פעולה בינארית: פונקציה $*:A\times A\to A$ ונסמן $a*b:=*(\langle a,b\rangle)$.

אסוציטיביות/קיבוציות: $\forall a,b,c\in A.a*(b*c)=(a*b)*c$.

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: $\forall a,b\in A.a*b=b*a$.

איבר יחידה: $e\in G$ המקיים $\forall g\in G.e*g=g*e=g$.

איבר הופכי/נגדי: יהי $g\in G$ אזי $h\in G$ המקיים $g*h=h*g=e_G$.

מונואיד: תהא קבוצה G ופעולה בינארית $*$ אזי זוג סדור $\langle G,*\rangle$ המקיים ($*$ אסוציטיבית)$\wedge$(קיים איבר יחידה).

חבורה: $\langle G,*\rangle$ המקיים (מונואיד)$\wedge$(קיים איבר הופכי).

סימון: e_G איבר יחידה בחבורה כללית, 1_G אם הפעולה מסומנת ב־$*$, 0_G אם הפעולה מסומנת ב־$+$.

הגדרה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $A^\times=\{a\in A\mid \exists h\in A.a*h=h*a=e_A\}$.

טענה: $\left\langle A^\times,*\restriction_{A^\times\times A^\times}\right\rangle$ חבורה.

הגדרה: $\left(S_A=A\overset{1-1}{\underset{onto}{\to}}A\right)\wedge\left(S_n=S_{[n]}\right)$.

חבורת התמורות: $\langle S_A,\circ\rangle$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $x\sim_n y\iff n\mid x-y$ יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$.

טענה: $\left(\mathbb{Z}/\sim_n=\left\{[0]_{\sim_n},\ldots,[n-1]_{\sim_n}\right\}\right)\wedge\left([x]_{\sim_n}+[y]_{\sim_n}=[x+y]_{\sim_n}\right)$.

חבורת השאריות: $\langle \mathbb{Z}/\sim_n,+\rangle$.

פונקציית אוילר: כמות המספרים הזרים הקטנים מאשר $n\in\mathbb{N}$ הוא $\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

טענה: יהיו $e_1,e_2\in G$ איברי יחידה אזי $e_1=e_2$.

טענה: $(\forall a,b,c\in G.a*b=e_G=c*a)\implies(b=c)$.

מסקנה: יהי $a\in G$ וכן $h_1,h_2\in G$ הופכיים אל a אזי $h_1=h_2$.

סימון: יהי $a\in G$ אזי ההופכי שלו הינו a^{-1}.

הגדרה: $(a^0=e_G)\wedge(a^{n+1}=a*a^n)\wedge\left(a^{-n}=(a^{-1})^n\right)$.

סדר: $\mathrm{ord}(a)=\min\{n\in\mathbb{N}_+\mid a^n=e_G\}$.

משפט: $|G|<\aleph_0\implies\exists a\in G.\mathrm{ord}(a)\le|G|$.

תת חבורה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה אזי $H\subseteq G$ המקיימת $\left\langle H,*\restriction_{H\times H}\right\rangle$ חבורה.

סימון: תהא G חבורה וכן $H\subseteq G$ תת חבורה אזי $H\le G$.

בוחן תת חבורה: תהא $H\subseteq G$ תת קבוצה אזי (H חבורה)$\iff$(H סגורה לפעולה $*$)$\wedge$($e_G\in H$)$\wedge$($\forall h\in H.h^{-1}\in H$).

איזומורפיזם בין חבורות: $f:G\overset{1-1}{\underset{onto}{\to}}H$ המקיימת $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$.

חוק הפילוג: $((b+c)*a=b*a+c*a)\wedge(a*(b+c)=a*b+a*c)$.

חוג עם יחידה: $\langle R,+,*\rangle$ המקיים ($\langle R,+\rangle$ חבורה אבלית)$\wedge$($\langle R,*\rangle$ מונואיד)$\wedge$(חוק הפילוג).

איזומורפיזם בין חוגים: $f:R\overset{1-1}{\underset{onto}{\to}}F$ המקיימת ($f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$)$\wedge$($f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$)$\wedge$($f(1_R)=1_F$).

חוג הפולינומים: יהי $\langle R,+,\cdot\rangle$ חוג חילופי אזי $\langle R[x],+,\cdot\rangle$.

נוסחאת המעלות: $\deg(p+q)\le\max(\deg(p),\deg(q))$ וגם $\deg(p\cdot q)\le\deg(p)+\deg(q)$.

הגדרה: $T^{-1}=\left\{t^{-1}\mid t\in T\right\}$.

תת החבורה שנוצרת על ידי T: $\langle T\rangle=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{\overset{n}{\underset{i=1}{*}}a_i\mid a\in\left(T\cup T^{-1}\right)^n\right\}=\left\{a_1*\ldots*a_n\mid a_1,\ldots,a_n\in T\cup T^{-1}\right\}$.

משפט: $\forall H\ge T.\langle T\rangle\le H$, במילים אחרות $\langle T\rangle$ תת החבורה הקטנה ביותר ביחס ההכלה שמכילה את T.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי $\forall g\in G.|\langle g\rangle|=\mathrm{ord}(g)$.

מנה של חבורה: יהיו $H\le G$ אזי $g_1\sim_H g_2\iff g_1*g_2^{-1}\in H$.

סימון: יהיו $H\le G$ אזי $G/H=G/\sim_H$.

משפט: תהא G חבורה אזי $(|G|=|G/H|\cdot|H|)\wedge(\forall g\in G.\mathrm{ord}(g)\mid|G|)$.

משפט: תהא G חבורה עבורה $|G|\in\mathbb{P}$ אזי (G אבלית)$\wedge$($\forall g\ne e_G.\langle g\rangle=G$).

מחלק אפס: יהי R חוג אזי $a\in R\backslash\{0\}$ המקיים $\exists b\in R\backslash\{0\}.a*b=0_G$.

תחום שלמות: $\langle R,+,*\rangle$ המקיים ($\langle R,+,*\rangle$ חוג אבלי)$\wedge$(לא קיימים מחלקי אפס).

חוק צמצום: יהי R תחום שלמות אזי $\forall a\ne0_R.\forall b,c\in R.(a*c=a*b)\implies(c=b)$.

שדה: $\langle\mathbb{F},+,*\rangle$ המקיים ($\langle\mathbb{F},+,*\rangle$ חוג)$\wedge$($\langle\mathbb{F}\backslash\{0_\mathbb{F}\},*\rangle$ חבורה אבלית)$\wedge$($0_\mathbb{F}\ne1_\mathbb{F}$).

טענה: ($\mathbb{F}$ שדה)$\Longleftarrow$($\mathbb{F}$ תחום שלמות).

משפט: (R תחום שלמות סופי)$\Longleftarrow$(R שדה).

