

פונקציית הסתברות נקודתית: $\mathbb{P} \in [0, 1]^\Omega$ המקיימת $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$.

מרחב הסתברות (מ"ה): תהא Ω קבוצה ותהא \mathbb{P} פונקציית הסתברות אזי (Ω, \mathbb{P}) .

מרחב מדגם: יהי (Ω, \mathbb{P}) מרחב הסתברות אזי Ω .

מרחב הסתברות בדיד: מרחב הסתברות (Ω, \mathbb{P}) עבורו $|\Omega| \leq \aleph_0$.

מרחב הסתברות סופי: מרחב הסתברות (Ω, \mathbb{P}) עבורו $|\Omega| \in \mathbb{N}$.

הערה: בקורס זה כל מרחבי ההסתברות הינם בדידים.

סימון: $2^A = \mathcal{P}(A)$.

מאורע: תהא $A \subseteq \Omega$ אזי $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$.

סימון: $[n] = \{1, \dots, n\}$.

משפט: יהי (Ω, \mathbb{P}) מרחב הסתברות ויהיו A, B מאורעות אזי

• משלים: $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

• אדטיביות: $\mathbb{P}(A \uplus B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

• $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B \cap A)$.

• מונוטוניות: $(A \subseteq B) \implies (\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B))$.

• הכלה והדחה: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

מסקנה: תהא פונקציית הסתברות \mathbb{P} אזי $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

משפט סיגמא-אדטיביות: יהיו $E = \bigsqcup_{i=1}^\infty E_i$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(E_i)$.

הכלה והדחה כללית: יהיו $A_1 \dots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i)$.

הכלה והדחה סימטרית: נניח כי $\forall I \subseteq [n]. (|I| = k) \implies (\mathbb{P}(A_I) = a_k)$ אזי $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} a_k$.

מרחב הסתברות אחיד: מרחב הסתברות סופי (Ω, \mathbb{P}) עבורו $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $\forall A \in 2^\Omega$.

תמורה מקרית/סידור אקראי: המרחב האחד על S_n .

משפט חסם האיחוד: יהיו A, B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

מסקנה: יהיו $A_1 \dots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$.

מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$.

אי שוויונות בונפרוני: יהיו $A_1 \dots A_n$ מאורעות ויהי $1 \leq k \leq n$ אזי

• $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \sum_{|I|=i} \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i)$ $k \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$.

• $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \sum_{|I|=i} \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i)$ $k \in \mathbb{N}_{\text{even}}$.

משפט רציפות פונקציית ההסתברות: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)$.

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^\infty A_i)$.

פונקציית גיבוב/hash: $h \in [m]^{[n]}$.

התנגשות: תהא h פונקציית גיבוב אזי $i \neq j$ עבורם $h(i) = h(j)$.

פרדוקס יום ההולדת: תהא $h \in [m]^{[n]}$ פונקציית גיבוב אזי $\frac{n(n-1)}{2m} \geq \mathbb{P}(\text{התנגשות}) \geq 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2m}}$.

מספר ראמזי: נגדיר $R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\{ \text{בכל צביעה של } K_n \text{ בשני צבעים יש } K_t \text{ מונוכרומטית} \mid n \geq R(t) \}$.

משפט: $2^{\frac{t-3}{2}} < R(t) \leq c \cdot \frac{4^t}{\sqrt{t}}$.

פונקציית הסתברות מותנית: יהי F מאורע המקיים $\mathbb{P}(F) > 0$ אזי $\mathbb{P}(\omega \mid F) = \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(F)} & \omega \in F \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

טענה: פונקציית הסתברות מותנית הינה פונקציית הסתברות.

מרחב הסתברות מותנה: יהי (Ω, \mathbb{P}) מרחב הסתברות ויהי $F \in 2^\Omega$ אזי $(\Omega, \mathbb{P}(\cdot \mid F))$.

טענה: מרחב הסתברות מותנית הוא מרחב הסתברות.

משפט: יהיו E, F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E \mid F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

כלל השרשרת: יהיו A, B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \mathbb{P}(B)$.

כלל השרשרת: יהיו $A_1 \dots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j)$.

נוסחת ההסתברות השלמה: יהיו A, B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c) \mathbb{P}(B^c)$.

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ המקיימות $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \Omega$ אזי $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)$

כלל בייס: יהיו E, F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E | F) = \frac{\mathbb{P}(E) \mathbb{P}(F|E)}{\mathbb{P}(F)}$

טענה: יהיו A, B מאורעות עבורם $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$ אזי $\mathbb{P}((\cdot | B) | C) = \mathbb{P}(\cdot | B \cap C) \mathbb{P}(C | B)$

מאורע מחזק: יהי B מאורע אזי מאורע A עבורו $\mathbb{P}(A) > 0$ המקיים $\mathbb{P}(B | A) > \mathbb{P}(B)$

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות A, B המקיימים $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$

סימון: $AB = A \cap B$

טענה: יהי A מאורע אזי $(A \in \{0, 1\}) \iff$ עם עצמו

טענה: יהיו A, B מאורעות זרים וב"ת אזי $(\mathbb{P}(A) = 0) \vee (\mathbb{P}(B) = 0)$

טענה: יהיו A, B מאורעות התב"ש

• A, B בלתי תלויים.

