```
\mathbb{P}\left(A
ight)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}\left(\omega
ight) אזי מאורע מאורע: יהי (\mathbb{P},\Omega) מרחב הסתברות מאורע: יהי
                                                                                                                                                                                                                   [n]=\{1,\ldots,n\} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי
                                                                                                                                                                    משפט: יהי (\Omega,\mathbb{P}) מרחב הסתברות ויהיו A,B מאורעות אזי
                                                                                                                                                                                                                                 \mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}\right)=1-\mathbb{P}\left(A\right) משלים:
                                                                                                                                                                                                   \mathbb{P}(A \uplus B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) אדטיביות:
                                                                                                                                                                                                                          \mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B \cap A) \bullet
                                                                                                                                                                                          (A \subseteq B) \Longrightarrow (\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)) מונוטוניות:
                                                                                                                                                      \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) :הכלה והדחה
                                                                                                                                                                                          \mathbb{P}\left(\varnothing
ight)=0 מסקנה: תהא \mathbb{P} פונקציית הסתברות אזי
\mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^{\infty}E_i
ight)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(E_i
ight) משפט סיגמא־אדטיביות: יהי \left(\Omega,\mathbb{P}
ight) מרחב הסתברות ויהיו ויהיו \left\{E_i
ight\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\Omega
ight) משפט סיגמא־אדטיביות: יהי
                                         \mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^n A_i
ight) = \sum_{\varnothing 
eq I \subseteq [n]} \left((-1)^{|I|+1} \, \mathbb{P}\left(igcap_{i \in I} A_i
ight)
ight) אזי אזי \forall I \subseteq [n] \, (|I|=k) \Rightarrow (\mathbb{P}\left(A_I
ight) = a_k) מאורעות עבורם A_1 \ldots A_n מאורעות עבורם רבורם A_1 \ldots A_n מאורעות עבורם רבורם רבו
                                                                                                                                                                                                                \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(-1\right)^{k+1} \binom{n}{k} a_k\right)
                                                                                                      .orall A\in 2^\Omega.\mathbb{P}\left(A
ight)=rac{|A|}{|\Omega|} עבורו עבורו אחיד: מרחב הסתברות אחיד: מרחב הסתברות אחיד
                                                                                                                                                                                          S_n על מקרית/סידור אקראי: המרחב האחיד על
                                                                                                                           \mathbb{P}\left(A\cup B
ight)<\mathbb{P}\left(A
ight)+\mathbb{P}\left(B
ight) משפט חסם האיחוד: יהיו A,B מאורעות אזי
                                                                                                                                              \mathbb{.P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(A_i\right) אזי מסקנה: יהיו A_1 \dots A_nיהיו יהיו
                                                                                                                                              \mathbb{P}(igcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i) מאורעות אזי \{A_n\}_{n=1}^\infty יהיו יהיו
                                                                                                                                                   אזי איי וויהי 1 \leq k \leq n מאורעות ויהי A_1 \dots A_n איי שוויונות בונפרוני: יהיו
                                                                                                                      \mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^{n}A_{i}
ight)\leq\sum_{i=1}^{k}\left(-1
ight)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_{i}
ight) אזי k\in\mathbb{N}_{odd} • \mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^{n}A_{i}
ight)\geq\sum_{i=1}^{k}\left(-1
ight)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_{i}
ight) אזי k\in\mathbb{N}_{even} • \mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^{n}A_{i}
ight)\geq\sum_{i=1}^{k}\left(-1
ight)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_{i}
ight) משפט רציפות פונקציית ההסתברות: יהיו \left\{A_{n}\right\}_{n=1}^{\infty} מאורעות אזי
                                                                                                                                                                                                         \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \bullet
                                                                                                                                                                                                         \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\right) \bullet
                                                                                                                                                                        h:[n]	o [m] אזי איזי (hash-פונקציית גיבוב/hash) פונקציית איזי
                                           h\left(i
ight)=h\left(j
ight) שונים עבורם i,j\in\left[n
ight] פונקציית גיבוב אזי h:\left[n
ight]	o\left[m
ight] תהא n,m\in\mathbb{N}_{+} יהיו
    rac{n(n-1)}{2m} \geq \mathbb{P}\left( תהא תהא n,m \in \mathbb{N}_+ יום ההולדת: יהיו n,m \in \mathbb{N}_+ תהא תהא n,m \in \mathbb{N}_+ פונקציית גיבוב אזי
                                   R\left(t
ight)=\min\left\{ n\mid מספר ראמזי: נגדיר K_{t} ביעה של בביעה של בביעה של בכל בכל בביעה אונוכרומטית R\left(t
ight)
                                                                                                                                                                                                   2^{rac{t-3}{2}} < R\left(t
ight) \leq c \cdot rac{4^{t}}{\sqrt{t}} אאי t \in \mathbb{N}_{+} משפט: יהי
                                                                            \mathbb{P}\left(\omega\mid F
ight)=\left\{egin{array}{ll} \mathbb{P}(\omega) & \omega\in F \\ 0 & 	ext{else} \end{array}
ight. אזי \mathbb{P}\left(F
ight)>0 מאורע המקיים F מאורע המקיים F אזי הסתברות מותנית: יהי
                                                                                                                                                                    טענה: פונקציית הסתברות מותנית הינה פונקציית הסתברות.
                                                                                                  (\Omega,\mathbb{P}\left(\cdot\mid F
ight)) אזי F\in 2^{\Omega} מרחב הסתברות מתנה: יהי (\Omega,\mathbb{P}) מרחב הסתברות מותנה:
                                                                                                                                                                                       טענה: מרחב הסתברות מותנית הוא מרחב הסתברות.
                                                                                                                                                                                    \mathbb{P}\left(E\mid F\right)=\frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)} אזי מאורעות E,F יהיו משפט: יהיו
                                                                                                                                       \mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\mid B)\,\mathbb{P}(B) מאורעות אזי A,B יהיו יהיו
                                                                         \mathbb{P}\left(igcap_{i=1}^nA_i
ight)=\mathbb{P}\left(A_1
ight)\prod_{i=2}^n\mathbb{P}\left(A_i\midigcap_{j=1}^{i-1}A_i
ight) מאורעות אזי A_1\ldots A_n מאורעות אזי
```

 $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)=1$ עבורה $\mathbb{P}:\Omega o[0,1]$ עבורה אזי פונקציית הסתברות נקודתית: תהא Ω קבוצה אזי פונקציית

 (Ω,\mathbb{P}) מרחב הסתברות (מ"ה): תהא Ω קבוצה ותהא \mathbb{P} פונקציית הסתברות אזי

 Ω מרחב מדגם: יהי Ω,\mathbb{P} מרחב הסתברות אזי Ω

 $A\subseteq\Omega$ אזי אחב הסתברות (\mathbb{P},Ω) מאורע: יהי

 $.2^{A}=\mathcal{P}\left(A
ight)$ סימון: תהא A קבוצה אזי

הערה: בקורס זה כל מרחבי ההסתברות הינם בדידים.

