פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי $A\times A\to A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית על A אזי $a*b=*\left(a,b\right)$.

חבורה: תהא G קבוצה אזי $*:G\times G\to G$ עבורה קיים $e\in G$ עבורו

- אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in G$ מתקיים $a*\left(b*c\right)=\left(a*b\right)*c$.
- איבר יחידה: לכל $a\in G$ מתקיים $a*e=e*a=a$.
- איבר הופכי: לכל $a\in G$ קיים $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $S\left(X\right)=\left\{ f:X\to X\mid f\text{ הפיכה}\right\}$.

חבורת התמורות: תהא X קבוצה אזי $\left(S\left(X\right),\circ\right)$.

טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_{n}=S\left(\left[n\right]\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|S_{n}\right|=n!$.

חבורת המטריצות: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.

החבורות החיבוריות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},+\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ אזי $A^{*}=A^{\times}=A\backslash\left\{ 0\right\}$.

החבורות הכפליות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Q}^{*},\mathbb{R}^{*},\mathbb{C}^{*}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},\cdot\right)$.

החבורה הטריוואלית: יהי x אזי $\left(\left\{ x\right\},\mathrm{Id}\right)$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sim_{n}\subseteq\mathbb{Z}^{2}$ המוגדרת $\left(x\sim_{n}y\right)\Longleftrightarrow\left(n|\left(x-y\right)\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_{n}=\mathbb{Z}_{n}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $+:C_{n}\times C_{n}\to C_{n}$ המוגדרת $\left[x\right]_{\sim_{n}}+\left[y\right]_{\sim_{n}}=\left[x+y\right]_{\sim_{n}}$.

חבורת שאריות החלוקה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|C_{n}\right|=n$.

חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה לכל $g,h\in G$ מתקיים $g*h=h*g$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge3}$ אזי $\left(S_{n},\circ\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$ אבלית.

חבורה סופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\in\mathbb{N}$.

חבורה אינסופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\ge\aleph_{0}$.

סדר של חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה סופית אזי $\mathrm{ord}\left(G\right)=\left|G\right|$.

סדר של חבורה: תהא G חבורה אינסופית אזי $\mathrm{ord}\left(G\right)=\infty$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $o\left(G\right)=\mathrm{ord}\left(G\right)$.

תת־חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי $\left(H,*\restriction_{H\times H}\right)$ עבורה

- סגירות לכפל: לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b\in H$.
- סגירות להופכי: לכל $a\in H$ מתקיים $a^{-1}\in H$.
- איבר יחידה: יהי e איבר היחידה של G אזי $e\in H$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ עבורה $\left(H,*\restriction_{H\times H}\right)$ תת־חבורה אזי $H\le G$.

למה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\in\mathcal{P}\left(G\right)\backslash\left\{ \varnothing\right\}$ אזי $(H\le G)\Longleftrightarrow($לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b^{-1}\in H)$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהיינה $A,B\subseteq G$ אזי $A*B=\left\{ a*b\mid\left(a\in A\right)\wedge\left(b\in B\right)\right\}$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה תהא $H\subseteq G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\left\{ g\right\}*H$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(n\mathbb{Z},+\right)\le\left(\mathbb{Z},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\left(\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)\le\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $R_{n}=\left\{ z\in\mathbb{C}\mid z^{n}=1\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(R_{n},\cdot\right)\le\left(\mathbb{C}^{*},\cdot\right)$.

טענה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $G\le G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $\{e\} \le G$.

איבר פיתול: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $g \in G$ עבורו קיים $n \in \mathbb{N}_+$ המקיים $g^n = e$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $T(G) = \{g \in G \mid \text{איבר פיתול } g\}$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אבלית אזי $T(G) \le G$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי קיים ויחיד $e \in G$ עבורו $a*e = e*a = a$ לכל $a \in G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי קיים ויחיד $b \in G$ עבורו $a*b = e = b*a$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $a \in G$ ויהי $b \in G$ איבר הופכי ל־a אזי $a^{-1} = b$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהיו $a,b \in G$ אזי $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי $(a^{-1})^{-1} = a$.

מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c \in G$ עבורם $a*b = a*c$ אזי $b = c$.

מסקנה כלל צמצום מימין: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c \in G$ עבורם $b*a = c*a$ אזי $b = c$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $g \in G$ אזי $g^0 = e$.

הגדרה: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ אזי $g^n = g * g^{n-1}$.

סימון: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = (g^n)^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = (g^{-1})^n$.

חבורת המכפלה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות נגדיר $(g,h)\cdot(g',h') = (g*g', h\otimes h')$ לכל $g,g' \in G$ ולכל $h,h' \in H$ אזי $(G \times H, \cdot)$.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי חבורת המכפלה הינה חבורה.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי (חבורת המכפלה אבלית)$\Longleftrightarrow$(H,G אבליות).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K \le G$ אזי ($H*K \le G$)$\Longleftrightarrow$($HK = KH$).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K \le G$ אזי ($H \cup K \le G$)$\Longleftrightarrow$($H \cap K \in \{H,K\}$).

הגדרה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y) = \{\pi \in S(X) \mid \forall y \in Y.\pi(y) = y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y) \le S(X)$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $\{H_i\}_{I\in I} \subseteq \mathcal{P}(G)$ באשר $H_i \le G$ לכל $i \in I$ אזי $\bigcap_{i\in I} H_i \le G$.

הגדרה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\mathcal{F}(X) = \{H \le G \mid X \subseteq H\}$.

החבורה שנוצרת על ידי תת־קבוצה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \bigcap_{H\in\mathcal{F}(X)} H$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle \le G$.

טענה מינימליות החבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $X \subseteq G$ ותהא $H \le G$ עבורה $X \subseteq H$ אזי $\langle X \rangle \subseteq H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \;\middle|\; (k \in \mathbb{N}) \wedge (x \in X^k) \wedge \left(s \in \{\pm 1\}^k\right)\right\}$.

קבוצת יוצרים של חבורה: תהא G חבורה אזי $X \subseteq G$ עבורה $\langle X \rangle = G$.