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(n \in \mathbb{P}) \Longleftrightarrow$($\langle \mathbb{Z}_n, +, * \rangle$ שדה).

מציין של שדה: $\text{char}(\mathbb{F}) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n} 1_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}\}$ ואחרת $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$.

טענה: $\text{char}(\mathbb{F}) \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

הבינום של ניוטון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\forall a, b \in \mathbb{F}. (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה עבורו $\text{char}(\mathbb{F}) = p \neq 0$ אזי $\forall a, b \in \mathbb{F}. \forall k \notin \{0, p\}. \left(\binom{p}{k} \cdot a = 0\right) \wedge ((a+b)^p = a^p + b^p)$.

המשפט הקטן של פרמה: $\forall p \in \mathbb{P}. \forall a \in \mathbb{Z}_p. a^p \equiv a \mod p$.

קוסט/מחלקה שמאלית: יהיו $H \leq G$ חבורות ויהי $g \in G$ אזי $g * H = \{g * h \mid h \in H\}$.

קוסט/מחלקה ימנית: יהיו $H \leq G$ חבורות ויהי $g \in G$ אזי $H * g = \{h * g \mid h \in H\}$.

סימון: $G/H = \{g * H \mid g \in G\}$, $H \backslash G = \{H * g \mid g \in G\}$.

טענה: $(G/H) \wedge (H \backslash G)$ חלוקות של G.

טענה: $|G/H| = |H \backslash G|$.

אינדקס: יהיו $H \leq G$ חבורות אזי $[G : H] = |G/H|$.

משפט לגראנז': יהיו $H \leq G$ חבורות סופיות אזי $\left([G : H] = \frac{|G|}{|H|}\right) \wedge (|H| \mid |G|)$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $N \leq G$ המקיימת $\forall g \in G. gN = Ng$.

סימון: תהא G חבורה וכן $N \leq G$ תת חבורה נורמלית אזי $N \trianglelefteq G$.

כפל קבוצות: תהיינה $B, A \leq G$ חבורות אזי $A * B = \{a * b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

משפט: יהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי (H נורמלית)$\Longleftrightarrow ((g_1 H) * (g_2 H) = (g_1 * g_2) H)$.

טענה: (G/H חבורה עם כפל קבוצות)$\Longleftrightarrow$(H נורמלית).

משוואה: יהיו f, g פונקציות עבורן $\text{dom}(g) = \text{dom}(f)$ אזי הטענה $f(x) = g(x)$.

הגדרה: תהא X קבוצה עבורה $\text{dom}(g) = \text{dom}(f) = X^n$ אזי המשוואה מעל X עם n משתנים.

קבוצת פתרונות: תהא $f \in X^B$ ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{sols}_A(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$.

מערכת משוואות: יהיו n משוואות $f_i(x) = g_i(x)$ אזי $E = \langle f_1(x) = g_1(x), \ldots, f_n(x) = g_n(x) \rangle$.

סימון: תהא מערכת משוואות E אזי E_i תהיה משוואה מספר i.

קבוצת פתרונות של מערכת: $\text{sols}_A(E) = \bigcap_{i=1}^{n} \text{sols}_A(E_i)$.

שקילות: E, E' מערכות/משוואות עבורן $\text{sols}_A(E) = \text{sols}_A(E')$.

טענה: תהא h חח"ע אזי $\text{sols}((h \circ f)(x) = (h \circ g)(x)) = \text{sols}(f(x) = g(x))$.

קבוצה אלגברית: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה קיימת מערכת משוואות E מעל $\mathbb{R}$ עם n משתנים המקיימת $\text{sols}(E) = A$.

פונקציה ליניארית: $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ המקיימת $\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}. f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.

משוואה ליניארית: תהא f פונקציה ליניארית אזי $f(x_1, \ldots, x_n) = b$.

מערכת משוואות ליניארית: מערכת משוואות שכל המשוואות בה ליניאריות.

סימון: כדי לייצג מערכת משוואות ליניארית נכתוב

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n & = b_m \end{cases}$$

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^2$ היא $(\varnothing) \vee$(קו ישר)$\vee (\mathbb{R}^2)$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^3$ היא $(\varnothing) \vee$(קו ישר)$\vee$(מישור)$\vee (\mathbb{R}^3)$.

סימון: $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

חיבור nיות: $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1*\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n*\beta_n\end{pmatrix}$.

כפל nיה בסקלר: יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $\lambda*\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda*\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda*\alpha_n\end{pmatrix}$.

nית ה־0: $\bar{0}=\begin{pmatrix}0_{\mathbb{F}}\\ \vdots\\ 0_{\mathbb{F}}\end{pmatrix}$.

טענה: $\forall\bar{v}\in\mathbb{F}^n.\forall t\in\mathbb{F}.\left(t*\bar{v}=\bar{0}\right)\iff\left(t=0_{\mathbb{F}}\right)\vee\left(\bar{v}=\bar{0}\right)$.

משוואה לינארית הומוגנית: משוואה לינארית $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$.

טענה: תהא מערכת משוואות לינאריות הומוגניות E אזי $\bar{0}\in\text{sols}\left(E\right)$.

משפט: תהא E מערכת משוואות לינאריות הומוגניות אזי $\text{sols}\left(E\right)$ סגורה ביחס לחיבור וקטורים וכפילה בסקלר.

סימון: תהא E מערכת משוואות לינאריות אזי E_0 מערכת המשוואות הלינאריות ההומגניות עם אותן פונקציות לינאריות.

משפט: $\forall p\in\text{sols}\left(E\right).\text{sols}\left(E\right)=\text{sols}\left(E_0\right)+p$.

מטריצה:

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n}\end{pmatrix}$$

סימון: $\left(A\right)_{i,j}=a_{i,j}$.

סדר מטריצה: מטריצה A תקרא מסדר $m\times n$ אם יש לה m שורות ו־n עמודות.

הגדרה: קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ מעל R תסומן $M_{m\times n}\left(R\right)$.

סימון: $C_j\left(A\right)$ הינה העמודה ה־jית, $R_i\left(A\right)$ הינה השורה ה־iית.

מטריצת ה־0: תהא מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\left(A\right)_{i,j}=0_{\mathbb{F}}$.

מטריצה ריבועית: $A\in M_{m\times m}\left(\mathbb{F}\right)$.

מטריצת מקדמים: עוד סימון אפשרי לייצוג מערכת לינארית של משוואות הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} & b_m\end{array}\right)$$

מטריצת המקדמים המצומצמת:

$$\begin{pmatrix}a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n}\end{pmatrix}$$

עמודת המקדמים החופשיים:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

איבר פותח בשורה: $\min\left(j\in[n]\mid(A)_{i,j}\neq0\right)$.

מטריצה מדורגת: מטריצה המקיימת כי (כל שורות האפסים נמצאות למטה)$\wedge$(בכל שורה שיש בה איבר פותח האיבר הפותח הינו מימין ממש לאיבר הפותח בשורה מעליו).

