$(a\in\{a_1,\ldots,a_n\})\Longleftrightarrow ((a=a_1)\vee\ldots\vee(a=a_n))$ מתקיים $\{a_1,\ldots,a_n\}$ מתקיים Σ^* אלפבית אזי Σ^* כל המחרוזות הסופיות באלפבית. $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ המקיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת Σ^* אזי קיימת ויחידה Σ^*

- $.B \subseteq S \bullet$
- .F סגורה להפעלת S
- $.S\subseteq A$ אזי F אזי להפעלת וכן וכן $B\subseteq A$ עבורה עבורה $A\subseteq \Sigma^*$ אזי תהא מינימליות: \bullet

אינדוקציה מבנית: יהי עולם $X_{B,F}\subseteq \Sigma^*$ אזי $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} o \Sigma^* \mid i\in I\}$ ותהא $B\subseteq \Sigma^*$ מינימלית סגורה מבנית: יהי עולם $B\subseteq X_{B,F}$ מינימלית סגורה $B\subseteq X_{B,F}$ עבורה F

 $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid (B\subseteq Y)\land (F\text{ Derived Results})\land (F)\}$ אזי ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי ותהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת Y עבורה $Y\subseteq\Sigma^*$ אזי $Y\subseteq\Sigma^*$ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$

 $p(0) \land (\forall n \in \mathbb{N}.p(n) \Longrightarrow p(n+1))) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}.p(n))$ אזי עענה על p אטענה משפט האינדוקציה: תהא $p(n) \land (\forall n \in \mathbb{N}.p(n))$

על ידי הפעלת $a_i) \lor (a_i \in B)$ מתקיים $i \in [n]$ וכן לכל $a_n = a$ וכן עבורה a_1, \ldots, a_n אזי אזי $a \in X_{B,F}$ אזי $a_i \in X_{B,F}$ מתקבל על ידי הפעלת מ־ $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

 $(a \in X_{B,F})$ אזי ($a \in X_{B,F}$) אזי (מיימת סדרת יצירה ל־ $a \in \Sigma^*$ יהי

 $X_{B,F} = igcup_{i=1}^\infty \left\{ a \in \Sigma^* \mid n \;$ מסקנה: $a \in \mathbb{Z}$ בעלת סדרת יצירה באורך

 $\Sigma = \{\wedge, ee, \neg, \Longrightarrow, (,)\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$:עולם תחשיב הפסוקים:

 $a\in \Sigma^*$ יהי תחשיב הפסוקים אזי ביטוי: יהי ביטוי

אזי $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי הגדרה: יהיו

- $\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)" \bullet$
- $.\lor (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \lor \omega_2)" \bullet$
- $:\Longrightarrow (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \Longrightarrow \omega_2)" \bullet$
 - $.\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)" \bullet$

.WFF = $X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$:פסוקי חוקי/פסוק היטב/ביטוי המוגדרות המוגדרות המוגדרות היטב/ביטוי הוקי/פסוק

 $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ עבורו $p \in \mathrm{WFF}$ פסוק אטומי/יסודי:

.(") ונגמר עם (") ונגמר עם (") ונגמר עם אזי $p \in \mathsf{WFF}$ יהי יהי

 $.q_1(q_2
otin {
m WFF}$ אזי $q_1,q_2\in {
m WFF}$ מסקנה: יהיו

משפט הקריאה היחידה: יהי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה: יהי

- . פסוק אטומי lpha
- $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ •
- $.lpha=(etaee\gamma)$ עבורם $eta,\gamma\in \mathrm{WFF}$ פיימים ויחידים •
- $.\alpha = (\beta \Longrightarrow \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ יימים ויחידים
 - $\alpha = (\neg \beta)$ עבורו $\beta \in \text{WFF}$ •

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי $\mathcal{O}\left(\operatorname{len}\left(\alpha\right)\right)$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .¬ .1
- .∧, ∨ .2
 - \Longrightarrow .3

T, true :אמת:

.F, false :שקר

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

 $.TT_\circ$ אזי טבלת האמת של יהינה $(\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow)$ הינה סימון: תהא

