חוג: תהא R קבוצה ותהיינה $+,*$ פעולות בינאריות אזי $(R,+,*)$ המקיים
- $(R,+)$ חבורה אבלית.
- אסוציאטיביות כפל: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $(a*b)*c=a*(b*c)$.
- חוג הפילוג משמאל: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$.
- חוק הפילוג מימין: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $(b+c)*a=(b*a)+(c*a)$.

סימון: יהי $(R,+,*)$ חוג ויהי e איבר היחידה של $(R,+)$ אזי $0_R=e$.

חוג אבלי/קומוטטיבי/חילופי: חוג $(R,+,*)$ המקיים $a*b=b*a$ לכל $a,b\in R$.

חוג בעל יחידה: חוג $(R,+,*)$ עבורו $(R,*)$ בעל איבר יחידה m וכן $m\neq 0_R$.

סימון: יהי $(R,+,*)$ חוג ויהי m איבר היחידה של $(R,*)$ אזי $1_R=m$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{Z}_n$ חוג אבלי בעל יחידה וכן $\mathbb{Z}$ חוג אבלי בעל יחידה.

טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $R\left[x_1\ldots x_n\right]$ חוג אבלי בעל יחידה.

טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי $\langle R\left[x\right],+,\text{קונבולוציה}\rangle$ חוג אבלי בעל יחידה.

תחום שלמות: חוג אבלי R עבורו לכל $a,b\in R$ המקיימים $ab=0$ מתקיים $(a=0)\vee(b=0)$.

טענה: יהי R תחום שלמות ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $R\left[x_1\ldots x_n\right]$ תחום שלמות.

הגדרה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי $R^{\times}=\{a\in R\mid \exists h\in R.ah=ha=1\}$.

למה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי $(R^{\times},*)$ חבורה.

טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי $(R\left[x\right])^{\times}=R^{\times}$.

שדה: חוג אבלי בעל יחידה $\mathbb{F}$ המקיים $\mathbb{F}^{\times}=\mathbb{F}\backslash\{0\}$.

הגדרה: יהי R תחום שלמות באשר $R\neq\{0\}$ אזי $\sim_{\text{Frac}}=\left\{((a,b),(c,d))\in\left(R\times(R\backslash\{0\})\right)^2\mid ad=bc\right\}$.

סימון: יהי R תחום שלמות באשר $R\neq\{0\}$ אזי $\text{Frac}(R)={}^{R}/_{\sim_{\text{Frac}}}$.

הגדרה: יהי R תחום שלמות באשר $R\neq\{0\}$ ויהיו $(a,b),(c,d)\in R\times(R\backslash\{0\})$ אזי $[(a,b)]_{\text{Frac}}+[(c,d)]_{\text{Frac}}=[(ad+cb,bd)]_{\text{Frac}}$ וכן $[(a,b)]_{\text{Frac}}\cdot[(c,d)]_{\text{Frac}}=[(ac,bd)]_{\text{Frac}}$.

טענה שדה השברים: יהי R תחום שלמות באשר $R\neq\{0\}$ אזי $\text{Frac}(R)$ שדה.

טענה: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי $\mathbb{K}\left[x\right]$ תחום שלמות.

פונקציות רציונליות: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי $\mathbb{K}(x)=\text{Frac}(\mathbb{K}\left[x\right])$.

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי $\mathbb{K}(x)$ שדה.

הומומורפיזם בין חוגים: יהיו R,S חוגים אזי $\nu:R\to S$ המקיימת
- משמרת כפל: לכל $a,b\in R$ מתקיים $\nu(ab)=\nu(a)\nu(b)$.
- משמרת חיבור: לכל $a,b\in R$ מתקיים $\nu(a+b)=\nu(a)+\nu(b)$.

