```
.Size (C)=n+m גודל מעגל בוליאני: יהיו n,m\in\mathbb{N} ויהי מעגל בוליאני בעל n,m\in\mathbb{N}
                                         . עומק מעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי (C) הינו אורך המסלול המקסימלי מקלט לפלט.
                                                                .ee_n\left(x
ight)=igvee_{i=1}^nx_i המוגדרת המוגדרת אזיv_n:\left\{0,1
ight\}^n	o\left\{0,1
ight\} אזיv_n:\left\{0,1
ight\}^n הגדרה: יהי
                                                                .\wedge_n\left(x
ight)=igwedge_{i=1}^n x_i המוגדרת המוגדרת אזי h\in\mathbb{N}_{\geq 3} הגדרה: יהי הי
(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\wedge_n\})\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\vee_n\})\cup\{\wedge,\vee,\neg\} מעגל בוליאני בעל fan-in מעגל בוליאני מעל בסיס הפונקציות מעל בסיס הפונקציות הבוליאני בעל
                                                                                   הערה: אלא אם נאמר אחרת מעגל בוליאני הוא בעל fan-in מוגבל.
     \mathcal{O}\left(n\cdot 2^n
ight) בגודל f בגודל המחשב את fan-in טענה: בעל בוליאני f:\left\{0,1
ight\}^n 	o \left\{0,1\right\} ובעומק סענה: תהא
                  n + \log_2{(n)} ובעומק \mathcal{O}\left(n \cdot 2^n\right) ובעומק f אזי קיים מעגל בוליאני f: \left\{0,1\right\}^n 	o \left\{0,1\right\} אחר מענה: תהא
                             L מסקנה: תהא שפה אזי קיימת משפחת מעגלים \mathcal C מגודל \mathcal C ומעומק n+\log(n) שפה אזי קיימת משפחת מעגלים
            .Size (C) \geq rac{2^n}{2n} אזי קיימת n \in \mathbb{N} אזי קיימת f: \{0,1\}^n 	o \{0,1\} עבורה לכל מעגל בוליאני
.Size (f)=\min\left\{\mathrm{Size}\left(C\right)\mid\left(\Delta מעגל) \Lambda\left(f\right) מחשבת את C אזי f:\left\{0,1\right\}^{n} 
ightarrow\left\{0,1\right\} ותהא n\in\mathbb{N} ותהא וותהא n\in\mathbb{N} מחשבת את בוליאנית: יהי
                                                                     .Size (f) \leq 15 \cdot (2^n - 1) אזי f: \{0,1\}^n \to \{0,1\} ותהא n \in \mathbb{N} יטענה: יהי
                                                                            .Size (f)=\mathcal{O}\left(\frac{2^n}{n}\right) אזי f:\{0,1\}^n \to \{0,1\} ותהא n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                              \max\left\{ \mathrm{Size}\left(f
ight)\mid f:\left\{ 0,1
ight\} ^{n}
ightarrow\left\{ 0,1
ight\} 
ight\} =\Theta\left(rac{2^{n}}{n}
ight) אזי n\in\mathbb{N} יהי
f באשר f:\{0,1\}^n 	o \{0,1\} קיים n \leq S < C \cdot rac{2^n}{n} המקיימת S:\mathbb{N} 	o \mathbb{N} ולכל ולכל n \in \mathbb{N} עבורו לכל עבורו לכל
                                                           S\left(n
ight) וכן f לא חשיבה על ידי מעגל מגודל וכן S\left(n
ight)+10 וכן אודל מעגל ידי מעגל וכן חשיבה א
          .Size (S\left(n
ight))=\left\{L\subseteq\left\{0,1\right\}^{*}\mid S\left(n
ight) הגדרה: תהא S:\mathbb{N}	o\mathbb{N} אזי S:\mathbb{N}	o\mathbb{N} חשיבה על ידי משפחת מעגלים מגודל לכל היותר
                                                                                                                            .Size (2^n) = \mathcal{P}(\{0,1\}^*) מסקנה:
                                                  .
