אלפבית: קבוצה Σ המקיימת $0<|\Sigma|<\aleph_0$.

מילים: יהי Σ אלפבית אזי $\Sigma^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}\Sigma^n$.

אורך של מילה: יהי Σ אלפבית ותהא $w\in\Sigma^n$ מילה אזי $|w|=n$.

המילה הריקה: יהי Σ אלפבית אזי $\varepsilon\in\Sigma^*$ עבורה $|\varepsilon|=0$.

היפוך מילה: תהא $\langle w_1\dots w_n\rangle\in\Sigma^*$ אזי $\langle w_1\dots w_n\rangle^R=\langle w_n\dots w_1\rangle$.

שרשור מילים: תהיינה $\langle w_1\dots w_n\rangle,\langle\omega_1\dots\omega_m\rangle\in\Sigma^*$ אזי $\langle w_1\dots w_n\rangle\langle\omega_1\dots\omega_m\rangle=\langle w_1\dots w_n,\omega_1\dots\omega_m\rangle$.

חזקה של מילה: תהא $\langle w_1\dots w_n\rangle\in\Sigma^*$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\langle w_1\dots w_n\rangle^m=\prod_{i=1}^m\langle w_1\dots w_n\rangle$.

מספר המופעים של אות במילה: תהא $w\in\Sigma^n$ ותהא $\sigma\in\Sigma$ אות אזי $\#_\sigma(w)=|\{i\in[n]\mid w_i=\sigma\}|$.

שפה: יהי Σ אלפבית אזי $L\subseteq\Sigma^*$.

היפוך שפה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $L^R=\left\{w^R\mid w\in L\right\}$.

שרשור שפות: תהיינה $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$ שפות אזי $L_1\parallel L_2=L_1L_2=\{w\omega\mid(w\in L_1)\wedge(\omega\in L_2)\}$.

חזקה של שפה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $L^m=\left\{\prod_{i=1}^k w_i\mid\forall i\in[k].w_i\in L\right\}$.

סגור קליני של שפה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $L^*=\bigcup_{k=0}^{\infty}L^k$.

שפת הרישא: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $\text{prefix}(L)=\{y\in\Sigma^*\mid\exists x\in\Sigma^*.yx\in L\}$.

שפת הסיפא: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $\text{suffix}(L)=\{y\in\Sigma^*\mid\exists x\in\Sigma^*.xy\in L\}$.

אלגוריתם מכריע שפה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי אלגוריתם $A:\Sigma^*\to\{\text{true},\text{false}\}$ המקיים

- מקבל: לכל $x\in L$ מתקיים $A(x)=\text{true}$.
- דוחה: לכל $x\notin L$ מתקיים $A(x)=\text{false}$.

פונקציה בולאנית: תהא X קבוצה אזי $f:X\to\{0,1\}$.

בסיס דה־מורגן: $\mathcal{B}=\{\wedge,\vee,\neg\}$.

מעגל בוליאני: תהיינה $k_1\dots k_n\in\mathbb{N}_+$ תהיינה $f_1\dots f_n$ פונקציות בוליאניות באשר $f_i:\{0,1\}^{k_i}\to\{0,1\}$ לכל $i\in[n]$ ותהיינה $x_1\dots x_m,y_1\dots y_k\in\{0,1\}$ אזי גרף מכוון G מעל $\{f_1\dots f_n,x_1\dots x_m,y_1\dots y_k\}$ המקיים

- G חסר מעגלים מכוונים.
- לכל $i\in[m]$ מתקיים $\deg^-(x_i)=0$.
- לכל $i\in[n]$ מתקיים $\deg^-(f_i)=k_i$.
- לכל $i\in[k]$ מתקיים $\deg^-(y_i)=1$ וכן $\deg^+(y_i)=0$.

שער: יהי מעגל בוליאני אזי $f_1\dots f_n$.

חוטים: יהי C מעגל בוליאני אזי $E(C)$.

fan-out: יהי C מעגל בולינארי אזי $\max_{v\in V(C)}\deg^+(v)$.

נוחסאות: יהי C מעגל בולינארי אזי $\{G\le C\mid$ ה־fan-out של G הוא $1\}$.

שערוך מעגל בולינארי על קלט: יהי C מעגל בולינאני ויהי $v\in\{0,1\}^m$ אזי $v=(x_1\dots x_m)$ וכן y_i הינו הפלט הנוצר מהפעלת הפונקציות הבוליאניות על הקודקודים הנכנסים.

סימון: יהי C מעגל בולינאני ויהי $v\in\{0,1\}^m$ אזי השערוך של C על v הוא $C(v)=(y_1\dots y_k)$.

מעגל מחשב פונקציה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי מעגל בולינאני C עבורו לכל $v\in\{0,1\}^n$ מתקיים $C(v)=f(v)$.

משפט אוניברסליות דה־מורגן: תהא $f:\{0,1\}^m\to\{0,1\}^k$ אזי קיים מעגל בוליאני C מעל בסיס דה־מורגן עבורו לכל $v\in\{0,1\}^m$ מתקיים $C(v)=f(v)$.

משפחה של מעגלים: מעגלים בוליאניים $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ עבורם C_i מקבל קלט באורך i.

משפחה מכריעה שפה: תהא $L\subseteq\{0,1\}^*$ שפה אזי משפחה של מעגלים $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\{0,1\}^n$ מתקיים $(C_n(x))\iff(x\in L)$.

מודל לא יוניפורמי: משפחה של מעגלים $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ יש אלגוריתם שונה.

מודל יוניפורמי: משפחה של מעגלים $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ יש אלגוריתם זהה.