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	p	$q \lor p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q

true

false

 $\neg q$

false

true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

 $v:\{p_i\} o \{F,T\}$ השמה: פונקציה

המוגדרת $\overline{v}: \mathsf{WFF} o \{F,T\}$ השמה אזי פונקציה השמה לפסוק: תהא

 $q \wedge p$

true

false

false

false

- $\overline{v}(p) = v(p)$ יהי p פסוק אטומי אזי •
- $.\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$ אזי פסוק אזי
- $.\overline{v}\left(eta\circ\gamma
 ight)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(eta
 ight),\overline{v}\left(\gamma
 ight)
 ight)$ איי הייו eta פסוקים ותהא פעולה בינארית איי

 $ar{v}\left(lpha
ight)=T$ עבורה עבורה אזי $lpha\in\mathsf{WFF}$ עבורה עבורה תהא

 $v \models \alpha$ אזי א מסופקת על ידי מסופקת על ידי $\alpha \in \mathsf{WFF}$ השמה ותהא

 $v \not\models \alpha$ אזי v אזי אזי מסופקת על מסופקת על ידי א מימון: תהא $\alpha \in \mathsf{WFF}$

המוגדרת Var : WFF $ightarrow \mathcal{P}\left(\{p_i\}
ight)$ פונקציה פונקציה בפסוק:

- .Var $(p) = \{p\}$ יהי p פסוק אטומי אזי •
- . $Var(\neg \alpha) = Var(\alpha)$ אזי פסוק מיהי •
- . Var $(\beta \circ \gamma) =$ Var $(\beta) \cup$ Var (γ) אזי אזי פעולה פעולה פעולה פעולה β, γ יהיו •

 $.\overline{v_{1}}\left(lpha
ight)=\overline{v_{2}}\left(lpha
ight)$ אזי $\forall p\in\mathrm{Var}\left(lpha
ight).v_{1}\left(p
ight)=v_{2}\left(p
ight)$ עבורה עבורה

q

true

true

false

false

p

true

false

true

false

 $.TT_{lpha}$ אזי ניתן לייצג את lpha על ידי $lpha\in {
m WFF}$ מסקנה: יהי

 $TT = TT_{\alpha}$ עבורו $\alpha \in \mathsf{WFF}$ קיים שלמה פונקציונלית: עבורה $K \subseteq \{\land, \lor, \lnot, \Longrightarrow\}$ עבורו $\alpha \in \mathsf{WFF}$ קיים שלמה פונקציונלית: טענה: $\{\land, \lor, \neg, \Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

. טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה עבורה עבורה אזי $T,\wedge,\vee\in K$ מערכת קשרים עבורה

 $v \models \alpha$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $\alpha \in \mathsf{WFF}$ פסוק פסוק

 $v \models \alpha$ מתקיים עבורו לכל השמה עבורו מחקיים $\alpha \in \mathsf{WFF}$

 $\perp = \alpha$ טאוטולוגיה אזי $\alpha \in \mathsf{WFF}$ טאוטולוגיה

 $\models (\neg \alpha)$ עבורו $\alpha \in \mathsf{WFF}$ שתירה: פסוק

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=\overline{v}\left(eta
ight)$ מתקיים שקולים: פסוקים $lpha,eta\in\mathsf{WFF}$ עבורם לכל השמה v

 $\alpha \equiv \beta$ שקולים אזי $\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}$ סימון: יהיו

 $.v \models lpha$ מתקיים $lpha \in \Gamma$ עבורה עבורה לכל $\Gamma \subseteq WFF$ מתקיים $lpha \in \Gamma$

 $v \models \Gamma$ אזי אוי השמה על ידי השמה קבוצה קבוצה קבוצה קבוצה קבוצה רהא

 $v \models \alpha$ מתקיים $v \models \Gamma$ מתקיים עבורו לכל השמה v המניימת $v \models \alpha$ מתקיים אזיי $\alpha \in \mathsf{WFF}$ מתקיים

 $\Gamma \models \alpha$ אזי מ־ר מכטית מים פסוק נובע מסוק ויהי ויהי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ אזי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$