Size (S\left(n\right))\subsetneq Size (S\left(n\right)+10n) אזי n\leq S\left(n\right)\leq \frac{2^{n}}{n} עבורה S:\mathbb{N}\to\mathbb{N} אחי ההא מסקנה: תהא
                                                                                                                       .Size (poly) = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} Size (n^c) :הגדרה
                                             |E\left(A,B
ight)|\geq |E\left(C,D
ight)| עבורו עבורו אזי חתך לכל חתך לכל חתך מקסימלי: יהי
                                                                          .MC (G)=|E\left(A,B
ight)| אזי מקסימלי חתך (A,B) יהי G גרף ויהי G
                                                                                                \mathbb{E}_{\mathsf{NL}}\left[|E\left(A,B
ight)|
ight]=rac{|E\left(G
ight)|}{2} איז G יהי יהי למה: יהי
                                                                                E\left(A,B
ight) \geq rac{|E\left(G
ight)|}{2} עבורו עבורו (A,B) אזי קיים חתך עבורו G יהי
                                     מסקנה אלגוריתם איטי למציאת חתך גדול: תהא E קבוצה יהי \{v_1,\ldots,v_n\} ותהא ותהא n\in\mathbb{N} קבוצה אזי
function SlowBigCut(E, \{v_1 \dots v_n\}):
     S \leftarrow \mathcal{P}(\{v_1 \dots v_n\})
     for r \in \{0,1\}^n do
       | S \leftarrow \{v_i \mid r_i = 1\}  if |E(S, \overline{S})| \ge \frac{|E|}{2} then return S
```

```
\Omega\left(2^n
ight) און און פוצה אזי SlowBigCut בעלת אזי קבוצה אזי ותהא n\in\mathbb{N} ותהא n\in\mathbb{N} ותהא און קבוצה אזי אזי אזי אזי אזי אזי ותהא און אזירה מ"מ ווהא אM_{	ext{supp}}\left(1^n;r
ight) מחזירה מ"מ אקראית n\in\mathbb{N} עבורה לכל n\in\mathbb{N} ולכל ולכל וולכל וולכ
```

- ... X_n ב״ת בזוגות $X_1 \ldots X_n$
- $.i \in [n]$ לכל $\mathbb{P}\left(X_i = 1
 ight) = rac{1}{2}$
 - .poly (n) רצה בזמן M_{supp}

 $S_{\mathrm{supp}}=\{v_i\mid M_{\mathrm{supp}}\left(1^n;r\right)_i=1\}$ יהי $\{v_1\dots v_n\}$ חתהא ותהא $r\in\{0,1\}^{\log(n)+1}$ יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $N\in\mathbb{N}$ אזי $N\in\mathbb{N}$ אזי $N\in\mathbb{N}$ שענה: יהי N גרף באשר $N=\{v_1\dots v_n\}$ אזי $N=\{v_1\dots v_n\}$ ותהא $N\in\mathbb{N}$ ותהא $N\in\mathbb{N}$ קבוצה אזי $N\in\mathbb{N}$ מסקנה אלגוריתם מהיר למציאת חתך גדול: תהא $N\in\mathbb{N}$ קבוצה יהי N

```
S \leftarrow \mathcal{P}(\{v_1 \dots v_n\}) for r \in \{0,1\}^{\log(n)+1} do
          X \leftarrow M_{\mathrm{supp}}(1^n;r)

S \leftarrow \{v_i \mid X_i = 1\}

if |E(S,\overline{S})| \geq \frac{|E|}{2} then return S
                            .poly (n) אמן זמן סיבוכיות בעלת אזי FastBigCut קבוצה אזי אוענה: תהא n\in\mathbb{N} ותהא אות הא סענה: תהא
                                        S_r=\{v_i\mid r_i=1\} אזי r\in\{0,1\}^n קבוצה ויהי \{v_1,\ldots,v_n\} תהא תהא n\in\mathbb{N} אזי קבוצה יהי
                                  אלגוריתם למציאת חתך גדול עם תוחלת מותנית: תהא קבוצה יהי ותהא \{v_1,\dots,v_n\} קבוצה אזי אלגוריתם למציאת חתך גדול עם תוחלת מותנית:
function CEBigCut(E, {v_1 \dots v_n}):
     S \leftarrow \mathcal{P}(\{v_1 \dots v_n\})
      a \leftarrow \bigcup_{i=0}^{n} \{0,1\}^{i}
      for i \in [1 \dots, n] do
           c_0 \leftarrow \mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n} \left[ \left| E\left(S_r, \overline{S_r}\right) \right| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}), (r_i = 0) \right]
           c_1 \leftarrow \mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n} \left[ \left| E\left(S_r, \overline{S_r}\right) \right| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}), (r_i = 1) \right]
           a_i \leftarrow \arg\max_{\ell \in \{0,1\}} (c_\ell)
      end
     return S_a
                       מתקיים CEBigCut טענה: תהא i\in [n] באיטרציה אזי לכל i\in [n] מתקיים ותהא i\in [n] מתקיים ותהא אוי לכל
\mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n} \left[ |E\left(S_r, \overline{S_r}\right)| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}) \right] = \left| \{(v_i, v_j) \in E \mid (i, j \leq k) \land (a_i \neq a_j)\} \right| + \frac{1}{2} \left| \{(v_i, v_j) \in E \mid (i > k) \lor (j > k)\} \right|