גודל מעגל: יהי מעגל בוליאני C אזי $|C|$ מספר השערים ב־C.

חסם עליון לגודל משפחת מעגלים: תהא $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משפחה של מעגלים אזי $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה $|C_n|\le S(n)$.

טענה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי קיים מעגל C שמחשב את f בגודל $\mathcal{O}(n\cdot 2^n)$.

טענה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי קיים מעגל C שמחשב את f בגודל $\mathcal{O}(2^n)$.

משפט לופיאנוב: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי קיים מעגל C שמחשב את f בגודל $\mathcal{O}\left(\frac{2^n}{n}\right)$.

טענה שאנון: קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו קיימת $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ שאינה ניתנת לחישוב בעזרת מעגל C בגודל קטן מאשר $\frac{2^n}{10n}$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי (אס"ד): תהא $Q\neq\varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית תהא $\delta:Q\times\Sigma\to Q$ יהי $q\in Q$ ותהא $F\subseteq Q$ אזי (Q,Σ,δ,q,F).

מצבים באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי Q.

אלפבית באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי Σ.

פונקציית מעברים באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי δ.

מצב התחלתי באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי q.

מצבים מקבלים באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי F.

פונקציית המעברים המורחבת: יהי (Q,Σ,δ,q_0,F) אס"ד אזי $\hat{\delta}:Q\times\Sigma^*\to Q$ עבורה לכל $q\in Q$ מתקיים $\hat{\delta}(q,\varepsilon)=q$ וכן לכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים $\hat{\delta}(q,x)=\delta\left(\hat{\delta}(q,x_1\ldots x_{n-1}),x_n\right)$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי מקבל מילה: יהי (Q,Σ,δ,q_0,F) אס"ד אזי $x\in\Sigma^*$ המקיים $\hat{\delta}(q_0,x)\in F$.

טענה: יהי A אס"ד ויהי $x\in\Sigma^n$ אזי (A מקבל את x)$\Longleftrightarrow$(קיימים $q_1\ldots q_n\in Q$ עבורם $\delta(q_{i-1},x_i)=q_i$ לכל $i\in[n]$ וכן $q_n\in F$).

שפה של אוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי A אס"ד אזי $L(A)=\{x\in\Sigma^*\mid x \text{ מקבל את } A\}$.

שפה רגולרית: יהי Σ אלפבית אזי שפה $\mathcal{L}\subseteq\Sigma^*$ עבורה קיים אס"ד A המקיים $L(A)=\mathcal{L}$.

טענה: $\varnothing$ רגולרית.

טענה: $\{\varepsilon\}$ רגולרית.

טענה: $\{x\mid \#_1(x)=1 \mod 2\}$ רגולרית.

טענה: $\left\{y\,1\,0^{2k}\mid \left(y\in\{0,1\}^*\right)\wedge(k\in\mathbb{N})\right\}$ רגולרית.

טענה: יהיו $L_1,L_2,L_3\subseteq\Sigma^*$ שפות אזי $L_1(L_2L_3)=(L_1L_2)L_3$.

טענה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה באשר $L\neq\varnothing$ וכן $L\neq\{\varepsilon\}$ אזי L^* אינסופית.

משפט: תהיינה $L,\mathcal{L}\subseteq\Sigma^*$ שפות רגולריות אזי

- $L\cup\mathcal{L}$ רגולרית.
- $L\cap\mathcal{L}$ רגולרית.
- $\overline{L}$ רגולרית.
- $L\|\mathcal{L}$ רגולרית.
- לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי L^n רגולרית.
- L^* רגולרית.

מסקנה: $\{x\mid \#_1(x)=0 \mod 2\}$ רגולרית.

אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס (אסלד"ם): תהא $Q\neq\varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית תהא $\delta:Q\times\Sigma\to\mathcal{P}(Q)$ ותהיינה $S,F\subseteq Q$ אזי (Q,Σ,δ,S,F).

מצבים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי Q.

אלפבית באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי Σ.

פונקציית מעברים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי δ.

מצבים התחלתיים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי S.

מצבים מקבלים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי F.

פונקציית המעברים המורחבת: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי $\hat{\delta}:\mathcal{P}(Q)\times\Sigma^*\to\mathcal{P}(Q)$ עבורה לכל $T\subseteq Q$ מתקיים $\hat{\delta}(T,\varepsilon)=T$ וכן לכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים $\hat{\delta}(q,x)=\bigcup_{q\in\hat{\delta}(T,x_1\ldots x_{n-1})}\delta(q,x_n)$.

אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס מקבל מילה: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי $x\in\Sigma^*$ המקיים $\hat{\delta}(S,x)\cap F\neq\varnothing$.

טענה: יהי M אסלד"ם ויהי $x\in\Sigma^n$ אזי (M מקבל את x)$\Longleftrightarrow$(קיימים $q_0\ldots q_n\in Q$ עבורם $q_0\in S$ וכן $q_i\in\delta(q_{i-1},x_i)$ לכל $i\in[n]$ וכן $q_n\in F$).

שפה של אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי M אסלד"ם אזי $L(M)=\{x\in\Sigma^*\mid x \text{ מקבל את } M\}$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי מינוס החזקה: יהי $M=(Q,\Sigma,\delta,S,F)$ אסלד"ם אזי אס"ד $(Q',\Sigma,\delta',q_0,F')$ באשר

- $Q'=\mathcal{P}(Q)$.
- $\delta'(T,x)=\bigcup_{q\in T}\delta(q,x)$.

- $q_0 = S$.
- $F' = \{T \subseteq Q \mid T \cap F \neq \varnothing\}$.

