```
|S_n|=n! אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                           .(\mathsf{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight),\cdot) אזי n\in\mathbb{N}_+ שדה ויהי \mathbb{F} שדה יהי אזי חבורת המטריצות:
                               . מעל \mathbb F אזי חבורת המטריצות אזי חבורת חבורה מעל חבורה ויהי שדה ויהי חבורה אזי חבורת חבורת מענה: יהי שדה ויהי
                                                                \mathbb{F} אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\} אזי החבורות החיבוריות: תהא
                                                                             A^*=A^{\times}=A\setminus\{0\} אזי A\subset\mathbb{C} סימון: תהא
                                                                \mathbb{F}^*,\cdot) אזי \mathbb{F}^*\in\{\mathbb{Q}^*,\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*\} אזי החבורות הכפליות: תהא
                                                                                   .(\{x\}\,,\mathrm{Id}) אזי אזי החבורה הטריוואלית: יהי
                                            (x\sim_n y)\Longleftrightarrow (n|\,(x-y)) המוגדרת אזי n\in\mathbb{N} הגדרה: יהי n\in\mathbb{N} הגדרה: הגדרה
                                                                                         \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}^2/_{\sim_n} אזי n \in \mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                                              .C_n=\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} סימון: יהי
                             [x]_{\sim_n}+[y]_{\sim_n}=[x+y]_{\sim_n} הגדרה: יהי n\in\mathbb{N} אזי n\in\mathbb{N} הגדרה: המוגדרת
                                                                          n \in \mathbb{N} אזי החלוקה: יהי אריות החלוקה: חבורת
                                                       . מענה: יהי n\in\mathbb{N} אזי חבורת שאריות החלוקה בn\in\mathbb{N} יהי
                                                                                               |C_n|=n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                             [i]_{\sim_n}\mapsto (i\%n) כך כך \mathbb{Z}_n\hookrightarrow \{0,\dots,n-1\} הערה: יהי n\in\mathbb{N} כך
               g*h=h*g מתקיים g,h\in G עבורה לכל חבורה (G,*) חבורה חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית:
                                                                              . אינה אבלית (S_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} אינה אבלית n\in\mathbb{N}_{\geq 3}
                                                                         . אינה אבלית (GL_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot) אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי
                                                                                     . אבלית (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N}_+ אבלית יהי
                                                                               |G| \in \mathbb{N} עבורה סופית: חבורה חבורה חבורה
                                                                         |G| \geq \aleph_0 עבורה אינסופית: חבורה חבורה אינסופית:
                                                         .ord (G)=|G| אזי חבורה סופית הא (G,*) חבורה: תהא
                                                            \operatorname{ord}\left(G
ight)=\infty אינסופית אינ חבורה תהא G חבורה: תהא
                                                                           o\left(G\right)=\operatorname{ord}\left(G\right) אינ חבורה (G,*) מימון: תהא
                                              תת־חבורה: תהא (G,*) חבורה ותהא H\subseteq G אזי חבורה (G,*) עבורה
                                                                  a*b\in H מתקיים a,b\in H סגירות לכפל: \bullet
                                                                    a^{-1} \in H מתקיים a \in H סגירות להופכי: לכל
                                                               e \in H אזי של G איבר היחידה e יהי יהי איבר e
                           H \leq G עבורה (H,st_{H	imes H}) תת־חבורה אזי H \subseteq G אבורה תהא (G,st) תת־חבורה אזי
(a*b^{-1}\in H מתקיים a,b\in H מתקיים (לכל H\leq G) אזי H\in \mathcal{P}\left(G
ight)\setminus \{\varnothing\} מתקיים למה: תהא
                     A*B=\{a*b\mid (a\in A)\land (b\in B)\} אזי A,B\subseteq G סימון: תהא
                                        g*H=\{g\}*H אזי g\in G ויהי ויהי H\subseteq G חבורה תהא
                                                                                   (n\mathbb{Z},+)\leq (\mathbb{Z},+) אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                      (\mathrm{SL}_n\left(\mathbb{F}
ight),\cdot)\leq (\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight),\cdot) שדה אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי n\in\mathbb{N}_+
                                                                           R_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\} אזי n\in\mathbb{N} דימון: יהי
```

A imes A o A פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי

 $(S(X), \circ)$ אזי קבוצה אזי תהא X קבורת התמורות:

 $S_n = S\left([n]
ight)$ אזי $n \in \mathbb{N}$ סימון: יהי

a*b=*(a,b) אזי א איז פעולה A שימון: תהא A קבוצה ותהא A פעולה בינארית

a*b=e=b*a עבורו $b\in G$ קיים $a\in G$ לכל לכל • איבר הופכי:

a*e=e*a=a מתקיים $a\in G$ איבר יחידה: לכל

 $S(X) = \{f: X \to X \mid$ הפיכה $f\}$ הפינה אזי קבוצה אזי

טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות מעל X הינה חבורה.

a*(b*c)=(a*b)*c מתקיים $a,b,c\in G$ לכל • אסוציאטיביות:

חבורה: תהא $e \in G$ היים עבורה אזי (G,*) אזי פעולה בינארית אנים * המקיים חבורה: תהא

```
a,b,c \in G אזי איזי א b*a=c*a עבורם a,b,c \in G אזי חבורה ויהיו תהא
                                                                                  g^0=e אזי g\in G אויהי חבורה (G,*) אזי
                                                           q^n=q*q^{n-1} אזי q\in G ויהי ויהי n\in\mathbb{N}_+ חבורה (G,*) אהדרה: תהא
                                                                  g^{-n}=(g^n)^{-1} אזי g\in G ויהי n\in\mathbb{N} חבורה חבורה G אזי
                                                                  g^{-n}=\left(q^{-1}\right)^n אזי q\in G ויהי n\in\mathbb{N} יהי חבורה G אחזי מענה: תהא
a,h'\in H אזי g,g'\in G לכל (g,h)\cdot (g',h')=(g*g',h\otimes h') חבורות נגדיר ולכל (G,*),(H,\otimes) לכל
                                                                                                                           (G \times H, \cdot)
                                                 . חבורה הינה G,H של חבורת המכפלה חבורת חבורות G,* חבורה חבורה סענה:
                                 H,Gטענה: תהיינה (G,*),(H,\otimes) חבורות אזי (חבורת המכפלה של H,G אבלית) טענה:
                                              (HK=KH) אזי (H*K\leq G) אזי אוי חבורה ותהיינה חבורה (G,*) איזי
                                .((K\subseteq H)\lor(H\subseteq K))\Longleftrightarrow (H\cup K\le G) אזי H,K\le G סענה: תהא (G,*) חבורה ותהיינה
                                         .Stab (Y)=\{\pi\in S\left(X\right)\mid\forall y\in Y.\pi\left(y\right)=y\} אזי Y\subseteq X אזי קבוצה ותהא X קבוצה ותהא
                                                                        .Stab (Y) \leq S\left(X\right) אזי Y \subseteq X התהא קבוצה תהא X
                          \bigcap_{i\in I}H_i\leq G אזי i\in I לכל לכל H_i\leq G באשר H_i\}_{I\in I}\subseteq \mathcal{P}\left(G
ight) אזי ותהא חבורה תהא
                                                         \mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\} אזי X \subseteq G אחר חבורה תהא חבורה תהא
                                       \langle X 
angle = igcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H אזי אוי X \subseteq G חבורה חבורה תהא תהקבוצה: תהא
                                                                                  \langle X \rangle \leq G אזי אזי X \subseteq G אבורה ותהא חבורה G
                    \langle X 
angle = \left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \ \middle| \ (k \in \mathbb{N}) \land \left(x \in X^k
ight) \land \left(s \in \{\pm 1\}^k
ight)
ight\} אזי X \subseteq G אזי X \subseteq G אזי
                                                            \langle X 
angle = G עבורה X \subseteq G חבורה אזיX \subseteq G תהא חבורה: תהא
                                                            חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.
                                                                     \langle g \rangle = G המקיים g \in G המקיים עבורה עבורה ציקלית: חבורה
                                                                          \langle g \rangle = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \} אזי g \in G חבורה ויהי חבורה G אהי
                                                           g^{n+m}=g^n*g^m אזי g\in G ויהי ויהי n,m\in\mathbb{Z} חבורה יהיו
                                                              \left(g^{n}\right)^{m}=g^{n\cdot m} אזי g\in G ויהי n,m\in\mathbb{Z} חבורה יהיו
                                                 G=\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\} עבורו g\in G עבורו ציקלית) עבורה אזי (G=\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\}
                                                                                       מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.
                                                                  .ord (g)=\operatorname{ord}\left(\langle g
angle
ight) אזי g\in G חבורה חבורה G חבורה של איבר:
                                                         .ord (g)=\min\left\{n\in\mathbb{N}_+\mid g^n=e
ight\} אזי g\in G חבורה ויהי חבורה G אסענה: תהא
                               (q^n=e)\Longleftrightarrow (\mathrm{ord}\,(q)\,|n) איז(q)<\infty באשר n\in\mathbb{N}_+ ויהיn\in\mathbb{N}_+ טענה: תהא
                                                                     (i,n) \Longleftrightarrow (\langle i \rangle = \mathbb{Z}_n) אזי i \in \mathbb{Z}_n ויהי n \in \mathbb{N}_+ יהי יהי יהי n \in \mathbb{N}_+
                                                                        . אזי H אזי א אין אין איקלית ותהא חבורה G אזי אין טענה: תהא
                                                                                                              .טענה: (\mathbb{Q},+) אינה נ"ס
                                                                    H*g אזי g\in G ויהי ויהי H\leq G אזי חבורה תהא
                                                                 g*H אזי אוי g\in G ויהי ויהי חבורה תהא חבורה G
```

 $(R_n,\cdot)\leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$ אזי $n\in\mathbb{N}$ יהי טענה: יהי $G\leq G$ טענה: תהא (G,*) חבורה אזי $\{e\}\leq G$ טענה: תהא (G,*) חבורה אזי