חבורה נוצרת סופית (נ״ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

חבורה ציקלית: חבורה G עבורה קיים $g \in G$ המקיים $\langle g \rangle = G$.

למה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{n+m} = g^n * g^m$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $(g^n)^m = g^{n\cdot m}$.

למה: תהא G חבורה אזי (G ציקלית)$\Longleftrightarrow$(קיים $g \in G$ עבורו $G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$).

מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.

סדר של איבר: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) = \text{ord}(\langle g \rangle)$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) = \min\{n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n = e\}$.

הערה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g)$ לא קיים אזי $\text{ord}(g) = \infty$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ באשר $\text{ord}(g) < \infty$ אזי $(\text{ord}(g) | n) \Longleftrightarrow (g^n = e)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $i \in \mathbb{Z}_n$ אזי ($\langle i \rangle = \mathbb{Z}_n$)$\Longleftrightarrow$($i,n$ זרים).

טענה: תהא G חבורה ציקלית ותהא $H \le G$ אזי H ציקלית.

טענה: $(\mathbb{Q},+)$ אינה נ״ס.

קוסט ימני: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $H * g$.

קוסט שמאלי: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $g * H$.

נציג של קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי Hg קוסט ימני אזי g.

נציג של קוסט שמאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי אזי g.

מסקנה: תהא G חבורה אבלית תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $Hg = gH$.

מסקנה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H) \Longleftrightarrow (gH = H)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H) \Longleftrightarrow (Hg = H)$

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $G/H = \{gH \mid g \in G\}$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $H \backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי G/H חלוקה של G.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי $\left(g_2^{-1} g_1 \in H\right) \Longleftrightarrow (g_1 H = g_2 H)$.

הקוסט הטריוואלית: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי eH.

אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $[G : H] = |G/H|$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $[G : H] = |H \backslash G|$.

טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H \le G$ אזי $\operatorname{ord}(G) = \operatorname{ord}(H) \cdot [G : H]$.

משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא $H \le G$ אזי $\operatorname{ord}(H) | \operatorname{ord}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $\operatorname{ord}(g) | \operatorname{ord}(G)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ותהא $K \le H$ אזי $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\operatorname{ord}(G) = p$ אזי לכל $g \in G \backslash \{e\}$ מתקיים $G = \langle g \rangle$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\operatorname{ord}(G) = p$ אזי G ציקלית.

מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(n, p) = 1$ אזי $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

למה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \le G$ חבורות סופיות אזי $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p > q$ ותהא G חבורה באשר $|G| = pq$ אזי לכל $H, K \le G$ באשר $\operatorname{ord}(H) = p$ וכן $\operatorname{ord}(K) = p$ מתקיים $K = H$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 3}$ אזי $\left(S_n/\text{Stab}(1)\right) \cap \left(\text{Stab}(1) \backslash S_n\right) = \{\text{Stab}(1)\}$.

קוסט כפול: תהא G חבורה תהיינה $H, K \le G$ ויהי $g \in G$ אזי HgK.

טענה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \le G$ אזי $\{HgK \mid g \in G\}$ חלוקה של G.

הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי $\varphi : G \to H$ המקיימת

- שימור איבר יחידה: $\varphi(e_G) = e_H$.
- שימור כפל: לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
- שימור הופכי: לכל $g \in G$ מתקיים $\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1}$.

טענה: תהיינה G, H חבורות ותהא $\varphi : G \to H$ אזי (φ הומומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi\left(a \cdot b^{-1}\right) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1}$).

גרעין של הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי

- $\operatorname{Im}(\varphi) \le H$.
- $\ker(\varphi) \le G$.
- (φ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\ker(\varphi) = \{e_G\}$).

טענה: תהיינה G, H, K חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $\psi : H \to K$ הומומורפיזם אזי $\psi \circ \varphi$ הומומורפיזם.

טענה: תהיינה G, H חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $g \in G$ אזי $\operatorname{ord}(\varphi(g)) | \operatorname{ord}(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם.

טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא G חבורה אזי $\varphi : G \to \{e\}$ המוגדרת $\varphi(g) = e$ לכל $g \in G$ הינה הומומורפיזם.

טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $\text{Id} : H \to G$ הינו הומומורפיזם.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $\det : \text{GL}(V) \to \mathbb{F}^*$ הינו הומומורפיזם.

מטריצת תמורה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \to \text{GL}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(\rho(\sigma))_{i,j} = \begin{cases} 1 & j = \sigma(i) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ לכל $i, j \in [n]$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ תהא $\sigma\in S_n$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\rho(\sigma)\cdot v=\begin{pmatrix}v_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ v_{\sigma(n)}\end{pmatrix}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\rho:S_n\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\det(\rho(\sigma))\in\{\pm1\}$.

סימן של תמורה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathrm{sign}:S_n\to\{\pm1\}$ המוגדרת $\mathrm{sign}=\det\circ\rho$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי sign הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}(\sigma)=\frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}(\sigma)=(-1)^{\left|\left\{(i,j)\in[n]^2\mid(i<j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))\right\}\right|}$.

חבורת התמורות הזוגיות: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n=\ker(\mathrm{sign})$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n\le S_n$.

איזומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם הפיך $\varphi:G\to H$.

סימון: תהיינה G,H חבורות איזומורפיות אזי $G\cong H$.

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם אזי φ^{-1} איזומורפיזם.

למה: תהיינה G,H,K חבורות יהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם ויהי $\psi:H\to K$ איזומורפיזם אזי $\psi\circ\varphi$ איזומורפיזם.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה של חבורות אזי $\cong$ יחס שקילות על $\mathcal{A}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong R_n$.

טענה: תהיינה G,H חבורות תהא $S\subseteq G$ באשר $\langle S\rangle=G$ ויהיו $\varphi,\psi:G\to H$ הומומורפיזמים באשר $\varphi_{\restriction_S}=\psi_{\restriction_S}$ אזי $\varphi=\psi$.

מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם חח"ע $\varphi:G\to H$.

אפימורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם על $\varphi:G\to H$.

אוטומורפיזם: תהא G חבורה אזי איזומורפיזם $\varphi:G\to G$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Aut}(G)=\{\varphi:G\to G\mid \text{אוטומורפיזם } \varphi\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$ חבורה.

