$(a\in\{a_1,\ldots,a_n\})\Longleftrightarrow ((a=a_1)\vee\ldots\vee(a=a_n))$  מתקיים  $\{a_1,\ldots,a_n\}$  מתקיים  $\Sigma^*$  אלפבית אזי  $\Sigma^*$  כל המחרוזות הסופיות באלפבית.  $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$  המקיימת ויחידה  $S\subseteq\Sigma^*$  המקיימת  $\Sigma^*$  אזי קיימת ויחידה  $\Sigma^*$ 

- $.B \subseteq S \bullet$
- .F סגורה להפעלת S
- $S\subseteq A$  אזי F סגורה להפעלת אוכן  $B\subseteq A$  עבורה  $A\subseteq \Sigma^*$  אזי  $A\subseteq S$

אינדוקציה מבנית: יהי עולם  $X_{B,F}\subseteq \Sigma^*$  אזי  $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} o \Sigma^* \mid i\in I\}$  ותהא  $B\subseteq \Sigma^*$  מינימלית סגורה מבנית: יהי עולם  $B\subseteq X_{B,F}$  מינימלית סגורה  $B\subseteq X_{B,F}$  עבורה F

 $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid (B\subseteq Y)\land (F\text{ Derived Results})\land (F)\}$  אזי ותהא  $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$  אזי ותהא  $B\subseteq\Sigma^*$  ותהא  $Y\subseteq\Sigma^*$  סגורה להפעלת Y עבורה  $Y\subseteq\Sigma^*$  אזי  $Y\subseteq\Sigma^*$  ותהא  $Y\subseteq\Sigma^*$  ותהא  $Y\subseteq\Sigma^*$ 

 $(p\left(0
ight)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight)\Longrightarrow p\left(n+1
ight)
ight)\Longrightarrow\left(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight)$  אזי עענה על  $\mathbb{N}$  אזי עענה על אזי

על ידי הפעלת  $a_i) \lor (a_i \in B)$  מתקיים  $i \in [n]$  וכן לכל  $a_n = a$  וכן עבורה  $a_1, \ldots, a_n$  אזי אזי  $a \in X_{B,F}$  אזי  $a_i \in X_{B,F}$  מתקבל על ידי הפעלת מ־ $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ .

 $(a \in X_{B,F})$  אזי ( $a \in X_{B,F}$ ) אזי (מיימת סדרת יצירה ל־ $a \in \Sigma^*$  יהי

 $X_{B,F} = igcup_{i=1}^\infty \left\{ a \in \Sigma^* \mid n \;$ מסקנה:  $a \in \mathbb{Z}$  בעלת סדרת יצירה באורך

 $\Sigma = \{\wedge, ee, \neg, \Longrightarrow, (,)\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  :עולם תחשיב הפסוקים:

 $a\in \Sigma^*$  יהי תחשיב הפסוקים אזי ביטוי: יהי ביטוי

אזי  $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$  אזי הגדרה: יהיו

- $\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)" \bullet$
- $.\lor (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1\lor\omega_2)"$  •
- $:\Longrightarrow (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \Longrightarrow \omega_2)" \bullet$ 
  - $.\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)" \bullet$

.WFF =  $X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$  :פסוקי חוקי/פסוק היטב/ביטוי המוגדרות המוגדרות המוגדרות היטב/ביטוי היטב

 $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  עבורו  $p \in \mathrm{WFF}$  פסוק אטומי/יסודי:

.(") ונגמר עם (") ונגמר עם (") ונגמר עם אזי ער  $p \in \mathsf{WFF}$  יהי יהי עם אזי ער אזי ונגמר עם "

 $q_1(q_2 \notin \mathsf{WFF}$  אזי  $q_1,q_2 \in \mathsf{WFF}$  מסקנה: יהיו

משפט הקריאה היחידה: יהי אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה: משפט משפט מעריאה משפט משפט משפט הקריאה מיחידה:

- . פסוק אטומי lpha
- $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$  •
- $.lpha=(etaee\gamma)$  עבורם  $eta,\gamma\in \mathrm{WFF}$  פיימים ויחידים
- $.\alpha = (\beta \Longrightarrow \gamma)$ עבורם  $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ יימים ויחידים
  - $\alpha = (\neg \beta)$  עבורו  $\beta \in \text{WFF}$  •