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד. $a \in G$ לכל a*e=e*a=a עבורו $e \in G$ איזי קיים ויחיד a*b=e=b*a עבורו a*b=e=b*a עבורו ויהי a*b=e=b*a איזי קיים ויחיד b*a*a=a עבורו a*a*a=a סענה: תהא a*a=a חבורה ויהי a*a=a ויהי a*a=a איבר הופכי ל-a*a*a=a אינר הופכי ל-a*a*a=a

a*b=a*c עבורם a*b=a*c אזי a*b=a*c מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא

 $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$ אזי $a,b \in G$ חבורה ויהיו (G,*) אטענה: תהא

 $(a^{-1})^{-1}=a$ אזי $a\in G$ טענה: תהא

```
(gH=H) \Longleftrightarrow (g\in H) אזי g\in G ויהי ויהי H\leq G טענה: תהא
                                                       (Hg=H)אזי (g\in H) אזי (g\in H) ויהי (g\in H) אזי ויהי חבורה תהא
                                                                     G/H = \{gH \mid g \in G\} אזי H \leq G סימון: תהא חבורה ותהא G
                                                                    H \setminus G = \{Hg \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G חבורה G
                                                                         G משפט: תהא G חבורה ותהא H \leq G משפט: תהא
                                     .(g_1H=g_2H) \Longleftrightarrow \left(g_2^{-1}g_1 \in H
ight) אזי g_1,g_2 \in G ויהיו H \leq G חבורה תהא חבורה G
                                                                           .eH אזי אוי H \leq G חבורה ותהא חבורה תהא אזי אזי
                                               G:H=|G/H| אזי H\leq G אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא
                                                                          G:H]=|_Hackslash^G| אזי H\leq G חבורה חבורה G חבורה ענה:
                                                       \operatorname{ord}\left(G
ight)=\operatorname{ord}\left(H
ight)\cdot\left[G:H
ight] אזי H\leq G סענה: תהא חבורה סופית ותהא
                                                           .ord (H) \midord (G) אזי אזי H \leq G משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא
                                                                       .ord (q) |ord (G) אזי q \in G מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי
                                              G:K]=[G:H]\cdot [H:K] אזיי איזי H\leq G טענה: תהא חבורה תהא חבורה תהא איזי
                              G=\langle g 
angle מתקיים g\in G\setminus \{e\} מתקיים g\in G\setminus \{e\} מתקיים מסקנה: יהי g\in G תהא
                                                         אזי G אזי G אזי G אזי G אזי G אזי סופית באשר חבורה סופית יהי
                                   n^{p-1}\equiv 1\mod p אזי \gcd(n,p)=1 באשר n\in\mathbb{N} ויהי ויהי p\in\mathbb{P} יהי פרמה הקטן: יהי
                                                     |HK| = rac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|} אוי חבורות חוברות H,K \leq G למה: תהא חבורה חבורה ותהיינה
\operatorname{ord}(K)=p וכן \operatorname{ord}(H)=p באשר p,q\in\mathbb{P} באשר חבורה באשר G ותהא חבורה באשר חבורה באשר אזי לכל
                                                                                                                         K=H מתקיים
                                                                    (S_n/\mathsf{Stab}(1))\cap (S_\mathsf{Stab}(1)\setminus S_n)=\{\mathsf{Stab}(1)\} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} טענה: יהיn\in\mathbb{N}_{\geq 3}
                                                               HgK אזי g \in G ויהי ויהי H, K \leq G קוסט כפול: תהא
                                                      G טענה: תהא G חלוקה של H,K \leq G טענה: תהא חבורה ותהיינה
                                                                        המקיימת \varphi:G \to H אזי חבורות G,H המקיימת הומומורפיזם:
                                                                                               .\varphi\left(e_{G}\right)=e_{H} :שימור איבר יחידה
                                                                   arphi\left(a\cdot b
ight)=arphi\left(a
ight)\cdotarphi\left(b
ight) מתקיים a,b\in G לכל
                                                                        arphi\left(g^{-1}
ight)=arphi\left(g
ight)^{-1} שימור הופכי: לכל g\in G מתקיים
. (arphi\left(a\cdot b^{-1}
ight)=arphi\left(a
ight)\cdotarphi\left(b
ight)^{-1} מתקיים a,b\in G מתקיים אזי (arphi הומומורפיזם) אזי (arphi הומומורפיזם) אזי (arphi הומומורפיזם) אזי (arphi הומומורפיזם)
              \ker\left(arphi
ight)=\{g\in G\midarphi\left(g
ight)=e_{H}\} אזי הומומורפיזם הומור מיהינה G,H חבורות ויהי של הומומורפיזם: תהיינה
                                                                        למה: תהיינה G,H חבורות ויהי \varphi:G	o H חבורות חבורות למה:
                                                                                                                      \operatorname{Im}(\varphi) \leq H \bullet
                                                                                                                     \ker(\varphi) \leq G \bullet
                                                                                                 (\ker(\varphi) = \{e_G\}) \iff (y \cap \varphi) \bullet
            טענה: תהיינה G,H,K חבורות יהי \psi\circ\varphi הומומורפיזם ויהי \psi:H\to K הומומורפיזם \phi:G\to H חבורות יהי
                                     \operatorname{ord}\left(\varphi\left(g\right)\right)|\operatorname{ord}\left(g\right) אזי g\in G אזי הומומורפיזם יהי \varphi:G	o H סענה: תהיינה
                                                                                        . סענה: תהא G חבורה אזי Id הינו חבור G
            . טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא g\in G חבורה אזי \varphi:G	o \{e\} המוגדרת G חבורה אזי לכל
                                      .טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא Id : H 	o G אזי H 	ext{ < } G חבורה חבורה חבורה ותהא ווו וווי הימומורפיזם החבלה:
                                                     . הינו הומומורפיזם \det: \mathrm{GL}(V) 	o \mathbb{F}^* אזי \mathbb{F} מ"ו מעל V מ"ו שדה ויהי \mathbb{F} שדה ויהי

ho(\sigma)\cdot v=egin{pmatrix} v_{\sigma(1)} \ dots \ v\in\mathbb{R}^n \end{pmatrix} אזי v\in\mathbb{R}^n ויהי \sigma\in S_n תהא n\in\mathbb{N} מסקנה: יהי
```

g נציג של קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי Hg קוסט ימני אזי g. נציג של קוסט שמאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי אזי g. מסקנה: תהא G חבורה אבלית תהא G ויהי G אזי G חבורה אבלית תהא G ויהי G אזי G חבורה תהא G חבורה תהא G ויהי G אזי G

```
.C_n\cong R_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
.arphi=\psi אזי arphi_{
ho}=\psi_{
ho} חבורות תהא G=G באשר איי ויהיו \langle S
angle=G ויהיו arphi,\psi:G	o H ויהיו אזי איי מענה:
                                                        .arphi:G	o H מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם תהיינה
                                                            arphi:G	o H אפימורפיזם על אזי הומומרפיזם תהיינה G,H אפימורפיזם
                                                                      arphi:G	o G אוטומורפיזם: תהא חבורה אזי איזומורפיזם: תהא
                                                          .
Aut (G)=\{arphi:G	o G\mid סימון: תהא חבורה אזי ק
                                                                                  חבורה. (Aut (G) , \circ) אזי חבורה G חבורה.
                                                                                                    K = C_2 \times C_2 חבורת קליין:
                                                                                                 טענה: חבורת קליין הינה אבלית.
                                                                                                טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.
                                                                                      .C_4טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־
                         c_{g}\left(x
ight)=gxg^{-1} המוגדרת c_{g}:G	o G אזי איז איז חבורה ויהי חבורה G לכל לכל מונקציית הצמדה: תהא
                                                                          . טענה: תהא G חבורה ויהי g \in G אזי חבורה G אוטומורפיזם
                          .\varphi=c_q המקיים פנימי: תהא g\in G עבורו קיים \varphi:G\to G אוטומורפיזם אוטומר תהא חבורה G המקיים פנימי: תהא
                                                                             \operatorname{Inn}\left(G
ight)=\left\{c_{g}\mid g\in G
ight\} סימון: תהא G חבורה אזי
                                      .c_{a}\left( H
ight) =H מתקיים g\in G מתקיים אזי אבורה אזי H\leq G חבורה אזי תהיחבורה נורמלית:
                                                                      H \unlhd G נורמלית אזי H \subseteq G חבורה ותהא חבורה H \subseteq G
                                                                                     U^*טענה: תהא G חבורה ותהא H \leq G
                                                                                                                    .H \triangleleft G \bullet
                                                                                        .q^{-1}Hq=H מתקיים q\in G לכל
                                                                                        .gHg^{-1}=H מתקיים g\in G לכל
                                                                                           .gH=Hg מתקיים g\in G לכל
                                                                                        .q^{-1}Hq\subseteq H מתקיים q\in G לכל
                                                                                        H\subseteq g^{-1}Hg מתקיים g\in G לכל
                                                                                                              G/H = H \setminus G \bullet
                                                          H 	extcolor{le G} אזי G:H]=2 באשר H 	extcolor{le G} אזי G:H
                                                                                   \operatorname{Inn}(G) \lhd \operatorname{Aut}(G) טענה: תהא G חבורה אזי
                                arphi\left(K
ight)=K מתקיים arphi\in\mathrm{Aut}\left(G
ight) עבורה לכל עבורה אזי חבורה אוי חבורה אוי חבורה אופיינית: תהא
                                                                   K char G אופיינית אזיK \leq G חבורה ותהא חבורה G אופיינית אזי
                                                                           K \unlhd G אזי אזי K char G אזי חבורה חבורה תהא
```

למה: תהיינה $\psi\circ \varphi$ איזומורפיזם איז $\psi:H o K$ איזומורפיזם ויהי $\phi:G o H$ איזומורפיזם איז למה: תהיינה

טענה: יהי $ho:S_n o \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי $n\in\mathbb{N}$ הינה הומומורפיזם. $\det\left(
ho\left(\sigma
ight)
ight)\in\{\pm 1\}$ אזי $\sigma\in S_n$ ותהא $n\in\mathbb{N}$ יהי

 $\operatorname{sign}\left(\sigma
ight)=rac{\prod_{i< j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i< j}(i-j)}$ אזי $\sigma\in S_n$ ותהא ותהא $n\in\mathbb{N}$

.arphi:G o H איזומורפיזם הפיך אזי חבורות חבורות G,H היינה

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G o H$ איזומורפיזם אזי φ^{-1} איזומורפיזם.