מרחב הסתברות בדיד: מרחב הסתברות (Ω,\mathbb{P}) עבורו $|\Omega| \leq \aleph_0$ מרחב הסתברות סופי: מרחב הסתברות סופי:

```
\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^{\mathcal{C}}) \mathbb{P}(B^{\mathcal{C}}) נוסחת ההסתברות השלמה: יהיו A,B מאורעות אזי
                                              \mathbb{.P}\left(B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(B\mid A_{i}\right)\mathbb{P}\left(A_{i}\right)אזי לה: יהיו אמקיימות המקיימות המקיימות לה: יהיו \{A_{i}\}_{i=1}^{\infty} המללה: יהיו להיו מאורעות אזי \mathbb{P}\left(E\mid F\right)=\frac{\mathbb{P}\left(E\mid E\right)\mathbb{P}\left(F\mid E\right)}{\mathbb{P}\left(F\right)} מאורעות אזי להיו להיו להיו יהיו להיו להיו להיו
                      \mathbb{P}\left(\left(\cdot\mid B\right)\mid C\right)=\mathbb{P}\left(\cdot\mid B\cap C\right)\mathbb{P}\left(C\mid B\right) אזי \mathbb{P}\left(A\right),\mathbb{P}\left(B\right)>0 מאורעות עבורם A,B מאורעות עבורם
                                           \mathbb{P}\left(B\mid A
ight)>\mathbb{P}\left(B
ight) המקיים \mathbb{P}\left(A
ight)>0 מאורע אזי מאורע אזי מאורע B המקיים
                                                     \mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) המקיימים A,B האורעות (ב"ת): מאורעות בלתי תלויים
                                                                                                                                                               AB = A \cap B :סימון
                                                                                    (\mathbb{P}\left(A
ight)\in\{0,1\})\Longleftrightarrowטענה: יהי A מאורע אזי (A ב"ת עם עצמו
                                                                           .(\mathbb{P}\left(A
ight)=0)\lor(\mathbb{P}\left(B
ight)=0) איי וב"ת ארים וב"ת מאורעות A,B יהיו
                                                                                                                                           טענה: יהיו A,B מאורעות התב"ש
                                                                                                                                                          .בלתי תלויים A,B
                                                                                                                                                        .בלתי תלויים A^{\mathcal{C}}, B
                                                                                                                                                     . בלתי תלויים A^{\mathcal{C}}, B^{\mathcal{C}}
                                                                                                                                                        .בלתי תלויים A.B^{\mathcal{C}}
                                                    .orall i 
eq j.\mathbb{P}\left(A_iA_i
ight) = \mathbb{P}\left(A_i
ight)\mathbb{P}\left(A_i
ight) אי תלות בזוגות: מאורעות A_1\ldots A_n המקיימים
                                                       .orall i 
eq j.\mathbb{P}\left(A_iA_j
ight) = \mathbb{P}\left(A_i
ight)\mathbb{P}\left(A_j
ight) המקיימים \left\{A_i
ight\}_{i\in I} מאורעות
                      .orall I\subseteq [n].\mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_i
ight)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(A_i
ight) המקיימים A_1\ldots A_n מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות
                              .orall J\subseteq I.\,(|J|\in\mathbb{N}_+)\Longrightarrow ig(\mathbb{P}ig(igcap_{i\in I}A_iig)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\,(A_i)ig) המקיימים \{A_i\}_{i\in I} מאורעות
                                                                                                                   A^1=A \wedge (A^{-1}=A^{\mathcal{C}}) הערה: נסמן זמנית
                                                 A_1\dots A_nטענה: (\forall arepsilon \in \{\pm 1\}^n \,. \mathbb{P}(igcap_{i=1}^n A_i^{arepsilon_i}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^{arepsilon_i})) שענה: A_1\dots A_n
                           A_1 \ldots A_n ב"ת עם ב"ת אזי כל איחוד/חיתוך/משלים של ב"ת ב"ת אחרעות ב"ת אזי כל מסקנה: יהיו A_1 \ldots A_n, B_1 מסקנה:
                       \mathbb{P}_{\Omega_1 	imes \Omega_2}\left((\omega_1,\omega_2)
ight) = \mathbb{P}_1\left(\omega_1
ight)\mathbb{P}_2\left(\omega_2
ight) מ"ה אזי \left(\Omega_1,\mathbb{P}_1
ight), \left(\Omega_2,\mathbb{P}_2
ight) היו מכפלה: יהיו
                                                                                                טענה: פונקציית הסתברות מכפלה היא פונקציית הסתברות.
                                   (\Omega_1,\mathbb{P}_1)\otimes (\Omega_2,\mathbb{P}_2)=\left(\Omega_1	imes\Omega_2,\mathbb{P}_{\Omega_1	imes\Omega_2}
ight) מרחב מכפלה: יהיו \left(\Omega_1,\mathbb{P}_1
ight),\left(\Omega_2,\mathbb{P}_2
ight) מרחב מכפלה: יהיו
                                                                                                                            טענה: מרחב מכפלה הוא מרחב הסתברות.
                                                                  . מרחב הסתברות igotimes_{i=1}^n(\Omega_i,\mathbb{P}_i) מ"ה אזי (\Omega_1,\mathbb{P}_1)\dots(\Omega_n,\mathbb{P}_n) מרחב הסתברות.
                                                                        \exists A \subset \Omega_1. \exists B \subset \Omega_2. C = A \times B מלבן: מאורע C \subset \Omega_1 \times \Omega_2 המקיים
                                                                          \mathbb{P}\left(A 	imes B
ight) = \mathbb{P}_1\left(A
ight)\mathbb{P}_2\left(B
ight) טענה: יהי A 	imes B \subseteq \Omega_1 	imes \Omega_2 מלבן אזי
                          \overline{A}=\Omega_1	imes\ldots	imes\Omega_{i-1}	imes A	imes\Omega_{i+1}	imes\ldots	imes\Omega_n אזי איזי מ"ה מ"ה מ"ה מ"ה מ"ה מ"ה מ"ה מ"ה מ"חון: יהי
                                                                           .igotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathbb{P}_i) ב"ת מעל \overline{A}, \overline{B} אזי B \subseteq \Omega_i ויהי A \subseteq \Omega_i מסקנה: יהי
                                                                                                                              \mathbb{P}\left(\overline{A}
ight)=\mathbb{P}_{i}\left(A
ight) אזי A\subseteq\Omega_{i} טענה: יהי
                                                                                                                             \mathbb{P}\left(\left(\omega_{1}\ldots\omega_{n}
ight)
ight)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_{i}\left(\omega_{i}
ight) מסקנה:
                                                             \overline{A_1}\dots\overline{A_n} אזי \forall i\in [n]\,.A_i\subseteq\Omega_i ב״ת. משפט: יהיו A_1\dots A_n משפט:
\mathbb{P}(A\cap B\mid C)=\mathbb{P}(A\mid C)\,\mathbb{P}(B\mid C) עבורם A,B אזי מאורעות \mathbb{P}(C)>0 יהי התנייה: יהי
                      \bigotimes_{i=1}^{n}\left(\left\{ 0,1\right\} ,f
ight) אזי ווי ברנולי: יהי f\left(k
ight)=\left\{ egin{array}{ll} p&k=1\ 1-p&k=0 \end{array}
ight. כך כך f\in\left[0,1
ight]^{\left\{ 0,1\right\} } אזי 0\leq p\leq1 אזי ווי ברנולי: יהי f\left(k
ight)=\left\{ \left[0,1
ight]^{\left\{ 0,1\right\} }
                    .\Big(M_n-\log_{\frac{1}{p}}(n)\Big)	o 0 אזי M_n="טענה: נסמן "הרצף הארוך ביותר של 1 ב־n ביסויי ברנולי הרצף הארוך ביותר של A\in M_{|V|}\left(\{0,1\}
ight) גרף לא מכוון אזי G=(V,E) המקיים מטריצת שכנויות: יהי G=(V,E) גרף לא מכוון אזי
                                                                     .\left\{(A_{i,j})_{1\leq i< j\leq n}\mid A_{i,j}\in\{0,1\}
ight\} אזי n\in\mathbb{N} יהי n
                             \mathbb{P}\left(\{\omega\in\mathbb{C}^{n}\mid \omega_{i,j}=1\}
ight)=p אזי אזי p\in[0,1] גרפים על n קודקודים p\in[0,1] הימצאות קשת בהתסברות p: יהי
            G\left(n,p
ight)=(0,1] ויהי n\in\mathbb{N} ויהי n\in\mathbb{N} אזי הימצאות קשת בהתסברות n\in\mathbb{N} גרפים על מקרי: יהי
                                                                                        \mathbb{P}(\omega)=p^{|E_{\omega}|}\cdot (1-p)^{inom{n}{2}-|E_{\omega}|} אזי \omega\in G(n,p) טענה: יהי
                                                                                                                                מסקנה: גרף מקרי הינו מרחב הסתברות.