מטריצה מדורגת קנונית: מטריצה מדורגת המקיימת כי (כל האיברים הפותחים הם 1)$\wedge$(בכל עמודה של איבר פותח שאר אברי העמודה הם 0).

שורת סתירה: שורה מהצורה $(0,\ldots,0|b)$ באשר $b\neq0$.

אלגוריתם: תהא $A\in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת קנונית

- אם קיימת שורת סתירה, $\text{sols}(A)=\varnothing$.
- אם לא קיימת שורת סתירה, נניח כי בעמודות $I=\{i_1\ldots i_k\}$ לא קיים איבר פותח אזי

$$\text{sols}(A)=\left\{v\in\mathbb{F}^n\;\middle|\;\forall i\notin I.v_i=(A)_{i,n+1}-\sum_{j\in I}\left((A)_{i,j}v_j\right)\right\}$$

פעולה אלמנטרית: פונקציה $\varphi:M_{m\times n}(\mathbb{F})\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $\text{sols}(A)=\text{sols}(\varphi(A))$.$\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

הפעולות האלמנטריות של גאוס: (החלפת שורה $\varphi_{R_i\leftrightarrow R_j}(A)$)$\wedge$(הכפלה בסקלר $\varphi_{R_i\to\lambda R_i}(A)$)$\wedge$(חיבור שורה $\varphi_{R_i\to R_i+R_j}(A)$).

שקילות שורה (ש"ש): $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עבורן קיימות פעולות אלמנטריות $\varphi_1\ldots\varphi_n$ המקיימות $(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_n)(A)=B$.

משפט גאוס: $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

אלגוריתם גאוס: $\mathcal{O}\left(n^2m\right)$

$$\begin{array}{l}
\text{row}=1\\
\text{for }\;(1\le\text{col}\le n)\\
\qquad\text{if }\;\left(\exists\min(j)\ge\text{row}.\,(A)_{j,\text{col}}\neq0\right)\\
\qquad\qquad\text{if }\;(j\neq\text{row})\\
\qquad\qquad\qquad R_j\leftrightarrow R_{\text{row}}\\
\qquad\qquad R_{\text{row}}\to\dfrac{1}{(A)_{\text{row},\text{col}}}R_{\text{row}}\\
\qquad\qquad\text{for }\;(1\le k\le m\wedge k\neq\text{row})\\
\qquad\qquad\qquad R_k\to R_k-(A)_{k,\text{col}}R_{\text{row}}\\
\qquad\qquad\text{row}+=1
\end{array}$$

מסקנה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מדורגת קנונית ללא שורת סתירה בעלת k שורות ללא איבר פותח אזי $|\text{sols}(A)|=|\mathbb{F}|^k$.

הדלתא של קרונקר: $\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & else\end{cases}$.

מטריצת היחידה: $I_n\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $(I_n)_{i,j}=\delta_{i,j}$.

משפט: תהא $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אזי (למערכת $(A|0)$ יש פתרון יחיד)$\Longleftrightarrow$(הצורה הקנונית של A היא I_n).

משפט: מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו־n נעלמים שקולה למשוואה אחת של m־יות.

צירוף לינארי: יהיו $\langle \vec{v_1},\ldots,\vec{v_n}\rangle \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n$ אזי $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v_i}$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}^n$.

כפל מטריצה ב־n־יה: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}).\forall \vec{v} \in \mathbb{F}^n. A\vec{v} = \sum_{i=1}^n C_i(A)\vec{v}_i$.

משפט: $\left(A\cdot\left(\underline{v}+\underline{u}\right) = A\cdot\underline{v} + A\cdot\underline{u}\right) \wedge \left(A\cdot\left(\alpha\cdot\underline{v}\right) = \alpha\cdot\left(A\cdot\underline{v}\right)\right) \wedge$(יש מחלקי אפס).

מטריצת סיבוב: $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

מטריצת ונדרמונד: מטריצה שבא כל עמודה או שורה הינה סדרה הנדסית.

פולינום לגראנז' ה־i: $P_i(x) = \left(\prod_{k=1}^{j-1}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)\left(\prod_{k=j+1}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)$, מתקיים $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

סימון: יהיו $\langle v_1,\ldots,v_n\rangle \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n$ נגדיר $\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

הגדרה: נגדיר $e_j \in \mathbb{F}^n$ כך $\left(e_j\right)_i = \delta_{j,i}$.

מטריצת תמורה: יהי $\sigma \in S_n$ נגדיר $P(\sigma) = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \ldots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$ מתקיים $\left(P(\sigma)\cdot v\right)_i = v_{\sigma^{-1}(i)}$.

משפט אי הפרישה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ וכן B הצורה הקנונית אזי $\left(\exists i.R_i(B) = 0\right) \iff \left(\exists b \in \mathbb{F}^m.\text{sols}(A|b) = \varnothing\right)$.

מסקנה: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}).(n < m) \Longrightarrow \left(\exists b \in \mathbb{F}^m.\text{sols}(A|b) = \varnothing\right)$.

סימון: $M_{n\times n}(\mathbb{F}) = M_n(\mathbb{F})$.

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{F}).\left(\forall b \in \mathbb{F}^n.\text{sols}(A|b) \neq \varnothing\right) \Longrightarrow \left(\forall b \in \mathbb{F}^n.\left|\text{sols}(A|b)\right| = 1\right)$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v \in \left(\mathbb{F}^n\right)^m$ נגדיר $\text{span}(v) = \left\{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid \alpha \in \mathbb{F}^m\right\}$.

סדרה פורשת: סדרה $v \in \left(\mathbb{F}^n\right)^m$ שמקיימת $\text{span}(v) = \mathbb{F}^n$.

הגדרה: נגדיר $T : \left(\mathbb{F}^n\right)^m \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ כך α $T_{\vec{v}}(\alpha) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

טענה: (על $T_{\vec{v}}$)$\iff$($\vec{v}$ פורשת).

סדרה בת"ל (בלתי תלויה לינארית): סדרה $v \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n$ המקיימת $\left(\alpha = 0\right) \iff \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0\right).\forall \alpha \in \mathbb{F}^n$.

בסיס: $v \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n$ בת"ל ופורשת.

טענה: יהיו $v \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n$ ונגדיר $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

- (v פורשת)$\iff\left(\forall b \in \mathbb{F}^m.\left|\text{sols}(A\underline{x} = b)\right| > 0\right)$.
- (v בת"ל)$\iff\left(\forall b \in \mathbb{F}^m.\left|\text{sols}(A\underline{x} = b)\right| < 2\right)$.
- (v בסיס)$\iff\left(\forall b \in \mathbb{F}^m.\left|\text{sols}(A\underline{x} = b)\right| = 1\right)$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ חח"ע)$\iff$($\vec{v}$ בת"ל).

