כדור פתוח: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|<r\}$.

כדור סגור: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|\le r\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|=r\}$.

תיבה פתוחה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j<x_j<b_j\}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{\Pi}_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\le x_j\le b_j\}$.

נקודה פנימית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\subseteq M$.

פנים של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\operatorname{int}(M)=\mathring{M}=\{x\in M\mid$ x נקודה פנימית של $M\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $M=\mathring{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\subseteq\mathbb{R}^n\backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\cap M=\{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\partial M=\{x\in M\mid$ x נקודת שפה של $M\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M\subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{M}=\mathring{M}\cup\partial M$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (x נקודה חיצונית של M)$\Longleftrightarrow$(x נקודה פנימית של $\mathbb{R}^n\backslash M$).

מסקנה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (M פתוחה)$\Longleftrightarrow$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.M\subseteq B_r(0)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענת היינה בורל: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$).

סימון: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{(k)}=a(k)$.

גבול: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k\to\infty}\left\|a^{(k)}-L\right\|=0$ אזי $\lim_{k\to\infty}a^{(k)}=L$.

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x\to a}$ וכן $\xrightarrow[x\to a]{}$.

משפט: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right)\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_j\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a^{(m)}-a^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a_j^{(m)}-a_j^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $a\in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_i)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty}a^{(k_i)}\in K$).

הערה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f=\langle f_1,\ldots,f_m\rangle$ כאשר $f_i:A\to\mathbb{R}$.

גבול: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ ותהא $L\in\mathbb{R}^m$ אזי

- היינה: אם $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{(k)}\to a\right)\Longrightarrow\left(f\left(x^{(k)}\right)\to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a}f(x)=L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A\backslash\{a\}.\|x-a\|<\delta\Longrightarrow\|f(x)-L\|<\varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in A$ עבורה $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי (f רציפה נקודתית עבור כל $b\in B$)$\Longleftrightarrow(f\in C(B))$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי $(f\in C(b))\Longleftrightarrow(f_1,\ldots,f_m\in C(b))$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f:A\to B$ הפיכה עבורה f,f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$.

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ כך $\gamma(t)=(1-t)a+tb$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b]=\operatorname{Im}(\gamma)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a,b\in M.[a,b]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r(a),\overline{B}_r(a)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to M$ המקיימת $\gamma(0)=x$ וכן $\gamma(1)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\le\aleph_0}(\mathbb{R}^n)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\biguplus\mathcal{A}=M$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f(a)<f(b)$ מתקיים $[f(a),f(b)]\subseteq f([a,b])$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ קשירה ותהא $f\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ווירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C(\mathcal{K},\mathbb{R})$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f(\mathcal{K})=[f(x),f(y)]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\|x-y\|<\delta\Longrightarrow\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C(\mathcal{K},\mathbb{R}^m)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $(\upsilon(a)\ge 0)\wedge((\upsilon(a)=0)\Longleftrightarrow(a=0))$.
- הומוגניות: $\upsilon(\lambda a)=|\lambda|\cdot\upsilon(a)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon(a+b)\le\upsilon(a)+\upsilon(b)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.\upsilon(x)\le c\|x\|$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon\in C(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.c\|x\|\le\upsilon(x)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\le\upsilon\le b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon,\|\cdot\|$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $(\upsilon(x^{(k)})\to 0)\Longleftrightarrow(\rho(x^{(k)})\to 0)$.

נורמה ℓ_p: עבור $p\in\mathbb{N}_+$ נגדיר נורמה $\|\cdot\|_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\|v\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמה ℓ_∞: נגדיר נורמה $\|\cdot\|_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\|v\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|v_i|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in(0,1)$ אזי $\gamma'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in(0,1)$ אזי $\gamma'(a)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(a)\\ \vdots\\ \gamma_m'(a)\end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ המקיימת $f(x)=f(a)+L(x-a)+o(\|x-a\|)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}(a)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}(a)\Longrightarrow f\in C(a)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\mathrm{grad}f(a)=[L]_{\mathrm{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f(a)=\mathrm{grad}f(a)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+hx_i)-f(a)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $f'_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=(\nabla f(a))_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי (קיימת $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ לכל i)$\not\Longleftarrow(f\in\mathcal{D}(a))$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ המקיימת $f(x)=f(a)+L(x-a)+o(\|x-a\|)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $(f\in\mathcal{D}(a))\Longleftrightarrow(\forall i\in\{1\ldots m\}.f_i\in\mathcal{D}(a))$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\mathcal{D}_f(a)=\begin{pmatrix}-\nabla f_1(a)-\\ \vdots\\ -\nabla f_m(a)-\end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $(\mathcal{D}_f(a))_{i,j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי
- אם $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $f\in C\left(a\right)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}\left(a\right)$.
- $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.
- תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$ וכן $\mathcal{D}_{f}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ גזירה ברציפות אזי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(a+hv\right)-f\left(a\right)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\nabla f\left(a\right)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ קשירה מסילתית)$\Longleftrightarrow$($\mathcal{U}$ קשירה פוליגונלית).

