mathcal{O}$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם תהא $E\subseteq A$ עבורה $\overline{E}\subseteq A$ ותהא $f\in R\left(\varphi\left(E\right)\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(E\right)$ ובפרט $\int_{\varphi\left(E\right)}f=\int_{E}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A\backslash E\right)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על $A\backslash E$ ותהא $f\in R\left(S\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\backslash E\right)$

ובפרט $\int_{B}f=\int_{A\backslash E}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A\backslash E\right)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם על $A\backslash E$ ותהא $f\in R\left(S\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

קואורדינטות קוטביות/פולריות: יהי $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\rho,\phi\right)\in\left(0,\infty\right]\times\left[0,2\pi\right]$ עבורן $x=\rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי $\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|=\rho$.

קואורדינטות גליליות: יהי $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\rho,\phi,\iota\right)\in\left(0,\infty\right]\times\left[0,2\pi\right]\times\left\{ z\right\}$ עבורן $x=\rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי $\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|=\rho$.

קואורדינטות כדוריות: יהי $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\rho,\phi,\theta\right)\in\left(0,\infty\right]\times\left[0,2\pi\right]\times\left[0,\pi\right]$ עבורן $x=\rho\sin\left(\theta\right)\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\theta\right)\sin\left(\phi\right)$ וכן $z=\rho\cos\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי $\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|=\rho^{2}\sin\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ סיבוב S סביב ציר z בקואורדינטות גליליות אזי $\text{Vol}\left(E\right)=2\pi\iint_{S}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$.

מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה $f,g:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ עבורן $f\le g$ תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ סביב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}\left(E\right)=\pi\int_{a}^{b}\left(g^{2}\left(x\right)-f^{2}\left(x\right)\right)\mathrm{d}x$.

משפט פפוס: תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{2}$ יהי $c\in\mathbb{R}^{2}$ מרכז המסה של S ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}\left(E\right)=2\pi R_{c}\cdot\text{Vol}\left(S\right)$ באשר R_{c} רדיוס סיבוב c.

מיצוי ז'ורדן: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות מדידות ז'ורדן עולה עבורה $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{k}=E$.

טענה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E אזי $\lim_{k\to\infty}\text{Vol}\left(E_{k}\right)=\text{Vol}\left(E\right)$.

מסקנה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ יהי $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E ותהא $f\in R\left(E\right)$ אזי $\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f=\int_{E}f$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ עבורם לכל $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E מתקיים $\forall k\in\mathbb{N}.f\in R\left(E_{k}\right)$ וכן $\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$ קיים ושווה אזי $\int_{E}f=\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ של E המקיימת $\forall k\in\mathbb{N}.f\in R\left(E_{k}\right)$ וכן $\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$ קיים אזי $\int_{E}f$ מתכנס.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\int_{\mathbb{R}^{n}}e^{-\left\Vert x\right\Vert ^{2}}\mathrm{d}x=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^{2}}\mathrm{d}t\right)^{n}=\pi^{\frac{n}{2}}$.

משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהיינה $f,g:E\to\mathbb{R}$ עבורן $\left|f\right|\le g$ וכן $\forall A\in\mathcal{P}\left(E\right)\cap J\left(\mathbb{R}^{n}\right).\left(f\in R\left(A\right)\right)\iff\left(g\in R\left(A\right)\right)$ וכן $\int_{E}g$ מתכנס אזי $\int_{E}f,\int_{E}\left|f\right|$ מתכנסים.

מסקנה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ אזי ($\int_{E}\left|f\right|$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_{E}f$ מתכנס).

טענה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $f\in R\left(E\right)$ אזי $\forall\varepsilon>0.\forall A\subseteq E.\left|\int_{A}f\right|>\frac{1}{2}\int_{E}\left|f\right|-\varepsilon$.

משפט: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי ($\int_{E}f$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_{E}\left|f\right|$ מתכנס).

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהיינה $f,g:E\to\mathbb{R}$ עבורן $\int_{E}f,\int_{E}g$ מתכנסים אזי $\int_{E}\left(f+g\right)=\int_{E}f+\int_{E}g$.

הערה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה E בעלת מיצוי ז'ורדן.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f:B\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $E\subseteq B$ ז'ורדן וקומפקטית מתקיים $f\in R\left(E\right)$ וכן $\int_{B}f$ מתכנס אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

פונקציית גאמא: יהי $t>0$ אזי $\Gamma\left(t\right)=\int_{0}^{\infty}x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}x$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\Gamma\left(n\right)=\left(n-1\right)!$.

טענה: יהי $t>0$ אזי $\Gamma\left(t\right)$ מתכנס.

פונקציית בטא: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)=\int_{0}^{\infty}x^{t-1}\left(1-x\right)^{s-1}\mathrm{d}x$.

טענה: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ ותהא $t_{n}\in\left[c,d\right]^{\mathbb{N}}$ עבורה $t_{n}\to\ell$ אזי $\forall x\in\left[a,b\right].f\left(x,t_{n}\right)\xrightarrow{u}f\left(x,\ell\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\in C\left(\left[c,d\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t}\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\in C^{1}\left(\left[c,d\right]\right)$ וכן $\frac{d}{dt}\left(\int_{a}^{b}f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\right)=\int_{a}^{b}\frac{\partial f}{\partial t}\left(x,t\right)\mathrm{d}x$.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t}\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ ותהיינה $\alpha,\beta\in C^{1}\left(\left[c,d\right],\left[a,b\right]\right)$ אזי מתקיים $\frac{d}{dt}\left(\int_{\alpha\left(t\right)}^{\beta\left(t\right)}f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\right)=f\left(\beta\left(t\right),t\right)\beta'\left(t\right)-f\left(\alpha\left(t\right),t\right)\alpha'\left(t\right)+\int_{\alpha\left(t\right)}^{\beta\left(t\right)}\frac{\partial f}{\partial t}\left(x,t\right)\mathrm{d}x$.

מסקנה: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)=\frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\mathrm{Vol}\left(B_1^n\left(0\right)\right)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

סימפלקס: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\Delta_n=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\left(\forall i\in[n].x_i\geq0\right)\wedge\left(\sum_{i=1}^n x_i\leq1\right)\right\}$.

טענה נוסחת דירכלה: יהיו $p_1\ldots p_n>0$ אזי $\int\cdots\int_{\Delta_n}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1}\right)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)}$.

מסקנה: יהיו $p_1\ldots p_n>0$ ויהיו $\gamma_1\ldots\gamma_n>0$ אזי $\int\cdots\int_{\substack{x_1,\ldots x_n\geq0\\ \sum x_i^{\gamma_i}\leq1}}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1}\right)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\frac{1}{\prod_{i=1}^n\gamma_i}\cdot\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{p_i}{\gamma_i}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\gamma_i}\right)}$.

טענה: יהיו $p_1\ldots p_n>0$ ותהא $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד אזי
$\int\cdots\int_{\Delta_n}\psi\left(x_1\ldots x_n\right)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1}\right)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)}\int_0^1\psi\left(u\right)u^{\left(\sum p_i\right)-1}\mathrm{d}u$.

C^m-יריעה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^m\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי $C^\omega\left(A,B\right)=\left\{f:A\to B\mid f\text{ אנליטית מקומית}\right\}$.

יריעה אנליטית k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f:G\to\mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

עקומה: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה חד־מימדית.

משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה דו־מימדית.

היפר־משטח/על־משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה $n-1$ מימדית.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה היפר־משפט חלק.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות עבורן $\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}_\alpha$ יריעה לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m-יריעה k-מימדית ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r\in C^m\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $r\left(G\right)=\mathcal{M}$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r\in C^1\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה לכל $x\in G$ מתקיים $\mathrm{rank}\left(\mathcal{D}_r\left(x\right)\right)=k$.

הומאומורפיזם: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f\in C\left(A,B\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C\left(B,A\right)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r:G\to A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ עבורן $\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן קיימות $\left\{G_\alpha\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^k\right)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha\subseteq C^m\left(G_\alpha,\mathbb{R}^n\right)$ עבורן $r_\alpha\left(G_\alpha\right)=\mathcal{U}_\alpha$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{U}$ המקיימת $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים כי $\left\{\nabla f_i\left(x\right)\right\}$ בת"ל.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1\ldots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי ($\left\{f_1\ldots f_{n-k}\right\}$ מערכת משוואות רגולרית)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{U}$ עבורו $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים $\mathrm{rank}\left(\mathcal{D}_{\left(f_1\cdots f_{n-k}\right)}\left(x\right)\right)=n-k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m-יריעה k-מימדית ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{M}=\left\{\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)=0\right\}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\right\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $(0,0,0)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה אזי $f:I\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f(t,\rho)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\cos(\rho)\\ \gamma_1(t)\sin(\rho)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\mathrm{Im}(\gamma)$ אזי משפט הסיבוב f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\mathrm{Im}(f)$.