• A^c, B בלתי תלויים.

• A^c, B^c בלתי תלויים.

• A, B^c בלתי תלויים.

אי תלות בזוגות: מאורעות $A_1 \dots A_n$ המקיימים $\forall i \neq j. \mathbb{P}(A_i A_j) = \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j)$

אי תלות בזוגות: מאורעות $\{A_i\}_{i \in I}$ המקיימים $\forall i \neq j. \mathbb{P}(A_i A_j) = \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(A_j)$

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות $A_1 \dots A_n$ המקיימים $\forall I \subseteq [n]. \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$

הכללה: מאורעות $\{A_i\}_{i \in I}$ המקיימים $(\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)) \implies \forall J \subseteq I. (|J| \in \mathbb{N}_+) \implies$

הערה: נסמן זמנית $(A^1 = A) \wedge (A^{-1} = A^c)$

טענה: $(A_1 \dots A_n \text{ בלתי תלויים}) \iff (\bigcap_{i=1}^n A_i^{\varepsilon_i} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^{\varepsilon_i})) \iff (\forall \varepsilon \in \{\pm 1\}^n. \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i^{\varepsilon_i}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^{\varepsilon_i}))$

מסקנה: יהיו $A_1 \dots A_n, B_1$ מאורעות ב"ת אזי כל איחוד/חיתוך/משלים של $A_1 \dots A_n$ ב"ת עם B_1

פונקציית הסתברות מכפלה: יהיו $(\Omega_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $\mathbb{P}_{\Omega_1 \times \Omega_2}((\omega_1, \omega_2)) = \mathbb{P}_1(\omega_1) \mathbb{P}_2(\omega_2)$

טענה: פונקציית הסתברות מכפלה היא פונקציית הסתברות.

מרחב מכפלה: יהיו $(\Omega_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{P}_{\Omega_1 \times \Omega_2}) = (\Omega_1, \mathbb{P}_1) \otimes (\Omega_2, \mathbb{P}_2)$

טענה: מרחב מכפלה הוא מרחב הסתברות.

טענה: יהיו $(\Omega_1, \mathbb{P}_1) \dots (\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ מ"ה אזי $\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathbb{P}_i)$ מרחב הסתברות.

מלבן: מאורע $C \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ המקיים $C = A \times B$ עבור $A \subseteq \Omega_1, B \subseteq \Omega_2$

טענה: יהי $A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ מלבן אזי $\mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A) \mathbb{P}_2(B)$

סימון: יהי $\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathbb{P}_i)$ מ"ה ויהי $A \subseteq \Omega_i$ אזי $\bar{A} = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times A \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n$

מסקנה: יהי $A \subseteq \Omega_i$ ויהי $B \subseteq \Omega_j$ אזי \bar{A}, \bar{B} ב"ת מעל $\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathbb{P}_i)$

טענה: יהי $A \subseteq \Omega_i$ אזי $\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}_i(A)$

מסקנה: $\mathbb{P}((\omega_1 \dots \omega_n)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i(\omega_i)$

משפט: יהיו $A_1 \dots A_n$ מאורעות עבורם $\forall i \in [n]. A_i \subseteq \Omega_i$ אזי $\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$ ב"ת.

מאורעות בלתי תלויים בהתנאה: יהי $\mathbb{P}(C) > 0$ אזי מאורעות A, B עבורם $\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A | C) \mathbb{P}(B | C)$

n ניסויי ברנולי: יהי $0 \leq p \leq 1$ נגדיר $f \in [0, 1]^{\{0,1\}}$ כך $f(k) = \begin{cases} p & k=1 \\ 1-p & k=0 \end{cases}$ אזי $\bigotimes_{i=1}^n (\{0,1\}, f)$

טענה: נסמן "הרצף הארוך ביותר של 1 ב- n ניסויי ברנולי" M_n אזי $(M_n - \log_{\frac{1}{p}}(n)) \rightarrow 0$

מטריצת שכנויות: יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון אזי $A \in M_{|V|}(\{0,1\})$ המקיים $A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in E \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

גרפים על n קודקודים: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\{(A_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \mid A_{i,j} \in \{0,1\}\}$

הימצאות קשת בהתסברות p : יהי $p \in [0, 1]$ אזי $p = \mathbb{P}(\{\omega \in \text{קודקודים על } n \text{ גרפים} \mid \omega_{i,j} = 1\})$

גרף מקרי: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $p \in [0, 1]$ אזי $G(n, p)$ (הימצאות קשת בהתסברות p , גרפים על n קודקודים)

טענה: יהי $\omega \in G(n, p)$ אזי $\mathbb{P}(\omega) = p^{|E_\omega|} \cdot (1-p)^{\binom{n}{2}-|E_\omega|}$

מסקנה: גרף מקרי הינו מרחב הסתברות.