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longleftarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.

טענה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

סימון: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in\left\{1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}^{2}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)}{\partial x_{i}}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\left\{1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{j}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\right)}{\partial x_{i}}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^{k}f}{\partial x_{i_{1}}\ldots\partial x_{i_{k}}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהיו $i,j\in\left\{1\ldots n\right\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_{i}},\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}\left(a\right)=\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{j}\partial x_{i}}\left(a\right)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ אזי $\left|K\right|=\sum_{i=1}^{n}K_{i}$ וכן $\partial x^{K}=\partial x_{1}^{K_{1}}\ldots\partial x_{n}^{K_{n}}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\in C^{k}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{\left|K\right|}f}{\partial x^{K}}\left(a\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert Av\right\Vert_{\text{st}}\le\left\Vert A\right\Vert_{\text{st}}\cdot\left\Vert v\right\Vert_{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^{k}$ עבורן $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $g\in D\left(f\left(a\right)\right)$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}\left(a\right)=\mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right)\cdot\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\Gamma_{f}=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}\mid\left(x\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(f\left(x\right)=y\right)\right\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $\Pi_{c}=\left\{x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)=c\right\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $y-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $N_{a}=\left(-\nabla f\left(a\right),1\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)\perp\Pi_{f\left(a\right)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\ge f\left(a\right)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\le f\left(a\right)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f\left(a\right)=0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_{i}.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_{i}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $\mathcal{D}_{\left(a,b\right)}^{k}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^{n}\\ \left|V\right|=k}}\binom{k!}{V_{1},\ldots,V_{n}}\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)^{V_{i}}\frac{\partial^{k}}{\partial x^{V}}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathcal{D}_{(a,b)}^{k}f=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)^{k}$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $f\in C^{k+1}\left(a\right)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{(x,a)}^{i}f\left(a\right)+\frac{1}{(k+1)!}\mathcal{D}_{(x,a)}^{k+1}f\left(c\right)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_{f}\right)_{i,j}=f''_{x_{i},x_{j}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=f\left(a\right)+\left(x-a\right)^{t}H_{f}\left(c\right)\left(x-a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- ($H_{f}\left(a\right)$ חיובית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מינימום).
- ($H_{f}\left(a\right)$ שלילית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)>0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)<0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f'\left(x\right)=-\frac{F'_{x}\left(x,f\left(x\right)\right)}{F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)}$ על I_{x}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f\left(x\right)\in C^{k}\left(I_{x},I_{y}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times I_{y}$ מתקיים $\left(\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(x\right)=-\frac{F'_{x_{i}}\left(x,f\left(x\right)\right)}{F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)}$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times(n+m)}{\mathcal{D}_{f}\left(a\right)}=\left(\underset{m\times n}{F'_{x}\left(a\right)},\underset{m\times m}{F'_{y}\left(a\right)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y_{1}}\ldots I_{y_{m}}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ ולכל $j\in\left[m\right]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_{j}}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ מתקיים $\left(\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)$ הפיכה יהיו $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y_{1}}\ldots I_{y_{m}}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ ולכל $j\in\left[m\right]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_{j}}$ ותהא $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=-F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)^{-1}\cdot F'_{x}\left(x,f\left(x\right)\right)$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $\nabla F\left(a\right)\neq0$ אזי משוואת המישור המשיק למשטח $\left\{ F=0\right\}$ הינו $\sum_{i=1}^{n}F'_{x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

דיפאומורפיזם C^{k}: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^{k}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathbb{R}^n \supseteq \mathcal{U}$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}(f(x)) = \mathcal{D}_f(x)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $A \subseteq \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

