```
[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \bullet
                                                                                                                   [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \bullet
                                                                                                                      .(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \bullet
                                                                                                                       .[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \bullet
                                                                                                                     .(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \bullet
                                                                                                                     (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\} \bullet
                                                                                                                                         .(-\infty,\infty)=\mathbb{R}
                                                                                               \mathbb{F} איים סדר חזק על \mathbb{F} המקיים שדה סדור: שדה שדה
                                                                \forall x,y \in \mathbb{F}. \ (x < y) \lor (x > y) \lor (x = y) :טריכוטומיה/לינאריות
                                                                \forall x,y,z \in \mathbb{F}.x < y \Longrightarrow x+z < y+z : קומפטביליות עם חיבור
                                                            \forall x,y \in \mathbb{F}. \forall z > 0_{\mathbb{F}}. x < y \Longrightarrow x \cdot z < y \cdot z פומפטביליות עם כפל: •
                                                                                                   \forall x \in \mathbb{F}. \exists n \in \mathbb{N}. x < \sum_{i=0}^n 1 :תכונת ארכימדס
                                                                                                                   .טענה: \mathbb{R} מקיים את תכונת ארכימדס
                                                 |x|=[x]=\max{(n\in\mathbb{Z}\mid n\leq x)} אזי x\in\mathbb{R} יהי שלם ערך שלם תחתון: יהי
                                                                                                        \{x\}=x-[x] אזי x\in\mathbb{R} הערך השברי: יהי
                                                                                                       \lfloor x \rfloor = \min (n \in \mathbb{Z} \mid x \le n) ערך שלם עליון:
                                                                                                                                        .\nexists q\in\mathbb{Q}.q^2=2 :טענה
                                                     . \nexists x \in \mathbb{Q}. \forall a \in \left\{y \in \mathbb{Q}. y^2 \leq 2\right\}. \forall b \in \left\{y \in \mathbb{Q}_+ \mid y^2 \geq 2\right\}. a \leq x \leq b טענה:
                                                                                                         . \forall y \in A. y \leq x שמקיים x \in \mathbb{R} מלעיל:
                                                   .\overline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A קבוצת החסמים מלעיל: תהא A\subseteq\mathbb{R} אזי אזי קבוצת החסמים מלעיל: תהא
                                                                                                .\overline{B}_A 
eq arnothing המקיימת A \subseteq \mathbb{R} : קבוצה חסומה מלעיל
                                                                                                          \forall y \in A.x < y שמקיים x \in \mathbb{R} מלרע:
                                                     \underline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A של מלרע של A\subseteq\mathbb{R} אזי איז מלרע: תהא מלרע: תהא מלרע: תהא
                                                                                                  \underline{B}_A 
eq \varnothing המקיימת A \subseteq \mathbb{R} :קבוצה חסומה מלרע
                                                                          (חסומה מלעיל)\wedge(חסומה מלרע). המקיימת A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                                    \forall y \in A.y < x שמקיים x \in A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                                                 \max(A) הוא A המקסימום של
                                                                                                      . \forall y \in A.x \leq y שמקיים x \in A \subseteq \mathbb{R} מינימום:
                                                                                                                   \min(A) הוא A המינימום של
.(orall x\in X. orall y\in Y.x\leq y)\Longrightarrow (\exists c\in\mathbb{R}. orall x\in X. orall y\in Y.x\leq c\leq y) אקסיומת השלמות: יהיו \varnothing
eq X,Y\subseteq\mathbb{R} איזי
                                                                                    \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\} . (\overline{B}_A \neq \varnothing) \Longrightarrow \exists \min(\overline{B}_A) :
                                                                                  \forall A \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right) \setminus \{\varnothing\} . (\underline{B}_A \neq \varnothing) \Longrightarrow \exists \max\left(\underline{B}_A\right) :מסקנה:
                                                                                \mathbb{Q} את המכיל את ביותר המכיל את \mathbb{R}
                                                                               \mathrm{sup}\left(A
ight)=\min\left(\overline{B}_{A}
ight) אזי A\subseteq\mathbb{R} סופרמום/חסם עליון: תהא
                                                                             \inf\left(A
ight)=\max\left(\underline{B}_A
ight) אזי A\subseteq\mathbb{R} אינפימום/חסם תחתון: תהא
               A: \operatorname{Max}(A) \Longrightarrow \sup(A) = \max(A) \land (\exists \min(A) \Longrightarrow \inf(A) = \min(A)) טענה: תהא A \subseteq \mathbb{R} אזי
```

 $a,b\in\mathbb{R}$ קטע/אינטרוול: יהיו

 $.(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \bullet$ $.(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \bullet$

 $.\forall \varepsilon>0.\exists a\in A.\sup\left(A\right)-\varepsilon< a\leq \sup\left(A\right)$ אזי מסקנה: תהא $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ תהא מסקנה: תהא

 $\inf(a,b) = a \wedge \sup(a,b) = b$ אזי $a < b \in \mathbb{R}$ טענה: יהיו

 $.b = \sup(A) \bullet$ $.\forall d \in \overline{B}_A.b \le d \bullet$

 $\forall a \in \mathbb{R}. a < b \Longrightarrow a \notin \overline{B}_A \bullet$

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b\in\mathbb{R}$ חסומה מלעיל של

```
.b = \sup{(A)} \Longleftrightarrow (\forall x \in A.x < b) \land (\forall \varepsilon > 0. \exists x \in A.x > b - \varepsilon) אאי \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R} מסקנה: תהא
                                                                                                         טענה: תהיינה \varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R} סטענה:
                                                                                                     \inf (A + B) = \inf (A) + \inf (B) \bullet
                                                                                                 .\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) \bullet
                                                                                                  \forall c \in \mathbb{R}_+. \forall n \in \mathbb{N}. \exists b \in \mathbb{R}_+. b^n = c טענה:
                   . orall b \in B. orall arepsilon > 0. \exists a \in A. \, |b-a| < arepsilon המקיימת A \subseteq B אזי B \subseteq \mathbb{R} אבוצה צפופה: תהא
                       (orall a,b\in\mathbb{R}.a< b\Longrightarrow (a,b)\cap S
eq arnothing) אזי (S\subseteq\mathbb{R} אזי אזי (S\subseteq\mathbb{R} אזי אזי (S\subseteq\mathbb{R}
                                                                                          \forall a, b \in \mathbb{Q}. a < b \Longrightarrow |(a, b) \cap \mathbb{Q}| = \aleph_0 טענה:
                                                                                  . \forall a,b \in \mathbb{Q}. a < b \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. a < r < b טענה:
                                                                                      \forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Q}. x < q < y טענה:
                                         ([a,b] \cap \mathbb{Q}] צפופה ב־([a,b] \cap \mathbb{Q}] מסקנה: ([a,b] \cap \mathbb{Q}] צפופה ב־([a,b] \cap \mathbb{Q}]).
                                                                           n!=egin{cases} 1 & n=0 \ (n-1)!\cdot n & else \end{cases} עצרת: יהי n\in\mathbb{N} נגדיר n\in\mathbb{N} אזי n\in\mathbb{N} בחר: יהיו n,k\in\mathbb{N} אזי n,k\in\mathbb{N} אזי n,k\in\mathbb{N} זהות פסקל: יהי n,k\in\mathbb{N} אזי n,k\in\mathbb{N}
                        (a+b)^n=\sum_{i=0}^n inom{n}{i}a^ib^{n-i} אזי n\in\mathbb{N} ויהי a,b\in\mathbb{R} נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו
                               למה: יהיו a_1\ldots a_n\geq 0 המקיימים a_1\ldots a_n\geq 0 אזי \prod_{i=1}^n a_i\geq n למה: יהיו a_1\ldots a_n\geq 0 המקיימים a_1\ldots a_n\geq 0 אי־שיוויון הממוצעים: יהיו a_1\ldots a_n>0 אזי a_1\ldots a_n>0 אי־שיוויון הממוצעים: יהיו
                                                   \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}\right) \Longleftrightarrow (a_1 = \ldots = a_n) טענה:
                                                                       \forall x > -1. \forall n \in \mathbb{N}. (1+x)^n \geq 1+nx אי־שיוויון ברנולי:
                                                  \exists x \in \mathbb{N}. \forall x \in \mathbb{R}^n. |\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| אי־שיוויון ברנולי המוכלל:
                                                                                                           |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}הערך המוחלט:
                                           .(|a| \le b \Longleftrightarrow -b \le a \le b) \land (|a| \ge b \Longleftrightarrow (b \le a) \lor (a \le -b)) טענה:
                                                          |a+b| \leq |a| + |b| אזי a,b \in \mathbb{R} יהיו אש"מ): אי־שיוויון המשולש
                                       |\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| אזי אזי |x_1 \dots x_n| \in \mathbb{R} אי־שיוויון המשולש המוכלל: יהיו
                                                                                             |a-b| < |a| + |b| אזי a,b \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
                                                                       |x-y| \leq |x-z| + |z-y| אזי x,y,z \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
                                                          |a|-|b|| \leq |a-b| אזי a,b \in \mathbb{R} איישיוויון המשולש ההפוך: יהיו
                                                                                 \forall a,b \in \mathbb{R}. (\forall \varepsilon > 0. |a-b| < \varepsilon) \Longrightarrow a = b טענה:
                                                                              \sum_{i=0}^n r^i = rac{1-r^{n+1}}{1-r} אזי n \in \mathbb{N} ויהי ויהי r \in \mathbb{R}
                                                                                 .a=\left(a_{n}
ight)_{n=0}^{\infty} ,a_{n}=a\left(n
ight) איז a סדרה איז a סדימון: תהא
```

 $\forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0$ סדרה חיובית: •

 $.\sup(-A) = -\inf(A) \bullet$ $\forall c \in \mathbb{R}_+.\exists b \in \mathbb{R}_+.b^2 = c$ טענה:

- $\forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0$:סדרה אי שלילית
 - $\forall n \in \mathbb{N}. a_n < 0$ שלילית: •
- $\forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq 0$ סדרה אי חיובית: •

סדרה מונוטונית: תהא סדרה

 $a\in\mathbb{N} o\mathbb{R}$:סדרה

הגדרה: תהא a_n סדרה

- $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \Longrightarrow a_n < a_m$ עולה ממש:
 - $. \forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \Longrightarrow a_n \leq a_m$ עולה: •
- $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \Longrightarrow a_n > a_m$ יורדת ממש: •

```
(\forall \alpha \in \mathbb{Q}_+, \frac{1}{n^{\alpha}} \to 0) \land (\sqrt[n]{n} \to 1) \land (\forall c > 0, \sqrt[n]{c} \to 1) \land (\forall q \in (0,1), q^n \to 0) טענה:
                                 a_n=L_1וa_n=L_2 משפט: תהא סדרה אזי a_n=L_2וa_n=L_2 משפט: תהא סדרה אזי a_n=L_2
                                                 (\lim_{n\to\infty}a_n=L)\Longrightarrow (\lim_{n\to\infty}|a_n|=|L|) משפט: תהא סדרה אזי
                                                    (\lim_{n\to\infty}a_n=0)\Longleftrightarrow (\lim_{n\to\infty}|a_n|=0) טענה: תהא סדרה אזי (מינה: מינה מדרה אזי
a_n=Lטענה: תהיינה a,b סדרות עבורן a_n \neq b_nן אזי ו\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\} \mid n \in \mathbb{N}טענה: תהיינה מחרינה אזי וווח
                            a_{n-1}(\lim_{n\to\infty}a_n=L)\Longleftrightarrow (\lim_{n\to\infty}b_n=L) אזי איי מענה: תהא a_n=L סענה: תהא מדיר נגדיר
                                                      סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא סדרה
                                                  (\lim_{n\to\infty} a_n = \infty) \iff (\forall M > 0.\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N.M < a_n) \bullet
                                             (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty) \iff (\forall M > 0.\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N.a_n < -M) \bullet
                                                                      .(\lim_{n\to\infty}n=\infty)\wedge(\forall a>1.\lim_{n\to\infty}a^n=\infty) :
                                        \lim_{n 	o \infty} rac{1}{a_n} = \infty אזי אוי \lim_{n 	o \infty} a_n = 0 טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת
                                                                 . חסומה a אזי \lim_{n \to \infty} a_n = L אזי מדרה המקיימת a סדרה המקיימת
                                                                                             מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.
           a_n=L (\forall arepsilon>0. |\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\notin(L-arepsilon,L+arepsilon)\}|\in\mathbb{N}) טענה: תהא סדרה אזי
                  . orall r \in (0,|L|)\,. \exists N \in \mathbb{N}. orall n > N. |a_n| > r אזי \lim_{n 	o \infty} a_n = L סדרה המקיימת a
                                                                                                            סדרה מונוטונית a סדרה מונוטונית
                                                                                (a_n \downarrow L) \iff (a_n \to L) יורדת ממש אזי a \bullet
                                                                                 (a_n \uparrow L) \Longleftrightarrow (a_n \to L) עולה ממש אזי a \bullet
                                                                                      (a_n \searrow L) \Longleftrightarrow (a_n \rightarrow L) יורדת אזי a \bullet
                                                                                        (a_n \uparrow L) \Longleftrightarrow (a_n \to L) עולה אזי a \bullet
                                            (a_n\searrow x)\wedge (b_n 
ewline x) עבורן a,b\in\mathbb{Q}^\mathbb{N} אזי קיימות סדרות x\in\mathbb{R} יהי יהי
                                  x=\sum_{i=-\infty}^\infty a_i\cdot 10^{-i} המקיים a\in\{0,\dots,9\}^{\mathbb{Z}} אזי קיים x\in\mathbb{R} ייצוג עשרוני: יהי
                                              \overline{d_1\dots d_n}=d_1\dots d_n d_1\dots d_n פיתוח מחזורי אינסופי: יהיו d_1\dots d_n אזי
                                                               (q\in\mathbb{Q})\Longleftrightarrow (q=a.a_1\dots a_n\overline{b_1\dots b_\ell}) אזי q\in\mathbb{R} טענה: יהי
                                                                                      משפט אוקלידס: \mathbb{P} חסומה מלרע אך לא מלעיל.
                                         \exists c \in \mathbb{Q}. \forall q \in \mathbb{N}. \left( \left| 	heta - rac{p}{q} 
ight| < rac{1}{q^2} 
ight) \Longrightarrow \left( \exists c \in \mathbb{R}. rac{c}{q^2} < \left| 	heta - rac{p}{q} 
ight| 
ight) מספר מקורב רע: a \in \mathbb{R} המקיים
                           (a_n 	o a) \land (b_n 	o b) מדרות המקיימות (a_n), (b_n) ותהיינה a,b \in \mathbb{R} חשבון גבולות: יהיו
                                                                                                                    .a_n + b_n \rightarrow a + b \bullet
                                                                                                                       .a_n \cdot b_n \to a \cdot b \bullet
                                                                             .(b \neq 0) \land (\forall n \in \mathbb{N}.b_n \neq 0) \Longrightarrow \left(\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}\right) \bullet
                                             (d_n 	o d) \Longrightarrow (d \ge 0) אזי \forall n \in \mathbb{N}. d_n \ge 0 למה: תהא d_n סדרה המקיימת
                                  . \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{L} אזי אויהי k \in \mathbb{N}_+ ויהי a_n \to L טענה: תהא שלילית שלילית סדרה אי שלילית המקיימת
```

 $(\lim_{n \to \infty} a_n = L) \Longleftrightarrow (orall arepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. |a_n - L| < arepsilon)$ סדרה מתכנסת/גבול סופי: תהא $a_n = L$

 $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \Longrightarrow a_n \geq a_m$ יורדת: •

 $.(a_n o L) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n o \infty} a_n = L
ight)$ איי סימון: תהא סדרה איי סימון: תהא סדרה איי סימון: . $(\forall r \in \mathbb{R}. \lim_{n o \infty} r = r) \wedge \left(\lim_{n o \infty} rac{1}{n} = 0
ight)$

סדרה חסומה: (חסומה מלרע)∧(חסומה מלעיל).

סדרות a_n, b_n יהיו יהיו

 $.(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \ge N. a_n \le b_n) \Longrightarrow (a_n \le b_n) \bullet$ $.(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \ge N. a_n < b_n) \Longrightarrow (a_n \le b_n) \bullet$

 $.\exists M\in\mathbb{R}. \forall n\in\mathbb{N}. a_n < M$ סדרה המקיימת a סדרה מלעיל: סדרה חסומה מליע: סדרה חסומה מלרע: סדרה חסומה מלרע: סדרה חסומה מלרע: סדרה חסומה מלרע

```
(a_n \preccurlyeq b_n) \Longrightarrow (\lim_{n \to \infty} a_n \le \lim_{n \to \infty} b_n) מונוטוניות גבולות: תהיינה a_n, b_n סדרות מתכנסות אזי
(a_n,c_n 	o L) \Longrightarrow (b_n 	o L) אזי a_n \preccurlyeq b_n \preccurlyeq c_n סדרות המקיימות סדרות a_n,b_n,c_n משפט הסנדוויץ': תהיינה
                                 a_n b_n 	o 0 אזי אזי b_n 	o 0 סענה: תהא a_n סדרה חסומה ותהא סדרה חסומה סדרה מקיימת
                                                                                 rac{a_n}{n} 	o 0 מסקנה: תהא a_n סדרה חסומה אזי
                                                     .\exists b\in B^{\mathbb{N}}.b_n	o \sup\left(B
ight) משפט: תהא חסומה מלעיל אזי B\subseteq\mathbb{R}
                                                      .\exists b\in B^{\mathbb{N}}.b_n	o\inf\left(B
ight) מסקנה: תהא B\subseteq\mathbb{R} חסומה מלרע אזי
                                                                                                       טענה: תהיינה a_n,b_n סדרות
                                                                            (a_n \to \infty) \land (a_n \preccurlyeq b_n) \Longrightarrow (b_n \to \infty) \bullet
                                                                       (a_n \to -\infty) \land (b_n \preccurlyeq a_n) \Longrightarrow (b_n \to -\infty) \bullet
                         .(\exists lpha \in [0,1).a_n \prec lpha^n) \Longrightarrow (a_n 	o 0) אזי שלילית איז סדרה a_n סדרה מבחן השורש: תהא
                                   a_n^{rac{1}{n}}	o p מבחן השורש הגבולי: יהיp\in\mathbb{R} ותהא ותהא סדרה אי שלילית המקיימת
                                                                                                   .0 \le p \le 1 \Longrightarrow a_n \to 0 \bullet
```

 $p > 1 \Longrightarrow a_n \to \infty \bullet$

משפט: תהא a_n סדרה

 $(\sup(a_n) = \sup(\operatorname{Im}(a))) \wedge (\inf(a_n) = \inf(\operatorname{Im}(a)))$ איניל אזי מדרה חסומה מלעיל אזי

- $a_n
 sup (a_n)$ אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי
 - $a_n
 egthinspace \infty$ אם מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי מונוטונית •
- $a_n \searrow \inf \left(a_n \right)$ אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע a_n
- $a_n \searrow -\infty$ אזי מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי a_n

 $rac{a_{n+1}}{a_n} o L$ מבחן המנה הגבולי: תהא סדרה סיובית מבחן מבחן מבחן מבחן מבחן

- $(L < 1) \Longrightarrow (a_n \to 0) \bullet$

 $(L>1)\Longrightarrow (a_n\to\infty)$ • $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$ איי סדרה איי a_n סדרה איי מיזארו: תהא

 $a_n=a$ במובן הרחב אזי ב"זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא מדרה המקיימת $a_n o a$ סדרה המקיימת משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: $a_n o a_n$ במובן הרחב אזי $a_n o a_n$ סדרה חיובית המקיימת ממוצע הנדסי: תהא משפט התכנסות ממוצע הנדסי: $\sqrt[n]{a_n} \to c$ אזי במובן במובן $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to c$ המקיימת סדרה סדרה מסדר: תהא בר: משפט ד'אלאמבר

 $\frac{\sum_{k=1}^n t_k a_k}{\sum_{k=1}^n t_k} o L$ אזי א $\sum_{k=1}^n t_k o \infty$ המקיימת המקיימת $t \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ במובן הרחב ותהא a o L במובן הרחב אזי במובן הרחב אזי במובן הרחב אזי במובן הרחב אזי a o b o b משפט שטולץ: תהא a o b o b סדרה נניח כי a o b o b

טענה: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

 $e=\lim_{n o\infty}\left(1+rac{1}{n}
ight)^n\in(2,3]$: מסקנה: $\left(1+rac{1}{a_n}
ight)^{a_n} o e$ אזי $a_n o\infty$ המקיימת $a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ אזי $a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ תהא $a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ עולה אזי a_n : תת סדרה/סדרה חלקית (ת"ס): תהא $a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ עולה אזי $a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה

- . חסומה מלעיל שלעיל חסומה $b \Longleftrightarrow a$
- חסומה מלרע של חסומה מלרע. $a \bullet$
 - $a \to L \Longrightarrow b \to L \bullet$
 - מונוטונית $b \Longleftrightarrow a$ מונוטונית.

. טענה: תהא a סדרה המקיימת $\max(a)$ אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש

.טענה: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מונוטונית

וגם b-a o 0 וגם של קנטור על קטעים מקוננים: תהיינה a,b סדרות המקיימות

$$.|\bigcap_{n=0}^{\infty}\left[a_{n},b_{n}
ight]|=1$$
 אזי $\forall n\in\mathbb{N}.\left(a_{n}\leq b_{n}
ight)\wedge\left(\left[a_{n+1},b_{n+1}
ight]\subseteq\left[a_{n},b_{n}
ight]
ight)$. $\mathcal{C}=\left[0,1\right]\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^{n}-1}\left(rac{3k+1}{3^{n+1}},rac{3k+2}{3^{n+1}}
ight)$ קבוצת קנטור:

משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

 $\mathbb{R}_{\infty} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ סימון:

```
. פתוחה) \bigcap_{i=1}^n A_iסענה: תהיינה \bigcup_{i=1}^\infty A_iסענה: פתוחות סדרת קבוצות פתוחות אזי איינה תהיינה מדרת סדרת אזי
                                                                                 קבוצה סגורה: B\subseteq\mathbb{R} המקיימת B\subseteq\mathbb{R} פתוחה.
                . סגורה) סענה: תהיינה \bigcap_{i=1}^\infty B_iסגורה) סגורות אזי סגורה סגורה סגורה סדרת סדרת סגורה) סענה: תהיינה סגורה)
                   \exists a\in (S\backslash \{x\})^{\mathbb{N}}\,.\lim_{n	o\infty}a_n=x המקיימת x\in\mathbb{R} אזי אזי S\subseteq\mathbb{R} נקודת הצטברות: תהא
                                                                                                           oldsymbol{v}טענה: תהא B\subseteq\mathbb{R} התב"ש
                                                                                                                  . קבוצה סגורה B \bullet
                                                                                                \forall a \in B^{\mathbb{N}}. \lim_{n \to \infty} a_n \in B \bullet
                                                                            \{x \in \mathbb{R} \mid B  נקודת הצטברות של \{x \in \mathbb{R} \mid B \in B \bullet \}
                                                               משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים \mathcal{P}\left(a\right) קבוצה סגורה.
                                                         \exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. P\left(n\right) המקיים P\left(n\right) במעט תמיד: פרידקט
                                                                  |\{n\in\mathbb{N}\mid P\left(n
ight)\}|=leph_{0} המקיים P\left(n
ight) פרידקט
                                                 a = \liminf a \iffמשפט: תהא סדרה אזי (a מתכנסת)
                                                                                        L\in [-\infty,\infty] משפט: תהא a סדרה ויהי
                                                               .(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N.a_n < L) \Longrightarrow (\limsup a < L) \bullet
                                                               (\forall N \in \mathbb{N}. \exists n > N. a_n \ge L) \Longrightarrow (\limsup a \ge L) \bullet
                                                                (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N.a_n \geq L) \Longrightarrow (\liminf a \geq L) \bullet
                                                                (\forall N \in \mathbb{N}. \exists n > N. a_n \leq L) \Longrightarrow (\liminf a \geq L) \bullet
                                                                                        משפט: תהא a סדרה ויהי L\in\mathbb{R} התב"ש
                                                                                                                   \lim \sup a = L \bullet
             \forall \varepsilon > 0. \ (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \ge N. a_n < L + \varepsilon) \land (\forall \varepsilon > 0. \forall N \in \mathbb{N}. \exists n \ge N. a_n > L - \varepsilon) \bullet
a, (\liminf a \le \liminf b) \land (\limsup a \le \limsup a \le \limsup b) איי משפט: תהיינה a, b סדרות המקיימות משפט: משפט: משפט
                                  .orall arepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.orall m,n\geq N. סדרת קושי: סדרה a המקיימת סדרה המקיימת
                                                                                          למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.
                                                               a משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת) משפט: תהא a
                                                          \sum_{i=k}^{\infty}a_i=\lim_{n	o\infty}\sum_{i=k}^na_i אזי k\in\mathbb{Z} יהי סכום אינטופי: יהי
                                                                          \sum_{i=0}^\infty a_i טור: תהא a סדרה אזי\sum_{i=0}^\infty a_i טור\sum_{n=0}^\infty a_n טור אזי\sum_{n=0}^\infty a_n יהי
                                                            .S_n^a = \sum_{i=0}^n a_iאזי סדרה מחלקיים: תהא a החלקיים: החלקיים
                                                      (S_n^a 	o L) \Longrightarrow (\sum_{i=0}^\infty a_i = L)טור מתכנס: תהא סדרה אזי
                                                                        \sum_{n=0}^{\infty} ar^nטור גאומטרי: יהי a \neq 0 ויהי אוי ראומטרי:
                                                              (|r|<1) \Longleftrightarrowמתכנס) מתכנס אזי r\in\mathbb{R} מתכנס: יהי r\in\mathbb{R}
                                                                                                              .\sum_{n=1}^{\infty} rac{1}{n} :הטור ההרמוני
```