טענה: יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \bullet$
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \bullet$
 - $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \bullet$
 - $.(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha) \bullet$
 - $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \bullet$
 - $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \bullet$
 - $\neg (\neg \alpha) \equiv \alpha \bullet$
 - $\neg (\alpha \land \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor (\neg \beta) \bullet$
 - $\neg (\alpha \lor \beta) \equiv (\neg \alpha) \land (\neg \beta) \bullet$
 - $.(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor \beta \bullet$

```
.\gamma \models \alpha מתקיים lpha \in \mathsf{WFF} למה: יהי \gamma \in \mathsf{WFF} סתירה אזי לכל
                                                            \Gamma \models \beta אזי \Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta וכן \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta עבורם \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} ויהיו \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} עבורם.
                                                         .\Gamma \models (\neg \alpha) אזי \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta וכן \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta אזי \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} אזי רבורם \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} אזי \Gamma \subseteq \mathsf{WFF}
                                                                                                                         (\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta)) אזי \alpha, \beta \in WFF טענה: יהיו
                                                                                                                         הצבת פסוק בפסוק: יהיו lpha, arphi \in \mathsf{WFF} ויהי פסוק אטומי אזי הצבת מוק בפסוק:
                                                                                                                                                                      \alpha (\varphi/p) = \varphi אז \alpha = p אם •
                                                                                                                                    lpha\left(arphi/p
ight)=lpha אזי lpha
eq p אטומי וכן lpha
                                                                                                               \alpha(\varphi/p) = \neg \beta(\varphi/p) אזי \alpha = \neg \beta עבורו \beta \in \mathsf{WFF}
                                      \alpha\left(\varphi/p\right)=\beta\left(\varphi/p\right)\circ\gamma\left(\varphi/p\right) אזי \alpha=\beta\circ\gamma אם בינארית פעולה בינארית פעולה \beta,\gamma\in\mathsf{WFF} אם קיימים
                                                                                                                       lpha\left(arphi/p
ight)\in\mathsf{WFF} אזי אזי p\in\mathsf{Var}\left(lpha
ight) ויהי lpha,arphi\in\mathsf{WFF} איזי
                                                                                 הצבת בסוקים בפסוק: יהיו p_1 \dots p_n ויהיו lpha, arphi_1 \dots arphi_n \in \mathsf{WFF} היהיו יהיו
                                                                                                                      lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=arphi_{i} אזי i\in\left[n
ight] עבור lpha=p_{i}
                                                                                       lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=lpha אז אז i\in\left[n
ight] לכל לכל lpha
eq p_{i} אם lpha פסוק אטומי וכן
                                                                      lpha \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) = 
eg eta \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) אם קיים eta \in \mathsf{WFF} עבורו lpha = \neg eta אזי lpha = \neg eta
lpha\left(arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight)=eta\left(arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight)\circ אם קיימים eta,\gamma\in שולה בינארית עבורה lpha=eta\circ\gamma אם קיימים eta,\gamma\in
                                                                                                                                                                                     \gamma \left( \varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n \right)
             .\overline{v}\left(lpha\left(arphi/p
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אזי v'\left(p_{j}
ight)=\left\{egin{array}{c}v^{(p_{j})}&i
eq j\\\overline{v}(arphi)&i=j\end{array}
ight. השמה נגדיר השמה v השמה עסענה: יהיו lpha,arphi\in\mathbb{W} אזי מינה אזי מומי ותהא יחשמה ערה השמה נגדיר השמה מוחדים אזי מינה מוחדים וותהא יחשמה ערכה.
מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו p_n יהיו יהיו \alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathsf{WFF} השמה נגדיר השמה עדיר השמה מסקנה הקשר בין הצבות השמה עדיר יהיו
       \overline{v}\left(lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אזי v'\left(p_j
ight)=\left\{egin{array}{ll} v(p_j) & j\notin [n] \\ \overline{v}(arphi_j) & j\in [n] \end{array}
ight. טאוטולוגיה. lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight) טאוטולוגיה יהי lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight) ויהיו lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight) טאוטולוגיה.
                                                                                                                         .NNF = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}} :NNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                   lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{NNF} משפט: יהי אזי קיים אזי קיים
                                                                                                                                                         .Conj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}} יימון:
                                                                                                                                                           .DNF =X_{	ext{Conj},\{ee{}ullet} :DNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                    lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m DNF} אזי קיים lpha\in {
m WFF} אזי יהי
                                                                                                                                                         Disj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\lor\}} יימון:
                                                                                                                                                            .CNF = X_{\mathrm{Disj},\{\wedge\}} :CNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                    lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{CNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF} אזי קיים
                                  A\subseteq N אזי A\subseteq M אזי A\subseteq N מערכת הוכחה: יהי
                                                                                         הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.
                                                                                                       N מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי מערכת מערכת הוכחה
                                                                                                      A אזי אוכחה מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                    F מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי בללי היסק של מערכת הוכחה:
                                                                                                                  X_{A,F} אזי המשפטים: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                                            \vdash_{\sigma} \varphi אזי משפט \varphi \in Nויהי הוכחה מערכת מערכת מערכת S
                                                     (\Sigma,N,A,F,\Gamma) אזי \Gamma\subseteq N מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה בעלת הנחות:
                                                        X_{A \cup \Gamma, F} מערכת הנכחה בעלת הנחות אזי (\Sigma, N, A, F, \Gamma) מערכת הנכחה בעלת הנחות אזי
                                                    arphi מערכת יצירה אל סדרת יהי ויהי arphi\in N יכיח עלת מערכת הוכחה מערכת (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הוכחה
                                                                                  \Gamma \vdash_{c} \varphiיכיח אזי \varphi \in N הנחות ויהי הנכחה תהיינה מערכת מערכת מערכת הוכחה הנכחה \Gamma \subseteq N
                                                                                                                                                  טענה: תהא \varphi \in N אזי מערכת הוכחה מערכת מענה:
                                                      A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G ותהא A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G אזי קיימת A \subseteq G סופית עבורה A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי קיימת A \subseteq G מתקיים A \subseteq G אזי A \subseteq G כלל היסק המקיים A \subseteq G אזי A \subseteq G אזי A \subseteq G כלל הניתוק: תהא A \subseteq G מערכת הוכחה אזי A \subseteq G
```

```
מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך
```