                            .poly (n) אמסקנה: תהא קבוצה סיבוכיות אמן אור ותהא און אוריצה \{v_1,\dots,v_n\} ותהא ותהא היי קבוצה אזי ההא
                       מתקיים CEBigCut מתקיים באיטרציה i\in[n] קבוצה אזי לכל קבוצה אוי תהא n\in\mathbb{N} ותהא n\in\mathbb{N} מתקיים
                                                                                             \mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n} \left[ \left| E\left(S_r, \overline{S_r}\right) \right| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}) \right] \ge \frac{|E|}{2}
                                               E\left(\mathsf{CEBigCut},\overline{\mathsf{CEBigCut}}
ight) \geq rac{|E|}{2} קבוצה אזי קבוצה או n \in \mathbb{N} ותהא קבוצה יהי
     .AC (s,d)=\left\{L\subseteq\{0,1\}^*\;\middle|\; egin{array}{c} L(C)=L \\ \mathrm{Size}(C_n)\le s(n) \\ \mathrm{depth}(C_n)\le d(n) \end{array} 
ight. לא מוגבל עבורה לא מוגבל עבורה מעגלים בעלת fan-in לא מוגבל עבורה לא מוגבל עבורה s,d:\mathbb{N}\to\mathbb{N}
                                                                                                             \mathsf{AC}^k = igcup_{c \in \mathbb{N}} \mathsf{AC}\left(n^c, \log^k\left(n
ight)
ight) אזי k \in \mathbb{N} הגדרה: יהי
                     \mathsf{NC}\left(s,d\right) = \left\{L \subseteq \left\{0,1\right\}^* \ \middle| egin{array}{c} L(C) = L \\ \mathrm{Size}(C_n) \le s(n) \\ \mathrm{depth}(C_n) \le d(n) \end{array} \right. עבורה: תהיינה s,d:\mathbb{N} \to \mathbb{N} אזי s,d:\mathbb{N} \to \mathbb{N}
                                                                                                            \mathsf{NC}^k = igcup_{c \in \mathbb{N}} \mathsf{NC}\left(n^c, \log^k\left(n
ight)
ight) אזי k \in \mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                                                             \mathsf{NC}\left(s,d
ight)\subseteq\mathsf{AC}\left(s,d
ight) אזי s,d:\mathbb{N}	o\mathbb{N} מסקנה: תהיינה
                                                                                                                                           \mathsf{AC}^k \subseteq \mathsf{NC}^{k+1} אזי k \in \mathbb{N} טענה: יהי
                                                        .parity (x)=igoplus_{i=1}^n x_i המוגדרת parity : \{0,1\}^n 	o \{0,1\} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי זוגיות: יהי זוגיות: יהי
                                                                                    \mathcal{O}\left(\log\left(n\right)\right) ועומק ועומק parity_n את המחשב את מעגל קיים מעגל
                                                                                                                                                                   .parity \in NC^1 מסקנה:
                                                                                .1 בעל דרגה p\in\mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight] אזי איי n\in\mathbb{N}_+ יהי בעל דרגה מולטי־לינארי מולטי־לינארי יהי
  x\in\{0,1\}^n לכל f\left(x
ight)=p\left(x
ight) מ"ל עבורו p\in\mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight] אזי f:\{0,1\}^n	o\{0,1\} לכל
                                                                                 f:\{0,1\}^n \to \{0,1\} טענה: תהא f:\{0,1\}^n \to \{0,1\} אזי קיים פולינום
                                           \deg(f) = \deg(p) אזי f אזי המחשב את f מ"ל המחשב את f: \{0,1\}^n 	o \{0,1\} ויהי f: \{0,1\}^n 	o \{0,1\}
                                                                                                                                          \deg(\vee_n)=n אזי n\in\mathbb{N} מסקנה: יהי
                                                                                                                                      \deg (\operatorname{parity}_n) = n אזי n \in \mathbb{N} טענה: יהי
מ"ל עבורו p\in\mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight] אזי f:\left\{0,1
ight\}^n	o\left\{0,1
ight\} ותהא arepsilon>0 ותהא ווהא בוליגות בממוצע עם שגיאה arepsilon: יהי arepsilon>0 ותהא