גרעין: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי $\ker(\nu)=\nu^{-1}\left[\{0\}\right]$.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי $\ker(\nu),\text{Im}(\nu)$ חוגים.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי (ν מונומורפיזם)$\Longleftrightarrow(\ker(\nu)=0)$.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי (ν אפימורפיזם)$\Longleftrightarrow(\text{Im}(\nu)=S)$.

סימון: יהיו R,S חוגים איזומורפיים אזי $R\simeq S$.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי (ν איזומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(ν מונומורפיזם וכן ν אפימורפיזם).

אידאל: יהי R חוג אבלי אזי $I\subseteq R$ המקיימת $I\cdot R\subseteq I$ וכן $I+I\subseteq I$.

טענה: יהי R חוג אבלי ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי $(I,+)\leq(R,+)$.

טענה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי $\ker(\nu)$ אידאל.

משפט: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי (R שדה)$\Longleftrightarrow$(לכל אידאל $I\subseteq R$ מתקיים $I\in\{\{0\},R\}$).

מסקנה: יהיו $\mathbb{F},\mathbb{K}$ שדות ויהי $\nu:\mathbb{F}\to\mathbb{K}$ הומומורפיזם אזי (ν מונומורפיזם)$\vee(\nu=0)$.

הגדרה: יהי R חוג אבלי ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי ${}^{R}/_{I}=\{a+I\mid a\in R\}$.

טענה: יהי R חוג אבלי יהי $I\subseteq R$ אידאל ויהיו $a,b,c,d\in R$ באשר $a+I=c+I$ וכן $b+I=d+I$ אזי $(ab)+I=(cd)+I$.

הגדרה: יהי R חוג אבלי יהי $I\subseteq R$ אידאל ויהיו $a,b\in R$ אזי $(a+I)(b+I)=(ab)+I$.

משפט חוג מנה: יהי R חוג אבלי ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי ${}^{R}/_{I}$ חוג אבלי.

טענה: יהי R חוג אבלי יהי $I\subseteq R$ אידאל ונגדיר $p:R\to{}^{R}/_{I}$ כך $p(a)=a+I$ אזי p הינו אפימורפיזם חוגים וכן $\ker(p)=I$.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם חוגים אזי ${}^{R}/_{\ker(\nu)}$ חוג.

משפט: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם חוגים אזי ${}^{R}/_{\ker(\nu)}\simeq\operatorname{Im}(\nu)$.

אידאל אמיתי: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי אידאל $I\subseteq R$ המקיים $I\neq R$.

טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי $I\subseteq R$ אזי (I אמיתי)$\Longleftrightarrow$($I\cap R^{\times}=\varnothing$).

אידאל נוצר: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ותהא $S\subseteq R$ אזי $(S)=\{\sum_{i=1}^{n}r_is_i\mid(n\in\mathbb{N}_+)\wedge(r\in R^n)\wedge(s\in S^n)\}$.

טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ותהא $S\subseteq R$ אזי (S) אידאל.

אידאל ראשי: יהי R חוג אבלי אזי אידאל $I\subseteq R$ עבורו קיים $a\in R$ המקיים $I=(a)$.

אידאל ראשוני: יהי R חוג אבלי אזי אידאל $I\subseteq R$ עבורו לכל $a,b\in R$ המקיימים $ab\in I$ מתקיים $(a\in I)\vee(b\in I)$.

אידאל מקסימלי: יהי R חוג אבלי אזי אידאל $I\subseteq R$ עבורו לכל אידאל $J\subseteq R$ לא מתקיים $I\subsetneq J$.

משפט: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי

- (I אידאל ראשוני)$\Longleftrightarrow$(${}^{R}/_{I}$ תחום שלמות).
- (I אידאל מקסימלי)$\Longleftrightarrow$(${}^{R}/_{I}$ שדה).

תחום ראשי: חוג אבלי בעל יחידה R עבורו לכל אידאל $I\subseteq R$ מתקיים כי I ראשי.