                                                                                              f\in\Omega	o S משתנה מקרי (מ"מ): יהי (\Omega,\mathbb{P}) מ"ה בדיד אזי
                                                                                                         \mathbb{.P}\left(X=s\right)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\left\{s\right\}\right)\right) אזי מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ Xיהי יהי
                                                         \mathbb{1}_A\left(\omega
ight)=\left\{egin{array}{ll} 1 & \omega\in A \\ 0 & 	ext{else} \end{array}
ight. המוגדרת \mathbb{1}_A\in\left\{0,1
ight\}^\Omega אינדיקטור: יהי A\subseteq\Omega מאורע אזי
```

```
\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B} \wedge (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \uplus B}) טענה:
                                                                                   \operatorname{supp}\left(f
ight)=\left\{s\in S\mid f\left(s
ight)
eq0
ight\} אזי f:S
ightarrow\mathbb{R} תומך: תהא
                                           .(|\mathrm{supp}\,(\mu)| \leq \aleph_0) \wedge \left(\sum_{s \in \mathrm{supp}(\mu)} \mu\left(s\right) = 1\right) התפלגות בדידה: \mu: S 	o [0,1]
                                \mu_X(s)=\mathbb{P}\left(X=s
ight) המוגדרת \mu:\operatorname{Im}\left(X
ight)
ightarrow \left[0,1
ight] מ"מ אזי מ"מ אזי \mu:\operatorname{Im}\left(X
ight)
                                                                                         טענה: ההתפלגות של משתנה מקרית היא התפלגות בדידה.
                                                                                                           .supp (X) = \text{supp}(\mu_X) מימון: יהי X מ"מ אזי מימון:
                                                                   .orall \omega \in \Omega.X\left(\omega
ight)=Y\left(\omega
ight) המקיימים X,Y\in S^{\Omega} משתנים מקריים שווים:
                                . \forall s \in S. \mu_X\left(s
ight) = \mu_Y\left(s
ight) משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עם אותה תמונה המקיימים
                                                                                                      X\sim Y מ"מ שווי התפלגות אזי X,Y סימון: יהיו
                                    \mu\left(k
ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{1}{b-a+1} & k\in[a,b]\cap\mathbb{Z} & n המפלגות אחידה בדידה: יהיו a,b\in\mathbb{Z} אזי a,b\in\mathbb{Z} המפיימת a,b\in\mathbb{Z} הייו איי היי a מ"מ עבורו a מתפלג אחיד בדיד אזי a מתפלג אחיד בדיד אזי a מ"מ עבורו a מתפלג אחיד בדיד אזי a
                                                             \left(\mu = \left\{egin{array}{ll} x_1 & p_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & p_n \end{array}
ight) \equiv \left(\mu\left(k
ight) = \left\{egin{array}{ll} p_1 & k=x_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & k=x_n \\ 0 & \mathrm{else} \end{array}
ight) סימון: תהא \mu התפלגות אזי
                                                               \mu=\left\{egin{array}{ccccc} 1 & p & p & p \end{array}
ight.התפלגות ברנולי: יהי p\in[0,1] אזי p\in[0,1]
                                                                                    X\sim \mathrm{Ber}\left(p
ight) אזי ברנולי מתפלג ברנולי מ"מ עבורו מ"מ מ"מ סימון: יהי א
                                                \mu\left(k
ight)=\left(1-p
ight)^{k-1}p המקיימת \mu\in\left[0,1
ight]^{\mathbb{N}_{+}} אזי p\in\left[0,1
ight]^{\mathbb{N}_{+}} התפלגות גאומטרית: יהי p\in\left[0,1
ight]
                                                                              X\sim \mathrm{Geo}\left(p
ight) אזי אומטרית מתפלג מתפלג מימין: יהי א מ"מ עבורו \mu_X
                            \mu\left(k
ight)=inom{n}{k}p^k\left(1-p
ight)^{n-k} המקיימת \mu\in\left[0,1
ight]^{\mathbb{N}} אזי n\in\mathbb{N} ויהי ויהי p\in\left[0,1
ight]
                                                                              X\sim \mathrm{Bin}\left(n,p
ight) אזי מתפלג בינומית מ"מ עבורו \mu_X מתפלג מ"מין: יהי
                                                                        \mu(k) = \frac{\lambda^k}{L} e^{-\lambda} המקיים \mu \in [0,1]^{\mathbb{N}} אזי \lambda > 0 התפלגות פואסון: יהי
                                                                               X\sim \mathrm{Pois}\left(\lambda
ight) יהי אזי מ"מ עבורו מתפלג פואסונית מתפלג מ"מ מ"מ מ"מ עבורו יהי
                                      \lim_{n	o\infty}\mu_{\mathrm{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}
ight)}\left(k
ight)=\mu_{\mathrm{Pois}(\lambda)}\left(k
ight) איז \lambda>0 ויהי k\in\mathbb{N} יהי יהי פואסון: יהי
                                              \mu\left(k
ight)=rac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}} המקיים \mu\in\left[0,1
ight]^{\mathbb{N}} אזי r,n,m\in\mathbb{N} המקיים היפרגאומטרית: יהיו X\sim\operatorname{HG}\left(n,m,r
ight) מתפלג היפרגאומטרית אזי X\sim\operatorname{HG}\left(n,m,r
ight)
                 X\sim {\rm NB}\left(r,p\right) אזי שלילית מתפלג בינומית מתפלג \mu_Xעבורו מ"מ מימין: יהי יהי מימין
                               \mu\left(x
ight)=rac{\binom{x-1}{k-1}\binom{m-x}{r-k}}{\binom{m}{r}} התפלגות היפרגאומטרית שלילית: יהיו r,k,m\in\mathbb{N} אזי r,k,m\in\mathbb{N} התפלגות היפרגאומטרית שלילית: יהיו
                                                   \stackrel{\sim}{X}\sim 	ext{NHG}\left(r,k,m
ight) יהי X מ"מ עבורו \mu_X מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי X
                                                   f\left(X
ight)=f\circ X אזי f\in B^A ותהא X\in A^\Omega אחרי: תהא מקרי: תהא
                                                                   .\mu_{f\left(X
ight)}\left(k
ight)=\sum_{r\in f^{-1}\left(\left\{k
ight\}
ight)}\mu_{X}\left(r
ight) אזי f\in B^{A} משפט: יהי X מ"מ ויהי X
                                                                          \operatorname{supp}(f(X)) = f(\operatorname{supp}(X)) אזי f \in B^A מסקנה: יהי X מ"מ ויהי
                                                  X:\Omega 	o A וכן X:\Omega 	o A משתנים מקריים: יהיו איי X:\Omega 	o A וכן וכן אזי
                                                          \mu_{X,Y}\left(x,y
ight)=\mathbb{P}\left(X=x,Y=y
ight) זוג מ"מ אזי \left(X,Y
ight) זוג מיימ אזי התפלגות משותפת: יהי
                                              \mu_{X_1\dots X_n}(x_1\dots x_n)=\mathbb{P}\left(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n
ight)הכללה: יהיו X_1\dots X_n מ"מ אזי
                                                                                                  \mu_X,\mu_Y אוג מ"מ אזי (X,Y) זוג יהי
                                                                                                                       .\mu_{X}\left(x
ight)=\sum_{y\in S}\mu_{X,Y}\left(x,y
ight) טענה:
                                                                       \mu_{X,Y}=\mu_X\mu_Y אוג מ"מ עבורו (X,Y) משתנים מקריים בלתי תלויים:
                                                                                \mu_{X_1...X_n}=\mu_{X_1}\cdot\ldots\cdot\mu_{X_n} מ"מ המקיימים X_1\ldots X_n
                                             i 
eq j משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות: X_1 \dots X_n מ"מ המקיימים מקריים בלתי תלויים בזוגות:
                                             . ב"ת. אזי אורעות ב"ת משפט: יהיו מ"מ ב"ת ויהיו ב"ת ויהיו משפט: יהיו משפט: אזי א מ"מ ב"ת ויהיו משפט: יהיו משפט: יהיו משפט
                                                 f\left(X
ight),g\left(Y
ight) משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת ויהיו f,g טרנספורמציות של מ"מ אזי משפט:
                                                                                  \mathbb{1}_{A_1}\dots\mathbb{1}_{A_n}משפט: A_1\dots A_n משפט: A_1\dots A_n משפט:
(\mu_X=\mu_1)\wedge(\mu_Y=\mu_2) התפלגויות אזי קיים מ"ה (\Omega,\mathbb{P}) עבורו קיימים ענה: יהיו \mu_1,\mu_2 התפלגויות אזי קיים מ"ה (\Omega,\mathbb{P})
                                                         \left(\mu_{1}*\mu_{2}
ight)(z)=\sum_{x}\mu_{1}\left(x
ight)\mu_{2}\left(z-x
ight) אזי התפלגויות התפלגויות התפלגויות אזי \mu_{1},\mu_{2}
```

```
\mu_{X\restriction_{Y=y}}(x)=rac{\mu_{X,Y}(x,y)}{\mu_{Y}(y)} טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי אזי X,Y סימון: יהיו X,Y מ"מ אזי אזי X,Y מ"מ אזי יהיו יהיו X,Y מ"מ אזי יהיו
