הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע אזי $|X|\le|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ועל אזי $|X|=|Y|$.

סימון: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $\neg\left(|X|=|Y|\right)$ אזי $|X|\neq|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|X|\neq|Y|$ אזי $|X|<|Y|$.

הערה: נקרא לביטוי $|X|$ העוצמה של X.

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין (קש"ב): תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|Y|\le|X|$ אזי $|X|=|Y|$.

סימון: $|\mathbb{N}|=\aleph_0$.

קבוצה בת מנייה: קבוצה X עבורה $|X|=\aleph_0$.

קבוצה סופית: קבוצה A עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|[n]|$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $|[n]|=n$.

קבוצה אינסופית: קבוצה A עבורה לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|[n]|$.

טענה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אינסופית אזי B בת מנייה.

מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהא A בת מנייה תהא B קבוצה ותהא $f:A\to B$ על אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\cup B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות בנות מנייה אזי $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ בת מנייה.

טענה: תהא $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i\in\mathbb{N}$ ותהא $\langle f_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת פונקציות באשר $f_n:\mathbb{N}\to A_n$ על לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ סופית או בת מנייה.

מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid(a\in A)\wedge(b\in B)\}$.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\times B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ בנות מנייה אזי $A_1\times\ldots\times A_n$ בת מנייה.

הגדרה: תהא A קבוצה אזי $A^1=A$.

הגדרה: תהא A קבוצה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $A^n=A\times A^{n-1}$.

טענה: $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{N}^n$ בת מנייה.

מסקנה: $|\{A\subseteq\mathbb{N}\mid \text{סופית } A\}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

מספר אלגברי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו קיים $p\in\mathbb{Z}[x]$ המקיים $p(a)=0$.

מספר טרנסצנדנטי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו לכל $p\in\mathbb{Z}[x]$ מתקיים $p(a)\neq0$.

משפט קנטור: $|\{a\in\mathbb{C}\mid \text{אלגברי } a\}|=\aleph_0$.

יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי $\preccurlyeq\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ באשר

- רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $x\preccurlyeq x$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq z$ אזי $x\preccurlyeq z$.
- אנטי סימטריות חלשה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq x$ אזי $x=y$.

יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי $\prec\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\prec\rangle$ באשר

- אנטי רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $\neg(x\prec x)$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\prec y$ וכן $y\prec z$ אזי $x\prec z$.
- אנטי סימטריות חזקה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\prec y$ אזי $\neg(y\prec x)$.

יחס סדר קווי חלקי/חלש: יחס סדר חלקי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\vee(y\preccurlyeq x)$.

יחס סדר קווי חזק: יחס סדר חזק $\langle A,\prec\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\prec y)\vee(y\prec x)\vee(x=y)$.

טענה: $\langle\mathbb{N},\le_{\mathbb{N}}\rangle$ יחס סדר קווי חלקי.

טענה: תהא A קבוצה אזי $\langle\mathcal{P}(A),\subseteq\rangle$ יחס סדר חלקי.

פונקציה שומרת סדר: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים אזי $f:A\to B$ חח"ע עבורה לכל $a,b\in A$ מתקיים $(aRb)\Longleftrightarrow(f(a)Sf(b))$.

סדרים חלקיים איזומורפיים: סדרים $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ עבורם קיימת $\pi:A\to B$ הפיכה שומרת סדר.

סימון: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים איזומורפיים אזי $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$.

יחס סדר קווי בעל איבר ראשון/מינימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $a\in A$ באשר לכל $b\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון $a\in A$ אזי $\min(A)=a$.
טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר ראשון.
יחס סדר קווי בעל איבר אחרון/מקסימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $b\in A$ באשר לכל $a\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון $a\in A$ אזי $\max(A)=a$.
טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר אחרון.
יחס סדר קווי צפוף: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ המקיימים xRy קיים $z\in A$ עבורו xRz וכן zRy.
טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי צפוף ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ צפוף.
טענה: $\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
מסקנה: $\langle\mathbb{N},\leq_{\mathbb{N}}\rangle\not\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.
משפט קנטור: יהי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.
משפט קנטור: יהי $\langle A,\prec\rangle$ סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\prec\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},<_{\mathbb{Q}}\rangle$.
חסם מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבור לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\overline{B}_X=\{a\in A\mid X$ חסם מלעיל של $a\}$.
קבוצה חסומה מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\overline{B}_X\neq\varnothing$.
חסם מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבור לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\underline{B}_X=\{a\in A\mid X$ חסם מלרע של $a\}$.
קבוצה חסומה מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\underline{B}_X\neq\varnothing$.
קבוצה חסומה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ בעלת חסם מלרע וחסם מלעיל.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\sup(X)=\min\left(\overline{B}_X\right)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\inf(X)=\max\left(\underline{B}_X\right)$.
יחס סדר קווי שלם: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $X\subseteq A$ חסומה מלעיל קיים $\sup(X)$.
טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי ($\langle A,R\rangle$ סדר שלם)$\Longleftrightarrow$(לכל $X\subseteq A$ חסומה קיימים $\sup(X),\inf(X)$).
קבוצה צפופה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה לכל $x,y\in A$ באשר xRy קיים $z\in X$ המקיים xRz וכן zRy.
השלמה של יחס סדר קווי חלקי: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי סדר חלקי $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ המקיים

- $P\subseteq L$.
- לכל $x,y\in P$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\Longleftrightarrow(x\sqsubseteq y)$.
- $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
- $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ צפוף ב־$\langle L,\sqsubseteq\rangle$.