למה: יהי M אסלד"ם יהי A אס"ד החזקה של M תהא $T \subseteq Q_N$ ויהי $x \in \Sigma^*$ אזי $\hat{\delta_A}(T,x) = \hat{\delta_M}(T,x)$.

משפט: יהי M אסלד"ם אזי קיים אס"ד A עבורו $L(M) = L(A)$.

סימון: יהי Σ אלפבית אזי $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי (אסל"ד): תהא $Q \neq \varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית תהא $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ ותהיינה $S, F \subseteq Q$ אזי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$.

מצבים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד אזי Q.

אלפבית באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד אזי Σ.

פונקציית מעברים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד אזי δ.

מצבים התחלתיים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד אזי S.

מצבים מקבלים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד אזי F.

סביבת ε: יהי N אסל"ד ויהי $q \in Q$ אזי $E(q) = \left\{q' \in Q \mid \exists a \in Q^{k+1}. (a_0 = q) \land (\forall i \in [k] . a_i \in \delta(a_{i-1}, \varepsilon)) \land (a_k = q')\right\}$.

סביבת ε: יהי N אסל"ד ויהי $T \subseteq Q$ אזי $E(T) = \bigcup_{q \in T} E(q)$.

פונקציית המעברים המורחבת: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד אזי $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ עבורה לכל $T \subseteq Q$ מתקיים $\hat{\delta}(T, \varepsilon) = E(T)$ וכן לכל $x \in \Sigma^n$ מתקיים $\hat{\delta}(q,x) = R\left(\bigcup_{q \in \hat{\delta}(T, x_1 \ldots x_{n-1})} \delta(q, x_n)\right)$.

אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מקבל מילה: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסל"ד אזי $x \in \Sigma^*$ המקיים $\hat{\delta}(S,x) \cap F \neq \varnothing$.

סימון: יהי $x \in \Sigma^*$ יהיו $\sigma_1 \ldots \sigma_n \in \Sigma \backslash \{\varepsilon\}$ ויהיו $k_0 \ldots k_n \in \mathbb{N}$ עבורם $x = \varepsilon^{k_0}\sigma_0\varepsilon^{k_1}\sigma_1\varepsilon^{k_2} \ldots \sigma_n\varepsilon^{k_n}$ אזי $x^{\not\varepsilon} = \sigma_1 \ldots \sigma_n$.

טענה: יהי A אסל"ד ויהי $x \in \Sigma^n$ אזי (A מקבל את x)$\Longleftrightarrow$(קיימים $q_0 \ldots q_n \in Q$ עבורם $q_0 \in S$ וכן $q_i \in \delta\left(q_{i-1}, x_i^{\not\varepsilon}\right)$ לכל $i \in [n]$ וכן $q_n \in F$).

שפה של אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי A אסל"ד אזי $L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid A \text{ מקבל את } x\}$.

משפט: יהי N אסל"ד אזי קיים אסלד"ם M עבורו $L(N) = L(M)$.

מסקנה: יהי N אסל"ד אזי קיים אס"ד A עבורו $L(A) = L(M)$.

מסקנה: יהי Σ אלפבית ותהא$\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי ($\mathcal{L}$ רגולרית)$\Longleftrightarrow$(קיים אסל"ד N המקיים $L(N) = \mathcal{L}$).

ביטוי רגולרי (ב"ר): יהי Σ אלפבית אזי

- $\varnothing$.
- יהי $a \in \Sigma_\varepsilon$ אזי a.
- יהיו R_1, R_2 ביטויים רגולרים אזי $R_1 \cup R_2$.
- יהיו R_1, R_2 ביטויים רגולרים אזי $R_1 R_2$.
- יהי R ביטוי רגולרי אזי R^*.

שפה נוצרת מביטוי רגולרי: יהי Σ אלפבית אזי

- $L(\varnothing) = \varnothing$.
- יהי $a \in \Sigma_\varepsilon$ אזי $L(a) = \{a\}$.
- יהיו R_1, R_2 ביטויים רגולרים אזי $L(R_1 \cup R_2) = L(R_1) \cup L(R_2)$.
- יהיו R_1, R_2 ביטויים רגולרים אזי $L(R_1 R_2) = L(R_1) L(R_2)$.
- יהי R ביטוי רגולרי אזי $L(R^*) = L(R)^*$.

סימון: יהי Σ אלפבית אזי $R(\Sigma) = \{r \in \Sigma^* \mid r \text{ ביטוי רגולרי}\}$.

הערה: קיים סדר פעולות לביטויים רגולריים

- סגור קליני.
- שרשור.
- איחוד.

משפט: יהי Σ אלפבית ותהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי ($\mathcal{L}$ רגולרית)$\Longleftrightarrow$(קיים $r \in R(\Sigma)$ עבורו $L(r) = \mathcal{L}$).

שפה ניתנת לניפוח: שפה $\mathcal{L}$ וקבוע $\ell > 0$ עבורם לכל $w \in \mathcal{L}$ באשר $\ell \leq |w|$ קיימים $x, y, z \in \Sigma^*$ באשר $|y| > 0$ וכן $|xy| \leq \ell$ וכן $w = xyz$ וכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $xy^k z \in L$.

טענה למת הניפוח: תהא $\mathcal{L}$ שפה רגולרית אזי קיים $\ell > 0$ עבורו $\mathcal{L}$ ניתנת לניפוח ℓ.

קבוע הניפוח: תהא $\mathcal{L}$ שפה רגולרית אזי $\min\left\{\ell\in\mathbb{N}_+\mid \ell \text{ ניתנת לניפוח } \mathcal{L}\right\}$.