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי  $\mathcal{O}\left(\operatorname{len}\left(\alpha\right)\right)$  ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי תחשיב הפסוקים ויהי  $\alpha\in\Sigma^*$  ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי  $\alpha\in\mathsf{WFF}$ 

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .¬ .1
- $.\wedge, \vee .2$ 
  - $\Longrightarrow$  .3

T, true :אמת:

.F, false :שקר

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

 $.TT_\circ$  אזי טבלת האמת של יהינה  $(\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow)$  הינה סימון: תהא

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	p	$q \lor p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q

true

false

 $\neg q$ 

false

true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

 $v:\{p_i\} o \{F,T\}$  השמה: פונקציה

המוגדרת  $\overline{v}: \mathsf{WFF} o \{F,T\}$  השמה אזי פונקציה השמה לפסוק: תהא

 $q \wedge p$ 

true

false

false

false

- $\overline{v}(p) = v(p)$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- $.\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$  אזי פסוק אזי
- $.\overline{v}\left(eta\circ\gamma
  ight)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(eta
  ight),\overline{v}\left(\gamma
  ight)
  ight)$  איי הייו eta פסוקים ותהא פעולה בינארית איי

 $ar{v}\left(lpha
ight)=T$  עבורה עבורה אזי  $lpha\in\mathsf{WFF}$  עבורה עבורה תהא

 $v \models \alpha$  אזי א מסופקת על ידי מסופקת על ידי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  השמה ותהא

 $v \not\models \alpha$  אזי v אזי אזי מסופקת על מסופקת על ידי א מימון: תהא  $\alpha \in \mathsf{WFF}$ 

המוגדרת Var : WFF  $ightarrow \mathcal{P}\left(\{p_i\}
ight)$  פונקציה פונקציה בפסוק:

- .Var  $(p) = \{p\}$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- . $Var(\neg \alpha) = Var(\alpha)$  אזי פסוק מיהי •
- . Var  $(\beta \circ \gamma) =$ Var  $(\beta) \cup$  Var  $(\gamma)$  אזי אזי פעולה פעולה פעולה פעולה  $\beta, \gamma$  יהיו •

 $.\overline{v_{1}}\left(lpha
ight)=\overline{v_{2}}\left(lpha
ight)$  אזי  $\forall p\in\mathrm{Var}\left(lpha
ight).v_{1}\left(p
ight)=v_{2}\left(p
ight)$  עבורה  $.TT_{lpha}$  אזי ניתן לייצג את lpha על ידי  $lpha\in {
m WFF}$  מסקנה: יהי

 $TT = TT_{\alpha}$  עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  קיים שלמה פונקציונלית: עבורה  $K \subseteq \{\land, \lor, \lnot, \Longrightarrow\}$  עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  קיים שלמה פונקציונלית: טענה:  $\{\land, \lor, \neg, \Longrightarrow\}$  שלמה פונקציונלית.

q

true

true

false

false

p

true

false

true

false

. טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה עבורה עבורה אזי  $T,\wedge,\vee\in K$  מערכת קשרים עבורה

 $v \models \alpha$  עבורו קיימת השמה v המקיימת  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  פסוק פסוק

 $v \models \alpha$  מתקיים עבורו לכל השמה עבורו מחקיים  $\alpha \in \mathsf{WFF}$ 

 $\perp = \alpha$  טאוטולוגיה אזי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  טאוטולוגיה

 $\models (\neg \alpha)$  עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  שתירה: פסוק

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=\overline{v}\left(eta
ight)$  מתקיים שקולים: פסוקים  $lpha,eta\in\mathsf{WFF}$  עבורם לכל השמה ע

 $\alpha \equiv \beta$  שקולים אזי  $\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}$  סימון: יהיו

 $.v \models lpha$  מתקיים  $lpha \in \Gamma$  עבורה עבורה לכל  $\Gamma \subseteq WFF$  מתקיים  $lpha \in \Gamma$ 