                                                   \mu\left(k_1\dots k_n
ight)=inom{n}{k_1-k_2}\prod_{i=1}^n p_i^{k_i} התפלגות מולטינומית: יהיו p_1\dots p_n אזי p_1\dots p_n התפלגות
                                                                                                               F_X: [0,1]^{\mathbb{R}} התפלגות מצטברת: יהיX מ"מ אזי F_X: [0,1]^{\mathbb{R}} כך כך
                                                                                                                                                                                                                                                      \mathbf{v}טענה: יהי \mathbf{v} מ"מ אזי
                                                                                                                                                                                                                                          . מונוטונית עולה F_X ullet
                                                                                                                                                                                                                                      \lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1 \bullet
                                                                                                                                                                                                                                  .\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0 \bullet
                                                                                                                       .\mu_{X}\left(s
ight)=F_{X}\left(s
ight)-\lim_{arepsilon
ightarrow0^{+}}F_{X}\left(s-arepsilon
ight) אזי s\in\operatorname{supp}\left(X
ight) יהי
                                                                                                                                                      .\lambda_{X}\left(t
ight)=1-F_{X}\left(t
ight) מ"מ אזי X יהי ההישרדות: יהי מיש
                                                                                                                                                           .Geo (1-\prod_{i=1}^n (1-p_i)) \sim \min_{i=1}^n \{\text{Geo}(p_i)\}מסקנה:
                                                                            איי X_{\restriction_{X+Y=n}} \sim \mathrm{Bin}\,(n,p) וכן X+Y \sim \mathrm{Poiss}\,(\lambda) מ"מ עבורם X,Y יהיו יהיו
                                                                                                                                                                                                                       .Y_{\uparrow_{X+Y=n}} \sim \operatorname{Bin}(n,1-p) \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                   X \sim \text{Poiss}(p\lambda) \bullet
                                                                                                                                                                                                                                  .Y \sim \mathrm{Poiss}\left(\left(1-p\right)\lambda\right) •
                                                                                                                                                                                                                                                                 .ה"ם X,Y \bullet
וכן \mu_1\left(\omega\right)=\sum_{s\in S}\mu\left(\omega,s\right) המקיימת \mu:\left[0,1
ight]^{S^2} איי התפלגויות אזי התפלגויות \mu_1\left(\mu_2:\left[0,1
ight]^S התפלגויות: יהיו
                                                                                                                                                                                                                                           .\mu_2(\omega) = \sum_{s \in S} \mu(s, \omega)
                                                                        (X'\sim X)\land (Y'\sim Y) המקיים (X',Y') המ"מ אזי זוג מ"מ אזי זוג מ"מ אזי היו אוג מ"מ משתנים: יהיו
               וכן X'(\omega_1,\omega_2)=X(\omega_1) כך \Omega_1\otimes\Omega_2 כך \Omega_1\otimes\Omega_2 וכן X'(\omega_1,\omega_2)=X(\omega_1) ויהי X'(\omega_1,\omega_2)=X(\omega_1) מיענה: יהי X'(\omega_1,\omega_2)=X(\omega_1) ויהי איני מ"מ על מ"מ מ"מ על מ"מ ע"מ על מ"מ על מ"
                                                                                                                                                                     X,Y איז (X',Y') איז Y'(\omega_1,\omega_2)=Y(\omega_2)
                                                                                   \mathbb{P}\left(X>t
ight)\geq\mathbb{P}\left(Y>t
ight) התפלגות שולטת סטוכסטית: יהי X מ"מ אזי מ"מ מ
                                                                                                     \mathbb{P}\left(Y'>X'
ight)=0 בימוד מונוטוני: יהיו X,Y מ"מ אזי צימוד צימוד מונוטוני: יהיו
                                                                         . טענה: יהי אזי קיים איזי שולטת שולטת סטוכסטית בהתפלגות אזי איזי קיים אימוד מונוטוני. מ"מ בעל התפלגות שולטת שולטת החפלגות איזי קיים איזי מונוטוני.
                \delta\left(\mu,v
ight)=\sum_{x\in S}\left|\mu\left(x
ight)-v\left(x
ight)
ight| אזי ההשתנות הכוללת: תהא \left|S
ight|\leq\aleph_{0} ויהיו ויהיו איזי \left|S
ight|\leq\aleph_{0} התפלגויות אזי
                                                                                                                                                                                     למה: מטריקת ההשתנות הכוללת הינה מטריקה.
                                                                                                                                                                          \delta\left(X,Y
ight)=\delta\left(\mu_{X},\mu_{Y}
ight) אזי מ"מ אזי X,Y יהיו
                                                                                                       .\delta\left(X,Y
ight)=2\sup_{E\subset S}\left|\mathbb{P}\left(X\in E
ight)-\mathbb{P}\left(Y\in E
ight)
ight| מ"מ אזי X,Y מ"מ אזי
                                                                          .\delta\left(X,Y
ight)=\delta\left(X',Y'
ight)\leq2\mathbb{P}\left(X'
eq Y'
ight) צימוד אזי (X',Y') צימוד איז איז מ"מ ויהי X,Y מ"מ ויהי מ"מ ויהי
        \delta\left(\sum_{i=1}^n X_i,\sum_{i=n+1}^{2n} X_i\right) \leq 2\sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(X_i 
eq Y_i
ight)מסקנה: יהיו X_1\dots X_{2n} מים אזי איי איי X_1\dots X_{2n} מיים יהיו X_1\dots X_{2n} מיים יהיו X_1\dots X_{2n} מיים ויהי יהיו X_1\dots X_{2n} מיים המספרים הקטנים: יהיו X_1\dots X_{2n} מיים ויהי
                                \mathbb{P}(X\geq m)\geq rac{1}{2} \wedge \left(\mathbb{P}(X\leq m)\geq rac{1}{2}
ight) המקיים m\in \mathrm{supp}\left(X
ight) המיים מקרי: יהי X מ"מ אזי m\in \mathrm{supp}\left(X
ight)
                                                                                                                        מתכנס בהחלט. בהחלת: \sum_{\omega \in \Omega} X\left(\omega\right) \mathbb{P}\left(\omega\right) מימ עבורו מישתנה בעל תוחלת:
                                                                                                                                                                    . בעל תוחלת אזי איז בעל משתנה על מ"ה משתנה X בעל משתנה על מייהי
                                                                                                                                     \mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{\omega \in \Omega} X\left(\omega\right) \mathbb{P}\left(\omega\right) אזי תוחלת מ"מ בעל מ"מ מ"מ בעל תוחלת אזי
                                                                                                                                                                                                                 למה: יהיו X,Y מ"מ ויהי למה:
                                                                                                                                                                                                                  \mathbb{E}\left[cX
ight]=c\mathbb{E}\left[X
ight] הומוגניות: •
```