חבורת קליין: $K=C_2\times C_2$.

טענה: חבורת קליין הינה אבלית.

טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.

טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־C_4.

פונקציית הצמדה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $c_g:G\to G$ המוגדרת $c_g(x)=gxg^{-1}$ לכל $x\in G$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי c_g אוטומורפיזם.

אוטומורפיזם פנימי: תהא G חבורה אזי אוטומורפיזם $\varphi:G\to G$ עבורו קיים $g\in G$ המקיים $\varphi=c_g$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Inn}(G)=\{c_g\mid g\in G\}$.

תת־חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $H\le G$ עבורה לכל $g\in G$ מתקיים $c_g(H)=H$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ נורמלית אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ התב"ש

- $H\trianglelefteq G$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gHg^{-1}=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gH=Hg$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg\subseteq H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $H\subseteq g^{-1}Hg$.
- $G/H={}_H\backslash G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ באשר $[G:H]=2$ אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Inn}(G)\trianglelefteq\mathrm{Aut}(G)$.

תת־חבורה אופיינית: תהא G חבורה אזי $K\le G$ עבורה לכל $\varphi\in\mathrm{Aut}(G)$ מתקיים $\varphi(K)=K$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $K\le G$ אופיינית אזי $K\text{ char }G$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $K\text{ char }G$ אזי $K\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \trianglelefteq G$ ותהא $K \operatorname{char} H$ אזי $K \trianglelefteq G$.

מרכז של חבורה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G.gh = hg\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) \trianglelefteq G$.

חבורת הייזנברג: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right) \middle| a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathbb{F})) \cong (\mathbb{F}, +)$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_n \trianglelefteq S_n$.

חבורה פשוטה: חבורה G עבורה לכל $H \trianglelefteq G$ מתקיים $H \in \{\{e\}, G\}$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי C_p פשוטה.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ פשוטה.

הגדרה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ נגדיר $* : {}^{G}\!/\!_{N} \times {}^{G}\!/\!_{N} \to {}^{G}\!/\!_{N}$ כך $(gN) * (hN) = (g * h) N$.

חבורת המנה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $({}^{G}\!/\!_{N}, *)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי חבורת המנה הינה חבורה.

העתקת המנה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $q : G \to {}^{G}\!/\!_{N}$ המוגדרת $q(g) = gN$.

טענה: תהא G חבורה תהא $N \trianglelefteq G$ ותהא q העתקת המנה אזי

- q הינה הומומורפיזם.
- $\ker(q) = N$.
- q על.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $(H \trianglelefteq G) \Longleftrightarrow$(קיים אוטומורפיזם $\varphi : G \to G$ עבורו $H = \ker(\varphi)$).

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$.

משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי ${}^{G}\!/\!_{\ker(\varphi)} \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.

טענה: תהא G חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $G \cong \mathbb{Z}$.
- קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $G \cong \mathbb{Z}_n$.

טענה: תהא G חבורה אזי $|{}^{G}\!/\!_{\mathcal{Z}(G)}| \notin \mathbb{P}$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $H, K \trianglelefteq G$ באשר $HK = G$ וכן $H \cap K = \{e\}$ אזי $G \cong H \times K$.

מסקנה משפט השאריות הסיני: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ זרים אזי $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית תהא $H \leq G$ מאינדקס p ותהא $N \trianglelefteq G$ מאינדקס p באשר $N \neq H$ אזי $G = HN$ וכן $p^2 | \mathrm{ord}(G)$.

חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ הומומורפיזם נגדיר $(h, k) \cdot (h', k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')$ לכל $h, h' \in H$ ולכל $k, k' \in K$ אזי $(H \times K, \cdot)$.

סימון: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה $H \rtimes_\varphi K$.

טענה: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ אזי $H \rtimes_\varphi K$ הינה חבורה.

טענה: תהיינה H, K חבורות נגדיר $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = \mathrm{Id}_H$ לכל $k \in K$ אזי $H \rtimes_\varphi K \cong H \times K$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}) = \{f : \mathbb{F} \to \mathbb{F} \mid \exists a \in \mathbb{F}^\times (\exists b \in \mathbb{F} (\forall x \in \mathbb{F} (f(x) = ax + b)))\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $(\mathrm{Aff}(\mathbb{F}), \circ)$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה נגדיר $\varphi : \mathbb{F}^\times \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F})$ כך $\varphi(a)(b) = ab$ לכל $a \in \mathbb{F}^\times$ ולכל $b \in \mathbb{F}$ אזי $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F} \rtimes_\varphi \mathbb{F}^\times$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל אזי $\mathrm{Iso}(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid (\text{איזומטריה } \varphi) \wedge (\varphi(P) = P)\}$.

החבורה הדיהדרלית: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל בעל n קודקודים אזי $D_n = \mathrm{Iso}(P)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $(D_n, \circ)$ חבורה.

סימון: תהא X קבוצה ויהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ פרידיקטים על X אזי $\langle X \mid \varphi_1 \ldots \varphi_n \rangle = \{x \in \langle X \rangle \mid \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(x)\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $D_n \cong \langle r, s \mid s^2 = e, r^n = e, srs = r^{-1} \rangle$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי

- אם $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\{H \leq \langle r \rangle\} \cup \{D_n, \langle sr, r^2 \rangle, \langle s, r^2 \rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n.

- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\{D_n\}\cup\{H\le\langle r\rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n.

טענה: $\mathcal{H}(\mathbb{F}_2)\cong D_4$.

טענה: תהא G חבורה יהי $K\le G$ יהי $H\trianglelefteq G$ באשר $HK=G$ וכן $H\cap K=\{e\}$ ונגדיר $\varphi:K\to\text{Aut}(H)$ כך $\varphi(k)=c_k$ לכל $k\in K$ אזי $G\cong H\rtimes_{\varphi}K$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ ונגדיר $\varphi:C_2\to\text{Aut}(C_n)$ כך $\varphi(k)=c_k$ לכל $k\in K$ אזי $D_n\cong C_n\rtimes_{\varphi}C_2$.