הטלה סטריאוגרפית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ נגדיר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n$ כך $f(x)=-\frac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\|x\|^2-1}{2}\right)$.

טורוס: משטח הסיבוב של $\mathbb{S}^1$.

סימון: נסמן טורוס בעזרת $\mathbb{T}^2$.

קו־אוריינטציה של יריעה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח אזי $N\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{M}.\left(|N(x)|=1\right)\wedge\left(N(x)\perp x\right)$.

למה: טבעת מוביוס אינו משטח קו־אוריינטבילי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^3$ אזי $a\times b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_1b_1\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $(u\times v)\perp v$ וכן $(u\times v)\perp u$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $(u\times v=0)\iff(u\in\mathrm{span}(v))$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\det(u,v,u\times v)=\|u\times v\|^2\geq 0$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\|v\times u\|=\|v\|\|u\|\sin(\angle(v,u))$.

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ממימד k: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה המקיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן קיים $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם עבורו $f(A)=f(\mathcal{U})\cap\left(\mathbb{R}^k\times\{0_{n-k}\}\right)$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה אזי פרידיקט P עבורו לכל $a\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה P מתקיימת על $A\cap\mathcal{U}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ התב"ש

- $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית.
- $\mathcal{M}$ מקומית גרף של פונקציה $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל־$\mathbb{R}^k$.

מסקנה: תהא $r:G\to\mathbb{R}^n$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a\in G$ קיימת סביבה $W\subseteq\mathbb{R}^n$ של $(a,0_{n-k})$ וקיים דיפאומורפיזם $s:W\to s(W)$ עבורו $s\restriction_{W\cap(G\times 0_{n-k})}=r$.

הערה: יריעה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq A$ אזי ($\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־A)$\iff$($\forall x\in\mathcal{U}.\exists r>0.B_r(x)\cap A\subseteq\mathcal{U}$).

קבוצה קשירה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל־A מתקיים $\mathcal{U}\in\{A,\varnothing\}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי (A קשירה)$\iff$(לא קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset A$ פתוחות יחסית ל־A עבורן $A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\}$).

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $f:A\to B$ אזי (f רציפה)$\iff$(לכל $\mathcal{U}\subseteq B$ פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי $f^{-1}(\mathcal{U})$ פתוחה יחסית ל־A).

מפה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^k$ הפיכה עבורה $\varphi(\mathcal{U})$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטריזציה טובה אזי $(\mathcal{U},\varphi)$.

אטלס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קבוצה של מפות $\mathcal{A}$ עבורה $\bigcup\{\mathcal{C}_1\mid\mathcal{C}\in\mathcal{A}\}=\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $r:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r(\mathcal{U})$ אזי $\left(r(\mathcal{U}),r^{-1}\right)$ מפה.

המרחב הפרוייקטיבי: יהי $n\geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^n=\left\{vv^T\mid v\in\mathbb{S}^n\right\}$.

טענה: יהי $n\geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^{n}\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^{2}}$ יריעה n מימדית.

העתקת מעבר: תהיינה $(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2}),(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1})$ מפות אזי $\varphi_{1,2}:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{k}$ המוגדרת $\varphi_{1,2}=\varphi_{2}\circ\varphi_{1}^{-1}$.

טענה: תהיינה $(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2}),(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1})$ מפות אזי $\varphi_{i}(\mathcal{U}_{1}\cap\mathcal{U}_{2})$ פתוחה עבור $i\in\{1,2\}$.

טענה: תהיינה $(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2}),(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1})$ מפות אזי $\varphi_{1,2}$ דיפאומורפיזם.

פונקציה C^{α} מיריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מתקיים כי $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^{α}.

הערה: נניח כי $\mathcal{M}$ יריעה C^{α} אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ הינה לכל היותר מדרגת חלקות C^{α}.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\{(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha})\}_{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^{α} לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי קיים ל־$\mathcal{M}$ אטלס.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $\dim(\mathcal{M})=k$.

פונקציה C^{α} בין יריעות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה ℓ־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ הינה C^{α}.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהא $g\in C^{\alpha}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$ אזי $g\circ f\in C^{\alpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}'')$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(לכל $p\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ של p עבורה קיימת $g\in C^{\alpha}(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m})$ המקיימת $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$).

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ של $\mathcal{M}$ ולכל מפה $(\mathcal{V},\psi)$ של $\mathcal{M}'$ מתקיים כי $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^{α}).

דיפאומורפיזם C^{α}: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה f הפיכה וכן $f,f^{-1}\in C^{\alpha}$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות דיפאומורפיות אזי $\dim(\mathcal{M})=\dim(\mathcal{M}')$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהיינה $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ מפות באשר $\mathcal{U},\mathcal{V}$ סביבות של p אזי $\operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}(\varphi(p))\right)=\operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}(\psi(p))\right)$.

המרחב המשיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $T_{p}(\mathcal{M})=\operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi(p)}(\varphi^{-1})\right)$.

הערה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}(\mathcal{M})\subseteq\mathbb{R}^{n}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $\dim(T_{p}(\mathcal{M}))=\dim(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{f=0\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $T_{p}(\mathcal{M})=\ker(\mathcal{D}_{p}(f))$.

וקטור מהירות: תהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}$.

טענה: תהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}(t)\in T_{\gamma(t)}(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}(\mathcal{M})=\left\{\dot{\gamma}(0)\mid\left(\gamma\in C^{1}((-\varepsilon,\varepsilon),\mathcal{M})\right)\wedge(\gamma(0)=p)\right\}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $f\in C^{1}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהיינה $\gamma_{1},\gamma_{2}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{M}$ מסילות המקיימות $\gamma_{i}(0)=p$ וכן $\dot{\gamma}_{i}(0)=v$ אזי $\left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma_{1})\right)(0)=\left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma_{2})\right)(0)$.

נגזרת של פונקציה בין יריעות: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ אזי $\mathcal{D}_{p}f:T_{p}(\mathcal{M})\to T_{f(p)}(\mathcal{M}')$ המוגדרת $(\mathcal{D}_{p}f)(v)=\left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right)(0)$ עבור מסילה $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{M}$ המקיימת $\gamma(0)=p$ וכן $\dot{\gamma}(0)=v$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ אזי $\mathcal{D}_{p}f$ העתקה לינארית.

משפט כלל השרשרת: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהא $g\in C^{\alpha}(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$ אזי $\mathcal{D}_{p}(g\circ f)=\mathcal{D}_{f(p)}(g)\cdot\mathcal{D}_{p}(f)$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ אזי $(\mathcal{D}_{p}f)(v)=\mathcal{D}_{p}(f)\cdot v$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{F=0\}$ הצגה סתומה רגולרית עבור סביבה של p אזי $T_{p}(\mathcal{M})=\operatorname{span}\left(\{\nabla F_{1}(p),\ldots,\nabla F_{n-k}(p)\}^{\perp}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_{1}),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_{k})\right\}$ בסיס של $T_{p}(\mathcal{M})$.

הערה: נגדיר את $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_{1}),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_{k})\right\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $T_{p}(\mathcal{M})$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה ב־$\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p תהא $(\mathcal{V},\psi)$ מפה ב־$\mathcal{M}'$ באשר $\mathcal{V}$ סביבה של $f(p)$ אזי $[\mathcal{D}_{p}f]_{i,j}=\frac{\partial(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{i}}{\partial x_{j}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $g\in C^\alpha\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ באשר $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של p וכן $f=g_{\restriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}$ אזי $\mathcal{D}_pf=\left(\mathcal{D}_pg\right)_{\restriction_{T_p(\mathcal{M})}}$.

נגזרת כיוונית: תהא $f\in C^\alpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $v\in T_p\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_vf=\mathcal{D}_pf\left(v\right)$.