- (A פתוחה)$\iff$($f(A)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\iff$($f(A)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\iff$($f(A)$ קומפקטית).
- אם $\partial A \subseteq \mathcal{U}$ אזי $\partial(f(A)) = f(\partial A)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום אזי $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ עבורה $\text{rank}(\mathcal{D}_f(a)) = m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $a \in \mathcal{U}$ המקיימת $g(a) = 0$ וכן $\nabla f(a) \in \text{span}\{\nabla g_i(a)\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ המקיימת $g(a) = 0$ וכן $\{\nabla g_i(a)\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\text{sols}(g) \cap \mathcal{O}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g = 0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $g \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ נגדיר $L \in C^1(\mathcal{U} \times \mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ כך $L(x_1 \ldots x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m) = f(x_1 \ldots x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1 \ldots x_n)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g = 0$)$\iff$(קיימת $\lambda \in \mathbb{R}^m$ עבורה (a,λ) נקודה קריטית של L).

דרגה של פונקציה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $\text{rank}(f(a)) = \text{rank}(\mathcal{D}_f(a))$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ עבורה $\forall x \in \mathcal{U}.\text{rank}(f(x)) = k$ אזי קיימת $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה של a קיימת $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה של $f(a)$ קיימים דיפאומורפיזמים $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ וכן $\psi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ וקיימת $\mathcal{W} \subseteq \varphi(\mathcal{O})$ סביבה של $\varphi(a)$ עבורם $\left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(x) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ על $\mathcal{W}$.

הלמה של הדמר: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה קמורה של 0 יהי $p \geq 1$ ותהא $f \in C^p(\mathcal{U},\mathbb{R})$ עבורה $f(0) = 0$ אזי קיימת $g \in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $g(0) = \nabla f(0)$ וכן $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g(x)$.

הלמה של מורס: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $f \in C^3(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathcal{U}$ נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$ סביבה של a וגם $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של 0 וכן דפיאומורפיזם $g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ המקיים $(f \circ g)(x) - f(a) = \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ אזי $P_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n] .a_j \leq x_j \leq b_j\}$.

תיבה מנוונת: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ עבורם $\exists i \in [n] .a_i = b_i$ אזי $P_{a,b}$.

חלוקה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ לכל $i \in [n]$ תהיינה $\left\{t_i^0, \ldots, t_i^{\ell_i}\right\}$ חלוקה של $[a_i.b_i]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^n \left[t_i^{m_i}, t_i^{m_i+1}\right] \mid \forall i \in [n] .m_i \in [\ell_i - 1]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ אזי $V(P) = \text{Vol}(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

טענה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $\{A_1, \ldots, A_k\}$ חלוקה של P אזי $\text{Vol}(P) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(A_i)$.

הערה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ עבורם $P_{a,b}$ תיבה מנוונת אזי $\text{Vol}(P_{a,b}) = 0$.

סכום רימן: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ תהא $\Pi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)} \in A_j$ אזי $S\left(f, \Pi, \left\{x^{(i)}\right\}\right) = \sum_{j=1}^k f\left(x^{(j)}\right) \text{Vol}(A_j)$.

קוטר קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $d(M) = \sup_{x,y \in M} \|x - y\|$.