טענה: $K\trianglelefteq A_4$.

סדרה נורמלית: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $G_0\ldots G_n\le G$ עבורן $G_{i+1}\trianglelefteq G_i$ לכל $i\in[n-1]$.

חבורה פתירה: חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0\ldots G_n\le G$ המקיימות

- $G_n=G$ וכן $G_0=\{e\}$.
- $G_{i-1}\trianglelefteq G_i$ לכל $i\in[n]$.
- G_i/G_{i-1} אבלית לכל $i\in[n]$.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי G פתירה.

טענה: תהא G חבורה פשוטה באשר G אינה אבלית אזי G אינה פתירה.

משפט: יהי $n\in[4]$ אזי S_n פתירה.

חבורה נילפוטנטית: חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0\ldots G_n\le G$ המקיימות

- $G_n=G$ וכן $G_0=\{e\}$.
- $G_{i-1}\trianglelefteq G$ לכל $i\in[n]$.
- $G_i/G_{i-1}\le\mathcal{Z}(G/G_{i-1})$ לכל $i\in[n]$.

טענה: תהא G חבורה נילפוטנטית אזי G פתירה.

משפט האיזומורפיזם השני: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי $H/(H\cap N)\cong(HN)/N$.

טענה: תהא G חבורה ותהיינה $N,K\trianglelefteq G$ באשר $K\le N$ אזי $N/K\trianglelefteq G/N$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה $N,K\trianglelefteq G$ באשר $K\le N$ אזי $G/N\cong(G/K)/(N/K)$.

משפט ההתאמה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי קיימת $\Phi:\{H\le G\mid N\le H\}\to\{H\mid H\le G/N\}$ חח"ע ועל המקיימת

- לכל $K\trianglelefteq G$ המקיימת $K\le N$ מתקיים $\Phi(K)\trianglelefteq G/N$.
- משמרת מנות: לכל $K\trianglelefteq G$ המקיימת $K\le N$ מתקיים $G/K\cong\Phi(G)/\Phi(K)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי (N נורמלית מקסימלית)$\Longleftrightarrow$(G/N פשוטה).

פעולה שמאלית של חבורה על קבוצה: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי פונקציה $f:G\times X\to X$ המקיימת

- לכל $x\in X$ מתקיים $f(e,x)=x$.
- לכל $g,h\in G$ ולכל $x\in X$ מתקיים $f(g\cdot h,x)=f(g,f(h,x))$.

הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.

סימון: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $f:G\times X\to X$ פעולה על G אזי $f(g,x)=g.x$.

סימון: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $G\curvearrowright X=\{f:G\times X\to X\mid \text{פעולה } f\}$.

הפעולה השמאלית: תהא G חבורה נגדיר $f\in G\curvearrowright G$ כך $f(g,x)=gx$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.

הפעולה הימנית: תהא G חבורה נגדיר $f\in G\curvearrowright G$ כך $f(g,x)=xg^{-1}$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.

הערה: מכאן והלאה נאמר כי G פועלת על X ונסמן $g.x$ את הפעולה.

מסלולים: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ ויהי $x\in X$ אזי $\text{orb}_{\alpha}(x)=\{g.x\mid g\in G\}$.

סימון: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $o(x)=\text{orb}(x)$.

פעולה טרנזיטיבית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f\in G\curvearrowright X$ עבורה קיים $x\in X$ המקיים $o(x)=X$.

מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $\text{Stab}_G(x)=\{g\in G\mid g.x=x\}$.

אוסף נקודות השבת: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $g\in G$ אזי $\text{Fix}_X(g)=\{x\in X\mid g.x=x\}$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $\text{Stab}_G(x)\le G$.

פעולה חופשית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f\in G\curvearrowright X$ עבורה לכל $x\in X$ מתקיים $\text{Stab}_G(x)=\{e\}$.

למה: תהא G חבורה תהא X קבוצה תהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ ויהי $g\in G$ אזי $\alpha(g)\in S(X)$.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי $\varphi_\alpha : G \to S(X)$ המוגדרת $\varphi_\alpha(g)(x) = \alpha(g,x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי φ_α הומומורפיזם.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \to S(X)$ הומומורפיזם אזי $\alpha_\varphi : G \times X \to X$ המוגדרת $\alpha_\varphi(g,x) = \varphi(g)(x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \to S(X)$ הומומורפיזם אזי α_φ פעולה.

למה מסלול מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $|o(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$.

למה של ברנסייד: תהא X קבוצה ותהא G חבורה סופית הפועלת על X אזי $|\{o(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$.

הפעולה על הקוסטים השמאליים: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $\alpha \in G \curvearrowright {}^G/_H$ המוגדרת $\alpha(g, g'H) = gg'H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.

פעולות אקוואריאנטיות/שקולות: תהיינה X,Y קבוצות ותהא G חבורה אזי $(\alpha,\beta) \in (G \curvearrowright X) \times (G \curvearrowright Y)$ עבורן קיימת $F : X \to Y$ חח"ע ועל המקיימת $F(\alpha(g,x)) = \beta(g, F(x))$ לכל $g \in G$ ולכל $x \in X$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית ויהי $x \in X$ עבורו $o(x) = X$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים של ${}^G/_{\text{Stab}_G(x)}$ אקווריאנטית ל־α.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי קיימת $H \le G$ עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים אקוורינאטית ל־α.

טענה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $\{o(x) \mid x \in X\}$ חלוקה של X.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי לכל $x \in X$ מתקיים $o(x) = X$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ איזומטריות של $\mathbb{R}^3$ ותהא $p \in \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ אזי $\text{Poly}(p) = |\{\varphi_i(P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i(P \times \{0\})\}|$.

גוף אפלטוני: קבוצה קמורה לא זניחה $K \subseteq \mathbb{R}^3$ עבורה קיים מצולע משוכלל $P \subseteq \mathbb{R}^2$ וקיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן

- פאות איזומטריות: $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$.
- קודקוד משותף זהה כמות: לכל קודקודים $v_1, v_2 \in K$ מתקיים $\text{Poly}(v_1) = \text{Poly}(v_2)$.