טענה: תהא $f\in C^\alpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m\right)$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה בסביבה של p ותהא $v\in T_p\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_vf=\sum_{i=1}^k v_i\cdot\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}$.

טענה: תהא $f\in C^\alpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $v\in T_p\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}=L_vf$.

וקטור נורמל: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in\mathbb{R}^n\backslash\left\{0\right\}$ עבורו $v\perp T_p\left(\mathcal{M}\right)$.

וקטור נורמל יחידה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי וקטור נורמל $v\in\mathbb{R}^n\backslash\left\{0\right\}$ עבורו $\|v\|=1$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{f=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $\left\{f=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא Γ_f הצגה כגרף בסביבה של p אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p),-1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^2}}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא Γ_f הצגה כגרף של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},-1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

מכפלה מצולבת: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי $v_1\times\ldots\times v_{n-1}=\sum_{i=1}^n\left(-1\right)^{i+1}\det\begin{pmatrix}(v_1)_1&\ldots&(v_{n-1})_1\\ \vdots&&\vdots\\ (v_1)_{i-1}&\ldots&(v_{n-1})_{i-1}\\ (v_1)_{i+1}&\ldots&(v_{n-1})_{i+1}\\ \vdots&&\vdots\\ (v_1)_n&\ldots&(v_{n-1})_n\end{pmatrix}e_i$.

הערה: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי בצורה לא פורמלית מתקיים $v_1\times\ldots\times v_{n-1}=\det\begin{pmatrix}e_1&|&&|\\ \vdots&v_1&\ldots&v_{n-1}\\ e_n&|&&|\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.

דטרמיננטת גראם: יהיו $v_1\ldots v_m\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Gamma\left(v_1\ldots v_m\right)=\det\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle&\ldots&\langle v_1,v_m\rangle\\ \vdots&&\vdots\\ \langle v_m,v_1\rangle&\ldots&\langle v_m,v_m\rangle\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי

- לכל $i\in[n-1]$ מתקיים $v_1\times\ldots\times v_{n-1}\perp v_i$.
- $\|v_1\times\ldots\times v_{n-1}\|=\sqrt{\Gamma\left(v_1\ldots v_{n-1}\right)}$.
- $\det\left(v_1\times\ldots\times v_{n-1},v_1,\ldots,v_{n-1}\right)\geq 0$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא r פרמטריזציה טובה בסביבה של p אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}\left(p\right)\times\ldots\times\frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}\left(p\right)$ וקטור נורמל ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא r פרמטריזציה טובה של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}\times\ldots\times\frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

סימון: תהא $f\in C^\infty\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\left(f\right)$.

סימון: תהיינה $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^k\binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in C^\infty\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha\left(f\cdot g\right)=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^k\\|\beta|\leq|\alpha|}}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta\left(f\right)\partial^{\alpha-\beta}\left(g\right)$.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה אזי $D:C^\infty\left(\mathcal{U}\right)\to C^\infty\left(\mathcal{U}\right)$ המקיימת $\mathcal{D}\left(f\right)\left(x\right)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^k\\|\alpha|\leq m}}a_\alpha\left(x\right)\cdot\partial^\alpha f\left(x\right)$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $D:C^\infty\left(\mathcal{M}\right)\to C^\infty\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ על $\mathcal{M}$ באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית מתקיים $\mathcal{D}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^k\\|\alpha|\leq m}}a_\alpha\left(x\right)\cdot\partial^\alpha\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

שדה וקטורי C^m: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ עבורה $v\left(p\right)\in T_p\left(\mathcal{M}\right)$ לכל $p\in\mathcal{M}$ וכן לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $x\mapsto\mathcal{D}_x\varphi\left(v\left(x\right)\right)$ העתקה C^m.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי $L_v:C^\infty\left(\mathcal{M}\right)\to C^\infty\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $L_v\left(f\right)\left(x\right)=L_{v(x)}\left(f\right)$ הינה אופרטור דיפרנציאלי.

תומך: תהא $f\in C\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\operatorname{supp}\left(f\right)=\overline{\left\{x\in\mathcal{M}\mid f\left(x\right)\neq0\right\}}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה אזי $C_C^\infty\left(\mathcal{U}\right)=\left\{f\in C^\infty\left(\mathcal{U}\right)\mid \text{קומפקטית } \operatorname{supp}\left(f\right)\right\}$.

אופרטור מקומי: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $L : C^{\infty}(\mathcal{M}) \to C^{\infty}(\mathcal{M})$ עבורה לכל $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה ולכל $f, g \in C_C^{\infty}$ עבורן $f_{\restriction \mathcal{U}} = g_{\restriction \mathcal{U}}$ מתקיים $L(f)_{\restriction \mathcal{U}} = L(g)_{\restriction \mathcal{U}}$.

הגדרה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\|f\|_{W,n} = \sup_{\substack{x \in w \\ |\alpha| \le n}} \|(\partial^{\alpha} f)(x)\|$.

טענה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ תהא $x \in \mathcal{W}$ עבורה $(\partial^{\alpha} f)(x) = 0$ לכל $|\alpha| \le n$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\delta \in (0, \varepsilon)$ וכן $g \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ עבורה

- $g_{\restriction B_{\frac{\delta}{2}}(x)} = 0$.
- $g_{\restriction \mathcal{W} \setminus B_{\delta}(x)} = 0$.
- $\|f - g\|_{W,n} < \varepsilon$.

סימון: יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^{k} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

משפט פיטרה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $L : C^{\infty}(\mathcal{M}) \to C^{\infty}(\mathcal{M})$ לינארית התב"ש

- L אופרטור מקומי.
- לכל $f \in C^{\infty}(\mathcal{M})$ מתקיים $\text{supp}(L(f)) \subseteq \text{supp}(f)$.
- L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^{\infty}(\mathcal{V}) \to C^{\infty}(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $x \in \mathcal{V}$ אזי קיימת $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{W}}$ קומפקטית וכן קיים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_C^{\infty}(\mathcal{W} \setminus \{x\})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \le C \|f\|_{\mathcal{W},n}$.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^{\infty}(\mathcal{V}) \to C^{\infty}(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ פתוחה עבורה קיימים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_C^{\infty}(\mathcal{W})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \le C \|f\|_{\mathcal{W},n}$ אזי L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n.

משפט פירוק יחידה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ כיסוי פתוח של X אזי קיימות $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ עבורן

- לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \le \rho_i \le 1$.
- לכל $i \in \mathbb{N}$ קיים $\alpha \in \Lambda$ עבורו $\text{supp}(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $|\{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i(\mathcal{W}) \ne 0\}| \in \mathbb{N}$.
- לכל $x \in X$ מתקיים $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i(x) = 1$.

מסקנה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ויהי $L : C^{\infty}(\mathcal{V}) \to C^{\infty}(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי אזי L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $X \subseteq \mathcal{M}$ ויהי $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ כיסוי פתוח ב־$\mathcal{M}$ של X אזי קיימות $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq C^{\infty}(\mathcal{M})$ עבורן

- לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \le \rho_i \le 1$.
- לכל $i \in \mathbb{N}$ קיים $\alpha \in \Lambda$ עבורו $\text{supp}(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$ עבורה $|\{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i(\mathcal{W}) \ne 0\}| \in \mathbb{N}$.
- לכל $x \in X$ מתקיים $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i(x) = 1$.

מקבילון: יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Pi(v_1 \dots v_k) = \left\{\sum_{i=1}^{k} t_i v_i \mid \forall i \in [k] . t_i \in [0,1]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_k(\Pi(v_1 \dots v_k)) = \sqrt{\Gamma(v_1 \dots v_k)}$.

טענה: יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^k$ אזי

- $\text{Vol}_k\left(\binom{v_1}{0^{n-k}}, \dots, \binom{v_k}{0^{n-k}}\right) = |\det(v_1 \dots v_k)|$.
- תהא $T \in O(n)$ אזי $\text{Vol}_k(Tv_1, \dots, Tv_k) = \text{Vol}_k(v_1, \dots, v_k)$.

קבוצה זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $E \subseteq \mathcal{M}$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ מתקיים כי $\varphi(E \cap \mathcal{U})$ זניחה ב־$\mathbb{R}^k$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית יהי $\{(\mathcal{U}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$ אטלס של $\mathcal{M}$ ותהא $E \subseteq \mathcal{M}$ אזי (E זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$(לכל $\alpha \in \Lambda$ מתקיים כי $\varphi_{\alpha}(E \cap \mathcal{U}_{\alpha})$ זניחה ב־$\mathbb{R}^k$).