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n$ אזי $\text{LD}(v) = \left\{\alpha \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0\right\}$.

הערה: (v בת"ל)$\iff\left(\text{LD}(v) = \{0\}\right)$.

הנפרשת/ספאן: תהא $K \subseteq \mathbb{F}^n$ אזי $\text{span}(K) = \left\{u \in \mathbb{F}^n \mid \exists m \in \mathbb{N}_+.\exists v \in K^m.\exists \alpha \in \mathbb{F}^m.u = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i\right\} \cup \{0\}$.

משפט: (v בת"ל $\Longleftarrow$ כל תת סדרה של v בת"ל)$\wedge$(v פורשת $\Longleftarrow$ כל על סדרה של v פורשת).

משפט: תהא $v \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n$ בת"ל וסדרה $u \in \mathbb{F}^m$ מתקיים ($v^\frown\langle u\rangle$ בת"ל)$\iff\left(u \notin \text{span}(v)\right)$.

טענה: $\forall v \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n.\forall u \in \mathbb{F}^m.\left(\text{span}(v) = \text{span}\left(v^\frown\langle u\rangle\right)\right) \iff \left(u \in \text{span}(v)\right)$.

טענה: $\forall v \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n.\forall i \in [n].\left(v_i \in \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)\right) \iff \left(\exists x \in \text{LD}(v).x_i \neq 0\right)$.

משפט: תהא $v \in \left(\mathbb{F}^m\right)^n$ התבש"ש

- v בת"ל.

- $\forall i\in[n].v_i\notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)$.
- $\forall i\in[n].v_i\notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[i-1]}}\right)$.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ פחות מ־n n־יות לא פורשות.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ יותר מ־n n־יות ת"ל.

מסקנה: מעל $\mathbb{F}^n$ לכל בסיס B מתקיים $|B|=n$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $v\in(\mathbb{F}^m)^n$, כל שניים מהשלושה שקולים

- v בת"ל.
- v פורשת.
- $n=m$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- לכל b למערכת $Ax=b$ קיים פתרון.
- עמודות A פורשות.
- קיים b למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בת"ל.
- לכל b למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בסיס.

כפל מטריצות: $\forall\langle A,B\rangle\in M_{k\times m}(\mathbb{F})\times M_{m\times n}(\mathbb{F}).\forall i\in[k].\forall j\in[m].(AB)_{i,j}=\sum_{t=1}^{m}(A)_{i,t}(B)_{t,j}$.

נוסחה: $(BA)_{i,j}=R_i(B)\cdot C_j(A)$.

טענה: $C_i(YX)=YC_i(X)$,$R_i(YX)=R_i(Y)X$.

כפל מטריצה בסקלר: $(\alpha A)_{i,j}=\alpha(A)_{i,j}$.

מטריצה סקלארית: αI_n.

טענה: $A(\alpha B)=\alpha(AB)$.

טענה: $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).(AI_n=A)\wedge(I_mA=A)$.

מסקנה: $\langle M_n(\mathbb{F}),\cdot\rangle$ מונואיד.

מטריצות מתחלפות: $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $AB=BA$.

שחלוף: $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).\left(A^T\right)_{i,j}=(A)_{j,i}$.

הערה: $R_i\left(A^T\right)=C_i(A)$.

טענה: $\left(A^T\right)^T=A$,$(\alpha A)^T=\alpha\left(A^T\right)$,$(AB)^T=B^TA^T$.

מטריצה סימטרית: $A^T=A$.

מטריצה אנטי סימטרית: $A^T=-A$.

חיבור מטריצות: $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).(A+B)_{i,j}=(A)_{i,j}+(B)_{ij}$.

טענה: $\langle M_{m\times n}(\mathbb{F}),+\rangle$ חבורה אבלית וסגורה לכפל בסקלר.

טענה: $(A(B+C)=AB+AC)\wedge\left((A+B)^T=A^T+B^T\right)$.

הפיכות: תהא $A_{m\times n}(\mathbb{F})$

- הפיכה משמאל: $\exists B\in M_{n\times m}(\mathbb{F}).BA=I_n$.
- הפיכה מימין: $\exists B\in M_{n\times m}(\mathbb{F}).AB=I_m$.
- הפיכה: (הפיכה משמאל)$\wedge$(הפיכה מימין).

טענה: $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).\forall B,C\in M_{n\times m}(\mathbb{F}).(AB=I_m)\wedge(CA=I_n)\Longrightarrow B=C$.

מסקנה: אם קיימת הופכית היא יחידה.

סימון: ההופכית של A היא A^{-1}.

מטריצה אלכסונית: $(A)_{i,j}=\begin{cases}\lambda_i & i=j\\ 0 & else\end{cases}$.

משפט: מטריצה בעלת שורת עמודות/שורות אפסים לא הפיכה.

הערה: $R(-\theta)R(\theta)=I_2=R(\theta)R(-\theta)$.

טענה: $\left(\left(A^{-1}\right)^{-1}=A\right)\wedge\left(\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T\right)\wedge\left((AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\right)$.

משפט: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\text{sols}\left(A|b\right)\neq\varnothing\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\iff\left(\left|\text{sols}\left(A|0\right)\right|\leq1\right)$.
- (A הפיכה)$\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\left|\text{sols}\left(A|b\right)\right|=1\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\Longleftarrow$(עמודות A פורשות)$\wedge\left(m\leq n\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longleftarrow$(עמודות A בת"ל)$\wedge\left(m\geq n\right)$.
- (A הפיכה)$\Longleftarrow$(עמודות A בסיס)$\wedge\left(m=n\right)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ התב"ש

- A הפיכה משמאל.
- A הפיכה.
- A הפיכה מימין.
- A^{T} הפיכה.

טענה: תהא φ פונקציה אלמנטרית אזי $\varphi\left(AB\right)=\varphi\left(A\right)B$.

מטריצה אלמנטרית: $E_{\varphi}=\varphi\left(I_{m}\right)$.

מסקנה: $\varphi\left(A\right)=E_{\varphi}A$.

טענה: $E_{\varphi}^{-1}=R_{\varphi^{-1}}$.

אלגוריתם: $\left(A\mid I\right)\sim\left(I\mid A^{-1}\right)$.

מטריצה נילפוטנטית: $\exists m\in\mathbb{N}.A^{m}=0$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי (A הפיכה)$\iff\left(A\sim I\right)$.

מסקנה: (A,B הפיכות)$\iff$(AB הפיכה).

הגדרה: $\text{Par}\left(\left\{ v_{1},\ldots,v_{m}\right\} \right)=\left\{ \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}v_{i}\mid\alpha\in\left[0,1\right]^{m}\right\}$.

טענה: A הפיכה $\iff\text{Vol}\left(\text{Par}\left(A\right)\right)\neq0$ (הנפח של המקבילון).