משתנה מקרי (מ"מ): יהי (Ω, \mathbb{P}) מ"ה בדיד אזי $f \in \Omega \rightarrow S$

סימון: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{P}(X = s) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{s\}))$

אינדיקטור: יהי $A \subseteq \Omega$ מאורע אזי $\mathbb{1}_A \in \{0, 1\}^\Omega$ המוגדר $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

טענה: $(\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}) \wedge (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cup B})$

תומך: תהא $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\text{supp}(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\}$

התפלגות בדידה: $\mu: S \rightarrow [0, 1]$ המקיימת $(|\text{supp}(\mu)| \leq \aleph_0) \wedge (\sum_{s \in \text{supp}(\mu)} \mu(s) = 1)$

התפלגות של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\mu: \text{Im}(X) \rightarrow [0, 1]$ המוגדרת $\mu_X(s) = \mathbb{P}(X = s)$

טענה: ההתפלגות של משתנה מקרית היא התפלגות בדידה.

סימון: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X) = \text{supp}(\mu_X)$

משתנים מקריים שווים: $X, Y \in S^\Omega$ המקיימים $\forall \omega \in \Omega. X(\omega) = Y(\omega)$

משתנים מקריים שוי התפלגות: X, Y מ"מ עם אותה תמונה המקיימים $\forall s \in S. \mu_X(s) = \mu_Y(s)$

סימון: יהיו X, Y מ"מ שוי התפלגות אזי $X \sim Y$

התפלגות אחידה בדידה: יהיו $a, b \in \mathbb{Z}$ אזי $\mu \in [0, 1]^\mathbb{R}$ המקיימת $\mu(k) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & k \in [a, b] \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג אחיד בדיד אזי $X \sim \text{Uni}(a, b)$

סימון: תהא μ התפלגות אזי $\mu(k) = \begin{cases} p_i & k = x_i \\ 0 & \text{else} \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & p_n \end{pmatrix}$

התפלגות ברנולי: יהי $p \in [0, 1]$ אזי $\mu \in [0, 1]^{\{0,1\}}$ המקיימת $\mu = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}$

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג ברנולי אזי $X \sim \text{Ber}(p)$

התפלגות גאומטרית: יהי $p \in [0, 1]$ אזי $\mu \in [0, 1]^{\mathbb{N}^+}$ המקיימת $\mu(k) = (1-p)^{k-1} p$

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג גאומטרית אזי $X \sim \text{Geo}(p)$

התפלגות בינומית: יהי $p \in [0, 1]$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mu \in [0, 1]^\mathbb{N}$ המקיימת $\mu(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג בינומית אזי $X \sim \text{Bin}(n, p)$

התפלגות פואסון: יהי $\lambda > 0$ אזי $\mu \in [0, 1]^\mathbb{N}$ המקיים $\mu(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג פואסונית אזי $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

משפט קירוב בינום-פואסון: יהי $k \in \mathbb{N}$ ויהי $\lambda > 0$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})}(k) = \mu_{\text{Pois}(\lambda)}(k)$

התפלגות היפרגאומטרית: יהיו $r, n, m \in \mathbb{N}$ אזי $\mu \in [0, 1]^\mathbb{N}$ המקיים $\mu(k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}$

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג היפרגאומטרית אזי $X \sim \text{HG}(n, m, r)$

התפלגות בינומית שלילית: יהי $r \in \mathbb{N}$ וכן $p \in [0, 1]$ אזי $\mu \in [0, 1]^\mathbb{N}$ המקיים $\mu(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג בינומית שלילית אזי $X \sim \text{NB}(r, p)$

התפלגות היפרגאומטרית שלילית: יהיו $r, k, m \in \mathbb{N}$ אזי $\mu \in [0, 1]^\mathbb{N}$ המקיים $\mu(x) = \frac{\binom{x-1}{k-1} \binom{m-x}{r-k}}{\binom{m}{r}}$

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי $X \sim \text{NHG}(r, k, m)$

טרנספורמציה של משתנה מקרי: תהא $X \in A^\Omega$ ותהא $f \in B^A$ אזי $f(X) = f \circ X$

משפט: יהי X מ"מ ויהי $f \in B^A$ אזי $\mu_{f(X)}(k) = \sum_{r \in f^{-1}(\{k\})} \mu_X(r)$

מסקנה: יהי X מ"מ ויהי $f \in B^A$ אזי $\text{supp}(f(X)) = f(\text{supp}(X))$

זוג משתנים מקריים: יהיו $X: \Omega \rightarrow A$ וכן $Y: \Omega \rightarrow B$ משתנים מקריים אזי (X, Y)

התפלגות משותפת: יהי (X, Y) זוג מ"מ אזי $\mu_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

הכללה: יהיו $X_1 \dots X_n$ מ"מ אזי $\mu_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$

התפלגויות שוליות: יהי (X, Y) זוג מ"מ אזי μ_X, μ_Y

טענה: $\mu_X(x) = \sum_{y \in S} \mu_{X,Y}(x, y)$

משתנים מקריים בלתי תלויים: (X, Y) זוג מ"מ עבורו $\mu_{X,Y} = \mu_X \mu_Y$

הכללה: $X_1 \dots X_n$ מ"מ המקיימים $\mu_{X_1 \dots X_n} = \mu_{X_1} \cdot \dots \cdot \mu_{X_n}$.

משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות: $X_1 \dots X_n$ מ"מ המקיימים X_i, X_j ב"ת לכל $i \neq j$.

משפט: יהיו $X_1 \dots X_n$ מ"מ ב"ת והיו $E_1 \dots E_n$ קבוצות אזי $\{X_i \in E_i\}$ מאורעות ב"ת.

משפט: יהיו X, Y מ"מ ב"ת והיו f, g טרנספורמציות של מ"מ אזי $f(X), g(Y)$ ב"ת.

משפט: $(A_1 \dots A_n)$ מאורעות ב"ת $\iff (1_{A_1} \dots 1_{A_n})$ מ"מ ב"ת.

טענה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי קיים מ"ה (Ω, \mathbb{P}) עבורו קיימים X, Y מ"מ ב"ת המקיימים $(\mu_X = \mu_1) \wedge (\mu_Y = \mu_2)$.

קונבולוציה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי $(\mu_1 * \mu_2)(z) = \sum_x \mu_1(x) \mu_2(z - x)$.

טענה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$.

משפט: יהיו X, Y מ"מ ב"ת אזי $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$.

טענה: $\text{Bin}(n, p) + \text{Bin}(m, p) \sim \text{Bin}(n + m, p)$.

מסקנה: $\text{Bin}(n, p) \sim \sum_{i=1}^n \text{Ber}(p)$.

טענה: $\text{Pois}(\lambda_1) + \text{Pois}(\lambda_2) \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

טענה: $\text{NB}(n, p) \sim \sum_{i=1}^n \text{Geo}(p)$.

משתנה מקרי מותנה: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $X_{\upharpoonright A}$.

התפלגות מותנית: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $\mu_{X_{\upharpoonright A}}$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\upharpoonright Y=y}}(x) = \frac{\mu_{X,Y}(x,y)}{\mu_Y(y)}$.

סימון: יהיו X, Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\upharpoonright Y=y}}(x) = \mu_{X_{\upharpoonright Y=y}}(x)$.

התפלגות מולטינומית: יהיו $p_1 \dots p_n$ אזי $\mu \in [0, 1]^{\mathbb{N}^n}$ המקיים $\mu(k_1 \dots k_n) = \binom{n}{k_1 \dots k_n} \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$.

התפלגות מצטברת: יהי X מ"מ אזי $F_X : [0, 1]^{\mathbb{R}}$ כך $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

טענה: יהי X מ"מ

• F_X מונוטונית עולה.

• $\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$

• $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$

• יהי $s \in \text{supp}(X)$ אזי $\mu_X(s) = F_X(s) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} F_X(s - \varepsilon)$.

פונקציית ההישרדות: יהי X מ"מ אזי $\lambda_X(t) = 1 - F_X(t)$.

מסקנה: $\text{Geo}(1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)) \sim \min_{i=1}^n \{\text{Geo}(p_i)\}$.

פיצול פואסון: יהיו X, Y מ"מ עבורם $X + Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ וכן $X \sim \text{Bin}(n, p)$

• $Y_{\upharpoonright X+Y=n} \sim \text{Bin}(n, 1 - p)$

• $X \sim \text{Pois}(p\lambda)$

• $Y \sim \text{Pois}((1 - p)\lambda)$

• X, Y ב"ת.

צימוד בין התפלגויות: יהיו $\mu_1, \mu_2 : [0, 1]^S$ התפלגויות אזי התפלגות $\mu : [0, 1]^{S^2}$ המקיימת $\mu_1(\omega) = \sum_{s \in S} \mu(\omega, s)$ וכן

$\mu_2(\omega) = \sum_{s \in S} \mu(s, \omega)$

צימוד בין משתנים: יהיו X, Y מ"מ אזי זוג מ"מ (X', Y') המקיים $(X' \sim X) \wedge (Y' \sim Y)$.

טענה: יהי X מ"מ על Ω_1 ויהי Y מ"מ על Ω_2 נגדיר X', Y' מ"מ ב"ת על $\Omega_1 \otimes \Omega_2$ כך $X'(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1)$ וכן

$Y'(\omega_1, \omega_2) = Y(\omega_2)$ אזי (X', Y') צימוד של X, Y .

התפלגות שולטת סטוכסטית: יהי X מ"מ אזי מ"מ Y המקיים $\mathbb{P}(X > t) \geq \mathbb{P}(Y > t)$.

צימוד מונוטוני: יהיו X, Y מ"מ אזי צימוד (X', Y') המקיים $\mathbb{P}(Y' > X') = 0$.

טענה: יהי X מ"מ בעל התפלגות שולטת סטוכסטית בהתפלגות Y אזי קיים צימוד מונוטוני.