מספר פאות של גוף אפלטוני: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $n \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו קיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ באשר $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}(P) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid (\text{איזומטריה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\right\}$.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}_+(P) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid (\text{איזומטריה משמרת אוריינטציה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\right\}$.

הגדרה סימון שלפלי: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני בעל $n \in \mathbb{N}$ פאות ויהי $v \in K$ קודקוד אזי $\{n, \text{Poly}(k)\}$.

הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.

דודקהדרון: גוף אפלטוני $K \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל סימון שלפלי $\{5,3\}$.

טענה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{Iso}_+(D) \cong A_5$.

מסקנה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{ord}(\text{Iso}_+(D)) = 60$.

משפט קיילי: תהא G חבורה אזי קיימת קבוצה X וקיימת $H \le S(X)$ עבורה $G \cong H$.

מסקנה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = \aleph_0$ אזי קיימת $H \le S(\mathbb{N})$ עבורה $G \cong H$.

משפט קושי: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p|\text{ord}(G)$ אזי קיים $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g) = p$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p|\text{ord}(G)$ אזי קיימת $H \le G$ ציקלית עבורה $\text{ord}(H) = p$.

טענה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = 6$ אזי $G \cong \mathbb{Z}_6$ או $G \cong S_3$.

פעולת ההצמדה: תהא G חבורה אזי $\alpha \in G \curvearrowright G$ המוגדרת $\alpha(g,h) = c_g(h)$.

סימון: תהא G חבורה ויהיו $h,g \in G$ אזי $h^g = g^{-1}hg$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $g,h,k \in G$ אזי $h^{g \cdot k} = (h^g)^k$.

מחלקת הצמידות: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = \left\{ghg^{-1} \mid g \in G\right\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = o(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי $\{[h] \mid h \in G\}$ חלוקה של G.

הממרכז של איבר: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \text{Stab}_G(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) \le G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)$ אופיינית.

טענה: תהא G חבורה אזי $G/\mathcal{Z}(G) \cong \text{Inn}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $|[g]| = [G : C_G(g)]$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו g,h,k באשר $k = ghg^{-1}$ אזי $|C_G(k)| = |C_G(h)|$.

משפט משוואת מחלקות הצמידות: תהא G חבורה סופית ותהא $C \subseteq G$ קבוצת נציגים של $\{[h] \mid h \in G\}$ אזי $\sum_{g\in C} \frac{1}{|C_G(g)|} = 1$.

טענה: תהא G חבורה סופית אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcup \{[g] \mid (g \in G) \wedge (|[g]| = 1)\}$.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ תהיינה $\alpha, \beta \in S_n$ באשר $\beta = \left(\begin{smallmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,\ell_1} \end{smallmatrix}\right) \circ \ldots \circ \left(\begin{smallmatrix} m_{b,1} & \dots & m_{b,\ell_b} \end{smallmatrix}\right)$ פירוק למעגלים זרים אזי $\alpha\beta\alpha^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha(m_{1,1}) & \dots & \alpha(m_{1,\ell_1}) \end{smallmatrix}\right) \circ \ldots \circ \left(\begin{smallmatrix} \alpha(m_{b,1}) & \dots & \alpha(m_{b,\ell_b}) \end{smallmatrix}\right)$.

למה: A_5 פשוטה.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ ותהא $H \trianglelefteq A_n$ עבורה קיים מעגל π בגודל שלוש המקיים $\pi \in H$ אזי $H = A_n$.

למה: A_6 פשוטה.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ אזי A_n פשוטה ואינה אבלית.

הישר הפרויקטיבי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ונגדיר $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{F}^2 \backslash \{0\} \mid \exists \lambda \in \mathbb{F}^\times (x = \lambda y)\right\}$ אזי $\mathbb{FP} = \left(\mathbb{F}^2\backslash\{0\}\right)/R$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\mathcal{Z}(\text{GL}_n(\mathbb{F})) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\}$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\text{PGL}_n(\mathbb{F}) = \text{GL}_n(\mathbb{F})/\mathcal{Z}(\text{GL}_n(\mathbb{F}))$.

חבורת־p: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה קיים $n \in \mathbb{N}$ המקיים $|G| = p^n$.

משפט: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורת־p אזי $\mathcal{Z}(G) \neq \{e\}$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה מסדר p^2 אזי G אבלית.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורת־p אזי G נילפוטנטית.

תת־חבורת־p סילו: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהיו $m,k \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(p,m) = 1$ ותהא G חבורה באשר $|G| = p^k \cdot m$ אזי $H \leq G$ באשר $|H| = p^k$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\Longleftrightarrow$(H חבורת־p וכן לכל $K \leq G$ חבורה־p מתקיים $|K| \leq |H|$).

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\Longleftrightarrow$(H חבורת־p וכן $p \nmid [G : H]$).

סימון: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $\text{Syl}_p(G) = \{H \leq G \mid G \text{ תת־חבורה־}p\text{ סילו של } H\}$.

סימון: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p = \left|\text{Syl}_p(G)\right|$.

למה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהיו $n,m \in \mathbb{N}_+$ באשר $\gcd(p,m) = 1$ אזי $p \nmid \binom{p^n \cdot m}{p^n}$.

משפט סילו הראשון: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי קיימת $H \leq G$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p \geq 1$.

המנרמל של חבורה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $N_G(H) = \left\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\right\}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $N_G(H) \leq G$ וכן $H \trianglelefteq N_G(H)$.

למה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהיו $m,k \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(p,m) = 1$ תהא G חבורה באשר $|G| = p^k \cdot m$ ותהיינה $H,K \leq G$ חבורות־p־סילו באשר $H \neq K$ אזי $H \nsubseteq N_G(K)$.

משפט סילו השני: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהיינה H,K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g \in G$ עבורו $gHg^{-1} = K$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא H תת־חבורה־p סילו של G אזי $(H \trianglelefteq G) \Longleftrightarrow (n_p = 1)$.

קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $Y \subseteq X$ עבורה לכל $g \in G$ ולכל $y \in Y$ מתקיים $g.y \in Y$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ותהא $Y \subseteq X$ אזי (Y הינה G־שמורה)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\mathcal{O} \subseteq X$ עבורה $Y = \bigcup_{x\in\mathcal{O}} o(x)$).