 $\mu_1*\mu_2=\mu_2*\mu_1$ טענה: יהיו μ_1,μ_2 התפלגויות אזי μ_1,μ_2 יהיו $\mu_{X+Y}=\mu_X*\mu_Y$ משפט: יהיו μ_1,μ_2 מ"מ ב"ת אזי μ_2,μ_3 משפט: יהיו μ_3,μ_3 משפט: יהיו μ_3,μ_3 מענה: μ_3,μ_3 מענה: μ_3,μ_3 מענה: μ_3,μ_3 מענה: μ_3,μ_3 מיענה:

 X_{\restriction_A} משתנה מקרי מותנה: יהי A מאורע ויהי א מ"מ אזי משתנה . $\mu_{X_{\restriction_A}}$ יהי א מ"מ אזי X מ"מ מאורע ויהי א מאורע התפלגות מותנית: יהי א מאורע ויהי א

. Bin $(n,p) \sim \sum_{i=1}^n \mathrm{Ber}\,(p)$:מסקנה

.NB $(n,p) \sim \sum_{i=1}^n \text{Geo}(p)$ טענה:

.Pois (λ_1) + Pois (λ_2) ~ Pois $(\lambda_1 + \lambda_2)$:

```
\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i
ight] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i
ight] מסקנה: יהיו X_1 \dots X_n מסקנה:
                                                                                    \mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{s \in \mathrm{supp}\left(X
ight)} s \cdot \mu_{X}\left(s
ight) משפט: יהי X משפט: יהי
                                                                                                                                             \mathbf{v}טענה: יהי \mathbf{X} מ"מ אזי
                                                                                                (X \sim \operatorname{Uni}(0,\ldots,n)) \Longrightarrow (\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}) \bullet
                                                                                                               (X \sim \operatorname{Ber}(p)) \Longrightarrow (\mathbb{E}[X] = p) \bullet
                                                                                                        (X \sim \operatorname{Bin}(n,p)) \Longrightarrow (\mathbb{E}[X] = np) \bullet
                                                                                                           .(X \sim \text{Geo}(p)) \Longrightarrow \left(\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}\right) \bullet
                                                                                                .(X\sim {
m HG}\,(n,m,r))\Longrightarrow (\stackrel{\cdot}{\mathbb{E}}\,[X]=rac{nr}{m})
                                                                                                             (X \sim \text{Pois}(\lambda)) \Longrightarrow (\mathbb{E}[X] = \lambda) \bullet
                                   \mathbb{E}\left[f\left(X
ight)
ight] = \sum_{s \in \mathrm{supp}\left(X
ight)} f\left(s
ight) \mu_{X}\left(s
ight) אזי טרנספורמציה אזי משפט: יהי X מיש
                                          \mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X \geq n
ight) אזי supp (X) = \mathbb{N} מ"מ עבורו X מ"מ עבורו
                                                                                    \mathbb{E}\left[XY
ight]=\mathbb{E}\left[X
ight]\mathbb{E}\left[Y
ight] משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי X,Y
                                   \mathbb{E}\left[X\mid A
ight]=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)\mathbb{P}\left(\omega\mid A
ight) אזי מאורע אזי מ"מ ויהי א מ"מ ויהי מחתנית: יהי
                                                                              \mathbb{E}\left[X\mid A\right]=\frac{\mathbb{E}\left[X\cdot\mathbb{I}_{A}\right]}{\mathbb{P}(A)} אזי מאורע מ"מ Aמ"מ מ"מ מיהי יהי 
                                                                                       \mathbb{E}\left[X\mid A
ight]=\mathbb{E}\left[X
ight] מסקנה: יהיו X,\mathbb{1}_A מ"מ ב"ת אזי
\mathbb{E}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[X\mid A
ight]\mathbb{P}\left(A
ight)+\mathbb{E}\left[X\mid A^{\mathcal{C}}
ight]\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}
ight) נוסחאת התוחלת השלמה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי
            \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{E}[X \mid A_i] \, \mathbb{P}(A_i) אזי מ"מ מ"מ אזי A_i = \Omega המקיימות A_i = \Omega המקיימות הכללה: יהיו
                     \mathbb{E}\left[X\mid Y
ight](\omega)=\mathbb{E}\left[X\mid Y=Y\left(\omega
ight)
ight] מ"מ אזי X,Y מ"מ היו במשתנה מותנה במשתנה: יהיו
                                                              \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\mid Y
ight]
ight]=\mathbb{E}\left[X
ight] משפט/נוסחאת ההחלקה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                            \mathbb{E}\left[X\cdot g\left(Y\right)\mid Y
ight]=g\left(Y\right)\cdot\mathbb{E}\left[X\mid Y
ight] טענה: יהיו X,Y מ"מ ותהא g טרנספורמציה אזי X,Y טענה:
                                                                                    \mathbb{E}\left[|X|^k
ight]<\infty משתנה בעל מומנט k: מ"מ מ"מ מ"מ מאנה בעל מומנט א אזי X\in\ell^k יהי X משתנה בעל מומנט X אזי
                                                                                                                       \mathbb{E}\left[X^k
ight] אזי X\in\ell^k מומנט k: יהי
                                                                                                                  \ell^k \subset \ell^m אזי m < k \in \mathbb{N} טענה: יהיו
                                                   \|\mathbb{E}[XY]\| < \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]} אזי X,Y \in \ell^2 אזי שיוויון קושי שוורץ: יהיו
                                                                                                        \mathbb{E}\left[X
ight]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2
ight] אזי X \in \ell^2 מסקנה: יהי
                                                                                      .\operatorname{Var}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)^{2}
ight] אזי X\in\ell^{2} אזי אונות: יהי
                                                                                        .\operatorname{Var}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[X^2
ight]-\mathbb{E}\left[X
ight]^2 אזי X\in\ell^2 טענה: יהי
                                                                                                    .\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var}[X]} אזי X \in \ell^2 יהי
                                                                                   \exists c. \mathbb{P}\left(X=c\right)=1 משתנה דטרמיניסטי: מ"מ מ"מ משתנה משתנה
                                                                                                                        למה: יהי X \in \ell^2 ויהי אזי
                                                                                                                                                 .Var[X] > 0 •
                                                                                                         (\operatorname{Var}[X] = 0) \Longleftrightarrowערמיניסטי) •
                                                                                                                                .Var [aX] = a^2 \text{Var}[X] \bullet
                                                                                                {
m Var}\left[X+a
ight]={
m Var}\left[X
ight] • .{\Bbb E}\left[\left(X-a
ight)^2
ight] אזי X\in\ell^2 יהי יהי X\in\ell^2 אזי
                                                \mathbb{E}\left[X
ight] אזי המינימום של פונקציית ההפסד מתקבלת בערך אזי המינימום של אזי המינימום אזי המינימום של פונקציית
                                                   \mathbb{E}\left[|X-a|
ight] מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה X מ"מ מ"מ
                                                                                                  .Median (X) סימון: יהי X מ"מ אזי החציון הוא
                  \max |X-a| יהי מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה: Range Mid
```

 $\mathbb{E}\left[X+Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[Y\right]$ חיבוריות: • $(X < Y) \Longrightarrow (\mathbb{E}\left[X\right] < \mathbb{E}\left[Y\right])$ מונוטוניות: •

 $\mathsf{MR}\left(X\right)$ סימון: יהי X מ"מ אזי הערך האמצעי הוא

 $\mathsf{Mode}\left(X
ight)$ אזי השכיח הוא מ"מ מ"מ מימן: יהי

 $\mathbb{P}\left(X \neq a\right)$ שביח: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה מ"מ אזי הערך

```
\mathbb{E}[X,Y]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] מ"מ אזי X,Y מ"מ אזי אוי משותפת: יהיו
```

.
Var
$$[X+Y]={\rm Var}\,[X]+2{\rm Cov}\,[X,Y]+{\rm Var}\,[Y]$$
משפט:

.Cov
$$[X,Y]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)\left(Y-\mathbb{E}\left[Y
ight]
ight)
ight]$$
 :

$$\operatorname{Cov}\left[X,Y
ight]=0$$
 משתנים בלתי מתואמים: X,Y המקיימים

משפט: יהיו X,Y ב"ת אזי X,Y בלתי מתואמים.