גבול חלקי: תהא b o x סדרה אזי $x \in \mathbb{R}_\infty$ עבורו קיימת תת סדרה b o a עבורה a

 $-\lim \left(\inf \left(a\right)\right) = \underline{\lim} \left(a\right) = \sup \left(\mathcal{P}\right)$, $\lim \left(\sup \left(a\right)\right) = \overline{\lim} \left(a\right) = \sup \left(\mathcal{P}\right)$ סימון: תהא סדרה אזי

 $\widehat{\mathcal{P}}(a)=igcup_{i=1}^m\widehat{\mathcal{P}}\left(a_{b_i}
ight)$ יהיו a סדרה אזי $(b_i\uparrow\infty)\land(igcup b_i=\mathbb{N})$ סענה: יהיו $b_1\ldots b_m\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ זרות בזוגות המקיימות

 $|a_n| |a_n-L| < \varepsilon | = \aleph_0 > 0.$ משפט: תהא סדרה אזי ($\dot{L} \in \mathcal{P}$) איזי משפט: תהא

 $\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\subseteq\left[\inf\left(a
ight),\sup\left(a
ight)
ight]$ מסקנה: תהא סדרה חסומה אזי

 $.(\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}) \wedge (\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|=1) \Longleftrightarrow$ (משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת) משפט: תהא סדרה חסומה אזי ($\exists \min{(\mathcal{P})}, \max{(\mathcal{P})}$

 $. \forall x \in A. \exists \varepsilon > 0. \ (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$ המקיימת $A \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה:

טענה: תהא מ סדרה

 $\infty\in\widehat{\mathcal{P}}\Longleftrightarrow$ אינה חסומה מלעיל a • .- $\infty\in\widehat{\mathcal{P}}\Longleftrightarrow$ אינה חסומה מלרע a •

 $|\widehat{\mathcal{P}}|>0$ טענה: תהא a סדרה אזי

 $\widehat{\mathcal{P}}\left(a
ight)=\{L\in\mathbb{R}_{\infty}\mid a$ סדרה אזי $L\}$ גבול חלקי של של בLו $\mathcal{P}\left(a
ight)=\{L\in\mathbb{R}\mid a$ גבול חלקי של בול חלקי של

```
(a_n \to 0) \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^\infty a_n  משפט: תהא a סדרה אזי \sum_{i=0}^\infty a_n מתכנס) מתכנס: \sum_{n=0}^\infty a_n  מתכנס: \sum_{n=0}^\infty a_n  טור אזי \sum_{n=0}^\infty a_n  טורים ויהי \sum_{n=0}^\infty a_n  טורים ויהי \sum_{n=0}^\infty a_n  טורים ויהי \sum_{n=0}^\infty a_n  מורים ויהי
                                                                                               . מתכנס \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n}+b_{n}\right) \Longleftarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_{n} מתכנס 
                                                                                                         מתכנס. מתכנס \sum_{n=0}^{\infty}\xi a_n \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n
                                                                                                                                              טור \sum_{n=0}^{\infty}a_n טור \sum_{n=0}^{\infty}a_n
                                                                                                                                 \forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0 טור חיובי: •
                                                                                                                           \forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0 טור אי שלילי:
                                                                                                                                \forall n \in \mathbb{N}. a_n < 0 טור שלילי: •
                                                                                                                            \forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq 0 טור אי חיובי: •
                                                                                  טור מתכנס בהחלט: טור \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| המקיים החלט: טור מתכנס בהחלט:
                                                                                 . טענה: יהי\sum_{n=0}^\infty a_n טור מתכנס בהחלט אזי מתכנס \sum_{n=0}^\infty a_n מתכנס
                                     \sum a_n \preccurlyeq \sum b_n אזי אזי a_n \leq b_n סימון: יהיו עבורם טורים חיוביים עבורם טורים טורים אזי אזי יהיו
                                                                           \sum a_n \preccurlyeq \sum b_n משפט ההשוואה: יהיו יהיו \sum a_n, \sum b_n יהיו יהיו
                                                                                                        מתכנס). \sum_{n=0}^{\infty}a_n מתכנס) \sum_{n=0}^{\infty}b_n מתכנס). \sum_{n=0}^{\infty}a_n מתבדר). \sum_{n=0}^{\infty}a_n
                                                  L \in (0,\infty) \Longrightarrow (\sum b_n < \infty \Longleftrightarrow \sum a_n < \infty) \bullet
                                                                                                        L=0 \Longrightarrow (\sum b_n < \infty \Longrightarrow \sum a_n < \infty) \bullet
                                                                                                     L = \infty \Longrightarrow (\sum b_n < \infty \Longleftrightarrow \sum a_n < \infty) \bullet
                  . (מתכנס). \sum a_n שלילי (קיים \sum a_n טור אי מידי (קיים \sum a_n טור אי שלילי (קיים \sum a_n יהי יהי
                                                                                                    מבחן השורש הגבולי: יהי a_n טור חיובי \sum a_n יהי הכנס: \left(\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)<1\right)\Longrightarrow מתכנס: •
                                                                                                   -(\lim \left(\sup \left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)>1) \Longrightarrow(מתבדר) \geq a_n מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי \geq a_n טור חיובי
                                                                   . מתכנס). עבורו כמעט תמיד \sum a_n (קיים q \in (0,1) מתכנס).
                                                                                              . (כמעט תמיד \sum a_n)\Longleftrightarrow(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 מתבדר). פמחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי \sum a_n טור חיובי
                                                                                                .\left(\lim\left(\sup\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)<1\right)\Longrightarrowמתכנס) • .\left(\lim\left(\inf\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)>1\right)\Longrightarrowמתבדר) • .\left(\lim\left(\inf\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)>1\right)
                                      \sum 2^n a_{2^n} \iff \sum a_n מתכנס) משפט העיבוי: תהא n סדרה אי שׁלילית יורדת אזי n מתכנס)
                         (מתכנס)... \sum m^n a_{m^n} מתכנס) מסקנה: יהי \sum a_n ותהא m \geq 2 ותהא שלילית יורדת אזי שלילית יורדת אזי m \geq 2
                                                                                                  (x>1) \Longleftrightarrowמסקנה: יהי x\in\mathbb{R} אזי ו\frac{1}{n^x} מתכנס
                                                                                                משפט לייבניץ: תהא a_n \searrow 0 אזי \sum \left(-1\right)^n a_n משפט לייבניץ: תהא
                                                                                    טור מתכנס בתנאי: טור \sum a_n מתכנס המקיים בתנאי: טור מתכנס בתנאי
             \sum_{k=m}^{n}a_{k}\left(b_{k+1}-b_{k}
ight)=\left(a_{n}b_{n+1}-a_{m}b_{m}
ight)-\sum_{k=m+1}^{n}b_{k}\left(a_{k}-a_{k-1}
ight) אינה a,b סדרות אזי a,b
                   \sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^k a_m \left(b_k - b_{k+1}
ight) התמרת אבל: תהיינה a,b סדרות אזי
```

. סדרה $\sum a_n b_n$ אזי חסומה אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס. סדרה עבורה $\sum a_n b_n$ סדרה סדרה סדרה סדרה מונוטונית ותהא

אזי $\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L$ בעלי אותו סימן וגם $(a_i)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1}$ וכן ווכן $b_0=0$ וכן אזי $b\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ אזי $b\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$

. מתכנס $\sum a_n b_n$ אזי אבל: יהי $\sum a_n b_n$ טור מתכנס ותהא סדרה חסומה מונוטונית אזי

 $.\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}a_k=L$ יהי אולה ממש אזי עולה ותהא א $b\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ותהא טור $\sum a_n=L$ יהי יהי

 $\sum_{n=1}^{\infty} rac{1}{n} o \infty$:טענה

 $.\sum_{p\in\mathbb{P}}rac{1}{p}=\infty$ משפט:

 $\sum a_n = L$

```
. (מתכנס)\sum a_n^+ מתכנס) מתכנס בהחלט) מתכנס סדרה אזי \sum a_n^+ מתכנס מתכנס) מתכנס סדרה אזי \sum a_n^+
                                                         \sum a_{p(n)} = \sum a_n איווג אזי p \in \mathbb{N}^\mathbb{N} משפט: יהי יהי טור מתכנס בהחלט ויהי
                                                         a_n^+ = \infty = \sum a_n^-  משפט: תהא a_n סדרה אזי מתכנס בתנאי בתנאי משפט: משפט מדרה אזי a_n
                                       . \forall S \in [-\infty,\infty] . \exists \sigma \in \mathbb{N} \ \frac{1-1}{\text{onto}} \ \mathbb{N}. \sum a_{\sigma(n)} = S מתכנס בתנאי אזי משפט רימן: יהי משפט המנט בתנאי אזי
                                                                 . \nexists \sum a_{\sigma(n)} איווג עבורו \sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} פיים בתנאי מתכנס מתכנס מתכנס בתנאי יהי
\sum a_{p(n)}b_{q(k)}=(\sum a_n)(\sum b_n) אזי היו אויים מתכנסים ניסים טורים \sum a_n,\sum b_n תמורות ויהיו p,q\in\mathbb{N}^\mathbb{N}
                                                                               \sum a_k \left(x-x_0
ight)^k אזי x_0 \in \mathbb{R} סדרה ויהי a_n סדרה חזקות: תהא
                     x\in\left(-\left|q
ight|,\left|q
ight|
ight) אזי בהחלט עבור מתכנס עבור בהחלט עבור אזי בהחלט עבור משפט: יהי המתכנס עבור מתכנס עבור
    x\in (-R,R) משפט אבל: יהי \sum a_k x^k טור חזקות אזי קיים x\in [0,\infty] כך שלכל x\in \mathbb{R} מתכנים x\in \mathbb{R} מתבדר מתבדר x
otin x\in \mathbb{R}
                                                   . משפט את משפט המקיים את המקיים אזי R \in [0,\infty] אזי טור חזקות יהי יהי יהי יהי יהי ההתכנסות: יהי
                                             .rac{1}{\limsup\left(|a_n|^{rac{1}{n}}
ight)} אור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא הדמרד: יהי יהי משפט קושי הדמרד: יהי
      a_n מתכנס עבור \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n אזי איזי q\in\mathbb{R} טענה: יהיו טורי חזקות טורי טורי טורי סורי טורי טענה:
                                                               L(C)\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{n	o\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}S_i^a}{n} אור אזי \sum a_n טור אזי ויהי מענה: יהי יהי \sum a_n טור אזי וור אזי \sum a_n טענה: יהי יהי \sum a_n טור אזי וור אזי \sum a_n
                                                                                                                       f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} פונקציה מונוטונית: תהא
                                                                                       \forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \Longrightarrow f(x) < f(y) :עולה ממש
                                                                                               \forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \Longrightarrow f(x) \le f(y) שולה: •
                                                                                      \forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \Longrightarrow f(x) > f(y) יורדת ממש:
                                                                                              \forall x, y \in \mathbb{R}. x < y \Longrightarrow f(x) \ge f(y) יורדת: •
                                                                                 [0,\infty) טענה: יהי n\in\mathbb{N} אזי אונוטונית עולה ממש בקטע
                                                                                  .(f\left(x
ight)=x^{n})\Longrightarrow\left(f^{-1}\left(x
ight)=x^{rac{1}{n}}
ight) אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                                       (x^m)^{rac{1}{n}}=\left(x^k
ight)^{rac{1}{\ell}} אזי rac{m}{n}=rac{k}{\ell} טענה: יהיו n,m,k,\ell\in\mathbb{N} המקיימים
                                              \mathrm{constant}(c^{a_n})=\mathrm{lim}\left(c^{b_n}
ight) אזי a_n,b_n\searrow b המקיימות a,b\in\mathbb{Q}^\mathbb{N} תהיינה c\in\mathbb{R} טענה: יהי
                                                                         b_n \searrow b המקיימת b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} ותהא ותהא b \in \mathbb{R} יהי n, m \in \mathbb{N} המיימת
                                                                                                                                      .x^{-n} = \frac{1}{x^n} \bullet.x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} \bullet
                                                                                                                                       a^b = \lim a^{b_n} \bullet
                                                                       f(x)=x^{lpha} כך כך f\in [0,\infty)^{[0,\infty)} נגדיר נגדיר יהי 0<lpha כר
                                                                      f\left(x
ight)=x^{lpha} כך כך f\in\left(0,\infty
ight)^{\left(0,\infty
ight)} נגדיר נגדיר יהי החזקה: יהי 0>lpha יהי
                                                     \sqrt[n]{x}=x^{rac{1}{n}} אזי n\in\mathbb{N} הגדרה: יהי n\in\mathbb{N} אזי n\in\mathbb{N} משפט: יהיו a,b\in\mathbb{R} אזי a,b\in\mathbb{R} משפט: יהיו
                                                                                                   \dot{x}^r < x^\ellטענה: יהי x > 1 אזי x > 1טענה: יהי
                                                                                             x^r > x^\ellטענה: יהי 0 < r < \ell ויהין 0 < x < 1
                                                                 f(x)=a^x כך f\in(0,\infty)^\mathbb{R} הפונקציה המעריכית: יהי0<lpha
eq 1 נגדיר
                                  . בתור במשולש ישר זווית ליתר ממול \sin:[0,2\pi] 	o [-1,1] בתור במשולש ישר זווית.
                                                                                                            \forall k \in \mathbb{N}. \sin(x + 2\pi k) = \sin(x) סינוס:
                                 . בתור במשולש ישר זווית ליתר במשולש ישר במור היחס בין הצלע ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית כos: [0,2\pi] 
ightarrow [-1,1]
```

 $\sum a_{p(n)}=\sum a_n$ אווג אזי $p\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ זיווג אוי טור חיובי מתכנס ויהי היי $\sum a_n$ זיווג אזי היי משפט: יהי הי הי היבי מתכנס ויהי $\left(a_n^+=rac{|a_n|+a_n}{2}
ight)\wedge\left(a_n^-=rac{|a_n|-a_n}{2}
ight)$ סימון: תהא a_n סדרה אזי

 $\forall k \in \mathbb{N}.\cos\left(x+2\pi k\right) = \cos\left(x\right)$ קוסינוס:

 $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ כך $\tan: \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ טנגנס: נגדיר

```
טענה: זהויות טריגנומטריות.
                                      (\arcsin = \sin^{-1}) \wedge (\arccos = \cos^{-1}) \wedge (\arctan = \tan^{-1}) \wedge (\arctan = \cot^{-1}) :הגדרה:
                                                                                                    \left(f\right)^{-1} = \log_a אזי f\left(x\right) = a^x נסמן a > 0 אזי a > 0
                                                                                                                                         ln = \log_e :סימון (הלוגריתם הטבעי)
                                                                                                                                                               טענה: זהויות לוגרתמיות.
                                                                                   \exists a \in \mathbb{R}_+. f\left(x+a\right) = f\left(x\right) המקיימת f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} פונקציה מחזורית:
                                                                                                \forall x \in \mathbb{R}. f(-x) = f(x) המקיימת f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} :פונקציה זוגית
                                                                                       \forall x \in \mathbb{R}. f(-x) = -f(x) המקיימת f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} פונקציה אי־זוגית:
                                                                      I_x=(x-\delta,x+\delta)\setminus\{x\} אזי x\in\mathbb{R} ויהי \delta>0 ויהי היי סביבה: יהי
                              f:A	o\mathbb{R} תהא a< x_0 < b המקיימות a,b\in\mathbb{R} ויהיו ויהיו x_0\in\mathbb{R} יהי
                                                                                                                                                               A=I_{x_0}:בנקודה •
                                     (\lim_{x\to x_0} f(x) = L) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0}. | f(x) - L | < \varepsilon) קושי:
                                     (\lim_{x\to x_0} f(x) = L) \iff (\forall y \in A^{\mathbb{N}}. (y_n \to x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to L)) - היינה:
                                                                                                                                           A=(x_0,b): חד צדדי מימין ullet
  . \left(\lim_{x \to x_{0}^{+}} f\left(x\right) = L\right) \Longleftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. x \in \left(x_{0}, \min\left\{x_{0} + \delta, b\right\}\right). \left|f\left(x\right) - L\right| < \varepsilon\right) + \varepsilon
                                     . \left(\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_n\downarrow x_0\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_n\right)\to L\right)\right) - היינה:
                                                                                                                                        A=(a,x_0): חד צדדי משמאל
.\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right) קושי: -
                                     .\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x
ight)=L\right)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\uparrow x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}
ight)	o L
ight)
ight) - היינה:
                                  (\lim_{x\to\infty}f(x)=L)\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\geq M.\,|f(x)-L|<\varepsilon) קושי: -
                                    (\lim_{x\to\infty}f\left(x
ight)=L)\Longleftrightarrow\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_n\to\infty
ight)\Longrightarrow\left(f\left(y_n
ight)\to\infty
ight)
ight) - היינה:
                                                                                                                                         A=(-\infty,b) במינוס אינסוף: •
                               (\lim_{x\to -\infty}f\left(x
ight)=L)\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}. \forall x\leq M. \left|f\left(x
ight)-L
ight|<arepsilon קושי:
                             (\lim_{x\to\infty} f(x) = L) \iff (\forall y \in A^{\mathbb{N}}, (y_n \to -\infty) \implies (f(y_n) \to -\infty)) - היינה:
        a < x_0 < b המקיימות a,b \in \mathbb{R} ויהיו ויהי והרחב: יהי אינסופי/גבול אינסופי/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב:
                                                                                                                                               f:I_{x_0}	o\mathbb{R} בנקודה: תהא ullet
                                                     (\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty) \iff (\forall M > 0.\exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0}. f(x) > M)
                                              .(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=-\infty)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.f\left(x\right)<-M\right)\text{ --}
                                                                                                                           f:(x_0,b)	o\mathbb{R} חד צדדי מימין: תהא ullet
               \left(\lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right) = \infty\right) \Longleftrightarrow \left(\forall M > 0.\exists \delta > 0. \forall x \in \left(x_0, \min\left\{x_0 + \delta, b\right\}\right). f\left(x\right) > M\right) - \left(\lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right) = \infty\right) \Longleftrightarrow \left(\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in \left(x_0, \min\left\{x_0 + \delta, b\right\}\right). f\left(x\right) > M\right)
        \left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=-\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0},\min\left\{ x_{0}+\delta,b\right\} \right).f\left(x\right)<-M\right)
                                                                                                                       f:(a,x_0) \to \mathbb{R} חד צדדי משמאל: תהא
             \left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).f\left(x\right)>M\right)
      \left(\lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right) = -\infty\right) \Longleftrightarrow \left(\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in \left(\max\left\{x_0 - \delta, a\right\}, x_0\right). f\left(x\right) < -M\right) - \left(\lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right) = -\infty\right) \Longleftrightarrow \left(\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in \left(\max\left\{x_0 - \delta, a\right\}, x_0\right). f\left(x\right) < -M\right)
                                                                                                                                      f:(a,\infty)	o\mathbb{R} באינסוף: תהא ullet
                                                        (\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty) \iff (\forall M > 0.\exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f(x) > M)
                                                 (\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty) \iff (\forall M > 0. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f(x) < -M)
                                                                                                                        f:(-\infty,b)	o\mathbb{R} במינוס אינסוף: תהא
                                                      (\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty) \iff (\forall M > 0.\exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \leq \delta. f(x) > M)
                                                 (\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty) \iff (\forall M > 0.\exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \leq \delta. f(x) < -M)
                                                                          A^\pm=A\cup \left\{x_0^+\mid x_0\in A
ight\}\cup \left\{x_0^-\mid x_0\in A
ight\} אזי A\subseteq \mathbb{R} איזי A\subseteq \mathbb{R}
             . במובן הרחב \left(f\left(x
ight) \xrightarrow[x 	o x_{0}]{} L
ight) \Longleftrightarrow \left(\lim_{x 	o x_{0}} f\left(x
ight) = L
ight) אזי f:I 	o \mathbb{R} ותהא x_{0} \in \mathbb{R}_{\infty}^{\pm} יהי
```

 $an(x) = rac{\cos(x)}{\sin(x)}$ כך $\cot: \mathbb{R} \setminus \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ קוטנגנס: נגדיר

```
D\left(x
ight) = egin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x 
otin \mathbb{Q} \end{cases} פונקציית דריכלה:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                f,g:I_{x_0}	o\mathbb{R} חשבון גבולות: יהיx_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm יהי
                                                                                                                                                                                                                   \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) \bullet
                                                                                                                                                                                                                                          \lim_{x \to x_0} (f(x) g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 \lim_{x	o x_0} x = x_0 אזי x_0\in\mathbb{R}^\pm_\infty למה: יהי
                                                                                                                                                                                                                          \lim_{x	o x_0}p\left(x
ight)=p\left(x_0
ight) אזי p\in\mathbb{R}\left[x
ight] ויהי x_0\in\mathbb{R}^\pm אזי איזי x_0\in\mathbb{R}^\pm
 \lim_{x	o x_0}g\left(f\left(x
ight)
ight)=\lim_{x	o y_0}g\left(x
ight) אזי וווהיינה \lim_{x	o x_0}f\left(x
ight)=y_0 המקיימת המינה g\in\mathbb{R}^{I_{y_0}} וכך וכך g\in\mathbb{R}^{I_{y_0}} וכך ותהיינה המקיימת המינה וותהיינה המקיימת המינה וותהיינה וותהיינה וותהיינה וותהיינה וותהיינה וותחיינה ותחיינה וותחיינה ותחיינה וותחיינה וותחי
\lim_{x 	o x_0} g\left(f\left(x
ight)
ight) = g\left(\lim_{x 	o y_0} f\left(x
ight)
ight) אזי \lim_{x 	o x_0} f\left(x
ight) = y_0 המקיימת g, f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} ותהיינה x_0, y_0 \in \mathbb{R}^\pm_\infty ותהיינה x_0, y_0 \in \mathbb
                                                                                                                                                                             \forall a \in \mathrm{Dom}\,(f)\,.\,\lim_{x \to a} f\,(x) = f\,(a) טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |\sin(x)| < |x| אזי x \in \mathbb{R} משפט: יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                 \lim_{x\to x_0}\cos\left(x\right)=\cos\left(x_0\right) אזי x_0\in\mathbb{R}^\pm יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                         \lim_{x	o x_0}\sin\left(x
ight)=\sin\left(x_0
ight) אזי x_0\in\mathbb{R}^\pm מסקנה: יהי
                                                                                                                                                                              f(x) \preccurlyeq g(x) אזי \forall x \in I. f(x) \leq g(x) המקיימות f,g:I \to \mathbb{R} אזי
                   \lim_{x	o x_0}f\left(x
ight)\leq \lim_{x	o x_0}g\left(x
ight) אזי f\left(x
ight)\preccurlyeq g\left(x
ight) המקיימות היינה f\left(x
ight)\preccurlyeq g\left(x
ight) המקיימות הבולות: יהי
                                                                                                                                f(x) \preccurlyeq g(x) \preccurlyeq h(x) בלל הסנדוויץ': יהיf(x) \preccurlyeq g(x) \preccurlyeq h(x) המקיימות f(x) \preccurlyeq g(x) \preccurlyeq h(x) אזי f(x) \preccurlyeq g(x) \preccurlyeq h(x) במובן הרחב.  \left(f(x),h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L\right) \Longrightarrow \left(g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L\right) למה: \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         f:I	o\mathbb{R} רציפות: תהא
                                                                                                                                                                                                                                       \lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right) עבורה x_0\in I :רציפות בנקודה
                                                                                                                                                                 \lim_{x	o x_0^+}f\left(x
ight)=f\left(x_0
ight) עבורה עבורה נקודה: בנקודה מימין בנקודה. x_0\in I
                                                                                                                                                          \lim_{x \to x_0^-} f\left(x
ight) = f\left(x_0
ight) עבורה עבורה: x_0 \in I משמאל בנקודה: •
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      פונקציה רציפה: f:I	o\mathbb{R} המקיימת
                                                                                                                                                                                                                                                                                                        \forall x_0 \in I. \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) - פושי:
                                                                                                                                                                           \forall x_0 \in I. \forall y \in I^{\mathbb{N}}. (y_n \to x_0) \Longrightarrow (\lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0)) היינה:
                                                                                                   \exists x \in B. \exists \varepsilon > 0. \ (x-\varepsilon,x+\varepsilon) \cap A \subseteq B המקיימת B \subseteq A אזי אA \subseteq \mathbb{R} פתוחה יחסית: תהיינה
                                                                                   f^{-1}[B] פתוחה f^{-1}[B] פתוחה משפט: תהא f:I	o\mathbb{R} פתוחה מיחסית אל f:I
                                   (c)טענה: תהא f_{\lceil (a,b) 
ceil}ותהא f:(a,b) 
ightarrow (a) אזי אזי f:(a,b) 
ightarrow \mathbb{R} רציפה על טענה: תהא
```

. $(\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = L_1) \wedge (\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = L_2) \Longrightarrow (L_1 = L_2)$ איי $x_0 \in \mathbb{R}$ איי איי $x_0 \in \mathbb{R}$ איי איי $x_0 \in \mathbb{R}$

טענה: תהא $f\in C\left((a,b)\right)$ רציפה מונוטונית עולה $f\in C\left((a,b)\right)$.($\lim_{x\to b^-}f\left(x\right)=\sup f\left[(a,b)\right]$ סענה: $f\left[(a,b)\right]$

 $C\left(I
ight)=\left\{f\in\mathbb{R}^{I}\mid I\;$ סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי fרציפה על

 $\lim_{x\to b^-}f(x)=\sup_{x\to b^-}f(x)=\sup_{x\to b^-}f(x)=\infty$ אינה חסומה מלעיל)... f[(a,b)]

 $\lim_{x\to b^-} f(x) = \inf f[(a,b)]$ הסומה מלרע) •

 $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim f[(a,b)]) \iff \emptyset$