- $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$ אלפבית:
 - $N = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$:נוסחאות:
- , $A_2=((\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\gamma))\Longrightarrow((\alpha\Longrightarrow\beta)\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow\gamma)))$, $A_1=(\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$:אקטיומות: $A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$
 - $F = \{MP\}$ כללי היסק:

אזי HPC־טענה: יהיו lpha,eta נוסחאות ב

- $\begin{array}{c} . \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \alpha) \ \bullet \\ . \vdash_{\mathrm{HPC}} ((\neg \alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta)) \ \bullet \end{array}$
 - $. \{ \neg \alpha \} \vdash_{\mathsf{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet$

 $\{lpha\} \ igcap_{
m HPC} \ eta$ אזי אויי איזי אויים אדר באשר אויים אויים אויים מסקנה: יהיו lpha, eta ווסחאות ב־HPC מסקנה:

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון ⊢ הוא במערכת HPC.

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$ אזי HPC משפט הדידוקציה: תהיינה הנחות מעל

.Ded $(\Gamma)=\{\alpha\in N\mid \Gamma\vdash\alpha\}$ אזי איי ותהא S ותהא מערכת הוכחה סימון: תהא מערכת הוכחה

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $((\neg(\neg\alpha))\Longrightarrow\alpha)$ אזי $(\Gamma\models\alpha)\Longrightarrow\alpha$ אזי ($\Gamma\models\alpha)\Longrightarrow\alpha$ נוסחה מעל S מערכת הוכחה מערכת הוכחה S עבורה לכל S הנחות מעל S ולכל S מערכת הוכחה מערכת הוכחה מערכת הוכחה אזי S עבורה לכל S הנחות מעל S ולכל S הנחות מעל S הנחו

 $(\Gamma \models lpha) \Longrightarrow \left(\Gamma \vdash_{S} lpha
ight)$ מערכת הוכחה S מערכת הוכחה לכל G הנחות מעל G הנחות מעל מתקיים עבורה לכל מערכת הוכחה מערכת הוכחה שלמה: למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט: HPC מערכת נאותה.

אזי HPC אזי מעל מעל מוחסאות $lpha,eta,\gamma$ ותהיינה HPC למה: תהיינה Γ הנחות מעל

 $.((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$

אזי HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה α, β ותהיינה HPC משפט היינה Γ הנחות מעל

 $((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \land (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$

 $\Gamma \not \models \alpha$ המקיימת S נוסחה מעל עבורה קיימת מעל קבוצת הנחות אזי Γ אזי אזי הוכחה מערכת תהא מערכת הנחות מעל אזי Γ α נוסחה מעל S המקיימת מענה: תהא מערכת הוכחה הנחה הנחה מעל S הנחות מעל S המקיימת מענה: תהא מערכת הוכחה מעל אזי