 $v \models \Gamma$  אזי אוי השמה על ידי השמה קבוצה קבוצה קבוצה קבוצה קבוצה רהא

 $v \models \alpha$  מתקיים  $v \models \Gamma$  מתקיים עבורו לכל השמה v המניימת  $v \models \alpha$  מתקיים אזיי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  מתקיים

 $\Gamma \models \alpha$  אזי מ־ר מכטית מים פסוק נובע מסוק ויהי ויהי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  אזי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ 

טענה: יהיו  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$  אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \bullet$
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \bullet$ 
  - $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \bullet$
  - $.(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha) \bullet$
  - $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \bullet$
  - $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \bullet$ 
    - $\neg (\neg \alpha) \equiv \alpha \bullet$
  - $\neg (\alpha \land \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor (\neg \beta) \bullet$
  - $\neg (\alpha \lor \beta) \equiv (\neg \alpha) \land (\neg \beta) \bullet$ 
    - $.(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor \beta \bullet$

```
\alpha(\varphi/p) = \neg \beta(\varphi/p) אזי \alpha = \neg \beta עבורו \beta \in \mathsf{WFF}
                                                  \alpha\left(\varphi/p\right)=\beta\left(\varphi/p\right)\circ\gamma\left(\varphi/p\right) אזי \alpha=\beta\circ\gamma אם בינארית פעולה בינארית פעולה \beta,\gamma\in\mathsf{WFF} אם קיימים
                                                                                                                                                           lpha\left(arphi/p
ight)\in\mathsf{WFF} אזי אזי p\in\mathsf{Var}\left(lpha
ight) ויהי lpha,arphi\in\mathsf{WFF} איזי
                                                                                                         הצבת בסוקים בפסוק: יהיו p_1 \dots p_n ויהיו lpha, arphi_1 \dots arphi_n \in \mathsf{WFF} היהיו יהיו
                                                                                                                                                         lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=arphi_{i} אזי i\in\left[n
ight] עבור lpha=p_{i}
                                                                                                                 lpha\left(arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight)=lpha אז i\in\left[n
ight] לכל לכל lpha
eq p_{i} אם lpha פסוק אטומי וכן
                                                                                           lpha \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) = 
eg eta \left( arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight) אם קיים eta \in \mathsf{WFF} עבורו lpha = \neg eta אזי lpha = \neg eta
lpha\left(arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight)=eta\left(arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight)\circ אם קיימים eta,\gamma\in שולה בינארית עבורה lpha=eta\circ\gamma אם קיימים eta,\gamma\in
                                                                                                                                                                                                                                           \gamma \left( \varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n \right)
                 \overline{v}\left(lpha\left(arphi/p
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אזי v'\left(p_{j}
ight)=\left\{egin{array}{ll} v(p_{j}) & i
eq j \ \overline{v}(arphi) & i=j \end{array}
ight. השמה נגדיר השמה v השמה v אומי ותהא v פסוק אטומי ותהא v השמה נגדיר השמה v האיז מענה: יהיו
מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו p_n יהיו יהיו \alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathsf{WFF} השמה נגדיר השמה עדיר השמה מסקנה הקשר בין הצבות השמה עדיר יהיו
          \overline{v}\left(lpha\left(arphi^{_1}/p_1\ldotsarphi^{_n}/p_n
ight)
ight)=\overline{v'}\left(lpha
ight) אזי v'\left(p_j
ight)=\left\{egin{array}{ll} v(p_j) & j\notin [n] \\ \overline{v}(arphi_j) & j\in [n] \end{array}
ight. מסקנה: יהי lpha\in \mathrm{WFF} טאוטולוגיה יהיו lpha=0 ויהיו lpha=0 ויהיו lpha=0 יהיו אוטולוגיה יהיו lpha=0 טאוטולוגיה יהיו lpha=0 יהיו אוטולוגיה יהיו lpha=0 יהיו יהיו lpha=0 יהיו יהיו lpha=0 ישרות יהיו lpha=0 יהיו יהיו יחדים יהיו יחדים 
                                                                                                                                                             .NNF = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}} :NNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                                                          lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{NNF} משפט: יהי אזי קיים אזי קיים