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ונגדיר $\alpha \in G \curvearrowright \text{Syl}_p(G)$ כך $\alpha(g,H) = gHg^{-1}$ אזי α טרנזיטיבית.

למה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה תהא $H \leq G$ תת־חבורת־p סילו ותהא $R \subseteq \text{Syl}_p(G)$ באשר $H \in R$ וכן R הינה H־שמורה אזי $|R| \equiv 1 \mod p$.

משפט סילו השלישי: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p \equiv 1 \mod p$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהיו $m,k \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(p,m) = 1$ ותהא G חבורה באשר $|G| = p^k \cdot m$ אזי $n_p | m$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p | \text{ord}(G)$.

מסקנה משפטי סילו: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי

1. קיימת $H \le G$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.
2. תהיינה H, K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g \in G$ עבורו $gHg^{-1} = K$.
3. $n_p \equiv 1 \mod p$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא $H \le S_p$ באשר $|H| = p$ אזי קיים p־מעגל $\pi \in S_p$ עבורו $H = \langle \pi \rangle$.

מסקנה משפט ווילסון: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p < q$ וכן $q \neq 1 \mod p$ ותהא G חבורה מסדר pq אזי G ציקלית.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ותהא G חבורה מסדר $2p$ אזי $G \cong C_{2p}$ או $G \cong D_p$.

טענה: תהא G חבורה סופית יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא $P \le G$ תת־חבורת־p אזי $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

סימון: תהא $(A, +)$ חבורה אזי $e_A = 0$ וכן $-x = x^{-1}$ לכל $x \in A$ וכן $g^n = ng$ לכל $n \in \mathbb{Z}$ ולכל $g \in A$.

חבורת המכפלה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות נגדיר $(g \cdot h)_i = g_i \cdot h_i$ לכל $g, h \in \prod_{i \in I} G_i$ ולכל $i \in I$ אזי $(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\prod_{i \in I} G_i$ חבורה.

חבורת הסכום הישר החיצוני: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i \in I} G_n = \left\{g \in \prod_{i \in I} G_i \mid |\{i \in I \mid g_i \neq e_{G_i}\}| \in \mathbb{N}\right\}$.

חבורת סכום ישר פנימי: חבורה G עבורה קיימת קבוצה I באשר $|I| \ge 2$ וקיימות $\{G_i \trianglelefteq G \mid i \in I\}$ באשר $G_i \cap \left(\bigoplus_{j \neq i} G_i\right) = \{e\}$ לכל $i \in I$ וכן $G = \bigoplus_{i \in I} G_n$.

הערה: נקרא לחבורת סכום ישר חיצוני חבורת סכום ישר.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i \in I} G_n \le \prod_{i \in I} G_i$.

חבורת פיתול: חבורה G עבורה $T(G) = G$.

חבורה חסרת פיתול: חבורה G עבורה לכל $T(G) = \{e\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית אזי $A/T(A)$ חסרת פיתול.

טענה: תהא G חבורה נ"ס ותהא $H \trianglelefteq G$ אזי G/H נ"ס.

מסקנה: תהיינה G, H, K חבורות באשר $G \cong H \times K$ אזי (G נ"ס)$\Longleftrightarrow$(H, K נ"ס).

חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה אזי $\bigoplus_X \mathbb{Z}$.

בסיס של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי X.

דרגה של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי $|X|$.

הערה: תהא X קבוצה אזי נשכן בצורה טבעית את X בתוך החבורה האבלית החופשית עם בסיס X כך $x \mapsto e_x$.

משפט התכונה האוניברסלית: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $f : X \to G$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi : \bigoplus_X \mathbb{Z} \to G$ עבורו $\varphi(x) = f(x)$ לכל $x \in X$.

משפט תכונת ההרמה: תהא F חבורה אבלית חופשית תהיינה A, B חבורות אבליות יהי $\varphi : A \to B$ אפימורפיזם ויהי $\psi : F \to B$ הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם $\hat{\psi} : F \to A$ עבורו $\varphi \circ \hat{\psi} = \psi$.

טענה תכונת הפיצול: תהא A חבורה אבלית ותהא $B \le A$ באשר A/B אבלית חופשית אזי $A \cong B \oplus A/B$.

משפט: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי A אבלית חופשית עם בסיס סופי.

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו $A \cong \mathbb{Z}^k$.

למה: תהא A חבורת פיתול אבלית נ"ס אזי A סופית.

משפט: תהא A אבלית נ"ס אזי

- $A \cong A/T(A) \oplus T(A)$.
- קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו $A/T(A) \cong \mathbb{Z}^k$.
- $T(A)$ סופית.

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס אזי קיימת חבורה אבלית סופית B וקיים $k \in \mathbb{N}$ עבורם $A \cong \mathbb{Z}^k \oplus B$.

סימון: תהא G חבורה ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $G_p = \{x \in G \mid p | \mathrm{ord}(x)\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $A_p \le A$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי A_p חבורת־p.

משפט גאוס: תהא A אבלית סופית אזי $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $n_p = 1$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי $A = \bigoplus \left\{ P \leq A \mid \exists p \in \mathbb{P} \left(P \in \text{Syl}_p(A) \right) \right\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא A חבורה אבלית מסדר p^n ויהיו $x_1 \ldots x_{n+1} \in A$ אזי קיימים $a_1 \ldots a_{n+1} \in \mathbb{N}$ עבורם $\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0$ וכן קיים $i \in [n+1]$ עבורו $a_i \not\equiv 0 \mod p$.

הומומורפיזם נשג: תהיינה G, H חבורות באשר $H \leq G$ אזי הומומורפיזם $\pi : G \to H$ עבורו $\pi_{\restriction_H} = \text{Id}_H$.

טענה: תהא G אבלית ותהא $A \leq G$ התב"ש

- קיימת $B \leq G$ עבורה $B \cap A = \{e\}$ וכן $A + B = G$.
- קיימת $B \leq G$ עבורה לכל $g \in G$ קיים ויחיד $a \in A$ וקיים ויחיד $b \in B$ עבורם $g = a + b$.
- קיים הומומורפיזם $\varphi : {}^{G}/_{A} \to G$ עבורו $\nu \circ \varphi = \text{Id}_{G/A}$ באשר $\nu : G \to {}^{G}/_{A}$ העתקת המנה.
- קיימת נשג $\pi : G \to A$.