מטריקת ההשתנות הכוללת: תהא $|S| \leq \aleph_0$ ויהיו $\mu, \nu : [0, 1]^S$ התפלגויות אזי $\delta(\mu, \nu) = \sum_{x \in S} |\mu(x) - \nu(x)|$.

למה: מטריקת ההשתנות הכוללת הינה מטריקה.

סימון: יהיו X, Y מ"מ אזי $\delta(X, Y) = \delta(\mu_X, \mu_Y)$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\delta(X, Y) = 2 \sup_{E \subseteq S} |\mathbb{P}(X \in E) - \mathbb{P}(Y \in E)|$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ ויהי (X', Y') צימוד אזי $\delta(X, Y) = \delta(X', Y') \leq 2 \mathbb{P}(X' \neq Y')$.

מסקנה: יהיו $X_1 \dots X_{2n}$ מ"מ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=n+1}^{2n} X_i\right) \leq 2 \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \neq Y_i)$.

חוק המספרים הקטנים: יהיו $\{X_i \sim \text{Ber}(p_i)\}_{i=1}^n$ מ"מ ויהי $T \sim \text{Pois}(\sum_{i=1}^n p_i)$ אזי $\delta(\sum_{i=1}^n X_i, T) \leq 2 \sum_{i=1}^n p_i^2$.
חציון של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $m \in \text{supp}(X)$ המקיים $(\mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}) \wedge (\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2})$.
משתנה בעל תוחלת: X מ"מ עבורו $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega)$ מתכנס בהחלט.

טענה: יהי X משתנה על מ"ה סופי אזי X בעל תוחלת.

תוחלת: יהי X מ"מ בעל תוחלת אזי $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega)$.

למה: יהיו X, Y מ"מ ויהי $c \in \mathbb{R}$

- הומוגניות: $\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X]$

- חיבוריות: $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

- מונוטוניות: $(X \leq Y) \implies (\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y])$

מסקנה: יהיו $X_1 \dots X_n$ מ"מ אזי $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$

משפט: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X] = \sum_{s \in \text{supp}(X)} s \cdot \mu_X(s)$

טענה: יהי X מ"מ

- $(X \sim \text{Uni}(0, \dots, n)) \implies (\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2})$

- $(X \sim \text{Ber}(p)) \implies (\mathbb{E}[X] = p)$

- $(X \sim \text{Bin}(n, p)) \implies (\mathbb{E}[X] = np)$

- $(X \sim \text{Geo}(p)) \implies (\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p})$

- $(X \sim \text{HG}(n, m, r)) \implies (\mathbb{E}[X] = \frac{nr}{m})$

- $(X \sim \text{Pois}(\lambda)) \implies (\mathbb{E}[X] = \lambda)$

משפט: יהי X מ"מ ותהא f טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{s \in \text{supp}(X)} f(s) \mu_X(s)$

נוסחאת הזנב: יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}(X) = \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$

משפט: יהיו X, Y מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$

תוחלת מותנית: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X | A] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega | A)$

טענה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X | A] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}$

מסקנה: יהיו $X, \mathbb{1}_A$ מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}[X | A] = \mathbb{E}[X]$

נוסחאת התוחלת השלמה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X | A] \mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[X | A^c] \mathbb{P}(A^c)$

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ ויהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X | A_i] \mathbb{P}(A_i)$

תוחלת של משתנה מותנה במשתנה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[X | Y](\omega) = \mathbb{E}[X | Y = Y(\omega)]$

משפט/נוסחאת ההחלקה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}[X]$

טענה: יהיו X, Y מ"מ ותהא g טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[X \cdot g(Y) | Y] = g(Y) \cdot \mathbb{E}[X | Y]$

משתנה בעל מומנט k : X מ"מ המקיים $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$

סימון: יהי X משתנה בעל מומנט k אזי $X \in \ell^k$

מומנט k : יהי $X \in \ell^k$ אזי $\mathbb{E}[X^k]$

טענה: יהיו $m < k \in \mathbb{N}$ אזי $\ell^k \subseteq \ell^m$

אי שוויון קושי שורץ: יהיו $X, Y \in \ell^2$ אזי $|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$

מסקנה: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]$

שונות: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

טענה: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

סטיית תקן: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$

משתנה דטרמיניסטי: מ"מ X המקיים $\exists c. \mathbb{P}(X = c) = 1$

למה: יהי $X \in \ell^2$ ויהי a סקלר

- $\text{Var}[X] \geq 0$

- $(\text{Var}[X] = 0) \iff (X \text{ דטרמיניסטי})$

- $\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X]$

- $\text{Var}[X + a] = \text{Var}[X]$

פונקציית הפסד: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\mathbb{E}[(X - a)^2]$

משפט: יהי $X \in \ell^2$ אזי המינימום של פונקציית ההפסד מתקבלת בערך $\mathbb{E}[X]$