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$ זניחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}$.

קבוצת נקודות האי־רציפות: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ אזי $B_f = \{x \in \mathcal{M} \mid x \text{ אינה רציפה על } f\}$.

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ עבורה

- f חסומה.
- $\text{supp}(f)$ קומפקטי.
- B_f זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן על יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{E}$ אינטגרבילית רימן על $\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי (E מדידה ז'ורדן ב־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$($\varphi(E)$ מדידה ז'ורדן ב־$\mathbb{R}^{k}$).

פונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathrm{supp}(f)$ קומפקטית וכן קיימת מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ עבורה $\mathrm{supp}(f)\subseteq\mathcal{U}$.

קבוצה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $A\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{A}$ נוחה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה $\{(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i})\}$ של $\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}_{i}$ נוחה לכל $i\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימות $f_{1}\ldots f_{n}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה $r_{i}:G_{i}\to\mathcal{M}$ פרמטריזציות טובות באשר $G_{i}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ וכן $i\in\{1,2\}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי
$\int_{G_{1}}(f\circ r_{1})(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}(r_{1})^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}(r_{1})\right)}\mathrm{d}q=\int_{G_{2}}(f\circ r_{2})(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}(r_{2})^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}(r_{2})\right)}\mathrm{d}q$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}(f\circ r)(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}(r)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}(r)\right)}\mathrm{d}q$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}(f\circ r)(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial r}{\partial x_{1}}\ldots\frac{\partial r}{\partial x_{k}}\right)}\mathrm{d}q$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}=\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid(\mathrm{supp}(f)\subseteq\mathcal{U})\wedge(\text{נוחה ואינטגרבילית רימן } f)\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R_{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_{1}\ldots f_{n},g_{1}\ldots g_{m}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$ וכן $f=\sum_{i=1}^{m}g_{i}$ אזי $\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{M}}f_{i}=\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{M}}g_{i}$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_{1}\ldots f_{n}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{M}}f_{i}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})=\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid\text{אינטגרבילית רימן } f\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R(\mathcal{M})\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}f\mathrm{dVol}_{k}$.

מיצוי ז'ורדן של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $(E_{i})_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{M})$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}=\mathcal{M}$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר B_{f} זניחה אזי אם קיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות סגורות $(E_{i})_{i=1}^{\infty}$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\lim_{i\to\infty}\int_{E_{i}}f\cdot\mathbb{1}_{E_{i}}=L$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=L$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $(E_{i})_{i=1}^{\infty}$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\int_{\mathcal{M}}f=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{M}}f\cdot\mathbb{1}_{E_{i}}$.

נפח של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $\mathrm{Vol}_{k}(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{M}}1$.

מפות זרות: מפות $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ עבורן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

טענה: תהיינה $\{(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i})\}_{i=1}^{n}$ מפות זרות בזוגות על $\mathcal{M}$ תהא $S\subseteq\mathcal{M}$ זניחה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $f_{\restriction_{\mathcal{M}\backslash(S\cup(\biguplus_{i=1}^{n}\mathcal{U}_{i}))}}=0$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{U}_{i}}f$.

אינטגרל קווי מסוג ראשון: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathrm{Im}(\gamma)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אזי $\int_{\gamma}f\mathrm{dVol}_{1}$.

סימון: תהא $\gamma\in C([a,b],\mathbb{R}^{n})$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\lim_{m\to\infty}\sup_{a=t_{0}<\ldots<t_{m}=b}\sum_{i=1}^{m}\|\gamma(t_{i})-\gamma(t_{i-1})\|$.

טענה: תהא $\gamma\in C^{1}([a,b],\mathbb{R}^{n})$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\int_{a}^{b}\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_{1}(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית ותהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Length}(\gamma)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ותהא $f\in C^{1}(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{Length}(\Gamma_{f})=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(t))^{2}}\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $r,\theta\in C^{1}(\mathbb{R})$ נגדיר $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^{2}$ כך $\gamma(t)=(r(t)\cos(\theta(t)),r(t)\sin(\theta(t)))$ אזי $\|\gamma'\|=\sqrt{r^{2}+r'}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_{2}(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^3$ יריעה דו־מימדית ותהא $r:G\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה באשר $G\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\text{Area}\left(\mathcal{M}\right)=\int_G\left|\frac{\partial r}{\partial x_1}\left(x\right)\times\frac{\partial r}{\partial x_2}\left(y\right)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\text{Area}\left(\Gamma_f\right)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x,y\right)\right\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

טענה: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\det\left(I+uv^T\right)=1+\langle u,v\rangle$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ אזי $\text{Vol}_k\left(\Gamma_f\right)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x\right)\right\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}\right)$ ותהא $\alpha:\Gamma_f\to\mathbb{R}$ באשר $\alpha\left(x\right)$ הזווית בין הנורמל של Γ_f בנקודה x לבין ציר e_{k+1} אזי $\sqrt{1+\left\|\nabla f\left(x\right)\right\|^2}=\frac{1}{\cos\left(\alpha\left(x\right)\right)}$.

משפט ארכימדס: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\text{Area}\left(\mathcal{M}\right)=2\pi h$.

מסקנה: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\text{Area}\left(\mathcal{M}\right)=2\pi hR$.

קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים מקבילים אזי $P_{H_1,H_2}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\max\left\{d\left(x,H_1\right),d\left(x,H_2\right)\right\}\le d\left(H_1,H_2\right)\right\}$.

רוחב קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים אזי $\text{Width}\left(P_{H_1,H_2}\right)=d\left(H_1,H_2\right)$.

רוחב גוף: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\text{Width}\left(K\right)=\inf_{\left\{K\subseteq P\mid\text{קורה } P\right\}}\left(\text{Width}\left(P\right)\right)$.

משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $\text{Width}\left(K\right)\le\sum_{i=1}^m\text{Width}\left(P_i\right)$.

רוחב יחסי של קורה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ותהא P קורה אזי $\text{Width}_K\left(P\right)=\inf_{m\in\mathbb{R}_+}\left\{m\in\mathbb{R}_+\mid\exists a\in\mathbb{R}^n.K\subseteq m\cdot P+a\right\}$.

השערת באנג: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^m\text{Width}_K\left(P_i\right)$. השערה פתוחה

טענה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי עבורו $K=-K$ ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^m\text{Width}_K\left(P_i\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ אזי $\varphi^{-1}\left(t\right)$ על־משטח.

טענה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi\left(\mathcal{V}\right)=\left(a,b\right)$ ותהא $p\in\mathcal{V}$ אזי קיים $\delta>0$ עבורו לכל $f\in R\left(V_\delta\left(p\right)\right)$ באשר $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית מתקיים $\int_{B_\delta\left(p\right)}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\left\|\nabla\varphi\left(x\right)\right\|}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x\right)\mathrm{d}t$.

משפט נוחסאת קו־שטח: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi\left(\mathcal{V}\right)=\left(a,b\right)$ ותהא $f\in R\left(\mathcal{V}\right)$ באשר $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\left\|\nabla\varphi\left(x\right)\right\|}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x\right)\mathrm{d}t$.

גרדיאנט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $u\in T_x\left(\mathcal{M}\right)$ עבורו $L_v\varphi\left(x\right)=\langle u,v\rangle$ לכל $v\in T_x\left(\mathcal{M}\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי הגרדיאנט של φ בנקודה x הוא $\nabla_x\varphi$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של $x\in\mathcal{M}$ ותהא $\psi\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ באשר $\psi_{\restriction\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}=\varphi_{\restriction\mathcal{U}}$ אזי $\nabla_x\varphi=\text{Proj}_{T_x\left(\mathcal{M}\right)}\left(\nabla_x\psi\right)$.

משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi\left(\mathcal{M}\right)=\left(a,b\right)$ ותהא $f\in R\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\left\|\nabla\varphi\left(x\right)\right\|}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x\right)\mathrm{d}t$.

מסקנה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}^k\right)$ באשר $\text{rank}\left(\mathcal{D}_x\varphi\right)=k$ ותהא $f\in R\left(\mathcal{V}\right)$ באשר $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_{\varphi\left(\mathcal{V}\right)}\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{\det\left(\left(\mathcal{D}_x\varphi\right)\cdot\left(\mathcal{D}_x\varphi\right)^T\right)}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x\right)\mathrm{d}t$.