איבר אי־פריק: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי $r\in R$ עבורו לכל $a,b\in R$ המקיימים $r=ab$ מתקיים $(a\in R^{\times})\vee(b\in R^{\times})$.

משפט: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי

- $\mathbb{K}[x]$ תחום ראשי.
- יהי $f\in\mathbb{K}[x]$ אזי ((f) מקסימלי)$\Longleftrightarrow$((f) ראשוני)$\Longleftrightarrow$(f אי־פריק ב־$\mathbb{K}[x]$).

משפט: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי קיים אידאל מקסימלי $M\subseteq R$ עבורו $I\subseteq M$. דורש AC

מחלק משותף מקסימלי: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהיו $f_1\ldots f_n,d\in\mathbb{K}[x]$ באשר $(d)=(f_1\ldots f_n)$ וכן d מתוקן אזי $\gcd(f_1\ldots f_n)=d$.

משפט חלוקה עם שארית: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהיו $f,g\in R[x]$ באשר המקדם המוביל של g הפיך אזי קיימים ויחידים $q,r\in R[x]$ באשר $\deg(r)<\deg(g)$ וכן $f=qg+r$.

פולינומים זרים: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $f,g\in\mathbb{F}[x]$ המקיימים $\gcd(f,g)=1$.

פולינום פרימיטיבי: יהיו $a_0\ldots a_n\in\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ המקיים $\gcd(a_1\ldots a_n)=1$.

משפט: יהי $f\in\mathbb{Z}[x]\setminus\{0\}$ ויהיו $g,h\in\mathbb{Q}[x]$ באשר $f=gh$ אזי קיימים $r,s\in\mathbb{Q}$ המקיימים $sh,rg\in\mathbb{Z}[x]$ וכן $f=(rg)(sh)$.

מסקנה גאוס: יהי $f\in\mathbb{Z}[x]$ מתוקן ויהי $d\in\mathbb{Q}[x]$ אי־פריק מתוקן באשר $d|f$ אזי $d\in\mathbb{Z}[x]$.

למה גאוס: יהי $f\in\mathbb{Z}[x]$ אזי (f אי־פריק)$\Longleftrightarrow$(f אי־פריק מעל $\mathbb{Q}[x]$ וכן f פרימיטיבי).

טענה קריטריון אייזנשטיין: יהיו $a_0\ldots a_n\in\mathbb{Z}$ ויהי $p\in\mathbb{P}$ המקיים $p\nmid a_n$ וכן $p|a_i$ לכל $i<n$ וכן $p^2\nmid a_0$ אזי $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ אי־פריק מעל $\mathbb{Q}[x]$.

שורש של פולינום: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\}$ אזי $\alpha\in\mathbb{K}$ המקיים $f(\alpha)=0$.

סימון: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\}$ אזי $\text{sols}_{\mathbb{K}}(f)=\{\alpha\in\mathbb{K}\mid f(\alpha)=0\}$.

משפט בז'ו: יהי $\mathbb{K}$ שדה יהי $f\in\mathbb{K}[x]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{K}$ אזי $((x-\alpha)|f)\iff(\alpha\in\text{sols}_{\mathbb{K}}(f))$.

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\}$ אזי $|\text{sols}_{\mathbb{K}}(f)|\le\deg(f)$.

שורש פשוט: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\}$ אזי $\alpha\in\text{sols}_{\mathbb{K}}(f)$ המקיים $(x-\alpha)^2\nmid f$.

שורש מרובה: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\}$ אזי $\alpha\in\text{sols}_{\mathbb{K}}(f)$ המקיים $(x-\alpha)^2|f$.

נגזרת של פולינום: יהי $\mathbb{K}$ שדה יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $a_0\ldots a_n\in\mathbb{K}$ אזי $\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)'=\sum_{i=1}^{n}a_ix^{i-1}$.

משפט: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\}$ אזי (כל השורשים של f הם פשוטים)$\Longleftrightarrow$($\gcd(f,f')=1$).

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}_p$.

