טופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X,\varnothing\in\mathcal{T}$.
- תהיינה $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{T}$ אזי $\bigcup\mathcal{U}\in\mathcal{T}$.
- תהיינה $\{U_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\mathcal{T}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\mathcal{T}$.

מרחב טופולוגי (מ"ט): תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ טופולוגיה על X אזי $(X,\mathcal{T})$.

קבוצה פתוחה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגיה אזי $U\subseteq X$ המקיימת $U\in\mathcal{T}$.

קבוצה סגורה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגיה אזי $E\subseteq X$ המקיימת $X\backslash E\in\mathcal{T}$.

טענה: תהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה $X,\varnothing\in\mathcal{T}$ וכן $(\bigcup\mathcal{U}\in\mathcal{T}).\forall\mathcal{U}\subseteq\mathcal{T}$ אזי ($\mathcal{T}$ טופולוגיה)$\Longleftrightarrow$(לכל $U,V\in\mathcal{T}$ מתקיים $U\cap V\in\mathcal{T}$).

הטופולוגיה הטריוואלית: תהא X קבוצה אזי $\{X,\varnothing\}$.

הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X)$.

הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: יהי (X,ρ) מרחב מטרי אזי $\mathcal{T}(X,\rho)=\{U\subseteq X\mid\forall x\in U.\exists r>0.B_r(x)\subseteq U\}$.

הטופולוגיה הקו־סופית: תהא X קבוצה אזי $\{A\subseteq X\mid |X\backslash A|<\aleph_0\}\cup\{\varnothing\}$.

משפט: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{C}=\{E\subseteq X\mid X\backslash E\in\mathcal{T}\}$ אזי

- $X,\varnothing\in\mathcal{C}$.
- תהיינה $\{E\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{C}$ אזי $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha\in\mathcal{T}$.
- תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\mathcal{C}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in\mathcal{T}$.

בסיס לטופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $\bigcup\mathcal{B}=X$.
- תהיינה $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ עבורן $B_1\cap B_2\neq\varnothing$ ותהא $x\in B_1\cap B_2$ אזי קיימת $B_3\in\mathcal{B}$ עבורה $x\in B_3$ וכן $B_3\subseteq B_1\cap B_2$.

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיס אזי
$\mathcal{T}(\mathcal{B})=\{U\subseteq X\mid\forall x\in U.\exists B\in\mathcal{B}.(x\in B)\wedge(B\subseteq U)\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ טופולוגיה על X.

סימון: $\mathcal{B}_E=\{(a,b)\mid a<b\}$ וכן $\mathcal{B}_{\text{Sorg}}=\{[a,b)\mid a<b\}$ וכן $\mathcal{B}_K=\mathcal{B}_E\cup\left\{(a,b)\setminus\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}_+\right\}\mid a<b\right\}$.

טענה: $\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_{\text{Sorg}},\mathcal{B}_K$ בסיסים של $\mathbb{R}$.

הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית: $\mathbb{R}=(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathcal{B}_E))$.

הישר של זורגנפריי: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}=(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{Sorg}}))$.

טופולוגיית־K: $\mathbb{R}_K=(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$.

משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})=\{U\subseteq X\mid\exists A\subseteq\mathcal{B}.U=\bigcup A\}$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיסים עבורם $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$ וכן $\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{B}_1)$ אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}_1)=\mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{T}$ עבורו $\forall U\in\mathcal{T}.\forall x\in U.\exists A\in\mathcal{A}.(x\in A)\wedge(A\subseteq U)$ אזי $\mathcal{A}$ בסיס של $\mathcal{T}$.

טענה: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי $\{(a,b)\mid a<b\}\cup\{[a,b)\mid\forall x\in X.a\leq x\}\cup\{(a,b]\mid\forall x\in X.x\leq b\}$ בסיס.

טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי
$\mathcal{T}(\{(a,b)\mid a<b\}\cup\{[a,b)\mid\forall x\in X.a\leq x\}\cup\{(a,b]\mid\forall x\in X.x\leq b\})$.

תת בסיס: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה $\bigcup\mathcal{S}=X$.

הטופולוגיה הנוצרת מתת־בסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי
$\mathcal{T}(\mathcal{S})=\left\{U\subseteq X\mid\exists A_1\ldots A_k\subseteq\mathcal{S}.U=\bigcup\left(\bigcap_{i=1}^{k}A\right)\right\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ טופולוגיה על X.