 $A_n = \ker \left(\mathsf{sign} \right)$ אזי $n \in \mathbb{N}$ יהי המורות הזוגיות: יהי

 $G \cong H$ סימון: תהיינה G,H חבורות איזומורפיות סימון:

 \mathcal{A} טענה: תהא \mathcal{A} קבוצה של חבורות אזי יחס שקילות על

 $K \subseteq G$ אזי אזי K char H ותהא ותהא $H \subseteq G$ אזי חבורה תהא

 $\mathcal{Z}(G)=\{g\in G\mid \forall h\in G.gh=hg\}$ מרכז של חבורה: תהא

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי sign אזי $n\in\mathbb{N}$

 $A_n \leq S_n$ אזי $n \in \mathbb{N}$ טענה: יהי

 $\operatorname{sign} = \det \circ
ho$ המוגדרת sign : $S_n o \{\pm 1\}$ אזי $n \in \mathbb{N}$ המוגדרת סימן של תמורה: יהי

 $sign\left(\sigma
ight)=(-1)^{\left|\left\{(i,j)\in[n]^2\;\middle|\;(i< j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))
ight\}
ight|}$ אזי $\sigma\in S_n$ ותהא ותהא $n\in\mathbb{N}$ טענה: יהי

```
(gN)*(hN)=(g*h)\,N כך *:G/N	imes G/N	o G/N נגדיר N\unlhd G נגדיר ותהא N\unlhd G חבורה ותהא
                                                                                  (G/N,*) אזי אזי N \lhd G חבורה ותהא N \lhd G אזי חבורת (G,*) אזי
                                                                             . חבורה המנה הינה חבורת אזי חבורת המנה הינה חבורה R אזי חבורת המנה הינה חבורה
                                                    q\left(g
ight)=gN המוגדרת q:G	o G/N אזי איזי N	olember G חבורה תהא
                                                                                  טענה: תהא G חבורה תהא N \unlhd G ותהא חבורה G אזי
                                                                                                                              . הינה הומומורפיזם q \bullet
                                                                                                                                       \ker(q) = N \bullet
                                                                                                                                                 על. q •
                        (H=\ker(arphi) עבורו arphi:G	o G עבורו arphi:G	o G אזי (H=\ker(arphi)איזי איזי (H\subseteq G) איזי איזי (H=\ker(arphi)
                                                                                                                      \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                G/\ker(arphi)\cong \mathrm{Im}\,(arphi) הומומורפיזם איז משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G,H חבורות ויהי
                                                                                  טענה: תהא חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים G
                                                                                                                                              .G\cong\mathbb{Z} •
                                                                                                                    G \cong \mathbb{Z}_n עבורו n \in \mathbb{N} סיים •
                                                                                                             |G/\mathcal{Z}(G)| \notin \mathbb{P} טענה: תהא G חבורה אזי
                    G \cong H 	imes K אזי אוי H \cap K = \{e\} וכן וכן HK = G טענה מכפלה פנימית: תהא חבורה ותהיינה H \cap K = \{e\} באשר
                                                                   \mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n	imes\mathbb{Z}_m אוים אזי n,m\in\mathbb{N} יהיו הסיני: יהיו
טענה: יהי p\in \mathbb{P} באשר M\neq N אזי M\in G אאי איז איז איז אזי M\in G מאינדקס M\in \mathcal{G} באשר איז איז איז איז M\in \mathcal{G}
                                                                                                                                                 p^2 | \text{ord} (G)
                                            חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H,K חבורות ויהי \varphi:K	o {
m Aut}\,(H)
                                               (H \times K, \cdot) איז k, k' \in K ולכל h, h' \in H לכל (h, k) \cdot (h', k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')
                                   H 
times_{arphi} K איי ישרה הינה אויר חבורת אזי חבורת אזי חבורת אזי חבורות ויהי \varphi: K 
ightarrow \operatorname{Aut}(H) חבורות ויהי
                                                             . הינה חבורה אזי H \rtimes_{\varphi} K אזי \varphi: K \to \operatorname{Aut}(H) חבורות ויהי חבורה H, K
                        .H \rtimes_{\varphi} K \cong H \times K איז איז k \in K טענה: תהיינה H, K חבורות נגדיר \varphi : K \to \operatorname{Aut}(H) כך חבורות נגדיר
                                        .Aff (\mathbb{F})=\{f:\mathbb{F}\to\mathbb{F}\mid\exists a\in\mathbb{F}^{\times}\,(\exists b\in\mathbb{F}\,(\forall x\in\mathbb{F}\,(f\,(x)=ax+b)))\} יהי שדה אזי
                                                                                                           טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי (Aff (\mathbb{F}) , \circ) טענה: יהי
                    \operatorname{Aff}(\mathbb{F})\cong\mathbb{F}
ightarrow_{arphi}\mathbb{F}^{	imes} אזי b\in\mathbb{F} איזי a\in\mathbb{F}^{	imes} לכל arphi(a) לכל arphi(a) לכל arphi(a) אזי arphi(a) אזי arphi(a)
                                  . Iso (P)=\{arphi:\mathbb{R}^2	o\mathbb{R}^2\mid (מצולע משוכלל אזי arphi)\wedge(arphi(P)=P)\} איזומטריה מצולע משוכלל משוכלל אזי
                                                     D_n = \mathrm{Iso}\left(P
ight) אזי קודקודים או מצולע משוכלל בעל P \subseteq \mathbb{R}^2 יהי יהי
                                                                                                            . חבורה (D_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי
                                                                          D_n\cong \langle r,s\mid s^2=e,r^n=e,srs=r^{-1}
angle אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי יהי n\in\mathbb{N}_{\geq 2}
                                                                                                                                 משפט: יהיn\in\mathbb{N}_{\geq 2} אזי
                             D_n אוי אוי \{D_n,\langle sr,r^2
angle,\langle sr,r^2
angle\} הן כל תתי החבורות הנורמליות של n\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}} אם n\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}}
                                                     D_n אזי החבורות הנורמליות הן כל הון \{D_n\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\} אזי אוי החבורות אזי החבורות של •
                                                                                                                                    \mathcal{H}\left(\mathbb{F}_{2}\right)\cong D_{4} :טענה
```

 $\mathcal{Z}\left(G
ight) ext{$ o$} G$ סענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G
ight) ext{$ o$} G$ שדה חבורת G שדה סופי אזי $\mathbb{F}\left(\mathbb{F}
ight) = \left\{\left(egin{array}{cc} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{array}
ight) \ \middle|\ a,b,c \in \mathbb{F}
ight\}$ שדה סופי אזי

 $\ker\left(\varphi\right) extlesigma G$ אזי אוינה G,H חבורות ויהי ויהי G extlesigma G extlesigma G חבורות ויהי

 $H \in \{\{e\},G\}$ מתקיים $H \unlhd G$ עבורה עבורה חבורה משוטה:

 $\mathcal{Z}\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{F}
ight)
ight)\cong\left(\mathbb{F},+
ight)$ טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי

 $A_n \unlhd S_n$ אזי $n \in \mathbb{N}$ טענה: יהי

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ פשוטה. $\mathrm{SL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $n\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ פשוטה.

```
ונגדיר H\cap K=\{e\} וכן ווא HK=G טענה מכפלה חצי ישרה פנימית: תהא H\cap K=\{e\} חבורה תהא אונגדיר H\cap K=\{e\}
                                                                 G\cong H
ightarrow \varphi איז k\in K לכל \varphi(k)=c_k כך \varphi:K	o \operatorname{Aut}(H)
                             D_n\cong C_n איזי k\in K לכל arphi(k)=c_k כך arphi:C_2	o \operatorname{Aut}(C_n) ונגדיר n\in \mathbb{N}_{\geq 2} יהי יהי
                                                                                                                       .K \unlhd A_4 טענה:
                                                  חבורה G_0 \dots G_n \leq G וקיימות n \in \mathbb{N}_+ עבורה קיים עבורה מעירה: חבורה מעירה
                                                                                                       G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                                       i \in [n] לכל G_{i-1} \unlhd G_i
                                                                                                   i \in [n] אבלית לכל G_i/G_{i-1}
                                                                                          G פתירה פתירה מצלית אזי G פתירה.
                                                            . אינה פתירה פשוטה באשר G אינה אבלית אזי G חבורה פשוטה באשר המענה: תהא
                                                                                                   משפט: יהי S_n אזי n \in [4] פתירה.
                                             חבורה G_0 \dots G_n \leq G וקיימות וקיים עבורה עבורה עבורה עבורה G המקיימות חבורה נילפוטנטית:
                                                                                                       G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                                        i \in [n] לכל G_{i-1} \unlhd G
                                                                                           i \in [n] לכל G_i/G_{i-1} < \mathcal{Z}\left(G/G_{i-1}\right)
                                                                                     .טענה: תהא G חבורה נילפוטנטית אזי G פתירה
                                 H/(H\cap N)\cong (HN)/N אזי אM\unlhd G ותהא ותהא חבורה תהא חבורה G אחדי תהא
                                                        N/K \unlhd G/K אזי אK \subseteq N באשר N, K \unlhd G טענה: תהא
                         G/N\cong (G/K)/(N/K) אאי K\leq N באשר א האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה משפט האיזומורפיזם השלישי:
     משפט ההתאמה: תהא M = \{H \leq G \mid N \leq H\} \to \{H \mid H \leq G/N\} משפט ההתאמה: תהא M \subseteq G חח"ע ועל המקיימת משפט ההתאמה:
                                                   \Phi\left(K
ight) 	ext{$\leq G/N$} מתקיים N \leq K המקיימת א לכל לכל לכל לכל פשמרת נורמליות:
                                                   M \subseteq K משמרת מנות: לכל G \supseteq \Phi(G)/\Phi(K) מתקיים N \subseteq K המקיימת M \subseteq K המקיימת •
                                               .(פשוטה) אוי G/N משוטה) אוי N אוי N \lhd G אוי תהא G חבורה תהא מקסימלית מקסימלית מאוי מענה:
                   המקיימת f:G	imes X	o T המקיימת קבוצה אזי פונקציה המלית על קבוצה: תהא חבורה חמה המקיימת המחלה שמאלית של חבורה על קבוצה:
                                                                                             f(e,x)=x מתקיים x\in X •
                                                           f\left(g\cdot h,x
ight)=f\left(g,f\left(h,x
ight)
ight) מתקיים x\in X ולכל g,h\in G לכל
                                                                      הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.
                                   f\left(g,x
ight)=g.x אזי אזי G פעולה על f:G	imes X	o X פעולה על קבוצה ותהא G
                                             G \curvearrowright X = \{f: G \times X \to X \mid Gפעולה פעולה G \curvearrowright X = \{f: G \times X \to X \mid Gפעולה אזי
                                                    f אזי f(g,x)=gx כך f\in G\curvearrowright G אזי חבורה נגדיר תהא
                                                                            . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה טענה:
                                                    f אזי f\left(g,x
ight)=xg^{-1} כך כך f\in G\curvearrowright G אזי חבורה תהא חבורה G אזי הפעולה הימנית:
                                                                               . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה
                                                               . את הפעולה g.x ונסמן X פועלת כי G פועלה נאמר כי מכאן והלאה מכאן הלאה מכאן הלאה מיט פועלת מיט הערה:
                         \operatorname{orb}_lpha(x)=\{g.x\mid g\in G\} אזי x\in X ויהי lpha\in G\curvearrowright X אחבורה תהא מסלולים: תהא
                                             .o\left(x
ight)=\mathrm{orb}\left(x
ight) אזי x\in X ויהי א חבורה הפועלת על חבורה חבורה G אזי קבוצה תהא
                    .o\left(x
ight)=X המקיים x\in X עבורה קיים עבורה קיים אזי קבוצה אזי קבוצה אזי חבורה ותהא א
                           \operatorname{Stab}_G(x)=\{g\in G\mid g.x=x\} איי X\in X ויהי ווהי חבורה הפועלת על מייצב: תהא G חבורה הפועלת על מייצב:
             \operatorname{Fix}_X(g) = \{x \in X \mid g.x = x\} אוסף נקודות השבת: תהא G חבורה תהא G חבורה הפועלת על G ויהי
                                             \operatorname{Stab}_G(x) < G איי x \in X איי אויה אויה תהא G חבורה הפועלת על
                  x \in X מתקיים x \in X מתקיים x \in X מנולה חופשית: תהא x \in X מבורה ותהא x \in X מבורה ותהא
                                          lpha\left(g
ight)\in S\left(X
ight) אזי g\in G ויהי lpha\in G\curvearrowright X אמי קבוצה תהא למה: תהא
              arphi_lpha\left(g
ight)(x)=lpha\left(g,x
ight) חבורה תהא G חבורה ותהא איlpha\in G\curvearrowright X אזי מהא חבורה תהא G חבורה תהא א
                                                    . טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא \alpha \in G \curvearrowright X אזי \alpha הומומורפיזם
```

 $lpha_{arphi}\left(g,x
ight)=arphi\left(g
ight)(x)$ המוגדרת תהא $lpha_{arphi}:G imes X o X$ הומומורפיזם אזי lpha:G imes X o X המוגדרת תהא lpha

```
. פעולה lpha_{arphi} חבורה תהא X קבוצה ויהי arphi:G	o S(X) הומומורפיזם אזי
                       O(x) = [G: \mathsf{Stab}_G(x)] איז X \in X איז חבורה הפועלת על X ויהי אוז קבוצה תהא X קבוצה תהא
          .|\{o\left(x
ight)\mid x\in X\}|=rac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}_{X}\left(g
ight)| אזי אוני חבורה חבורה G חבורה חבורה G
                lpha\left(g,g'H
ight)=gg'H המוגדרת lpha\in G\curvearrowright G/H אזיlpha\in G המעולה על הקוסטים השמאליים: תהא
                                   . טענה: תהא G חבורה ותהא H \leq G אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.
          עבורן קיימת (\alpha,\beta)\in (G\curvearrowright X)	imes (G\curvearrowright Y) אוותהא חבורה אזי עהיינה X,Y קבוצות תהיינה פעולות אקווריאנטיות/שקולות:
                                               x\in X ולכל g\in G לכל F\left(lpha\left(g,x
ight)
ight)=eta\left(g,F\left(x
ight)
ight) ולכל המקיימת F:X	o Y
טענה: תהא o\left(x
ight)=X עבורו x\in X טרנזיטיבית תהא lpha\in G\curvearrowright X אזי הפעולה על חבורה תהא איזי הפעולה על מענה:
                                                                                                  \alpha-אקווריאנטית ל-G/_{Stab_G(x)} אקווריאנטית ל-
מסקנה: תהא עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים \alpha \in G \curvearrowright X טרנזיטיבית אי קיימת אינ קבוצה תהא מחבורה ותהא מסקנה: תהא אוותה עבורה ותהא אוותה מסקנה:
                                                                                                                              lphaאקווריאנטית ל
                                             X טענה: תהא \{o\left(x\right)\mid x\in X\} אזי אוי חבורה חבורה G חלוקה של
                       .o\left(x
ight)=X מתקיים x\in X אוי לכל אזי טרנזיטיבית מסקנה: תהא חבורה חבורה ותהא מסקנה: תהא
                           איי p\in igcup_{i=1}^n arphi_i (P	imes\{0\}) איי ותהא של P\subseteq \mathbb{R}^2 איי איזומטריות משוכלל יהיו מצולע משוכלל יהיו
                                                                                         .Poly (p) = |\{\varphi_i (P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i (P \times \{0\})\}|
\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i \left( P \times \{0\} \right) פאות איזומטריות: •
                                           .
Poly (v_1)= Poly (v_2) מתקיים v_1,v_2\in K פודקודים לכל קודקודים ההה כמות<br/>ף יהה משותף ההה כמות:
עבורן \mathbb{R}^3 עבורן arphi_1\ldotsarphi_n של arphi_1\ldotsarphi_n של איזומטריות איזומטריות אפלטוני: יהיK\subseteq\mathbb{R}^3 אוף אפלטוני אזיn\in\mathbb{N} מינימלי עבורו קיימות איזומטריות
                                                                               באשר P\subseteq\mathbb{R}^2 באשר \partial K=\bigcup_{i=1}^n \varphi_i\left(P	imes\{0\}\right)
                                 .
Iso (P)=\left\{arphi:\mathbb{R}^3	o\mathbb{R}^3\;\middle|\; (מיזומטריה) איזומטריה אזי גוף אפלטוני אזי אפלטוני אזי K\subseteq\mathbb{R}^3 יהי היי
        \operatorname{Iso}_{+}\left(P
ight)=\left\{arphi:\mathbb{R}^{3}
ightarrow\mathbb{R}^{3}\mid\left(היינטציה משמרת אוריינטציה אוו איז \left(arphi:K
ight) איזומטריה אוריינטציה אור אוריינטציה אזי K\subseteq\mathbb{R}^{3} גוף אפלטוני אזי K\subseteq\mathbb{R}^{3}
                             \{n,\operatorname{Poly}(k)\} גוף אזי v\in K פאות ויהי v\in K פאות אזי גוף אפלטוני בעל אוף אפלטוני בעל אוף איז אוף אפלטוני בעל אוף איזי אוף אפלטוני בעל
                                                                                                 הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.
                                                                                \{5,3\} בעל סימון שלפלי בעל K\subseteq\mathbb{R}^3 בעל אפלטוני גוף אפלטוני
                                                                                               \operatorname{Iso}_+(D) \cong A_5 טענה: יהי D דודקהדרון אזי
                                                                                       .ord (Iso<sub>+</sub> (D)) = 60 מסקנה: יהי דודקהדרון אזי
                                                 G \cong H עבורה H < S\left(X
ight) וקיימת קבוצה אזי קיימת חבורה אזי קיימת חבורה H < S\left(X
ight)
```

 $G\cong H$ עבורה $H\leq S\left(\mathbb{N}
ight)$ אזי קיימת G אזי איי סrd עבורה באשר G עבורה מסקנה:

 $lpha\left(g,h
ight)=c_{g}\left(h
ight)$ המוגדרת $lpha\in G\curvearrowright G$ חבורה אזי חבורה lpha

 $[h]=\left\{ghg^{-1}\mid g\in G
ight\}$ אזי אויה חבורה G חבורה מחלקת הצמידות: תהא מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h\in G$ אזי חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי

 $.C_G\left(h
ight)=\{g\in G\mid gh=hg\}$ אזי $h\in G$ חבורה חבורה G הממרכז של איבר: תהא ממרכז של פעולת החבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h\in G$ אזי חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי

 $G \cong S_3$ או $G \cong \mathbb{Z}_6$ אזי $G \cong G$ או $G \cong G$ טענה: תהא

 $|G||=|G:C_{G}\left(g
ight)$ אזי $g\in G$ מסקנה: תהא חבורה סופית ויהי

 $.h^g=g^{-1}hg$ אזי $h,g\in G$ סימון: תהא G חבורה ויהיו חבורה $g,k\in G$ טענה: תהא $g,h,k\in G$ חבורה ויהיו