שדה הרחבה: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי שדה $\mathbb{L}$ המקיים $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{L}$.

סימון: יהיו $\mathbb{K},\mathbb{L}$ שדות באשר $\mathbb{L}$ הרחבה של $\mathbb{K}$ אזי $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

הערה: יהיו $\mathbb{K},\mathbb{L}$ שדות באשר $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ אזי נתייחס לביטוי $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ כאובייקט.

הומומורפיזם הרחבות: יהיו $\mathbb{K},\mathbb{F},\mathbb{L}$ שדות באשר $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ הרחבה וכן $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבה אזי שיכון $\nu:\mathbb{K}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}$ המקיים $\nu_{\restriction_{\mathbb{F}}}=\text{Id}_{\mathbb{F}}$.

שדה פשוט: שדה $\mathbb{F}$ עבורו לא קיים שדה $\mathbb{K}$ המקיים $\mathbb{K}\subset\mathbb{F}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\bigcap\{\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}\mid\text{שדה } \mathbb{K}\}$ שדה פשוט.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי קיים ויחיד שדה פשוט $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה פשוט אזי $(\mathbb{F}\simeq\mathbb{Q})\vee(\exists p\in\mathbb{P}.\mathbb{F}\simeq\mathbb{F}_p)$.

מציין של שדה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ שדה פשוט אזי
- אם $\mathbb{K} \simeq \mathbb{Q}$ אזי $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$.
- אם קיים $p \in \mathbb{P}$ עבורו $\mathbb{K} \simeq \mathbb{F}_p$ אזי $\text{char}(\mathbb{F}) = p$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה המקיים $\text{char}(\mathbb{F}) > 0$ אזי לכל $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $\text{char}(\mathbb{F}) \cdot a = 0$.

מורפיזם פרובניוס: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהי $\mathbb{K}$ שדה המקיים $\text{char}(\mathbb{K}) = p$ אזי נגדיר $\text{Fr}_p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ כך $\text{Fr}_p(a) = a^p$.

משפט: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהי $\mathbb{K}$ שדה המקיים $\text{char}(\mathbb{K}) = p$ אזי Fr_p מונומורפיזם.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה באשר $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ויהיו $a, b, c \in \mathbb{F}$ באשר $a \neq 0$ אזי $\text{sols}\left(ax^2 + bx + c\right) = \left\{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$.

איבר אלגברי מעל שדה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבת שדות אזי $\alpha \in \mathbb{L}$ עבורו קיים $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ המקיים $f(\alpha) = 0$.

איבר טרנסצנדנטי מעל שדה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבת שדות אזי $\alpha \in \mathbb{L}$ באשר α אינו אלגברי מעל $\mathbb{K}$.

הרחבה אלגברית: הרחבה $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ עבורה לכל $\alpha \in \mathbb{L}$ מתקיים כי α אלגברי מעל $\mathbb{K}$.

טענה: $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ הרחבה אלגברית.

פולינום מינימלי של איבר אלגברי: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה ויהי $\alpha \in \mathbb{L}$ אלגברי מעל $\mathbb{K}$ אזי פולינום מתוקן $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ בעל דרגה מינימלית המקיים $f(\alpha) = 0$.

משפט: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה ויהי $\alpha \in \mathbb{L}$ אלגברי מעל $\mathbb{K}$ אזי קיים ויחיד פולינום מינימלי $f_\alpha \in \mathbb{K}[x]$ עבור α וכן $\langle f_\alpha \rangle = \{f \in \mathbb{K}[x] \mid f(\alpha) = 0\}$.

סימון: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה ויהי $\alpha \in \mathbb{L}$ אלגברי מעל $\mathbb{K}$ אזי הפולינום המינימלי של α הינו f_α.

מסקנה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה יהי $\alpha \in \mathbb{L}$ אלגברי מעל $\mathbb{K}$ אזי f_α אי־פריק.