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי ($\Gamma \bigctrup A) \left(\Gamma \bigctrup A) \left(\Gamma \bigctrup A) \left(\Gamma \cap A)$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מעל עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית אזי T קבוצת הנחות עקבית מעלית: תהא מערכת הוכחה S אזי קבוצת הנחות עקבית מעלית: תהא מערכת הוכחה אזי T $\Gamma = \Delta$ מתקיים $\Gamma \subseteq \Delta$ ממקיימת S מעל

 $.lpha\in\Gamma$ איי איי HPC איי הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC איי איי $\Gamma\vdash\alpha$ איי קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל

 $(\alpha \in \Gamma) \lor (\neg \alpha \in \Gamma)$ אזי HPC איזי מקסימלית מעל מקסימלית עקבית מקסימלית מעל אויר ותהא $\alpha \in \Gamma$

אזי HPC אוני α,β נוסחאות עקבית מעל אור אורר עקבית עקבית עקבית עקבית הנחות עקבית הנחות עקבית אורר אורר של אוי

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \iff ((\neg \alpha \in \Gamma) \lor (\beta \in \Gamma))$

אזי Γ ספיקה. אזי HPC איזי מקסימלית עקבית הנחות עקבוצת הנחות סענה: תהא

 $\Gamma\subseteq \Delta$ טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Γ

. ספיקה Γ אזי HPC טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית הנחות סענה:

 Γ ספיקה). אזי (Γ עקבית) קבוצת הנחות מעל HPC מסקנה: תהא

משפט: HPC מערכת שלמה.

 $(\Gamma \vdash \alpha) \Longleftrightarrow (\Gamma \models \alpha)$ אזי HPC מסקנה: תהיינה HPC מסקנה מעל

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי אז (Γ ספיקה) משפט הקומפקטיות: תהא Γ סופית Δ ספיקה).

.Ass $(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \to \{F,T\} \mid v \models \Gamma\}$ אזי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ תהא

 $\{p_i\} o \{F,T\}$ טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\} o \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על

. הינה קומפקטית. $\{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \mathsf{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathsf{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

קב $arphi_G:E o {
m WFF}$ אזי $(v,u)\in E$ חח"ע ויהיו $f:V o {
m WFF}$ אזי מכוון תהא

 $.\varphi_G((v,u)) = "f(v) \Longrightarrow f(u)"$

```
.(סטענה: יהי G) איז איז G חח"ע איז f:V	o WFF ספיקה עלא מכוון ותהא G ספיקה איז G חח"ע איז וותהא
                                    .(סופי G' סופי G' סופי G' סופי G' הינו G הינו G' בביע) אזי (G הינו G' בינו G' מסקנה: יהי
                                      .(סטענה: סטופי G' סופי G' סופי G' סופי אר הינו G' בביע) איז איז מכוון אזי היי G גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי
                                      K=\operatorname{Ass}\left(\Gamma\right) המקיימת \Gamma\subseteq\operatorname{WFF} השמות גדירה: קבוצה K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}\right) עבורה קיימת
                                                                                                                       גדירה, \{v\} השמה v גדירה, לכל \{p_i\} \rightarrow \{F,T\} גדירה, לכל \emptyset
                                                                                                                                                 . טענה: קיימת K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}\to\{F,T\}\right) שאינה גדירה
                                                                                                                                 K_{\text{finite}} = \left\{ v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid \left| v^{-1} \left( \{T\} \right) \right| < \aleph_0 \right\} שימון:
                                                                                                                                                                                                              .טענה: אינה גדירה K_{
m finite}
משפט: תהא K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) התב"ש
                                                                                                                                                                                                  . גזירה וכן K^{\mathcal{C}} גדירה K
                                                                                                                                                                                                         גדירה באופן סופי. K ullet
                                                                                                                                                                                           . גדירה על ידי פסוק יחיד K ullet
                                       \{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i,n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n 	o \Sigma \mid i,n \in \mathbb{N}\}\} מילון: יהי \Sigma אלפבית אזי
                                                                                                                                                               C מילון אזי (C,R,F) מילון אזי
                                                                                                                                                                  R מילון אזי (C,R,F) סימני יחס במילון: יהי
                                                                                                                                                          F מילון אזי (C,R,F) מילון: יהי
                                                                                                                      מילון סופי של סימנים. \Sigma אלפבית אזי מילון אלפבית מספר סופי של סימנים.
                                                                                                                                      מילון יחסי: יהי \Sigma אלפבית אזי מילון \sigma חסר סימני פונקציה.
                           \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{"(",")"\}, \{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\}, \{\forall, \exists\}, \sigma\} מילון אזי \sigma מילון אזי \sigma אלפבית ויהי \sigma אלפבית ויהי
                                                                                                                                                                    \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} משתנים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                                                                                                    סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: {"(",")"}.
                                                                                                                                            \{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\} :קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון
                                                                                                                                                                       \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} כמתים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                      בה. בה לוגיקה אזי המילון אזי המילון בה. לוגיקה מסדר בה לוגיקה מסדר השון: תהא בה לוגיקה מסדר לוגיקה מסדר באשון: חיגנטורה של לוגיקה מסדר באשון: חיגנטורה בא לוגיקה מסדר בא לוגיקה בא ל
                                                                                                            X_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i|i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}|i,n\in\mathbb{N}\}} איי מילון: יהי יהי מילון מילון אזי
                                                       משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי \sigma מילון ויהי שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
                                                                                                                                                                                                                                   .משתנה t
                                                                                                                                                                                                                           .סימן קבוע t \bullet
                                                                                    t=f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight) עבורם t_{1}\dots t_{n} ושמות עצם ויחיד סימן פונקציה f_{i,n}
                                                                                                                                                        אזי \alpha \in \sigma אזי משתנה ותהא \sigma מילון יהי משתנה מהגדרה:
                                                                                                                                                                                                            \forall (\alpha, x) = \forall x \alpha •
                                                                                                                                                                                                             \exists (\alpha, x) = "\exists x \alpha" \bullet
```