חציון: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{E}[|X - a|]$

סימון: יהי X מ"מ אזי החציון הוא $\text{Median}(X)$

ערך אמצעי/Range Mid: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\max |X - a|$

סימון: יהי X מ"מ אזי הערך האמצעי הוא $\text{MR}(X)$

שכיח: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{P}(X \neq a)$

סימון: יהי X מ"מ אזי השכיח הוא $\text{Mode}(X)$

שונויות משותפת: יהיו X, Y מ"מ אזי $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

משפט: $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + 2\text{Cov}[X, Y] + \text{Var}[Y]$

טענה: $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

משתנים בלתי מתואמים: X, Y המקיימים $\text{Cov}[X, Y] = 0$

משפט: יהיו X, Y ב"ת אזי X, Y בלתי מתואמים

מסקנה: יהיו X, Y בלתי מתואמים אזי $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

למה: יהיו X, Y, Z מ"מ ויהיו α, β סקלרים

- $\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$

- סימטריות: $\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X]$

- בי-ליניאריות: $\text{Cov}[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha \text{Cov}[X, Z] + \beta \text{Cov}[Y, Z]$

- אינווריאנטיות להוספת סקלר: $\text{Cov}[X + \alpha, Y] = \text{Cov}[X, Y]$

- $|\text{Cov}[X, Y]| \leq \sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}$

מקדם המתאם: יהיו X, Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}}$

למה: יהיו X, Y מ"מ ויהיו a, b סקלרים

- $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

- $(\rho_{X,Y} = 0) \iff (X, Y \text{ בלתי מתואמים})$

- $(\rho_{X,Y} = \pm 1) \iff (Y = aX + b)$

למה: יהי X מ"מ

- $\text{Var}[X] = \frac{n^2-1}{12}$ אזי $X \sim \text{Uni}([n])$

- $\text{Var}(X) = np(1-p)$ אזי $X \sim \text{Bin}(n, p)$

- $\text{Var}(X) = \lambda$ אזי $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

- $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ אזי $X \sim \text{Geo}(p)$

פונקציה יוצרת: יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}(X) = \mathbb{N}$ אזי $g_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_X(n) t^n$

טענה: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת

- $|t| \leq 1$ מתכנס עבור $g_X(t)$

- $g_X \in C^\infty((-1, 1))$

- יהי $t \in [-1, 1]$ אזי t^X מ"מ בעל תוחלת

משפט: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת אזי $g_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$

למה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת בעלי פונקציה יוצרת

- $\mu_X(n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$

- $g_{X+Y} = g_X \cdot g_Y$

- $\lim_{t \rightarrow 1^-} g_X(t) = g_X(1) = 1$

- נניח כי X בעל מומנט k אזי $g_X^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$

מסקנה: יהי $X \in \ell^2$ בעל פונקציה יוצרת

- $\mathbb{E}[X] = \lim_{t \rightarrow 1^-} g'_X(t)$

- $\text{Var}[X] = \lim_{t \rightarrow 1^-} (g''_X(t) + g'_X(t) - (g'_X(t))^2)$

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.

טענה: יהי $X \sim \text{Bin}(n, p)$ אזי $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$.

למה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת

$$M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y \bullet$$

• יהי I קטע עבורו $0 \in I$ וכן $M_X \in C^n(I)$ אזי $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$

מסקנה: יהי I קטע עבורו $0 \in I$ וכן $M_X \in C^\infty(I)$ אזי $M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!} t^n$

אי-שוויון מרקוב: יהי X מ"מ אי שלילי ויהי $a > 0$ אזי $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$

מסקנה: תהא $f \in [0, \infty)^\mathbb{R}$ עולה ויהי X מ"מ עבורו $f(X)$ בעל תוחלת אזי $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(t)}$

אי-שוויון צ'בישב: יהי $X \in \ell^2$ ויהי $b > 0$ אזי $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq b) \leq \frac{\text{Var}[X]}{b^2}$

סימון: יהיו $X_1 \dots X_n$ מ"מ אזי $\mu = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i]$

טענה: יהיו $X_1 \sim \dots \sim X_n$ מ"מ בלתי מתואמים בזוגות עם תוחלת משותפת μ אזי $\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n X_i - n\mu| \geq b) \leq \frac{n\sigma^2}{b^2}$

אי-שוויון צ'רנוף: יהיו $\{X_i \sim \text{Ber}(p_i)\}_{i=1}^n$ אזי $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \geq (1+t)\mu) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2+t}\mu\right)$

הכללה: יהי X מ"מ ויהי $s \in \mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{M_X(s)}{e^{sa}}$

פונקציה קמורה: יהי I קטע אזי $\varphi \in \mathbb{R}^I$ עבורה $\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$ $\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$.

