

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי לא קיימת $\text{Vol}_n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n([0, 1]^n) = 1$.

- תהייה $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Vol}_n(\biguplus_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \text{Vol}_n(A_i)$.

- תהא $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n(\varphi(A)) = \text{Vol}_n(A)$.

קבוצות חופפות בחלקים: $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורן קיים $k \in \mathbb{N}$ וקיימות $X_1 \dots X_k, Y_1 \dots Y_k \subseteq \mathbb{R}^n$ וקיימות $\varphi_1 \dots \varphi_k$ איזומטריות

המקיימות $X = \biguplus_{i=1}^k X_i$ וכן $Y = \biguplus_{i=1}^k Y_i$ וכן $Y_j = \varphi_j(X_j)$. $\forall j \in [k]$.

סימון: תהייה $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ חופפות בחלקים אזי $X \equiv Y$.

משפט פרדוקס בנד-טרסקי: יהי $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ ותהייה $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\text{int}(X) \neq \emptyset$ וכן $\text{int}(Y) \neq \emptyset$ אזי $X \equiv Y$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ אזי לא קיימת $\text{Vol}_n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n([0, 1]^n) = 1$.

- תהייה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n(A \uplus B) = \text{Vol}_n(A) + \text{Vol}_n(B)$.

- תהא $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n(\varphi(A)) = \text{Vol}_n(A)$.

משפט בנד: יהי $n \in \{1, 2\}$ אזי קיימת $\text{Vol}_n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n([0, 1]^n) = 1$.

- תהייה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n(A \uplus B) = \text{Vol}_n(A) + \text{Vol}_n(B)$.

- תהא $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n(\varphi(A)) = \text{Vol}_n(A)$.

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X \in \mathcal{A}$.

- $\forall E \in \mathcal{A}. E^c \in \mathcal{A}$.

- לכל $E \subseteq \mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{A}$.

טענה: תהא \mathcal{A} אלגברה ותהייה $A, B \in \mathcal{A}$ אזי $A \cap B \in \mathcal{A}$.

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X \notin \mathcal{I}$.

- $\forall A \in \mathcal{I}. \forall B \subseteq A. B \in \mathcal{I}$.

- לכל $E \subseteq \mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{A}$.

σ -אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X \in \mathcal{A}$.

- $\forall E \in \mathcal{A}. E^c \in \mathcal{A}$.

- לכל $E \subseteq \mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{A}$.

מסקנה: תהא \mathcal{A} σ -אלגברה אזי \mathcal{A} אלגברה.

σ -אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X \notin \mathcal{I}$.

- $\forall A \in \mathcal{I}. \forall B \subseteq A. B \in \mathcal{I}$.

- לכל $E \subseteq \mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{A}$.

טענה: תהייה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I} \sigma$ -אלגבראות אזי $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \sigma$ -אלגברה.

σ -אלגברה נוצרת: תהא X קבוצה תהא $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ ותהייה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כל σ -אלגבראות מעל X המכילות את A אזי

$$\sigma(A) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$$

מסקנה: תהא $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ אזי $\sigma(A)$ הינה ה- σ -אלגברה הקטנה ביותר המכילה את A .

σ -אלגברה בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathcal{B}(X) = \sigma(\{\mathcal{O} \in \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{O} \text{ פתוח}\})$

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות

- σ -אלגברה בורל על X .

- $\sigma(\{B_r(a) \mid (r > 0) \wedge (a \in X)\})$.

- $\sigma(\{B_r(a) \mid (r \in \mathbb{Q}_+) \wedge (a \in X)\})$.

- תהא $Y \subseteq X$ צפופה אזי $\sigma(\{B_r(a) \mid (r \in \mathbb{Q}_+) \wedge (a \in Y)\})$.

קבוצה G_δ : $A \subseteq X$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^\infty$ פתוחות המקיימות $A = \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{O}_i$.

קבוצה $A \subseteq X : F_\delta$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^\infty$ סגורות המקיימות $A = \bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{O}_i$.

מסקנה: תהא A קבוצה G_δ ותהא B קבוצה F_δ אזי $A, B \in \mathcal{B}(X)$.

טענה: הקבוצות הבאות שוות

• σ -אלגברה בורל על \mathbb{R}^n .

• $\sigma(\{\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \mid a_1, b_1 \dots a_n, b_n \in \mathbb{R}\})$.

• $\sigma(\{\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \mid a_1, b_1 \dots a_n, b_n \in \mathbb{Q}\})$.

משפט: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא f רציפה ב־ x אזי $C(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ רציפה ב-} f\}$ אזי

• $C(f) \in G_\delta$.

• תהא $X \in G_\delta$ אזי קיימת f עבורה $C(f) = X$.

קבוצה דלילה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ המקיימת $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

קבוצה מקטגוריה ראשונה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימות $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ דלילות עבורן $A = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$.

קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ שאינה מקטגוריה ראשונה.

קבוצה שיורית: יהי X מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי A^c .

למה: יהי X מרחב מטרי אזי

• תהא $A \subseteq X$ דלילה ותהא $B \subseteq A$ אזי B דלילה.

• תהינה $A_1 \dots A_n \subseteq X$ דלילות אזי $\bigcup_{i=1}^n A_i$ דלילה.

• תהא $A \subseteq X$ דלילה אזי \overline{A} דלילה.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $\text{int}(A) = \emptyset$.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות σ -אידיאל.

מסקנה: $\mathbb{Q} \notin G_\delta$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי קיימת $F \subseteq \mathbb{R}$ מקטגוריה ראשונה וקיימת $N \subseteq \mathbb{R}$ זניחה עבורה $A = F \uplus N$.

משפט בנך: במרחב המטרי $C([0, 1])$ עם נורמת מקסימום הקבוצה $\{f \in C([0, 1]) \mid \exists x \in (0, 1). f \in \mathcal{D}(x)\}$ היא מקטגוריה

ראשונה.

הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבוצה בעלת תכונת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימת $G \subseteq X$ פתוחה וקיימת $Q \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה

$A = G \Delta Q$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ אזי (ל־ A יש את תכונת בייר) \iff קיימת $F \subseteq X$ סגורה וקיימת $P \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה

$A = F \Delta P$.

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ בעלת תכונת בייר אזי A^c בעלת תכונת בייר.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\{A \subseteq X \mid A \text{ בעלת תכונת בייר}\} = \sigma(\{A \subseteq X \mid (A \text{ פתוחה}) \vee (A \text{ מקטגוריה ראשונה})\})$.

משפט: תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\emptyset, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן

$\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \{A^c \mid A \in \mathcal{F}_\alpha\} \cup \{\bigcap_{n=1}^\infty A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_\alpha\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}_\alpha$ אזי $\mathcal{F}_\omega = \sigma(\mathcal{T})$ באשר

ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא X קבוצה עבורה $|X| = \aleph$ אזי $|\sigma(X)| = \aleph$.

מרחב מדיד: תהא X קבוצה ותהא $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ -אלגברה אזי (X, Σ) .

פונקציית מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ המקיימת

• $\mu(\emptyset) = 0$.

• σ -אדטיביות: תהינה $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu(\biguplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$.

מרחב מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא μ פונקציית מידה אזי (X, Σ, μ) .

מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) < \infty$.

מידה σ -סופית: פונקציית מידה μ עבורה קיימים $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ המקיימים $X = \bigcup_{i=1}^\infty B_i$ וכן $\forall i \in \mathbb{N}_+. \mu(B_i) < \infty$.

מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) = 1$.

טענה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי

• מונוטוניות: יהיו $A, B \in \Sigma$ באשר $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$.