מדד העדינות: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi = \{A_1, \ldots, A_k\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi) = \max_{i \leq i \leq k} d(A_i)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $f : P \to \mathbb{R}$ אזי $\int_P f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(\Pi) \to 0} S\left(f, \Pi, x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ ותהא $f : P \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f \in R(P)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f \in R(P)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1, \ldots, A_n\}$ חלוקה אזי $\overline{S}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{P_j}(f) \text{Vol}(P_j)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1, \ldots, A_n\}$ חלוקה אזי $\underline{S}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{P_j}(f) \text{Vol}(P_j)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי $\underline{S}(f, \Pi) \leq S\left(f, \Pi, \left\{x^{(i)}\right\}\right) \leq \overline{S}(f, \Pi)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ חלוקות אזי $\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \underline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_1)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1, Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_2)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f : P \to \mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}(f) = \inf_{\text{חלוקה } \Pi} \overline{S}(f, \Pi)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\text{חלוקה }\Pi}\underline{S}\left(f,\Pi\right)$.
מסקנה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\overline{I}\left(f\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.
קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(P\right)\right)\iff\left(\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)\right)$.
מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ חסומה אזי $\int_{P}f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.
טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\text{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^{n}\text{Vol}\left(P_{a,b}\right)$.
טענה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות עבורן לכל $i\neq j$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.
מסקנה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות ותהא $P\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\right)\le\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.
טענה: יהיו P_{1},P_{2} תיבות אזי $P_{1}\cap P_{2}$ תיבה.
הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\backslash\text{int}\left(P\right)\right)=0$.
קבוצה זניחה: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}P_{i}$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.
סימון: $\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\text{זניחה }E\right\}$.
טענה: $\varnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\{ a\right\} \in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.
טענה: תהיינה $\left\{ E_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}E_{i}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.
טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$).
מסקנה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.
טענה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $A\subseteq E$ אזי $A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.
טענה: $\mathbb{Q}^{n}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה לא מנוונת אזי $P\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.
טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.
מסקנה: תהא $M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\text{int}\left(M\right)=\varnothing$.
טענה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה ותהא $f\in C\left(P,\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_{f}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.
מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_{f}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.
טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\left\{ C_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ בעלות אורך צלע $2^{-e_{i}}$ עבור $e_{i}\in\mathbb{N}$ עבורן לכל $i\neq j$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_{i}$.
מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, קבוצת קנטור זניחה.
תנודה של פונקציה בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי $\omega\left(f,a\right)=\lim_{\delta\to0^{+}}\omega\left(f,B_{\delta}\left(a\right)\cap A\right)$.
טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\iff$($\omega\left(f,a\right)=0$).
למה של קנטור: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית יהי $M>0$ ותהא $f:K\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall k\in K.\omega\left(f,k\right)\le M$ אזי $\forall x\in K.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\omega\left(f,B_{\delta}\left(x\right)\cap K\right)<\omega_{0}+\varepsilon$.
כמעט לכל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E\subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A\backslash E$.
סימון: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}=\left\{ x\in P\mid\omega\left(f,x\right)\ge\varepsilon\right\}$.
למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}$ קומפקטית.
למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left\{ A\in\Pi\mid\left(A\cap B_{f,\frac{1}{k}}\neq\varnothing\right)\wedge\left(\omega\left(f,A\right)\ge\frac{1}{2k}\right)\right\}$ כיסוי של $B_{f,\frac{1}{k}}$.
קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\iff$($f\in R\left(P\right)$).
קבוצה מדידת ז'ורדן: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה עבורה ∂E זניחה.
טענה: תהיינה $E_{1},E_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי
- ∂E_{1} סגורה.
- $\partial\left(E_{1}\backslash E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cup E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cap E_{2}\right)\subseteq\partial E_{1}\cup\partial E_{2}$.

סימון: $J\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\text{ז'ורדן }E\right\}$.
מסקנה: תהיינה $A,B\in J$ אזי $A\backslash B,A\cup B,A\cap B\in J$.
פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}:\mathbb{R}^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ כך $\chi_{A}\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in A\\0 & x\notin A\end{cases}$.
טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}\in C\left(\text{int}\left(A\right)\right)$ וכן $\chi_{A}\in C\left(\mathbb{R}^{n}\backslash A\right)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $A \subseteq P$ חסומה ותהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ עבורה $f \cdot \chi_A \in R(P)$ אזי $\int_A f = \int_P f \cdot \chi_A$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה תהיינה $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבות סגורות עבורן $A \subseteq P_1, P_2$ ותהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ אזי

- $(f \cdot \chi_A \in R(P_1)) \iff (f \cdot \chi_A \in R(P_2))$.
- $\int_{P_1} f \cdot \chi_A = \int_{P_2} f \cdot \chi_A$.

מידה/נפח של תיבה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $V(A) = \text{Vol}(A) = \int_A \mathrm{d}x$.

משפט: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהיינה $f, g \in R(A)$ אזי

- יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $af + bg \in R(A)$ וכן $\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g$.
- נניח כי $f \geq 0$ אזי $\int_A f \geq 0$.
- נניח כי $f \geq g$ אזי $\int_A f \geq \int_A g$.
- נניח כי $m \leq f \leq M$ אזי $m\text{Vol}(A) \leq \int_A f \leq M\text{Vol}(A)$.

טענה: תהיינה $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהא $f \in R(A) \cap R(B)$ אזי $f \in R(A \cap B)$ וכן $f \in R(A \cup B)$.