 $\lim_{x \to b^{-}} f\left(x
ight) = -\infty$ (שלכע) אינה מלרע) אינה $f\left[(a,b)\right]$

 $\forall x \in I. f\left(x
ight) > 0$ המקיימת של של סביבה x_0 אזי קיימת המקיימת אזי המקיימת אזי המקיימת $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

 $\forall x \in I.f\left(x
ight) > g\left(x
ight)$ המקיימת x_0 של x_0 אזי קיימת סביבה $f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת המקיימת x_0 אזי קיימת סביבה $f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$ המקיימת על $x_0 = f\left(x_0
ight) > g\left(x_0
ight)$

 $.(\forall q\in\mathbb{Q}.f\left(q
ight)=g\left(q
ight))\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x
ight)=g\left(x
ight)
ight)$ אזי $f,g\in C\left(\mathbb{R}
ight)$ טענה: יהיו

נקודת אי־רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ תהא המקיימת אי־רציפות:

 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ • סליקה:

 $\lim_{x \to x_{0}^{-}} f\left(x
ight)
eq \lim_{x \to x_{0}^{+}} f\left(x
ight)$ סוג ראשון/קפיצה: •

```
. \Big( \sharp \lim_{x \to x_0^-} f(x) \Big) \lor \Big( \sharp \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Big) סוג שני: f: I \to \mathbb{R} מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.
                                           .ig(orall y\in\mathbb{N}^I.\,(y_n	o x_0)\Longrightarrow (\lim f\,(y_n)\in\mathbb{R})ig)\Longleftrightarrowענה: תהא f:I	o\mathbb{R} אזי ל
                                                                                  R\left(x
ight) = egin{cases} rac{1}{q} & \exists p,q \in \mathbb{Z}.\left(\gcd\left(p,q
ight) = 1
ight) \wedge \left(x = rac{p}{q}
ight) \ & else \end{cases}
                                                                                  .(\forall x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \to x_0} R(x) = 0) \land (\forall x \in \mathbb{R}. R(x) = R(x+1)) :
                                           x_0 רציפות על f+g,f\cdot g,f^g אזי אזי f+g,f\cdot g,f^g רציפות על האיז ויהיו x_0\in\mathbb{R}^\pm רציפות על
                                              x_0 טענה: תהא f(x_0) אזי g:B	o C וכן x_0 וכן f:A	o B אזי f:A	o B טענה: תהא
                                                                                                                                        מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.
                                                              \lim_{x \to x_0} f\left(g\left(x
ight)
ight) = f\left(\lim_{x \to x_0} g\left(x
ight)
ight) אזי g \in \mathbb{R}^\mathbb{R} רציפה וכן
                                                                                                                               rac{p}{a} אזי p,q\in\mathbb{R}\left[x
ight] יהיו יהיו
                        . טענה: תהא f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} עבורה f \in \mathbb{R} עבורה אזי כמות נקודות אזי כמות f \in \mathbb{R} אזי כמות נקודות לכל היותר בת מנייה.
                                     (\forall x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}) \Longrightarrow (\exists x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)) אזי f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} מסקנה: תהא
                                                                                                    . משפט f אזי f\in C\left([a,b]
ight) תהא תהאשון: תהא ל
                                                               \exists \max (f([a,b])), \min (f([a,b])) אזי f \in C([a,b]) משפט ויירשטראס השני: תהא
               \forall y \in (\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))) . \exists c \in (a, b), f(c) = y אא f \in C([a, b]) משפט ערך הביניים: תהא
                                                                        \exists \zeta \in [a,b]. f(\zeta) = 0 אזי f(a) f(b) < 0 המקיימת f \in C([a,b]) אזי f \in C([a,b])
                                                                      f([a,b]) = [\min(f([a,b])), \max(f([a,b]))] אזי f \in C([a,b]) מסקנה: תהא
                                                                   \forall x,y \in A. \forall \lambda \in [0,1]. \lambda x + (1-\lambda) \, y \in A המקיימת A \subseteq \mathbb{R} קטע מוכלל: קבוצה
                                                                                         . ממש. f מונוטונית ממש f יהי f \in C\left(I\right) מוכלל ותהא
                                  (f^{-1} \in C\left(f\left(I
ight)
ight)) \wedgeמשפט: יהי f קטע מוכלל ותהא f \in C\left(I
ight) מונוטונית ממש אזי f \in C\left(I
ight)
                                             (f \in C(I)) \Longleftrightarrowמשפט: יהי f קטע מוכלל ותהא f \in \mathbb{R}^I מונוטונית ממש אזי (f \in \mathbb{R}^I קטע מוכלל
                                                                                                                                     x^a, a^x \in C(\mathbb{R}) אזי a>0מסקנה: יהי
                                                                              a_n^{b_n} 	o a^b סדרה אזי a_n 	o a^b סדרה חיובית וכן a_n 	o a > 0
                                                                                   .\exists\zeta\in\mathbb{R}.p\left(\zeta
ight)=0 אזי p\in\mathbb{R}_{n}\left[x
ight]ackslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x
ight] ויהי ויהי n\in\mathbb{N}_{odd} אזי n\in\mathbb{N}_{odd}
A\subseteq \mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n מתקיים מתקיים A\subseteq \bigcup_{n\in\Lambda}I_n קטעים פתוחים עבורם A\subseteq \mathbb{R} מתקיים A\subseteq \mathbb{R}
                                                                                                               . קומפקטית [a,b] אזי a < b יהיו היינה־בורל: הלמה של היינה־בורל:
    . orall arepsilon > 0. \exists \delta > 0. orall x \in A. orall y \in (x-\delta,x+\delta) \, . \, |f\left(x
ight) - f\left(y
ight)| < arepsilon המקיימת המקיימת המיימת העיפה במידה שווה (במ"ש): f \in \mathbb{R}^A
                                                                                                                        . רציפה f אזי f \in \mathbb{R}^A רציפה משפט: תהא
                                                . אזי f \in \mathbb{R}^A אזי f \in \mathbb{R}^A אזי f \in \mathbb{R}^A אזי f \in \mathbb{R}^A תנאי ליפשיץ: תהא f \in \mathbb{R}^A אזי f \in \mathbb{R}^A תנאי ליפשיץ: תהא
                                                                                                 [a,b] אזי f רציפה במ"ש על f \in C([a,b]) משפט קנטור: תהא
                                                                      (a,d) טענה: תהא f\in\mathbb{R}^A אזי איי במ"ש על במ"ש על דציפה במ"ש על הניטענה: תהא
            \exists x \in D^{\mathbb{N}}. \left(\lim_{n 	o \infty} x_n \in \mathbb{R}
ight) \Longrightarrow \left(\lim_{n 	o \infty} f\left(x_n
ight) \in \mathbb{R}
ight) אזי f \in \mathbb{R}^D ותהא f \in \mathbb{R}^D ותהא f \in \mathbb{R}^D ותהא f \in \mathbb{R}^D אזי f \in \mathbb{R}^D
                                                (\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}) מסקנה: תהא f \in C((a,b)) אזי f \in C((a,b))
                                                       [a,\infty) איי f רציפה במ"ש על \lim_{x	o\infty}f\left(x
ight)\in\mathbb{R} המקיימת f\in C\left([a,\infty)
ight) איי
                                                                                                                     . סענה: תהא f\in\mathbb{R}^{(a,b)} רציפה במ"ש אזי f\in\mathbb{R}^{(a,b)}
                               \omega_f(\delta) = \sup\left\{|f\left(x_1
ight) - f\left(x_2
ight)||\left(x_1, x_2 \in I
ight) \wedge \left(|x_1 - x_2| < \delta
ight)
ight\} אזי f \in \mathbb{R}^I מודולוס הרציפות: תהא
                                                                                                                                                              f:I	o\mathbb{R} גזירות: תהא
                                                    .f'\left(x_0
ight)=\lim_{x	o x_0}rac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} אזי x_0\in I אזי x_0\in I פנגזרת בנקודה: תהא .f'_+\left(x_0
ight)=\lim_{x	o x_0^+}rac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} אזי x_0\in I אזי x_0\in I פנגזרת חד צדדית מימין בנקודה: תהא x_0\in I אזי x_0\in I אזי .f'_-\left(x_0
ight)=\lim_{x	o x_0^-}rac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} אזי x_0\in I אזי x_0\in I אזי x_0\in I ותהא x_0\in I ותהא x_0\in I אזי x_0\in I אזי x_0\in I ותהא x_0\in I ותהא x_0\in I אזי x_0\in I אזי x_0\in I אזי x_0\in I ותהא
```

 $rac{df}{dx}\left(x
ight)=rac{d}{dx}f\left(x
ight)=f'\left(x
ight)$ אזי $f\in\mathbb{R}^{I}$ אחי תהא

 $f':I o\mathbb{R}$ אזי $f:I o\mathbb{R}$ נגזרת: תהא

```
.(x_0 בנקודה f) אזי (x_0 \in I^\pm ותהא f \in \mathbb{R}^I ותהא היירה בנקודה f \in \mathbb{R}^I אזי (x_0 \in I^\pm ותהא
                             \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0 המקיימת p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[x] אזי x_0 \in I ותהא f \in \mathbb{R}^I המקיימת
                                                                                          \deg\left(p
ight) אזי x_{0} קירוב בנקודה p\left(x
ight) ויהי ויהי f\in\mathbb{R}^{I} אזי
             f אזי f\in\mathbb{R}^I אזי f\in\mathbb{R}^I אזי f\in\mathbb{R}^I אזי f\in\mathbb{R}^I אזי f\in\mathbb{R}^I אזי אבילית בנקודה: תהא
                                                  (x_0 אזי (x_0 )
                                                                                                                     x_0 חשבון גזירות בנקודה f,g\in\mathbb{R}^I חשבון גזירות: תהיינה
                                                                                                                                   .(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \bullet
                                                                                            .(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \bullet
.(g(x_0) \neq 0) \Longrightarrow \left( \left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \right) \bullet
                                    \left(f^{-1}
ight)'(y_0)=rac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} אזי f^{-1}\left(y_0
ight) אזי f\in C\left(I
ight) מונוטונית חזק משפט: תהא x_0\in I אזי x_0\in I מונוטונית חזק גזירה על
                                                                                          \arctan' = \frac{1}{1+x^2} ,(x^r)' = rx^{r-1} ,(e^x)' = e^x ,\tan' = \frac{1}{\cos^2} :מסקנה
(g\circ f)'(x_0)=g'\left(f\left(x
ight)
ight)\cdot f'\left(x
ight) אזי אזירה על g\in C\left(f\left(I
ight)
ight) גזירה על f\in C\left(I
ight) אזי אזירה על f\in C\left(I
ight) גזירה על משרשרת: תהא
                                                                          f^{(0)}=f \wedge \left(f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}
ight)'
ight) גזירה אזי f \in \mathbb{R}^I נגזרת מסדר גבוה: תהא
                                                                                             \left(\Delta f
ight)(x)=f\left(x+1
ight)-f\left(x
ight) אזי f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} הפרש דיסקרטי: תהא
                                                                                    A(\Delta^{(0)}f=\Delta f)\wedge \left(\Delta^{(k+1)}f=\Delta\left(\Delta^{(k)}f
ight)
ight) אזי f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} הגדרה: תהא
                                                                                                              פונקציה f' בורה f \in \mathbb{R}^I בזירה ברציפות:
                                                  .(C^{n}\left(I
ight)=\left\{ f\in C^{n-1}\left(I
ight)\mid גזירה ברציפות f
ight\} )\wedge\left(C^{0}\left(I
ight)=C\left(I
ight) אזי אזי ווא אזי בימון: תהא
                                                                                                  f\in C^{\infty}\left(I
ight)=igcap_{n=0}^{\infty}C^{n}\left(I
ight) אזי I\subseteq\mathbb{R} מנקציה חלקה: תהא
                                                            (f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x) גזירות אזי f,g\in\mathbb{R}^I כלל לייבניץ: תהיינה
                                                                                                                          f \in \mathbb{R}^I נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא
                                                                        \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). f(x) \leq f(x_0) עבורה x_0 \in I מקסימום:
                                                                          .\exists \delta>0. \forall x\in (x_0-\delta,x_0+\delta)\,. f\,(x_0)\leq f\,(x) עבורה x_0\in I מינימום: •
                                              f'(x_0)=0 איזי פקודת קיצון איזי f\in C\left([a,b]
ight) ותהא פרמה: תהא f\in C\left([a,b]
ight) אזירה על
                                           \exists c \in (a,b)\,.f'\left(c
ight) = 0 אזי f\left(a
ight) = f\left(b
ight) המקיימת f\left(a,b
ight) אזי אזירה על f \in C\left([a,b]
ight) משפט רול: תהא
                                                               \exists c \in (a,b)\,.f'\left(c
ight) = rac{f(b)-f(a)}{b-a} אוי f \in C\left([a,b]
ight) משפט לגרנז': תהא ווירה על f \in C\left([a,b]
ight) אוי הא
                                                                                                  .(עינה: תהא f \in \mathbb{R}^I רציפה במ"ש) טענה: תהא f \in \mathbb{R}^I אזירה אזי f \in \mathbb{R}^I
                                                                                                                                                        \forall x > 0.e^x > 1 + x טענה:
                                                                                                                         \forall x,y \in \mathbb{R}. \left| \sin (x) - \sin (y) \right| \leq |x-y| טענה:
                                                                   \exists a \in \mathbb{R}. f\left(x
ight) = a אזי orall x \in \mathbb{R}. f'\left(x
ight) = 0 טענה: תהא f \in C\left(\mathbb{R}
ight) אזי אזירה המקיימת
                                                                                        A:\exists c\in\mathbb{R}. q=h+c אזי a'=h' המקיימות a,h\in\mathbb{R}^I מסקנה: תהיינה
                                                                                    \exists c \in \mathbb{R}. f\left(x\right) = e^{x} אזי f = f' אזירה המקיימת f \in C\left(\mathbb{R}\right) טענה: תהא
                          \exists x_0 \in (a,b) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} אזי f,g \in C\left([a,b]\right) משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה
                                                                                                                                                         משפט: תהא f \in \mathbb{R}^I גזירה
                                                                                                        . אזי f עולה ממש x \in I אזי אוי f'(x) > 0 מתקיים
                                                                                                       . אם לכל f'(x) < 0 מתקיים x \in I אזי אם לכל
                                                                                           f'\left(x_{0}
ight)=0 משפט: תהא f\in\mathbb{R}^{I} גזירה פעמיים על x_{0}\in I ומתקיים
                                                                                                                   f''(x_0) > 0 אם f''(x_0) > 0 אזי f''(x_0) > 0
                                                                                                                f''(x_0) < 0 אם f''(x_0) < 0 אזי f''(x_0)
```

 $.f'_+\left(a
ight)=\lim_{x o a^+}f'\left(x
ight)$ אזי $\lim_{x o a^+}f'\left(x
ight)\in\mathbb{R}$ משפט: תהא $f\in C\left([a,b)
ight)$ אזירה על $f\in C\left([a,b)
ight)$ המקיימת $.f'\left(x_0
ight)>0\Longrightarrow\exists\delta>0. \forall x\in \left(x_0-\delta,x_0+\delta\right). f'\left(x\right)>0$ טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזירה ברציפות אזי

כלל לופיטל: תהיינה $\lim_{x o x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ נניח כי $x\in I_\infty^\pm$ גזירות ותהא היינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ מתכנס במובן

למה: תהא $f'_-(b)>0$ גורר $f'_-(a)<0$ גורר אזי ($f'_+(a)<0$ גורר אזי למה: תהא למה: $f'_-(a)>0$ גורר אזי $f'_+(a)<0$ גורר אזי למה: תהא $f'_-(a)$ גורר אזי $f'_+(a)$ גורר אזי $f'_+(a)$

 $x'\left(t
ight)=v\left(t
ight)$ אזי חלקיק ותהיינה $x,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי

```
(\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \bullet
                                                                              \frac{1}{2} \cdot \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \ge xy מתקיים \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 מתקיים x,y>0 ויהיו אי־שיוויון יאנג: יהיו
|x_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} איז שיוויון הולדר: יהיו |x_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} איז שיוויון מינקובסקי: יהיו |x_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} איז שיוויון מינקובסקי: יהיו |x_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} איז שיוויון מינקובסקי: יהיו |x_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}
                                                                                                                                                                            (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}} 
                                                                                                                                                        x_0 \in I^\pm ותהא f,g \in \mathbb{R}^I מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא
                                       f \leq g אינטואיטיבית. (\exists c > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). |f(x)| \leq c |g(x)|) \Longleftrightarrow f \in O(g)
                                                                                                                                                                     f\geq g אינטואיטיבית .(g\in O\left(f
ight))\Longleftrightarrow f\in\Omega\left(g
ight)
                                                                                                                                              f < g אינטואיטיבית .\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\right) \Longleftrightarrow f \in o\left(g\right) • f > g אינטואיטיבית .\left(g \in o\left(f\right)\right) \Longleftrightarrow f \in \omega\left(g\right) •
                                                                                                                                  f=g אינטואיטיבית .(f\in O\left(g
ight)\wedge f\in \Omega\left(g
ight))\Longleftrightarrow f\in\Theta\left(g
ight)
                                                                                                        אינטואיטיבית f=g בדיוק של קבועים .\left(\lim_{x	o x_0}rac{f(x)}{g(x)}=1
ight)\Longleftrightarrow f\sim g
                                                                                                    .\left(rac{f\left(x
ight)}{g\left(x
ight)}\xrightarrow[x
ight.]{c}c
eq0
ight)\Longrightarrow f\in\Theta\left(g
ight) אזי x_{0}\in I ותהא f,g\in\mathbb{R}^{I} למה: תהיינה
                                                      \forall k \in \{0\dots n\} . f(k) (x_0) = g^{(k)}\left(x_0
ight) מזדהה עד סדר: f,g \in \mathbb{R}^I :מזדהה עד סדר
                                                                                                    f-g\in o\left((x-x_0)^n
ight) אזי x_0 אזי סדר f,g\in\mathbb{R}^{(a,b)} טענה: תהיינה
                                      (h^{(k)}(x_0)=0)גירה n פעמים על n וכן h\in o((x-x_0)^n) וכן n וכן h\in \mathbb{R}^I אזי אזי h\in O((x_0)^n)
                          x_0 על סדר p\in\mathbb{R}_n\left[x
ight]\setminus\mathbb{R}_{n-1}\left[x
ight] אזי על סדר p\in\mathbb{R}_n\left[x
ight]\setminus\mathbb{R}_{n-1}\left[x
ight] אזי על f\in\mathbb{R}^I אזי שמזדהה עם אינילור: תהא
                                                                                                                          .ig((x-x_0)^kig)^{(j)}(x_0)= egin{cases} j! & j=k \ 0 & else \end{cases}אזי איז k\in\mathbb{N} ותהא k\in\mathbb{N} למה: יהי
                                        x_0 טענה: תהא f \in \mathbb{R}^I גזירה n פעמים על x_0 אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם f עד סדר
                                         P_n\left(x
ight) = \sum_{k=0}^n rac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \left(x-x_0
ight)^k אזי פולינום הטיילור הוא f \in \mathbb{R}^I גזירה מעמים על מינום אזי פולינום הטיילור
                                                                                                                      R_n\left(x
ight)=f\left(x
ight)-P_n\left(x
ight) אזי איי פעמים על מעמים n גזירה f\in\mathbb{R}^I איי תהא
                                                                                                                 R_n\left(x
ight)\in o\left(\left|x-x_0
ight|^n
ight) משפט פאנו: תהא f\in\mathbb{R}^I גזירה f\in\mathbb{R}^I משפט פאנו:
                                                                                        למה: תהא \forall k \in \{0\dots n\} . g^{(k)}\left(x_0\right)=0 פעמים המקיימת n+1 פעמים g\in\mathbb{R}^{(a,b)} אזי . \forall x\in(a,b) . \exists c\in\left(\min\left(x,x_0\right),\max\left(x,x_0\right)\right). g\left(x\right)=\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}
                                                                                                                                              משפט השארית של לגרנז': תהא f \in \mathbb{R}^{(a,b)} משפט השארית של לגרנז': תהא
                                                                                                       \forall x \in (a,b) . \exists c \in (\min(x,x_0), \max(x,x_0)) . R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}
                       . \forall x \in (a,b) \,. \left(\exists M \in \mathbb{R}. \forall k \in \mathbb{N}. \left|f^{(k)}\left(x\right)\right| < M\right) \Longrightarrow \left(R_n\left(x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\right) אזי f \in C^\infty\left((a,b)\right) תהא ווא האיל איזי ווא איזי
                                 f\left(x
ight)=\sum_{k=0}^{\infty}rac{f^{(k)}\left(x_{0}
ight)}{k!}\left(x-x_{0}
ight)^{k} איז \forall x\in\left(a,b
ight).R_{n}\left(x
ight)\xrightarrow[n
ightarrow\infty]{}0 עבורה f\in C^{\infty}\left(\left(a,b
ight)\right)
                                                                              אזי \forall x \in (a,b) . \left|f^{(m)}\left(x\right)\right| < a_m מסקנה: תהא f \in C^{\infty}\left((a,b)\right) אזי אזי f \in C^{\infty}\left((a,b)\right)
                                                        \forall c \in \mathbb{R}. \left(\lim_{m \to \infty} \frac{a_m}{m!} c^m = 0\right) \Longrightarrow \left(\forall x \in \left[x_0 - c, x_0 + c\right]. f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \left(x - x_0\right)^k\right)
                                                   \int_{0}^{\infty} \left(\cos\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \wedge \left(\sin\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \wedge \left(e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}\right)
                                                                                                                                                משפט השארית של קושי: תהא f \in \mathbb{R}^{(a,b)} משפט השארית של קושי:
                                                                                        \exists x \in (a,b) \ \exists c \in (\min(x,x_0),\max(x,x_0)) \ . R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{f^{(n+1)}(c)} (x-c)^n (x-x_0) \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ in } |x| < 1
                                                                        f^{(n+1)}\left(x_{0}
ight)
eq0 וכן \forall k\in\left\{ 0\ldots n
ight\} .f^{(k)}\left(x_{0}
ight)=0 המקיימת f\in C^{n+1}\left(\left(a,b
ight)
ight) וכן
                                                                                                                                                                                         f אזי קיצון אינה נקודת אזי n \in \mathbb{N}_{even}
```

f אזי מינימום מקומי נקודת x_0 אזי $f^{(n+1)}(x_0)>0$ - $f^{(n+1)}(x_0)<0$ - אזי $f^{(n+1)}(x_0)<0$ -