טענה: $\left\{x\in\{0,1\}^*\mid \#_0(x)=\#_1(x)\right\}$ אינה רגולרית.

טענה: $\left\{0^i1^j\mid i>j\right\}$ אינה רגולרית.

טענה: $\{a^p\mid a\in\Sigma, p \text{ ראשוני}\}$ אינה רגולרית.

טענה: השפה $\left\{a^ib^nc^n\mid n\in\mathbb{N}, i\in\mathbb{N}_+\right\}\cup\left\{b^nc^n\mid n,m\in\mathbb{N}\right\}$ ניתנת לניפוח 1 וכן אינה רגולרית.

הגדרה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $\sim_L=\left\{(x,y)\in(\Sigma^*)^2\;\middle|\;\forall z\in\Sigma^*.(yz\in L)\iff(xz\in L)\right\}$.

טענה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $\sim_L$ הינו יחס שקילות.

הגדרה: יהי A אס"ד אזי $\sim_A=\left\{(x,y)\in(\Sigma^*)^2\;\middle|\;\hat{\delta}(q_0,x)=\hat{\delta}(q_0,y)\right\}$.

טענה: יהי A אס"ד ויהיו $x,y\in\Sigma^*$ עבורם $x\sim_A y$ אזי $x\sim_{L(A)} y$.

מסקנה: יהי A אס"ד אזי $|Q|\ge\left|{}^{\Sigma^*}/_{\sim_A}\right|\ge\left|{}^{\Sigma^*}/_{\sim_{L(A)}}\right|$.

מסקנה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה רגולרית אזי ${}^{\Sigma^*}/_{\sim_L}$ סופית.

משפט מייהיל־נרוד: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי (L רגולרית)$\Longleftrightarrow$(${}^{\Sigma^*}/_{\sim_L}$ סופית).

סימון: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה באשר ${}^{\Sigma^*}/_{\sim_L}$ סופית תהא $\{x_1\ldots x_n\}$ קבוצת נציגים של ${}^{\Sigma^*}/_{\sim_L}$ ויהי $y\in\Sigma^*$ עבורו $x_i\sim_L y$ אזי $\text{Class}(y)=i$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי המחלקות: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה באשר ${}^{\Sigma^*}/_{\sim_L}$ סופית ותהא $\{x_1\ldots x_n\}$ קבוצת נציגים של ${}^{\Sigma^*}/_{\sim_L}$ אזי אס"ד (Q,Σ,δ,q_0,F) באשר

- $Q=\left[\left|{}^{\Sigma^*}/_{\sim_L}\right|\right]$.
- $\delta(i,\sigma)=\text{Class}(x_i\sigma)$.
- $q_0=\text{Class}(\varepsilon)$.
- $F=\{i\in Q\mid x_i\in L\}$.

טענה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה באשר ${}^{\Sigma^*}/_{\sim_L}$ סופית תהא $\{x_1\ldots x_n\}$ קבוצת נציגים של ${}^{\Sigma^*}/_{\sim_L}$ יהי A אס"ד המחלקות של L ויהי $y\in\Sigma^*$ אזי $\hat{\delta_A}(q_0,y)=\text{Class}(y)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי קיים אסל"ד N מעל $[n]$ באשר $|Q|=n$ עבורו $L(N)=\left\{x\in[n]^*\mid\exists\sigma\in\Sigma.\#_\sigma(x)=0\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי A אס"ד מעל $[n]$ עבורו $L(A)=\left\{x\in[n]^*\mid\exists\sigma\in\Sigma.\#_\sigma(x)=0\right\}$ אזי $|Q|\ge 2^n$.

מכונת טיורינג (מ"ט): תהא $Q\neq\varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma\subseteq\Gamma$ וכן $\sqcup\in\Gamma\backslash\Sigma$ יהיו $q_0,q_a,q_r\in Q$ באשר $q_a\neq q_r$ ותהא $\delta:(Q\backslash\{q_a,q_r\})\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{L,R\}$ אזי $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$.

מצבים במכונת טיורינג: תהא $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$ מ"ט אזי Q.

אלפבית במכונת טיורינג: תהא $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$ מ"ט אזי Σ.

אלפבית סרט במכונת טיורינג: תהא $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$ מ"ט אזי Γ.

פונקציית מעברים במכונת טיורינג: תהא $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$ מ"ט אזי δ.

מצב התחלתי במכונת טיורינג: תהא $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$ מ"ט אזי q_0.

מצב מקבל במכונת טיורינג: תהא $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$ מ"ט אזי q_a.

מצב דוחה במכונת טיורינג: תהא $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$ מ"ט אזי q_r.

קונפיגורציה: תהא M מ"ט אזי $c\in\Gamma^*Q\Gamma^*$.

קונפיגורציה התחלתית: תהא M מ"ט אזי קונפיגורציה $c\in\Gamma^*Q\Gamma^*$ עבורה קיים $v\in\Sigma^*$ המקיימת $c=q_0v$.

קונפיגורציה מקבלת: תהא M מ"ט אזי קונפיגורציה $c\in\Gamma^*Q\Gamma^*$ עבורה קיימים $u,v\in\Sigma^*$ המקיימים $c=uq_av$.

קונפיגורציה דוחה: תהא M מ"ט אזי קונפיגורציה $c\in\Gamma^*Q\Gamma^*$ עבורה קיימים $u,v\in\Sigma^*$ המקיימים $c=uq_rv$.

הערה: תהא M מ"ט ותהא c קונפיגורציה אזי נזהה את $c\sqcup$ עם c.