- σ -תת־אדיטיביות: תהייה $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ אזי $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.
- רציפות מלעיל: תהייה $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+. A_i \subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
- רציפות מלרע: תהייה $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+. A_i \supseteq A_{i+1}$ וכן $\mu(A_1) < \infty$ אזי $\mu(\bigcap_{i=1}^\infty A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.
- מידת בורל:** תהא X קבוצה אזי מידה μ על $(X, \mathcal{B}(X))$.
- קבוצה ממידה אפס/זניחה:** $E \in \Sigma$ המקיימת $\mu(E) = 0$.
- סימון:** יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{N} = \{E \in \Sigma \mid \mu(E) = 0\}$.
- טענה:** תהייה Σ זניחות $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$ אזי $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ זניחה.
- כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.):** יהי ψ פרידיקט עבורו קיימת $E \in \mathcal{N}$ המקיים כי ψ מתקיים לכל $X \setminus E$ אזי נאמר כי " ψ נכונה μ כמעט בכל מקום".
- מידה שלמה:** פונקציית מידה μ עבורה לכל $E \in \mathcal{N}$ ולכל $F \subseteq E$ מתקיים $F \in \mathcal{N}$.
- השלמה של σ -אלגברה:** יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\bar{\Sigma} = \{E \cup F \mid (E \in \Sigma) \wedge (\exists N \in \mathcal{N}. F \subseteq N)\}$.
- טענה:** יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\bar{\Sigma}$ σ -אלגברה.
- טענה:** יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי קיימת ויחידה מידה שלמה $\bar{\nu}$ על $\bar{\Sigma}$ עבורה $\bar{\nu}|_\Sigma = \mu$.
- השלמה של מידה:** יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי המידה השלמה $\bar{\mu}$ על $\bar{\Sigma}$ עבורה $\bar{\mu}|_\Sigma = \mu$.
- טענה:** יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $(X, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$ מרחב מידה.
- מחלקת דינקין:** תהא $X \neq \emptyset$ אזי $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת
 - $X \in \mathcal{D}$.
 - יהיו $A, B \in \mathcal{D}$ באשר $A \subseteq B$ אזי $B \setminus A \in \mathcal{D}$.
 - תהייה $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{D}$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+. A_i \subseteq A_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{D}$.
- מערכת π :** תהא $X \neq \emptyset$ אזי $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A_1 \dots A_n \in \Pi$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \Pi$.
- טענה:** תהייה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ מחלקות דינקין אזי $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{D}_\alpha$ מחלקת דינקין.
- מחלקת דינקין נוצרת:** תהא $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ ותהייה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כל המחלקות דינקין מעל X המכילות את A אזי $d(A) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{D}_\alpha$.
- מסקנה:** תהא $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ אזי $d(A)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את A .
- למה:** תהא \mathcal{A} אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+. A_i \subseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$ σ -אלגברה.
- למה:** תהא \mathcal{A} אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+. A_i \supseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$ σ -אלגברה.
- משפט הלמה של דינקין:** תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ מערכת π אזי $\sigma(\Pi) = d(\Pi)$.
- מסקנה:** יהי (X, Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma = \sigma(\Pi)$ ותהייה μ, ν מידות סופיות על Σ עבורן
 - $\mu(X) = \nu(X)$ וכן $\mu|_\Pi = \nu|_\Pi$ אזי $\mu = \nu$.
- מסקנה:** יהי (X, Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma = \sigma(\Pi)$ ותהייה μ, ν מידות על Σ עבורן
 - $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = X$ וכן $\forall n \in \mathbb{N}_+. \mu(A_i) = \nu(A_i) < \infty$ וכן $\mu|_\Pi = \nu|_\Pi$ אזי $\mu = \nu$.
- חוג למחצה:** תהא X קבוצה אזי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת
 - $\emptyset \in \mathcal{E}$.
 - יהיו $A, B \in \mathcal{E}$ אזי $A \cap B \in \mathcal{E}$.
 - יהיו $A, B \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $C_1 \dots C_n \in \mathcal{E}$ עבורם $A \setminus B = \biguplus_{i=1}^n C_i$.
- טענה:** יהי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ חוג למחצה ויהיו $A_1 \dots A_n \in \mathcal{E}$ אזי
 - יהי $P \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $B_1 \dots B_m \in \mathcal{E}$ עבורם $P \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \biguplus_{i=1}^m B_i$.
 - קיימים $\{B_{i,j} \mid (i \in [n]) \wedge (j \in [m_i])\} \subseteq \mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^n A_i = \biguplus_{i=1}^n \biguplus_{j=1}^{m_i} B_{i,j}$.
 - קיימים $\{B_{i,j} \mid (i \in \mathbb{N}_+) \wedge (j \in [m_i])\} \subseteq \mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \biguplus_{i=1}^\infty \biguplus_{j=1}^{m_i} B_{i,j}$.
- מידה אלמנטרית:** יהי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ חוג למחצה אזי $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ המקיימת
 - $\mu(\emptyset) = 0$.
 - אדיטיביות: תהייה $A, B \in \mathcal{E}$ עבורם $A \uplus B \in \mathcal{E}$ אזי $\mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B)$.
 - מונוטוניות: תהייה $A, B \in \mathcal{E}$ באשר $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$.
 - σ -תת־אדיטיביות: תהייה $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{E}$ אזי $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.
- מידה חיצונית:** יהי $X \neq \emptyset$ אזי $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ המקיימת
 - $\mu^*(\emptyset) = 0$.

- מונוטוניות: תהינה $A, B \in \mathcal{P}(X)$ באשר $A \subseteq B$ אזי $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- σ -תת-אדטיביות: תהינה $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}(X)$ אזי $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.
- המידה החיצונית הנוצרת על ידי ρ :** יהי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ באשר $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ ותהא $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ עברה $\rho(\emptyset) = 0$ נגדיר $\rho^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^\infty \rho(E_i) \mid (\{E_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{E}) \wedge (A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty E_i) \}$ כך $\rho^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$.
- טענה:** יהי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ באשר $\emptyset, X \in \mathcal{E}$ ותהא $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ עברה $\rho(\emptyset) = 0$ אזי ρ^* מידה חיצונית.
- טענה:** יהי \mathcal{M} חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $m|_{\mathcal{M}} = m$.
- קבוצה λ :** תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ עברה $\lambda(\emptyset) = 0$ אזי $E \in \mathcal{A}$ עברה לכל $F \in \mathcal{A}$ מתקיים $\lambda(E \cap F) + \lambda(E^c \cap F) = \lambda(E \cap F) + \lambda(F \setminus E) = \lambda(F)$.
- סימון:** תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ עברה $\lambda(\emptyset) = 0$ אזי $\Gamma_0 = \{E \in \mathcal{A} \mid \lambda \text{ קבוצה } E\}$.
- טענה:** תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ עברה $\lambda(\emptyset) = 0$ אזי Γ_0 אלגברה.
- λ אדיטיבית על Γ_0 .
- תהינה $E_1 \dots E_n \in \Gamma_0$ ויהי $F \in \mathcal{A}$ אזי $\lambda(\biguplus_{i=1}^n (E_i \cap F)) = \sum_{i=1}^n \lambda(E_i \cap F)$.
- קבוצה מדידה ביחס למידה חיצונית:** תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $A \subseteq X$ עברה לכל $E \subseteq X$ מתקיים $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$.
- סימון:** תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $\Sigma_{\mu^*} = \{A \subseteq X \mid \mu^* \text{ מדידה } A\}$.
- טענה:** יהי \mathcal{M} חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mathcal{M} \subseteq \Sigma_{m^*}$.
- משפט הלמה של קרתאודורי:** תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי
 - Σ_{μ^*} σ -אלגברה.
 - $\mu^*|_{\Sigma_{\mu^*}}$ מידה שלמה.
- המשכת קרתאודורי:** יהי \mathcal{M} חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי m^* מידה מעל Σ_{m^*} .
- משפט:** יהי \mathcal{M} חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית ותהא (X, Σ', μ) המשכת קרתאודורי נוספת של (\mathcal{M}, m) אזי
 - לכל $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A) \leq m^*(A)$.
 - נניח כי $m^*(X) < \infty$ אזי לכל $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A) = m^*(A)$.
 - נניח כי m σ -סופית אזי לכל $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A) = m^*(A)$.
- מסקנה:** יהי \mathcal{M} חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ -סופית אזי המשכת קרתאודורי יחידה.
- משפט קרתאודורי:** יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא μ^* מידה חיצונית עברה לכל $A, B \subseteq X$ באשר $d(A, B) > 0$ מתקיים $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$.
- קבוצה רגולרית:** קבוצה $A \in \Sigma$ עברה $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) \mid (K \subseteq A) \wedge (K \text{ קומפקטית}) \}$.
- מידה רגולרית:** מידה μ עברה כל $A \in \Sigma$ הינה רגולרית.
- משפט אולם:** יהי X מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא μ מידת בורל עברה $\mu(X) < \infty$ אזי μ רגולרית.
- מידת הנפח האלמנטרית:** מידה אלמנטרית m מעל $\{ \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) \mid a_1, b_1 \dots a_n, b_n \in \mathbb{R} \}$ עברה $m(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.
- σ -אלגברה לבג:** $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid (A \text{ פתוחה}) \vee (A \text{ זניחה על פי מידת הנפח האלמנטרית})\})$.
- מסקנה:** $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.
- טענה:** תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \Sigma_{m^*}$.
- מידת לבג:** תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי המשכת קרתאודורי $m_d = m^*$.
- מסקנה:** תהא $\nu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ מידה אלמנטרית עברה $\nu(\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ אזי ν הינה מידת הנפח האלמנטרית.
- טענה:** תהא m_d מידת לבג אזי
 - תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ אזי $m_d(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_d(E \cap [-n, n]^d)$.
 - תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת פתוחה עברה $E \subseteq \mathcal{O}$ כזו ש $m_d(\mathcal{O} \setminus E) < \varepsilon$.
 - תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת סגורה עברה $F \subseteq E$ כזו ש $m_d(E \setminus F) < \varepsilon$.
 - תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ עברה $\mu(E) < \infty$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $F \subseteq E$ קומפקטית עברה $m_d(E \setminus F) < \varepsilon$.
 - תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $(E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)) \iff (E \text{ קיימות } A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ המקיימות } A \subseteq E \subseteq B \text{ וכן } m_d(A) = m_d(B))$.

טענה: תהא m_d מידת לבג אזי m_d רגולרית.

טענה: תהא m_d מידת לבג ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ התב"ש

$$\bullet A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$$

$$\bullet \text{קיימת } G \in G_\delta \text{ וקיימת } E \in \mathcal{N} \text{ עבורן } A = G \setminus E$$

$$\bullet \text{קיימת } F \in F_\sigma \text{ וקיימת } E \in \mathcal{N} \text{ עבורן } A = F \cup E$$

מסקנה: תהא m_d מידת לבג אזי $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^d), m_d)$ השלמה של $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$.