G אזי $\{[h]\mid h\in G\}$ חלוקה של חבורה מסקנה: תהא

 $.C_G\left(h
ight) \leq G$ איי א $h \in G$ חבורה חבורה מסקנה: תהא מסקנה: תהא חבורה איי מענה: תהא $\mathcal{Z}\left(G
ight) = igcap_{g \in G} C_G\left(g
ight)$

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)$ אופיינית. $G/\mathcal{Z}(G)\cong\operatorname{Inn}\left(G\right)$ חבורה אזי $G/\mathcal{Z}(G)\cong\operatorname{Inn}\left(G\right)$

 $\operatorname{ord}(g)=p$ עבורו $g\in G$ איי קיים איי איי $p|\operatorname{ord}(G)$ עבורו עבורה סופית ויהי $p\in \mathbb{P}$ עבורו

.ord (H)=p איי קיימת $H\leq G$ איי קיימת $p[\operatorname{ord}(G)]$ עבורו ויהי $p\in\mathbb{P}$ עבורה סופית ויהי

```
\mathcal{Z}\left(G
ight)=igcup \{[g]\mid (g\in G)\wedge (|[g]|=1)\} טענה: תהא G חבורה סופית אזי
                              למה: יהי eta=(m_{1,1}\ ...\ m_{1,\ell_1})\circ\ldots\circ(m_{b,1}\ ...\ m_{b,\ell_b}) באשר lpha,eta\in S_n תהיינה n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי
                                                                                                                                 .\alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(m_{1,1}) \dots \alpha(m_{1,\ell_1})) \circ \dots \circ (\alpha(m_{b,1}) \dots \alpha(m_{b,\ell_b}))
                                                                                                                                                                                                                            . פשוטה A_5
                                                           H=A_n אזי \pi\in H אזי המקיים שלוש המקיים H 	riangleq A_n אזי n\in \mathbb{N}_{>5} למה: יהי n\in \mathbb{N}_{>5}
                                                                                                                                                                                                                            . למה: A_6 פשוטה
                                                                                                                                                           משפט: יהי n\in\mathbb{N}_{>5} אזי משפט: יהי n\in\mathbb{N}_{>5}
                                          \mathbb{FP}=(\mathbb{F}^2ackslash\{0\})/R אזי R=\left\{(x,y)\in\mathbb{F}^2ackslash\{0\}\mid\exists\lambda\in\mathbb{F}^	imes(x=\lambda y)
ight\} אזי R=\left\{(x,y)\in\mathbb{F}^2ackslash\{0\}\mid\exists\lambda\in\mathbb{F}^	imes(x=\lambda y)
ight\} הישר הפרויקטיבי: יהי
                                                                                                                   \mathcal{Z}\left(\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight)
ight)=\{\lambda I_n\mid\lambda\in\mathbb{F}^{	imes}\} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq2} שדה ויהי \mathbb{F} שדה ויהי מענה: יהי
                                                                                                                            	ext{.PGL}_n\left(\mathbb{F}
ight)=	ext{GL}_n(\mathbb{F})/\mathcal{Z}_{\left(	ext{GL}_n(\mathbb{F})
ight)} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} שדה ויהי \mathbb{F} שדה ויהי
                                                                                                             |G|=p^n אזי חבורה n\in\mathbb{N} עבורה קיים n\in\mathbb{N} אזי חבורה אזי חבורה p\in\mathbb{P}
                                                                                                                                                 \mathcal{Z}\left(G
ight)
eq \{e\} אזי p\in\mathbb{P} ותהא חבורת G ותהא
                                                                                                                                         . מסקנה: יהי p\in\mathbb{P} ותהא G חבורה מסדר p\in\mathbb{P} אזי אבלית
                                                                                                                                                  . נילפוטנטית G אזי G ותהא חבורת G ותהא ותהא p\in\mathbb{P}
H \leq G אזי אוי|G| = p^k \cdot m חבורה באשר G חבורה באשר אויי אויי אויי m, k \in \mathbb{N} אזי איזי p \in \mathbb{R}
                                                                                                                                                                                                                                         |H| = p^k
p חבורה K \leq G חבורה חובר חבורת H) חבורה חבורה H אאי ווא איי ווא חבורה חבור
                                                                                                                                                                                                                     |K| \leq |H| מתקיים
                                    (p \not\mid [G:H] וכן pר חבורת H) חבורה H אאי ווענה: יהי H \leq G אאי ווער חבורה ותהא ווענה: יהי
                                                              \operatorname{Syl}_n\left(G
ight)=\{H\leq G\mid G סימון: יהי p\in\mathbb{P} חבורה סופית אזי אזי חבורה סופית אזי p\in\mathbb{P}
                                                                                                                                   n_p = \left| \mathrm{Syl}_p \left( G 
ight) 
ight| יהי אזי חבורה חבורה G ותהא יהי יהי יהי יהי
                                                                                                             p 
otin \gcd(p,m) = 1 באשר p \in \mathbb{N}_+ ויהיו p \in \mathbb{N}_+ אזי ויהיו p \in \mathbb{N}_+
                                      G משפט סילו הראשון: יהי H תת־חבורה סופית אזי קיימת H \leq G ותהא חבורה סופית חבורה סופית אזי קיימת
                                                                                                                                                   n_p \geq 1 יהי חבורה חבורה p \in \mathbb{P} יהי מסקנה: יהי
                                                                       N_G(H)=\left\{g\in G\mid gHg^{-1}=H
ight\} אזי H\leq G חבורה תהא חבורה: תהא G
                                                                                                          H \subseteq N_G(H) וכן N_G(H) \subseteq G אזי H \subseteq G חבורה חבורה G אסענה: תהא
H,K \leq G חבורות־G חבורה באשר חבורה G חבורות באשר חבורות באשר האשר אינה gcd\left(p,m
ight)=1 באשר חבורות־m,k \in \mathbb{N} ותהיינה
                                                                                                                                                                                         .H \nsubseteq N_G(K) אזי H \neq K באשר
gHg^{-1}=K עבורו g\in G משפט סילו של G סילו של H,K תת־חבורה סופית ותהיינה g\in \mathbb{P} עבורו אזי קיים
                                             (n_p=1)\Longleftrightarrow (H\unlhd G) מסקנה: יהי p אזי p\in \mathbb{R} תת־חבורה חפית ותהא H תחבורה סופית ותהא p\in \mathbb{R}
y \in Y ולכל g \in G אזי איזי Y \subseteq X עבורה לכל חבורה קבוצה ותהא G חבורה ותהא קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה:
                                                                                                                                                                                                                           g,y \in Y מתקיים
עבורה \mathcal{O}\subseteq X שמורה)\Longleftrightarrow(קיימת Y שמורה) אזי איזי Y\subseteq X אוי תהא Y\subseteq X חבורה הפועלת על אוי חבורה מענה:
```

 $\sum_{g\in C}rac{1}{|C_G(g)|}=1$ אזי $\{[h]\mid h\in G\}$ משפט משוואת מחלקות הצמידות: תהא חבורה סופית ותהא $C\subseteq G$ קבוצת נציגים של

 $|R| \equiv 1 \mod p$. ותהא $p \equiv 1 \mod p$ ותהא $p \equiv 1 \mod p$ ותהא $p \equiv 1 \mod p$ ותהא סילו השלישי: יהי

 $\left|C_{G}\left(k
ight)
ight|=\left|C_{G}\left(h
ight)
ight|$ אזי אזי $k=ghg^{-1}$ באשר באשר g,h,k איזי חבורה G

 $n_p|m$ אזי אזי $|G|=p^k\cdot m$ חבורה באשר $m,k\in\mathbb{N}$ ותהא $m,k\in\mathbb{N}$ מטקנה: יהי יהיו

טענה: α אזי α חבורה סופית ונגדיר α אזי α כך $\alpha \in G \curvearrowright \mathrm{Syl}_n(G)$ אזי α טרנזיטיבית. α ענה: יהי

למה: R וכן $H\in R$ וכן $H\in R$ הינה אזי $R\subseteq \mathrm{Syl}_n(G)$ באשר $R\subseteq \mathrm{H}$ תת־חבורה הינה $H\subseteq G$ למה: R באשר הינה

 $n_{p}|\mathrm{ord}\left(G
ight)$ אזי חבורה חבורה $p\in\mathbb{P}$ ותהא מסקנה: יהי

 $\mathcal{A}Y = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} o(x)$

מסקנה משפטי סילו: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא חבורה סופית אזי