קונפיגורציה עוברת/צעד: תהא M מ"ט תהא c קונפיגורציה אזי קונפיגורציה c' המקיימת אחד הבאים

- קיימים $a,b,b'\in\Gamma$ וקיימים $u,v\in\Gamma^*$ וקיימים $q,q'\in Q$ עבורם $c=uaqbv$ וכן $\delta(q,b)=(q',b',L)$ וכן $c'=uq'ab'v$.
- קיימים $b,b'\in\Gamma$ וקיימים $u,v\in\Gamma^*$ וקיימים $q,q'\in Q$ עבורם $c=qbv$ וכן $\delta(q,b)=(q',b',L)$ וכן $c'=q'b'v$.
- קיימים $b,b'\in\Gamma$ וקיימים $u,v\in\Gamma^*$ וקיימים $q,q'\in Q$ עבורם $c=uqbv$ וכן $\delta(q,b)=(q',b',R)$ וכן $c'=ub'q'v$.

מכונת טיוריגנ מקבלת מילה: תהא M מ"ט אזי $x\in\Sigma^*$ עבורו קיימים $c_0\ldots c_n$ קונפיגורציות באשר $c_0=q_0x$ וכן c_{i-1} עוברת ל־c_i לכל $i\in[n]$ וכן c_n קונפיגורציה מקבלת.

מכונת טיורינג דוחה מילה: תהא M מ"ט אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו קיימים $c_0 \ldots c_n$ קונפיגורציות באשר $c_0 = q_0 x$ וכן c_{i-1} עוברת ל־c_i לכל $i \in [n]$ וכן c_n קונפיגורציה דוחה.

שפה של מכונת טיורינג: תהא M מ"ט אזי $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M \text{ מקבל את } x\}$.

מכונת טיורינג לא עוצרת על קלט: תהא M מ"ט אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו M לא מקבלת ולא דוחה את x.

מודלים שקולים: מודלים M, M' עבורם לכל A מסוג M וכן לכל B מסוג M' מתקיים

- קיימת A' מסוג M' המקיימת $L(A) = L(A')$.
- קיימת B' מסוג M המקיימת $L(B) = L(B')$.

מסקנה: אס"ד, אסל"ד ואסלד"ם הינם מודלים שקולים.

מכונת טיורינג נחה: תהא $Q \neq \varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma \subseteq \Gamma$ וכן $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$ יהיו $q_0, q_a, q_r \in Q$ באשר $q_a \neq q_r$ ותהא $\delta : (Q \backslash \{q_a, q_r\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$ אזי $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$.

הערה: את כל הפעולות ממכונת טיורינג נכליל בצורה הטבעית עבור מכונת טיורינג נחה.

מסקנה: מכונת טיורינג ומכונת טיורינג נחה הינן מודלים שקולים.

מכונת טיורינג רב־סרטית: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ תהא $Q \neq \varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma \subseteq \Gamma$ וכן $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$ יהיו $q_0, q_a, q_r \in Q$ באשר $q_a \neq q_r$ ותהא $\delta : (Q \backslash \{q_a, q_r\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$ אזי $(k, Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$.

הערה: את כל הפעולות ממכונת טיורינג נכליל בצורה הטבעית עבור מכונת טיורינג רב־סרטית.

קונפיגורציה במכונת טיורינג רב־סרטית: תהא M מ"ט רב־סרטית ותהיינה $c_1 \ldots c_k \in \Gamma^* Q \Gamma^*$ אזי $c_1 \$ c_2 \$ \ldots \$ c_k$.

קונפיגורציה התחלתית במכונת טיורינג רב־סרטית: תהא M מ"ט רב־סרטית אזי קונפיגורציה c עבורה קיים $v \in \Sigma^*$ המקיימת $c = q_0 v \sqcup \$ q_0 \sqcup \$ \ldots \$ q_0 \sqcup$.

מסקנה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי מכונת טיורינג ומכונת טיורינג רב־סרטית הינן מודלים שקולים.

מודל RAM: יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהיינה $\pi_1 \ldots \pi_p$ אזי $(k, (\pi_1 \ldots \pi))$.

מספר הרגיסטרים במודל RAM: יהי (k, Π) מודל RAM אזי k.

פקודות במודל RAM: יהי (k, Π) מודל RAM אזי Π.

קונפיגורציה במודל RAM: יהי (k, Π) מודל RAM אזי $\text{PC} \in \mathbb{N}$ וכן $R_0 \ldots R_k \in \mathbb{N}$ וכן $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

מונה התוכנית בקונפיגורציה: יהי (k, Π) מודל RAM ותהא (T, R, PC) קונפיגורציה אזי PC.

רגיסטרים בקונפיגורציה: יהי (k, Π) מודל RAM ותהא (T, R, PC) קונפיגורציה אזי R.

זיכרון בקונפיגורציה: יהי (k, Π) מודל RAM ותהא (T, R, PC) קונפיגורציה אזי T.

הערה: ריצת מודל RAM זהה לריצת מעבד MIPS.

טענה: מכונת טיורינג ומודל RAM הם מודלים שקולים.

מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית (מטל"ד): תהא $Q \neq \varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma \subseteq \Gamma$ וכן $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$ יהיו $q_0, q_a, q_r \in Q$ באשר $q_a \neq q_r$ ותהא $\delta : (Q \backslash \{q_a, q_r\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ אזי $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$.

קונפיגורציה עוברת: תהא N מטל"ד תהא $q \in Q$ ותהא $b \in \Gamma$ ותהיינה $u, v \in \Gamma^*$ באשר $uqbv$ קונפיגורציה אזי קונפיגורציה c' עבורה קיימת $\delta' : (Q \backslash \{q_a, q_r\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ המקיימת $\delta'(q, b) \in \delta(q, b)$ וכן $uqbv$ הינה δ'־עוברת ל־c'.