                                                                                                                                            \mathbb{P}_{x \leftarrow \{0,1\}^n} \left( p\left(x\right) = f\left(x\right) \right) \ge 1 - \varepsilon
                                                                                                                  rac{1}{3} טענה: הפולינום 1 מחשב את ee n בממוצע עם שגיאה
```

function FastBigCut(E, { $v_1 \dots v_n$ }):

```
התפלגות משפחת פולינומים מחשבת פונקציה בוליאנית עם שגיאה arepsilon > 0 ותהא ותהא f: \{0,1\}^n 	o \{0,1\} אזי קבוצת פולינומים התפלגות משפחת פולינומים מחשבת פונקציה בוליאנית עם שגיאה בוליאנית אויי
                                                                                           \mathbb{P}_{p\leftarrow P}\left(p\left(x
ight)=f\left(x
ight)
ight)\geq1-arepsilon מתקיים x\in\left\{0,1
ight\}^{n} עבורה לכל P\subseteq\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}
ight]
סענה: יהי arepsilon>0 אזי קיים f אזי קיים f המחשב את f עם שגיאה f:\{0,1\}^n 	o \{0,1\} ותהא f:\{0,1\}^n 	o \{0,1\}
                                                                                                                                                                                                                                        arepsilon בממוצע את f עם שגיאה
                                                          \mathbb{P}\left((x\leftarrow\Omega)=\omega
ight)=\mathbb{P}\left(\omega
ight) הינו מ"מ באשר (x\leftarrow\Omega
ight):\Omega	o\Omega מרחב הסתברות אזי מימון: יהי
                                                                                                    . האחידה סופית עם המ"מ כאשר אינו המ"מ האחידה עם ההתפלגות אזי א הינו המ"מ הערה: תהא קבוצה סופית אזי x \leftarrow A
וכן R_{ee}(x)=1 אזי |S_{j,k}\cap\{i\mid x_i=1\}|=1 המקיימים j,k עבורן קיימים S_{j,k}\leftarrow\mathcal{P}\left([n]
ight) אזי x\in\{0,1\}^n וכן למה: יהי
                                                   \mathbb{P}_{S\leftarrow\mathcal{P}([n])}\left(|S\cap I|=1
ight)\geq rac{1}{2e} אזי 2^{k-1}\leq |\{i\mid x_i=1\}|\leq 2^k עבורו x\in\{0,1\}^n יהי k\in\mathbb{N} למה: יהי k\in\mathbb{N}
.arepsilon עם שגיאה אוי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל P\subseteq \mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight] מדרגה פולינומים מ"ל arepsilon>0 אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל פולינומים מ"ל מדרגה אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל
טענה: תהא לכל \varepsilon>0 אזי לכל s\left(n\right) ועומק אודל בוליאני מגודל ידי מעגל איזי קבוצת איימת קבוצת פולינומים פולינומים הא ידי מעגל בוליאני מגודל פולינומים איימת קבוצת פולינומים
.arepsilon בממוצע עם שגיאה \mathcal{O}\left(\left(\log\left(n
ight)\cdot\log\left(rac{s(n)}{arepsilon}
ight)
ight)^{d(n)}
ight) מדרגה p\in\mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight]
                                \deg(p)=\Omega\left(\delta\sqrt{n}
ight) אזי אזי המחשב ממוצע עם שגיאה אז parity_n מ"ל המחשב את מ"ל המחשב אזי \delta>0 ויהי \delta>0 ויהי
                                            \deg\left(p
ight)=\Omega\left(\sqrt{n}
ight) אזי arepsilon אזי מענה: יהי arepsilon>0 ויהי arepsilon>0 ויהי מ"ל המחשב את מ"ל המחשב את מ"ל המחשב איל המחשב 
                                                        .Size (C) \geq 2^{\Omega\left(n^{\frac{1}{4 \cdot d(n)}}\right)} אאי איז איז מעגל fan-in איז בעל parity בעל המחשב את מסקנה: יהי מעגל מעגל המחשב את
                                                                                                                                                                                                                                                      .parity ∉ AC<sup>0</sup> :משפט
                                                                                                                                                                                                                                                      \mathsf{AC}^0 \subseteq \mathsf{NC}^1 :מסקנה
```