טענה: תהא A אבלית אזי (A נ"ס)$\iff$(קיים $k \in \mathbb{N}$ וקיימת $G \leq \mathbb{Z}^k$ עבורם $A \cong {}^{\mathbb{Z}^k}/_{G}$).

חבורה p־אלמנטרית: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה לכל $g \in G$ מתקיים $\text{ord}(g) \in \{1, p\}$.

משפט המבנה לחבורות־p אבליות סופיות: יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא A אבלית סופית בעלת סדר p^n אזי קיים ויחיד $k \in \mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $n_1 \ldots n_k \in \mathbb{N}_+$ באשר $n_{i+1} \leq n_i$ לכל $i \in [k-1]$ וכן $\sum_{i=1}^k n_i = n$ עבורם $A \cong \bigoplus_{i=1}^k C_{p^{n_i}}$.

מסקנה משפט המיון לחבורות אבליות סופיות: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k \in \mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $m_1 \ldots m_k \in \mathbb{N}_+$ באשר $m_i | m_{i+1}$ לכל $i \in [k-1]$ עבורם $A \cong \bigoplus_{i=1}^k C_{m_i}$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k \in \mathbb{N}$ קיימים ויחידים $p_1 \ldots p_k \in \mathbb{P}$ באשר $p_i \leq p_{i+1}$ לכל $i \in [k-1]$ וקיימים ויחידים $t_1 \ldots t_k \in \mathbb{N}$ עבורם $A \cong \bigoplus_{i=1}^k C_{p_i^{t_i}}$.

מסקנה: תהיינה A, B, C אבליות סופיות באשר $A \oplus C \cong B \oplus C$ אזי $A \cong B$.

מסקנה: תהיינה A, B אבליות סופיות באשר $A \oplus A \cong B \oplus B$ אזי $A \cong B$.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A \leq \mathbb{F}^\times$ סופית אזי A ציקלית.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}_p^\times$ ציקלית.

טענה: תהא A אבלית סופית ותהא $B \leq A$ אזי קיימת $C \leq A$ עבורה $C \cong {}^{A}/_{B}$.

קרקטר: תהא A אבלית אזי הומומורפיזם $\chi : A \to \mathbb{S}^1$.

החבורה הדואלית: תהא A חבורה אבלית אזי $\hat{A} = \left\{ \chi : A \to \mathbb{S}^1 \mid \text{קרקטר } \chi \right\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n \cong \widehat{C_n}$.

טענה: תהיינה A, B אבליות סופיות אזי $\widehat{A \times B} = \hat{A} \times \hat{B}$.

מסקנה: תהא A אלבית סופית אזי $A \cong \hat{A}$.

סימון: יהי $p \in \mathbb{P} \backslash \{2\}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $U\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\right) = \left\{ a \in {}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}} \mid \exists b \in {}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}} \left(a \cdot b = 1 \right) \right\}$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P} \backslash \{2\}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $U\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\right)$ ציקלית.

משפט גאוס: תהא T חבורת פיתול אזי $T \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} T_p$.

סימון: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty) = \left\{ \frac{k}{p^n} \,\middle|\, (n \in \mathbb{N}) \wedge (k \in \{0, \ldots, p^n - 1\}) \right\}$.

חבורת פרופר: יהי $p \in \mathbb{P}$ נגדיר $\star : \mathbb{Z}(p^\infty) \times \mathbb{Z}(p^\infty) \to \mathbb{Z}(p^\infty)$ כך $a \star b = (a+b) - \lfloor a + b \rfloor$ אזי $(\mathbb{Z}(p^\infty), \star)$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty)$ חבורה.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty) \cong \left\{ 2^{\pi i \cdot \frac{k}{p^n}} \,\middle|\, (n \in \mathbb{N}) \wedge (k \in \{0, \ldots, p^n - 1\}) \right\}$.

טענה: ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}} \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}(p^\infty)$.

איבר מתחלק במספר: תהא G חבורה אבלית ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $a \in G$ עבורו קיים $b \in G$ המקיים $n \cdot b = a$.

חבורה חליקה: חבורה אבלית G עבורה לכל $a \in G$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי a מתחלק ב־n.

מסקנה: ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ חליקה.

טענה: תהיינה D, G חבורות אבליות באשר D חליקה ויהי $\varphi : D \to G$ הומומורפיזם אזי $\text{Im}(\varphi)$ חליקה.

טענה: תהא I קבוצה ותהא A_i חבורה אבלית לכל $i \in I$ אזי ($\bigoplus_{i \in I} A_i$ חליקה)$\iff$(A_i חליקה לכל $i \in I$).

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}(p^\infty)$ חליקה.

חבורה מצומצמת: חבורה G עבורה לכל $H \leq G$ מתקיים כי H אינה חליקה.

טענה: תהא A אבלית תהא $B \leq A$ אבלית ויהי $f : A \to B$ הומומורפיזם נשג אזי קיימת $C \leq A$ באשר $C \cap B = \{0\}$ וכן $A = C \oplus B$.

מסקנה: תהא A אבלית ותהא $D\le A$ חליקה אזי קיימת $K\le A$ באשר $D\cap K=\{0\}$ וכן $A=D\oplus K$.

טענה: תהא A אבלית אזי קיימת $D\le A$ חליקה וקיימת $R\le A$ מצומצמת באשר $D\cap R=\{0\}$ וכן $A=D\oplus R$.

טענה: תהא D אבלית חליקה אזי $T\left(D\right)$ חליקה.

מסקנה: תהא A אבלית אזי קיימת $R\le A$ מצומצמת קיימת $D\le A$ חליקה וקיימת $F\le D$ חסרת פיתול באשר $D\cap R=\{0\}$ וכן $A=D\oplus R$ וכן $T\left(D\right)\cap F=\{0\}$ וכן $D=T\left(D\right)\oplus F$ וכן $A=T\left(D\right)\oplus F\oplus R$.