משפט: תהא m_d מידת לבג תהא $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה תהא $f: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ליפשיץ ותהא $A \subseteq \mathcal{O}$ אזי

$$\bullet \text{נניח כי } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \text{ אזי } f(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$$

$$\bullet \text{נניח כי } m_d(A) = 0 \text{ אזי } m_d(f(A)) = 0$$

משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ויהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $m_n(A) = m_n(A + x)$

מסקנה: תהא $\nu: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ מידה אינווריאנטית להזזות עבורה לכל $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ מתקיים $\nu(E) < \infty$ אזי קיים $\kappa \in [0, \infty)$

$$\text{עבורו } m_d = \kappa \nu$$

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^d)$ ותהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ אזי $m_d(T(E)) = |\det(T)| m_d(E)$

מסקנה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^d)$ אורתוגונלית ותהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ אזי $m_d(T(E)) = m_d(E)$

קבוצה פשוטה: $A \subseteq \mathbb{R}^d$ עבורה קיימים $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ המקיימים $A = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$

הגדרה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה ותהא m_d מידת לבג אזי

$$\bullet \text{מידת ז'ורדן פנימית: } m_{*,J}(E) = \sup \{m_d(A) \mid A \text{ פשוטה } \wedge (A \subseteq E)\}$$

$$\bullet \text{מידת ז'ורדן חיצונית: } m_J^*(E) = \inf \{m_d(A) \mid A \text{ פשוטה } \wedge (A \supseteq E)\}$$

קבוצה מדידה ז'ורדן: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה עבורה $m_{*,J}(E) = m_J^*(E)$ אזי $m_J(E) = m_J^*(E)$

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה אזי $m_{*,J}(E) = m_d(\text{int}(E))$ וכן $m_J^*(E) = m_d(\overline{E})$

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^d$ חסומה ותהא m_d מידת לבג אזי

$$\bullet E \text{ מדידה ז'ורדן.}$$

$$\bullet \text{לכל } \varepsilon > 0 \text{ אזי קיימות } A, B \text{ פשוטות עבורן } A \subseteq E \subseteq B \text{ וכן } m_d(B \setminus A) < \varepsilon$$

$$\bullet m_J^*(\partial E) = 0$$

$$\bullet m^*(\partial E) = 0$$

למה: תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ עבורה $m_d(E) > 1$ אזי קיימים $x, y \in E$ עבורם $(x - y) \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$

משפט מינקובסקי: יהי $V \subseteq \mathbb{R}^d$ גוף קמור סימטרי סביב 0 עבורו $m_d(V) > 2^d$ אזי $V \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}) \neq \emptyset$

למה: תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ עבורה $m_d(E) \in (0, \infty)$ ותהא $\theta \in (0, 1)$ אזי קיימת קוביה $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ עבורה $m_d(E \cap Q) > \theta \cdot m_d(Q)$

משפט שטיינהאוס: תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ עבורה $m_d(E) > 0$ אזי $0 \in \text{int}(E - E)$

מסקנה: תהא $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ עבורה $m_d(E) > 0$ אזי קיימים $x, y \in E$ עבורם $(x - y) \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

למה: תהא $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה אזי קיימים $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ כדורים וקיימת $E \in \mathcal{N}$ עבורם $\mathcal{O} = (\biguplus_{i=1}^\infty B_i) \cup E$

פונקציית התפלגות: $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ מונוטונית עולה ורציפה מימין.

טענה: תהא μ מידת בורל סופית על \mathbb{R} אזי $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $F(x) = \mu((-\infty, x])$ הינה פונקציית התפלגות.

קדם-מידה: תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ המקיימת

$$\bullet \mu(\emptyset) = 0$$

$$\bullet \sigma\text{-אדטיביות: תהינה } \{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma \text{ זרות בזוגות אזי } \mu(\biguplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$$

טענה: תהא \mathcal{A} אלגברה ותהא m קדם-מידה אזי $m|_{\mathcal{A}} = m^*$

טענה: תהא \mathcal{A} אלגברה ותהא m קדם-מידה אזי $\mathcal{A} \subseteq \Sigma_{m^*}$

המשכת קרטיאודורי: תהא \mathcal{A} אלגברה ותהא m קדם-מידה אזי m^* מידה מעל Σ_{m^*}

משפט: תהא \mathcal{A} אלגברה תהא m קדם-מידה ותהא (X, Σ', μ) המשכת קרטיאודורי נוספת של (\mathcal{A}, m) אזי

$$\bullet \text{לכל } A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*} \text{ מתקיים } \mu(A) \leq m^*(A)$$

$$\bullet \text{נניח כי } m^*(X) < \infty \text{ אזי לכל } A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*} \text{ מתקיים } \mu(A) = m^*(A)$$

$$\bullet \text{נניח כי } m \text{ סופית אזי לכל } A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*} \text{ מתקיים } \mu(A) = m^*(A)$$

מסקנה: תהא \mathcal{A} אלגברה ותהא m קדם-מידה σ -סופית אזי המשכת קרטיאודורי יחידה.

טענה: תהא $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$ מידה אלמנטרית מעל החוג למחצה $\{[a, b) \mid a \leq b\}$.

טענה: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu(\biguplus_{i=1}^n [a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i))$ קדם-מידה מעל האלגברה $\{ \biguplus_{i=1}^n [a_i, b_i] \mid \forall i \in [n]. a_i \leq b_i \}$.

משפט: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי קיימת ויחידה מידת בורל μ_F עבורה $\mu_F([a, b]) = F(b) - F(a)$.

טענה: תהיינה $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות התפלגות אזי $(\mu_F = \mu_G) \iff (\exists c \in \mathbb{R}. F - G = c)$.

מידה סופית מקומית: מידת בורל μ מעל \mathbb{R} עבורה $\mu([a, b]) < \infty$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

מסקנה: תהא μ מידת בורל סופית מקומית על \mathbb{R} אזי קיימת פונקציית התפלגות $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $\mu = \mu_F$.

מידת לבג-סטילטייס: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\overline{\mu_F}$.

סימון: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות נסמן $\mu_F = \overline{\mu_F}$.

מסקנה: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E \in \Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F(E) = \inf \{ \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) \mid E \subseteq \biguplus_{i=1}^n [a_i, b_i] \}$.

למה: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E \in \Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F(E) = \inf \{ \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i)) \mid E \subseteq \biguplus_{i=1}^n [a_i, b_i] \}$.

משפט: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E \in \Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F(E) = \sup \{ \mu_F(K) \mid (K \subseteq E) \wedge (K \text{ קומפקטית}) \}$.

מסקנה: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי μ_F רגולרית.

משפט: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E \subseteq \mathbb{R}$ התב"ש

$$E \in \Sigma_{\mu_F} \bullet$$

$$\bullet \text{ קיימת } E = G \setminus N \text{ עבור } N \in \mathcal{N} \text{ וכן } G \in \mathcal{G}_\delta$$

$$\bullet \text{ קיימת } E = F \uplus N \text{ עבור } N \in \mathcal{N} \text{ וכן } F \in \mathcal{F}_\sigma$$

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(E \in \Sigma_{\mu_F}) \iff (E \text{ קיימות } A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ המקיימות } A \subseteq E \subseteq B \text{ וכן } \mu_F(A) = \mu_F(B))$.

טענה העיקרון הראשון של ליטלוד: תהא $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית התפלגות תהא $E \in \Sigma_{\mu_F}$ עבורה $\mu_F(E) < \infty$ ותהא $\varepsilon > 0$ אזי

$$\text{קיימים } a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R} \text{ עבורם } \mu_F(E \Delta (\biguplus_{i=1}^n [a_i, b_i])) < \varepsilon$$

$$\text{קבוצת קנטור: } C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=0}^\infty \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right)$$

טענה: תהא m_d מידת לבג אזי $C \in \mathcal{N}$.

$$\text{טענה: } \mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^\infty \frac{x_i}{3^i} \mid x \in \mathbb{N}^{\{0,2\}} \right\}$$

קבוצה מושלמת: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ בלתי קשירה לחלוטין אשר לא מכילה נקודות מבודדות.

טענה:

$$\bullet |C| = \aleph$$

$$\bullet C \text{ קומפקטית.}$$

$$\bullet C \text{ מושלמת.}$$

קבוצת קנטור מוכללת: תהיינה $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}((0, 1))$ נגדיר $C_0 = [0, 1]$ וכן את C_n להיות C_{n-1} לאחר שהוצאנו ממרכזו של כל

$$\text{קטע } I \text{ ב-} C_{n-1} \text{ קטע באורך } \delta_n \cdot m_d(I) \text{ אזי } \bigcap_{i=1}^\infty C_i$$

טענה: קבוצת קנטור הינה קבוצת קנטור מוכללת באשר $\forall n \in \mathbb{N}_+. \delta_n = \frac{1}{3}$.

טענה: תהיינה $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}((0, 1))$ אזי (קבוצת קנטור המוכללת זניחה על פי מידת לבג) $(\sum_{i=1}^\infty \delta_i = \infty) \iff$

$$\text{הגדרה: נגדיר } \varphi^* : C \rightarrow [0, 1] \text{ כך שאם } x \in C \text{ בעל הצגה } x = \sum_{i=1}^\infty \frac{2a_i}{3^i} \text{ עבור } a_i \in \{0, 1\} \text{ אזי } \varphi^*(x) = \sum_{i=1}^\infty \frac{a_i}{3^i}$$

פונקציית קנטור: נגדיר $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ כך $\varphi(x) = \sup \{ \varphi^*(t) \mid (t \in C) \wedge (t \leq x) \}$.