טענה: תהא $\varphi \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה ויהיו $x < y < z$ אזי $\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}$

מסקנה: תהא $\varphi \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $\varphi \in C((a,b))$

למה: תהא $\varphi \in \mathbb{R}^I$ קמורה ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $(\varphi(x_0) = ax_0 + b) \wedge (\forall x \in I. \varphi(x) \geq ax + b)$

אי-שוויון ינסן: יהי X מ"מ בעל תוחלת ותהא $\varphi \in \mathbb{R}^I$ קמורה עבורה $\varphi(X)$ בעל תוחלת אזי $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$

אי-שוויון הממוצעים: יהיו $a_1 \dots a_n > 0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$

אי-שוויון המשולש: יהי X מ"מ אזי $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}[|X|]$

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שקולי התפלגות עם תוחלת μ אזי

$$\forall \delta > 0. \mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהי $X \in \ell^1$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon, \delta > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$ ולכל

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) < \varepsilon$$

מסקנה: יהי $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ויהי $\delta > 0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \delta\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

למה: יהי $x \in [0, 1]$ יהי $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ויהי $\delta > 0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

פולינום ברנשטיין: יהיו $k < n \in \mathbb{N}$ אזי $B_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

הגדרה: תהא $f \in C([0, 1])$ אזי $Q_n(t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$

טענה: $Q_n(t) \in \mathbb{R}_n[x]$

משפט: תהא $f \in C([0, 1])$ אזי $\forall \varepsilon > 0. \exists n \in \mathbb{N}. \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - Q_n(t)| \leq \varepsilon$

החוק החזק של המספרים הגדולים: יהי $X \in \ell^4$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon, \delta > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N > N_0$ ולכל

$$\mathbb{P}\left(\max_{n \in \{N_0, \dots, N\}} \left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) < \varepsilon$$

פונקציית צפיפות רציפה: $f: I \rightarrow [0, 1]$ רציפה המקיימת $\int_I f(x) dx = 1$

הסתברות רציפה: תהא $f: I \rightarrow [0, 1]$ פונקציית צפיפות ותהא $[a, b] \subseteq I$ אזי $\mathbb{P}([a, b]) = \int_a^b f(x) dx$

משנה מקרי רציף: מ"מ X עבורו קיימת פונקציית צפיפות $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ עבורה $\forall E \subseteq \mathbb{R}. \mathbb{P}(X \in E) = \int_E f(x) dx$

פונקציית ההתפלגות המצטברת: יהי X מ"מ רציף אזי $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|I|} & x \in I \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

תוחלת רציפה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x) dx$

מומנט רציף: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X^p] = \int_{\mathbb{R}} x^p f(x) dx$

התפלגות נורמלית: יהיו $\sigma^2, \mu \in \mathbb{R}$ אזי $f \in [0, 1]^\mathbb{R}$ המקיימת $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

סימון: יהי Z מ"מ רציף עבורו $f(x)$ מתפלג נורמלית אזי $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

טענה: יהי $Z \sim N(0, 1)$ מ"מ רציף עם פונקציית צפיפות $\phi(x)$ אזי $Z \sim N(0, 1)$.

הגדרה: יהי $Z \sim N(0, 1)$ מ"מ רציף אזי $\Phi(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$.

טענה: יהי $t \in \mathbb{R}$

$$\bullet (\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 1) \wedge (\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0)$$

$$\bullet (\Phi \in C(\mathbb{R})) \wedge (\Phi > 0) \wedge (\Phi \text{ עולה ממש})$$

$$\bullet \Phi(t) = 1 - \Phi(-t)$$

הגדרה: $(\Phi(\infty) = 1) \wedge (\Phi(-\infty) = 0)$.

מסקנה: יהי $Z \sim N(0, 1)$ מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \phi(t) dt$.

משתנה מתוקנן: $X \in \ell^2$ המקיים $(\mathbb{E}[X] = 0) \wedge (\text{Var}[X] = 1)$.

תקנון: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\hat{X} = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma}$.

טענה: יהי $X \in \ell^2$ אזי \hat{X} מתוקנן.

$$\text{למה: יהי } n \in \mathbb{N} \text{ אזי } \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x) dx = \frac{\pi}{4^n} \binom{2n}{n} \right) \wedge \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \right)$$

$$\text{טענה: } 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}}{\frac{2}{2n+1} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}}$$

משפט דה-מואבר לפלס: יהיו $a \leq b$ ויהי $\{S_N \sim \text{Bin}(N, p)\}_{N=1}^\infty$ אזי $\mathbb{P}(a \leq \hat{S}_N \leq b) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Phi(b) - \Phi(a)$.

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ חסומה יהיו $a \leq b$ ויהי $\{S_N \sim \text{Bin}(N, p)\}_{N=1}^\infty$ אזי $\mathbb{P}\left(f\left(\frac{S_N - Np}{p\sqrt{N}}\right)\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \phi(t) dt$.

הגדרה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ חסומה אזי $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

למה: תהא $f \in C^3(\mathbb{R})$ יהי X מ"מ ויהי $Z \sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right) - 1$ אזי

$$\left| \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Z}{\sqrt{N}}\right)\right] \right| \leq \frac{1}{6N^{\frac{3}{2}}} \|f^{(3)}\| \left(1 + \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^3]\right)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 1 + x - \frac{2 \sin(2\pi x)}{3\pi} + \frac{\sin(4\pi x)}{12\pi} & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \leq -1 \end{cases}$$

טענה: $(\psi \in C^3(\mathbb{R})) \wedge (\psi \text{ חסומה})$.