 $(\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \bullet$

```
\forall x,y \in I. \forall \alpha \in [0,1]. f(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) המקיימת f \in \mathbb{R}^I : פונקציה קעורה
                                                              (f) נקודת פיתול: תהא f \in \mathbb{R}^I אזי f \in \mathbb{R} אזי מעדדיה). נקודת פיתול: תהא
             \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_1} משפט שלושת המיתרים: תהא f \in \mathbb{R}^I קמורה אזי לכל
                                                                                                                                                                                                    משפט: תהא f \in \mathbb{R}^I גזירה פעמיים
                                                                                                                                                       . אזי f''(x) > 0 מתקיים x \in I אזי x \in I אם לכל
                                                                                                                                                        . אזי f''(x) < 0 מתקיים x \in I אזי x \in I אם לכל
                                                                                                                                                                  f \in C\left((a,b)\right) טענה: תהא f \in \mathbb{R}^{(a,b)} אזי
                                                                                                                                                                                                                                            פונקציה קדומה:
                                                                                                                                      F'=f גזירה המקיימת F\in\mathbb{R}^{(a,b)} אזי אזיר f\in\mathbb{R}^{(a,b)}
                          וכן F'_+(a)=f\left(a
ight) ומקיימת x\in(a,b) לכל לכל F'(x)=f\left(x
ight) גזירה המקיימת F\in\mathbb{R}^{[a,b]} אזי ווער המקיימת f\in\mathbb{R}^{[a,b]}
                                                                                                                                                                                                                             .F'_{-}(b) = f(b)
                                                                                                                               f = \{F \in \mathbb{R}^I \mid F' = f\} אזי f \in \mathbb{R}^I אינטגרל לא מסויים: תהא
                                      G\in\mathbb{R}. G=F+c)\Longleftrightarrow (G'=f) אזי G\in\mathbb{R}^{(a,b)} קדומה ותהא G\in\mathbb{R}^{(a,b)} תהא G\in\mathbb{R}^{(a,b)} תהא
                                                                                                    c\in\mathbb{R} עבור f=F+c אזי מקובל לסמן אזי f\in\mathbb{R}^I עבור הערה: תהא
                                                                                                                                                             טענה: תהיינה f,q\in\mathbb{R}^I טענה: תהיינה
                                                                                                                                                                                                  . \int (f+g) = (\int f) + (\int g) \bullet
                                                                                                                                                                                      A \cap (\alpha f) = \alpha \cap (\alpha f) אזי \alpha \in \mathbb{R} יהי
                                                                                                        \int uv' = u \cdot v - \int u'v אירות אזי u,v \in \mathbb{R}^I טענה בחלקים: תהיינה בחלקים:
                                                                                                 F\circ g=\int ((f\circ g)\cdot g') אזי F\in\int f ותהא ותהא f\in\mathbb{R}^I טענה החלפת משתנים:
                                                                                 a = x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n = b המקיימות \Pi = \{x_0, \ldots, x_n\} אזי והי הלוקה: יהי
                                                                                                                                                    \Delta x_i = x_i - x_{i-1} חלוקה אזי \{x_0, \dots, x_n\} סימון: תהא
                                                                                                              .\lambda\left(\Pi
ight)=\max_{i=1}^{n}\left|\Delta x_{i}
ight| אזי חלוקה אזי \Pi=\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}
ight\} מדד העדינות: תהא
                                                                                                                                                  \Pi_1 \subseteq \Pi_2 המקיימת חלוקה אזי חלוקה חלוקה חלוקה חלוקה חלוקה חלוקה חלוקה אזי חלוקה 
                                                                                                                                                 \lambda\left(\Pi_{2}\right) \leq \lambda\left(\Pi_{1}\right) איי איי וכן \Pi_{2} חלוקה חלוקה חלוקה תהא \Pi_{1}
                                                     \forall i \in \{1\dots n\} .t_i \in [x_{i-1},x_i] המקיימות \{t_1\dots t_n\} חלוקה אזי \{x_0,\dots,x_n\} תהא נקודות מתאימות: תהא
                                          S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f\left(t_i
ight)\Delta x_i אזי מתאימות מתאימות חלוקה ויהיו חלוקה חלוקה חלוקה f\in\mathbb{R}^{[a,b]} תהא
\lambda\left(\Pi
ight)<\delta עבורה איים \delta>0 לכל \delta>0 קיימת \delta>0 לכל לכל עבורה קיים \delta>0 לכל עבורה אינטגרביליות רימן: t\in\mathbb{R}^{[a,b]} עבורה איים
                                                                                                                                                                     |S\left(f,\Pi,\left\{t_{i}
ight\}
ight)-L|<arepsilon מתאימות \left\{t_{i}
ight\} מתקיים
                                                                                                                    L=\int_a^b f אינטגרביליות רימן איזי אינטגרל f\in\mathbb{R}^{[a,b]} תהא אינטגרל רימן אינטגרל אינטגרל אינטגרל אינטגרל אינט
                                                                         \int_a^b f=\int_{[a,b]} f=\int_{[a,b]} f\left(t
ight)\mathrm{d}t=\int_a^b f\left(t
ight)\mathrm{d}t אינטגרביליות רימן אזי f\in\mathbb{R}^{[a,b]}
                                                                                                                                arphiאינטגרל על פי המשתנה \int_a^b f(arphi)\,\mathrm{d}arphi אזי אזי f\in\mathbb{R}^{[a,b]} אינטגרל אינטגרל פי המשתנה
                                                                                                     הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.
                                                                                                                                                       R\left([a,b]
ight) = \left\{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \mid \mathcal{R}\left([a,b]
ight) = f 
ight\} שימון: f
                                                                                      \int_a^b f\left(t
ight)\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)	o 0}S\left(f,\Pi,\{t_i\}
ight) הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון \{t_i\} נקודות מתאימות אזי c\in\mathbb{R} טענה: יהי c\in\mathbb{R} תהא חלוקה ויהיו
                                                                                                                                                                                                                             .D\left(x
ight)\notin R\left(\mathbb{R}
ight) טענה:
                                                                                                                                                                                     משפט: תהא f \in R\left([a,b]\right) אזי חסומה.
                                                   .\overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i},x_{i-1}]}\left(f
ight)\cdot\Delta x_{i} איי חלוקה חלוקה חסומה ותהא f\in\mathbb{R}^{[a,b]} תהא
                                                  \underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i איי חלוקה חלוקה ותהא חסומה ותהא האון: תהא f\in\mathbb{R}^{[a,b]}
                                                                                                                                                                             חלוקה \Pi חסומה ותהא חלוקה f \in \mathbb{R}^{[a,b]}
                                                                                                                                                                    \overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight) = \sup_{\Pi \in \mathcal{S}\left(f,\Pi,\{t_i\}
ight)} S\left(f,\Pi,\{t_i\}
ight) • \underline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight) = \inf_{\Pi \in \mathcal{S}\left(t_i\}} S\left(f,\Pi,\{t_i\}
ight) •
```

חלוקות $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ חסומה ותהיינה $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חלוקות

 $\forall x,y \in I. \forall \alpha \in [0,1] \ . f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \leq \alpha f\left(x\right) + (1-\alpha)f\left(y\right)$ המקיימת $f \in \mathbb{R}^I$ המקיימת

```
\omega\left(f,J
ight)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x
ight)-f\left(y
ight)
ight) חסומה אזי חסומה הא
                         (\lim_{\delta \to 0} \omega \left(f, [x_0 - \delta, x_0 + \delta] 
ight) = 0) \Longleftrightarrowמשפט: תהא (f, [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = 0 אזי אזי (f, [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = 0
                                   .(orall I\subseteq J.orallarepsilon>0.\exists\delta>\operatorname{len}\left(I
ight).\omega\left(f,I
ight)<arepsilon \Longleftrightarrowמשפט: תהא f\in\mathbb{R}^{J} חסומה אזי f
              \omega\left(f,\Pi
ight)=\sum_{i=1}^n\omega\left(f,[x_{i-1},x_i]
ight)\Delta x_i אזי חלוקה חלוקה חסומה ותהא f\in\mathbb{R}^{[a,b]} תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא
                                                         \omega\left(f,\Pi
ight)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight) אזי חלוקה חלוקה חסומה ותהא חסומה הבה: תהא
                                                                                             חלוקות \Pi_1 \cup \{p\} = \Pi_2 חסומה ותהיינה f \in \mathbb{R}^{[a,b]} חלוקות
                                                                                                             \overline{\Sigma}(f,\Pi_1) < \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) + \lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b]) \bullet
                                                                                                             \underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \ge \underline{\Sigma}(f,\Pi_2) - \lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b]) \bullet
                                                                            חלוקות \Pi_1 \cup \{p_1 \dots p_m\} = \Pi_2 חסומה ותהיינה f \in \mathbb{R}^{[a,b]} חלוקות
                                                                                                         .\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) + m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b]) \bullet
                                                                                                         \Sigma(f, \Pi_1) \geq \Sigma(f, \Pi_2) - m\lambda(\Pi_1)\omega(f, [a, b]) \bullet
                                               טענה: תהא \lambda\left(\Pi\right)<\delta חסומה אזי לכל \delta>0 קיים arepsilon>0 לכל חחסומה f\in\mathbb{R}^{[a,b]} מתקיים
                                                                                                                               \Sigma(f,\Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \Sigma(f,\Pi) + \varepsilon
                                                                                                                               .\overline{\Sigma}(f,\Pi) > \overline{I}(f) > \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \varepsilon \bullet
                                                                        f \in R\left([a,b]
ight) אזי I\left(f
ight) = \overline{I}\left(f
ight) חסומה המקיימת f \in \mathbb{R}^{[a,b]} אזי
(f,\Pi)-\Sigma(f,\Pi)<arepsilon עבורה עבורה \Pi עבורה אזי (f\in R([a,b]) אזי (f\in R([a,b]) תסומה אזי (f\in R^{[a,b]} עבורה אזי (f\in R^{[a,b]} תסומה אזי (f\in R^{[a,b]}
                                                                                                                                               C([a,b]) \subseteq R([a,b]) משפט:
                                                                                               f \in R\left([a,b]
ight) משפט: תהא חסומה חסומה f \in \mathbb{R}^{[a,b]} משפט:
                                                 f\in R\left([a,b]
ight) אזי f_{
estriction_{[a,b]}}\in R\left([a,b]
ight) עבורה b\in [a,c] אזי חסומה f\in \mathbb{R}^{[a,c]}
                       f \in R([a,c]) אזי f \in R([a,b]) \land (f \in R([b,c])) אזי איזי b \in [a,c] אזי אזי f \in \mathbb{R}^{[a,c]} משפט: תהא
                                               f \in R\left([b,c]
ight) אזי f \in R\left([a,d]
ight) עבורה b < c \in [a,d] חסומה ויהיו f \in \mathbb{R}^{[a,d]}
                                                      f\in R\left([a,c]
ight) אזי \forall b\in (a,c)\,.f\in R\left([a,b]
ight) חסומה המקיימת המאיימת להא
                                                     f\in R\left([a,c]
ight) אזי \forall b\in\left(a,c
ight).f\in R\left([b,c]
ight) חסומה המקיימת האזי f\in\mathbb{R}^{[a,c]} אזי
                                                                    g\in R\left([a,c]
ight) איי g\left(x
ight)=egin{cases} y & x=b \ f\left(x
ight) x (& 	ext{else} \end{cases} נגדיר f\in R\left([a,c]
ight) איי f\in R\left([a,c]
ight) איי f\in R\left([a,c]
ight) מסקנה: נגדיר f\in R\left([a,c]
ight) איי f\left(x
ight)=egin{cases} \sin\left(rac{1}{x}
ight) & x
eq 0 \ 0 & x=0 \end{cases}
                                              f \in R\left([a,b]
ight) אזי למקוטעין אזי רציפות מונוטוניות חסומה חסומה f \in \mathbb{R}^{[a,b]} מסקנה: תהא
                                                                                                 c\in\mathbb{R} וכן H\in C\left(\mathbb{R}
ight) תהא f,g\in R\left([a,b]
ight) וכן
                                                                                                                                          (f+g), (cf) \in R([a,b]) \bullet
                                                                                                                               (f \cdot g), (H \circ f), |f| \in R([a,b]) \bullet
               1.\sum (b_i-a_i)<arepsilon וכן 1.2\subseteq U וכן אפס: 1.2\subseteq U עבורה לכל 1.2\subseteq U
                                                                                                  . טענה: תהא A\subseteq\mathbb{R} אזי אזי אפס. אפסיימת A\subseteq\mathbb{R} ממידה אפס
                                                      . orall b \in B. orall arepsilon > 0. \exists a \in A. \, |b-a| < arepsilon המקיימת A \subseteq B אזי B \subseteq \mathbb{R} אהיי מבוצה צפופה: תהא
```

 $\int_a^b f=\int_a^b g$ אזי אזי $f_{\restriction A}=g_{\restriction A}$ צפופה עבורה אזיפה עבורן עבורן אזי אזי אורן עבורן אזי אזי תהיינה עבורן אזי

 $\lambda\left(\Pi
ight)<\delta$ חסומה המקיימת $\delta>0$ קיימת $\delta>0$ קיימת $\varepsilon>0$ לכל אזי $(f\in R\left([a,b]
ight))$ חסומה אזי המקיימת לכל חסומה $\delta>0$

 $.\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \ge \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) \bullet$ $.\Sigma(f,\Pi_1) \le \Sigma(f,\Pi_2) \bullet$

.($\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \Sigma(f,\Pi) < \varepsilon$ מתקיים

 $\Sigma(f,\Pi_1)\leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$ אזי חלוקות אזי Π_1,Π_2 חסומה ותהיינה $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ מסקנה: תהא

 $\Sigma(f,\Pi)\leq I(f)\leq \overline{I}(f)\leq \overline{\Sigma}(f,\Pi)$ מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא חלוקה אזי

 $ar{J}(f)=\inf_{\Pi} \overline{\Sigma}(f,\Pi)$ אזי חסומה $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי חסומה $\underline{J}(f)=\sup_{\Pi} \underline{\Sigma}(f,\Pi)$ האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תסומה אזי

 $\int_a^b f = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ אזי חסומה $f \in R([a,b])$ מסקנה: תהא

```
.\int_a^c f=\int_a^c g אזי g\left(x
ight)=egin{cases} y_i & x\in\{b_1\dots b_m\} \ f
ight)x(& 	ext{else} \end{cases} נגדיר f\in R\left([a,c]
ight) אזי f\in R\left([a,c]
ight)
                                      \int_a^b lpha f + eta g = lpha \int_a^b f + eta \int_a^b g אזי lpha, eta \in \mathbb{R} ויהיו f,g \in R\left([a,b]
ight) השפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה
                                                  \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f אזי b \in (a,c) ויהי f \in R([a,c]) משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא
                                                                                                                                    \int_a^b f = -\int_b^a f אזי f \in R([a,b]) הגדרה: תהא
                                                                             \int_a^b f \geq 0 אזי f \geq 0 אזי f \in R\left([a,b]
ight) משפט חיוביות: תהא f \in R\left([a,b]
ight) המקיימת האינטגרל: תהיינה f,g \in R\left([a,b]
ight) המקיימות האינטגרל: תהיינה ו
                                                                                       f=0 אזי א\int_a^b f=0 וכן f\geq 0 אזי המקיימת f\in R\left([a,b]
ight) אזי
                                                                 m\left(b-a
ight) \leq \int_{a}^{b}f \leq M\left(b-a
ight) אזי m \leq f \leq M המקיימת f \in R\left([a,b]
ight)
                                                                                          \left|\int_a^b f
ight| \le \int_a^b |f| \le \sup_{[a,b]}\left(|f|
ight)(b-a) אזי f \in R\left([a,b]
ight) מסקנה: תהא
                                             \int_a^b \left(f\cdot g
ight)=f\left(x_0
ight)\int_a^b g עבורו x_0\in[a,b] אזי קיים 0\leq g\in R\left([a,b]
ight) ותהא ותהא f\in C\left([a,b]
ight)
                    נקודת רציפות של f \in R\left([a,b]\right) ותהא ותהא המשפט היסודי אלי והאינטגרלי: תהא המשפט היסודי אל החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא
                                                                                                                                             F'(x_0) = f(x_0) אא F(x) = \int_a^x f(t) dt
     \left. \left[ f 
ight] 
ight|_a^b = f \left( b 
ight) - f \left( a 
ight) אזי f \in \mathbb{R}^{[a,b]} תהא
                         \int_a^b f'g = [f\cdot g]\,|_a^b - \int_a^b fg' אזי איזי אינטגרציה בחלקים: תהיינה f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]} גזירות עבורן
                          \alphaמשפט שינוי משתנה: תהא (arphi\left(lpha
ight)=a)\wedge(arphi\left(eta)=b) המקיימת arphi\in C^{1}\left(\left[lpha,eta
ight],\left[a,b
ight]
ight) ותהא f\in C\left(\left[a,b
ight]
                                                                                                                                                                            \int_{a}^{b} f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'
           J_a \ f = J_\alpha \ (f \circ \varphi) \cdot \varphi .  \int_0^{2\pi} f \left( x \right) \cos \left( nx \right) \mathrm{d}x = - \int_0^{2\pi} f' \left( x \right) \frac{\sin \left( nx \right)}{n} \mathrm{d}x  איז n \in \mathbb{N} ויהי f \in C^1 \left( [0, 2\pi] \right) איז  \int_0^{2\pi} f \left( x \right) \cos \left( nx \right) \mathrm{d}x \bigg| \leq \frac{2\pi \sup \left( |f'| \right)}{n} איז n \in \mathbb{N} ויהי n \in \mathbb{N} איז n \in \mathbb{N} טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא n \in \mathbb{N} ויהי n \in \mathbb{N} איז n \in \mathbb{N}
                                                                                                                           אזי f \in \mathbb{R}^I ותהא ותהא I \subseteq \mathbb{R} אזי אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי
                                                    .\int_a^\infty f=\lim_{b	o\infty}\int_a^b f אזי orall b\in [a,\infty)\,.f\in R\left([a,b]
ight) וכן I=[a,\infty) אזי ונניח \bullet
                                          \int_{-\infty}^b f = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f אזי לa \in (-\infty,b] . f \in R\left([a,b]\right) וכן I = (-\infty,b] אזי ליני: נניח \bullet
                                       . \int_{-\infty}^{\infty}f=\int_{-\infty}^{0}f+\int_{0}^{\infty}f אזיי \forall a,b\in\mathbb{R}.\,(a< b)\Longrightarrow(f\in R\,([a,b])) וכן I=\mathbb{R} אזיי I=\mathbb{R} אזיי I=\mathbb{R} הוכן I=\mathbb{R} לא חסום משמאל: נניח I=(a,b] וכן I=(a,b] וכן I=(a,b] אזיי I=(a,b]
                                                                 \int_a^b f = \lim_{a \to 0} \int_a^r f אזי \forall c \in I.f \in R\left([a,c]\right) וכן I = [a,b) איזי f = [a,b] לא חסום מימין: נניח
                                                                                                                R(I) = \{ f \in \mathbb{R}^I \mid סימון: יהי I \subseteq \mathbb{R} אזי I \subseteq \mathbb{R} קיים וסופי
                                                                                                                                                              משפט: יהיו \omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\} אזי \omega,\eta\in\mathbb{R}
                                \int_a^\omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\omega f + \beta \int_a^\omega g אזי \alpha, \beta \in \mathbb{R} ויהיו f, g \in R([a, \omega)) היינה האינטגרד: תהיינה f, g \in R([a, \omega))
                                              \int_a^\omega f = \int_a^c f + \int_c^\omega f אזי c \in (a,\omega) ויהי ויהי f \in R([a,\omega)) האינטגרציה: תהא
\int_a^\omega f \geq \int_a^\omega g אזי f \geq g אזי f,g \in R ([a,\omega)) מונוטוניות: תהיינה f,g \in R ([a,\omega)) אזי f,g \in R ([a,\omega)) אזי f,g \in R ([a,\omega)) אזי f \in R ([a,\omega)) אינטגרציה בחלקים: תהיינה f,g \in \mathbb{R}^{[a,\omega)} גזירות עבורן f,g \in R אינטגרציה בחלקים: תהיינה f,g \in \mathbb{R}^{[a,\omega)}
וכן \varphi\left(b
ight)=\omega וכן \varphi\left(b
ight)=\omega וכן \varphi\left(c
ight)=a המקיימת \varphi\in C^{1}\left(\left[c,\eta
ight),\left[a,\omega
ight)
ight) ותהא f\in R\left(\left[a,\omega
ight)\right) וכן \varphi\left(c
ight)=a
                                                                                                                                                        \int_{a}^{\omega} f = \int_{c}^{\eta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt
```

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ אזי $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ אינו מתכנס אך $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ מתכנס. $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ אינו מתכנס אך $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ מתכנס. $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ מתכנס. $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ מתכנס בהחלט אזי $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ אינו $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ מתכנס בהחלט אזי $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$

```
(a,\omega) אזי א אונה: תהא f(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t אזי איי \forall b\in(a,\omega)\,.f\in R\left([a,b]
ight) חסומה על 0\leq f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)} איי איי
                                                                              אזי \forall b \in (a,\omega) \,. f,g \in R\left([a,b]\right) המקיימות 0 \leq f \leq g \in \mathbb{R}^{[a,\omega)} אזי
                                                                                                                                                    .(\int_a^\omega g < \infty) \Longrightarrow (\int_a^\omega f < \infty) \bullet
                                                                                                                                                    .(\int_a^\omega f = \infty) \Longrightarrow (\int_a^\omega g = \infty) \bullet
                                                                            .ig(\int_1^\infty f<\inftyig)\Longleftrightarrow (\sum_{n=1}^\infty f\left(n
ight)<\infty) יורדת אזי 0\leq f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)} משפט: תהא
                                                                                   \sum_{n=2}^{\infty}f\left(n
ight)\leq\int_{1}^{\infty}f\leq\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n
ight) טענה: תהא 0\leq f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty
ight)} יורדת אזי
```

. מתכנס $\int_a^\omega fg$ מתכנס אבל: תהא $g\in C\left([a,\omega)
ight)\cap R\left([a,\omega)
ight)$ מתכנס אבל: תהא וחסומה אזי $g\in C\left([a,\omega)
ight)$

 $\lim_{x o\omega}f\left(x
ight)=0$ מונוטונית עבורה $f\in C^{1}\left([a,\omega)
ight)$ חסומה ותהא עבורה $G\left(x
ight)=\int_{a}^{x}g$ עבורה עבורה עבורה משפט דיריכלה: .אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס

 $\int_a^b f\left(x
ight)g\left(x
ight)\mathrm{d}x=g\left(a
ight)\int_a^{x_0} f\left(x
ight)\mathrm{d}x$ עבורו $x_0\in[a,b]$ עבורו אזי קיים $0\leq g$ באשר באשר בשר למה של בונה: תהיינה $a_1m < \sum_{k=1}^n a_k b_k < a_1M$ אזי $orall n \in \mathbb{N}.m < \sum_{k=1}^n b_k < M$ סדרה עבורה b_n סדרה יורדת ותהא $a_n \geq 0$ אזי עבורו $x_0 \in [a,b]$ איים אזי קיים g באשר באשר $f,g \in R\left([a,b]\right)$ עבורו שני: תהיינה

 $\int_{a}^{b} f(x) g(x) dx = g(a) \int_{a}^{x_{0}} f(x) dx + g(b) \int_{x_{0}}^{b} f(x) dx$

משפט שינוי משתנה: תהא $(arphi\left(lpha\left(lpha
ight)=a
ight)\wedge\left(arphi\left(eta\left(eta,b
ight)=b
ight)$ או עולה ממש המקיימת $f\in R\left([a,b]
ight)$ ותהא $f\in R\left([a,b]
ight)$

 $.\int_{a}^{b}f=\int_{lpha}^{eta}\left(f\circarphi
ight)\cdotarphi'$ טענה: תהא $f\in C^{n+1}\left([a,b]
ight)$ אזי אז $f\in C^{n+1}\left([a,b]
ight)$

 $sk!! = \prod_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} (k-2n)$ איי $k \in \mathbb{N}_+$ למה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ איי $k \in \mathbb{N}_+$

 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6...(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5...(2n-1)\cdot(2n-1)}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}\ :$ משפט מכפלת ואליס: $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}\ \text{ (inham}, \omega)$ ותהא $g\in R\left([a,\omega)\right)$ משפט אבל: תהא $g\in R\left([a,\omega)\right)$ ותהא

מונטונית עבורה $f:[a,\omega) o\mathbb{R}$ חסומה ותהא א $f:[a,\omega)$ עבורה עבורה עבורה עבורה איריכלה: תהא א $b\in[a,\omega)$ עבורה עבורה $.fg \in R([a,\omega))$ אזי $\lim_{x \to \omega} f(x) = 0$

 $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\leq n!\leq \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$ אזי $n\in\mathbb{N}$ איי שענה נוסחאת סטירלינג: יהי

. $\lim_{n o\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac12}}=\sqrt{2\pi}$: מסקנה: $\zeta:(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac1{n^s}$ כך כך $\zeta:(1,\infty) o\mathbb R$ פונקציית זטא של רימן: נגדיר

 $\lim_{s\to 1^+} \zeta(s)(s-1) = 1$ טענה:

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

 $.\left(f_{n}\xrightarrow{ ext{pointwise}}g
ight)\Longleftrightarrow\left(orall x\in I.\lim_{n o\infty}f_{n}\left(x
ight)=g\left(x
ight)
ight)$ אזי $f\in\left(\mathbb{R}^{I}
ight)^{\mathbb{N}}$ ויהי $g\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $g\in\mathbb{R}^{I}$ אזי קטע מוכלל תהא

 $.\Big(f_n \xrightarrow{p.w.} f\Big) \Longleftrightarrow \Big(f_n \xrightarrow{\mathrm{pointwise}} f\Big):$ טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $f \in \mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל

- $(\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in C(I)) \implies (f \in C(I))$ רציפות:
- $(\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in R(I)) \iff (f \in R(I))$ אינטגרביליות רימן: •
- $.\left(\lim_{n o\infty}\int_{I}f_{n}=L
 ight)$ אזי orall n=L אזי $orall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in R\left(I
 ight)$ וכן וכן $f\in R\left(I
 ight)$ אזי וכן $f\in R\left(I
 ight)$
- $\left(\lim_{n\to\infty}f_n'\left(x
 ight)=L
 ight)$ לניח $x\in I$ נניח $x\in I$ מתקיים מתקיים מתקיים $x\in I$ מתקיים מניח אזי מניח לגזירה ולכל

אזי $f \in \left(\mathbb{R}^I
ight)^\mathbb{N}$ ויהי $g \in \mathbb{R}^I$ אזי קטע מוכלל תהא קטע ויהי $g \in \mathbb{R}^I$ אזי

$$\left(f_{n} \xrightarrow{\text{uniform}} g\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in I} |f_{n}(x) - f(x)| = 0\right)$$

 $.(f_n \xrightarrow{u} f) \Longleftrightarrow (f_n \xrightarrow{\text{unifom}} f)$:סימון:

. שומה במידה אחידה: $f_n \in \mathbb{R}^I$ המקיימת המקיימת המידה במידה אחידה: חסומה המקיימת המקיימת חסומה במידה אחידה:

 $f_ng_n\stackrel{u}{ o}fg$ אזי אזי $\left(f_n\stackrel{u}{ o}f
ight)\wedge\left(g_n\stackrel{u}{ o}g
ight)$ עבורן $M\in\mathbb{R}$ עבורן מידה אחידה אחידה אחידה אחידה על ידי

```
(\forall \varepsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m > N. \forall x \in I. |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \iff (\exists f \in \mathbb{R}^I. f_n \xrightarrow{u} f)
                                                                                                                                                                                          f\in C\left(I
ight) אזי אזי f_{n}\stackrel{u}{
ightarrow}f עבורן עבורן f_{n}\in C\left(I
ight) אזי
       A\subseteq \mathcal{D}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n מתקיים A\subseteq \bigcup_{n\in\Lambda}I_n קטעים פתוחים עבורם \{I_n\}_{n\in\Lambda} כך שלכל לבוצה קומפקטית: A\subseteq \mathbb{R}
                                                                                                                                                                                                     . קומפקטית [a,b] אזי a < b יהיו היינה־בורל: הלמה של היינה־בורל:
                                             f_n \xrightarrow{u} f אזי \forall n < m.f_m < f_n וכן f_n \xrightarrow{p.w.} f עבורן עבורן f \in C\left([a,b]
ight) ותהא ותהא f_n \in C\left([a,b]
ight)
מסקנה: תהיינה \{f_n\}_{n=0}^\infty עבורן \{f_n\}_{n=0}^\infty באשר \{f_n\}_{n=0}^\infty וכן לכל \{f_n\}_{n=0}^\infty הסדרה \{f_n\}_{n=0}^\infty מונוטונית אזי
                                                                                                                                                                        f\in R\left([a,b]
ight) אזי f_n\stackrel{u}{
ightarrow} f עבורן עבורן f_n\in R\left([a,b]
ight) איי
                                       J_n\in K([a,b]) אוי J_n\in K([a,b]) עבורן J_n\in K([a,b]) איי J_n\in K([a,b]) משפט: תהיינה f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n איי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n איי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n עבורן f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n איי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n ויהי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n עבורם f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n איי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n ויהי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n עבורם f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n איי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n ויהי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n עבורם f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n איי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n ויהי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n עבורם f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n איי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n ויהי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n עבורם f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n איי f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n
                                  .\left(	riangle_{0}\left(x
ight)=\left\{egin{array}{ll} x&0\leq x\leqrac{1}{2}\\ 1-x&rac{1}{2}\leq x\leq1 \end{array}
ight)\wedge\left(orall x\in\mathbb{R}.	riangle_{0}\left(x+1
ight)=	riangle_{0}\left(x
ight)
ight)\wedge\left(	riangle_{k}=rac{	riangle_{0}\left(4^{k}x
ight)}{4^{k}}
ight) כך \left(	riangle_{k}=\frac{	riangle_{0}\left(4^{k}x
ight)}{4^{k}}
ight)\wedge\left(	riangle_{k}=\frac{	riangle_{0}\left(4^{k}x
ight)}{4^{k}}
ight)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                       .\triangle_n \xrightarrow{u} \triangle :
                                                                                                                                                                                                                                                                       מסקנה: 🛆 רציפה בכל נקודה.
                                                                                                                                                                                                                                                            משפט: \triangle אינה גזירה באף נקודה.
               f'=g וכן f_n\stackrel{u}{
ightarrow} f מתכנסת אזי והיינה \{f_n\left(x_0
ight)\}_{n=1}^\infty ותהא ותהא x_0\in[a,b] ותהא ותהא f'_n\stackrel{u}{
ightarrow} g עבורה עבורה אזי וכן ותהא
                                                                                                                                                     . שישון: תהיינה \sum_{i=0}^{\infty}f_n=f אזיי א\sum_{i=0}^{n}f_n 	extstyle 	op 1 עבורה עבורה אויינה f_n \in \mathbb{R}^I
\int_a^b \sum_{i=0}^\infty u_n = \sum_{i=0}^\infty \int_a^b u_i במ"ש אזי אזי \sum_{i=0}^\infty u_n עבורה u_n \in C\left([a,b]\right) עבורה u_n \in C\left([a,b]\right) משפט גזירה איבר איבר: תהיינה u_n \in C^1\left([a,b]\right) עבורה u_n \in C^1\left([a,b]\right) משפט גזירה איבר איבר: תהיינה u_n \in C^1\left([a,b]\right) עבורה u_n \in C^1\left([a,b]\right)
                                                                                                                                                                                                                                                            \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}u_i וכן
orall x\in\mathbb{R}.orall n\in\mathbb{N}.\left|u_{n}\left(x
ight)
ight|\leq M_{n} וכן \sum_{n=1}^{\infty}M_{n}<\infty ותהא וותהא M\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} ותהא וותהא u_{n}\in\mathbb{R}^{I} משפט בוחן u_{n}\in\mathbb{R}^{I} ועבורה
                                                                                                                                                                                                                                                             אזי \sum u_n מתכנס בהחלט ובמ"ש.
\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k a_m \left(b_k - b_{k+1}\right) אזי a,b \in \mathbb{R}^\mathbb{N} אזי למה התמרת אבל: תהיינה a,b \in \mathbb{R}^\mathbb{N} אזי עבורן a,b \in \mathbb{R}^n מתכנסת במ"ש וכן לכל a,b \in \mathbb{R}^n הסדרה a,b \in \mathbb{R}^n מונוטונית משפט קריטריון אבל: תהיינה a,b \in \mathbb{R}^n עבורן a,b \in \mathbb{R}^n מתכנסת במ"ש וכן לכל a,b \in \mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                                          . מתכנס במ"ש. \sum_{i=0}^n f_i g_i מתכנס מחידה אחידה וחסומה
 הסדרה x\in[a,b] וכן לכל g_n\stackrel{u}{	o}0 וכן משפט המינה במידה אחידה עבורן f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]} אבורן דיריכלה: תהיינה תהיינה
                                                                                                                                                                                                                   . מתכנס במ"ש. \sum_{i=0}^n f_i g_i מונוטונית אזי \{g_n\}_{n=0}^\infty
      \max|f-arphi|<arepsilon וויהי f\in C\left([0,1]
ight) אזי קיימת arphi:[0,1]	o\mathbb{R} אזי קיימת arphi:[0,1] אזי קיימת פיימת פיימת
                                                                            למקוטעין ולינארית למקוטעין כך ענדיר פר גדיר איז א נגדיר אויהי אוf\in C\left([0,1]\right)רביפה למה: תהא למהוf\in C\left([0,1]\right)
                  \forall m \in \left\{0 \dots N\right\}.  איז \varphi\left(a_{m}\right) = f\left(a_{m}\right) איז \varphi\left(x\right) = f\left(0\right) + N\sum_{k=0}^{N-1}\left(f\left(a_{k+1}\right) - 2f\left(a_{k}\right) + f\left(a_{k-1}\right)\right) \max\left\{x - a_{k}, 0\right\}
                                                                                                                                                         \lim_{n\to\infty}\max_{[-1,1]}|p_n\left(x
ight)-|x||=0 עבורן p_n\in\mathbb{R}\left[x
ight] למה: קיימות
                                                                                    \exists p \in \mathbb{R}\left[x
ight] . \max_{[a,b]}\left|f\left(x
ight) - p\left(x
ight)
ight| < arepsilon אזי arepsilon > 0 ויהי f \in C\left([a,b]
ight) תהא
                                                                                                                                     p_n \stackrel{u}{
ightarrow} f עבורן p_n \in \mathbb{R}\left[x
ight] אזי קיימות f \in C\left(\left[a,b
ight]
ight) עבורן
                                                                                                                                           B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} אזי f \in C\left([0,1]\right) הגדרה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                      B_n \stackrel{u}{\to} f אזי f \in C([0,1]) משפט: תהא
אזי \forall n\in\mathbb{N}.\,|f_n|\leq\Psi עבורה \Psi\in R\left([a,\omega)
ight) ותהא [a,b] על עבורן f_n\in R\left([a,\omega)
ight) עבורה f_n\in R\left([a,\omega)
ight)
                                                                                                                       .\left(\int_{a}^{\omega}f=\lim_{n
ightarrow\infty}\int_{a}^{\omega}f_{n}
ight)\wedge\left(מתכנסת בהחלט מתכנסת \int_{a}^{\omega}f\right)\wedge\left(\forall b\in\left[a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]
ight)
                                                                                                                                                                                                                                                                                      \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} :טענה
                              [-\left|r\right|,\left|r\right|] אזי אונ מתכנס בהחלט ובמ"ש על צור r<\left|q\right| ויהי ווהי עבור \sum a_{k}x^{k} מתכנס בהחלט ובמ"ש על מתכנס עבור
                                                x\in (-R,R) מתכנס x\in (-R,R) משפט אבל: יהי x\notin [-R,R] טור חזקות אזי קיים x\in [0,\infty] כך שלכל x\in [-R,R]
                                                                                                                         . משפט את משפט המקיים את המקיים אזי אזי \sum a_k x^kיהי יהי ההתכנסות: רדיוס ההתכנסות: יהי
                                                                                                                  rac{1}{\limsup\left(|a_n|^{rac{1}{n}}
ight)} אור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא הדמר: יהי יהי משפט קושי הדמר:
```

 $.((\limsup(|a_n|^{\frac{1}{n}})=0)\Longrightarrow(R=\infty))\land((\limsup(|a_n|^{\frac{1}{n}})=\infty)\Longrightarrow(R=0))$ טור חזקות אזי $\sum a_nx^n$ יהי

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ אזי

```
\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = fעם רדיוס R אזי R אזי R אזי R עם רדיוס R עם רדיוס R אזי R עם רדיוס R עם רדיוס R עם רדיוס R ויהי R אזי R עם רדיוס R עם רדיוס R עם רדיוס R ויהי R עם רדיוס R אזי R עם רדיוס R עם 
                                                       a_k(0,R) טענה: יהי \sum a_k x^k אינו מתכנס במ"ש על R אשר לא מתכנס במ"ש על \sum a_k x^k טענה: יהי
                                         [-R,0] טענה: יהי \sum a_k x^k אינו מתכנס אשר לא מתכנס רדיוס R אשר אשר אינו מתכנס במ"ש על טענה: יהי
                                          [0,R] מתכנס במ"ש על קצה מחום ההתכנסות: יהי יהי \sum a_k x^k טור חזקות מתכנס ב־\sum a_k x^k מתכנס במ"ש על
                             [-R,0] מתכנס במ"ש על קצה תחום ההתכנסות: יהי משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי \sum a_k x^k טור חזקות מתכנס ב
                                                                                                                                     . \lim_{r\to 1^-}\sum_{k=0}^\infty a_k r^k=\sum_{k=0}^\infty a_k אזי אזי \sum_{k=0}^\infty a_k<0 המקיימת a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} מסקנה: תהא
                                                                                                               (R^{r 	o 1^{-}} \sum a_k x^k)מתכנס ב־(R^{r 	o 1^{-}} \sum a_k x^k)טענה: יהי יהי (R^{r 	o 1^{-}} \sum a_k x^k) אור חזקות אזי
                                                                                                  .(-Rטענה: יהי \sum a_k x^k)\longleftarrow(-Rמתכנס ב־\sum k a_k x^{k-1}) טענה: יהי טענה: יהי
                                                \sum_{i=0}^\infty a_i=\sum_{i=0}^\infty a_{p(i)} אזי ועל אזי p:\mathbb{N}	o\mathbb{N} מתכנס בהחלט ותהא בהחלט ועל משפט: תהא עבורה \sum_{i=0}^\infty a_i=\sum_{i=0}^\infty a_i
                                                         טענה מכפלות קושי: יהיו p,q\in\mathbb{N}^\mathbb{N} תמורות ויהיו אזיי טענה מכפלות קושי: יהיו יהיו יהיו אזיי תמורות ויהיו
                                                                                                                                                                               \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{k}b_{n-k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}
ight)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_{n}
ight) .(A) \sum_{k=0}^{\infty}a_{k}=\lim_{r	o 1^{-}}\sum_{k=0}^{\infty}a_{k}r^{k} אזי a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} אחר מכים לפי אבל: תהא
                                                                                                                                              a_n=\lim_{n	o\infty}rac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n} איזי a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} איזי a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} התכנסות צ'זארו: תהא a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} איזי a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} איזי a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} סכים לפי צ'זארו: תהא a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} איזי a\in\mathbb{R}^\mathbb{N}
                                                                                    \sigma_n\left(\sum_{k=0}^\infty a_k\right)=rac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n\sum_{i=0}^k a_i אזי a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} עבורה a_n=\ell אזי a_n=\ell אזי a_n=\ell משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a_n=\ell עבורה a_n=\ell אזי a_n=\ell אזי a_n=\ell משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a_n=\ell עבורה a_n=\ell אזי a_n=\ell
                                                                                                                                                                           a(A)\sum_{k=0}^\infty a_k=\ell אזי a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} אזי a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} משפט: תהא a\in\mathbb{R}^\mathbb{N} אזי
                                                                                                             \sum_{k=0}^\infty a_k=
ho אזי a_k=o\left(rac{1}{k}
ight) וכן a_k=a_k=0 אזי a_k=a_k=0 משפט טאובר: תהא a_k=a_k=0 עבורה
\overline{B}_r\left(0
ight) מתכנס בהחלט ובמ"ש על r<|w| ויהי ויהי w\in\mathbb{C} טור טור חזקות מרוכב המתכנס עבור
                                                                                                                                                                                                                                e^{i	heta}=\cos{(	heta)}+i\sin{(	heta)} אזי 	heta\in\mathbb{R} משפט אוילר: יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     מסקנה: יהיz\in\mathbb{C} אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      .\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \bullet.\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \bullet
                                                                                                                                                                                                                            .\exists !u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv אזי f\in\mathbb{C}^{[a,b]} מענה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                     .u+iv\in R\left([a,b]
ight) אזי u,v\in R\left([a,b]
ight) סימון: יהיו
                                                                                                                                                                                         \int_a^b \left(u+iv
ight)=\int_a^b u+i\int_a^b v אינטגרל: יהיו u,v\in R_{\mathbb{R}}\left([a,b]
ight) אינטגרל
                                                                                                                                                                                                                                                                                         טענה: תהיינה f,g\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]
ight) אזי

\int_{a}^{b} (f+g) = \int_{a}^{b} f + \int_{a}^{b} g \bullet 

\cdot \int_{a}^{b} f = \int_{a}^{c} f + \int_{c}^{b} f \bullet 

\cdot \int_{a}^{b} cf = c \underbrace{\int_{a}^{b} f}_{\bullet} \bullet

                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             .\int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f} \bullet
                                                                                                                                                                                                      rac{d}{dx}\left(u+iv
ight)=rac{du}{dx}+i\cdotrac{dv}{dx} אזי u,v\in R_{\mathbb{R}}\left([a,b]
ight) נגזרת: יהיו
                                                                                                                                                                                                                                                     |f|\in R\left([a,b]
ight) אזי f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]
ight) למה: תהא
                               המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא f \in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]
ight) ותהא אזי נקודת רציפות של אזי x_0 \in [a,b]
                                                                                                                                                                                                                                                                                                              .\left(\int_{a}^{x} f\left(t\right) dt\right)'(x_{0}) = f\left(x_{0}\right)
                                 \int_a^b f(x)\,dx=F\left(b
ight)-F\left(a
ight) אזי איי אינטגרציה בחלקים: תהיינה f\in R_\mathbb{C}\left([a,b]
ight) ותהא f\in R_\mathbb{C}\left([a,b]
ight) אזי איי אינטגרציה בחלקים: תהיינה f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]} גיירות עבורן f,g'\in R_\mathbb{C}\left([a,b]
ight) אזי איינטגרציה בחלקים: תהיינה אינטגרציה בחלקים: תהיינה לא גיירות עבורן גיירות עבורן איינטגרציה בחלקים: תהיינה לא גיירות עבורן גיירות עבורן איינטגרציה בחלקים: תהיינה בחלקים: תהיינה לא גיירות עבורן גיירות גיירות עבורן גיירות גיירות
```

 $\left|\int_a^b f
ight| \leq \int_a^b |f|$ אזי $f\in R_\mathbb{C}\left([a,b]
ight)$ מסקנה: תהא $f\in \mathbb{R}. orall x\in \mathbb{R}. f\left(x+T
ight)=f\left(x
ight)$ עבורה $f\in \mathbb{C}^\mathbb{R}$

טענה: יהי $\sum_{k=1}^\infty ka_kx^{k-1}$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של הינו $\sum_{k=1}^\infty a_kx^k$ הינו ההתכנסות של הינו

```
\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} :טורוס חד מימדי/מעגל
                                                                                        R(\mathbb{T}) = \{ f \in R([0, 2\pi]) \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x + 2\pi) = f(x) \} סימון:
                                                                                                                                             e_n\left(t
ight)=e^{int} אזי n\in\mathbb{Z} סימון: יהי
                                                                                                                                           .e_{n}\left( t
ight) \in R\left( \mathbb{T}
ight) אזי n\in\mathbb{Z} טענה: יהי
                                                                  \sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)אזי \left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C} ויהיו m\in\mathbb{N}יהי יהי טריגונומטרי: יהי
         m אזי אוי (c_m 
eq 0) \lor (c_{-m} 
eq 0) אוי אוי \sum_{n=-m}^m c_n e_n (t) אוי אוי אוי פולינום טריגונומטרי: יהי
                                                                                                                                                                 \mathbb{C} טענה: R\left(\mathbb{T}
ight) מ"ו מעל
                                                                                               .\langle f,g
angle =rac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(x
ight)\overline{g\left(x
ight)}dx אזי f,g\in R\left(\mathbb{T}
ight) הגדרה: יהיי
                                                                                                                                           .C\left( \mathbb{T}
ight) טענה: \left\langle \cdot,\cdot 
ight
angle מכפלה פנימית על
                                                                                                                                                 .\langle e_n, e_m 
angle = egin{cases} 0 & n 
eq m \ 1 & n = m \end{cases}
                                                                                    \hat{f}\left(m
ight)=\langle f,e_{m}
angle אזי מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי
                                                                         \hat{f}\left(k
ight)=c_{k} אזי אזי טענה: יהי יהי f\left(t
ight)=\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t
ight) פולינום טריגונומטרי
                                                                    .f\left(t
ight)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n
ight)e_{n}\left(t
ight) אזי טריגונומטרי איז פולינום f יהי פולינום טריגונומטריים אזי \hat{g}\left(n
ight) פולינומים טריגונומטריים אזי f,g פולינומים טריגונומטריים איז פולינומים טריגונומטריים איזי
                                                                                       \left.\|f\right\|^2 = \sum_{n=-m}^m \left|\hat{f}\left(n\right)\right|^2 אזי טריגונומטרי טריגונום טריגונו פולינום fיהי יהי
                                                                                                     \hat{f}\left(m
ight)=ra{f,e_m}אזי f\in R\left(\mathbb{T}
ight) תהא יותהא f\in R\left(\mathbb{T}
ight)
                                                      S_{m}(s,t)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)\,e_{n}(t) אזי m\in\mathbb{N} ויהי ויהי f\in R\left(\mathbb{T}
ight) תהא
                                                                                                                            \hat{f}(-n) = \widehat{f}(n) אזי f \in R_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) טענה: תהא
                                                                                                     ממשית). ממשית S_m f (ממשית) אזי (f \in R(\mathbb{T}) ממשית).
                                                                                          (f-S_mf)\perp e_k אזי איזי |k|\leq m ויהי f\in R\left([0,2\pi]
ight) אזי תהא
                                                                                                           S_m(f-S_mf)\perp S_mf אזי f\in R\left([0,2\pi]
ight) מסקנה: תהא
                                                                                  \|f\|^2 = \|S_m f\|^2 + \|f - S_m f\|^2 אזי f \in R\left([0, 2\pi]
ight) מסקנה: תהא
                                                                        \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n
ight)
ight|^{2}\leq\left\|f
ight\|^{2} אזי f\in R\left(\left[0,2\pi
ight]
ight) מענה אי־שיוויון בסל: תהא
                                                                          \lim_{n
ightarrow+\infty}\left|\hat{f}\left(n
ight)
ight|=0 אזי f\in R\left([0,2\pi]
ight) תהא תהא לימן ולבג:
                                  .\left(f_{n}\overset{L_{2}}{\longrightarrow}g
ight)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n
ightarrow\infty}\left\Vert f_{n}-g
ight\Vert =0
ight) אזי f_{n},g\in R\left(\left[0,2\pi
ight]
ight) תהיינה וורמת בנורמת:
                                                                                                                                    הערה: התכנסות בנורמת L_2 איננה יחידה.
                                                                                    . \|g\|\leq\sup|g| אזי g\in R\left(\mathbb{T}
ight) למה: תהא \left(f_{n}\overset{u}{
ightarrow}f\right)\Longrightarrow\left(f_{n}\overset{L_{2}}{
ightarrow}f\right) אזי \left(f_{n}\overset{u}{
ightarrow}f\right)\Longrightarrow\left(f_{n}\overset{L_{2}}{
ightarrow}f\right) אזי איזי אינה (\left[0,2\pi
ight])
                                                                                 p_n \xrightarrow{L_2} f עבורה p_n \in \mathbb{C}[x] אזי קיימת f \in C_\mathbb{C}([a,b]) עבורה מסקנה:
                        . \sup \ |p\left(t\right)-f\left(t\right)|<\varepsilon עבורו טריגונומטרי פולינום אזי קיים פולינום \varepsilon>0 ויהי ויהי f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right) משפט: תהא
                                         \|p-f\|<arepsilon עבורו p עבורו טריגונומטרי קיים פולינום אזי קיים f\in R\left([0,2\pi]
ight) משפט: תהא
                                                p_n \xrightarrow{L_2} f אזי קיימיים פולינומים טריגונומטריים עבורם p_n אזי קיימיים אזי קיימיים אזי אזי קיימיים פולינומים מסקנה: תהא
                                                                                                        \lim_{m	o\infty}\|S_mf-f\|=0 איז f\in R\left([0,2\pi]
ight) משפט: תהא
                                                                                        . \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^2=\left\|f\right\|^2 עבורה עבורה f\in R\left([0,2\pi]\right) שיוויון פרסבל. מסקנה: תהא f\in R\left([0,2\pi]\right) אזי מתקיים שיוויון פרסבל.
f,g מתקיים f,g מתקיים f,g אזי בכל נקודת רציפות אזי בכל המקיימות f,g מתקיים f,g\in R\left([0,2\pi]\right) מסקנה:
             \left\|f-\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\right\|^{2}\geq\left\|f-S_{m}f\right\|^{2} אזי \left\{c_{n}
ight\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C} ייהי m\in\mathbb{N} ייהי f\in R\left([0,2\pi]
ight) אזי f\in R\left([0,2\pi]
ight)
                             \mathbb{R}\left( \mathbb{R}, \hat{f}_{m}\left( n \right) \xrightarrow[m \to \infty]{} \hat{g}\left( n \right) אזי ווא \left\| f_{m} - g \right\| \xrightarrow[m \to \infty]{} 0 עבורן עבורן f_{m}, g \in R\left( \left[ 0, 2\pi \right] \right) מסקנה: תהיינה
                                         \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n
ight)e^{int} אזי g\in R\left(\mathbb{T}
ight) באשר אורה S_{N}f\xrightarrow{p.w.}g עבורה עבורה עבורה אזי אזי איניה:
                                                                              S_{N}f\overset{u}{
ightarrow}f אזי אזי \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n
ight)
ight|<\infty עבורה עבורה להא f\in C\left(\mathbb{T}
ight)
                                                                               למה: תהא \mathbb{R} המוגדרת f\left(t\right)=t המוגדרת המוגדרת על f\left(t\right)
```

```
 \frac{\cdot \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} : \text{מסקנה:} }{\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2} : \text{מסקנה:} }  איז \alpha \notin \mathbb{Z} טענה: יהי \alpha \notin \mathbb{Z} איז \alpha \notin \mathbb{Z}
                                                                                                                                                                         .\,\widehat{f'}\left(n
ight)=in\,\widehat{f}\left(n
ight) אזי f\in C^{1}\left(\mathbb{T}
ight) למה: תהא
                                                                                                                                                                 .S_{m}\left( f^{\prime}
ight) =\left( S_{m}f
ight) ^{\prime} אזי f\in R\left( \mathbb{T}
ight) מסקנה: תהא
                                                                                                                                                               \widehat{f^{(k)}}(n)=i^kn^k\widehat{f}(n) אזי f\in C^k(\mathbb{T}) למה: תהא
                                                                                                               \lim_{n	o\infty}n^k\hat{f}\left(n
ight)=0 איי f\in C^k\left(\mathbb{T}
ight) איי מסקנה: תהא \lim_{n	o\infty}n^k\hat{f}\left(n
ight)=0 המקיימת f\in C^{k-2}\left(\mathbb{T}
ight) איי איי \lim_{n	o\infty}n^k\hat{f}\left(n
ight)=0 משפט: תהא
                                                                                                                                                       \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n
ight)
ight|<\infty איז f\in C^{1}\left(\mathbb{T}
ight) מסקנה: תהא
                                                                                                                                                                                 S_mf \xrightarrow{u} f אזי f \in C^1(\mathbb{T}) מסקנה: תהא
.\exists \delta>0.\exists M>0. \forall x\in (a-\delta,a+\delta)\,. |f\left(x
ight)-f\left(a
ight)|< M\left|x-a
ight| עבורה עבורה a\in\mathbb{R} איז f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} איז ליפשיץ מקומי: תהא
                                                                              aמקומי בים מקומי ליפשיץ מקומי f אזי f\in C^1\left((a-\delta,a+\delta)
ight) ותהא a\in\mathbb{R} יהי
                                      S_{N}f\left(a
ight) \xrightarrow[N 
ightarrow \infty]{} f\left(a
ight) אזי משפט: תהא f \in R\left(\mathbb{T}
ight) ותהא עבורן a \in \mathbb{T} משפט: תהא
                                                                                                      (f*g)(t)=rac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(t
ight)g\left(x-t
ight)\mathrm{d}t איי אי f,g\in R\left(\mathbb{T}
ight) קונבולוציה: תהיינה
                                                                                                                                                                                                        טענה: תהיינה f,g\in R\left( \mathbb{T}
ight) אזי
                                                                                                                                                                                                                               .f*g = g*f \bullet
                                                                                                                                                                                               f * (q + h) = f * q + f * h \bullet
                                                                                                                                                                                                                 .(cf) * g = c(f * g) \bullet
                                                                                                                                                                                                     .(f*g)*h = f*(g*h) \bullet
                                                                                                                                                                                                                             f * q \in C(\mathbb{T}) \bullet
                                                                                                                                                                                                      \widehat{f*g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n) \bullet
                                                                                                                                D_{N}\left(x
ight)=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx} כך כך D_{N}\in R\left(\mathbb{T}
ight) נגדיר נגדיר
                                                                                                                                            D_N*f=S_Nf אאי f\in R(\mathbb T) למה: תהא \widehat{D_N}*f=S_Nf אאי f\in R(\mathbb T) למה: יהי n\in \mathbb Z אאי n\in \mathbb Z למה: יהי n\in \mathbb Z אאי n\in \mathbb Z למה: יהי n\in \mathbb Z אאי n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z למה: יהי n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z למה: יהי n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z למה: יהי n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z למה: יהי n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z למה: יהי n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z איז n\in \mathbb Z
                                                         (D_{N}\left(y
ight)=0)\Longleftrightarrow\left(y\in\left\{ rac{2\pi k}{2N+1}\mid k\in\left\{ -N,\ldots,N
ight\} 
ight\} 
ight) מסקנה: D_{N} זוגית ממשית וכן מתקיים
                                                                                                                           למה: N בעלת N מינימום מקומיים וכן N+1 מקסימום מקומיים.
                                                                                                                                                                    \left| \left| D_N \left( y 
ight) 
ight| \leq \left| rac{1}{\sin \left( rac{y}{2} 
ight)} 
ight| אזי y \in [-\pi,\pi] למה: יהי
                                                                                                                                                                          \left|D_{N}\left(y
ight)
ight|\leqrac{\pi}{\left|y
ight|} אזי y\in\left[-\pi,\pi
ight] מסקנה: יהי
                                                                                                                                                                                                          \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) \, \mathrm{d}y = 1 :
                                                                                                                                                                                                          .\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_{N}\left(y\right)\right|\mathrm{d}y\ggg1 טענה:
```