עץ חישוב: תהא N מטל"ד ויהי $x \in \Sigma^*$ אזי עץ קונפיגורציות $T_{N,x}$ עם שורש $q_0 x \sqcup$ עבורו לכל c, c' קונפיגורציות מתקיים (c צאצא של c')$\Longleftrightarrow$(c' עוברת ל־c).

מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית מקבלת מילה: תהא N מטל"ד אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו קיים עלה מקבל ב־$T_{N,x}$.

מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית דוחה מילה: תהא N מטל"ד אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו $T_{N,x}$ סופי וכן x אינו מתקבל על ידי N.

שפה של מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית: תהא N מטל"ד אזי $L(N) = \{x \in \Sigma^* \mid N \text{ מקבל את } x\}$.

מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית לא עוצרת על קלט: תהא N מטל"ד אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו N לא מקבלת ולא דוחה את x.

טענה: מכונת טיורינג ומכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית הינן מודלים שקולים.

פות כריעות למחצה/שפות ניתנות למניה רקורסיבית/שפות ניתנות לקבלה: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{RE} = \{\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \mid \text{קיימת מ"ט } M \text{ עבורה } \mathcal{L} = L(M)\}$.

מכונת טיורינג מכריע שפה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מ"ט M עבורה $\mathcal{L} = L(M)$ וכן לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים כי M עוצרת על x.

שפות כריעות/שפות רקורסיביות: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{R} = \{\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \mid \text{קיימת מ"ט } M \text{ המכריעה את } \mathcal{L}\}$.

מסקנה: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{RE}$.

מונה עבור שפה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מ"ט E מעל האלפבית $\Sigma \cup \{\$\}$ עבורו

- לכל $q \in Q$ ולכל $\sigma \in \Gamma$ מתקיים $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', R)$.

- הרצת E על הקונפיגורציה ε מקיימת
  - לכל $x\in L$ מתקיים כי $\$x\$$ על הסרט לאחר מספר סופי של צעדים.
  - לכל $x\notin L$ מתקיים כי $\$x\$$ לא על הסרט לעולם.

טענה: תהא $\mathcal{L}\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $(\mathcal{L}\in\mathcal{RE})\Longleftrightarrow$(קיים ל־$\mathcal{L}$ מונה).

מונה לקסיקוגרפי: תהא $\mathcal{L}\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי מונה E עבור $\mathcal{L}$ עבורו לכל $x,y\in\mathcal{L}$ באשר $x\le_{\text{lex}}y$ מתקיים כי $\$x\$$ רשום על הסרט לפני $\$y\$$.

טענה: תהא $\mathcal{L}\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $(\mathcal{L}\in\mathcal{R})\Longleftrightarrow$(קיים ל־$\mathcal{L}$ מונה לקסיקוגרפי).

הגדרה: יהי Σ אלפבית אזי $\text{co}\mathcal{RE}=\left\{\mathcal{L}\subseteq\Sigma^*\mid\overline{\mathcal{L}}\in\mathcal{RE}\right\}$.

טענה: $\mathcal{R}=\mathcal{RE}\cap\text{co}\mathcal{RE}$.

קידוד בינארי של מכונת טיורינג: פונקציה $f:\{M\mid \text{מ"ט } M\}\to\{0,1\}^*$ חח"ע עד כדי שינוי שמות.

סימון: תהא M מ"ט אזי $\langle M\rangle$ הינו הקידוד הבינארי של M.

סימון: תהא M מ"ט ותהא x מילה אזי $\langle M,x\rangle$ הינו הקידוד הבינארי של M מאותחל עם x.

משפט מכונת טיורינג אוניברסלית: קיימת מ"ט U מעל $\{0,1\}$ עבורה

- לכל מ"ט M ולכל קלט x של M מתקיים (U מקבלת את $\langle M,x\rangle$)$\Longleftrightarrow$(M מקבלת את x).
- לכל מ"ט M ולכל קלט x של M מתקיים (U דוחה את $\langle M,x\rangle$)$\Longleftrightarrow$(M דוחה את x).
- לכל מ"ט M ולכל קלט x של M מתקיים (U לא עוצרת עבור $\langle M,x\rangle$)$\Longleftrightarrow$(M לא עוצרת עבור x).
- לכל $x\in\{0,1\}^*$ באשר $x\notin\text{Im}(f)$ מתקיים כי U דוחה את x.

טענה: קיימת $L\subseteq\{0,1\}^*$ שפה עבורה $L\notin\mathcal{RE}\cup\text{co}\mathcal{RE}$.

הגדרה: $\text{ACC}=\{\langle M,x\rangle\mid(\text{מ"ט } M)\wedge(\text{מילה } x)\wedge(M \text{ מקבלת את } x)\}$.

טענה: $\text{ACC}\in\mathcal{RE}$.

למה: לא קיימת מ"ט M מעל $\{0,1\}$ עבורה $L(M)=\{\langle N\rangle\mid\langle N\rangle\notin L(N)\}$.

למה: תהא M מ"ט המכריעה את ACC אזי קיימת מ"ט N המכריעה את $\{\langle N\rangle\mid\langle N\rangle\notin L(N)\}$.

טענה: $\text{ACC}\notin\mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{HALT}=\{\langle M,x\rangle\mid\langle M,x\rangle\mid(\text{מ"מ } M)\wedge(\text{מילה } x)\wedge(M \text{ עוצרת על } x)\}$.