טענה: תהא $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהא $A\in O\left(n+1\right)$ אזי $\int_{\mathbb{S}^n}f\left(x\right)\mathrm{dVol}_n=\int_{\mathbb{S}^n}f\left(Ax\right)\mathrm{dVol}_n$.

טענה: יהי $r>0$ אזי $\text{Vol}_n\left(r\cdot\mathbb{S}^n\right)=r^n\cdot\text{Vol}_n\left(\mathbb{S}^n\right)$.

טענה שטח פנים של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

טענה נפח של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_n\left(B_1\left(0\right)\right)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathfrak{X}^\alpha\left(\mathcal{M}\right)=\left\{v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k\mid \text{שדה וקטורי } C^\alpha \text{ מעל } \mathcal{M}\ v\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה C^α ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}\in\mathfrak{X}^\alpha\left(\mathcal{U}\right)$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ ולכל $i\in\left[k\right]$ מתקיים כי $\left\langle v\left(x\right),\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}\left(x\right)\right\rangle$ הינה C^α).

טענה: יהי v שדה וקטורי על $\mathcal{M}$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$($v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k$ הינה C^α).

שדה וקטורי C^m מעל תת־קבוצה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$ אזי $v:A\to\mathbb{R}^k$ עבורו $v(x)\in T_x(\mathcal{M})$ וכן לכל $p\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ וקיים $u\in\mathfrak{X}^m(\mathcal{U})$ עבורו $u_{\restriction A\cap\mathcal{U}}=v_{\restriction A\cap\mathcal{U}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ ותהא $v:A\to\mathbb{R}^k$ אזי (v שדה וקטורי C^α מעל A)$\Longleftrightarrow$(קיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה ב־$\mathcal{M}$ וקיימת $u\in\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$ עבורו $u_{\restriction\mathcal{U}}=v$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ אזי $\nabla\varphi\in\mathfrak{X}^0(\mathcal{M})$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ על־משטח קשיר אזי ($\mathcal{M}$ בעל 0 קו־אוריינטציות)$\vee$($\mathcal{M}$ בעל 2 קו־אוריינטציות).

שטף: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{M}}\langle F(x),N(x)\rangle\,\text{dVol}_{n-1}(x)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהיו $F_1,F_2\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורם F_1,F_2 שדות וקטוריים דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{\alpha F_1+\beta F_2}(\mathcal{M})=\alpha\text{Flux}_{F_1}(\mathcal{M})+\beta\text{Flux}_{F_2}(\mathcal{M})$.

טענה: יהיו $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים זרים עד כדי קבוצה זניחה בעלי קו־אוריינטציה N_1,N_2 בהתאמה ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ אזי $\text{Flux}_F(M_1\cup\mathcal{M}_2)=\text{Flux}_F(\mathcal{M}_1)+\text{Flux}_F(\mathcal{M}_2)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח בעל קו־אוריינטציה N ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M},N)=\text{Flux}_F(\mathcal{M},-N)$.

דיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(F)(x)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ נגדיר $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ כך $f(x)=F(x)$ אזי $\text{div}(F)(x)=\text{trace}(\mathcal{D}_x(f))$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $A\in\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{div}(A\circ F)\left(A^{-1}x\right)=\text{div}(F)(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(f\cdot F)=f\cdot\text{div}(F)+\langle\nabla f,F\rangle$.

לפלסיאן: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f=\text{div}(\nabla f)$.

סימון: תהא $x\in\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Cube}_\ell(x)=\{Q\subseteq\mathbb{R}^n\mid(x\in Q)\wedge(\text{אורך הצלע של } Q \text{ הוא } \ell)\wedge(\text{קובייה } Q)\}$.

הערה: תהא $x\in\mathbb{R}^n$ ויהי $Q\in\text{Cube}_\ell(x)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial Q)=\sum\text{Flux}_F(E_i)$ באשר $\{E_i\}$ פאות Q עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני ל־Q.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(F)(x)=\lim_{\substack{Q\in\text{Cube}_\ell(x)\\ \ell\to0}}\frac{1}{\text{Vol}_n(Q)}\text{Flux}_F(\partial Q)$.

נקודת שפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $x\in\partial\mathcal{U}$ עבורה קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של x וקיימת $f\in C^1(\mathcal{W},\mathbb{R})$ עבורה $\nabla_x f\neq0$ וכן $f(x)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{f<0\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}=\{x\in\partial\mathcal{U}\mid \text{נקודת שפה חלקה } x\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה תהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{W},\mathbb{R})$ באשר $\mathcal{W}$ סביבה של x המקיימת $\nabla_x f\neq0$ וכן $f(x)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{f<0\}$ אזי $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של x עבורה $\mathcal{W}\cap\partial\mathcal{U}$ היפר־משטח.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־$\partial\mathcal{U}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ יריעה.

קבוצה חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial\mathcal{U}=\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$.

קבוצה בעלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\text{Vol}_n\left((\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})+B_\varepsilon^n(0)\right)=0$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ עבורה $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f)$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}:\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ נורמל יחידה.

קו־אוריינטציה חיצונית קנונית לשפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $N:\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ באשר $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f)$ מתקיים $N_{\restriction\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

שטף: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ בעלת שפה כמעט חלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\partial\mathcal{U}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U})=\text{Flux}_F(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})$.

למה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ יהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ ותהא $A\in\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Flux}_{A\circ F}(A\cdot\mathcal{M})=\text{Flux}_F(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $r>0$ תהא $g\in C^1(B_r(a),\mathbb{R})$ באשר $\frac{\partial g}{\partial x_i}\neq0$ לכל $i\in[n]$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^1(\mathbb{R}^n)$ באשר $\text{supp}(F)\subseteq B_r(a)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\{g<0\})=\int_{\{g<0\}}\text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})<\infty$ תהא $a\in\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיים $r>0$ עבורו לכל $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיים $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ולכל $F\in\mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ המקיים $\text{supp}(F)\subseteq B_r(a)$ מתקיים $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U})=\int_{\mathcal{U}}\text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה וחלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ויהי $\varepsilon>0$ אזי $X+B_{\varepsilon}\left(0\right)$ מדידה ז'ורדן.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית אזי קיים $C\in\mathbb{R}$ עבורו לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\psi\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ המקיימת

- $0\le\psi\le1$.
- $\psi_{\restriction X+B_{\varepsilon}\left(0\right)}=1$.
- $\psi_{\restriction\mathbb{R}^{n}\backslash\left(X+B_{3\varepsilon}\left(0\right)\right)}=0$.
- לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_{i}}\right|\le\frac{C}{\varepsilon}$.

משפט הדיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ ויהי N נורמל חיצוני ל־$\mathcal{U}$ אזי $\text{Vol}_{n}\left(\mathcal{U}\right)=\frac{1}{n}\int_{\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}\left\langle x,N\right\rangle \text{dVol}_{n-1}\left(x\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ תהיינה $f,g\in C^{1}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\int_{\mathcal{U}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\cdot g\right)=\int_{\partial\mathcal{U}}\left(f\cdot g\cdot\left\langle N,v\right\rangle \right)-\int_{\mathcal{U}}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\right)$.

טענה נוסחאות גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $u,v:\mathcal{W}\to\mathbb{R}$ אזי

1. נניח כי u הינה C^{2} אזי $\int_{G}\Delta u=\int_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial N}$.
2. נניח כי v הינה C^{2} וכן u הינה C^{1} אזי $\int_{G}\left\langle \nabla u,\nabla v\right\rangle =-\int_{G}u\cdot\Delta v+\int_{\partial G}u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.
3. נניח כי u,v הן C^{2} אזי $\int_{G}\left(u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u\right)=\int_{\partial G}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial N}\right)$.

אנרגיית דיריכלה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_{G}\left\Vert \nabla v\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_{G}\left\Vert \nabla v\right\Vert ^{2}=-\int_{G}v\cdot\Delta v+\int_{\partial G}v\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.

פונקציה הרמונית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $u\in C^{2}\left(G,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $\Delta u=0$.