 $\frac{1}{n^2}$ מסקנה: $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מסקנה: $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מסקנה: $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2n-1}$ המוגדרת $f \in \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ נמשיכה מחזורית על $f \in \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ אזי $f \in \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ $f \in \mathbb{R}^{[0,2\pi]}$

.[-r,r] על $S_mf \xrightarrow{u} f$ אזי $r \in [0,\pi)$ יהי

 $.(-\pi,\pi)$ על $S_m f \xrightarrow{p.w.} f \bullet$

 $.S_m f\left(t\right) = rac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^m rac{\cos(nt)}{n^2}$ • $.[0, 2\pi] \; ext{vd} \; ext{ Vd} \; ext{vd} \;$

```
מטריקהd:A^2 	o [0,\infty) אזי קבוצה A המקיימת מטריקה
                                                                                                                          \forall x,y \in A.d(x,y) \geq 0 חיוביות: •
                                                                                          \forall x,y \in A. (d(x,y)=0) \Longleftrightarrow (x=y) ממש:
                                                                                                             \forall x, y \in A.d(x, y) = d(y, x) סימטריות:
                                                                              \forall x,y,z \in A.d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) אי־שיוויון המשולש: •
                                                                          (X,d) מרחב מטרי: תהא d:X^2 	o [0,\infty) ותהא ותהא קבוצה אזי מטרי:
                                             a_n 	o L אזי d\left(a_n,L
ight) 	o 0 עבורן L \in X ותהא ותהא a \in X^{\mathbb{N}} אזי מרחב מטרי היי (X,d) יהי
                   L_1=L_2 אזי איז (a_n	o L_1)\wedge (a_n	o L_2) עבורם עבורם L_1,L_2\in X ויהיו a\in X^\mathbb{N} אזי מרחב מטרי מרחב מטרי יהי
                                                                                         d_1\left(x,y
ight)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i
ight| אזי x,y\in\mathbb{R}^n מרחק מנהטן: יהיו
                                                              \ell_p^n=(\mathbb{R}^n,d_p) אזי d_p\left(x,y
ight)=(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p)^{rac{1}{p}} נגדיר x,y\in\mathbb{R}^n סימון: יהיו
                                                                                                                                                  \ell_n^n מרחב מטרי.
                                                                                 d_{\infty}\left(x,y
ight)=\max_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}
ight| אזי x,y\in\mathbb{R}^{n} מרחק יוניפורמי: יהיו
                                                                                                                                               \ell_{\infty}^n = (\mathbb{R}^n, d_{\infty}) :סימון
                                                                                                                                                 .טענה\ell_{\infty}^n מרחב מטרי
                                                 C\left(\left[a,b
ight]
ight)=\left(C\left(\left[a,b
ight]
ight),d
ight) אזי ווא לd\left(f,g
ight)=\sup\left|f-g
ight| נגדיר ואדיר להיון: יהיו
                                                                                                                                        .טענה: C\left([a,b]\right) מרחב מטרי
                 אזי (d\left(f,g
ight)=0)\Longleftrightarrow (f\sim g) אזי ונגדיר יחס שקילות d\left(f,g
ight)=\sqrt{\int_a^b\left|f-g
ight|^2} נגדיר f,g\in R\left([a,b]
ight) אזי f,g\in R\left([a,b]
ight)
                                                                                                                                          L_2([a,b]) = (R([a,b])/\sim, d)
                                                                                                                                       טענה: L_2\left([a,b]\right) מרחב מטרי.
                             . מרחב מטרי (V,d) אזי d\left(x,y
ight)=
u\left(x-y
ight) נגדיר על V נגדיר על 
u:V
ightarrow \left[0,\infty
ight) אזי אזי U:V
ightarrow \left[0,\infty
ight) מרחב מטרי.
                                                                                                        \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{rac{1}{p}} אזי x \in \mathbb{R}^n יהי \ell_p^n: יהי
                                                                                                         \|x\|_{\infty} = \max_{i=1}^n |x_i| אזי x \in \mathbb{R}^n יהי \ell_{\infty}^n נורמת \ell_{\infty}^n
                                                                                                                                                   למה: יהיx \in \mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                               ||x||_{\infty} \le ||x||_{2} \le \sqrt{n} ||x||_{\infty} \bullet
                                                                                                                                  ||x||_{2} \le ||x||_{1} \le \sqrt{n} ||x||_{2} \bullet
x_i = x_i איזי y \in [n]. \lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = y_i \iff \left(\lim_{m \to \infty} \left\|x^{(m)} - y\right\|_2 = 0\right) איזי y \in \mathbb{R}^n איזי y \in \mathbb{R}^n סדרה ותהא
                                                                          B_{r}\left(a
ight) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid d\left(x,a
ight) < r
ight\} אזי r \in \mathbb{R} ויהי a \in X יהי יהי
                                                                          .\overline{B}_r\left(a
ight) = \{x \in \mathbb{R} \mid d\left(x,a
ight) < r\} אזי r \in \mathbb{R} ויהי a \in X יהי סגור: יהי
                                                                               S_{r}\left(a
ight)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a
ight)=r
ight\} אזי r\in\mathbb{R} ויהי a\in\mathbb{R}^{n} אזי a\in\mathbb{R}^{n}
                                                                            . \exists r>0.B_{r}\left(x
ight)\subseteq A המקיימת x\in A אזי A\subseteq X ההא מנימית: תהא
                                                          \operatorname{Ann}(A) = A = \{x \in A \mid A \; שנים של קבוצה: תהא A \subseteq X אזי A \subseteq X אזי פנים של קבוצה: תהא
                                                                                                          A = \operatorname{int}(A) עבורה A \subseteq X קבוצה פתוחה:
```

 $\int_{-\pi}^{-\delta}F_{N}\left(x
ight)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\pi}F_{N}\left(x
ight)\mathrm{d}x\leqarepsilon$ מתקיים א $\delta>0$ מתקיים אזי קיים $\delta>0$ אזי קיים אזי קיים אזי למה: יהי

 $\sigma_N f\left(a
ight) \xrightarrow[N od{a}]{\lim_{x od{a}}} rac{\lim_{x od{a}} f(x) + \lim_{x od{a}} f(x)}{2}$ משפט פייר: תהא $f \in R\left(\mathbb{T}
ight)$ ותהא $a \in [-\pi,\pi]$ בה $a \in [-\pi,\pi]$ בה $a \in [-\pi,\pi]$ אזי $a \in [-\pi,\pi]$ אזי $a \in [-\pi,\pi]$ מסקנה: תהא $a \in [-\pi,\pi]$ ותהא $a \in [-\pi,\pi]$ בה $a \in [-\pi,\pi]$ בה $a \in [-\pi,\pi]$ בה $a \in [-\pi,\pi]$ אוי $a \in [-\pi,\pi]$ ותהא $a \in [-\pi,\pi]$ ותהא $a \in [-\pi,\pi]$ בה $a \in [-\pi,\pi]$ אוי $a \in [-\pi,\pi]$ אוי $a \in [-\pi,\pi]$ מסקנה: תהא $a \in [-\pi,\pi]$ ותהא $a \in [-\pi,\pi]$ ותהא $a \in [-\pi,\pi]$ ותהא

 $J_{N}(x)=rac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}S_{n}f\left(x
ight)$ אזי $f\in R\left(\mathbb{T}
ight)$ תהא פייר: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}
ight)$ אזי $f\in R\left(\mathbb{T}
ight)$ גרעין פייר: נגדיר $F_{N}\left(x
ight)=rac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_{n}\left(x
ight)$ כך $f\in R\left(\mathbb{T}
ight)$

 $.F_{N}\left(y
ight)=rac{1}{N+1}\left(rac{\sin\left(\left(N+rac{1}{2}
ight)y
ight)}{\sin\left(rac{y}{2}
ight)}
ight)^{2}$ אזי $y\in\left[-\pi,\pi
ight]$ למה: יהי

 $.\sigma_N f=f*F_N$ איזי $f\in R\left(\mathbb{T}
ight)$ למה: תהא למה: איזי $f\in R\left(\mathbb{T}
ight)$ למה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ איזי $n\in\mathbb{Z}$ למה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ איזי $n\in\mathbb{Z}$

 $.\sigma_{N}f\overset{u}{
ightarrow}f$ אזי $f\in C\left(\mathbb{T}
ight)$ משפט פייר: תהא

 $C\left(\mathbb{T}
ight)$ מסקנה: $\{e_n\}_{n=-\infty}^\infty$ צפופים במ"ש ב־ $\int_0^\infty rac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = rac{\pi}{2}$ טענה:

 $rac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_{N}\left(y
ight) \mathrm{d}y=1$:למה

```
.\partial A=\overline{A}\cap\overline{Xackslash A}=\overline{A}ackslash \mathrm{int}\,(A) איי A\subseteq X שפה של קבוצה: תהא
                                                                                                                                                                  \overline{X} = X עבורה צפופה: קבוצה אפופה:
                                                           A 
eq A מתקיים A \neq A מתקיים (Y \cap A \neq \emptyset אזי (Y \cap A \neq \emptyset אזי (Y \cap A \neq \emptyset מתקיים A \neq \emptyset פענה: תהא
                                                                         מרחב מטרי ספרבילי: מרחב מטרי (X,d) עבורו קיימת Y\subseteq X עבורו מנייה.
                                                                                                                       \exists r>0. \exists a\in X. A\subseteq B_{r}\left(a
ight) עבורה A\subseteq X קבוצה חסומה: קבוצה אבורה
                                                                                           .diam (A) = \sup \{d(x,y) \mid x,y \in A\} חסומה אזי A \subseteq X ההא
                                                                                                . סענה: תהא x^{(m_j)} סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה \{x^{(m_j)}\}\subset\mathbb{R}^n מתכנסת ענה: תהא
                                                                                                                                   מסקנה: לכל קבוצה חסומה ואינסופית קיימת נקודת הצטברות.
                                                                                . \forall arepsilon>0. \exists N\in\mathbb{N}. \forall k,m\geq N. d\left(x_k,x_m
ight)<arepsilon המקיימת \{x_n\}\subseteq X סדרת קושי: סדרה
                                                                                                                                                                                                למה: סדרת קושי הינה חסומה.
                                                                                                                                                                              טענה: סדרה מתכנסת הינה סדרת קושי.
                                                                                                                     מרחב מטרי שלם: מרחב מטרי (X,d) עבורו כל סדרת קושי מתכנסת.
                                                                                                                                                        . שלם, שלם, C\left([a,b]\right) שלם, שלם \mathbb{R}^n משפט: \mathbb{R}^n
                                                                                        (Y,d) שלם) שלם) אזי (Y,d) שלם) מטרי שלם מטרי שלם ותהא אזי שלם) מרחב מטרי שלם מטרי שלם ותהא
                                         מרחבים מטריים f:X 	o Y חח"ע עבורם קיימת מטריים: מרחבים מטריים: מרחבים מטריים איזומטריים: מרחבים מטריים
                                                                                                                                                                                   \forall x, y \in X.d(x, y) = d((x), f(y))
                              .
ho_{\lceil_{Y^2}}=d אפופה וכן צפופה עבורו עבורו אזי מרחב מטרי אזי מרחב מטרי אזי אפופה וכן מרחב מטרי: יהי (X,d) מרחב מטרי
                                                                                                                                                                               משפט: לכל מרחב מטרי קיימת השלמה.
                                                                            טענה: יהי (Y,\rho) , (Z,\zeta) אזי (Y,\rho) , (Z,\zeta) איזומטריים. מטרי בעל מטרי בעל מטרי מטרי מיטריים.
                                                                                                                                    a\in X אזי a\in X אזי f:X	o X נקודת שבת: תהא
             . orall x, y \in X.d\left(Ax,y
ight) \leq \lambda d\left(x,y
ight)המקיים \lambda < 1 עבורה קיים \lambda < 1 מרחב מטרי אזי \lambda \in \mathrm{Hom}\left(X
ight) מרחב מטרי אזי
Ax=x עבורו אזי קיים ויחיד x\in X עבורו העבת אל קיים העתקה מכווצת אזי אין עבורו משפט מטרי ותהא אווא משפט נקודת השבת של בנך: יהי
מסקנה: יהי Ax=x אזי לכל y\in X העתקה מכווצת ותהא x\in X אוי לכל העתקה מריים מסקנה: יהי אזי לכל אזי לכל אוי לכל
מסקנה: יהי Ax=x אזי לכל X\in X אחיים מכווצת ותהא אוועת העתקה מכווצת האי לכל אזי לכל מחקנה: יהי מסקנה: יהי אוועת מטרי הא
                                                                                                                                                                                                   d(A^n y, x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y, Ay)
                                                               A\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}A_\alphaעבורן עבורן \{A_\alpha\}_{\alpha\in I} אזי קבוצות מטרי ותהא אזי מרחב מטרי מרחב יהי (X,d)יהי יהי פתוח:
              X=igcup_{i=1}^m A_{eta_i} עבורן \{eta_i\}_{i=1}^m \in I קיימות של X קיימות כיסוי פתוח לכל לכל עבורן עבורו לכל אבורן לכל אבורן אבורן אבורן אבורן לכל אבורן אבורן לכל אבורן אבו
                                                                                     קבוצה קומפקטית: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי B\subseteq X אזי מרחב מטרי יהי יהי יהי
```

.int (int (A)) = int (A) אזי $A \subseteq X$

. פתוחה $\bigcup A_i$ אזי אוי $\{A_i\}$ פתוחה $\{A_i\}_{i=0}^n$ פתוחה. $\{A_i\}_{i=0}^n$

 $a\in A$ פתוחה עבורה $A\subseteq X$ אזי $a\in X$ סביבה: יהי

קבוצה סגורה: קבוצה $X \subseteq X$ עבורה $X \setminus A$ פתוחה.

 $A=\overline{A}$ משפט: תהא $A\subseteq X$ אזי $A\subseteq A$ טגורה) משפט:

 $.\overline{A} = \bigcap \{A \subseteq B \mid$ טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $A \subseteq A$

 $\operatorname{Lint}(A) = \bigcup \left\{ B \subseteq A \mid \operatorname{All}(B) \mid B \right\}$ אזי $A \subseteq X$ טענה: תהא

 $\forall r>0.B_{r}\left(a
ight)\cap A
eqarnothing$ עבורה $a\in X$ אזי $A\subseteq X$ נקודת סגור: תהא

 $\operatorname{Aint}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ וכן $\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$ אזי $A \subseteq X$ וכן

 $\operatorname{cl}\left(A
ight)=\overline{A}=\{a\in X\mid A$ סגור של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $A\subseteq A$ אזי סגור של

 $(x_n o a)$ אזי $(x_n o a)$ אזי ($a \in \overline{A}$) אזי ($a \in X$ אותהא א בורה $A \subseteq X$) משפט: תהא $A \subseteq X$ אזי $A \subseteq X$ אזי $A \subseteq X$ אזי $A \subseteq X$ נקודת הצטברות: תהא $A \subseteq X$ אזי $A \subseteq X$ אזי $A \subseteq X$

 $(x_n o a)$ אזי $(x_n o a)$

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי

. פתוחות $\varnothing, X \bullet$

```
טענה קבוצה פתוחה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא Y\subseteq X אזי ותהא Y\subseteq X פתוחה יחסית: יהי יחסית: יהי
                                                                                                                     עבורה U = V \cap Y.
טענה קבוצה סגורה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא Y\subseteq X אזי ותהא עבורה יחסית: יהי יחסית: יהי סגורה מטרי ותהא
                                                                                                                             U = V \cap Y
                                                                         טענה: תהא K\subseteq X סגורה אזי אוי חסומה וכן K\subseteq X סגורה.
.(\bigcap_{i=1}^\infty K_i 
eq \varnothing אזי אזי אזי ((X,d)) סענה: יהי ((X,d)) מרחב מטרי אזי (אזי אזי (לכל סדרה יורדת אזי (לכל סדרה אזי ((X,d)) מרחב מטרי אזי
                                               , קומפקטיות סדרה מתחב מטרי (X,d) עבורו לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת מומפקטיות
                                               (X,d) קומפקטי סדרתית), משפט: יהי ((X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)
                                                                      .(אסגורה וחסומה) אזי (A \subseteq \mathbb{R}^n אזי (A \subseteq \mathbb{R}^n סענה: תהא
                                                       מרחב פרה־קומפקטי: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל סדרה יש תת סדרה קושי.
                                                               אוסף פונקציות רציף במידה אחידה: סדרה \{f_n\}\subseteq C\left([a,b]
ight) המקיימת
                                                       \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall n \in \mathbb{N}. \forall s, t \in [a, b]. |s - t| < \delta \Longrightarrow |f_n(s) - f_n(t)| < t
                משפט: תהא \{f_n\} סדרה אזי ו\{f_n\} סדרה אזי ואי פרה־קומפקטית\{f_n\} חסומה במ"ש ורציפה במידה אחידה).
                                        אזי L \in Y ותהא a \in X היים תהא f: X 	o Y מרחבים מטריים מטריים תהא אזי ותהא a \in X
                                        (\lim_{x\to a} f(x) = L) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in B(a,\delta). f(x) \in B(L,\varepsilon)) פושי: •
                                      (\lim_{x\to a} f(x) = L) \iff (\forall x \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}, (x_k \to a) \implies (f(x_k) \to L)) היינה:
               \lim_{x \to a} f\left(x
ight) = f\left(a
ight) עבורה a \in X אזי איז f: X 	o Y מרחבים מטריים מטריים ותהא (X,d), (Y,
ho) איזי יהיו
(לכל U\subseteq Y פתוחה מתקיים f^{-1} פתוחה מf^{-1} פתוחה משפט: יהיו U\subseteq Y מרחבים מטריים ותהא f:X\to Y אזי ווהא
                         (x,d) מתקיים כי f מאזי (f:X	o\mathbb{R}^m מתקיים כי מות מענה: יהי מענה: יהי (f:X	o\mathbb{R}^m מתחים מטרי ותהא
                                    עבורה f:A 	o Y אזי אזי A \subseteq X מרחבים מטריים מרחבים (X,d),(Y,\rho) אזי יהיו
                                                              \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in A. (d(x, y) < \delta) \Longrightarrow (\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon)
                                      . רציפה וכן \langle f,g \rangle רציפה \alpha f + \beta g אזי \alpha,\beta \in \mathbb{R} רציפות ויהיו f,g:X \to \mathbb{R}^n רציפה וכן
משפט רציפות ההרכבה: יהיו f:X	o Y מרחבים מטריים תהא מטריים מטריים (X,d),(Y,
ho),(Z,\eta) ביפה על
                                                                                a על g\circ f אזי g\circ f רציפה על g:f(X)\to Z
                  f:X	o Y מרחב מטרי קומפקטי יהי f:X	o Y מרחב מטרי קומפקטי יהי אזי קומפקטי יהי מירי מענה: יהי
                                         (גל משפט: יהי f \in C(X,\mathbb{R}) מרחב מטרי אזי f \in C(X,\mathbb{R}) קומפקטי) קומפקטיf \in C(X,\mathbb{R}) מרחב מטרי אזי
             משפט קנטור: יהי f:X	o Y מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,
ho) מרחב מטרי קומפקטי יהי f:X	o Y מרחב מטרי ותהא
f\left(X
ight)=\left[f\left(a
ight),f\left(b
ight)
ight] עבורם a,b\in X עבימים אזי קיימים f:X	o\mathbb{R} משפט ווירשטראס: יהי עבורם (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ותהא
                                                    c
u \leq \eta \leq Cעבורם עבורם u, \eta: X \to \mathbb{R} מסקנה: תהיו u, \eta: X \to \mathbb{R} עבורם
                                                                                                     \gamma \in C([a,b],X) מסילה: פונקציה
                                                                           .\gamma\left(a\right)=\gamma\left(b\right) עבורה \gamma:\left[a,b\right]\rightarrow Xמסילה מסילה סגורה: מסילה 
                                                                    . עבורה \gamma_{\restriction_{(a,b)}},\gamma_{\restriction_{[a,b)}} עבורה \gamma:[a,b] 	o X חח"ע.
                                -\gamma\left(t
ight)=\gamma\left(1-t
ight) המוגדרת -\gamma:\left[0,1
ight]
ightarrow X מסילה אזי \gamma:\left[0,1
ight]
ightarrow X המסילה ההפוכה: תהא
.\gamma(1) = y
עבורה x,y\in\mathbb{R} ותהא x,y\in X והיא רביפה היו הא f:X	o\mathbb{R} משפט תכונת מסילתית מחר מטרי קשיר מסילתית מסילתית הא
                                                                                  f(z) = c עבורו z \in X אזי קיים f(x) < c < f(y)
                                                                                       תחום: קבוצה A\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה וקשירה מסילתית.
                                (X,\mathcal{O}) עבורו הקבוצות שפתוחות שפתוחות וסגורות במקביל הן עבורו הקבוצות (X,\mathcal{O}) עבורו במקביל הן
                                                       (X,d)סענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי (X,d) קשיר מסילתית)
                                                                                         טענה: תהא A\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) אזי A\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)
                                                                           \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| אזי A,B \in \operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^n
ight) טענה: תהיינה
```

 $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ מסקנה: תהא $A \in \operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^n
ight)$ אזי לכל $A \in \operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^n
ight)$

 $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}rac{A^k}{k!}$ כך $e^A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ נגדיר $A\in \mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n
ight)$ אקספוננט: תהא