לינארית על פי שורה: פונקציה שמקיימת $$f\begin{pmatrix}-R_{1}-\\ \vdots\\ -R_{i}+R_{i}'-\\ \vdots\\ -R_{n}-\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-R_{1}-\\ \vdots\\ -R_{i}-\\ \vdots\\ -R_{n}-\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}-R_{1}-\\ \vdots\\ -R_{i}'-\\ \vdots\\ -R_{n}-\end{pmatrix}.$$

פונקציית נפח: פונקציה $\mathcal{N}:M_{n}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ (לינארית על פי שורה)$\wedge\left(\mathcal{N}\left(I\right)=1\right)\wedge\left(\left(\exists i\neq j.R_{i}\left(A\right)=R_{j}\left(A\right)\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(A\right)=0\right)$.

טענה: אם ב־A יש שורת אפסים אז $\mathcal{N}\left(A\right)=0$.

משפט: תהא φ פעולה אלמנטרית אזי $$\mathcal{N}\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathcal{N}\left(A\right)\cdot\begin{cases}\lambda & \varphi=f_{R_{i}\to\lambda R_{i}}\\ -1 & \varphi=f_{R_{i}\leftrightarrow R_{j}}\\ 1 & \varphi=f_{R_{i}\to R_{i}+\lambda R_{j}}\end{cases}.$$

מסקנה: יהיו A,B שקולות שורה אזי $\left(\mathcal{N}\left(A\right)=0\right)\iff\left(\mathcal{N}\left(B\right)=0\right)$.

מסקנה: (A הפיכה)$\iff\left(\mathcal{N}\left(A\right)\neq0\right)$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(E_{\varphi}A\right)=\mathcal{N}\left(E_{\varphi}\right)\mathcal{N}\left(A\right)$.

משפט: יהיו $\mathcal{N}_{1},\mathcal{N}_{2}:M_{n}\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ פונקציות נפח אזי $\mathcal{N}_{1}=\mathcal{N}_{2}$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(AB\right)=\mathcal{N}\left(A\right)\mathcal{N}\left(B\right)$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(A\right)=\mathcal{N}\left(A^{T}\right)$.

מינור: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $i,j\in[n]$ אזי $A_{i,j}\in M_{n-1}(\mathbb{F})$ כך שמתקיים

$$\left(A_{i,j}\right)_{r,s}=\begin{cases}(A)_{r,s} & (r\le i-1)\wedge(s\le j-1)\\ (A)_{r+1,s} & (r\ge i)\wedge(s\le j-1)\\ (A)_{r,s+1} & (r\le i-1)\wedge(s\ge j)\\ (A)_{r+1,s+1} & (r\ge i)\wedge(s\ge j)\end{cases}$$

דטרמיננטה: פונקציית הנפח היחידה תיקרא $\det^n$.

הערה: $\forall A\in M_1(\mathbb{F}).\det(A)=(A)_{1,1}$.

פיתוח דטרמיננטה על פי עמודה: יהי $j\in[n]$ אזי $\det_j^n(A)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+j}(A)_{k,j}\det_j^{n-1}(A_{k,j})$.

מסקנה: $\forall j,i\in[n].\det_j^n(A)=\det_i^n(A)$.

סימון: $\det_j^n=\det$.

סימון: $\det(A)=|A|$.

פיתוח דטרמיננטה על פי שורה: יהי $i\in[n]$ אזי $\det(A)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+i}(A)_{i,k}\det(A_{i,k})$.

מטריצה מצורפת: $(\mathrm{adj}(A))_{i,j}=(-1)^{i+j}|A_{j,i}|$.

טענה: $\mathrm{adj}\left(A^T\right)=(\mathrm{adj}(A))^T$.

משפט: $A\cdot\mathrm{adj}(A)=|A|I=\mathrm{adj}(A)\cdot A$.

מסקנה: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.

כלל קרמר: תהא מערכת משוואת $Ax=b$ כאשר A הפיכה אזי $x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$ כאשר $C_j(A_i)=\begin{cases}b & i=j\\ C_j(A) & else\end{cases}$.

הגדרה: תהא $\sigma\in S_n$ נגדיר יחס שקילות $a\sim_{\text{cycle}}b\iff\exists i\in\mathbb{N}.\sigma^i(a)=b$.

ציקלוס/מחזור: $[a]_{\sim_{\text{cycle}}}$.

פירוק תמורה לציקלוסים זרים: כל תמורה ניתנת לפירוק יחיד של ציקלוסים.

חילוף: $\begin{pmatrix} i & j\end{pmatrix}(x)=\begin{cases}j & x=i\\ i & x=j\\ x & else\end{cases}$.

טענה: כל מחזור ניתן לכתיבה כהרכבה של חילופים.

מסקנה: כל תמורה ניתנת לכתיבה כהרכבה של חילופים.

טענה: $\begin{pmatrix} i & j\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} n & m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & m\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} i & j\end{pmatrix}$.

סימון: $\mathrm{sign}(\sigma)=\det(P(\sigma))$.

טענה:

- יהיו $E_{R_i\leftrightarrow R_j},\dots,E_{R_\lambda\leftrightarrow R_\theta}$ אזי $E_{R_i\leftrightarrow R_j}\cdot\ldots\cdot E_{R_\lambda\leftrightarrow R_\theta}=P(\sigma)$.
- אם $(P(\sigma))_{i,j}=1$ אז $P(\sigma)_{i,j}$ מטריצת תמורה.
- $\mathrm{sign}(\sigma)=\pm1$.

מטריצת תמורה זוגית: $\mathrm{sign}(\sigma)=1$.

מטריצת תמורה איזוגית: $\mathrm{sign}(\sigma)=-1$.

טענה: (Id זוגית)$\wedge$($\begin{pmatrix} i & j\end{pmatrix}$ אי זוגית).

טענה: $P(\sigma\tau)=P(\sigma)P(\tau)$.

מסקנה: $\mathrm{sign}(\sigma\tau)=\mathrm{sign}(\sigma)\,\mathrm{sign}(\tau)$.

אי סדר של תמורה: זוג סדור $\langle i,j\rangle$ שמקיים $(i<j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))$.

אי הסדרים של איבר: $z(\sigma,i)=|\{j>i\mid\sigma(i)>\sigma(j)\}|$.

אי הסדרים של תמורה: $N(\sigma)=|\{\langle i,j\rangle\mid(j>i)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))\}|$.

משפט: $\mathrm{sign}(\sigma)=(-1)^{N(\sigma)}$.

דטרמיננטה על פי תמורה: $|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\mathrm{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^n(A)_{i,\sigma(i)}\right)$.

מסקנה: $\forall A\in M_n(\mathbb{Z}).|A|\in\mathbb{Z}$.