הרחבה נוצרת: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה יהיו $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{L}$ ויהי $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}$ השדה המינימלי המקיים $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ וכן $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}$ אזי $\mathbb{F}/\mathbb{K}$.

סימון: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה יהיו $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{L}$ ותהא $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ הרחבה הנוצרת על ידי $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ אזי $\mathbb{K}(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = \mathbb{F}$.

טענה: $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$.

הרחבה פשוטה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{L}$ אזי $\mathbb{K}(\alpha)/\mathbb{K}$.

משפט מבנה של הרחבה פשוטה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרבה ויהי $\alpha \in \mathbb{L}$ אזי
- אם α טרנסצנדנטי מעל $\mathbb{K}$ אז $\mathbb{K}(\alpha)/\mathbb{K} \simeq \mathbb{K}(x)/\mathbb{K}$.
- אם α אלגברי מעל $\mathbb{K}$ אז $\mathbb{K}(\alpha)/\mathbb{K} \simeq \left(\mathbb{K}[x]/\langle f_\alpha \rangle\right)/\mathbb{K}$.

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה יהי $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ אי־פריק ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ שורשים של f אזי קיים איזומורפיזם $\nu : \mathbb{K}(\alpha)/\mathbb{K} \to \mathbb{K}(\beta)/\mathbb{K}$ באשר $\nu(\alpha) = \beta$.

למה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה יהיו $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{L}$ ויהי $\beta \in \mathbb{K}(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ אזי קיים $f \in \mathbb{K}[x_1 \ldots x_n]$ המקיים $f(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = \beta$.

טענה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה אזי $\mathbb{L}$ הינו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{K}$.

דרגת הרחבה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה אזי $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$.

הרחבה סופית: הרחבה $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ המקיימת $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] < \infty$.

טענה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה ויהי $\alpha \in \mathbb{L}$ אלגברי מעל $\mathbb{K}$ אזי $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}] = \deg(f_\alpha)$.

טענה: יהי $\mathbb{K}$ שדה סופי אזי קיים $p \in \mathbb{P}$ עבורו $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{K}$.

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה סופי אזי קיים $p \in \mathbb{P}$ וקיים $n \in \mathbb{N}$ עבורם $|\mathbb{K}| = p^n$.

משפט מולטיפליקטיביות של דרגה: תהיינה $\mathbb{F}/\mathbb{L}, \mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבות אזי $[\mathbb{F} : \mathbb{K}] = [\mathbb{F} : \mathbb{L}] \cdot [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

משפט: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה ויהי $\alpha \in \mathbb{L}$ אזי (α אלגברי מעל $\mathbb{K}$)$\Longleftrightarrow$(קיים שדה $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}$ המקיים $\alpha \in \mathbb{F}$ וכן $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ הרחבה סופית).

מסקנה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה ויהיו $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{L}$ אלגבריים מעל $\mathbb{K}$ אזי קיים שדה $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}$ המקיים $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{F}$ וכן $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ הרחבה סופית.

מסקנה: תהיינה $\mathbb{F}/\mathbb{L}, \mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבות אלגבריות אזי $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ הרחבה אלגברית.

סגור אלגברי בשדה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה אזי $\overline{\mathbb{K}_{\mathbb{L}}} = \{\alpha \in \mathbb{L} \mid \mathbb{K} \text{ אלגברי מעל } \alpha\}$.

מסקנה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה אזי $\overline{\mathbb{K}_{\mathbb{L}}}$ שדה.

שדה סגור אלגברית: שדה $\mathbb{K}$ עבורו לכל $f \in \mathbb{K}[x]$ באשר $\deg(f) \geq 1$ קיים $\alpha \in \mathbb{K}$ המקיים $f(\alpha) = 0$.

הרחבה סגורה אלגברית: הרחבה אלגברית $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ באשר $\mathbb{L}$ סגור אלגברית.