                                                                                                                                                                                                      .Conj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}} יימון:
                                                                                                                                                                                                        .DNF =X_{	ext{Conj},\{ee{}ullet} :DNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                                                           lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m DNF} אזי קיים lpha\in {
m WFF} אזי יהי
                                                                                                                                                                                                       Disj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\lor\}} יימון:
                                                                                                                                                                                                          .CNF = X_{\mathrm{Disj},\{\wedge\}} :CNF הצורה הנורמלית
                                                                                                                                                                          lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m CNF} משפט: יהי lpha\in {
m WFF} אזי קיים
                                            A\subseteq N אזי איי איז איז איז איז הירכת הוכחה: יהי \Sigma אלפבית תהא N\subseteq \Sigma^* תהא אלפבית היכחה: יהי \Sigma אלפבית הוכחה
                                                                                                                                     N מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                                                     A אזי אוכחה מערכת הוכחה (\Sigma, N, A, F) אקסיומת של מערכת הוכחה אזי
                                                                                                                                  F מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי בללי היסק של מערכת הוכחה:
                                                                                                                                                    .X_{A,F}אזי המשפטים: תרכת מערכת (\Sigma,N,A,F)תהא המשפטים: תהא
                                                                                                                                                                \vdash \varphi אזי משפט \varphi \in Nויהי הוכחה מערכת מערכת S משפט סימון: תהא
                                                                     (\Sigma,N,A,F,\Gamma) אזי אזי \Gamma\subseteq N מערכת הוכחה מערכת (\Sigma,N,A,F) מערכת הנחות: תהא
                                                                        X_{A\cup\Gamma,F} איז היכיחות בעלת הנחות מתרכת (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת היכיחות מהנחות איז קבוצת הטענות היכיחות מהנחות:
                                                                   arphi מערכת איי סדרת יצירה אל ויהי arphi\in N יכיח איי סדרת יצירה של מערכת הוכחה ((\Sigma,N,A,F,\Gamma)
                                                                                                           \Gamma \vdash_{\mathbf{S}} \varphiיכיח אזי \varphi \in N הנחות ויהי הנכחה תהיינה מערכת מערכת מערכת הוכחה \Gamma \subseteq N
                                                                                                                                                                                             טענה: תהא \varphi \in N ויהי הוכחה מערכת מערכת S
                                                                      .\Gamma \vdash_S \varphi אזי \Delta \subseteq \Gamma ותהא A \subseteq C אזי \Delta \subseteq N מונוטוניות: תהא A \subseteq C עבורה A \subseteq C ותהא A \subseteq C אזי קיימת A \subseteq C טופית עבורה C \subseteq C עבורה C \subseteq C אזי קיימת C \subseteq C מתקיים C \subseteq C אזי C \subseteq C אזי C \subseteq C אזי C \subseteq C מתקיים C \subseteq C אזי C \subseteq C סימון: תהא C \subseteq C מערכת הוכחה ויהי C \subseteq C כלל היסק המקיים C \subseteq C אזי C \subseteq C אזי C \subseteq C סימון: תהא C \subseteq C מערכת הוכחה ויהי C \subseteq C
                                                                                                   .MP : \frac{(\alpha\Longrightarrow\beta),\alpha}{\beta} אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי (Ponens Modus).
                                                                                                                                                              מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך
```