מסקנה: $\forall A\in M_n(\mathbb{Z}).(\|A\|=1)\implies\left(A^{-1}\in M_n(\mathbb{Z})\right)$.

מסקנה: $\det(A)\in\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_{n^2}]$.

נורמה: יהי $v\in\mathbb{R}^n$ נגדיר $\|v\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ אזי f רציפה.

מסקנה: $\det$ רציפה.

מסקנה: $\forall A\in M_n^\times(\mathbb{F}).\exists\varepsilon.\forall B\in M_n(\mathbb{F}).\left(\forall i,j.(B)_{i,j}\in\left((A)_{i,j}-\varepsilon,(A)_{i,j}+\varepsilon\right)\right)\implies B\in M_n^\times(\mathbb{F})$.

מרחב וקטורי (מ"ו): $\langle V,+,*\rangle$ המקיים

- $\langle V,+\rangle$ חבורה אבלית.
- $*:\mathbb{F}\times V\to V$ המקיימת
  - $\forall v\in V.1_{\mathbb{F}}*v=v$.
  - $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v\in V.(\alpha*\beta)*v=\alpha*(\beta*v)$.
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v,u\in V.((\alpha+\beta)*v=\alpha*v+\beta*v)\wedge(\alpha*(v+u)=\alpha*v+\alpha*u)$.

טענה: $(\forall\alpha\in\mathbb{F}.\alpha\cdot 0_V=0_V)\wedge(\alpha*v=0_V\iff(\alpha=0_{\mathbb{F}})\vee(v=0_V))\wedge(-1_{\mathbb{F}}*v=-v)\wedge(\forall v\in V.0_{\mathbb{F}}*v=0_V)$.

תת מרחב וקטורי (תמ"ו): קבוצה $\mathcal{U}\subseteq V^n$ המקיימת $(\forall v\in\mathcal{U}.\forall a\in\mathbb{F}.a\cdot v\in\mathcal{U})\wedge(\forall u,v\in\mathcal{U}.u+v\in\mathcal{U})\wedge(0\in\mathcal{U})$.

טענה: יהיו U,V תמ"ו אזי $U\cap V$ תמ"ו.

צירוף לינארי: יהיו $v\in V^n$, צירוף לינארי של v הינו ביטוי מהצורה $\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i$ בעבור $\alpha\in\mathbb{F}^n$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v\in V^m$ נגדיר $\operatorname{span}(v)=\{\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i\mid\alpha\in\mathbb{F}^m\}$.

סדרה בת"ל: סדרה $v\in V^n$ שמקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^n.\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=0\iff\alpha=0$.

בסיס: $v\in V$ בת"ל ופורשת.

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v\in V^n$ נגדיר $\mathrm{LD}(v)=\{\alpha\in\mathbb{F}^n\mid\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=0\}$.

טענה: $(A\subseteq\operatorname{span}(B)\implies\operatorname{span}(A)\subseteq\operatorname{span}(B))\wedge(A\subseteq B\implies\operatorname{span}(A)\subseteq\operatorname{span}(B))$.

טענה: תהא $K\subseteq V$ אזי $\operatorname{span}(K)$ הינו התמ"ו הקטן ביותר ביחס ההכלה המכיל את K.
$\wedge(\operatorname{span}(\operatorname{span}(A))=\operatorname{span}(A))\wedge(\operatorname{span}(\varnothing)=\{0\})$.

משפט ההחלפה של ריס: תהא $v\in V^n$ פורשת ו־$u\in V^m$ בת"ל

- $m\le n$.
- קיימים $1\le i_1\ldots i_m\le n$ כך שהקבוצה $\{u_1\ldots u_k\}\cup\{v_j\mid j\notin\{i_1\ldots i_k\}\}$ פורשת.

מסקנה: יהיו A,B בסיסים אזי $|A|=|B|$.

מימד: יהי B בסיס $\dim_{\mathbb{F}}(V)=|B|$.

נ"ס (נוצר סופית): מ"ו V שמקיים $\exists v\in V^k.\operatorname{span}(v)=V$.

משפט: V נ"ס $\Longleftarrow$ קיים בסיס ל־V.

מסקנה: יהי V נ"ס

- פחות מ־$\dim(V)$ וקטורים לא פורשים.
- יותר מ־$\dim(V)$ וקטורים ת"ל.

משפט 2 מתוך 3: יהי V מ"ו נ"ס ויהי $B\in V^k$, כל שניים מהשלושה שקולים

- B בת"ל.
- B פורשת.
- $\dim(V)=k$.

משפט: תהא V נ"ס, לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים כי U נ"ס.

מסקנה: לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים $\dim(U)\le\dim(V)$.

משפט: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $(U\subseteq W)\wedge(\dim(U)=\dim(W))\iff U=W$.

סכום מרחבים וקטורים: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $U+W=\{u+w\mid u\in U\wedge w\in W\}$ תמ"ו של V.

משפט: אם $U=\operatorname{span}(A)$, $W=\operatorname{span}(B)$ אז $W+U=\operatorname{span}(A\cup B)$.

מסקנה: אם $U,W,T\subseteq V$ תמ"ו אז $U+W\subseteq T\implies U,W\subseteq T$.

משפט: אם $U\cap W=\{0\}$ אז לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U+W$.

סכום ישר: אם $U\cap W=\{0\}$ אז $U\oplus W=U+W$.

משפט האפיון של סכום ישר: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו התב"ש

- $U\oplus W$.
- לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U+W$.
- $\forall k\in U+W.\exists!\left\langle u,w\right\rangle \in U\times W.u+w=k$.

מסקנה: $\dim\left(U\oplus W\right)=\dim\left(U\right)+\dim\left(W\right)$.

משפט המימד הראשון: יהיו U,W תמ"ו אזי $\dim\left(U+W\right)=\dim\left(U\right)+\dim\left(W\right)-\dim\left(U\cap W\right)$.

קואורדינטות: יהי $b\in V^n$ בסיס ויהי $v\in V$ אזי $\iota\alpha\in\mathbb{F}^n.v=\sum_{i=1}^n\alpha_ib_i$.

סימון: $\left[v\right]_B=\iota\alpha\in\mathbb{F}^n.v=\sum_{i=1}^n\alpha_iB_i$.

העתקת קואורדינטות: יהי B בסיס נגדיר $Q_B:V\to\mathbb{F}^{\dim(V)}$ כך $Q_B\left(v\right)=\left[v\right]_B$.

משפט:

- $Q_B^{-1}\left(\alpha\right)=\sum_{i=1}^{\dim(V)}\alpha_ib_i$.
- $\left(Q\left(\alpha v\right)=\alpha Q\left(v\right)\right)\wedge\left(Q\left(v+w\right)=Q\left(v\right)+Q\left(w\right)\right)$.
- $v_1\dots v_k$ בת"ל $\iff$ $Q_B\left(v_1\right)\dots Q_B\left(v_k\right)$ בת"ל.
- $v\in\text{span}\left(v_1\dots v_k\right)\iff Q_B\left(v\right)\in\text{span}\left(Q_B\left(v_1\right)\dots Q_B\left(v_k\right)\right)$.