משפט: תהא F חבורה אבלית חליקה חסרת פיתול אזי קיימת קבוצה I עבורה $F\cong\bigoplus_{I}\mathbb{Q}$.

משפט: תהא T חבורת פיתול חליקה אבלית אזי קיים $p\in\mathbb{P}$ וקיימת קבוצה I עבורה $T\cong\bigoplus_{I}\mathbb{Z}\left(p^{\infty}\right)$.

משפט ארדש־טוראן: תהא G חבורה סופית לא אבלית אזי $\mathbb{P}\left(xy=yx\right)\le\frac{5}{8}$.

טענה: קיימת חבורה סופית לא אבלית G עבורה $\mathbb{P}\left(xy=yx\right)=\frac{5}{8}$.

קומוטטור: תהא G חבורה ויהיו $g,h\in G$ אזי $[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהיו $g,h\in G$ אזי $\left(gh=hg\right)\Longleftrightarrow\left([g,h]=e\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $i,j,k\in[n]$ אזי $[I+e_{i,j},I+e_{j,k}]=e_{i,k}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $i,j,k,\ell\in[n]$ שונים אזי $[I+e_{i,j},I+e_{j,\ell}]=I$.

משפט הסיבובים של אוילר: תהא $A\in\mathrm{SO}\left(3\right)$ אזי קיים ויחיד $v\in\mathbb{S}_{+}^{2}$ עבורו $Av=v$.

למה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהיו $g,h\in G$ באשר $[g,h]=e$ אזי $g\cdot\mathrm{Fix}\left(h\right)=\mathrm{Fix}\left(h\right)$.

הגדרה: תהא G חבורה אזי $[G,G]=\{[g,h]\mid g,h\in G\}$.

חבורת הנגזרת: תהא G חבורה אזי $G'=\langle[G,G]\rangle$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ עבורה $\varphi\left(X\right)=X$ לכל $\varphi\in\mathrm{Aut}\left(G\right)$ אזי $\langle X\rangle\ \mathrm{char}\ G$.

למה: תהא G חבורה אזי $G'\ \mathrm{char}\ G$.

אבליזציה של חבורה: תהא G חבורה אזי $G^{ab}={}^{G}/_{G'}$.

חבורה מושלמת: חבורה G עבורה $G=G'$.

טענה: תהא G חבורה פשוטה לא אבלית אזי G מושלמת.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge5}$ אזי A_{n} מושלמת.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ מושלמת.

טענה אור: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge5}$ ויהי $x\in A_{n}$ אזי קיימות $\pi,\sigma\in S_{n}$ עבורן $x=[\pi,\sigma]$.

למה אבליזציה: תהא G חבורה אזי

- G^{ab} אבלית.
- לכל חבורה H ולכל אפימורפיזם $\varphi:G\to H$ מתקיים (H אבלית)$\Longleftrightarrow$($G'\le\ker\left(\varphi\right)$).
- לכל $N\trianglelefteq G$ מתקיים (${}^{N}/_{G}$ אבלית)$\Longleftrightarrow$($G'\le N$).

מסקנה: תהא G חבורה מושלמת תהא A חבורה אבלית ויהי $\varphi:G\to A$ הומומורפיזם אזי φ טריוואלי.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $S_{n}'=A_{n}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $S_{n}^{ab}\cong\{\pm1\}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)\right)'=\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)\right)^{ab}=\mathbb{R}^{\times}$.

סדרת הנגזרת: תהא G חבורה אזי $G^{(0)}=G$ וכן $G^{(n+1)}=\left(G^{(n)}\right)'$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא G חבורה עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $G^{(n)}=\{e\}$ אזי G פתירה.

משפט: תהא G חבורה אזי (G פתירה)$\Longleftrightarrow$(קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $G^{(n)}=\{e\}$).

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי D_{n} פתירה.

חבורה מטאבלית: חבורה G עבורה $G^{(2)}=\{e\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי (G מטאבלית)$\Longleftrightarrow$(קיימת $N\trianglelefteq G$ אבלית עבורה ${}^{G}/_{N}$ אבלית).

תת־חבורה מקסימלית: תהא G חבורה אזי $M\lneq G$ עבורה לכל $N\le G$ מתקיים $M\not\lneq N$.

תת־חבורת פרטיני: תהא G חבורה אזי $\Phi\left(G\right)=\bigcap_{\substack{M\le G\\ \text{מקסימלית } M}}M$.

איבר לא־יוצר: תהא G חבורה אזי $g\in G$ עבורו לכל $X\subseteq G$ המקיימת $\langle X\cup\{g\}\rangle=G$ מתקיים $\langle X\rangle=G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\Phi\left(G\right)=\{g\in G\mid \text{לא־יוצר } g\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\Phi\left(G\right)\ \mathrm{char}\ G$.

טענה: תהא G חבורה באשר $G/Z(G)$ ציקלית אזי G אבלית.

הרחבה של חבורה אבלית בחבורה אבלית: תהא K חבורה אבלית ותהא L חבורה אבלית אזי חבורה G עבורה קיים אפימורפיזם $\varphi : G \to K$ המקיים $L \cong \ker(\varphi)$.

הרחבה של חבורה בחבורה: תהא Q חבורה ותהא N חבורה אזי חבורה G עבורה $N \trianglelefteq G$ וכן $G/N \cong Q$.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי

- לכל $H \leq G$ מתקיים כי H סופית.
- לכל $N \trianglelefteq G$ מתקיים כי G/N סופית.
- לכל הרחבה H של G ב־N מתקיים כי H סופית.

משפט: תהא G חבורת פיתול אזי

- לכל $H \leq G$ מתקיים כי H פיתול.
- לכל $N \trianglelefteq G$ מתקיים כי G/N פיתול.
- לכל הרחבה H של G ב־N מתקיים כי H פיתול.

משפט: תהא G חבורה פתירה אזי

- לכל $H \leq G$ מתקיים כי H פתירה.
- לכל $N \trianglelefteq G$ מתקיים כי G/N פתירה.
- לכל הרחבה H של G ב־N מתקיים כי H פתירה.