.
Var
$$[X+Y]={
m Var}\,[X]+{
m Var}\,[Y]$$
 אזי בלתי מתואמים אזי גלתי בלתי בלתי בלתי מתואמים אזי

למה: יהיו X,Y,Z מ"מ ויהיו למה:

$$.\mathsf{Cov}\left[X,X\right] =\mathsf{Var}\left[X\right] \ \bullet \\$$

.Cov
$$[X,Y]=\mathrm{Cov}\,[Y,X]$$
 : סימטריות:

.
Cov
$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha$$
Cov $[X, Z] + \beta$ Cov $[Y, Z]$ • בי־לינאריות:

.Cov
$$[X+lpha,Y]=\mathrm{Cov}\,[X,Y]$$
 : אינווריאנטיות להוספת אינווריאנטיות •

$$|\operatorname{Cov}[X,Y]| \le \sqrt{\operatorname{Var}[X]} \sqrt{\operatorname{Var}[Y]} \bullet$$

$$|\operatorname{Cov}[X,Y]| \leq \sqrt{\operatorname{Var}[X]}\sqrt{\operatorname{Var}[Y]}$$
 ווואס פון איז $|\operatorname{Cov}[X,Y]| \leq \sqrt{\operatorname{Var}[X]}\sqrt{\operatorname{Var}[Y]}$ מקדם המתאם: יהיו $|X,Y|$ מ"מ איז $|X,Y|$ מ"מ איז מורים במתאם: יהיו און איז מיים איז מורים במתאם: יהיו און איז מיים איז מורים במתאם און מיים מורים במתאם במתאאם במתאם במת

למה: יהיו X,Y מ"מ ויהיו a,b סקלרים אי

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1 \bullet$$

$$.(
ho_{X,Y}=0)$$
 כלתי מתואמים) בלתי X,Y

$$(\rho_{X,Y} = \pm 1) \iff (Y = aX + b) \bullet$$

למה: יהי X מ"מ אזי

.
Var
$$[X]=rac{n^2-1}{12}$$
 איזי $X\sim \mathrm{Uni}\left([n]\right)$ •

.Var
$$(X) = np(1-p)$$
 אזי $X \sim \text{Bin}(n,p)$

.
$$\operatorname{Var}\left(X
ight)=\lambda$$
 אזי $X\sim\operatorname{Pois}\left(\lambda
ight)$ •

.
$$\operatorname{Var}\left(X\right)=rac{1-p}{p^{2}}$$
 איז $X\sim\operatorname{Geo}\left(p\right)$ •

 $g_{X}\left(t
ight)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{X}\left(n
ight)t^{n}$ אזי אוי אוף אור מ"מ עבורו X מ"מ מ"מ מ"מ מימר מונקציה יוצרת: יהי

טענה: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת אזי

$$|t| \leq 1$$
 מתכנס עבור $g_X(t)$

$$g_X \in C^{\infty}\left((-1,1)\right) \bullet$$

. אזי
$$t^X$$
 מ"מ בעל תוחלת $t \in [-1,1]$ יהי

 $.g_{X}\left(t
ight)=\mathbb{E}\left[t^{X}
ight]$ אזי יהי X משפט: יהי מ"מ בעל פונקציה יוצרת אזי

למה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת בעלי פונקציה יוצרת אזי

$$.\mu_X(n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!} \bullet$$

$$.g_{X+Y} = g_X \cdot g_Y \bullet$$

$$\lim_{t\to 1^-} g_X(t) = g_X(1) = 1$$

$$\lim_{t\to 1^-}g_X\left(t\right)=g_X\left(1\right)=1 \quad \bullet$$
 .
$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1}\left(X-i\right)\right]=\lim_{t\to 1^-}g_X^{(k)}\left(t\right) \text{ איז } k \text{ בניח כי } X \text{ בעל מומנט } k$$

מסקנה: יהי $X \in \ell^2$ בעל פונקציה יוצרת אזי

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \lim_{t \to 1^{-}} g_{X}'\left(t\right) \bullet$$

.Var
$$[X] = \lim_{t \to 1^{-}} \left(g_X''(t) + g_X'(t) - (g_X'(t))^2 \right) \bullet$$

. $\operatorname{Var}\left[X
ight]=\lim_{t o 1^{-}}\left(g_X''\left(t
ight)+g_X'\left(t
ight)-\left(g_X'\left(t
ight)
ight)^2
ight)$ • . $M_X\left(t
ight)=\mathbb{E}\left[e^{tX}
ight]$ איז איז X מ"מ X מ"מ מומנטים: יהי א מ"מ מ"מנטים: יהי א מ"

$$M_{X}\left(t
ight)=\left(1-p+pe^{t}
ight)^{n}$$
 אזי $X\sim\operatorname{Bin}\left(n,p
ight)$ טענה: יהי

למה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי

$$.M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y \bullet$$

$$M_{X}^{\left(n
ight)}\left(0
ight)=\mathbb{E}\left[X^{n}
ight]$$
 אזי $M_{X}\in C^{n}\left(I
ight)$ וכן $0\in I$ יהי I קטע עבורו \bullet

$$M_{X}\left(t
ight)=\sum_{n=0}^{\infty}rac{\mathbb{E}\left[X^{n}
ight]}{n!}t^{n}$$
 אזי $M_{X}\in C^{\infty}\left(I
ight)$ וכן $0\in I$ מסקנה: יהי I קטע עבורו

$$\mathbb{P}\left(X\geq a
ight)\leq rac{\mathbb{E}[X]}{a}$$
 אזי $a>0$ אזי מ"מ אי שלילי ויהי X מ"מ אידשוויון מרקוב: יהי

$$\mathbb{P}(X\geq t)\leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(t)}$$
 אי שוויון צ'בישב: יהי X עולה ויהי X מי"מ עבורו $f(X)$ בעל תוחלת איז $f\in [0,\infty)^\mathbb{R}$ אי־שוויון צ'בישב: יהי X ויהי X איז X איז X איי שוויון צ'בישב: יהי $X\in \ell^2$ ויהי $X\in \ell^2$ איז $X\in \ell^2$