טענה: תהא $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ פונקציית קנטור אזי

$$\bullet \varphi \text{ עולה.}$$

$$\bullet \varphi \text{ רציפה.}$$

$$\bullet \varphi(C) = [0, 1]$$

$$\bullet \text{ קיימת } E \subseteq C \text{ עבורה } \varphi(E) \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}).$$

קוטר קבוצה: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{diam}(A) = \sup \{ d(x, y) \mid x, y \in A \}$.

הגדרה: יהי (X, d) מרחב מטרי יהי $s \geq 0$ יהי $\delta > 0$ ויהי $E \subseteq X$ אזי

$$\mathcal{H}_{s,\delta}(E) = \inf \{ \sum_{i=1}^n \text{diam}(A_i)^s \mid (E \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i) \wedge (\text{diam}(A_i) < \delta) \}$$

מידת האוסדורף: יהי (X, d) מרחב מטרי יהי $s \geq 0$ ויהי $E \subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(E) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_{s,\delta}(E)$.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי יהי $s \geq 0$ ויהי $\delta > 0$ אזי

$$\bullet \text{ יהי } E \subseteq X \text{ אזי } f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty] \text{ המוגדרת } f(\delta) = \mathcal{H}_{s,\delta}(E) \text{ יורדת.}$$

$$\bullet \text{ יהי } E \subseteq X \text{ אזי } f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty] \text{ המוגדרת } f(s) = \mathcal{H}_{s,\delta}(E) \text{ יורדת.}$$

• יהי $E \subseteq X$ אזי $f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ המוגדרת $f(s) = \mathcal{H}_s(E)$ יורדת.

• $\mathcal{H}_s(\emptyset) = 0$.

• $\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s,\delta}$ מידות חיצוניות.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי יהי $s \geq 0$ ויהי $\delta > 0$ ותהי $A, B \subseteq X$ עבורן $d(A, B) > \delta$ אזי

$$\mathcal{H}_{s,\delta}(A \cup B) = \mathcal{H}_{s,\delta}(A) + \mathcal{H}_{s,\delta}(B)$$

מסקנה: יהי (X, d) מרחב מטרי יהי $s \geq 0$ ותהי $A, B \subseteq X$ עבורן $d(A, B) > 0$ אזי $\mathcal{H}_s(A \cup B) = \mathcal{H}_s(A) + \mathcal{H}_s(B)$

מסקנה: יהי $s \geq 0$ ותהא $E \in \mathcal{B}(X)$ אזי E מדידה \mathcal{H}_s .

מסקנה: תהא $f : X \rightarrow Y$ ליפשיץ L ותהא $E \subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E)) \leq L^s \cdot \mathcal{H}_s(E)$

מסקנה: תהא $f : X \rightarrow X$ איזומטריה ותהא $E \subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E)) = \mathcal{H}_s(E)$

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי יהי $s \geq 0$ ותהא $E \subseteq X$ אזי

• אם $\mathcal{H}_s(E) < \infty$ אזי לכל $t > s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E) = 0$

• אם $\mathcal{H}_s(E) > 0$ אזי לכל $t < s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E) = \infty$

מסקנה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $n < s$ אזי $\mathcal{H}_s(E) = 0$

מימד האוסדורף: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא $E \subseteq X$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf \{s \geq 0 \mid \mathcal{H}_s(E) = 0\}$

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) = n$

משפט: $\dim_{\mathcal{H}}(C) = \log_3(2)$

משפט: תהא m_d מידת לבג מעל \mathbb{R}^n אזי $\mathcal{H}_n = \frac{2^n}{m_d(\{|x| \leq 1\})} \cdot m_d$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $0 < \mathcal{H}_n([0, 1]^n) < \infty$

העתקה מדידה: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים אזי $T : X \rightarrow Y$ המקיימת $T^{-1}(\Sigma_Y) \subseteq \Sigma_X$

סימון: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים ותהא $T : X \rightarrow Y$ העתקה מדידה אזי $T : (X, \Sigma_X) \rightarrow (Y, \Sigma_Y)$

טענה: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y), (Z, \Sigma_Z)$ מרחבים מדידים תהא $T : X \rightarrow Y$ העתקה (Σ_X, Σ_Y) -מדידה ותהא $S : Y \rightarrow Z$ העתקה

(Σ_Y, Σ_Z) -מדידה אזי $S \circ T$ העתקה (Σ_X, Σ_Z) -מדידה.

טענה: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים תהא $T : X \rightarrow Y$ ותהא $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ עבורה $\Sigma_Y = \sigma(\mathcal{E})$ וכן $T^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \Sigma_X$

אזי T העתקה (Σ_X, Σ_Y) -מדידה.

טענה: יהיו X, Y מרחבים מטריים ותהא $T \in C(X, Y)$ אזי T העתקה $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$ -מדידה.

הגדרה: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty]$

הגדרה: נגדיר $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ והפעולות $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}$ אינן מוגדרות.

הגדרה: נגדיר $A(x) = \lim_{t \rightarrow x} \arctan(t)$ וכן $\rho(x, y) = |A(x) - A(y)|$

טענה: $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ מרחב מטרי שלם.

טענה: תהא $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ אזי $(A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \iff (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (קיימת $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ וכן $S \in \mathcal{P}(\{\pm\infty\})$ עבורן $A = B \cup S$).

טענה: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי

• העתקה $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $(\Sigma, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ -מדידה.

• העתקה $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -מדידה.

מסקנה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ התב"ש

• f מדידה בורל.

• לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{f \geq a\} \in \Sigma$

• לכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\{f \geq a\} \in \Sigma$

• לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{f > a\} \in \Sigma$

• לכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\{f > a\} \in \Sigma$

• לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{f \leq a\} \in \Sigma$

• לכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\{f \leq a\} \in \Sigma$

• לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{f < a\} \in \Sigma$

• לכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\{f < a\} \in \Sigma$

מסקנה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא $f \in C(X, \mathbb{R})$ רציפה אזי f מדידה בורל.

טענה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ אזי f מדידה (בורל) $\iff f|_{f^{-1}(\mathbb{R})} : f^{-1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה בורל וכן $f^{-1}(\pm\infty) \in \Sigma$.

סימון: תהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ אזי $f^+ = \max\{f, 0\}$ וכן $f^- = -\max\{-f, 0\}$.

משפט: תהיינה $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $f^+, f^-, \frac{1}{f}, f \cdot g, f + g, f^2$ מדידות.

מסקנה: תהיינה $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\} \in \Sigma$.

משפט: תהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות אזי $\sup\{f_n\}, \inf\{f_n\}, \limsup\{f_n\}, \liminf\{f_n\}$ מדידות.

מסקנה: תהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות ותהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ עבורה $f_n \rightarrow f$ אזי f מדידה.

מסקנה: תהיינה $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\min\{f, g\}, \max\{f, g\}, |f|$ מדידות.

פונקציה פשוטה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1 \dots E_n \in \Sigma$ וכן $a_1 \dots a_n \in \mathbb{R}$ עבורם

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$$

פונקציה סטנדרטית: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1 \dots E_n \in \Sigma$ עבורם $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$ וקיימים

$$a_1 \dots a_n \in \mathbb{R} \text{ עבורם } \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$$

הצגה סטנדרטית של פונקציה פשוטה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ פשוטה אזי $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i}$ באשר $\bigcup_{i=1}^n E_i = X$.

טענה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ פשוטה אזי קיימת הצגה סטנדרטית.

טענה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ אזי φ (פשוטה) $\iff \varphi$ מדידה וכן $\varphi(X)$ סופית.

משפט: תהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית אזי קיימות $\{\varphi_n\} \subseteq X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n \uparrow f$.

משפט: תהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית תהא $A \subseteq X$ עבורה f חסומה ותהיינה $\{\varphi_n\} \subseteq X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n \uparrow f$ אזי $\varphi_n \uparrow f$ על A .

מסקנה: תהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ מדידה אזי קיימות $\{\varphi_n\} \subseteq X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ פשוטות עבורן $\varphi_n \rightarrow f$ וכן $|\varphi_n| \uparrow |f|$.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ מדידה ותהא $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f = g$ כ.ב.מ. אזי g מדידה.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהיינה $\{f_n\} \subseteq X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ מדידות ותהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f_n \rightarrow f$ כ.ב.מ. אזי f מדידה.

טענה: תהא μ מידה ותהא $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ מדידה אזי קיימת $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה וכן $f = g$ כ.ב.מ.

מחלקת בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $B(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ מדידה בורל}\}$.

סימון: יהי X מרחב מטרי אזי $Baire_0(X) = C(X)$ וכן $Baire_i(X) = \{f_n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in Baire_i(X)\}$.

מחלקת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $Baire(X) = \bigcup_{i=0}^{\infty} Baire_i(X)$.

למה: תהא $\varphi \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ותהיינה $f, g \in Baire(X)$ אזי $\varphi(f, g) \in Baire(X)$.

למה: תהא $F \subseteq X$ סגורה אזי קיימות $\{f_n\} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ עבורן $f_n \rightarrow \mathbb{1}_F$.