 $\{R_{n,i}\left(t_1\dots t_n
ight)\mid (i,n\in\mathbb{N})\land ($ נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $t_1\dots t_n\}$ שמות עצם $X_{\{R_{n,i}(t_1...t_n)|(i,n\in\mathbb{N})\land ($ נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $t_1...t_n)\},\{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow,orall,\exists\}$ נוסחאות מעל מילון: יהי

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: σ מילון ותהא σ מילון מהיים בדיוק אחד מהבאים משפט מקריאה היחידה לנוסחאות:

- . נוסחה אטומית α
- $\alpha = "(\neg \beta)$ עבורה β עבורה נוסחה \bullet
- $\alpha = (\beta \circ \gamma)$ עבורן $\alpha \circ \beta$ וכן פעולה בולינארית $\alpha \circ \beta$ וכן פעולה נוסחאות β
 - $\alpha = "Qx\beta$ " עבורם Q עבורם α וכן משתנה α וכן משתנה β

כך FV : $\{t \mid \sigma$ שם עצם במילון ש $t\} o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}
ight)$ כך כדיר

- .FV $(c)=\varnothing$ יהי $c\in\sigma$ סימן קבוע אזי •
- $FV(x) = \{x\}$ משתנה אזי $x \in \sigma$ יהי
- $\mathsf{FV}\left(f\left(t_{1}\dots t_{n}\right)\right)=ig|\mathsf{JFV}\left(t_{i}\right)$ יהיו אזי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $t_{1}\dots t_{n}$

כך FV : $\{arphi \mid \sigma \mid \sigma$ נוסחה במילון $arphi \} o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}
ight)$ כך

```
\mathrm{FV}(R\left(t_{1}\dots t_{n}
ight))=\bigcup\mathrm{FV}\left(t_{i}
ight) אזי יחס אזי ויהי R\in\sigma ויהי שמות עצם ויהי t_{1}\dots t_{n}
```

$$FV(\neg \varphi) = FV(\varphi)$$
 אזי (וסחה φ נוסחה φ נוסחה אזי

$$.{\rm FV}\,(\varphi\circ\psi)={\rm FV}\,(\varphi)\cup{\rm FV}\,(\psi)$$
 אזי בוליאנית פעולה ויהי פעולה פעולה φ,ψ נוסחאות יהיינה •

$$\operatorname{FV}(Qx\varphi)=\operatorname{FV}(\varphi)\setminus\{x\}$$
 עבורם Q עבור x ויהי משתנה x ויהי משתנה x