$$\mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}\left[X
ight]|\geq b
ight)\leq rac{ ext{Var}[X]}{b^2}$$
 איי-שוויון צ'בישב: יהי $X\in\ell^2$ ויהי $b>0$ ויהי

```
. \forall x,y \in I. \forall \lambda \in \left[0,1
ight]. arphi\left(\lambda x + \left(1-\lambda
ight)y
ight) \leq \lambda arphi\left(x
ight) + \left(1-\lambda
ight)arphi\left(y
ight) עבורה arphi \in \mathbb{R}^{I} עבורה קמורה: יהי I קטע אזי
                                                                              rac{arphi(y) - arphi(x)}{y - x} \leq rac{arphi(x) - arphi(y)}{x - y} אזי x < y < z קמורה ויהיו arphi \in \mathbb{R}^{(a,b)}
                                                                                                                    arphi \in C\left((a,b)
ight) אזי קמורה arphi \in \mathbb{R}^{(a,b)} מסקנה: תהא
             a,b\in\mathbb{R} אזי קיימים a,b\in\mathbb{R} עבורם a,b\in\mathbb{R} אזי קיימים אזי קיימים a,b\in\mathbb{R} למה: תהא
                    .arphi\left(\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)\leq\mathbb{E}\left[arphi\left(X
ight)
ight] יהי X מ"מ בעל תוחלת ותהא arphi\in\mathbb{R}^{I} קמורה עבורה arphi\left(\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)
                                                                                            .rac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} אי־שוויון הממוצעים: יהיו
                                                                                                                 \|\mathbb{E}\left[X
ight]\|\leq \mathbb{E}\left[|X|
ight] אי־שיוויון המשולש: יהי X מ"מ אזי
                                                       החוק החלש של המספרים הגדולים: יהיו \{X_i\}_{i=1}^\infty מ"מ ב"ת שקולי התפלגות עם תוחלת אזי החוק החלש של המספרים הגדולים: יהיו
\mathbb{R}^{n-1} אזי לכל 0 \mathbb{R}^n קיים \mathbb{R}^n כך שלכל N_0 \in \mathbb{R}^n כך שלכל N_0 \in \mathbb{R}^n ולכל N_0 \in \mathbb{R}^n קיים N_0 \in \mathbb{R}^n כך שלכל N_0 \in \mathbb{R}^n ולכל החלש של המספרים הגדולים: יהי N_0 \in \mathbb{R}^n אזי לכל N_0 \in \mathbb{R}^n קיים N_0 \in \mathbb{R}^n כך שלכל N_0 \in \mathbb{R}^n ולכל
                                                    B_{k,n}\left(x
ight) = inom{n}{k} x^k \left(1-x
ight)^{n-k} אזי k < n \in \mathbb{N} יהיו יהיו
                                                                                  Q_n(t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{\pi}\right)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} אזי f \in C([0,1]) הגדרה: תהא
                                                                                                                                                                .Q_{n}\left( t
ight) \in \mathbb{R}_{n}\left[ x
ight] טענה:
                                                                        .orall arepsilon>0.\exists n\in\mathbb{N}.\sup_{t\in[0,1]}|f\left(t
ight)-Q_{n}\left(t
ight)|\leqarepsilon אזי איני f\in C\left(\left[0,1
ight]\right) משפט: תהא
ולכל N>N_0 כך שלכל המספרים הגדולים: יהי אזי לכל מ"מ עם תוחלת \mu אזי לכל מ"מ בN>N_0 כך שלכל אזי ולכל ולכל
                                                                          \mathbb{P}\left(\max_{n\in\{N_0...N\}}\left|rac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\mu
ight|\geq\delta
ight)<arepsilon מ"מ ב"ת מתקיים \{X_i\sim X\}_{i=1}^N פונקציית צפיפות רציפה: f:I	o[0,1] רציפה המקיימת
                                          \mathbb{P}\left([a,b]
ight)=\int_a^b f\left(x
ight)dx אזי אזי [a,b]\subseteq I פונקציית צפיפות ותהא f:I	o [0,1] אזי הסתברות רציפה: תהא
                    . orall E\subseteq\mathbb{R}.\mathbb{P}\left(X\in E
ight)=\int_{E}f\left(x
ight)dx עבורה f:\mathbb{R}	o\left[0,1
ight] עבורה צפיפות פונקצית צפיפות אפיפות פונקצית אפיפות אפיפות מקרי רציף: מ"מ
                                                          F(t)=\mathbb{P}\left(X\leq t
ight)=\int_{-\infty}^{t}f\left(x
ight)dx אזי מ"מ רציף אזי מ"מ ההתפלגות המצטברת: יהי א
                                                                                                   \mathbb{.P}\left(a\leq X\leq b\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)אזי רציף מסקנה: יהי Xיהי יהי מסקנה:
                                                                            f(x)=egin{cases} rac{1}{|I|} & x\in I \ 0 & 	ext{else} \end{cases} עבורו X:I	o\mathbb{R} משתנה מקרי אחיד רציף: מ"מ רציף X:I	o\mathbb{R}
                                                                                                          \mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{\mathbb{R}}xf\left(x
ight)dx אזי מ"מ רציף מ"מ מ"מ מיהי איניהי מ"מ מ
                                                                                                         \mathbb{E}\left[X^{p}
ight]=\int_{\mathbb{R}}x^{p}f\left(x
ight)dx מומנט רציף: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                               f(x)=rac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-rac{1}{2}\left(rac{x-\mu}{\sigma}
ight)^2} המקיימת f\in[0,1]^\mathbb{R} אזי \sigma^2,\mu\in\mathbb{R} התפלגות נורמלית: יהיו
                                                                                     Z\sim N\left(\mu,\sigma^2
ight) יהי Z מ"מ רציף עבורו f\left(x
ight) מתפלג נורמלית אזי מים מים רציף עבורו
                                                                                                                                                        .\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} :גאוסיאן
                                                                                          Z\sim N\left(0,1
ight) אזי \phi\left(x
ight) אזי צפיפות פונקציית מ"מ מ"מ רציף עם פונקציית צפיפות
                                                                             \Phi\left(x
ight)=\mathbb{P}\left(Z\leq x
ight)=\int_{-\infty}^{x}\phi\left(t
ight)dt איי מימ רציף איי Z\sim N\left(0,1
ight) הגדרה: יהי
                                                                                                                                                                      טענה: יהי t\in\mathbb{R} אזי
                                                                                                                 .(\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=1)\wedge(\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=0) •
```

 $\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n X_i - n\mu| \geq b) \leq rac{n\sigma_1^2}{b^2}$ איי איי איי μ איי בלתי מתואמים באגות עם באגות עם תוחלת משותפת איי איי איי וואריי מתואמים באגות איי באנה: יהיו

 $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq (1+t)\,\mu
ight) \leq \exp\left(-rac{t^2}{2+t}\mu
ight)$ אזי $\{X_i \sim \mathrm{Ber}\left(p_i
ight)\}_{i=1}^n$ אי־שוויון צ'רנוף: יהיו

 $\mu=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i
ight]$ סימון: יהיו $X_1\dots X_n$ מ"מ אזי

 $(\Phi \in C(\mathbb{R})) \wedge (\Phi > 0) \wedge (\Phi = \Phi)$ • עולה ממש)

 $X\in [X]=0$ המקיים ($\mathbb{E}\left[X
ight]=0$) המקיים $X\in \ell^2$ משתנה מתוקנן:

 $\mathbb{P}\left(a\leq Z\leq b
ight)=\Phi\left(b
ight)-\Phi\left(a
ight)=\int_{a}^{b}\phi\left(t
ight)dt$ מסקנה: יהי $Z\sim N\left(0,1
ight)$ מים מים רציף אזי

 $.\Phi(t) = 1 - \Phi(-t) \bullet$

 $.(\Phi\left(\infty\right)=1)\wedge\left(\Phi\left(-\infty\right)=0\right)$ הגדרה:

 $\mathbb{P}\left(X\geq a
ight)\leq rac{M_X(s)}{a^{sa}}$ אזי $s\in\mathbb{R}$ מ"מ ויהי X מ"מ הכללה: יהי

```
.\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\left(x
ight)dx = \frac{\pi}{4^{n}}\binom{2n}{n}
ight) \wedge \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\left(x
ight)dx = \frac{2}{2n+1}\frac{4^{n}}{\binom{2n}{n}}
ight) איי n\in\mathbb{N} למה: יהי n\in\mathbb{N} איי
                                                                                                                                                            \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{\pi}{4^n} \binom{2n}{n}}{\frac{2}{2n+1} \frac{4^n}{(2n)}} = 1 :
                  \mathbb{P}\left(a \leq \widehat{S_N} \leq b
ight) \xrightarrow[N \to \infty]{} \Phi\left(b
ight) - \Phi\left(a
ight) איי איי איי a \leq b ויהי a \leq b ויהי משפט דה־מואבר לפלס: יהיו
  \mathbb{P}\left(f\left(rac{S_{N}-Np}{n\sqrt{N}}
ight)
ight) \xrightarrow[N \to \infty]{} \int_{a}^{b} f\left(t
ight)\phi\left(t
ight)dt אזי \{S_{N}\sim\operatorname{Bin}\left(N,p
ight)\}_{N=1}^{\infty} ויהי a\leq b ויהי a\leq b חסומה היו
                                                                                                         \|f\|=\max_{x\in\mathbb{R}}|f\left(x
ight)| חסומה אזי f\in C\left(\mathbb{R}
ight) הגדרה: תהא
                                                                                                      למה: תהא Z\sim 2Ber \left(rac{1}{2}
ight)-1 יהי X מ"מ ויהי f\in C^{3}\left(\mathbb{R}
ight) אזי
                                                                                \begin{split} & \cdot \left| \mathbb{E}\left[ f\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right) \right] - \mathbb{E}\left[ f\left(\frac{Z}{\sqrt{N}}\right) \right] \right| \leq \frac{1}{6N^{\frac{3}{2}}} \left\| f^{(3)} \right\| \left( 1 + \mathbb{E}\left[ |X - \mathbb{E}\left[ X \right] |^3 \right] \right) \\ & \cdot \psi\left( x \right) = \begin{cases} 1 + x - \frac{2\sin(2\pi x)}{3\pi} + \frac{\sin(4\pi x)}{12\pi} & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \leq -1 \end{cases} \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{split}
                                                                                                                                                       .(סענה: \psi) (\psi \in C^3(\mathbb{R})) סענה:
                                                                                                I_{a,b,arepsilon}\left(x
ight)=\psi\left(rac{b-x}{arepsilon}
ight)\psi\left(rac{x-a}{arepsilon}
ight) אזי a\leq b ויהיו arepsilon>0 הגדרה: יהי
                                                                                           . תסומה) ויהיו (I_{a,b,arepsilon}) \wedge \left(I_{a,b,arepsilon} \in C^3\left(\mathbb{R}
ight)
ight) איי איי a \leq b ויהיו arepsilon > 0
                                                                                     .\left\|I_{a,b,\varepsilon}^{(3)}\right\|\leq\frac{B}{\varepsilon^3}מתקיים \varepsilon>0ולכל לכה לכל עבורו לכל עבורו B>0
                                      \mathbb{1}_{[a+arepsilon,b-arepsilon]} \leq I_{a+arepsilon,b-arepsilon,arepsilon} \leq \mathbb{1}_{[a,b]} \leq I_{a,b,arepsilon} \leq \mathbb{1}_{[a-arepsilon,b+arepsilon]} אזי 0<arepsilon < arepsilon < rac{b-a}{2} ויהי a\leq b ויהי a\leq b
                      S מרחב מצבים: קבוצה
                                                                                    \forall x \in S. \sum_{y \in S} \mathcal{P}\left(x,y
ight) = 1 המקיימת \mathcal{P}: S^2 	o [0,1] מטריצת מצבים:
                                            עבורם \mathcal P ומטריצת מרקוב הומוגנית מרקוב מצבים סופי: מ"מ מצבים מצבים בזמן ובעלת מרחב מצבים שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן ובעלת מרחב מצבים סופי
                                                                                                            \mathbb{P}(X_0 = s_0 \dots X_n = s_n) = \mu_{X_0}(s_0) \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}(s_i, s_{i+1})
                                 \mathbb{P}\left(X_{n+1}=s_{n+1}\mid X_n=s_n\dots X_0=s_0
ight)=\mathcal{P}\left(s_n,s_{n+1}
ight) שרשרת מרקוב אזי \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                          (\mu_X)_i = \mathbb{P}\left(X=i-1
ight) נתייחס אל התפלגות כאל וקטור אירה: נתייחס אל התפלגות באל וקטור ו
                                                                                                          \mu_{X_k} = \mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^k משפט: תהא שרשרת ארשרת \{X_i\}_{i=1}^\infty שרשרת משפט
                                                                      \mathbb{.P}\left(X_n=y\mid X_k=x
ight)=\mathcal{P}^{n-k}\left(x,y
ight) איזי שרשרת שרשרת \left\{X_i
ight\}_{i=1}^\infty שרשרת מרקוב אזי
                                                                                               \pi\cdot\mathcal{P}=\pi המקיימת S על \pi התפלגות התפלגות סטציונרית/עמידה: התפלגות
                                                                          v\cdot A=lpha v המקיים v\in M_{1,n}\left(\mathbb{F}
ight) אזי A\in M_{n}\left(\mathbb{F}
ight) המקיים מאלי: תהא
                                                              .(טענה: תהא \pi) שרשרת מרקוב אזי (\mu_{X_0}\mathcal{P}^n	o\pi) שרשרת מרקוב אזי שרשרת \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                                      \pi שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות שרשרת \{X_i\}_{i=1}^\infty שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות ש
                                                                                                   x \to y אזי \exists n \in \mathbb{N}_+.\mathcal{P}^n\left(x,y\right) > 0 אזי x,y \in S אזי יהיו
                                                                                                          \forall x,y \in S. x 
ightarrow y מטריצת מעברים אי פריקה: שרשרת עבורה
                                                \forall x \in S.\pi\left(x\right) > 0 מטריצת מעברים אי פריקה ותהא \pi התפלגות סטציונרית אזי \mathcal{P}
                                                                   \pi משפט: תהא {\mathcal P} מטריצת מעברים אי פריקה אזי קיימת התפלגות סטציונרית יחידה
rac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^k \xrightarrow[n	o\infty]{}\pi אזי \pi אזי \pi מטריצת מעברים בעלת התפלגות סטציונרית יחידה אוי \pi
                                                                                        f כאל וקטור עמודה כך טרנספורמציה f כאל טרנספורמציה נתייחס אל טרנספורמציה הערה:
                                    משפט: תהא f טרנספורמציה אזי שרשרת שרשרת מרקוב בעלת התפלגות סטציונרית יחידה \pi ותהא f טרנספורמציה אזי .\textbf{E}\Big[rac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(X_k\right)\Big] \int_{n \to \infty} \pi \ r \cdot f מחזור: יהי f אזי f אזי f .\text{gcd} \left(\left\{n \in \mathbb{N}_+ \right| \mathcal{P}^n(x,x) > 0\right)} אזי (f
```

 $.\widehat{X}=rac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma}$ אזי $X\in\ell^2$ יהי אזי \widehat{X} מתוקנן. יהי $X\in\ell^2$ אזי אזי \widehat{X} מתוקנן.

1 מצב חסר מחזור: $x \in S$ אשר מחזורו אשר מצב

. ארשרת חסרת מחזור: שרשרת $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת חסרת מחזור: שרשרת שרשרת מחזור: שרשרת

xממן החזרה: יהי $x \in S$ אזי $x \in S$ מ"מ הזמן הראשון בו חזרנו ל־x בהילוך שמתחיל ב־

 $\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^n \xrightarrow[n o\infty]{} \pi$ אזי אזי מרקוב: תהא שרשרת אי פריקה וחסרת אי פריקה תהארגודי לשרשראות מרקוב: תהא $\{X_i\}_{i=1}^\infty$

 $\mathbb{E}\left[T_x
ight]=rac{1}{\pi(x)}$ אאי π איי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה אי פריקה בעלת משפט:

x אזי הראשונה אל ב־x עד בהילוך שמתחיל בהילוך מספר הפעמים שנגיע מספר הפעמים שנגיע מספר אזי $x,y\in S$ מספר הפעמים שנגיע

 $\mathbb{E}\left[T_{x,y}
ight] = rac{\pi(y)}{\pi(x)}$ איי π איי חידה π איי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית היחידה איי פריקה בעלת התפלגות התפלגות היחידה π