טענה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי

- $\text{Flux}_{\nabla u}\left(\partial G\right)=0$.
- נניח כי $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction\partial G}=0$ אזי u קבועה מקומית ב־G.
- נניח כי $u_{\restriction\partial G}$ קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב־G.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\fint_{\mathcal{U}}f=\frac{1}{\text{Vol}\left(\mathcal{U}\right)}\int_{\mathcal{U}}f$.

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{B_{r}\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=\fint_{\partial B_{r}\left(a\right)}u$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{B_{r}\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=\fint_{B_{r}\left(a\right)}u$.

טענה: תהא $f\in C^{2}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Delta f\left(a\right)=\lim_{r\to0}\frac{2n}{r^{2}}\left(\fint_{\partial B_{r}\left(a\right)}f-f\left(a\right)\right)$.

מסקנה עקרון המקסימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\max\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

מסקנה עקרון המינימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\min\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

משפט ליוביל: תהא $u:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי u קבועה.

מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלעיל אזי u קבועה.

טענה אינטגרל פואסון: יהי $n\ge3$ תהא $u\in C^{2}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ באשר $\text{supp}\left(u\right)$ קומפקטי ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $u\left(a\right)=\frac{1}{\text{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\left(n-2\right)}\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{\Delta u\left(x\right)}{\left|x-a\right|^{n-2}}\text{d}x$.

משפט גרעין פואסון: תהא $u:\overline{B_{1}^{n}\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר $u_{\restriction B_{1}^{n}\left(0\right)}$ הרמונית אזי לכל $a\in B_{1}^{n}\left(0\right)$ מתקיים $u\left(a\right)=\frac{1}{\text{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u\left(x\right)\cdot\frac{1-\left\Vert a\right\Vert ^{2}}{\left\Vert x-a\right\Vert ^{n}}\text{dVol}_{n-1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^{2}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}\right)$ אזי $u:\overline{B_{1}^{n}\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $u\left(x\right)=\frac{1}{\text{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y\right)\cdot\frac{1-\left\Vert x\right\Vert ^{2}}{\left\Vert y-x\right\Vert ^{n}}\text{dVol}_{n-1}\left(y\right)$ הינה הרמונית וכן $u_{\restriction_{\mathbb{S}^{n-1}}}=f$.

המרחב הדואלי: יהי V מ"ו ממשי אזי $V^{*}=\text{Hom}\left(V,\mathbb{R}\right)$.

סימון: יהי V מ"ו ממשי יהי $\left\{ e_{1}\ldots e_{n}\right\}$ בסיס של V ויהי $i\in\left[n\right]$ אזי $e_{i}^{*}:V\to\mathbb{R}$ המוגדרת $e_{i}^{*}\left(e_{j}\right)=\delta_{i,j}$.

טענה: יהי V מ"ו ממשי ויהי $\left\{ e_{1}\ldots e_{n}\right\}$ בסיס של V אזי $\left\{ e_{1}^{*}\ldots e_{n}^{*}\right\}$ בסיס של V^{*}.

המרחב הקו־משיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)^{*}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}^{*}\left(\mathcal{M}\right)=T_{p}\left(\mathcal{M}\right)^{*}$.

קו־וקטורים: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in T_{p}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

1־תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\omega:\mathcal{M}\to\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{*}$ המקיימת $\omega\left(x\right)\in T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא ω 1־תבנית דיפרנציאלית על $\mathcal{M}$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\omega_{x}=\omega\left(x\right)$.

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_{x}\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{*}$ אלא $\omega_{x}\in T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\omega_{x}\left(u\right)=\left\langle v\left(x\right),u\right\rangle$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

נגזרת חיצונית: תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\text{d}f:\mathcal{M}\to\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{*}$ המוגדרת $\left(\text{d}f\right)\left(x\right)\left(v\right)=\frac{\partial f}{\partial v}\left(x\right)$.

טענה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\text{d}f$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

טענה כלל לייבניץ': תהיינה $f,g\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\text{d}\left(f\cdot g\right)=f\cdot\text{d}g+g\cdot\text{d}f$.

הטלה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $i\in\left[n\right]$ אזי $q_{i}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $q_{i}\left(u\right)=u_{i}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $x_{i}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $x_{i}=q_{i}\circ\varphi$.

מערכת קואורדינטות מקומיות על יריעה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\left\{ x_{1}\ldots x_{k}\right\}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ויהי $i\in\left[k\right]$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(p\right)=\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_{i}}\left(\varphi\left(p\right)\right)$.

הערה: מטרת הסימונים מלעיל הינה לאפשר קואורדינטות $x_{1}\ldots x_{k}$ על $\mathcal{M}$ כמו ב־$\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $i\in\left[k\right]$ אזי $\text{d}x_{i}$ 1־תבנית דיפרנציאלית ב־$\mathcal{U}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ויהי $i\in\left[n\right]$ אזי $\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(p\right)=\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_{i}}\left(\varphi\left(p\right)\right)$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i\in\left[k\right]$ ויהי $p\in\mathcal{U}$ אזי $\text{d}x_{i}|_{p}=\text{d}x_{i}\left(p\right)$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $x\in\mathcal{U}$ אזי $\left\{ \text{d}x_{1}|_{x},\ldots,\text{d}x_{k}|_{x}\right\}$ בסיס של $T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i\in\left[k\right]$ ויהי $p\in\mathcal{U}$ אזי $\text{d}x_{i}|_{p}=\left(\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(p\right)\right)^{*}$.

1־תבנית דיפרנציאלית C^{m}: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי 1־תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ של $\mathcal{M}$ ולכל $f_{1}\ldots f_{k}\in\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ באשר $\omega=\sum_{i=1}^{k}f_{i}\cdot\text{d}x_{i}$ מתקיים $f_{1}\ldots f_{k}\in C^{m}\left(\mathcal{U}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא ω 1־תבנית דיפרנציאלית אזי $\left(\omega\in C^{m}\right)\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\left\{ \left(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha}\right)\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו לכל $\alpha\in\Lambda$ ולכל $f_{1}\ldots f_{k}\in\mathcal{U}_{\alpha}\to\mathbb{R}$ באשר $\omega=\sum_{i=1}^{k}f_{i}\cdot\text{d}x_{i}$ מתקיים $f_{1}\ldots f_{k}\in C^{m}\left(\mathcal{U}_{\alpha}\right)$).

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)=\left\{ \omega\mid\mathcal{M}\text{ על }C^{\infty}\text{ 1־תבנית דיפרנציאלית }\omega\right\}$.

טענה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\text{d}f=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\cdot\text{d}x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in C^{m+1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\text{d}f$ הינה 1־תבנית דיפרנציאלית C^{m}.

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right)$ אזי $F^{*}:\Omega^{1}\left(\mathcal{N}\right)\to\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $F^{*}\left(\omega,x,v\right)=\omega_{F\left(x\right)}\left(\mathcal{D}_{x}\left(F\right)\cdot v\right)$.

סימון: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $N\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $F\in C^{1}\left(M,N\right)$ אזי $\left(F_{\omega}^{*}\right)_{x}\left(v\right)=F^{*}\left(\omega,x,v\right)$.

אינטגרל קווי מסוג שני: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega=\int_{a}^{b}\omega_{\gamma\left(t\right)}\left(\gamma'\left(t\right)\right)\text{d}t$.

טענה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\int_{\gamma}:\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין תהא $\psi:\left[\alpha,\beta\right]\to\left[a,b\right]$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega=\int_{\gamma\circ\psi}\omega$.

העתקה לינארית שומרת אוריינטציה: העתקה $\varphi\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\det\left(\left[\varphi\right]_{\text{st}}\right)>0$.

דיפאומורפיזם שומר אוריינטציה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי דיפאומורפיזם $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ עבורו $\mathcal{D}_{x}\left(f\right)$ שומרת אוריינטרציה לכל $x\in\mathcal{U}$.

אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה פשוטה אזי $O:\text{Im}\left(\gamma\right)\to\mathbb{R}^{n}$ רציפה למקוטעין עבורה $O\left(x\right)\in\left\{ \pm\dot{\gamma}\left(\gamma^{-1}\left(x\right)\right)\right\}$.

הערה: אם המסילה לא פשוטה נפרק אותה מספר מסילות פשוטות ונחבר בסוף.

האוריינטציה הסטנדרטית של מסילה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה פשוטה C^1 למקוטעין אזי $O:\mathrm{Im}(\gamma)\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת $O(x)=\dot{\gamma}(\gamma^{-1}(x))$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי האוריינטציה הסטנדרטית של γ הינה אוריינטציה של $\mathrm{Im}(\gamma)$.