מסקנה: תהיינה $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$ עבורן $\text{Vol}(A \cap B) = 0$ אזי $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A \in J(\mathbb{R}^n)$ תחום ותהא $f \in C(A, \mathbb{R})$ אזי $\exists c \in A. \int_A f = f(c) \text{Vol}(A)$.

טענה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ ויהי $f \in R(A)$ אזי $|f| \in R(A)$ וכן $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.

טענה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהיינה $f, g \in R(A)$ כמעט על כל A אזי $\int_A f = \int_A g$.

משפט: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\int_{\text{int}(A)} f = \int_A f = \int_{\overline{A}} f$.

טענה: תהיינה $A_1 \ldots A_k \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\bigcup_{i=1}^k A_i, \bigcap_{i=1}^k A_i \in J(\mathbb{R}^n)$.

מסקנה: תהיינה $A_1 \ldots A_k \in J(\mathbb{R}^n)$ עבורן לכל $i \neq j$ מתקיים $\text{Vol}(A_i \cap A_j) = 0$ אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Vol}(A_i)$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $(A + a \in J(\mathbb{R}^n)) \iff (A \in J(\mathbb{R}^n))$.

מסקנה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}(A) = \text{Vol}(A + a)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu : J(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu([0,1]^n) = 1$ אזי $\nu = \text{Vol}$.

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה אזי $T(A)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $T(\partial A) = \partial(T(A))$.

מסקנה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ זניחה וחסומה אזי $T(E)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $T(A) \in J(\mathbb{R}^n)$ וכן $\text{Vol}(T(A)) = \text{Vol}(A)$.

משפט פוביני: תהיינה $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f \in R(P \times Q)$ עבורה $\iint_{P \times Q} f$ קיים אזי $\int_P \int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x, \int_Q \int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ קיימים ובפרט $\iint_{P \times Q} f = \int_P \int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_Q \int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהיינה $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f \in R(P \times Q)$ אזי $\int_Q f(a,y)\,\mathrm{d}y$ קיים כמעט לכל $a \in P$.

מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_1, \varphi_2 : B \to \mathbb{R}$ תהא $A = \{(x,y) \in B \times \mathbb{R} \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ ותהא $f \in R(A)$ אזי $\int_A f = \int_B \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ תהא $A \subseteq \prod_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $A \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\}\right) \in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ כמעט לכל $y \in P_n$ ובפרט $\text{Vol}(A) = \int_{P_n} \text{Vol}\left(A \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\}\right)\right) \mathrm{d}y$.

שטח: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $S(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי $m(D) = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מומנט מסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי ציר x: $M_x(D) = \iint_D y \cdot \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- מומנט מסה לפי ציר y: $M_x(D) = \iint_D x \cdot \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מרכז המסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_y(D)}{m(D)}, \frac{M_x(D)}{m(D)}\right)$.

נפח: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ אזי $V(E) = \iiint_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מסה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי $m(E) = \iiint_E \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מומנט מסה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי המישור $\{z = 0\}$: $M_{xy}(E) = \iiint_E z \cdot \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\{y = 0\}$: $M_{xz}(E) = \iiint_E y \cdot \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\{x = 0\}$: $M_{yz}(E) = \iiint_E x \cdot \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מרכז המסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$.

מקבילון: יהיו $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Par}\left(v_1 \dots v_n\right) = \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \forall i \in [n] . \alpha_i \in [0,1]\right\}$.

טענה: יהיו $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ אזי מתקיים $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(v_1 \dots v_n\right)\right) = \left|\det \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix}\right|$.

תומך: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ אזי $\text{supp}\left(f\right) = \overline{\left\{x \in \mathcal{U} \mid f\left(x\right) \neq 0\right\}}$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $E \subseteq A$ אזי

- (E זניחה)$\Longleftarrow$($\varphi\left(E\right)$ זניחה).
- $\left(\left(\text{Vol}\left(E\right) = 0\right) \wedge \left(\overline{E} \subseteq A\right)\right) \Longleftarrow \left(\left(\text{Vol}\left(\varphi\left(E\right)\right) = 0\right) \wedge \left(\overline{\varphi\left(E\right)} \subseteq B\right)\right)$.
- (($\overline{E} \subseteq A$)$\wedge$(E ז'ורדן))$\Longleftarrow$(($\overline{\varphi\left(E\right)} \subseteq B$)$\wedge$($\varphi\left(E\right)$ ז'ורדן)).