- G באשר H תת־חבורה־G סילו של $H \leq G$ באשר 1.
- $.gHg^{-1}=K$ עבורו $g\in G$ עבורו של G אזי סילו של g סילו של H,K תת־חבורות.

```
n_p \equiv 1 \mod p .3
                                                                                         H=\langle\pi
angle עבורו \pi\in S_p אזי קיים p־מעגל H=p באשר באשר אבורו H\leq S_p ותהא ותהא p\in\mathbb{P}
                                                                                                                                                                 (p-1)! \equiv -1 \mod p אזי p \in \mathbb{P} מסקנה משפט ווילסון: יהי
                                                                                  . אזי pq אזי אזי q \neq 1 \mod p וכן p < q אזי אזי p \neq q אזי אזי אזי מענה: יהיו
                                                                                                                                    G \cong D_p או G \cong C_{2p} אזי אזי p \in \mathbb{P}_{>2} או p \in \mathbb{P}_{>2}
                                                                       N_G\left(N_G\left(P
ight)
ight)=N_G\left(P
ight) אזי איזי איזי אונה: תהא p\in\mathbb{P} ותהא p\in\mathbb{P} ותהא סענה: תהא
                                                       g\in A ולכל n\in\mathbb{Z} לכל g^n=ng וכן x\in A לכל -x=x^{-1} וכן ולכל e_A=0 ולכל תהא
אזי g,h\in\prod_{i\in I}G_i לכל לכל (g\cdot h)_i=g_i\cdot h_i חבורות נגדיר אזי ולכל ותהיינה קבוצה ותהיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה וולכל ולכל ולכל וולכל וו
                                                                                                                                      . חבורה \prod_{i\in I}G_i אזי חבורות אזי \{G_i\mid i\in I\} חבורה חבורה קבוצה תהא
                                                                                                                                               חבורות אזי \{G_i \mid i \in I\} חבורות קבוצה תהא חבורת הסכום הישר: תהא
                                                                                                                                                                        .\bigoplus_{i\in I} G_n = \left\{g \in \prod_{i\in I} G_i \mid |\{i \in I \mid g_i \neq e_{G_i}\}| \in \mathbb{N}\right\}
                                                                                                                       igoplus_{i\in I}G_n \leq \prod_{i\in I}G_i אזי חבורות אזי \{G_i\mid i\in I\} טענה: תהא
                                                                                                                             g^n=e המקיים n\in\mathbb{N}_+ עבורו קיים g\in G איבר חבורה G המקיים
                                                                                                                                                                 T(G)=\{g\in G\mid יימון: תהא G חבורה אזי g\} איבר פיתול
                                                                                                                                                                                                      T\left( G
ight) < G טענה: תהא חבורה אבלית אזי
                                                                                                                                                                                                            T\left(G
ight)=G עבורה פיתול: חבורה מיתול:
                                                                                                                                                                                        T\left(G
ight)=\left\{ e
ight\} חבורה עבורה פיתול: חבורה חסרת פיתול
                                                                                                                                                                                  טענה: תהא A חבורה אבלית אזי A/T(A) חסרת פיתול.
                                                                                                                                                                                  G/H אזי H \subseteq G טענה: תהא G חבורה נ"ס ותהא
                                                                                                            (G, H, K) \Leftrightarrow G \cong H \times K מסקנה: תהיינה G, H, K חבורות באשר מסקנה: תהיינה
```

 $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית: תהא א קבוצה אזי

. סופית A חבורת פיתול אבלית נ"ס אזי A סופית

 $A_p \leq A$ אזי $p \in \mathbb{P}$ אזי A חבורה A טענה: p אזי A חבורה A טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $P \in \mathbb{P}$ אזי A חבורת $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$ אזי סופית אזי $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$ אזי חפית ויהי A אבלית סופית ויהי A אזי A אבלית סופית ויהי A אזי A אבלית סופית ויהי A אזי

 $A/T(A)\cong \mathbb{Z}^k$ עבורו $k\in \mathbb{N}$ סיים

 $.arphi\circ\hat{\psi}=\psi$ עבורו $\hat{\psi}:F o A$ הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם

 $G_p = \{x \in G \mid p | \mathrm{ord}\,(x)\}$ אזי $p \in \mathbb{P}$ חבורה ויהי G חבורה אזי

 $A=igoplus \left\{ P\leq A\mid \exists p\in \mathbb{P}\left(P\in \mathrm{Syl}_p\left(A
ight)
ight)
ight\}$ מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי

משפט: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי A אבלית חופשית עם בסיס סופי. $A\cong \mathbb{Z}^k$ עבורו אוי קיים $k\in \mathbb{N}$ עבורו אוי חסרת פיתול אזי מסקנה:

 $x \in X$ לכל $\varphi(x) = f(x)$ עבורו

משפט: תהא A אבלית נ"ס אזי $A\cong A/T(A)\oplus T(A)$ ullet

. סופית $T(A) \bullet$

X בסיס של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא בסיס של חבורה אבלית חופשית אזי ווא בסיס של חבורה אבלית חופשית: תהא און X קבוצה ותהא בסיח חבורה אבלית חופשית: תהא און און בער האבלית חופשית: תהא און בער האבלית חופשית: בער האבלית האבל

 $.x\mapsto e_x$ כל X כביס X כביס החופשית האבלית החבורה בעוד החבורה בצורה טבעית עם בסיס X כך.

 $A \cong B \oplus A/B$ אזי אזי A/B אבלית חופשית אזי $A \cong B \oplus A/B$ אבלית חופשית אזי $A \cong B \oplus A/B$ טענה תכונת הפיצול: תהא

 $A\cong \mathbb{Z}^k\oplus B$ עבורם $k\in \mathbb{N}$ וקיים B וקיים חבורה אבלית פיימת אזי קיימת אזי קיימת חבורה אבלית מסקנה:

 $arphi:igoplus_X\mathbb{Z} o G$ משפט התכונה האוניברסלית: תהא f:X o G חבורה ותהא חבורה תהא קבוצה תהא קבוצה תהא

 $\psi:F o B$ משפט תכונת ההרמה: תהא G חבורה אבלית חופשית תהיינה A,B חבורות אבליות יהי אפימורפיזם ויהי

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $a_1\ldots a_{n+1}\in\mathbb{N}$ תהא $a_1\ldots a_{n+1}\in A$ ויהיו $a_1\ldots a_{n+1}\in \mathbb{N}$ יהי $a_1\ldots a_{n+1}\in \mathbb{N}$ עבורם $a_i \not\equiv 0 \mod p$ וכן קיים $i \in [n+1]$ וכן קיים $\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0$ טענה: תהא G אבלית ותהא G התב"ש A+B=G וכן $B\cap A=\{e\}$ עבורה $B\leq G$ קיימת B

a=a+b עבורם $b\in B$ וקיים ויחיד $a\in A$ קיים ויחיד $g\in G$ עבורה לכל

. העתקת המנה $u:G \to G/A$ באשר $u\circ \varphi = \mathrm{Id}_{G/A}$ עבורו $\varphi:G/A \to G$ העתקת המנה $u\circ \varphi = \mathrm{Id}_{G/A}$

 $\pi:G o A$ קיימת נשג $\sigma:G$

 $(A\cong \mathbb{Z}^k/G)$ עבורם $G<\mathbb{Z}^k$ וקיימת $k\in \mathbb{N}$ טענה: תהא A אבלית אזי A אבלית אזי איים)

 $\operatorname{ord}\left(q
ight)\in\left\{ 1,p
ight\}$ מתקיים $q\in G$ מתקיים אזי חבורה $p\in\mathbb{P}$ אזי חבורה $q\in G$

משפט המבנה לחבורות־p אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ יהי יהי אבליות סופית בעלת סופית המבנה לחבורות־p אזי יהי ויחיד ווקיימים ווקיימים משפט המבנה לחבורות־p אבליות סופיות: יהי $A\cong igoplus_{i=1}^k C_{p^{n_i}}$ עבורם $\sum_{i=1}^k n_i=n$ וכן $i\in [k-1]$ לכל $n_{i+1}\leq n_i$ באשר באשר $n_1\ldots n_k\in \mathbb{N}_+$ ויחידים

מסקנה משפט המיון לחבורות אבליות סופיות: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד ווחידים $k\in\mathbb{N}$ וקיימים ויחידים באשר $A\congigoplus_{i=1}^k C_{m_i}$ עבורם $i\in[k-1]$ לכל $m_i|m_{i+1}$

וקיימים $i\in [k-1]$ לכל $p_i\leq p_{i+1}$ באשר באשר אבלית סופית אזי קיים ויחיד א קיימים ויחידים אבלית באשר אבלית סופית אזי קיים ויחידים ויחידים אויחידים ויחידים אבלית סופית אזי קיים ויחידים אויחידים אבלית סופית אזי קיים ויחידים אבלית סופית אויחידים אבלית סופית אזי קיים ויחידים אויחידים אבלית סופית אויחידים אויח $A\cong igoplus_{i=1}^k C_{n_i^{t_i}}$ עבורם $t_1\dots t_k\in\mathbb{N}$ ויחידים

 $A \cong B$ אזי $A \oplus C \cong B \oplus C$ מסקנה: תהיינה A,B,C אבליות סופיות באשר

 $A \cong B$ אזי $A \oplus A \cong B \oplus B$ מסקנה: תהיינה A, B אזי אבליות סופיות באשר

. ציקלית אזי A טופית אזי $A \leq \mathbb{F}^{\times}$ שדה ותהא \mathbb{F} יהי מסקנה: יהי

. מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי ציקלית מסקנה:

 $C \cong A/B$ עבורה עבורה איי קיימת אזי קיימת חופית סופית טענה: תהא אבלית סופית ותהא אבלית אזי קיימת

 $\chi:A o\mathbb{S}^1$ קרקטר: תהא A אבלית אזי הומומורפיזם

 $\hat{A} = \{\chi: A o \mathbb{S}^1 \mid$ החבורה $\chi\}$ קרקטר חבורה חבורה A חבורה הדואלית: תהא

 $.C_n\cong\widehat{C_n}$ אזי $n\in\mathbb{N}$ טענה: יהי

 $\widehat{A imes B} = \hat{A} imes \hat{B}$ אבליות סופיות אזי A,B טענה: תהיינה

 $A\cong \hat{A}$ מסקנה: תהא A אלבית סופית אזי

 $U(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=\{a\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\mid\exists b\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\ (a\cdot b=1)\}$ אזי $p\in\mathbb{P}\setminus\{2\}$ יהי יהי $p\in\mathbb{P}\setminus\{2\}$ יהי

. ציקלית $U\left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}
ight)$ אזי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $p\in\mathbb{P}ackslash\left\{2
ight\}$ ציקלית.