מחלקה מונוטונית: יהי X מרחב מטרי אזי $R \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

• תהיינה $\{E_i\} \subseteq R$ עבורן $\forall i \in \mathbb{N}. E_i \subseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in R$

• תהיינה $\{E_i\} \subseteq R$ עבורן $\forall i \in \mathbb{N}. E_i \supseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in R$

מחלקה מונוטונית נוצרת: תהא $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כל המחלקות המונוטוניות מעל X המכילות את A אזי

$$\mathcal{M}(A) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{R}_\alpha$$

מסקנה: תהא $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\mathcal{M}(A)$ הינה המחלקה המונוטונית הקטנה ביותר המכילה את A .

למה: תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(A)$.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $Baire(X) = Borel(X)$.

משפט לוזין/טענה העיקרון השני של ליטלוד: תהא μ מידת בורל סופית על \mathbb{R} תהא $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon > 0$ אזי

קיימת $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R} \setminus K) < \varepsilon$ וכן $f \in C(K)$.

הגדרה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי f מדידה $L^0(X, \Sigma) = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ מדידה}\}$.

התכנסות במידה: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X, \Sigma)$ ותהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ עבורה לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$$

התכנסות כמעט בכל מקום: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X, \Sigma)$ ותהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ עבורה $\mu(X \setminus \{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)\}) = 0$

$$\text{אזי } f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$$

סימון: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X, \Sigma)$ ותהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ אזי $f_n \xrightarrow{a.s.} f$ וכן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

משפט לבג: תהא μ מידה סופית יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X, \Sigma)$ ותהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ אזי $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

למה בורל קנטלי: יהיו $\{E_n\} \subseteq \Sigma$ מדידות עבורן $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ אזי $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) = 0$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X, \Sigma)$ עבורן לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\mu(\{|f_n| > \varepsilon\}) < \infty$ אזי

$$\bullet f_n \xrightarrow{a.e.} 0$$

• תהא $\delta > 0$ אזי קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \delta$ וכן $f_n \Rightarrow 0$ על $X \setminus E$.

משפט ריס: תהינה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ אזי קיימת תת"ס עבורה $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X, \Sigma)$ ותהינה $f, g \in L^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu} f$ וכן $f_n \xrightarrow{\mu} g$ אזי $f = g$ כ.ב.מ..

משפט אגורוב/טענה העיקרון השלישי של ליטלוד: תהא μ מידה סופית ותהינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \varepsilon$ וכן $f_n \Rightarrow f$ על $X \setminus E$.

מסקנה לוזין: תהא μ מידה סופית ותהינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי קיימת $N \subseteq X$ עבורה $\mu(N) = 0$ וקיימות $\{A_k\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורן $X = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ וכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n \Rightarrow f$ על A_k .

למה פרשה: יהי (X, ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X ותהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ אזי קיימות $\{f_n\} \subseteq C(X)$ עבורן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

משפט לוזין: יהי (X, ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X ותהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ אזי קיימת $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R} \setminus K) < \varepsilon$ וכן $f \in C(K)$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה פשוטה $\varphi \in \mathcal{S}(\Sigma) = \{\varphi \in X \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ פונקציה פשוטה}\}$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{S}^+(\Sigma) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\Sigma) \mid \varphi \geq 0\}$.

למה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהינה $f = \sum_{i=1}^N x_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^M y_i \mathbb{1}_{B_i}$ אזי $\sum_{i=1}^N x_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^M y_i \mu(B_i)$.

אינטגרל: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהא $f = \sum_{i=1}^N x_i \mathbb{1}_{A_i}$ הצגה סטנדרטית אזי $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^N x_i \mu(A_i)$.

אינטגרל: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f d\mu = \int_X \mathbb{1}_E f d\mu$.

טענה: תהינה $f, g \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהא $A \in \Sigma$ ויהי $\lambda \geq 0$ אזי

$$\bullet \int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$$

$$\bullet \int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu \text{ הומוגניות חיובית:}$$

$$\bullet \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \text{ חיבוריות:}$$

$$\bullet \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu \text{ נניח כי } f \leq g \text{ אזי} \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu \text{ מונוטוניות:}$$

טענה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ אזי $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $\psi(E) = \int_E f d\mu$ הינה מידה מעל Σ .

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה $f \in L^0(X, \Sigma) = \{f \in X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ מדידה}\}$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $L_+^0(X, \Sigma) = \{f \in L^0(X, \Sigma) \mid f \geq 0\}$.

למה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ אזי $\int_X f d\mu = \sup \{\int_X \varphi d\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+(\Sigma)) \wedge (\varphi \leq f)\}$.

אינטגרל: תהא $f \in L_+^0(X, \Sigma)$ אזי $\int_X f d\mu = \sup \{\int_X \varphi d\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+(\Sigma)) \wedge (\varphi \leq f)\}$.

אינטגרל: תהא $f \in L_+^0(X, \Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f d\mu = \int_X \mathbb{1}_E f d\mu$.

טענה: תהינה $f, \{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ ותהא $g \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ באשר $g \leq f$ אזי $\int_X g d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$.

משפט התכנסות מונוטונית: תהינה $f, \{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ אזי $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$.

מסקנה: תהא $f \in L_+^0(X, \Sigma)$ ותהא $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{S}^+(\Sigma)$ עבורה $\varphi_n \uparrow f$ אזי $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu$.

טענה: תהינה $f, g \in L_+^0(X, \Sigma)$ ותהא $A \in \Sigma$ ויהי $\lambda \geq 0$ אזי

$$\bullet \int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A)$$

$$\bullet \int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu \text{ הומוגניות חיובית:}$$

$$\bullet \int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu \text{ חיבוריות:}$$

$$\bullet \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu \text{ נניח כי } f \leq g \text{ אזי} \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu \text{ מונוטוניות:}$$

מסקנה: תהא $\{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$.

טענה: תהא $f \in L_+^0(X, \Sigma)$ אזי $(\int_X f d\mu = 0) \iff (f = 0 \text{ כ.ב.מ.})$.

טענה התכנסות מונוטונית: תהינה $f, \{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ כ.ב.מ. אזי $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

משפט הלמה של פטו: תהא $\{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ אזי $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu$.

מסקנה: תהינה $f, \{f_n\} \subseteq L_+^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי $\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

אינטגרל: תהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ עבורה $\int_X f^\pm d\mu < \infty$ אזי $\int_X f^\pm d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $L^1(\mu) = \{f \in L^0(X, \Sigma) \mid \int_X f^\pm d\mu < \infty\}$.

טענה: תהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ התב"ש

$$\bullet f \in L^1(\mu)$$

- $f^\pm \in L^1(\mu)$

- $|f| \in L^1(\mu)$

- קיימת $g \in L^1(\mu)$ עבורה $|f| \leq g$

טענה: יהיו $f, g \in L^1(\mu)$ ויהי $\lambda \in \mathbb{R}$ אזי

- הומוגניות: מתקיים $\lambda f \in L^1(\mu)$ ובפרט $\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$

- חיבוריות: מתקיים $f + g \in L^1(\mu)$ ובפרט $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

- $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in L^1(\mu)$

- מונוטוניות: נניח כי $f \leq g$ אזי $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

- אי-שוויון המשולש: $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$

אינטגרל: תהא $f \in L^1(\mu)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f d\mu = \int_X \mathbb{1}_E f d\mu$

מידה עם צפיפות ביחס למידה: תהא $f \in L^0_+(X, \Sigma)$ אזי $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $\psi(E) = \int_E f d\mu$

סימון: תהא $f \in L^0_+(X, \Sigma)$ אזי מידה עם צפיפות f ביחס למידה μ הינה $f d\mu$

למה: תהא $f \in L^0_+(X, \Sigma)$ אזי $f d\mu$ הינה מידה מעל Σ

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי העתקה $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ -מדידה.

טענה: תהא $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ אזי $(f \text{ מדידה}) \iff (\text{Re}(f), \text{Im}(f) \text{ מדידות})$

אינטגרל: תהא $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ מדידה עבורה $\int_X \text{Re}(f) d\mu, \int_X \text{Im}(f) d\mu < \infty$ אזי $\int_X f d\mu = \int_X \text{Re}(f) d\mu + i \int_X \text{Im}(f) d\mu$

הערה: נשתמש בסימון $L^1(\mu)$ גם עבור פונקציות מרוכבות אינטגרליות.

טענה: תהא $f \in L^1(\mu)$ אזי $|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu$

טענה: תהא $f \in L^1(\mu)$ אזי $\{f \neq 0\}$ קבוצה σ -סופית.

טענה: תהא $f \in L^1(\mu)$ אזי לכל $E \in \Sigma$ מתקיים $\int_E f d\mu = 0 \iff f = 0$ כ.ב.מ.

מסקנה: תהיינה $f, g \in L^1(\mu)$ עבורן $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ אזי $\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$

הגדרה: תהיינה $f, g \in L^1(\mu)$ עבורן $\mu(\{f \neq g\}) = 0$ אזי $f \sim g$

הערה: מכאן והלאה נתייחס לפונקציות שקולות כזהות, כלומר $L^1(\mu) \equiv L^1(\mu)/\sim$

טענה: תהא μ מידה אזי $L^1(\mu) \equiv L^1(\bar{\mu})$

משפט ההתכנסות הנשלטת/לבג: תהא $\{f_n\} \subseteq L^1(\mu)$ עבורה $f_n \rightarrow f$ וכן קיימת $g \in L^1(\mu)$ עבורה $|f_n| \leq g$ אזי $f \in L^1(\mu)$ וכן

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

טענה: תהא $\{f_n\} \subseteq L^1(\mu)$ עבורה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ וכן קיימת $g \in L^1(\mu)$ עבורה $|f_n| \leq g$ אזי $f \in L^1(\mu)$ וכן

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

הערה: מהגדרת האינטגרל ניתן להפוך את כל המגבלות לכמעט בכל מקום.