הגדרה: יהי $\varepsilon > 0$ ויהיו $a \leq b$ אזי $I_{a,b,\varepsilon}(x) = \psi\left(\frac{b-x}{\varepsilon}\right) \psi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ ויהיו $a \leq b$ אזי $(I_{a,b,\varepsilon} \in C^3(\mathbb{R})) \wedge (I_{a,b,\varepsilon} \text{ חסומה})$.

למה: קיים $B > 0$ עבורו לכל $a \leq b$ ולכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\|I_{a,b,\varepsilon}^{(3)}\| \leq \frac{B}{\varepsilon^3}$.

מסקנה: יהיו $a \leq b$ ויהי $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ אזי $\mathbb{1}_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]} \leq I_{a+\varepsilon, b-\varepsilon, \varepsilon} \leq \mathbb{1}_{[a, b]} \leq I_{a, b, \varepsilon} \leq \mathbb{1}_{[a-\varepsilon, b+\varepsilon]}$.

משפט הגבול המרכזי: יהיו $a \leq b$ נניח כי לכל $N \in \mathbb{N}$ יהיו $X_1 \sim \dots \sim X_N$ מ"מ ב"ת עם תוחלת משותפת אזי

$$\mathbb{P}\left(a \leq \sum_{i=1}^N X_i \leq b\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Phi(b) - \Phi(a)$$

מרחב מצבים: קבוצה S .

מטריצת מצבים: $\mathcal{P} : S^2 \rightarrow [0, 1]$ המקיימת $\forall x \in S. \sum_{y \in S} \mathcal{P}(x, y) = 1$.

שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן ובעלת מרחב מצבים סופי: מ"מ $\{X_i\}_{i=0}^\infty$ ומטריצת מצבים \mathcal{P} עבורם

$$\mathbb{P}(X_0 = s_0 \dots X_n = s_n) = \mu_{X_0}(s_0) \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}(s_i, s_{i+1})$$

טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n \dots X_0 = s_0) = \mathcal{P}(s_n, s_{n+1})$.

הערה: נתייחס אל התפלגות μ_X כאל וקטור שורה כך $(\mu_X)_i = \mathbb{P}(X = i - 1)$.

משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ שרשרת מרקוב אזי $\mu_{X_k} = \mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^k$.

טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}(X_n = y \mid X_k = x) = \mathcal{P}^{n-k}(x, y)$.

התפלגות סטציונרית/עמידה: התפלגות π על S המקיימת $\pi \cdot \mathcal{P} = \pi$.

וקטור עצמי שמאלי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $v \in M_{1,n}(\mathbb{F})$ המקיים $v \cdot A = \alpha v$.

טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ שרשרת מרקוב אזי $(\mu_{X_0} \mathcal{P}^n \rightarrow \pi) \iff (\pi \text{ התפלגות סטציונרית})$.

משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות סטציונרית π .

סימון: יהיו $x, y \in S$ עבורם $\exists n \in \mathbb{N}_+. \mathcal{P}^n(x, y) > 0$ אזי $x \rightarrow y$.

מטריצת מעברים אי פריקה: שרשרת עבורה $\forall x, y \in S. x \rightarrow y$.

למה: תהא \mathcal{P} מטריצת מעברים אי פריקה ותהא π התפלגות סטציונרית אזי $\forall x \in S. \pi(x) > 0$.

משפט: תהא \mathcal{P} מטריצת מעברים אי פריקה אזי קיימת התפלגות סטציונרית יחידה π .

משפט התכנסות ממוצעים: תהא \mathcal{P} מטריצת מעברים בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$.

הערה: נתייחס אל טרנספורמציה f כאל וקטור עמודה כך $(f)_i = f(i)$.

משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ שרשרת מרקוב בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π ותהא f טרנספורמציה אזי

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi \cdot f$$

מחזור: יהי $x \in S$ אזי $\gcd(\{n \in \mathbb{N}_+ \mid \mathcal{P}^n(x, x) > 0\})$.

מצב חסר מחזור: $x \in S$ אשר מחזורו 1.

שרשרת חסרת מחזור: שרשרת $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ עברה כל מצב חסר מחזור.

המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב: תהא $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ שרשרת אי פריקה וחסרת מחזור אזי $\mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi$.

זמן החזרה: יהי $x \in S$ אזי T_x מ"מ הזמן הראשון בו חזרנו ל- x בהילוך שמתחיל ב- x .

משפט: תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}[T_x] = \frac{1}{\pi(x)}$.

זמן הפגיעה: יהיו $x, y \in S$ אזי $T_{x,y}$ מספר הפעמים שנגיע למצב y בהילוך שמתחיל ב- x עד לחזרה הראשונה אל x .

משפט: תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}[T_{x,y}] = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$.