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R\left(B\right)$ אזי $\left(f \circ \varphi\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\right| \in R\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R\left(B\right)$ אזי $\left(f \circ \varphi\right)\left|\varphi'\right| \in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_B f = \int_A f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\varphi'\right| \text{d}t$.

דיפאומורפיזם אלמנטרי: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ פתוחות וחסומות אזי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם עבורו קיימת $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת $\varphi\left(x\right) = \left(x_1, \dots, \psi\left(x_i\right), \dots x_n\right)$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא $f \in R\left(B\right)$ אזי $\int_B f = \int_A f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| \text{d}t$.

טענה: תהיינה $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהיו $\varphi : B \to C$, $\psi : A \to B$ דיפאומורפיזים אלמנטריים ותהא $f \in R\left(A\right)$ אזי $\int_C f = \int_A f\left(\left(\varphi \circ \psi\right)\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_{\varphi\circ\psi}\left(t\right)\right| \text{d}t$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ויהי $a \in A$ אזי קיימת $\mathcal{O} \subseteq A$ סביבה של a וכן $\psi_1 \dots \psi_m$ דיפאומורפיזים אלמנטריים עבורם $\varphi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_m$ על $\mathcal{O}$.

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f \in R\left(B\right)$ אזי $\int_B f = \int_A f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| \text{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi : A \to B$ דיפאומורפיזם תהא $E \subseteq A$ עבורה $\overline{E} \subseteq A$ ותהא $f \in R\left(\varphi\left(E\right)\right)$ אזי $\left(f \circ \varphi\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\right| \in R\left(E\right)$ ובפרט $\int_{\varphi(E)} f = \int_E f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| \text{d}t$.

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi : A \to B$ תהיינה $E \subseteq A$, $S \subseteq B$ זניחות עבורן $A \backslash E, S \backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A \backslash E\right) = S \backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על $A \backslash E$ ותהא $f \in R\left(S\right)$ אזי $\left(f \circ \varphi\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\right| \in R\left(A \backslash E\right)$ ובפרט $\int_B f = \int_{A \backslash E} f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| \text{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi : A \to B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E \subseteq A$, $S \subseteq B$ זניחות עבורן $A \backslash E, S \backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A \backslash E\right) = S \backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם על $A \backslash E$ ותהא $f \in R\left(S\right)$ אזי $\left(f \circ \varphi\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\right| \in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_B f = \int_A f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| \text{d}t$.

קואורדינטות קוטביות/פולריות: יהי $\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\rho, \phi\right) \in \left(0, \infty\right] \times \left[0, 2\pi\right]$ עבורן $x = \rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y = \rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי $\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| = \rho$.

קואורדינטות גליליות: יהי $\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\rho, \phi, \iota\right) \in \left(0, \infty\right] \times \left[0, 2\pi\right] \times \left\{z\right\}$ עבורן $x = \rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y = \rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי $\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| = \rho$.

קואורדינטות כדוריות: יהי $\left(x, y, z\right) \in \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\rho, \phi, \theta\right) \in \left(0, \infty\right] \times \left[0, 2\pi\right] \times \left[0, \pi\right]$ עבורן $x = \rho\sin\left(\theta\right)\cos\left(\phi\right)$ וכן $y = \rho\sin\left(\theta\right)\sin\left(\phi\right)$ וכן $z = \rho\cos\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי $\left|\det \mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right| = \rho^2\sin\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר z בקואורדינטות גליליות אזי $\text{Vol}\left(E\right) = 2\pi\iint_S \rho \text{d}\rho \text{d}z$.

מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה $f, g : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}$ עבורן $f \leq g$ תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סביב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}\left(E\right) = \pi\int_a^b \left(g^2\left(x\right) - f^2\left(x\right)\right) \text{d}x$.

משפט פאפוס: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ יהי $c \in \mathbb{R}^2$ מרכז המסה של S ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}\left(E\right) = 2\pi R_c \cdot \text{Vol}\left(S\right)$ באשר R_c רדיוס סיבוב c.

מיצוי ז'ורדן: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\left(E_k\right)_{k=1}^\infty$ סדרת קבוצות מדידות ז'ורדן עולה עבורה $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = E$.

טענה: תהא $E \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ ויהי $\left(E_k\right)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E אזי $\lim_{k\to\infty} \text{Vol}\left(E_k\right) = \text{Vol}\left(E\right)$.