 $\mathrm{FV}\left(arphi
ight)=arphi$ עבורה עבורה: נוסחה לוסחה כנוסחה

סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

$$.\wedge, \vee .3$$

וכן $n\in\mathbb{N}$ חח"ע לכל $R:\{R_{n,i}\} o D^n$ חח"ע וכן $C:\{c_i\} o D$ ותהא חח"ע לכל $D
eq \emptyset$ וכן $(D,C\left(c_{0}\right),\ldots,R\left(R_{2,0}\right),\ldots,f\left(f_{0,0}\right))$ חח"ע אזי $F:\left\{ f_{n,i}
ight\}
ightarrow (D^{n}
ightarrow D)$

D אזי σ אזי מבנה על σ מילון ויהי σ מילון יהי מבנה:

 $D^M=D$ אזי אזי מילון ויהי D מבנה על σ בעל תחום D אזי מילון ויהי

 $(C(c_0),\ldots,R(R_{2.0}),\ldots,f(f_{0.0}))$ אזי מבנה על σ מילון ויהי σ מילון ויהי σ מילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי $f_{n,i}^{M}=F\left(f_{n,i}
ight)$ וכן $R_{n,i}^{M}=R\left(R_{n,i}
ight)$ וכן $c_{i}^{M}=C\left(c_{i}
ight)$ אזי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי

 $.v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\to D^M$ אזי מבנה על מבנה Mויהי מילון יהי השמה: יהי מילון מבנה מ

השמה v יהי ותהא השמה ערך לשם עצם: יהי מילון יהי מילון יהי מילון יהי השמת ערך השמה אזי

$$.\overline{v}\left(c_{i}
ight)=c_{i}^{M}$$
 יהי $c_{i}\in\sigma$ סימן קבוע אזי \bullet

$$\overline{v}\left(x_{i}
ight)=v\left(x_{i}
ight)$$
 יהי $x_{i}\in\sigma$ משתנה אזי

$$.\overline{v}\left(f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight)
ight)=f^{M}\left(\overline{v}\left(t_{1}
ight)\dots\overline{v}\left(t_{n}
ight)
ight)$$
 יהיו שמות עצם ויהי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $t_{1}\dots t_{n}$

 $\forall x \in \mathsf{FV}(t).v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right)$ שם עצם עבורו t שם עצם תהיינה v_1,v_2 משפט מבנה על מ $.\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t)$ אזי

> השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי σ משתנה ויהי σ מילון יהי מילון יהי מילון יהי σ מבנה על σ $v\left[d/x_{j}
> ight](x_{i})=\left\{egin{array}{ll} v(x_{i}) & i
> eq j \\ d & \mathrm{else} \end{array}
> ight.$ ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא אזי

$$.(\overline{v}\left(R\left(t_{1}\dots t_{n}
ight))=T)\Longleftrightarrow\left(\left(\overline{v}\left(t_{1}
ight),\dots,\overline{v}\left(t_{n}
ight)
ight)\in R^{M}
ight)$$
 יהיו שמות עצם ויהי $R\in\sigma$ סימן יחס אזי ויהי $t_{1}\dots t_{n}$

$$.\overline{v}\left(\neg lpha
ight) = TT_{\neg}\left(\overline{v}\left(lpha
ight)
ight)$$
 תהא $lpha$ נוסחה אזי

$$.\overline{v}\left(\alpha\circ\beta\right)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\alpha\right),\overline{v}\left(\beta\right)\right)$$
 אזי בינארי ויהי \circ קשר פינה מוסחאות נוסחאות היינה \bullet

$$.(\overline{v}\,(\exists x arphi) = T) \Longleftrightarrow \left(\exists d \in D^M\left(\overline{v\left[d/x
ight]}\,(arphi) = T
ight)
ight)$$
 תהא $arphi$ נוסחה אזי $\left(\overline{v}\,(\forall x arphi) = T
ight) \Longleftrightarrow \left(\forall d \in D^M\left(\overline{v\left[d/x
ight]}\,(arphi) = T
ight)
ight)$ תהא $arphi$ נוסחה אזי $\left(\overline{v}\,(\forall x arphi) = T
ight)$

$$(\overline{v}\left(orall xarphi
ight)=T
ight)\Longleftrightarrow\left(orall d\in D^{M}\left(\overline{v\left[d/x
ight]}\left(arphi
ight)=T
ight)
ight)$$
 תהא $arphi$ נוסחה אזי

 $orall x \in \mathsf{FV}(t)$. $v_1(x) = v_2(x)$ משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי m מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ותהא $.\overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi)$ אזי