. משפט: תהא $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}rac{A^k}{k!}x$ כך $f\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n)$ אזי $A\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n)$ משפט: תהא

```
. \big\| e^A \big\| \leq e^{\|A\|}וכן מסקנה: תהא A \in \mathrm{Hom} \left( \mathbb{R}^n \right)מסקנה: תהא מסקנה: תהא
                        .\Phi\eta = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}(\eta_2(4t),\eta_1(4t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-1),\eta_2(4t-1)) + \left(0,\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-2),\eta_2(4t-2)) + \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(-\eta_2(4t-3),-\eta_1(4t-3)) + \left(1,\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \end{array} \right. \\ \nabla \left. \Phi\eta : [0,1] \to [0,1]^2 \right. \quad \Delta \left. \Phi\eta : [0,1] \to [0,1]^2 \right. \\ \left. \Phi\eta : [0,1] \to [0,1]^2 \right. \quad \Delta \left. \Phi\eta : [0,1] \to [0,1]^2 \right. \\ \left. \Phi\eta : [0,1] \to [0,1]^2 \right. \quad \Delta \left. \Phi\eta : [0,1] \to [0,1]^2 \right. \\ \left. \Phi\eta : [
                                                                                                                  \|\gamma\|_{\infty} = \max_{t \in [0,1]} \|\gamma\left(t
ight)\| נורמה של עקומה: תהא \gamma: [0,1] 	o [0,1]^2 עקומה אזי
                                                                                                                 d(\gamma,\eta)=\|\gamma-\eta\|_\infty עקומות אזי \gamma,\eta:[0,1]	o[0,1]^2 מרחק של עקומות: תהיינה
                                                                                                                                          d(\Phi\gamma,\Phi\eta)=\frac{1}{2}d(\gamma,\eta) אזי \gamma,\eta:[0,1]\to[0,1]^2 טענה: תהיינה
                                                                                                                                              .\gamma_{\infty}=\lim_{n
ightarrow\infty}\Phi^{n}\gamma עקומה אזי \gamma:\left[0,1
ight]
ightarrow\left[0,1
ight]^{2} עקום פביאנו: תהא
                                                                                                                       . אינה, \gamma_\infty\left([0,1]\right) קומפקטית, רציפה אזי \gamma:[0,1] \to [0,1]^2 קומפקטית, תהא
                                                                                                                                              \left[0,1
ight]^2משפט: תהא \gamma_{\infty}\left([0,1]
ight) עקומה אזי \gamma:\left[0,1
ight]
ightarrow \left[0,1
ight]^2 צפופה ב
f^{-1} טענה: יהי (Y,
ho) מרחב מטרי קומפקטי יהי קומפקטי יהי f:X	o Y מרחב מטרי ותהא אזי קומפקטי וכן
                                                                                                                                                                          [0,1]^2 \to [0,1]טענה: לא קיימת פונקציה רציפה חח"ע ועל ב־
                                                                                                                                                                                                                    עקומה פוליגונלית: עקומה לינארית למקוטעין.
                                                               אזי [\gamma\left(t_{i-1}
ight),\gamma\left(t_{i}
ight)] אזי בקטעים לינאריים בקטעים פוליגונלית עקומה פוליגונלית: תהא
                                                                                                                                                                                                                                          L(\gamma) = \sum_{i=1}^{M} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|
                                                                                                                                                                        L\left(\gamma
ight)=\int_{0}^{1}\left\Vert \gamma^{\prime}\left(t
ight)\right\Vert \mathrm{d}t מסקנה: תהא \gamma עקומה פוליגונלית אזי
עקומה עליון לאורך של עקומה פוליגונלית עקומה \gamma עבורה אזי עקומה \Pi חלוקה חלוקה: תהא הארך ביחס לחלוקה: עקומה פוליגונלית בין
                                                                                                                                                       L\left(\gamma
ight)=\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(t
ight)
ight\Vert \mathrm{d}t איז עקומה אזי \gamma\in C^{1}\left(\left[a,b
ight],\mathbb{R}^{m}
ight) טענה: תהא
                                                                                                                                       B_r\left(a
ight) = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x-a\| < r\} אזי r \in \mathbb{R} ויהי a \in \mathbb{R}^n יהי יהי a \in \mathbb{R}^n
                                                                                                                                        .\overline{B}_{r}\left(a
ight)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|\leq r\} אזי r\in\mathbb{R} ויהי a\in\mathbb{R}^{n} ויהי סגור: יהי
                                                                                                                                                  S_r\left(a
ight)=\{x\in\mathbb{R}\mid \|x-a\|=r\} אזי r\in\mathbb{R} ויהי a\in\mathbb{R}^n יהי יהי a\in\mathbb{R}^n
                                                                                                                              \Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n] \ .a_i < x_i < b_i\} אזי a,b \in \mathbb{R}^n יהיו יהיו
                                                                                                                                .\overline{\Pi}_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid orall j\in[n]\,.a_j\leq x_j\leq b_j\} אזי a,b\in\mathbb{R}^n תיבה סגורה: יהיו
                                                                                                                                       \exists r>0.B_{r}\left(x\right)\subseteq M המקיימת x\in M אזי M\subseteq\mathbb{R}^{n} תהא נימית: תהא נקודה פנימית: תהא
                                                                                                 \operatorname{Ann}\left(M
ight)=\overset{\circ}{M}=\{x\in M\mid M\mid M פנים של קבוצה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי M\subseteq\mathbb{R}^n אזי מנים של קבוצה:
                                                                                                                                                                                                         M=\stackrel{\circ}{M} עבורה M\subseteq\mathbb{R}^n קבוצה פתוחה:
                                                             . נקודה חיצונית: תהא \exists r>0.B_r\left(x
ight)\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת x\in\mathbb{R}^n ותהא ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי M\subseteq\mathbb{R}^n אזי M\subseteq\mathbb{R}^n
                                                       נקודה מבודדת: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי x נקודה מבודדת: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n אוי x\in M ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n נקודה מבודדת:
                                                                          נקודת שפה. x נקודת שפה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n ותהא ותהא x\in\mathbb{R}^n לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי
                                                                                                                                .\partial M=\{x\in M\mid M שפה של שפה אזי M\subseteq\mathbb{R}^n אזי M\subseteq\mathbb{R}^n שפה של קבוצה: תהא
                                                                                                                                                                                              \partial M\subseteq M עבורה עבורה M\subseteq \mathbb{R}^n קבוצה סגורה: קבוצה סגור\overline{M}=\overset{\circ}{M}\cup\partial M אזי M\subseteq \mathbb{R}^n תהא
                                                                                                           (\mathbb{R}^n \backslash M) אזי (x) נקודה פנימית של (x) נקודה חיצונית של אזי (x) אזי (x) אזי אזי (x) נקודה חיצונית של
                                                                                                                                                                                    M^{\mathcal{C}}מסקנה: תהא M \subseteq \mathbb{R}^n אזי M \subseteq \mathbb{R}^n סגורה).
                                                                                                                                                                  \exists r>0.M\subseteq B_{r}\left(0\right) המקיימת M\subseteq\mathbb{R}^{n} קבוצה חסומה: קבוצה
                                                                                                                                                                                                     . סגורה וחסומה קבוצה קבוצה קבוצה קומפקטית: קבוצה קומפקטית
                         טענה היינה בורל: תהא K\subseteq \bigcup_{n\in\Lambda}I_n אזי (לכל קומפקטית) אזי (לכל קומפקטית) אזי אזי אזי אזי אזי K\subseteq\mathbb{R}^n אזי אזי לכל היינה בורל:
                                                                                                                                                                                                                                                 A \subseteq \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda) A \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{B}} I_n
                                                                                                                                                                                                                          a^{(k)}=a\left(k
ight) אזי a\in\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{\mathbb{N}} סימון: תהא a\in\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{\mathbb{N}}
                                                                                   \lim_{k	o\infty}a^{(k)}=L אזי \lim_{k	o\infty}\left\|a^{(k)}-L
ight\|=0 עבורן L\in\mathbb{R}^n אזי a\in(\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} גבול: תהא
                                                                                                                             0 \xrightarrow[x 	o a]{} \lim_{x 	o a} נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד.
                                                                                      a\in [n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k	o\infty]{}b_j\Longleftrightarrow \left(a^{(k)}\xrightarrow[k	o\infty]{}b
ight) אזי b\in \mathbb{R}^n ויהי a\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} משפט: תהא a\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N}
```

```
A = \lim_{x \to a} f(x) עבורה A \in A אזי A \in \mathbb{R}^n תהא A \subseteq \mathbb{R}^n תהא רציפות בנקודה:
A\subseteq C(B) (b\in B סימון: תהא A\subseteq B אזי f ותהא A\subseteq B ותהא f:A\to \mathbb{R}^m אהא A\subseteq \mathbb{R}^n עבור כל
                 A\subseteq A אזי A\subseteq B תהא A\subseteq B^m תהא תהא A\subseteq B^n אזי A\subseteq B^n אזי A\subseteq B^n משפט: תהא
                                                                    מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.
                   . רציפות. f,f^{-1} הפיכה עבורה f:A	o B אזי אזי B\subseteq\mathbb{R}^m וכן A\subseteq\mathbb{R}^n רציפות.
                                                                                     A_i:I	o\mathbb{R}^m עקומה פרמטרית: יהיI\subseteq\mathbb{R} יהי
                                                                                                               מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.
                                        A_{c}(t)=(1-t)\,a+tb כך כך \gamma:[0,1]	o\mathbb{R}^m נגדיר a,b\in\mathbb{R}^m מסילה של קו ישר: יהיו
                                   . מסילה \gamma מסילה a ל־ל מישר בין מסילה \gamma:[0,1] \to \mathbb{R}^m ותהא a,b \in \mathbb{R}^m יהיו
                          [a,b]=\mathrm{Im}\,(\gamma) אזי a,b\in\mathbb{R}^m ישר בין מסילה אל קו מסילה \gamma:[0,1]	o\mathbb{R}^m ותהא ותהא a,b\in\mathbb{R}^m יהיו
                                                                 . orall a,b \in M. \ [a,b] \subseteq M המקיימת M \subseteq \mathbb{R}^n קבוצה קמורה:
                                                                טענה: יהי a\in\mathbb{R}^n ויהי r\in\mathbb{R} אזי B_r\left(a
ight),\overline{B}_r\left(a
ight) אזי a\in\mathbb{R}^n קבוצות קמורות.
 \gamma\left(1
ight)=y וכן \gamma\left(0
ight)=x המקיימת \gamma:\left[0,1
ight]
ightarrow M קיימת מסילה x,y\in M עבורה לכל
                                                                                                      תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.
                  .\biguplus \mathcal{A}=M פתוחה אזי קיימת \mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_0}\left(\mathbb{R}^n
ight) פתוחה אזי קיימת M\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה אזי קיימת
             [f(a),f(b)]\subseteq f([a,b]) מתקיים f(a)< f(b) עבורן a,b\in A לכל a,b\in A המקיימת לכל
                                             טענה: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) קשירה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n
                           עבורם x,y\in\mathcal{K} אזי קיימים אזי f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}
ight) עבורם \mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n עבורם אזי קיימים
                                                                                                                           f(\mathcal{K}) = [f(x), f(y)]
                                                         רציפה f:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^n אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n המקיימת (במ"ש): תהא
                                                             \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in \mathcal{M}. \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon
                                                     . ענה: תהא f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^{m}
ight) אזי קומפקטית ותהא אזי קומפקטית ותהא \mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי
                 מתקיים \lambda \in \mathbb{R} ולכל a \in L אזי v: L \to \mathbb{R} אזי מעל אז ופטורי נוצר סופית מעל מרחב לכל u \in L מתקיים
                                                                                       (v(a) \ge 0) \land ((v(a) = 0) \iff (a = 0)) \bullet
                                                                                                       .\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right) :הומוגניות
                                                                        v(a+b) \le v(a) + v(b) (אש"מ): • אי שיוויון המשולש
                                               \forall x \in \mathbb{R}^n. v\left(x
ight) \leq c \, \|x\| עבורו c>0 עבורם אזי קיים v:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} עבורו ענה: תהא
                                                                                        v \in C\left(\mathbb{R}^n\right) נורמה אזי v:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} טענה: תהא
                                               \forall x \in \mathbb{R}^n.c \, \|x\| \leq v \, (x) עבורו c>0 נורמה אזי קיים v: \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} עבורו טענה: תהא
                               a\cdot\eta\leq v\leq b\cdot\eta נורמות שקולות: u,\eta:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} נורמות עבורן קיימים u,\eta:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R}
                                                                                                     טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.
                                                                                   תהא v,\|\cdot\| נורמה אזי v:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} שקולות.
                  (v\left(x^{(k)}
ight)	o 0)\Longleftrightarrow (
ho\left(x^{(k)}
ight)	o 0) אזי x\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} נורמות ותהא v,
ho:\mathbb{R}^n	o \mathbb{R} אזי מסקנה:
                                           \|v\|_p=(\sum_{i=1}^n|v_i|^p)^{rac{1}{p}} כך \|\cdot\|_p:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} נגדיר נורמה p\in\mathbb{N}_+ עבור \ell_p
                                                           \|v\|_{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|\cdot\|_{\infty}:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} נגדיר נורמה \ell_{\infty}:\ell_{\infty}
```

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.

משפט בולצאנו ווירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

אזי $L\in\mathbb{R}^m$ ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ תהא $f:A o\mathbb{R}^m$ תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

 $\lim_{x\to a}f\left(x
ight)=L$ איי $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{(k)}\to a
ight)\Longrightarrow\left(f\left(x^{(k)}
ight)\to L
ight)$ היינה: אם

 $.\big(\forall \varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\ \left\|a^{(m)}-a^{(p)}\right\|<\varepsilon\big)\Longleftrightarrow$ משפט קושי: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^\mathbb{N}$ אזי ($a\in(\mathbb{R}^n)^\mathbb{N}$

 $a^{(k_i)}\in K$ משפט: תהא $a^{(k_i)}\in K$ אזי (לכל $a\in K^\mathbb{N}$ לכל לכל $a\in K^\mathbb{N}$ המקיימת $a\in K^\mathbb{N}$ המקיימת $a\in K^\mathbb{N}$ אזי אזי $a\in K^\mathbb{N}$ הוא $a\in K^\mathbb{N}$ השוב על $a\in K^\mathbb{N}$ נחשוב על $a\in K^\mathbb{N}$ נחשוב על $a\in K^\mathbb{N}$ כוקטור של פונקציות $a\in K^\mathbb{N}$ הערה: תהא $a\in K^\mathbb{N}$ באשר $a\in K^\mathbb{N}$

 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ אזי $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in A \setminus \{a\} . \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$ סושי: אם •

```
.\gamma'\left(a
ight)=\lim_{h	o 0}rac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h} אזי a\in (0,1) ויהי \gamma:[0,1]	o \mathbb{R}^m אהי עקומה: תהא .\gamma'\left(a
ight)=egin{pmatrix} \gamma'_1(a) \ dots \ \gamma'_m(a) \end{pmatrix} אזי \gamma:[0,1]	o \mathbb{R}^m מסקנה: תהא \gamma:[0,1]	o \mathbb{R}^m ויהי \gamma:[0,1]	o \mathbb{R}^m
                               L\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) עבורה קיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n המקיימת ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                                                                                                  f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)
                                                                                               f\in\mathcal{D}\left(a
ight) אזי a\in\mathcal{U} איזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} דיפרנציאבילית על \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}
                                                                                             f\in\mathcal{D}\left(a
ight)\Longrightarrow f\in C\left(a
ight) אזי a\in\mathcal{U} ויהי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n טענה: יהי
                                                                        \operatorname{grad} f\left(a
ight)=[L]_{\operatorname{st}} אזי אזי דיפרנציאבילית דיפרנציאבילית ותהא a\in\mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n ארדיאנט: יהי

abla \mathcal{T}f\left(a
ight)=\mathrm{grad}f\left(a
ight) אזי אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} ותהא ותהא a\in\mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n דיפרנציאבילית
                                                          .rac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{h	o 0}rac{f(a+hx_i)-f(a)}{h} אזי a\in\mathcal{U} ויהי ווהי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יהי
                                                                                                                                                         f'_{x_i}=rac{\partial f}{\partial x_i} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n הערה: יהי
                                                                                a\cdot rac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a
ight)=\left(
abla f\left(a
ight)
ight)_{i} אאי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקניימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} המשפט: יהי
                                            .
abla f\left(a
ight) = \left(rac{\partial f}{\partial x_{1}}\left(a
ight), \ldots, rac{\partial f}{\partial x_{n}}\left(a
ight)
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} החום ותהא
                                                                המקיימת L\in {
m Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m אזי a\in\mathcal{U} החום ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת פונקציה דיפרנציאבילית: יהי
                                                                                                                                                                                                 f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)
                                .(f\in\mathcal{D}\left(a
ight)) \Longleftrightarrow (orall i\in\{1\dots m\}.f_i\in\mathcal{D}\left(a
ight)) אוי a\in\mathcal{U} אויה f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} אוי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) איי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m תחום ותהא f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m אוי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) תחום ותהא f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m אוי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) תחום ותהא f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m אוי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) תחום ותהא f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m אוי f\in\mathcal{D}\left(a
ight)
                                                                                                                משפט: יהי a\in\mathcal{U} ויהי f,g:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m משפט: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n ויהי משפט
                                                                                                                                                                                                               f \in C(a) אזי f \in \mathcal{D}(a) אם •
                                                                                                                                                                                        .cf, f + a \in \mathcal{D}(a) אמ f, a \in \mathcal{D}(a) אם \bullet
                                                                                                                                                                     .(\forall x \in \mathcal{U}.f(x) = c) \Longrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = 0) \bullet
                                                                                      (\forall x \in \mathcal{U}.f(x) = Ax + c) \Longrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = A) אזי A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) ההא
                                                              \mathcal{D}_f\in C\left(\mathcal{U}
ight) וכן f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m תחום אזי תחום אזי היי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n וכן
                                                                                                     f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight) יהי ברציפות אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^{m} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} יהי
                                                                  . orall i \in [m] . orall j \in [n] . rac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C\left(\mathcal{U}
ight) אזי f \in C^1\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי f \in \mathcal{D}\left(\mathcal{U}
ight) אזי f \in \mathcal{D}\left(\mathcal{U}
ight)
                                          \mathcal{L}_{i}\left(orall i\in[m].orall j\in[n].rac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}
ight)
ight)\Longleftrightarrow\left(f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)
ight) אזי f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{m} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                            \frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{h	o 0}rac{f(a+hv)-f(a)}{h} אזי a\in\mathcal{U} אויהי v\in\mathbb{S}^{n-1} יהי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יהי
                                                 .\frac{\partial f}{\partial v}\left(a
ight)=
abla f\left(a
ight)\cdot v אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} ותהא v\in\mathbb{S}^{n-1} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n סענה: יהי
                                          \frac{\partial f}{\partial v}(a)=\mathcal{D}_f\left(a
ight)\cdot v אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m ותהא v\in\mathbb{S}^{n-1} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת
                                                                                                                   .(טענה: יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n תחום אזי \mathcal{U} קשירה מסילתית קשירה פוליגונלית). \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n טענה:
                                \mathcal{U}(x) \in \mathcal{U}(x) = c) \longleftarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = 0) אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m תחום תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n משפט: יהי
                           \mathcal{U}(\forall x \in \mathcal{U}.f(x) = c) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = 0) אזי c \in \mathbb{R}^m ויהי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n מסקנה: יהי
         A: \mathcal{U}. ויהי A: \mathcal{U}. 
    A \in \mathcal{U}. מסקנה: תהא f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m תהא f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m ויהי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m מסקנה: תהא
                                                                                                           .rac{\partial\left(rac{\partial f}{\partial x_i}
ight)}{\partial x_i}=rac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} גזירה אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} גזירה אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                            \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} גזירה אזי גזירה אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} ויהיו f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} גזירה אזי גזירה אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} בצורה f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} משפט: תהא f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} יהיו f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} וכך f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} וכך f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} וכך f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} וכך f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}
rac{.\partial^{|K|}f}{\partial x^K}(a) אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא H\in\mathcal{U} ויהי ווהי \mathcal{D}_f\in C^k(\mathcal{U}) עבורה f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורה מסקנה: יהי
```

```
\mathcal{L}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n 	imes \mathbb{R} \mid (x \in \mathcal{U}) \land (f(x) = y)\} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n גרף פונקציה: יהי
                                       \Pi_c=\{x\in\mathcal{U}\mid f(x)=c\} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R} אזי \mathcal{U} אזי \mathcal{U}
משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום יהי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} ותהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורה
                                                                                                                                        y - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i)
           N_a = (-
abla f\left(a
ight), 1) אזי f \in \mathcal{D}\left(a
ight) עבורה f : \mathcal{U} 	o \mathbb{R} אחום יהי יהי a \in \mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי

abla f\left(a
ight) \perp \Pi_{f\left(a
ight)} אזי f \in \mathcal{D}\left(a
ight) עבורה f: \mathcal{U} 
ightarrow \mathbb{R} ותהא a \in \mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n טענה: יהי
                                                                                                                נקודת קיצון: יהי f:\mathcal{U} 	o \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי
                                                   \forall x \in \mathcal{O}.f\left(x\right) \geq f\left(a\right) המקיימת סביבה \mathcal{O} עבורה קיימת a \in \mathcal{U} עבורה מינימום מקומי:
                                                  \forall x \in \mathcal{O}.f\left(x\right) < f\left(a\right) מקסימום מקומי: עבורה קיימת סביבה \mathcal{O} המקיימת מקסימום מקומי: a \in \mathcal{U}
                                                               .
abla f\left(a
ight)=0 משפט פרמה: יהיa\in\mathcal{U} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n קיצון אזי
                                                                                                             נקודת קיצון: יהי f:\mathcal{U} 	o \mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי
                                                 aנקודת מינימום מקומי: a \in \mathcal{U} עבורה לכל i \in [m] מתקיים a \in \mathcal{U} מקומי מקומי: •
                                             f_i נקודת מקסימום מקומי: u\in [m] עבורה לכל עבורה לכל מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של •
                                                                    \mathcal{D}_f\left(a
ight)=0 קיצון אזי a\in\mathcal{U} ותהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m תחום תהא ע\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: יהי
                                      \mathcal{D}_f(a)=0 המקיימת a\in\mathcal{U} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת יהי
\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^n\|V|=k}}ig(ar{v}_1,...,igV_nig)\prod_{i=1}^nig(a_i-b_iig)^{V_i}rac{\partial^k}{\partial x^V}f נגדיר a,b\in\mathbb{R}^n ויהיו f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) תחום תהא
\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\left(\sum_{i=1}^n\left(a_i-b_i\right)rac{\partial f}{\partial x_i}
ight)^k אזי a,b\in\mathbb{R}^n ויהיו f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n משפט טיילור: יהי f\in\mathcal{U} תחום יהי f\in\mathcal{U} תהא f\in\mathcal{U} תהא f\in\mathcal{U} סביבה קמורה של f\in\mathcal{U} ותהא
                                                        f(x)=\sum_{i=0}^k rac{1}{i!}\mathcal{D}^i_{(x,a)}f(a)+rac{1}{(k+1)!}\mathcal{D}^{k+1}_{(x,a)}f(c) עבורו עבורו עבורו c\in[x,a] איי קיים c\in[x,a] איי קיים c\in[x,a] עבורו איי איי קיים c\in[x,a] איי קיים איי c\in[x,a] איי קיים c\in[x,a] הסיאן: יהי c\in[x,a] תחום ותהא c\in[x,a] דיפרנציאבילית פעמיים איי c\in[x,a]
                                                   עבורו c\in[x,a] איי קיים a\in\mathcal{U} ותהא ותהא f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) עבורו תחום תהא ענה: יהי
                                                                                                                                  f(x) = f(a) + (x - a)^{t} H_{f}(c) (x - a)
                                                                                    משפט: יהי a\in\mathcal{U} תחום תהא f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                                                                                                                     .(מנימום) חיובית ממש)(a) חיובית מינימום).
                                                                                                                  .(בקודת מקסימום) שלילית ממש) שלילית ממש) שלילית H_f(a)
                                                                     .(לא אחד מהמקרים מלעיל)) (\det(H_f(a)) \neq 0)) (לא אחד מהמקרים מלעיל)) (\det(H_f(a)) \neq 0))
                                                                                   מסקנה: יהיu\in\mathcal{U} תחום תהא f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2 יהי
                                                                                        ((\det(H_f(a)) > 0) \wedge (f''_{x,x}(a) > 0)) •
                                                                                     a ((det (H_f(a)) > 0) \land (f''_{x,x}(a) < 0)) •
                                                                     (לא אחד מהמקרים מלעיל)) (\det(H_f(a)) \neq 0)) (\det(H_f(a)) \neq 0))
                        \det\left(H_f\left(a
ight)
ight)
eq 0 קריטית עבורה a\in\mathcal{U} אזי f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n איי יהי
אזי F_u'(a) \neq 0 וכן F(a) = 0 עבורה a \in \mathcal{U} ותהא ותהא F \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) תחום תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 וכן
מתקיים (x,y)\in I_x	imes I_y לכל עבורה לכל f\in C^1(I_x,I_y) ופיימת a_2\in I_y וכן וכן a_1\in I_x פתוחים עבורם ווכן קיימים
```

עבורן $f\in\mathcal{D}(a)$ וכן $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $g\in\mathcal{D}(a)$ והא $g\in\mathcal{U}$ תחומים תהא ותהיינה $g\in\mathcal{U}$ תחומים תהא ותהיינה ו $g\in\mathcal{U}$

 $\|Av\|_{\mathsf{st}} \leq \|A\|_{\mathsf{st}} \cdot \|v\|_{\mathsf{st}}$ אזי $v \in \mathbb{R}^n$ ויהי $A \in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$ טענה: תהא

 $\mathcal{D}_{q \circ f}\left(a\right) = \mathcal{D}_{q}\left(f\left(a\right)\right) \cdot \mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ וכן $g \circ f \in \mathcal{D}\left(a\right)$

 $.(F(x,y)=0) \iff (y=f(x))$

 $f(x) \in C^k(I_x, I_y)$

טענה: יהי $F'_{x_{n+1}}(a) \neq 0$ וכן F(a) = 0 עבורה $a \in \mathcal{U}$ ותהא ותהא $F \in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי קיימים $f \in C^k(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, I_y)$ וכן $a_{n+1} \in I_y$ וכן $a_i \in I_{x_i}$ מתקיים $a_i \in I_x$ מתקיים עבורם לכל $i \in [n]$

טענה: יהי $F_u'(a)
eq 0$ וכן F(a) = 0 וכן G(a) = 0 ותהא אורה G(a) = 0 עבורה אורה אור תהא אורים תהא ווין F(a) = 0 עבורה אורים תהא ווין F(a) = 0 עבורה אורים תהא ווין פתוחים תהיה ווין פתוחים תהיה ווין פתוחים תהים ווין פתוחים תהיה ווין פתוחים תחוחים תהיה ווין פתוחים תחוחים תהיה ווין

עבורם $(x,y)=0)\Longleftrightarrow (y=f(x))$ מתקיים $(x,y)\in I_x\times I_y$ עבורה לכל $f\in C^1$ (I_x,I_y) ותהא $a_2\in I_y$ ותהא $a_2\in I_y$ אזי $a_1\in I_x$ אזי $f'(x)=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}$ על $f'(x)=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}$ פתוחים $f\in C^1$ עבורה $f\in C^1$ וכן $f\in C^1$ יהיו $f\in C^1$ יהיו $f\in C^1$ פתוחים $f\in C^1$ יהיו $f\in C^1$