מרחב העמודות: $\mathcal{C}\left(A\right)=\text{span}\left(\left\{C_i\left(A\right)\mid i\in\left[n\right]\right\}\right)$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}\left(A\right)=\text{span}\left(\left\{R_i\left(A\right)\mid i\in\left[m\right]\right\}\right)$.

טענה: $\mathcal{C}\left(A\right)=\left\{Ax\mid x\in\mathbb{F}^n\right\}=\text{Im}\left(T_A\right)$.

טענה: $\mathcal{R}\left(AB\right)\subseteq\mathcal{R}\left(B\right)$, $\mathcal{C}\left(AB\right)\subseteq\mathcal{C}\left(A\right)$.

משפט: $\dim\left(\mathcal{C}\left(A\right)\right)=\dim\left(\mathcal{R}\left(A\right)\right)$.

דרגה: $\text{rank}\left(A\right)=\dim\left(\mathcal{C}\left(A\right)\right)$.

מרחב האפסות: $\mathcal{N}\left(A\right)=\dim\left(\text{sols}\left(A\right)\right)$.

טענה: $\text{rank}\left(A\right)\le\min\left(n,m\right)$, $\text{rank}\left(AB\right)\le\min\left(\text{rank}\left(A\right),\text{rank}\left(B\right)\right)$, $\text{rank}\left(A+B\right)\le\text{rank}\left(A\right)+\text{rank}\left(B\right)$.

טענה: אם A הפיכה אזי $\text{rank}\left(AB\right)=\text{rank}\left(B\right)$.

המשפט היסודי של הדירוג: יהיו $A,A'\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ש"ש

- $\text{sols}\left(A\right)=\text{sols}\left(A'\right)$.
- $\mathcal{R}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(A'\right)$.
- $\text{rank}\left(A\right)=\text{rank}\left(A'\right)$.

טענה: $\text{sols}\left(A\right)=\text{LD}\left(\left\{C_i\left(A\right)\mid i\in\left[n\right]\right\}\right)$.

מסקנה: תהא A מטריצה מדורגת קנונית אזי אין איבר פותח בעמודה ה־i $\iff$ $C_i\left(A\right)\in\text{span}\left(C_1\left(A\right),\dots,C_{i-1}\left(B\right)\right)$.

משפט: יהיו $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו A',B' המטריצות הקנוניות שלהם בהתאמה, התב"ש

- $A\sim B$.
- $A'=B'$.
- $\mathcal{R}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(B\right)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי ($\text{rank}\left(A\right)=n$) $\iff$ (A הפיכה).

משפט הדרגה והאפסות: $n=\text{rank}\left(A\right)+\mathcal{N}\left(A\right)$.

פונקציה מטריציונית: $f:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ שמקיימת $\exists A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).f=T_A$.

הגדרה: $\ker\left(T_A\right)=T_A^{-1}\left[\{0\}\right]=\text{sols}\left(A\right)$.

טענה: $\forall A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).T_A=T_B\iff A=B$.

טענה: T_A לינארית.

העתקה לינארית/טרנספורמציה לינארית (ט"ל): יהיו U,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $T:V\to U$ שמקיימת כי T לינארית.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל מתקיים $\left(T\left(0\right)=0\right)\wedge\left(T\left(\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i\right)=\sum_{i=1}^n\alpha_iT\left(v_i\right)\right)$.

טענה: תהא $T:U\to W$ ט"ל ותהא $S:V\to U$ ט"ל אזי $T\circ S$ ט"ל.

משפט: תהא $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ אזי T לינארית $\iff$ T מטריציונית.

משפט: תהא $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ ט"ל אזי $C_i\left(A\right)=T\left(\delta_i\right)$.

טענה: $\text{Im}\left(T\right)$, $\ker\left(T\right)$ תמ"ו.

טענה: תהא T ט"ל אזי

- $\left\langle T\left(v_{1}\right)\dots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\left\langle v_{1}\dots v_{n}\right\rangle$ בת"ל.
- $\left\langle v_{1}\dots v_{n}\right\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\left\langle T\left(v_{1}\right)\dots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ פורשת את $\text{Im}\left(T\right)$.

למה: תהא T ט"ל אזי

- נניח כי T חח"ע, $\left\langle v_{1}\dots v_{n}\right\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\left\langle T\left(v_{1}\right)\dots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ בת"ל.
- נניח כי T על, $\left\langle v_{1}\dots v_{n}\right\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\left\langle T\left(v_{1}\right)\dots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ פורשת.

מסקנה: תהא T ט"ל הפיכה ויהי $\left\langle b_{1}\dots b_{n}\right\rangle$ בסיס אזי $\left\langle T\left(b_{1}\right)\dots T\left(b_{n}\right)\right\rangle$ בסיס.

איזומורפיזם בין מרחבים וקטורים: $T:V\to U$ ט"ל הפיכה.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל

- T חח"ע $\iff$ $\ker\left(T\right)=\left\{ 0\right\}$.
- T על $\iff$ $\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)=\dim\left(U\right)$.
- $\forall u\in\text{Im}\left(T\right).\forall v\in T^{-1}\left[\left\{ u\right\} \right].T^{-1}\left[\left\{ u\right\} \right]=v+\ker\left(T\right)$.

משפט המימד השני: תהא $T:V\to U$ ט"ל $\dim\left(V\right)=\dim\left(\ker\left(T\right)\right)+\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $T:V\to U$ ט"ל, כל שניים מהשלושה שקולים

- T חח"ע.
- T על.
- $\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

טענה: $T:V\to U$ איזומורפיזם $\Longleftarrow$ $\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

משפט: T איזומורפיזם $\iff$ T^{-1} איזומורפיזם.

משפט: לכל V מ"ו נ"ס מתקיים $V\cong\mathbb{F}^{\dim\left(V\right)}$.

מסקנה: יהיו V,W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $V\cong W$ $\iff$ $\dim\left(V\right)=\dim\left(W\right)$.

משפט: יהי $b\in V^{n}$ בסיס ויהי $c\in U^{n}$ אזי $T:V\to U$ המוגדרת $T\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[x\right]_{b}\right)_{i}\cdot c_{i}$ היא הט"ל היחידה שמקיימת $\forall i\in\left[n\right].T\left(b_{i}\right)=c_{i}$.

טענה: יהיו $T_{1},T_{2}:V\to U$ ט"ל ויהי b פורשת את V אזי $T_{1}=T_{2}\Longrightarrow\forall i\in\left[n\right].T_{1}\left(b_{i}\right)=T_{2}\left(b_{i}\right)$.