טענה: $\text{HALT}\in\mathcal{RE}\backslash\mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{EMPTY}=\{\langle M\rangle\mid(\text{מ"ט } M)\wedge(L(M)=\varnothing)\}$.

טענה: $\text{EMPTY}\notin\mathcal{R}$.

מכונת טיורינג מחשבת פונקציה: תהא M מ"ט ותהא $D\subseteq\Sigma$ אזי $f:D\to(\Gamma\backslash\{\sqcup\})^*$ עבורה לכל $x\in D$ מתקיים כי M עוצרת על x וכן הסרט בסוף הריצה הינו $f(x)\sqcup^*$.

פונקציה חשיבה: תהא $D\subseteq\Sigma$ אזי $f:D\to(\Gamma\backslash\{\sqcup\})^*$ עבורה קיימת מ"ט M המחשבת את f.

רדוקציית מיפוי: יהיו Σ,Δ אלפבייתים באשר $\Sigma\subseteq\Delta$ תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה ותהא $B\subseteq\Delta^*$ שפה אזי $f:\Sigma^*\to\Delta^*$ חשיבה עבורה לכל $x\in\Sigma^*$ מתקיים $(x\in A)\iff(f(x)\in B)$.

סימון: יהיו Σ,Δ אלפבייתים באשר $\Sigma\subseteq\Delta$ תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה תהא $B\subseteq\Delta^*$ שפה ותהא $f:\Sigma^*\to\Delta^*$ רדוקציית מיפוי אזי $A\le_m B$.

טענה: $\text{EMPTY}\in\text{co}\mathcal{RE}$.

טענה: תהיינה A,B שפות באשר $B\in\mathcal{R}$ וכן $A\le_m B$ אזי $A\in\mathcal{R}$.

מסקנה: תהיינה A,B שפות באשר $A\notin\mathcal{R}$ וכן $A\le_m B$ אזי $B\notin\mathcal{R}$.

הערה: יש דבר כזה רדוקציה כללית שמכלילה את רדוקציית המיפוי, לא עברנו על זה פורמלית אבל כמובן שהמרצה הראה טענות בנושא, מסומן $\le$.

מסקנה: $\text{ACC}\le\{\langle M\rangle\mid\langle M\rangle\notin L(M)\}$.

מסקנה: $\text{ACC}\le_m\text{HALT}$.

מסקנה: $\text{ACC}\le\text{EMPTY}$.

הגדרה: $\text{REG}=\{\langle M\rangle\mid L(M) \text{ רגולרית}\}$.

טענה: $\text{REG}\notin\mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{EQ}=\{\langle M_1,M_2\rangle\mid L(M_1)=L(M_2)\}$.

טענה: $\mathrm{EQ}\notin\mathcal{R}$.

הגדרה: $\mathrm{HALT}_{\varepsilon}=\{\langle M\rangle\mid \text{עוצר על } \varepsilon\ M\}$.

טענה: $\mathrm{HALT}\leq_m\mathrm{HALT}_{\varepsilon}$.

טענה: תהא $A\in\mathcal{R}$ ותהא $B\in\mathcal{P}\left(\Sigma^*\right)\backslash\left\{\Sigma^*,\varnothing\right\}$ אזי $A\leq_m B$.

למה: תהיינה A,B שפות ותהא f רדוקציית מיפוי מ־A ל־B אזי f רדוקציית מיפוי מ־$\overline{A}$ ל־$\overline{B}$.

טענה: תהיינה A,B שפות באשר $A\leq_m B$ אזי
- אם $B\in\mathcal{RE}$ אזי $A\in\mathcal{RE}$.
- אם $B\in\mathrm{co}\mathcal{RE}$ אזי $A\in\mathrm{co}\mathcal{RE}$.

טענה: $\mathrm{ACC}\leq_m\mathrm{EQ}$ וכן $\overline{\mathrm{ACC}}\leq_m\mathrm{EQ}$.

מסקנה: $\mathrm{EQ}\notin\mathcal{RE}\cup\mathrm{co}\mathcal{RE}$.

תכונה סמנטית: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}\left(\Sigma^*\right)$.

הגדרה: תהא $\mathcal{C}$ תכונה סמנטית אזי $L_{\mathcal{C}}=\{\langle M\rangle\mid L\left(M\right)\in\mathcal{C}\}$

משפט רייס: תהא $\mathcal{C}\in\mathcal{P}\left(\mathcal{RE}\right)\backslash\left\{\mathcal{RE},\varnothing\right\}$ תכונה סמנטית אזי $L_{\mathcal{C}}\notin\mathcal{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{C}\in\left\{\mathcal{RE},\varnothing\right\}$ אזי $L_{\mathcal{C}}\in\mathcal{R}$.

הגדרה: $\mathrm{PRIME}=\left\{(p)_2\mid p\in\mathbb{P}\right\}$.

הגדרה: $\mathrm{EQPRIME}=\{\langle M\rangle\mid L\left(M\right)=\mathrm{PRIME}\}$.

טענה: $\mathrm{EQPRIME}\notin\mathcal{R}$.

טענה משפט רייס הרחבה ראשונה: תהא $\mathcal{C}\in\mathcal{P}\left(\mathcal{RE}\backslash\left\{\varnothing\right\}\right)\backslash\left\{\varnothing\right\}$ אזי $L_{\mathcal{C}}\notin\mathrm{co}\mathcal{RE}$.

טענה משפט רייס הרחבה שנייה: תהא $\mathcal{C}\in\mathcal{P}\left(\mathcal{RE}\right)\backslash\left\{\mathcal{RE}\right\}$ באשר $\varnothing\in\mathcal{C}$ אזי $L_{\mathcal{C}}\notin\mathcal{RE}$.