 $.\gamma \models \alpha$  מתקיים  $lpha \in \mathsf{WFF}$  למה: יהי  $\gamma \in \mathsf{WFF}$  סתירה אזי לכל

 $(\alpha \models \beta) \Longleftrightarrow (\models (\alpha \Longrightarrow \beta))$  אזי  $\alpha, \beta \in \text{WFF}$  טענה: יהיו מענה: יהיו  $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$  אומי אזי  $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$  אטומי אזי

 $lpha\left(arphi/p
ight)=lpha$  אזי lpha
eq p אטומי וכן lpha פסוק אטומי וכן

 $\alpha (\varphi/p) = \varphi$  אז  $\alpha = p$  אם •

 $\Gamma \models \beta$  אזי  $\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta$  וכן  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$  עבורם  $\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}$  אזי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  אזי  $\Gamma \models (\neg \alpha)$  אזי  $\Gamma \models (\neg \alpha)$  וכן  $\{\alpha\} \models \beta$  וכן  $\{\alpha\} \models \beta$  אזי  $\{\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}\}$  טענה: תהא  $\Gamma \models (\neg \alpha)$  ויהיו  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  אזי  $\Gamma \models (\neg \alpha)$ 

- $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$  אלפבית:
  - $N = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$  :נוסחאות:

$$A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$
 ,  $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$  ,  $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$ 

 $F = \{MP\}$  כללי היסק:

אזי HPC־טענה: יהיו lpha,eta נוסחאות ב

- $\begin{array}{c} . \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \alpha) \ \bullet \\ . \vdash_{\mathrm{HPC}} ((\neg \alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta)) \ \bullet \end{array}$

 $.\{\neg\alpha\} \underset{\text{HPC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet$  מסקנה: יהיו  $\alpha,\beta$  נוסחאות ב־HPC באשר  $\alpha,\beta$  אזי  $\alpha,\beta$  אזי  $\alpha,\beta$ .

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון ⊢ הוא במערכת HPC.

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$  אזי HPC משפט הדידוקציה: תהיינה הנחות מעל .\(  $((\neg(\neg\alpha))\Longrightarrow\alpha)$  אזי HPC טענה: תהא  $\alpha$  נוסחא מעל

 $.\Big(\Gamma dash lpha\Big)\Longrightarrow (\Gamma dash lpha)$  מערכת הוכחה מעל S מתקיים לכל S הנחות מעל הנחות מעל מתקיים מערכת הוכחה מערכת הוכחה לכל חבורה לכל המחות מעל אומרים מערכת הוכחה מערכת הוכחה מערכת הוכחה מערכת הוכחה מערכת הוכחה לכל המחות מערכת הוכחה מערכת הוכחת הוכחה מערכת הוכחת ה  $(\Gamma \models lpha) \Longrightarrow \left(\Gamma \vdash_{S} lpha
ight)$  מערכת הוכחה S מערכת הוכחה לכל G הנחות מעל G הנחות מעל מתקיים עבורה לכל מערכת הוכחה מערכת הוכחה שלמה: למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט: HPC מערכת נאותה.

 $((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$  אזי HPC אזי ( $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma)))$  ותהיינה HPC למה:  $((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \land (\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow$  אזי HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה הוחת מעל HPC ותהיינה  $\alpha, \beta$  ווחסאות מעל  $(\Gamma \vdash \beta)$ 

 $\Gamma \not\models \alpha$  המקיימת S נוסחה מעל עבורה קיימת מעל קבוצת הנחות אזי  $\Gamma$  אזי אזי הוכחה מערכת עקבית: תהא מערכת הנחות מעל  $\left(\Gamma 
ot \vdash_S lpha
ight) \wedge$  המקיימת S ותהיינה הוכחה מעל מאזי (קיימת אינה עקבית) אזי אזי (דוחה מעל אזי הנחות מעל מערכת הוכחה אזי הנחות מעל מערכת הוכחה אזי ו  $.(\Gamma \vdash_S \alpha)$ 

 $\Delta$ טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל S אזי וואיינה  $\Delta\subseteq \Gamma$  סופית מתקיים כי  $\Delta$  עקבית). קבוצת הנחות עקבית מעל  $\Delta$  עבורה לכל  $\Delta$  קבוצת הנחות עקבית מעל  $\gamma$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה א אזי  $\gamma$  $\Gamma = \Delta$  מתקיים  $\Gamma \subset \Delta$  ממקיים מעל

 $.lpha\in\Gamma$  אזי אוי HPC טענה: תהא  $\Gamma\vdash lpha$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC טענה: עהא  $\Gamma\vdash lpha$  אזי

 $(\alpha \in \Gamma) \lor (\neg \alpha \in \Gamma)$  אזי HPC טענה: תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg \alpha \in \Gamma) \lor (\beta \in \Gamma))$  אזי HPC טענה: תהא HPC טענה: תהא אות מעל מקסימלית מעל משפט: HPC מערכת שלמה.