 $.\overline{v}\left(arphi
ight)=T$ עבורה על מילון מבנה על מילון מבנה על מילון מבנה u תהא מבנה מבנה: יהי

 $M,v \models arphi$ אזי אזי M מבנה על מילון σ תהא תהא σ נוסחה ספיקה ב־M מבנה על מילון יהי

 $M,v \models \varphi$ מבנה ותהא v השמה עבורם $M,v \models \varphi$ מילון תהא $v \models \sigma$ מבנה ותהא v השמה עבורם σ

 $\overline{v}\left(arphi
ight)=T$ מתקיים מתקיים עבורה לכל Γ עבורה לכל עבורה לכל σ מתקיים ע מתקיים σ מתקיים מתקיים σ $M,v\models\Gamma$ אאי א מבנה על מילון σ תהא σ השמה ותהא σ קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M

 $M,v\models arphi$ מבורם v והשמה שבורה קיים מבנה M והשמה מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה d

ימודל של T אז (M,v) אז השמה עבורה אם עבורה אם נוסחה עבורה אם קבוצת נוסחאות ותהא קבוצת פימון: יהי σ מילון תהא T אז השמה תהא T

 $\{arphi\} \stackrel{t}{\models} \psi$ וכן $\{\psi\} \stackrel{t}{\models} \varphi$ עבורן φ, ψ עבורן ותהא v השמה v מילון ותהא מילון ותהא יהי σ מילון ותהא

.arphi מבנה על σ ולכל σ השמה מתקיים שזי נוסחה φ עבורה לכל σ עבורה לכל σ מבנה על σ ולכל יהי מילון אזי נוסחה מתקיים שזי נוסחה לכל של מבנה על מ

 $\stackrel{t}{\models} \varphi$ יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t־תקפה אזי σ

 $M,v\models arphi$ ממקיים מתקיים עבורה לכל v השמה מתקיים מבנה. אזי נוסחה v בורה לכל מבנה: יהי

 $M \models \varphi$ אזי M מבנה על מילון σ ותהא ϕ נוסחה נכונה ב־M אזי מבנה על

 $M\models arphi$ עבורו M עבורו σ מילון תהא σ נוסחה אזי מבנה σ

 $M\models arphi$ מתקיים $arphi\in \Gamma$ עבורה לכל Γ עבורה מילון σ אזי קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי

 $M\models\Gamma$ אזי אזי בכונה ב־M מבנה על מילון σ ותהא ותהא σ קבוצת נוסחאות נכונה ב־M

 $M\models arphi$ מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה M עבורו מילון אזי נוסחה σ מילון אזי נוסחה

 $\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi$ אזי φ אזי σ מילון תהא Γ אז של σ מילון. נוסחה עבורה אם σ נוסחה עבורה אם σ מילון תהא σ מילון תהא σ מילון תהא σ מילון ותהא σ $\{arphi\}\stackrel{v}{\models}\psi$ וכן $\{\psi\}\stackrel{v}{\models}arphi$ עבורן $arphi,\psi$ עבורן אזי נוסחאות σ יהי מילון מילון אזי נוסחאות מישקולות:

arphiנוסחה σ מתקיים מתקיים σ מילון אזי נוסחה arphi עבורה לכל מבנה על מתקיים מילון אזי נוסחה מילון אוויינון אינון אינון אוויינון אינון אוויינון אינון א

 σ טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוטוווו עבון דו σ ייגענה: יהי σ מילון תהא σ קבוצת נוסחאות ותהא σ נוסחה אזי σ מילון תהא σ קבוצת נוסחאות ותהא σ מילון תהא σ

 ${ ilde { iny FV}}\left(arphi
ight)=arnothing$ עבורה arphi מילון אזי נוסחה arphi

 $\Gamma = \sigma$ מילון תהא $\Gamma = \sigma$ קבוצת פסוקים ותהא σ נוסחה אזי פענה: יהי σ מילון תהא σ קבוצת פסוקים ותהא σ

. $(\Gamma \not\models \neg arphi) \Longleftrightarrow$ (וסחה $\Gamma \cup \{arphi\}$ הינה הינה $\Gamma \cup \{\varphi\}$) נוסחה אזי (קבוצת נוסחאות ותהא קבוצת נוסחאות ותהא ק

 $(arphi,\psi)$ טענה: יהי σ מילון ותהיינה $(arphi,\psi)$ נוסחאות אזי $(arphi,\psi)$ הן tשקולות)