משפט יחידות השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה $\langle L,\sqsubseteq\rangle,\langle L^*,\sqsubseteq^*\rangle$ השלמות אזי קיים איזומורפיזם $\pi:L\to L^*$ עבורו $\pi(p)=p$ לכל $p\in P$.
משפט קיום השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.
חתך דדקינד: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $A,B\subseteq P$ לא ריקות אזי $\langle A,B\rangle$ באשר

- $A\cap B=\varnothing$.
- $A\cup B=P$.
- לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ מתקיים $a\preccurlyeq b$.
- $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]=\langle(-\infty,p),[p,\infty)\rangle$.
טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]$ חתך דדקינד.
הגדרה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $\langle A,B\rangle,\langle C,D\rangle$ חתכי דדקינד באשר $A\subseteq C$ אזי $\langle A,B\rangle\preccurlyeq\langle C,D\rangle$.
טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\{[p]\mid p\in P\},\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$.
הערה: נשתמש בהתאמה מעל בתור שיכון של P בחתכי הדדקינד שלה.
סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\mathrm{Ded}(P)=\{\langle A,B\rangle\mid$ חתך דדקינד $\langle A,B\rangle\}$.
טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי.
טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ צפופה ב־$\langle \text{Ded}\left(P\right), \preccurlyeq \rangle$.

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle \text{Ded}\left(P\right), \preccurlyeq \rangle$ סדר שלם.

טענה: יהי $\langle A, \prec \rangle$ סדר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון $\langle B, \sqsubset \rangle$ עבורו קיימת $f : A \to B$ שומרת סדר.

מספרים ממשיים: $\langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} \rangle$ הינה ההשלמה של $\langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle$.

משפט: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} \rangle$.

טענה: $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$.

קבוצת החזקה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}\left(X\right) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$.

סימון: תהא X קבוצה אזי ${}^{X}2 = \{f \mid f : X \to \{0,1\}\}$.

טענה: תהא X קבוצה אזי $|\mathcal{P}\left(X\right)| = \left|{}^{X}2\right|$.

משפט קנטור: תהא X קבוצה אזי $|X| < |\mathcal{P}\left(X\right)|$.

טענה: $|\mathbb{R}| = \left|{}^{\mathbb{N}}2\right|$.

טענה: תהיינה A, B קבוצות זרות ותהיינה C, D קבוצות זרות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \cup B| = |C \cup D|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות זרות אזי $|A| + |B| = |A \cup B|$.

טענה: תהא A קבוצה אזי $|A \times \{0\}| = |A|$.

הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}|$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \times B| = |C \times D|$.

הגדרה כפל: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| \cdot |B| = |A \times B|$.

הערה: נאמר כי κ היא עוצמה אם קיימת קבוצה A עבורה $|A| = \kappa$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי ${}^{B}A = \{f \mid f : B \to A\}$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $\left|{}^{B}A\right| = \left|{}^{D}C\right|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A|^{|B|} = \left|{}^{B}A\right|$.

מסקנה: $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa^{(\lambda + \mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$ וכן $\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)}$ וכן $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu})$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\aleph_0 + n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0^n = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $2^{\aleph_0} + n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $2^{\aleph_0} \cdot n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\left(2^{\aleph_0}\right)^n = 2^{\aleph_0}$ וכן $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ וכן $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $|\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{N} \to \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $\left|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}\right| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא B קבוצה באשר $|B| = 2^{\aleph_0}$ ותהא $A \subseteq B$ באשר $|A| \leq \aleph_0$ אזי $|B \backslash A| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{C} \mid \text{מספר טרנסצנדנטי } a\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{R} \mid \text{אי־רציונלי } a\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \wedge (\text{רציפה } f)\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \wedge (\text{מונוטונית } f)\}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $|\{A \mid (A \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\text{פתוחה } A)\}| = 2^{\aleph_0}$.

יחס סדר טוב: סדר קווי $\langle W, < \rangle$ עבורו לכל $A \subseteq W$ באשר $A \neq \varnothing$ קיים איבר קטן ביותר.

טענה: $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ סדר טוב.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left\langle \mathbb{N}_{\leq n}, <_{\mathbb{N}_{\leq n}} \right\rangle$ סדר טוב.