היפוך אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\overline{\gamma}:[a,b]\to\mathcal{M}$ המוגדרת $\overline{\gamma}(t)=\gamma(a+b-t)$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\int_{\overline{\gamma}}\omega=-\int_{\gamma}\omega$.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהא $\omega\in\Omega^1([a,b])$ אזי $\int_a^b\omega=-\int_b^a\omega$.

שרשור מסילות: תהא $\gamma_1:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\gamma_2:[b,c]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $(\gamma_1\cup\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(t) & t\in[a,b]\\ \gamma_2(t) & t\in(b,c]\end{cases}$.

טענה: תהא $\gamma_1:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין תהא $\gamma_2:[b,c]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\omega=\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר לכל $t\in[a,b]$ קיימת $\mathcal{U}$ סביבה של $\gamma(t)$ בה f הינה C^1 אזי $\int_\gamma \mathrm{d}f=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$.

סימון: תהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\|\omega_x\|_\infty=\max\{\omega_x(v)\mid(v\in T_x(\mathcal{M}))\wedge(\|v\|=1)\}$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_\gamma\omega\le\mathrm{Length}(\gamma)\cdot\max_{t\in[a,b]}\left\|\omega_{\gamma(t)}\right\|_\infty$.

הערה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial^{\mathrm{sm}}G)<\infty$ אזי ניתן לחשוב על ∂G בתור איחוד סופי זר של מסילות סגורות.

אוריינטציית רגל שמאל: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial^{\mathrm{sm}}G)<\infty$ תהא N קו־אוריינטציה חיצונית של ∂G ותהיינה $\gamma_1\ldots\gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup\gamma_i=\partial G$ אזי אוריינטציה $O:\partial G\to\mathbb{R}^2$ עבורה $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot O(x)=-N(x)$ לכל $x\in\partial G$.

טענה פרמטריזציה נורמלית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial^{\mathrm{sm}}G)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 אזי קיימות $\gamma_1\ldots\gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup\gamma_i=\partial G$ וכן לכל $i\in[m]$ ולכל $t\in\mathrm{Dom}(\gamma_i)$ מתקיים $\|\gamma_i'(t)\|=1$.

משפט גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial^{\mathrm{sm}}G)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $P,Q\in C^1(\mathcal{W})$ אזי $\int_{\partial G}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\int_G\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

מסקנה נוסחת גאוס: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}(\partial^{\mathrm{sm}}G)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין אזי $\mathrm{Area}(G)=\frac{1}{2}\int_{\partial G}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

העתקה לינארית אנטי סימטרית: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $T\in\mathrm{Hom}(V^k,\mathbb{R})$ עבורה לכל $u_1\ldots u_k\in V$ ולכל $i,j\in[k]$ שונים מתקיים כי $T\left(\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_k\end{pmatrix}\right)=-T\left(R_{i\leftrightarrow j}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_k\end{pmatrix}\right)$.

הערה: יהיו $i,j\in[n]$ אזי $R_{i\leftrightarrow j}\in M_n(A)$ הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות i,j.

k־תבנית: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\bigwedge^k V^*=\left\{\omega\in\mathrm{Hom}(V^k,\mathbb{R})\mid \text{אנטי סימטרית } \omega\right\}$.

סימון: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\bigwedge^0V^*=\mathbb{R}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\det_n\in\bigwedge^nV^*$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהיו $u_1\ldots u_k\in V$ תלויים לינארית ותהא $\omega\in\bigwedge^kV^*$ אזי $\omega(u_1\ldots u_k)=0$.

מכפלת וודג'/מכפלת יתד: יהיו $\varphi_1\ldots\varphi_k\in V^*$ אזי $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\in\bigwedge^kV^*$ באשר $(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)(u_1\ldots u_k)=\det\left((\varphi_i(u_j))_{i,j\in[k]}\right)$ לכל $u_1\ldots u_k\in V$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהי $e_1\ldots e_n$ בסיס של V ויהי $k\in[n]$ אזי $\left\{e_{a_1}^*\wedge\ldots\wedge e_{a_k}^*\;\middle|\;1\le a_1<\ldots<a_k\le n\right\}$ בסיס של $\bigwedge^kV^*$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\dim\left(\bigwedge^kV^*\right)=\binom{n}{k}$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\bigwedge^nV^*=\mathrm{span}\{\det_n\}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $k,\ell\in\mathbb{N}$ אזי קיימת ויחידה $\wedge:\bigwedge^kV^*\times\bigwedge^\ell V^*\to\bigwedge^{k+\ell}V^*$ עבורה $(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)\wedge(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\wedge\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k$ לכל $\varphi_1\ldots\varphi_k,\psi_1\ldots\psi_\ell\in V^*$.

p־תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega:\mathcal{M}\to\mathrm{Hom}((\mathbb{R}^n)^p,\mathbb{R})$ המקיימת $\omega(x)\in\bigwedge^pT_x^*(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω p־תבנית דיפרנציאלית על $\mathcal{M}$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\omega_x=\omega(x)$.

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_x\in\mathrm{Hom}((\mathbb{R}^n)^p,\mathbb{R})$ אלא $\omega_x\in\bigwedge^pT_x^*(\mathcal{M})$.

מכפלת וודג'/מכפלת יתד: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω p־תבנית דיפרנציאלית ותהא ν q־תבנית דיפרנציאלית אזי $\omega\wedge\nu$ הינה $(p+q)$־תבנית דיפרנציאלית באשר $(\omega\wedge\nu)_x=\omega_x\wedge\nu_x$.

סימון: תהא $a:[p]\to[k]$ באשר $1\le a_1<\ldots<a_k\le n$ אזי $\mathrm{d}x_{\{a_1\ldots a_p\}}=\mathrm{d}x_{a_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{a_p}$.

p־תבנית דיפרנציאלית C^m: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי p־תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ של $\mathcal{M}$ ולכל $f\in\mathcal{P}_p([k])\to(\mathcal{U}\to\mathbb{R})$ באשר $\omega=\sum_{I\in\mathcal{P}_p([k])}f_I\cdot\mathrm{d}x_I$ מתקיים $f_I\in C^m(\mathcal{U})$ לכל $I\in\mathcal{P}_p([k])$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\Omega^p(\mathcal{M})=\{\omega\mid$ ω הינה p־תבנית דיפרנציאלית C^∞ על $\mathcal{M}\}$.

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $F\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$ אזי $H^*:\Omega^p(\mathcal{N})\to\Omega^p(\mathcal{M})$ המוגדרת $H^*(\omega,x,v_1\ldots v_p)=\omega_{H(x)}(\mathcal{D}_x(H)\cdot v_1,\ldots,\mathcal{D}_x(H)\cdot v_p)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $H\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$ אזי $(H^*_\omega)_x(v)=H^*(\omega,x,v)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\mathcal{L}\subseteq\mathbb{R}^\ell$ יריעה תהא $H\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ותהא $G\in C^1(\mathcal{N},\mathcal{L})$ אזי $(G\circ H)^*=H^*\circ G^*$.

נגזרת חיצונית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\mathrm{d}:\Omega^p(\mathcal{U})\to\Omega^{p+1}(\mathcal{U})$ המוגדרת $\mathrm{d}\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_p([k])}f_I\cdot\mathrm{d}x_I\right)=\sum_{I\in\mathcal{P}_p([k])}(\mathrm{d}f_I\wedge\mathrm{d}x_I)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי d לינארית.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\Omega(\mathcal{U})=\bigcup_{p\in\mathbb{N}_+}\Omega^p(\mathcal{U})$.

אופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות דיפרנציאליות: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\mathrm{b}:\Omega(\mathcal{U})\to\Omega(\mathcal{U})$ באשר $\mathrm{b}(\omega)\in\Omega^{p+1}(\mathcal{U})$ לכל $\omega\in\Omega^p(\mathcal{U})$ המקיימת $\mathrm{b}(\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k)=\sum_{i=1}^k(-1)^{i+1}(\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_{i-1}\wedge\mathrm{b}(\alpha_i)\wedge\alpha_{i+1}\wedge\ldots\wedge\alpha_k)$ לכל $\alpha_1\ldots\alpha_k\in\mathcal{U}^*$.