מסקנה: תהא $\{f_n\} \subseteq L^1(\mu)$ עבורה $\sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n| d\mu < \infty$ אזי $\sum_{n=1}^\infty f_n$ מתכנסת כ.ב.מ..

מסקנה: תהא $\{f_n\} \subseteq L^1(\mu)$ עבורה $\sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n| d\mu < \infty$ אזי $\sum_{n=1}^\infty f_n \in L^1(\mu)$ וכן $\int_X (\sum_{n=1}^\infty f_n) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n d\mu$

משפט שפה: תהא $\{f_n\} \subseteq L^1(\mu)$ ותהא $f \in L^1(\mu)$ עבורן $f_m \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ אזי

$$(\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0) \iff (\int_X |f_n| d\mu \rightarrow \int_X |f| d\mu)$$

סימון: תהא $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית רימן אזי אינטגרל רימן שלה הינו $\int_a^b f dx$

משפט: תהא m_d מידת לבג ותהא $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרלית רימן אזי קיימת $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה עבורה $g \in L^1(\lambda)$ וכן

$$f = g \text{ כ.ב.מ.} \iff \int_a^b f dx = \int_{[a,b]} g dm_d$$

סימון: יהי $p \in [1, \infty)$ אזי $L^p(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid (f \in L^0(X, \Sigma)) \wedge (\int_X |f|^p d\mu < \infty)\}$

סימון: $L^\infty(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid (f \in L^0(X, \Sigma)) \wedge (\exists c > 0, \mu(\{|f| \geq c\}) = 0)\}$

הגדרה: נגדיר $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$

הגדרה: נגדיר $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\|f\|_\infty = \inf\{c > 0 \mid \mu(\{|f| \geq c\}) = 0\}$

טענה אי-שוויון הולדר: יהיו $p, q \in [1, \infty]$ עבורם $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ תהא $f \in L^p(\mu)$ ותהא $g \in L^q(\mu)$ אזי $fg \in L^1(\mu)$ וכן

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

מסקנה: יהיו $p, q \in [1, \infty)$ עבורם $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ תהא $f \in L^p(\mu)$ עבורה $\|f\|_p \neq 0$ ותהא $g \in L^q(\mu)$ עבורה $\|g\|_q \neq 0$ אזי

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \frac{\int_X |fg| d\mu}{\|f\|_p \|g\|_q} \iff \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = 1 \text{ כ.ב.מ.}$$

מסקנה: ρ_p מטריקה מעל $L^p(\mu)$

מסקנה: תהא $f \in L^1(\mu)$ ותהא $g \in L^\infty(\mu)$ אזי $(\int_X |fg| d\mu = \|f\|_1 \|g\|_\infty) \iff g|_{\{f \neq 0\}} = \|g\|_\infty$ כ.ב.מ.).

מסקנה אי־שיוויון קושי־שוורץ: תהיינה $f, g \in L^2(\mu)$ אזי $\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

מסקנה אי־שיוויון מינקובסקי: יהי $p \in [1, \infty]$ ותהיינה $f, g \in L^p(\mu)$ אזי $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ וכן $f + g \in L^p(\mu)$.

טענה אי־שיוויון צ'בישב: תהא $\varphi \in L^0_+(X, \Sigma)$ אזי לכל $t > 0$ מתקיים $\mu(\{x \in X \mid \varphi \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int_X \varphi d\mu$.

התכנסות L^p : תהא $\{f_n\} \subseteq L^p(\mu)$ ותהא $f \in L^p(\mu)$ עבורן $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$ אזי $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

סדרת קושי במרחב L^p : $\{f_n\} \subseteq L^p(\mu)$ עבורה לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n, m \geq N$ מתקיים $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$.

מסקנה: יהי $p \in [1, \infty)$ אזי $\mathcal{S}(\Sigma)$ צפופה במרחב $L^p(\mu)$.

למה: יהי $p \in [1, \infty)$ ותהא $\{f_n\} \subseteq L^p(\mu)$ חיוביות אזי $\|\sum_{n=1}^\infty f_n\|_p \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p$.

משפט ריס: יהי $p \in [1, \infty)$ ותהא $\{f_n\} \subseteq L^p(\mu)$ ותהא $f \in L^p(\mu)$ עבורה $f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ אזי $(\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p) \iff (f_n \xrightarrow{L^p} f)$.

משפט ריס-פיסצ'ר: יהי $p \in [1, \infty]$ אזי $L^p(\mu)$ מרחב שלם.

מסקנה: יהי $p \in [1, \infty)$ ותהא $\{f_n\} \subseteq L^p(\mu)$ ותהא $f \in L^p(\mu)$ עבורה $f_n \xrightarrow{L^p} f$ אזי קיימת תת־סדרה $f_{n_k} \xrightarrow{\mu-a.e.} f$.

טענה רציפות של אינטגרל: תהא $f \in L^1(\mu)$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $E \in \Sigma$ המקיימת $\mu(E) < \delta$ מתקיים

$$\int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

אינטגרליות במידה שווה: $\{f_n\} \subseteq L^1(\mu)$ עבורה לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $E \in \Sigma$ המקיימת $\mu(E) < \delta$ מתקיים

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E |f_n| d\mu < \varepsilon$$

משפט ויטלי: תהא $\{f_n\} \subseteq L^1(\mu)$ אזי קיימת $f \in L^1(\mu)$ עבורה $f_n \xrightarrow{L^1} f$ $\iff (\{f_n\} \text{ אינטגרליות במ"ש}) \wedge (\text{קיימת } f \in L^1(\mu))$

עבורה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ \wedge (לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $E \in \Sigma$ עבורה $\mu(E) < \infty$ וכן $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{X \setminus E} |f_n| d\mu < \varepsilon$).

מסקנה: יהי $p \in [1, \infty)$ ותהא $\{f_n\} \subseteq L^p(\mu)$ ותהא $f \in L^p(\mu)$ עבורה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ התב"ש

$$\bullet f_n \xrightarrow{L^p} f$$

$$\bullet \{ |f_n|^p \} \text{ אינטגרליות במ"ש וכן לכל } \varepsilon > 0 \text{ קיימת } E \in \Sigma \text{ עבורה } \mu(E) < \infty \text{ וכן } \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{X \setminus E} |f_n|^p d\mu < \varepsilon$$

$$\bullet \|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p < \infty$$

אלגברה למחצה: תהא X קבוצה אזי חוג למחצה $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורו $X \in \mathcal{E}$.

למה: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים אזי $\Sigma_X \times \Sigma_Y$ אלגברה למחצה על $X \times Y$.

σ -אלגברה מכפלה: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים אזי $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y = \sigma(\Sigma_X \times \Sigma_Y)$.

מרחב מכפלה: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים אזי $(X \times Y, \Sigma_X \otimes \Sigma_Y)$.

למה: תהא $A \subseteq \Sigma$ עבורה $\sigma(A) = \Sigma_X$ וכן קיימת $\{A_n\} \subseteq A$ עבורה $A_n \uparrow X$ ותהא $B \subseteq \Sigma$ עבורה $\sigma(B) = \Sigma_Y$ וכן קיימת

$$\{B_n\} \subseteq B \text{ עבורה } B_n \uparrow X \text{ אזי } \sigma(A \times B) = \Sigma_X \otimes \Sigma_Y$$

מסקנה: תהא $A \subseteq \Sigma$ עבורה $\sigma(A) = \Sigma_X$ וכן $X \in A$ ותהא $B \subseteq \Sigma$ עבורה $\sigma(B) = \Sigma_Y$ וכן $Y \in B$ אזי $\sigma(A \times B) = \Sigma_X \otimes \Sigma_Y$.

הגדרה: תהיינה X, Y קבוצות אזי

$$\bullet \text{ נגדיר } \pi_X : X \times Y \rightarrow X \text{ כך } \pi_X(x, y) = x$$

$$\bullet \text{ נגדיר } \pi_Y : X \times Y \rightarrow Y \text{ כך } \pi_Y(x, y) = y$$

σ -אלגברה נוצרת על ידי העתקה מדידה: תהא $T : (X, \Sigma_X) \rightarrow (Y, \Sigma_Y)$ העתקה מדידה אזי $\sigma(T) = \sigma(\{T^{-1}[A] \mid A \in \Sigma_Y\})$.

משפט: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים אזי $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y = \sigma(\pi_X, \pi_Y)$.

טענה: תהא $T : Z \rightarrow X \times Y$ אזי $(T \text{ מדידה}) \iff (\pi_X \circ T, \pi_Y \circ T \text{ מדידות})$.

טענה: תהא $T : (X \times Y, \Sigma_X \otimes \Sigma_Y) \rightarrow (Z, \Sigma_Z)$ העתקה מדידה ויהי $x \in X$ אזי $T(x, \cdot) : Y \rightarrow Z$ היא (Σ_Y, Σ_Z) -מדידה.

מסקנה: תהא $T : (X \times Y, \Sigma_X \otimes \Sigma_Y) \rightarrow (Z, \Sigma_Z)$ העתקה מדידה ויהי $y \in Y$ אזי $T(\cdot, y) : X \rightarrow Z$ היא (Σ_X, Σ_Z) -מדידה.