מסקנה: תהא $E \in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ יהי $\left(E_k\right)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E ותהא $f \in R\left(E\right)$ אזי $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f = \int_E f$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ עבורם לכל $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E מתקיים $\forall k\in\mathbb{N}.f\in R(E_k)$ וכן $\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f$ קיים ושווה אזי $\int_E f=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ של E המקיימת $\forall k\in\mathbb{N}.f\in R(E_k)$ וכן $\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f$ קיים אזי $\int_E f$ מתכנס.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\|x\|^2}\mathrm{d}x=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^n=\pi^{\frac{n}{2}}$.

משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהיינה $f,g:E\to\mathbb{R}$ עבורן $|f|\le g$ וכן $\forall A\in\mathcal{P}(E)\cap J(\mathbb{R}^n).(f\in R(A))\iff(g\in R(A))$ וכן $\int_E g$ מתכנס אזי $\int_E f,\int_E|f|$ מתכנסים.

מסקנה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ אזי ($\int_E|f|$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E f$ מתכנס).

טענה: תהא $E\in J(\mathbb{R}^n)$ ותהא $f\in R(E)$ אזי $\forall\varepsilon>0.\forall A\subseteq E.\left|\int_A f\right|>\frac{1}{2}\int_E|f|-\varepsilon$.

משפט: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי ($\int_E f$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E|f|$ מתכנס).

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהיינה $f,g:E\to\mathbb{R}$ עבורן $\int_E f,\int_E g$ מתכנסים אזי $\int_E(f+g)=\int_E f+\int_E g$.

הערה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה E בעלת מיצוי ז'ורדן.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f:B\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $E\subseteq B$ ז'ורדן וקומפקטית מתקיים $f\in R(E)$ וכן $\int_B f$ מתכנס אזי $\int_B f=\int_A f(\varphi(t))\left|\det\mathcal{D}_\varphi(t)\right|\mathrm{d}t$.

פונקציית גאמא: יהי $t>0$ אזי $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}x$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\Gamma(n)=(n-1)!$.

טענה: יהי $t>0$ אזי $\Gamma(t)$ מתכנס.

פונקציית בטא: יהיו $t,s>0$ אזי $B(t,s)=\int_0^\infty x^{t-1}(1-x)^{s-1}\mathrm{d}x$.

טענה: יהיו $t,s>0$ אזי $B(t,s)$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in C([a,b]\times[c,d])$ ותהא $t_n\in[c,d]^{\mathbb{N}}$ עבורה $t_n\to\ell$ אזי $\forall x\in[a,b].f(x,t_n)\xrightarrow{u}f(x,\ell)$.

טענה: תהא $f\in C([a,b]\times[c,d])$ אזי $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\in C([c,d])$.

טענה: תהא $f\in C([a,b]\times[c,d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t}\in C([a,b]\times[c,d])$ אזי $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\in C^1([c,d])$ וכן $\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$.

משפט: תהא $f\in C([a,b]\times[c,d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t}\in C([a,b]\times[c,d])$ ותהיינה $\alpha,\beta\in C^1([c,d],[a,b])$ אזי מתקיים $\frac{d}{dt}\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}f(x,t)\,\mathrm{d}x\right)=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$.

מסקנה: יהיו $t,s>0$ אזי $B(t,s)=\frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\mathrm{Vol}\left(B_1^n(0)\right)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

סימפלקס: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\Delta_n=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid(\forall i\in[n].x_i\ge0)\wedge\left(\sum_{i=1}^n x_i\le1\right)\right\}$.

טענה נוסחת דירכלה: יהיו $p_1\ldots p_n>0$ אזי $\int\!\cdots\!\int_{\Delta_n}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1}\right)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)}$.

מסקנה: יהיו $p_1\ldots p_n>0$ ויהיו $\gamma_1\ldots\gamma_n>0$ אזי $\int\!\cdots\!\int_{\substack{x_1,\ldots x_n\ge0\\ \sum x_i^{\gamma_i}\le1}}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1}\right)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\frac{1}{\prod_{i=1}^n\gamma_i}\cdot\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{p_i}{\gamma_i}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\gamma_i}\right)}$.

טענה: יהיו $p_1\ldots p_n>0$ ותהא $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד אזי $\int\!\cdots\!\int_{\Delta_n}\psi(x_1\ldots x_n)\left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1}\right)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=\frac{\prod_{i=1}^n\Gamma(p_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i\right)}\int_0^1\psi(u)\,u^{\left(\sum p_i\right)-1}\mathrm{d}u$.