טענה כלל לייבניץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי d מקיימת את כלל לייבניץ.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\mathrm{b}:\Omega(\mathcal{U})\to\Omega(\mathcal{U})$ לינארית המקיימת את כלל לייבניץ וכן $\mathrm{b}(\mathrm{b}(\omega))=0$ לכל $\omega\in\Omega(\mathcal{U})$ וכן $\mathrm{b}(f)=\mathrm{d}f$ לכל $f\in C^\infty(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{b}=\mathrm{d}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{V})$ אזי $\mathrm{d}(F^*_\omega)=F^*_{\mathrm{d}\omega}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{V})$ אזי $\left(F^{-1}\right)^*=(F^*)^{-1}$.

סימון: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{V})$ אזי $F^{-*}=\left(F^{-1}\right)^*$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{M})$ ותהיינה $(\mathcal{U}_1,\varphi_1),(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_2^*\left(\mathrm{d}\left(\varphi_2^{-*}(\omega)\right)\right)=\varphi_1^*\left(\mathrm{d}\left(\varphi_1^{-*}(\omega)\right)\right)$.

הגדרה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{M})$ אזי $\mathrm{d}\omega\in\Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מתקיים $\varphi^{-*}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(\varphi^{-*}\omega)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $(\mathcal{M},\varphi)$ מפה ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{M})$ אזי $\mathrm{d}\omega=\varphi^*(\mathrm{d}(\varphi^{-*}\omega))$.

הערה: בקבוצה $\mathbb{R}^n$ עצמה p־תבנית היא שקולה ל־p־תבנית דיפרנציאלית מהיות ומתקיים $T_p(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\det_n=\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n$.

אינגטרל: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f\in C(\mathcal{U})$ עבורה $f\cdot\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_k$ בעלת תומך קומפקטי אזי $\int_\mathcal{U}(f\cdot\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_n)=\int_\mathcal{U}f(x)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$.

הערה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ויהי $\omega\in\Omega^k(\mathcal{U})$ אזי קיימת $f\in C(\mathcal{U})$ עבורה $\omega=f\cdot\det_k$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחומים יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^k(\mathcal{U})$ בעלת תומך קומפקטי אזי $\int_\mathcal{U}\omega=\mathrm{sign}(\det(\mathcal{D}(T)))\cdot\int_\mathcal{V}T^*_\omega$.

תבנית נפח: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\omega\in\Omega^k(\mathcal{M})$ עבורה $\omega_x\neq0$ לכל $x\in\mathcal{M}$.

תבניות נפח שקולות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי תבניות נפח $\omega_1,\omega_2\in\Omega^k(\mathcal{M})$ עבורן קיימת $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר $f>0$ המקיימת $\omega_2=f\cdot\omega_1$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי שקילות תבניות נפח על $\mathcal{M}$ הינו יחס שקילות.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה קשירה אזי קיימות לכל היותר 2 מחלקות שקילות של תבניות נפח על $\mathcal{M}$.

אוריינטציה של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה קשירה אזי מחלקת שקילות של תבניות נפח על $\mathcal{M}$.

האוריינטציה האוקלידית הסטנדרטית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי מחלקת השקילות של $\det_n$.

תבנית נפח חיובית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה אזי תבנית נפח $\eta\in\Omega^k(\mathcal{M})$ השייכת לאוריינטציה.

מפה משמרת אוריינטציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה אזי מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ עבורה לכל η תבנית נפח חיובית על $\mathcal{U}$ מתקיים כי $\left(\varphi^{-1}\right)^*(\eta)$ תבנית נפח חיובית על $\mathbb{R}^k$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי קיימת מפה משמרת אוריינטציה $(\mathcal{U},\psi)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית עם אוריינטציה תהיינה $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ מפות משמרות אוריינטציה ותהא $\omega\in\Omega^{k}(\mathcal{M})$ בעלת תומך קומפקטי עבורה $\text{supp}(\omega)\subseteq\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ אזי $\int_{\psi(\mathcal{V})}\psi_{\omega}^{-*}=\int_{\varphi(\mathcal{U})}\varphi_{\omega}^{-*}$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית עם אוריינטציה תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה משמרת אוריינטציה ותהא $\omega\in\Omega^{k}(\mathcal{M})$ בעלת תומך קומפקטי עבורה $\text{supp}(\omega)\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\int_{\mathcal{M}}\omega=\int_{\varphi(\mathcal{U})}\varphi_{\omega}^{-*}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית תהא ω k-תבנית יהיו $\{(\mathcal{V}_i,\psi_i)\}_{i=1}^{\infty},\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ כיסויים של $\text{supp}(\omega)$ יהי $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ פירוק יחידה של $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ ויהי $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ פירוק יחידה של $\{(\mathcal{V}_i,\psi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ אזי $\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathcal{M}}(\eta_i\cdot\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathcal{M}}(\rho_i\cdot\omega)$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית תהא ω k-תבנית יהי $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ כיסוי של $\text{supp}(\omega)$ ויהי $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ פירוק יחידה של $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ אזי $\int_{\mathcal{M}}\omega=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathcal{M}}(\rho_i\cdot\omega)$.

משפט גרין בשפה של תבנית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G)<\infty$ וכן ∂G הינה C^{1} למקוטעין תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל-G ותהא ω 1-תבנית על $\mathcal{W}$ אזי $\int_{G}\text{d}\omega=\int_{\partial G}\omega$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

1-תבנית דיפרנציאלית סגורה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\omega\in\Omega^{1}(\mathcal{M})$ עבורה $\text{d}\omega=0$.

1-תבנית דיפרנציאלית מדוייקת: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\omega\in\Omega^{1}(\mathcal{M})$ עבורה קיימת $f\in C^{\infty}(\mathcal{M})$ המקיימת $\omega=\text{d}f$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^{1}(\mathcal{M})$ מדוייקת אזי ω סגורה.

1-תבנית דיפרנציאלית משמרת: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\omega\in\Omega^{1}(\mathcal{M})$ עבורה לכל מסילה סגורה C^{1} למקוטעין γ מתקיים $\int_{\gamma}\omega=0$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^{1}(\mathcal{M})$ אזי (ω משמרת)$\Longleftrightarrow$(קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין מתקיים $\int_{\gamma}\omega=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$).

טענה: תהא $\omega\in\Omega^{1}(\mathbb{R}^{n})$ סגורה אזי ω משמרת.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^{1}(\mathcal{M})$ אזי (ω מדוייקת)$\Longleftrightarrow$(ω משמרת).

מסקנה: תהא $\omega\in\Omega^{1}(\mathbb{R}^{n})$ אזי (ω סגורה)$\Longleftrightarrow$(ω מדוייקת)$\Longleftrightarrow$(ω משמרת).

שפה גאומטרית/קצה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\partial_g\mathcal{M}=\overline{\mathcal{M}}\backslash\mathcal{M}$.

נקודת קצה חלקה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $x\in\partial_g(\mathcal{M})$ עבורה קיים $\delta>0$ וקיימת יריעה $\mathcal{N}\subseteq B_\delta(x)$ באשר $\mathcal{M}\cap B_\delta(x)\subseteq\mathcal{N}$ וקיימת $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ וקיימת פרמטריזציה טובה $r:\mathcal{V}\to\mathcal{N}$ עבורן $r^{-1}(x)\in\partial^{\text{sm}}\left(r^{-1}(\mathcal{N})\right)$.

יריעה בעלת קצה חלק: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה כל $x\in\partial_g\mathcal{M}$ הינה נקודת קצה חלקה.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית בעלת קצה חלק אזי $\partial_g\mathcal{M}$ יריעה $(k-1)$-מימדית.

אוריינטציה מושרית על קצה חלק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית בעלת קצה חלק יהי N קו-אוריינטציה ותהא $\omega\in\Omega^{k}(\mathcal{M})$ תבנית נפח אזי $\omega^{\partial}\in\Omega^{k-1}(\mathcal{M})$ המוגדרת $\omega_x^{\partial}(u_1\ldots u_{k-1})=\omega_x(N(x),u_1\ldots u_{k-1})$.

משפט סטוקס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k-מימדית חסומה בעלת קצה חלק ותהא $\omega\in\Omega^{k-1}(\mathbb{R}^{n})$ אזי $\int_{\mathcal{M}}\text{d}\omega=\int_{\partial_g\mathcal{M}}\omega$.