מסקנה: $\mathrm{REG}\notin\mathcal{RE}$.

הגדרה: $\mathrm{ALL}=\{\langle M\rangle\mid L\left(M\right)=\Sigma^*\}$.

למה: $\overline{\mathrm{HALT}}\leq_m\mathrm{ALL}$.

טענה: $\mathrm{ALL}\notin\mathcal{RE}\cup\mathrm{co}\mathcal{RE}$.

חסם עליון לזמן ריצה של מכונת טיורינג: תהא M מ"ט אזי $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים כי M על הקלט x מבצעת לכל היותר $T\left(n\right)$ צעדים.

הגדרה: תהא $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\mathrm{DTime}\left(T\left(n\right)\right)=\{L\left(M\right)\mid \mathcal{O}\left(T\left(n\right)\right)\text{ מ"ט שרצה בזמן } M\}$.

טענה: $\left\{0^k1^k\mid k\geq0\right\}\in\mathrm{DTime}\left(n^2\right)$.

מסקנה: $\left\{0^k1^k\mid k\geq0\right\}\in\mathrm{DTime}\left(n\log\left(n\right)\right)$.

משפט: תהא $t\left(n\right)=o\left(n\log\left(n\right)\right)$ ותהא $L\in\mathrm{DTime}\left(t\left(n\right)\right)$ אזי L רגולרית.

מסקנה: תהא $t\left(n\right)=o\left(n\log\left(n\right)\right)$ אזי $\left\{0^k1^k\mid k\geq0\right\}\notin\mathrm{DTime}\left(t\left(n\right)\right)$.

פונקציה חשיבה בזמן: פונקציה $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה קיימת מ"ט M המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי M על הקלט 1^n מחשבת את $\left(T\left(n\right)\right)_2$ בזמן $\mathcal{O}\left(T\left(n\right)\right)$.

טענה: תהא $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חשיבה בזמן שאינה קבועה אזי $T\left(n\right)=\Omega\left(n\right)$.

משפט: קיימת מ"ט אוניברסלית U וקיים $C\in\mathbb{R}$ עבורם לכל מ"ט M ולכל קלט x באשר M עוצרת על הקלט x לאחר t צעדים מתקיים כי U עוצרת על הקלט $\langle M,x\rangle$ תוך $C\cdot t$ צעדים.

משפט: קיימת מ"ט אוניברסלית U וקיים $C\in\mathbb{R}$ עבורם לכל מ"ט M לכל קלט x ולכל $t\in\mathbb{N}$ מתקיים
- אם M עוצרת על הקלט x לאחר לכל היותר t צעדים אזי U מקבלת את $\langle M,x,t\rangle$.
- אם M דוחה את x או לא עוצרת לאחר t צעדים אזי U דוחה את $\langle M,x,t\rangle$.
- U עוצרת לאחר $C\cdot t\log\left(t\right)$ צעדים.

משפט היררכיית הזמן: תהא $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חשיבה בזמן ותהא $t\left(n\right)=o\left(\frac{T(n)}{\log(T(n))}\right)$ אזי $\mathrm{DTime}\left(t\left(n\right)\right)\subsetneq\mathrm{DTime}\left(T\left(n\right)\right)$.

מסקנה: יהיו $1\leq c<d$ אזי $\mathrm{DTime}\left(n^c\right)\subsetneq\mathrm{DTime}\left(n^d\right)$.

טענה: תהא $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באשר $T\left(n\right)\geq n$ ותהא M מ"ט רב־סרטית שרצה בזמן $T\left(n\right)$ אזי קיימת מ"ט M' שרצה בזמן $\mathcal{O}\left(T^2\left(n\right)\right)$ עבורה $L\left(M\right)=L\left(M'\right)$.

טענה: תהא $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באשר $T\left(n\right)\geq n$ ותהא M מודל RAM שרצה בזמן $T\left(n\right)$ אזי קיימת מ"ט M' שרצה בזמן $\mathcal{O}\left(T^3\left(n\right)\right)$ עבורה $L\left(M\right)=L\left(M'\right)$.

חסם עליון לזמן ריצה של מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית: תהא N מטל"ד אזי $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים כי $T_{N,x}$ בעומק לכל היותר $T\left(n\right)$.

הגדרה: תהא $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{NTime}\left(T\left(n\right)\right)=\left\{L\left(N\right)\mid \text{מטל"ד שרצה בזמן } \mathcal{O}\left(T\left(n\right)\right)\ N\right\}$.

טענה: תהא $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באשר $T\left(n\right)\geq n$ ותהא N מטל"ד שרצה בזמן $T\left(n\right)$ אזי קיימת מ"ט M שרצה בזמן $2^{\mathcal{O}\left(T\left(n\right)\right)}$ עבורה $L\left(N\right)=L\left(M\right)$.

הגדרה: $\mathcal{P}=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{DTime}\left(n^c\right)$.

הגדרה: $\text{PATH}=\left\{\left\langle G,s,t\right\rangle \mid \text{גרף מכוון עם מסלול מ־} s \text{ ל־} t\ G\right\}$.

טענה: $\text{PATH}\in\mathcal{P}$.

משפט: $\text{PRIME}\in\mathcal{P}$.

הגדרה: $\mathcal{NP}=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{NTime}\left(n^c\right)$.

מסקנה: $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{NP}$.

הגדרה: $\text{HAMPATH}=\left\{\left\langle G,s,t\right\rangle \mid \text{גרף מכוון עם מסלול המילטוני מ־} s \text{ ל־} t\ G\right\}$.

טענה: $\text{HAMPATH}\in\mathcal{NP}$.