משפט: תהא $A \subseteq \Sigma$ מערכת π עבורה $\sigma(A) = \Sigma_X$ וכן קיימת $\{A_n\} \subseteq A$ עבורה $A_n \uparrow X$ וכן $\mu_X(A_n) < \infty$ ותהא $B \subseteq \Sigma$

מערכת π עבורה $\sigma(B) = \Sigma_Y$ וכן קיימת $\{B_n\} \subseteq B$ עבורה $B_n \uparrow X$ וכן $\mu_Y(B_n) < \infty$ אזי קיימת ויחידה ρ מידה על

$$(X \times Y, \Sigma_X \otimes \Sigma_Y) \text{ המקיימת } \mu_X(E) \mu_Y(F) = \rho(E \times F) \text{ לכל } E \in A \text{ וכן } F \in B$$

משפט: יהיו μ_X, μ_Y מידות σ -סופיות ותהא $\rho : \Sigma_X \times \Sigma_Y \rightarrow [0, \infty]$ המקיימת $\rho(E \times F) = \mu_X(E) \mu_Y(F)$ אזי ρ מידה

אלמנטרית.

מידת המכפלה: יהיו μ_X, μ_Y מידות σ -סופיות ותהא $\rho : \Sigma_X \times \Sigma_Y \rightarrow [0, \infty]$ המקיימת $\rho(E \times F) = \mu_X(E) \mu_Y(F)$ אזי המשכת

קרטאודורי של ρ .

סימון: יהיו μ_X, μ_Y מידות σ -סופיות אזי מידת המכפלה היא $\mu_X \times \mu_Y$.

חתכים: תהא $E \subseteq X \times Y$ אזי

• יהי $x \in X$ אזי $E_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$.

• יהי $y \in Y$ אזי $E_y = \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$.

סימון: תהא $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ וכן $f_x(y) = f(x, y)$ וכן $f_y(x) = f(x, y)$.

למה: יהיו $(X, \Sigma_X, \mu_X), (Y, \Sigma_Y, \mu_Y)$ מרחבי מידה σ -סופיים ותהא $E \in \Sigma_X \otimes \Sigma_Y$ אזי

• לכל $x \in X$ מתקיים $E_x \in \Sigma_Y$.

• לכל $y \in Y$ מתקיים $E_y \in \Sigma_X$.

• הפונקציה $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $f(x) = \mu_Y(E_x)$ היא Σ_X -מדידה.

• הפונקציה $f : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $f(y) = \mu_X(E_y)$ היא Σ_Y -מדידה.

הערה: כאשר לא ברור מהו המשתנה באינטגרל מסמנים כך $\int f(x, y) d\mu(x)$.

טענה: יהיו $(X, \Sigma_X, \mu_X), (Y, \Sigma_Y, \mu_Y)$ מרחבי מידה σ -סופיים ותהא $E \in \Sigma_X \otimes \Sigma_Y$ אזי

$$(\mu_X \times \mu_Y)(E) = \int_X \mu_Y(E_x) d\mu_X = \int_Y \mu_X(E_y) d\mu_Y$$

מסקנה: תהיינה μ_X, μ_Y, μ_Z מידות σ -סופיים אזי $\mu_X \times \mu_Y = \mu_Y \times \mu_X$ וכן $(\mu_X \times \mu_Y) \times \mu_Z = \mu_X \times (\mu_Y \times \mu_Z)$.

טענה: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

טענה: תהא m_d מידת לבג תהא $f \in L^1(m_d)$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימות A_i תיבות עבורן $\int_{\mathbb{R}^d} |f - \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}| dm_d < \varepsilon$.

מסקנה: תהא m_d מידת לבג תהא $f \in L^1(m_d)$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת A תיבה חסומה וכן $g \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ עברה $g|_{\mathbb{R}^d \setminus A} = 0$ וכן

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - g| dm_d < \varepsilon$$

משפט טונלי: יהיו $(X, \Sigma_X, \mu_X), (Y, \Sigma_Y, \mu_Y)$ מרחבי מידה σ -סופיים ותהא $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ פונקציה $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$ מדידה אזי

• לכל $x \in X$ הפונקציה $f_x(y)$ היא Σ_Y -מדידה.

• לכל $y \in Y$ הפונקציה $f_y(x)$ היא Σ_X -מדידה.

• הפונקציה $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y)$ היא Σ_X -מדידה.

• הפונקציה $\varphi : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi(y) = \int_X f(x, y) d\mu_X(x)$ היא Σ_Y -מדידה.

• מתקיים $\int_{X \times Y} f d(\mu_X \times \mu_Y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y) d\mu_X(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu_X(x) d\mu_Y(y)$.

מסקנה משפט פוביני: יהיו $(X, \Sigma_X, \mu_X), (Y, \Sigma_Y, \mu_Y)$ מרחבי מידה σ -סופיים ותהא $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ פונקציה $\Sigma_X \otimes \Sigma_Y$ מדידה

עברה $(\int_Y \int_X |f(x, y)| d\mu_X(x) d\mu_Y(y) < \infty) \vee (\int_X \int_Y |f(x, y)| d\mu_Y(y) d\mu_X(x) < \infty) \vee (\int_{X \times Y} |f| d(\mu_X \times \mu_Y) < \infty)$

אזי

• $\int_Y \int_X |f(x, y)| d\mu_X(x) d\mu_Y(y), \int_X \int_Y |f(x, y)| d\mu_Y(y) d\mu_X(x), \int_{X \times Y} |f| d(\mu_X \times \mu_Y) < \infty$

• $f \in L^1(\mu_X \times \mu_Y)$.

• $f_y(x)$ היא μ_Y -כ.ב.מ. שייכת ל- $L^1(\mu_X)$.

• $f_x(y)$ היא μ_X -כ.ב.מ. שייכת ל- $L^1(\mu_Y)$.

• הפונקציה $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y)$ מקיימת $\varphi \in L^1(\mu_X)$.

• הפונקציה $\varphi : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi(y) = \int_X f(x, y) d\mu_X(x)$ מקיימת $\varphi \in L^1(\mu_Y)$.

• מתקיים $\int_{X \times Y} f d(\mu_X \times \mu_Y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y) d\mu_X(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu_X(x) d\mu_Y(y)$.

טענה: יהיו $(X, \Sigma_X, \mu_X), (Y, \Sigma_Y, \mu_Y)$ מרחבי מידה שלמים σ -סופיים ותהא $(X \times Y, \Sigma, \rho)$ השלמה של

$(X \times Y, \Sigma_X \otimes \Sigma_Y, \mu_X \times \mu_Y)$ ותהא $f \in L^0(X \times Y, \Sigma)$ חיובית אזי

• $f_y(x)$ היא μ_Y -כ.ב.מ. מדידה (Σ_X, \mathbb{R}) .

• $f_x(y)$ היא μ_X -כ.ב.מ. מדידה (Σ_Y, \mathbb{R}) .

• הפונקציה $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y)$ היא מדידה.

• הפונקציה $\varphi : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi(y) = \int_X f(x, y) d\mu_X(x)$ היא מדידה.

• מתקיים $\int_{X \times Y} f d(\mu_X \times \mu_Y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y) d\mu_X(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu_X(x) d\mu_Y(y)$.

טענה: יהיו $(X, \Sigma_X, \mu_X), (Y, \Sigma_Y, \mu_Y)$ מרחבי מידה שלמים σ -סופיים ותהא $(X \times Y, \Sigma, \rho)$ השלמה של

$(X \times Y, \Sigma_X \otimes \Sigma_Y, \mu_X \times \mu_Y)$ ותהא $f \in L^1(\rho)$ אזי

• $f_y(x)$ היא μ_Y -כ.ב.מ. שייכת ל- $L^1(\mu_X)$.

• $f_x(y)$ היא μ_X -כ.ב.מ. שייכת ל- $L^1(\mu_Y)$.

• הפונקציה $\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y)$ מקיימת $\varphi \in L^1(\mu_X)$.

• הפונקציה $\varphi : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi(y) = \int_X f(x, y) d\mu_X(x)$ מקיימת $\varphi \in L^1(\mu_Y)$.

• מתקיים $\int_{X \times Y} f d(\mu_X \times \mu_Y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y(y) d\mu_X(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu_X(x) d\mu_Y(y)$

מידת התמונה של מידה תחת ההעתקה: תהא $T : (X, \Sigma_X) \rightarrow (Y, \Sigma_Y)$ ותהא μ_X מידה על (X, Σ_X) אזי $T_*\mu : \Sigma_Y \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $(T_*\mu)(F) = \mu(T^{-1}(F))$

טענה: תהא $T : (X, \Sigma_X) \rightarrow (Y, \Sigma_Y)$ ותהא μ_X מידה על (X, Σ_X) אזי $T_*\mu$ מידה על (Y, Σ_Y) .