 $T \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} T_p$ משפט גאוס: חבורת חבורת משפט מאוס:

 $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight)=\left\{rac{k}{p^{n}}\ \middle|\ (n\in\mathbb{N})\wedge\left(k\in\{0,\ldots,p^{n}-1\}
ight)
ight\}$ ההי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ אזי $a\star b=(a+b)-\lfloor a+b\rfloor$ כך p כך p אזי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$.($\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight),\star$)

. טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ חבורה

 $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight)\cong\left\{2^{\pi i\cdot rac{k}{p^n}}\;\middle|\;(n\in\mathbb{N})\wedge(k\in\{0,\ldots,p^n-1\})
ight\}$ טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ איזי מענה: $p\in\mathbb{P}$ איזי $p\in\mathbb{P}$ מענה: $p\in\mathbb{P}$ מענה: $p\in\mathbb{P}$ מענה: $p\in\mathbb{P}$ מענה: $p\in\mathbb{P}$ מענה:

 $a\cdot b=a$ המקיים $b\in G$ עבורו קיים $a\in G$ אזר אבלית ויהי חבורה אבלית חבורה אבלית ויהי מתחלק במספר:

a ב־n מתחלק בים מתחלק מתקיים כי $a \in G$ עבורה לכל עבורה מליקה: חבורה אבלית עבורה לכל

מסקנה: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} חליקה.

סענה: D חבורות אבליות באשר D חליקה ויהי G חליקה ויהי חליקה אזי D חבורות אבליות באשר חליקה ויהי

 $(i \in I \)$ סענה: תהא $(i \in I \)$ חליקה חבורה אבלית לכל וענה: תהא $(i \in I \)$ חליקה לכל חבורה אבלית לכל וענה: תהא חבורה אבלית לכל וענה: תהא וענה ותהא

מסקנה: יהי $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}\right)$ אזי $p\in\mathbb{P}$ חליקה.

חבורה מצומצמת: חבורה G עבורה לכל $H \leq G$ מתקיים כי

וכן $C\cap B=\{0\}$ באשר באיר קיימת אזי קיימת A אבלית ויהי אבלית ויהי $B\leq A$ אבלית ויהי $A = C \oplus B$

 $A=D\oplus K$ מסקנה: תהא A אבלית ותהא $D\leq A$ חליקה אזי קיימת $K\leq A$ באשר $C\leq A$ וכן

 $A=D\oplus R$ סענה: תהא A אבלית אזי קיימת D< A חליקה וקיימת R< A מצומצמת באשר $D\cap R=\{0\}$

```
[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh אזי g,h\in G חבורה חבורה G חבורה מוטטור: תהא
                                          g,h \in G מסקנה: תהא G חבורה ויהיוG אזי מסקנה: תהא
                                                 [I+e_{i,j},I+e_{j,k}]=e_{i,k} אזי i,j,k\in[n] ויהיו n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                          I[I+e_{i,j},I+e_{j,\ell}]=I שונים אזי i,j,k,\ell\in[n] ויהיו n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                             Av=v עבורו יחיד אזי קיים ויחיד עבורו אזי קיים תהא A\in\mathrm{SO}\left(3
ight) אזי אויילר: תהא
g\cdot\operatorname{Fix}(h)=\operatorname{Fix}(h) אזי(g,h]=e באשר g,h\in G באשר אבורה הפועלת על X חבורה הפועלת על אזי
                                                            [G,G] = \{[g,h] \mid g,h \in G\} הגדרה: תהא G חבורה אזי
                                                                    G' = \langle [G,G] \rangle חבורה אזי (הא תהא תהא תבורת הנגזרת:
                    \langle X 
angle char G איזי \varphi \in \operatorname{Aut}(G) לכל \varphi(X) = X עבורה X \subseteq G איזי X \subseteq G
                                                                                    G' char G אזי חבורה G תהא
                                                                G^{ab}=G/G' אבליזציה של חבורה: תהא G חבורה אזי
                                                                             G=G' עבורה מושלמת: חבורה חבורה
                                                             מושלמת. G חבורה פשוטה לא אבלית אזי G חבורה משלמת.
                                                                                 מסקנה: יהי A_n אזי n\in\mathbb{N}_{>5} מטקנה:
                                                                             טענה: יהי\mathbb{SL}_n\left(\mathbb{R}
ight) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} מושלמת.
                                   x=[\pi,\sigma] עבורן \pi,\sigma\in S_n אזי קיימות x\in A_n ויהי ויהי ויהי אור: יהי
                                                                                       למה אבליזציה: תהא G חבורה אזי
                                                                                                         .אבלית G^{ab}
                    (G' < \ker(\varphi))אבלית) מתקיים G' : G \to H ולכל אפימורפיזם ולכל הביתו של לכל הבורה G' = G'
                                                             (G' < N)אבלית) מתקיים N \triangleleft G לכל N \triangleleft G
         מסקנה: תהא G חבורה מושלמת תהא A חבורה אבלית ויהי \varphi:G 	o A הומומורפיזם אזי \varphi טריוואלי.
                                                                                     S_n'=A_n אזי n\in\mathbb{N}_+ מסקנה: יהי
                                                                                 .S_n^{ab}\cong\{\pm 1\} אזי n\in\mathbb{N}_+ מסקנה: יהי יהי
                                                                     \left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{R}
ight)
ight)^{\prime}=\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{R}
ight) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq2} יהי יהי
                                                                        \left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{R}
ight)
ight)^{ab}=\mathbb{R}^{	imes} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq2} יהי מסקנה: יהי
                                a \in \mathbb{N} לכל G^{(n+1)} = \left(G^{(n)}
ight)' וכן וכן G^{(0)} = G לכל חבורה אזי תהא
                                   מסקנה: תהא G חבורה עבורה קיים n\in\mathbb{N} המקיים G אזי G^{(n)}=\{e\} מסקנה:
                                       סדרה נורמלית: תהא G חבורה ויהי n\in\mathbb{N}_+ אזי חבורה G המקיימות
                                                                                           G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                          i \in [n] לכל G_i \unlhd G_{i-1}
                                      .(G^{(n)}=\{e\} עבורו n\in\mathbb{N} פתירה)\Longleftrightarrow(קיים G חבורה אזי G חבורה אזי (משפט: תהא
                                                                                    . פתירה D_n אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} פתירה n\in\mathbb{N}_{\geq 2}
                                                                       G^{(2)}=\{e\} תבורה G עבורה מטאבלית: חבורה
                         .(קיימת G/N אבלית עבורה M \triangleleft G אבלית) מטאבלית) מטאבלית אזי (G מטאבלית) אבלית חבורה אזי (
                       M 
ot \leq N מתקיים N \leq G עבורה לכל עבורה אזי חבורה חבורה מקסימלית: תהא
                                                    \Phi\left(G\right)=\bigcap_{\substack{M\leq G\\\text{ מקסימלית}}}M\leq M חבורה חבורה G תהא פרטיני: תהא ת־חבורת חבורה G
  \langle X 
angle = G מתקיים עבורה אזי g \in G עבורו לכל עבורו לכל עבורו אינר X \cup \{g\}
                                                           \Phi\left(G
ight)=\left\{g\in G\mid \Phi\left(G
ight) לא־יוצר G חבורה אזי לאייוצר מענה: תהא
```

וכן $D \cap R = \{0\}$ חסרת פיתול באשר F < D חליקה וקיימת A < D מצומצמת קיימת B < A מצומצמת קיימת מסקנה:

טענה: תהא D אבלית חליקה אזי T(D) חליקה.

 $A=T\left(D\right)\oplus F\oplus R$ וכן $D=T\left(D\right)\oplus F$ וכן $T\left(D\right)\cap F=\{0\}$ וכן $A=D\oplus R$ משפט: תהא T חבורה אבלית חליקה חסרת פיתול אזי קיימת קבוצה T עבורה F משפט: תהא

 $\mathbb{P}\left(xy=yx
ight)\leq rac{5}{8}$ משפט ארדש־טוראן: תהא חבורה סופית לא אבלית חבורה G

 $\mathbb{P}\left(xy=yx
ight)=rac{5}{8}$ עבורה עבורה סופית לא אבלית סיימת חבורה סופית לא

 $T\cong\bigoplus_I\mathbb{Z}(p^\infty)$ חבורת עבורה I חבורת אזי קיים אבלית אזי קיים או חליקה אבלית חליקה חבורת משפט: תהא

 $\Phi(G)$ char G טענה: תהא G חבורה אזי

. אבלית אזי G אבלית אזי $G/\mathcal{Z}(G)$ אבלית חבורה באשר חבורה G

הרחבה של חבורה אבלית אזי חבורה G חבורה אבלית חבורה אבלית חבורה אבלית תהא חבורה אבלית תהא אבלית: תהא K חבורה אבלית: $\ker\left(\varphi\right)\cong L$ המקיים $\varphi:G\to K$

 $Q \cong G/N$ וכן $N \unlhd G$ חבורה אזי חבורה אזי חבורה Q חבורה: תהא חבורה עבורה עבורה עבורה ותהא

משפט: תהא G חבורה סופית אזי

- . מתקיים כי $H \leq G$ מתקיים לכל
- . מתקיים כי G/N סופית $N \unlhd G$ סופית •
- . של H סופיתם מתקיים כי H סופית H סופית לכל הרחבה H

משפט: תהא G חבורת פיתול אזי

- . מתקיים כי H < G מתקיים לכל
- . מתקיים כי G/N פיתול $N \subseteq G$ פיתול •
- . פיתול H פיתול מתקיים כי H פיתול לכל הרחבה H

משפט: תהא G חבורה פתירה אזי

- . מתקיים כי $H \leq G$ פתירה $H \leq G$
- . מתקיים כי G/N פתירה $N \subseteq G$ פתירה •
- . פתירם H פתירם מתקיים כי H פתירה לכל •

 $i\in[n]$ סדרת הרכב: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי סדרה נורמלית $G_0\ldots G_n\leq G$ עבורה ויהי G_1 פשוטה לכל G_1 מדרת הרכב אזי G_1

טענה: תהא $G_0 \dots G_n \Longrightarrow (G_0 \dots G_n)$ סדרה נורמלית אזי ($G_0 \dots G_n \bowtie G_n$