טענה: יהי $\mathbb{K}$ שדה סגור אלגברית ויהי $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\}$ אזי קיימים $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$ המקיימים $f = \alpha_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$.

טענה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה סגורה אלגברית ויהי $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}$ המקיים $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ אזי $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבה סגורה אלגברית.

למה: יהי $\mathbb{K}$ שדה סגור אלגברית ותהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה אלגברית אזי $\mathbb{L} = \mathbb{K}$.

למה: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}[x]$ באשר $\deg(f)\ge 1$ אזי קיימת הרחבה סופית $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ המקיימת $\mathrm{sols}_{\mathbb{L}}(f)\ne\varnothing$.

למה: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}[x]\backslash\{0\}$ אזי קיימת הרחבה סופית $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ עבורה קיימים $\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{L}$ המקיימים $f=\alpha_0\cdot\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$.

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהיו $f_1\ldots f_m\in\mathbb{K}[x]\backslash\{0\}$ אזי קיימת הרחבה סופית $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ עבורה קיימת $\alpha\in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{L})$ המקיימת $f_j=\alpha_{j,1}\cdot\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_{j,i+1})$ לכל $j\in[m]$.

משפט: יהי $\mathbb{K}$ שדה תהא $\mathcal{T}$ קבוצה ויהיו $\langle f_\tau\in\mathbb{K}[x]\mid\tau\in\mathcal{T}\rangle$ באשר $\deg(f_\tau)\ge 1$ לכל $\tau\in\mathcal{T}$ אזי קיימת הרחבה אלגברית $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ המקיימת $\mathrm{sols}_{\mathbb{L}}(f_\tau)\ne\varnothing$ לכל $\tau\in\mathcal{T}$.

משפט: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי קיימת הרחבה סגורה אלגברית $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

משפט שטייניץ: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה אלגברית יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית ויהי $\nu:\mathbb{K}\to\mathbb{F}$ מונומורפיזם אזי קיים מונומורפיזם $\Phi:\mathbb{L}\to\mathbb{F}$ המקיים $\Phi_{\restriction_{\mathbb{K}}}=\nu$.

מסקנה: תהיינה $\mathbb{F}/\mathbb{K},\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבות סגורות אלגברית אזי $\mathbb{L}\simeq\mathbb{F}$.

סימון: יהי $\mathbb{K}$ שדה ותהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה סגורה אלגברית אזי $\overline{\mathbb{K}}=\mathbb{L}$.

מסקנה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ הרחבה אלגברית אזי קיים מונומורפיזם $\nu:\mathbb{L}/\mathbb{K}\to\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}$.

דרגה של פונקציה רציונלית: יהי $\mathbb{K}$ שדה תהא $a\in\mathbb{K}(x)$ ויהיו $f,g\in\mathbb{K}[x]$ באשר $a=\frac{f}{g}$ וכן $\gcd(f,g)=1$ אזי $\deg(a)=\max\{\deg(f),\deg(g)\}$.

משפט: יהי $\mathbb{K}$ שדה ותהא $a\in\mathbb{K}(x)$ באשר $\deg(a)\ge 1$ אזי a טרנסצנדנטי מעל $\mathbb{K}$ וכן $\mathbb{K}(x)/\mathbb{K}(a)$ הרחבה אלגברית מדרגה $\deg(a)$.

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה ותהא $a\in\mathbb{K}(a)$ אזי $(\mathbb{K}(x)=\mathbb{K}(a))\Longleftrightarrow$(קיימים $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{K}$ המקיימים $\alpha\delta-\beta\gamma\ne 0$ וכן $a=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$).

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}(x))=\left\{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\;\middle|\;(\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{K})\wedge(\alpha\delta-\beta\gamma\ne 0)\right\}$.

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה יהי $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{K}(x))$ ויהי $a\in\mathbb{K}(x)$ אזי $\deg(a)=\deg(\varphi(a))$.

משפט לורות: ???