מרחב העתקות הלינאריות: $\text{Hom}\left(V,U\right)=\left\{ T\in V\to U\mid T\text{ ט"ל}\right\}$.

טענה: $\text{Hom}\left(V,U\right)$ מ"ו מעל השדה של V,U.

הערה: $\forall T_{1},T_{2}\in\text{Hom}\left(V,U\right).T_{1}\circ T_{2}\in\text{Hom}\left(V,U\right)$.

משפט: $\dim\left(\text{Hom}\left(V,U\right)\right)=\dim\left(V\right)\cdot\dim\left(U\right)$.

טענה: יהיו b,c בסיסים של V,U בהתאמה לכן $\left\{ T_{i,j}\left(b_{k}\right)=\begin{cases} c_{j} & i=k\\ 0 & else \end{cases}\;\middle|\;i,j\in\left[n\right]\right\}$ בסיס של $\text{Hom}\left(V,U\right)$.

סימון: $\text{Hom}\left(V\right)=\text{Hom}\left(V,V\right)$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ ויהיו B,C בסיסים של V,U בהתאמה לכך $Q_{C}\circ T\circ Q_{B}^{-1}$ מטריציונית.

מטריצה מייצגת: המטריצה $\left[T\right]_{C}^{B}=A$ עבורה $Q_{C}\circ T\circ Q_{B}^{-1}=T_{A}$.

סימון: $\left[T\right]_{B}=\left[T\right]_{B}^{B}$.

מסקנה: $C_{i}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)=\left[T\left(B_{i}\right)\right]_{C}$.

מסקנה: $\left[T\right]_{C}^{B}\cdot\left[v\right]_{B}=\left[T\left(v\right)\right]_{C}$.

הטלה: יהיו $V=U\oplus W$ מ"ו אזי $P_{\left(U,W\right)}:V\to V$ המוגדרת $P_{\left(U,W\right)}\left(v\right)=\iota u\in U.\exists w\in W.u+w=v$.

טענה: $P_{\left(U,W\right)}$ ט"ל, $\text{Im}\left(P_{\left(U,W\right)}\right)=U$, $\ker\left(P_{\left(U,W\right)}\right)=W$, $P_{\left(U,W\right)}^{2}=P_{\left(U,W\right)}$.

הערה: $\left[T\right]_{C}^{B}\in M_{\dim\left(U\right)\times\dim\left(V\right)}\left(\mathbb{F}\right)$.

משפט:

- $\left(Q_{B}\right)_{\restriction_{\ker\left(T\right)}}:\ker\left(T\right)\to\text{sols}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)$ איזומורפיזם.
- $\left(Q_{C}\right)_{\restriction_{\text{Im}\left(T\right)}}:\text{Im}\left(T\right)\to\mathcal{C}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)$ איזומורפיזם.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)=\dim\left(\ker\left(T\right)\right)$, $\text{rank}\left(\left[T\right]_{C}^{B}\right)=\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)$.

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(V,U)$ אזי T הפיכה $\iff [T]_C^B$ הפיכה.
משפט: $T \in \text{Hom}(V,U)$, $S \in \text{Hom}(U,W)$ אז $[S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$.
מסקנה: $\left([T]_C^B\right)^{-1} = \left[T^{-1}\right]_B^C$.
מטריצת שינוי קואורדינטות: $[Id_V]_C^B$.
הערה: $C_i\left([Id]_C^B\right) = [B_i]_C$.
מסקנה: $[T]_C^B = [Id]_C^E \cdot [T]_E^D \cdot [Id]_D^B$.
דמיון מטריצות: $\forall A,B \in M_n(\mathbb{F}).A \sim B \iff \exists P \in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BP = A$.
משפט: יהיו $A,B \in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- $B \sim A$.
- $\forall T \in \text{Hom}(V,U).A = [T]_D^C \implies \exists C',D'.B = [T]_{D'}^{C'}$.
- $\exists T \in \text{Hom}(V,U).([T]_C = A) \wedge ([T]_D = B)$.

טענה: A,B דומות אז $\det(A) = \det(B)$.
הגדרה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $\det(T) = \det([T]_B)$.
עקבה: $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}$.
טענה: $\forall A,B \in M_n(\mathbb{F}).\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.
מסקנה: A,B דומות $\Longleftarrow \text{trace}(A) = \text{trace}(B)$.
הגדרה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $\text{trace}(T) = \text{trace}([T]_B)$.
מטריצות מתאימות: $\forall A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{F}).A \sim_{\text{green}} B \iff \exists P,Q \in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BQ^{-1} = A$.
הערה: A,B דומות $\Longleftarrow A,B$ מתאימות.
טענה: $\text{rank}A = \text{rank}B \iff A,B$ מתאימות.
הגדרה: $[*]_C^B : \text{Hom}(V,W) \to M_{\dim(V)\times\dim(W)}(\mathbb{F})$ כך $[*]_C^B(T) = [T]_C^B$.
משפט: $[*]_C^B$ איזומורפיזם.
אלגברה: $\langle V,+,\cdot,*\rangle$ שמקיים $(\langle V,+,\cdot\rangle$ מ"ו$)\wedge(* : V\times V \to V)$.
אלגברת מטריצות: המרחב $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עם פעולת כפל מטריצות.
אלגברת Hom: המרחב $\text{Hom}(V,W)$ עם פעולת ההרכבה.
איזומורפיזם בין אלגברות: $T : A \to B$ ט"ל הפיכה שמקיימת $\forall \alpha,\beta \in A.T(\alpha * \beta) = T(\alpha) * T(\beta)$.
משפט: אם $[*]_B : \text{Hom}(V) \to M_{\dim(V)}(\mathbb{F})$ אז $[*]_B$ איזומורפיזם בין אלגברות.
מטריצת בלוקים:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

הערה: מספר העמודות והשורות בין מטריצות צמודות חייב להיות שווה.
סימון:

$$(A_{i,j})_{1\le i,j\le m} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

כפל מטריצת בלוקים: $(AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^m A_{i,t}B_{t,j}$.
מטריצת בלוקים ריבועית: מטריצת בלוקים כך שמקיימת $\forall i.A_{i,i} \in M_n(\mathbb{F})$.

מטריצת בלוקים משולשית עליונה: $\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\le\ell\\0 & else\end{cases}$.

מטריצת בלוקים משולשית תחתונה: $\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\ge\ell\\0 & else\end{cases}$.

מטריצת בלוקים אלכסונית: מטריצת בלוקים משולשית תחתונה ועליונה.

הגדרה: $\left(\text{Diag}\left(A_{1,1},\ldots,A_{n,n}\right)\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,k} & k=\ell\\0 & else\end{cases}$.

משפט: אם $\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}$ משולשית אז $\det\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)=\prod_{i=1}^{n}\det\left(A_{i,i}\right)$.