 $m\geq n$ עבורה $\tilde{G}_0\ldots \tilde{G}_m\leq G$ עבורה נורמלית אזי סדרה נורמלית חבורה ותהא $\tilde{G}_0\ldots G_n\leq G$ עבורה חברה נורמלית אזי סדרה נורמלית חבורה ותהא $j\in\{0\ldots n\}$ עבורה $i_0=m$ וכן $i_0=m$ וכן $i_0=0$ אזי וכן $i_0=0$ אזי חבורה תהיינה $i_0=0$ חבורה תהיינה $i_0=0$ באשר $i_0=0$ באשר $i_0=0$ אזי חבורה תהיינה $i_0=0$ חבורה תהיינה $i_0=0$ באשר אפור מבורה וכן $i_0=0$ אזי חבורה תהיינה $i_0=0$ אוני מבורה תהיינה ווני מבורה תהיינה ווני מבורה תהיינה ווני מבורה תהיינה ווני מבורה

- $A(B \cap B^*) \leq B(A^* \cap B^*)$ וכן $A(B \cap A^*) \leq A(B^* \cap A^*)$
 - $(A(B^{\star} \cap A^{\star}))/(A(B \cap A^{\star})) \cong (B(A^{\star} \cap B^{\star}))/(B(A \cap B^{\star})) \bullet$

 $ilde{G}_0\dots ilde{G}_N \leq G$ משפט העידון של שרייר: תהא G חבורה תהיינה $G_0\dots G_n \leq G$ וכן $G_0\dots G_n \leq G$ סדרות הרכב אזי קיים עידון $ilde{H}_0\dots ilde{H}_M \leq G$ של $G_0\dots ilde{G}_0\dots ilde{G}_M$ של $G_0\dots ilde{H}_M \leq G$ של $G_0\dots ilde{G}_0\dots ilde{G}_M$ של $G_0\dots ilde{G}_0\dots ilde{G}_M$

משפט ז'ורדן־הולדר: תהא חבורה אזי

- . בעלת סדרת אזי G בעלת סדרת הרכב \bullet
- $H_0 \dots H_m$ וכן $G_0 \dots G_n$ מתקיים כי $G_0 \dots G_n \leq G$ וכן וכן וכן פולה ל- $G_0 \dots G_n \leq G$

.(סופית) פתירה אזי G בעלת סדרת הרכב) פתירה אזי G פתירה מיענה:

 $G_i=H$ סטענה: תהא G חבורה סופית ותהא G אזי קיימת סדרת הרכב G אזי קיימת עבורה קיים G אזי אינה פתירה אזי G אינה פתירה אזי G סדרת הרכב באשר קיים G עבורו ותהא G אינה אבלית אזי G סדרת הרכב באשר קיים G עבורו ותהא G אינה אבלית אזי G סדרת הרכב באשר קיים G וכן G מקיימת G אינה בעולה: תהא G חבורה אזי G וכן G וכן G וכן G אונן G אינה מעולה: תהא G חבורה אזי G וכן G וכן G אונן G מקיימת העולה: תהא G חבורה אזי G וכן G וכן G אונן G וכן G אונן G אינה מעולה: תהא G אונן G אונן G וכן G וכן G אונן G אונן G אינה מעולה: תהא G אונן G אונן G וכן G וכן G אונן G אונן G אונן G אונן G אינה מעולה: G אונן G

. טענה: תהא G חבורה אזי הסדרה המרכזית העולה יחידה G

 $i\in\mathbb{N}$ לכל $G_{i+1}=\langle [G,G_i]
angle$ וכן וכן $G_0=G$ לכל תהא חבורה אזי היורדת: תהא

Gטענה: תהא G חבורה אזי (G נילפוטנטית) \Longleftrightarrow (קיים G עבורו G

 $.(G^n=G) \Longleftrightarrow (G_n=\{e\})$ אזי $n\in\mathbb{N}$ חבורה חבורה מענה: תהא

 $i\in\{0\dots n\}$ לכל $G_i\leq G^{n-i}$ אזי $n=\min\{m\in\mathbb{N}\mid G^m=G\}$ לכל לכל לכל נילפוטנטית נילפוטנטית ונגדיר

Q טענה: תהיינה N,Q חבורות תהא G הרחבה של Q ב־N ותהא K פשוטה אזי (K גורם הרכב של K) אורם הרכב של K גורם הרכב של K).

```
וכן n=m אזי אזי \prod_{i=1}^m K_i\cong \prod_{i=1}^n H_i אטייות באשר איי פשוטות אזי וענה: H_1\dots H_n, K_1\dots K_m ותהיינה n,m\in\mathbb{N}_+
                                                                                                       i \in [n] לכל H_i \cong K_{\pi(i)} עבורה \pi \in S_n קיימת
                                                                       t\left(e
ight)=e_{2} וכן o\left(e
ight)=e_{1} אזי e\in E\left(G
ight) וכן גרף מכוון ותהא G
                      \sigma עבורו (e,e^{-1}) מסלול מצומצם: יהי G גרף מכוון אזי מסלול \sigma עבורו לכל של מעבור יהי \sigma גרף מכוון אזי מסלול של
                  \pi_1\left(G,v
ight)=\{\sigma\mid G^v ב־ס מיע לv\in V\left(G
ight) אזי איז \sigma מעגל מצומצום מיv ברv\in V\left(G
ight) גרף מכוון ויהי
                                       . המצויידת עם שרשור מסלולים הינה חבורה. \pi_1\left(G,v\right) אזי v\in V\left(G\right) המצויידת עם שרשור מסלולים הינה חבורה.
                                                                   (e,e^{-1}) מהצורה משרשרים מסלולים של לצמצם תתי מסלולים מהצורה הערה:
                                                                                                                   \pi_1\left(\left(\{v\},\{(v,v)\}\right),v\right)\cong\mathbb{Z} מסקנה:
                                                                           B_n = (\{v\}, \{(v, v, 1) \dots (v, v, n)\}) אזי n \in \mathbb{N}_+ יהי השושנים: יהי
                                                                                 v של עצמיות עצמיות בעל n לולאות הינו מולטי הינו מולטי הערה:
                                                                                                   F_n = \pi_1\left(B_n,v
ight) אזי n \in \mathbb{N}_+ יהי חבורה חופשית: יהי
                        .Cay (G,S)=(G,\{(g,gs)\mid (g\in G)\land (s\in S)\}) אויי יוצרת אזי איילי: תהא G חבורה ותהא אויי איילי: תהא א
                                                                 V\left(G\right) פועלת טרנזיטיביי. גרף מכוון המקיים כי Aut G המקיים כי המקיים אועלת טרנזיטיביי.
                                                          \deg\left(v
ight)=\deg\left(u
ight) מתקיים v,u\in V\left(G
ight) כי לכל
                                                   . גרף טרנזיטיבי ורגולרי. אזי Cay (G,S) אזי קבוצה יוצרת אזי אינה: תהא חבורה ותהא S\subseteq G
                                                         .\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(S\cup S^{-1}\right)^{n} אוי יוצרת קבוצה ותהא חבורה ותהא מילים ביוצרים: תהא מילים מילים מילים אוי חבורה ותהא
                                              \bigcap_{i=1}^{n=0} w_i = e יחס ביוצרים: תהא G חבורה ותהא G קבוצה יוצרת אזי מילה G יחס ביוצרים: תהא יוצרת חבורה ותהא יוצרת אזי מילה אוי מילה ותהא
                                         R = \{w \mid Sיחס ב־w\} יחס יוצרת אזי S \subseteq G חבורה ותהא חבורה מיחסים ביוצרים: תהא
תרמילה xx^{-1} מילה מצומצמת ביוצרים: תהא A חבורה ותהא אA \subseteq S קבוצה יוצרת אזי מילה A עבורה לכל
                                                                                                       w של שוכן לא מתקיים כיx^{-1} תת־מילה של של
                                                                  F(X) = \{w \mid Xבורה חופשית: תהא X קבוצה אזי \{w\} מילה מצומצמת ב־
                                                                     טענה: תהא X קבוצה אזי F\left( X \right) המצויידת עם שרשור מילים הינה חבורה.
                                            x^{-1} מילים מהצורה וכן מילים מהצורה מילים יש לצמצם תתי מילים מהצורה בארה: כאשר משרשרים מילים יש לצמצם התי
                                       \hat{x}\left(\ell_1\dots\ell_n
ight)=\left\{egin{array}{ll} x\ell_1\dots\ell_n & \ell_1
eq x^{-1} \\ \ell_2\dots\ell_n & \mathrm{else} \end{array}
ight. כך \hat{x}\in S\left(F\left(X
ight)
ight) נגדיר נהא x\in X נגדיר נהא x\in X נגדיר נהא ליינו ליינות הא
                                \widehat{x^{-1}}\left(\ell_1\dots\ell_n\right) = \left\{egin{array}{ll} x^{-1}\ell_1\dots\ell_n & \ell_1 
eq x \\ \ell_2\dots\ell_n & \mathrm{else} \end{array}
ight. כך \widehat{x^{-1}}\in S\left(F\left(X
ight)\right) כגדיר x\in X כגדיר על הארה: תהא x\in X כגדיר ווהי
           \hat{F}(X)=\left\langle \{\hat{x}\mid x\in X\}\cup \left\{\widehat{x^{-1}}\mid x\in X\right\}
ight
angle הגדרה: תהא G קבוצה אזי קיים G אזי קיים ויחיד הומומורפיזם G עבורו G עבורו G טענה: תהא G קבוצה תהא G חבורה ותהא G אזי קיים ויחיד הומומורפיזם
                                                                                תבורה R יוצרת אזי קבוצה יוצרת ותהא אורה. חבורה תהא מסקנה:
                                                                            G \cong F(S)/R יוצרת אזי קבוצה יוצרת ותהא אוי מסקנה: תהא חבורה ותהא
                                                                      .\langle S\mid R
angle=F(S)/R אזי יוצרת קבוצה ותהא S\subseteq G סימון: תהא G חבורה ותהא
```