למה: תהא $T : (X, \Sigma_X) \rightarrow (Y, \Sigma_Y)$ ותהא $f \in L^0_+(\Sigma_Y)$ אזי $f \circ T \in L^1(\mu_X)$ $\iff (f \circ T) \in L^1(\mu_X)$

משפט: תהא $T : (X, \Sigma_X) \rightarrow (Y, \Sigma_Y)$ ותהא $f \in L^0_+(\Sigma_Y) \cup L^1(T_*\mu_X)$ אזי $\int_Y f dT_*\mu_X = \int_X (f \circ T) d\mu_X$

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^d)$ הפיכה ותהא m_d מידת לבג אזי $T_*m_d = |\det(T)|^{-1} m_d$

מסקנה: תהא $A \in M_d(\mathbb{R})$ הפיכה תהא $b \in \mathbb{R}^d$ תהא m_d מידת לבג תהא $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ ותהא $U \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה אזי

$$\int_{AU+b} f dm_d = \int_U f(Ax+b) |\det(A)| dm_d(x)$$

פונקציית התפלגות של פונקציה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה σ -סופי ותהא $f \in L^0(\Sigma)$ אזי $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $\varphi(t) = \mu(f \geq t)$

משפט: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה σ -סופי תהא $f \in L^0_+(\Sigma)$ ותהא m מידת לבג אזי $\int_X f d\mu = \int_{(0, \infty)} \mu(f \geq t) dm(t)$

מסקנה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה σ -סופי תהא $f \in L^0_+(\Sigma)$ ותהא $\varphi \in C^1([0, \infty), [0, \infty))$ עולה עבורה $\varphi(0) = 0$ אזי

$$\int_X \varphi \circ f d\mu = (R) \int_0^\infty \varphi'(s) \mu(f \geq s) ds$$

קונבולוציה: תהינה $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ מדידות אזי $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy$

טענה: תהינה $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ מדידות ונגדיר $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\varphi(x, y) = f(x-y) g(y)$ אזי φ מדידה.

טענה: תהינה $f, g \in L^1(m_d)$ אזי $f * g \in L^1(m_d)$

טענה: תהינה $f, g \in L^1(m_d)$ אזי $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

טענה: תהינה $f, g, h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ מדידות אזי

$$f * g = g * f$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(f * g)(x+w) = f(x+w) * g(x) = f(x) * g(x+w) \text{ אזי } w \in \mathbb{R}^d$$

תומך: תהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ אזי $\text{supp}(f) = \{f \neq 0\}$

טענה: תהינה $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ מדידות אזי $\text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$

טענה: תהא $f \in L^1(m_d)$ ותהא $g \in L^\infty(m_d)$ אזי $f * g$ רציפה במ"ש.

טענה: תהא $f \in L^1(m_d)$ ותהא $g \in L^1(m_d) \cap L^\infty(m_d)$ אזי $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f * g)(x) = 0$

הגדרה: תהא $\varphi \in L^1(m_d)$ עבורה $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$ ויהי $\varepsilon > 0$ נגדיר $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$

הגדרה: תהא $\varphi \in L^1(m_d)$ עבורה $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1$ ויהי $\varepsilon > 0$ נגדיר $f_\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ כך $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon$

טענה: תהא $f \in L^1(m_d)$ אזי $f_\varepsilon \xrightarrow{L^1} f$ כאשר $\varepsilon \downarrow 0$

מידה מסומנת: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי $\nu : \Sigma \rightarrow [-\infty, \infty]$ המקיימת

$$\nu(\emptyset) = 0$$

$$\nu(\bigsqcup_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \nu(B_i) \text{ אזי } \{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma \text{ זרות בזוגות}$$

$$\nu(F) \neq -\infty \text{ מתקיים } F \in \Sigma \text{ לכל } \nu(E) = \infty$$

טענה: תהא ν מידה מסומנת ותהא $E_n \uparrow E$ אזי $\nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n)$

טענה: תהא ν מידה מסומנת ותהא $E_n \downarrow E$ עבורה $|\nu(E_1)| < \infty$ אזי $\nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n)$

קבוצה חיובית: תהא ν מידה מסומנת אזי $E \in \Sigma$ עבורה לכל $F \in \Sigma$ המקיימת $F \subseteq E$ מתקיים $\nu(F) \geq 0$

קבוצה שלילית: תהא ν מידה מסומנת אזי $E \in \Sigma$ עבורה לכל $F \in \Sigma$ המקיימת $F \subseteq E$ מתקיים $\nu(F) \leq 0$

קבוצה זניחה: תהא ν מידה מסומנת אזי $E \in \Sigma$ עבורה לכל $F \in \Sigma$ המקיימת $F \subseteq E$ מתקיים $\nu(F) = 0$

למה: תהא ν מידה מסומנת תהא $E \in \Sigma$ חיובית ותהא $F \subseteq E$ המקיימת $F \in \Sigma$ אזי F חיובית.

למה: תהא ν מידה מסומנת תהינה $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \Sigma$ חיוביות אזי $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$ חיובית.

למה: תהא ν מידה מסומנת תהינה $P_1, P_2 \in \Sigma$ חיוביות ותהינה $N_1, N_2 \in \Sigma$ שליליות עבורן $X = P_1 \uplus N_1 = P_2 \uplus N_2$ אזי

$$P_1 \Delta P_2, N_1 \Delta N_2 \text{ זניחות.}$$

משפט האן: תהא ν מידה מסומנת אזי קיימת $P \in \Sigma$ חיובית וכן $N \in \Sigma$ שלילית עבורן $X = P \uplus N$

מידות מסומנות סינגולריות: מידות מסומנות μ, ν על (X, Σ) עבורן קיימות $E, F \in \Sigma$ המקיימות $X = E \uplus F$ וכן E זניחה ביחס

ל- μ וכן F זניחה ביחס ל- ν .

סימון: תהינה μ, ν מידות מסומנות סינגולריות אזי $\mu \perp \nu$

משפט ז'ורדן: תהא ν מידה מסומנת אזי קיימות ויחידות מידות ν^+, ν^- עבורן $\nu = \nu^+ - \nu^-$ וכן $\nu^+ \perp \nu^-$.

החלק החיובי של מידה מסומנת: תהא ν מידה מסומנת אזי ν^+ .

החלק השלילי של מידה מסומנת: תהא ν מידה מסומנת אזי ν^- .

ההשתנות הכוללת של מידה מסומנת: תהא ν מידה מסומנת אזי $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$.

טענה: תהא ν מידה מסומנת אזי $|\nu|$ מידה.

מידה מסומנת רציפה בהחלט: תהא μ מידה אזי מידה מסומנת ν עבורה $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$.

סימון: תהא μ מידה ותהא ν מידה מסומנת רציפה בהחלט ביחס ל- μ אזי $\nu \ll \mu$.

משפט: תהא μ מידה ותהא ν מידה מסומנת אזי $(\nu \ll \mu) \iff (|\nu|(E) < \varepsilon) \implies (\mu(E) < \delta) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall E \in \Sigma. (\mu(E) < \delta) \implies (|\nu|(E) < \varepsilon))$.

למה: יהיו μ, ν מידות סופיות על (X, Σ) אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

$$\bullet \mu \perp \nu$$

$$\bullet \text{קיים } \varepsilon > 0 \text{ וקיים } E \in \Sigma \text{ המקיימת } \mu(E) > 0 \text{ וכן } E \text{ חיובית ביחס למידה } \nu - \varepsilon \mu.$$

משפט לבג'רדון-ניקודים: תהא ν מידה מסומנת σ -סופית תהא μ מידה σ -סופית אזי קיימות ויחידות מידות מסומנות σ -סופיות λ, ρ עבורן $\lambda \perp \mu$ וכן $\rho \ll \mu$ וכן $\nu = \lambda + \rho$.

מסקנה: תהא ν מידה מסומנת σ -סופית תהא μ מידה σ -סופית ותהינה λ, ρ מידות מסומנות σ -סופיות עבורן $\lambda \perp \mu$ וכן $\rho \ll \mu$ וכן $\nu = \lambda + \rho$ אזי קיימת $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית עבורה $d\rho = f d\mu$.

מסקנה: תהא ν מידה מסומנת σ -סופית תהא μ מידה σ -סופית ותהינה λ, ρ מידות מסומנות σ -סופיות עבורן $\lambda \perp \mu$ וכן $\rho \ll \mu$ וכן $\nu = \lambda + \rho$ ותהינה $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרביליות עבורן $d\rho = f d\mu$ וכן $d\rho = g d\mu$ אזי $f = g$ כ.ב.מ..

נגזרת רדון-ניקודים: תהא ν מידה מסומנת σ -סופית ותהא μ מידה מסומנת σ -סופית עבורה $\nu \ll \mu$ אזי $\frac{d\nu}{d\mu} : X \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot d\mu$$

טענה: תהא ν מידה מסומנת σ -סופית ותהינה λ, μ מידות σ -סופיות עבורן $\nu \ll \mu$ וכן $\mu \ll \lambda$ אזי

$$\bullet \text{תהא } g \in L^1(\nu) \text{ אזי } g \frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu) \text{ וכן } \int_{\mathcal{U}} g d\nu = \int_{\mathcal{U}} g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$$

$$\bullet \text{וכן } \nu \ll \lambda \text{ וכן } \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \text{ כ.ב.מ..}$$

מסקנה: תהינה λ, μ מידות σ -סופיות אזי $\frac{d\lambda}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} = 1$ כ.ב.מ.. וכן μ -כ.ב.מ..

משפט רדון-ניקודים: תהא ν מידה ותהא μ מידה σ -סופית עבורן $\nu \ll \mu$ אזי קיימת $f \in L^0_+(X, \Sigma)$ עבורה $d\nu = f d\mu$.

מסקנה: תהא ν מידה תהא μ מידה σ -סופית עבורן $\nu \ll \mu$ ותהינה $f, g \in L^0_+(X, \Sigma)$ עבורן $d\nu = f d\mu$ וכן $d\nu = g d\mu$ אזי $f = g$ כ.ב.מ..