עבורם $(F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight))$ מתקיים $(x,y)\in I_{x} imes I_{y}$ עבורה לכל $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}
ight)$ ותהא $a_{2}\in I_{y}$ ומתקיים $a_{1}\in I_{x}$

```
(F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x
ight)
ight) מתקיים (x,y)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}
ight)	imes I_{y} לכל
I_{x_1},\dots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R} יהיו יהיי F'_{x_{n+1}}\left(a
ight)
eq0 וכן F\left(a
ight)=0 וכן G\left(a
ight)=0 יהיו ותהא ותהא F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) יהיו תהא
(x,y)\in (\prod_{i=1}^nI_{x_i})	imes I_y עבורה לכל f\in C^1 עבורה לכל ותהא a_{n+1}\in I_y וכן a_i\in I_{x_i} מתקיים עבורם לכל i\in [n] אזי לכל i\in [n] אזי לכל i\in [n] מתקיים i\in [n] אזי לכל i\in [n] אזי לכל i\in [n] אזי לכל i\in [n] אזי לכל ו
                                                                               \mathcal{D}_{f}\left(a
ight)=\left(F_{x}'\left(a
ight),F_{y}'\left(a
ight)
ight) אזי a\in\mathcal{U} ותהא f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m} יהי יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}
משפט פונקציה סתומה כללי: יהי F(a)=0 וכן \hat{a}\in\mathcal{U} ותהא אזי \hat{a}\in\mathcal{U} ותהא תחום תהא תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m} וכן
קיימת a_{j+n}\in I_{y_j} מתקיים j\in [m] ולכל ווכל מתקיים מתקיים עבורם לכל פתוחים עבורם לכל i\in [n] מתקיים עבורם לכל איימת וולכל וויים מתקיים אורים לכל התחיים עבורם לכל התחיים עבורם לכל וויים מתקיים אורים וויים מתחיים עבורם לכל התחיים עבורם לבים עבורם לכל התחיים עבורם לכל התחיים עבורם לכל התחיים עבורם לבים עבורם לבים עבורם לבים עבורם לבים עב
             F(x,y)=0, \iff (y=f(x)) מתקיים F(x,y)=0, \iff (y=f(x)) עבורה לכל F(x,y)=0, \iff (y=f(x)) מתקיים F(x,y)=0, \iff (x,y)=0, \iff (x,y)=0, \iff (x,y)=0 מסקנה: יהי F(x,y)=0, \iff (y=f(x))=0 ותחום תהא F(x,y)=0, \iff (x,y)=0, \iff 
                                  ותהא a_{j+n}\in I_{y_j} מתקיים j\in [m] ולכל ולכל מתקיים מתקיים לכל פבורם עבורם לכל i\in [n] מתקיים עבורם לכל I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq \mathbb{R}
אזי (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in (\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}})	imes \left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight) אזי f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight)
                                                                                                                                                                                                                 \prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}} על \mathcal{D}_{f}\left(x
ight)=-F_{y}'\left(x,f\left(x
ight)
ight)^{-1}\cdot F_{x}'\left(x,f\left(x
ight)
ight)
 מסקנה: יהי \nabla F(a) \neq 0 אזי משוואת המישור המשיק עבורה F(a) = 0 וכן F(a) = 0 ותהא עבורה ותהא F \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) אזי משוואת המישור המשיק
                                                                                                                                                                                                                                    \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(a) (x_i - a_i) = 0 הינו \{F = 0\}
                                                                                                                                     f^{-1}\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}
ight) הפיכה עבורה f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}
ight) אזי \mathcal{U},\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^{n} הפיכה עבורה
                                                                                                                        f^{-1}\in C^k\left(\mathcal{V},\mathcal{U}
ight) הפיכה עבורה f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathcal{V}
ight) אזי איזי \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n הפיכה עבורה: C^k
של \mathcal{O}\subseteq\mathcal{U} משפט פונקציה הפוכה: יהי \mathcal{O}_f(a) תחום יהי a\in\mathcal{U} ותהא a\in\mathcal{U} ותהא u\in\mathcal{U} של אזי קיימת סביבה שנקציה הפוכה: יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                 \mathcal{O} עבורה f דיפאומורפיזם על a
 f אבורה \mathcal{D}_f(a) הפיכה ותהא \mathcal{D}_f(a) סביבה של a\in\mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תהא עבורה f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)
                                                                                                                                                                                                                                    \mathcal{O} על \mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x
ight)
ight)=\mathcal{D}_{f}\left(x
ight)^{-1} על על
                                                                                                                                                                      טענה: יהיו f:\mathcal{U}	o\mathcal{V} תהא A\subseteq\mathcal{U} תהא תהא \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n יהיו
                                                                                                                                                                                                                                                                                 פתוחה) f(A) פתוחה).
                                                                                                                                                                                                                                                                                    סגורה) (A) סגורה).
                                                                                                                                                                                                                                                           .(א קומפקטית) f(A) קומפקטית).
                                                                                                                                                                                                                                                         .\partial\left(f\left(A
ight)
ight)=f\left(\partial A
ight) איז \partial A\subseteq\mathcal{U} אם •
                                                               uפתוחה. יהי u\subseteq \mathbb{R}^n תחום אזיu\in \mathcal{U}	o \mathbb{R}^n המקיימת לכל u\in \mathcal{U}\subseteq \mathcal{U} פתוחה מתקיים f:\mathcal{U}	o \mathbb{R}^n פתוחה.
\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U} משפט פונקציה פתוחה: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום יהי a\in\mathcal{U} ותהא ותהא a\in\mathcal{U} עבורה a\in\mathcal{U} אזי קיימת סביבה a\in\mathcal{U}
                                                                                                                                                                                                                                                                                                           \mathcal{O} של a עבורה f פתוחה על
וכן g\left(a
ight)=0 המקיימת a\in\mathcal{U} אזי g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight) תהא f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} המקיימת
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  .\nabla f(a) \in \operatorname{span} \{\nabla g_i(a)\}\
בת"ל וכן \{
abla g_i(a)\} וכן \{g(a)=0 המקיימת a\in\mathcal{U} ותהא ותהא g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m) תהא f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) וכן
                                                                    g=0 אזי g=0 אזי של קריטית של sols g=0 אזי א קיצון בקבורה g=0 של של פיצון אזי אזי אזי אזי אזי פיימת סביבה
 כך L\in C^1(\mathcal{U}	imes\mathbb{R}^m,\mathbb{R}) נגדיר g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m) ותהא f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יהי
                                                                                                                                                                                   L(x_1 \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_m) = f(x_1 \dots x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1 \dots x_n)
 מסקנה: יהי a) אזי (a נקודה קריטית של f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m) תהא f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n ותהא
                                                                                                                                                                                                  (L \ )עבורה (a,\lambda) נקודה קריטית של געבורה (b,\lambda) עבורה \lambda \in \mathbb{R}^m
                                                            \operatorname{Lank}(f(a))=\operatorname{Rank}(\mathcal{D}_f(a)) אזי f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m) ותהא a\in\mathcal{U} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יהי יהי
סביבה של \mathcal{O}\subseteq\mathcal{U} אזי קיימת \forall x\in\mathcal{U}.rank (f(x))=k עבורה f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) ותהא ותהא a\in\mathcal{U} אזי קיימת שפט: יהי
 (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) על
g\in C^{p-1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n
ight) אזי קיימת f\left(0
ight)=0 אזי של הדמר: תהא של סביבה קמורה של p\geq 1 יהיp\geq 1 יהי סביבה קמורה של סביבה של סביבה קמורה של סביבה של סביבה קמורה של סביבה של
                                                                                                                                                                                                                                        f\left(x
ight) = \sum_{i=1}^{n} x_{i} g\left(x
ight) וכן g\left(0
ight) = \nabla f\left(0
ight)
a טביבה של סביבה \mathcal{O}\subseteq\mathcal{U} מנוונת אזי קיימת א נקודה קריטית מורס. ותהא f\in C^3\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) מביבה של מורס. יהי
                                          (f\circ g)\left(x
ight)-f\left(a
ight)=\sum_{i=1}^{k}x_{i}^{2}-\sum_{i=k+1}^{n}x_{i}^{2} המקיים g:\mathcal{O}	o\mathbb{R}^{n} המקיים וכן דפיאומורפיזם \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}
```

```
.\operatorname{Vol}\left(P_{a,b}
ight)=0 אזי מנוונת אזי P_{a,b} עבורם a,b\in\mathbb{R}^n הערה: יהיו
  S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}
ight\}
ight)=\sum_{j=1}^{k}f\left(x^{(j)}
ight) Vol(A_{j}) אזי עום רימן: יהיו a,b\in\mathbb{R}^{n} תהא a,b\in\mathbb{R}^{n} תהא
                                                                                            d\left(M
ight)=\sup_{x,y\in M}\left\|x-y
ight\| אזי M\subseteq\mathbb{R}^{n} קוטר קבוצה: תהא
                                              A(\Pi) = \max_{i < i < k} d\left(A_i\right) חלוקה אזי \Pi = \{A_1, \dots, A_k\} ותהא a, b \in \mathbb{R}^n מדד העדינות: יהיו
                                         \int_P f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(\Pi)	o 0} S\left(f,\Pi,x^{(j)}
ight) אינטגרביליות רימן: יהיו a,b\in\mathbb{R}^n ותהא
                                                                           f \in R\left(P
ight) אינטגרבילית רימן אזי f:P 	o \mathbb{R} ותהא a,b \in \mathbb{R}^n יהיו
                                                                                                  P טענה: תהא f \in R(P) אזי חסומה על תיבה תהא
.\overline{S}\left(f,\Pi
ight)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{P_{i}}\left(f
ight) Vol\left(P_{j}
ight) אזי אויף אויף אויף חסומה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה תיבה תהא חסומה ותהא
\underline{S}\left(f,\Pi
ight)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{P_{j}}\left(f
ight) Vol\left(P_{j}
ight) אזי אווקה אזי \left\{A_{1},\ldots,A_{n}
ight\} חסומה ותהא f:P	o\mathbb{R} תיבה תהא תיבה תהא
                                                  x^{(j)} טענה: תהא T חסומה תהא f:P	o\mathbb{R} נקודות מתאימות אזי
                                                                                                                           \underline{S}(f,\Pi) \le S(f,\Pi,\{x^{(i)}\}) \le \overline{S}(f,\Pi)
 \underline{S}(f,\Pi_1) \leq \underline{S}(f,\Pi_2) \leq \overline{S}(f,\Pi_2) \leq \overline{S}(f,\Pi_1) איי חלוקות איי חסומה ותהיינה f:P 	o \mathbb{R} חסומה תיבה תהא P
                                          .\underline{S}(f,\Pi_1) \leq \overline{S}(f,\Pi_2) איזי חלוקות אזי f:P 	o \mathbb{R} מענה: תהא P תיבה תהא P תיבה חסומה ותהיינה
                                                  .ar{I}(f)=\inf_{\mathsf{ndign}}\overline{S}\left(f,\Pi
ight) אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה אזי
                                               I(f)=\sup_{\Pi}S(f,\Pi) אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה אזי
                              \underline{\Sigma}(f,\Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi) מסקנה: תהא P תיבה תהא f:P 	o \mathbb{R} חסומה ותהא מסקנה: תהא
                                             (\underline{I}(f)=\overline{I}(f))\Longleftrightarrow (f\in R(P)) אזי חסומה f:P	o\mathbb{R} תיבה ותהא P תיבה ותהא קריטריון דרבו: תהא
                                                                           \int_{P}f=\underline{I}\left(f
ight)=\overline{I}\left(f
ight) חסומה אזי f\in R\left(P
ight) תיבה ותהא מסקנה: תהא
                                                                                         .\operatorname{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^n\operatorname{Vol}\left(P_{a,b}\right) אזי \lambda>0 ויהי a,b\in\mathbb{R} טענה: יהיו
                                      טענה: יהיו \bigcap_{i=1}^n P_i וכן \bigcap_{i=1}^n P_i חיבה אזי והיו והענה: יהיו לכל לכל לכל לכל לכל i \neq j מתקיים ווכן ויהיו ויהיו ויהיו ויהיו איי
                                                                                                                                        \operatorname{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Vol}\left(P_i\right)
                                                         .\operatorname{Vol}(P) \leq \sum_{i=1}^n \operatorname{Vol}(P_i) תיבה אזי P \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i תיבות ותהא ותהא P_1 \dots P_n
                                                                                                                      . עיבה P_1 \cap P_2 אזי P_1, P_2 תיבה P_1, P_2 יהיו
                                                                                                                    .Vol (P \setminus int(P)) = 0 תיבה אזי P תיבה: תהא
                    \sum_{i=0}^\infty {
m Vol}\,(P_i)<arepsilon וכן E\subseteq igcup_{i=0}^\infty P_i המקיימת \{P_i\}_{i=0}^\infty קיימות תיבות arepsilon>0 קבוצה זניחה:
                                                                                                                            \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid זניחה E\} :
                                                                                                         \{a\}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי a\in\mathbb{R}^{n} יהי 'arnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) טענה:
                                                                                                      igcup_{i=0}^\infty E_i \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) אניחות אזי \left\{E_i
ight\}_{i=0}^\infty טענה: תהיינה
\sum_{i=0}^n \mathrm{Vol}\left(P_i
ight) < arepsilon וכן E \subseteq igcup_{i=0}^n \mathrm{int}\left(P_i
ight) המקיימת \left\{P_i
ight\}_{i=0}^n קיימות אזי לכל arepsilon > 0 קיימות תיבות בות E \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight)
                                                                                                   A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי A\subseteq E ותהא E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) טענה: תהא
                                                                               P \notin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) עענה: P \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight), תהא P \subset \mathbb{R}^n תיבה לא מנוונת אזי
                                                                                   M 
otin \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n
ight) עבורה קיימת נקודה פנימית אזי M \subseteq \mathbb{R}^n טענה: תהא
                                                                                                                   \mathrm{int}\left(M
ight)=arnothing אזי M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) מסקנה: תהא
                                                                                 \Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}
ight) אזי f\in C\left(P,\mathbb{R}
ight) תיבה תהא P\subseteq\mathbb{R}^n אזי אזי
                                                                             \Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}
ight) אזי f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי
טענה: תהא e_i\in\mathbb{N} עבור e_i\in\mathbb{N} עבור אורך צלע אורך אורך \{C_i\}_{i=0}^\infty מתקיים פתוחה אזי קיימות קוביות \{C_i\}_{i=0}^\infty
                                                                                                                         \mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i וכן int (P_i) \cap \operatorname{int}(P_j) = \emptyset
                                                                                                                   מסקנה: \mathbb{S}^{n-1} \in \mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right), קבוצת קנטור זניחה.
```

 $A = \lim_{\delta o 0^+} \omega\left(f, B_\delta\left(a
ight) \cap A
ight)$ אזי $A \in A$ אזי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תנודה של פונקציה בנקודה: תהא

 $\left\{\prod_{i=1}^n\left[t_i^{m_i},t_i^{m_i+1}
ight]\mid orall i\in[n].m_i\in[\ell_i-1]
ight\}$ אזי ווקה של $\left\{a_i.b_i
ight\}$ חלוקה של ווקה $\left\{t_i^0,\dots,t_i^{\ell_i}
ight\}$ תהיינה $i\in[n]$ תהיינה וואיינה לכל ווקה של ווקה של

 $P_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid orall j\in[n]\,.a_j\leq x_j\leq b_j\}$ אזי $a,b\in\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה: יהיו

 $V\left(P
ight)=\mathrm{Vol}\left(P
ight)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_{i}-a_{i}
ight)$ אזי $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי מידה/נפח של תיבה: יהיו

. $\operatorname{Vol}(P) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Vol}(A_i)$ אזי P חלוקה של $\{A_1, \dots, A_k\}$ ותהא $a,b \in \mathbb{R}^n$ טענה: יהיו

 $.P_{a,b}$ אזי $\exists i \in [n] \,.a_i = b_i$ עבורם $a,b \in \mathbb{R}^n$ אזי היי

```
\forall x \in K. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \omega (f, B_{\delta}(x) \cap K) < \omega_0 + \varepsilon
מתקיים \psi מתקיים אזי נאמר בירה E\subseteq A ויהי פרידיקט אזי נאמר כי \psi'' מתקיים כמעט על כל אם פרידיקט A\subseteq \mathbb{R}^n אויהי פרידיקט אזי נאמר כי
                               B_{f,arepsilon}=\{x\in P\mid\omega\left(f,x
ight)\geqarepsilon\} אזי arepsilon>0 אזי f:P	o\mathbb{R} תיבה סגורה תהא P\subseteq\mathbb{R}^n
                                                           . תובה B_{f,arepsilon} אזי arepsilon>0 אזי אחסומה למה: תהא תובה סגורה תיבה סגורה תהא למה:
                                                          למה: תהא חלוקה ויהי k\in\mathbb{N}_+ חיוהי חלוקה תהא חסומה הא חסומה הא אזי חלוקה ויהי אזי תיבה סגורה תהא למה:
B_{f,\frac{1}{k}} כיסוי של \left\{A\in\Pi\mid\left(A\cap B_{f,\frac{1}{k}}
eqarnothing
ight)\wedge\left(\omega\left(f,A
ight)\geq\frac{1}{2k}
ight)
ight\} קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא P\subseteq\mathbb{R}^n תיבה סגורה ותהא f:P	o\mathbb{R} חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל
                                                                                                                                                                         (f \in R(P)) \iff (P)
                                                                                                                  . אניחה \partial E אניחה עבורה E \subseteq \mathbb{R}^n אניחה לבוצה מדידת
                                                                                                                                                      טענה: תהיינה E_1,E_2\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                                                                            . סגורה \partial E_1 \bullet
                                                                                                       \partial (E_1 \backslash E_2), \partial (E_1 \cup E_2), \partial (E_1 \cap E_2) \subseteq \partial E_1 \cup \partial E_2 \bullet
                                                                                                                                          J(\mathbb{R}^n) = \{E \subset \mathbb{R}^n \mid ז'ורדו E\}: סימון:
                                                                                                               A \backslash B, A \cup B, A \cap B \in J מסקנה: תהיינה A, B \in J אזי מסקנה:
                                                            \chi_A\left(x
ight)=\left\{egin{array}{ll} 1 & x\in A \\ 0 & x
otin \end{array}
ight.בך \chi_A:\mathbb{R}^n	o\{0,1\} אזי A\subseteq\mathbb{R}^n אזי אפיון/אינדיקטור: תהא
                                                                                                  .\chi_A\in C\left(\mathbb{R}^n\backslash A
ight) וכן \chi_A\in C\left(\mathrm{int}\left(A
ight)
ight) אזי A\subseteq\mathbb{R}^n וכן
אזי f\cdot\chi_A\in R(P) אינטגרביליות רימן: f:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} עבורה תהא A\subseteq P תיבה סגורה תהא P\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                                                                           \int_A f = \int_P f \cdot \chi_A
                               f:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} ותהא A\subseteq P_1,P_2 ותהא A\subseteq P_1,P_2 מענה: תהא A\subseteq \mathbb{R}^n ותהא חסומה תהיינה
                                                                                                                         (f \cdot \chi_A \in R(P_1)) \iff (f \cdot \chi_A \in R(P_2)) \bullet
                                                                                                                                                      \int_{P_1} f \cdot \chi_A = \int_{P_2} f \cdot \chi_A \bullet
                                                                                          V\left(A
ight)=\mathrm{Vol}\left(A
ight)=\int_{A}\mathrm{d}x אזי A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) מידה/נפח של תיבה: תהא
                                                                                                                        משפט: תהא f,g\in R\left(A
ight) ותהיינה A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי
                                                                          \int_{A}\left(af+bg\right)=a\int_{A}f+b\int_{A}gוכן af+bg\in R\left(A\right) אזי a,b\in\mathbb{R}יהיו •
                                                                                                                                                  \int_A f \geq 0 גניח כי f \geq 0 אזי f \geq 0
                                                                                                                                            .\int_A f \geq \int_A g אזי f \geq g נניח כי
                                                                                                   m {
m Vol}\,(A) \leq \int_A f \leq M {
m Vol}\,(A) אזי m \leq f \leq M נניח כי
                                              f\in R\left(A\cup B
ight) וכן f\in R\left(A\cap B
ight) אזי וכך f\in R\left(A\cap B
ight) ותהא ותהא A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight)
                                                                   \int_{A\cup B}f=\int_{A}f+\int_{B}f אזי \mathrm{Vol}\left(A\cap B
ight)=0 עבורן A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) מסקנה: תהיינה
                                              \exists c \in A. \int_{A} f = f\left(c\right) \mathrm{Vol}\left(A\right) אזי f \in C\left(A, \mathbb{R}\right) תחום ותהא A \in J\left(\mathbb{R}^{n}\right) יהי יהי
                                                                            |\int_A f| \leq \int_A |f| וכך |f| \in R(A) אזי f \in R(A) ויהי A \in J(\mathbb{R}^n) טענה: תהא
                                                                          \int_A f = \int_A g אזי A \in J\left(\mathbb{R}^n
ight) כמעט על כל f,g \in R\left(A
ight) ותהיינה A \in J\left(\mathbb{R}^n
ight)
                                                                                            .\int_{\mathrm{int}(A)}f=\int_{A}f=\int_{\overline{A}}f איזי A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) משפט: תהא .\bigcup_{i=1}^{k}A_{i},igcap_{i=1}^{k}A_{i}\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) איזי A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) טענה: תהינה
           .\operatorname{Vol}\left(igcup_{i=1}^k A_i
ight) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Vol}\left(A_i
ight) אזי \operatorname{Vol}\left(A_i\cap A_j
ight) = 0 מסקנה: תהיינה A_1\dots A_k\in J\left(\mathbb{R}^n
ight) עבורן לכל
                                                                           A \in J(\mathbb{R}^n) אזי A \in \mathbb{R}^n ותהא A \subseteq \mathbb{R}^n ותהא A \subseteq \mathbb{R}^n טענה: תהא
                                                                                                  A \subseteq \operatorname{Vol}(A) = \operatorname{Vol}(A+a) אזי A \subseteq \mathbb{R}^n ותהא A \subseteq \mathbb{R}^n מסקנה: תהא

u = 	ext{Vol} איז 
u : J\left([0,1]^n\right) = 1 איז עבורה 
u : J\left(\mathbb{R}^n\right) 	o \mathbb{R}_{>0} איז איז איז איז איז אינווריאנטית פונקציית נפח: תהא
                                                                       . חסומה T\left(A
ight) אזי חסומה אזי A\subseteq\mathbb{R}^n אורתוגונלית ותהא אורתוגונלית אזי אורתוגונלית חסומה אזי אורתוגונלית
                                                                      T\left(\partial A
ight)=\partial\left(T\left(A
ight)
ight) אזי אורתוגונלית ותהא T\in\operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי מסקנה: תהא
                                               . אניחה וחסומה אזי T\left(E
ight) אניחה וחסומה איי אניחה ותהא אורתוגונלית ותהא אורתוגונלית ותהא אורתוגונלית ותהא אורתוגונלית ותהא
                              .\operatorname{Vol}\left(T\left(A\right)
ight)=\operatorname{Vol}\left(A\right) וכן T\left(A
ight)\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) איז A\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אורתוגונלית ותהא T\in\operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)
```

 $\omega(f,a)=0$ ליש ($a\in A$ מענה: תהא $a\in A$ תהא $a\in A$ ותהא $a\in A$ אזי $a\in A$ תהא $a\in A$

למה של קנטור: תהא $K \in K.$ קומפקטית יהי $K \in K.$ ותהא א $K \in K.$ המקיימת $K \in K.$ קומפקטית יהי $K \in K.$

```
f\in R\left(A
ight) ותהא A=\{(x,y)\in B	imes \mathbb{R}\mid arphi_{1}\left(x
ight)\leq y\leq arphi_{2}\left(x
ight)\} תהא arphi_{1},arphi_{2}:B	o \mathbb{R} ותהא B\subseteq \mathbb{R}^{n-1} מסקנה: תהא
                                                                                                                                           .\int_{A}f=\int_{B}\int_{arphi_{1}\left( x
ight) }^{-}f\left( x,y
ight) \mathrm{d}y\mathrm{d}x אזי
y\in P_n כמעט לכל A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}	imes\{y\}
ight)\in J\left(\mathbb{R}^{n-1}
ight) תיבה אזי A\subseteq\prod_{i=1}^nP_i כמעט לכל A\in J\left(\mathbb{R}^n
ight) מסקנה: תהא
                                                                                                                                \operatorname{Vol}(A) = \int_{P_n} \operatorname{Vol}\left(A \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\}\right)\right) \mathrm{d}y
                                                                                                                                S\left(D
ight)=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y אזי D\subseteq\mathbb{R}^{2} שטח: תהא
                                                                    m\left(D
ight)=\iint_{D}
ho\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y צפיפות אזי 
ho:\mathbb{R}^{2}	o\mathbb{R}_{\geq0} ותהא ותהא D\subseteq\mathbb{R}^{2}
                                                                                                       מומנט מסה: תהא 
ho:\mathbb{R}^2	o\mathbb{R}_{\geq 0} ותהא ותהא מסה: תהא מסה:
                                                                                                   M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}y\cdot\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y :x מומנט מסה לפי ציר
                                                                                                   M_{x}\left(D
ight)=\iint_{D}x\cdot
ho\left(x,y
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y:ט מומנט מסה לפי ציר ייך פי
                                                                                                                      MD^{x} F (-,s) מרכז המסה: תהא D\subseteq \mathbb{R}^2 אזי D\subseteq \mathbb{R}^2 אזי E\subseteq \mathbb{R}^3 מרכז המסה: תהא E\subseteq \mathbb{R}^3 אזי E\subseteq \mathbb{R}^3 אזי
                                                            M\left(E
ight)=\iiint_{E}
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z צפיפות אזי 
ho:\mathbb{R}^{3}	o\mathbb{R}_{\geq0} ותהא E\subseteq\mathbb{R}^{3} ותהא
                                                                                                       מומנט מסה: תהא E\subseteq\mathbb{R}^3 ותהא מומנט מסה: תהא ביפות אזי
                                                                        M_{xy}\left(E
ight)=\iiint_{E}z\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z:\left\{ z=0
ight\} מומנט מסה לפי המישור
                                                                        M_{xz}\left(E
ight)=\iiint_{E}y\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z:\left\{ y=0
ight\} מומנט מסה לפי המישור
                                                                        M_{yz}\left(E
ight)=\iiint_{E}x\cdot
ho\left(x,y,z
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z:\left\{ x=0
ight\} מומנט מסה לפי המישור
                                                            M_{yz}(E) . M_{yz}(E) . M_{xz}(E) . M_{xz}(E) . M_{xy}(E) . אזי D\subseteq\mathbb{R}^2 אזי D\subseteq\mathbb{R}^2 . Par (v_1\dots v_n)=\{\sum_{i=1}^n lpha_i v_i\mid orall i\in [n]. lpha_i\in[0,1]\} אזי v_1\dots v_n\in\mathbb{R}^n . Par (v_1\dots v_n)
                                                                        .\operatorname{Vol}\left(\operatorname{Par}\left(v_1\dots v_n
ight)
ight) = \left|\det\left(egin{array}{c} -v_1 & - \ dots \ -v_n & - \end{array}
ight)
ight| איי מתקיים איי מתקיים v_1\dots v_n\in\mathbb{R}^n טענה: יהיו
                                                                       \mathcal{L} = \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                      טענה: תהיינה B \subset A פתוחות וחסומות יהי \varphi: A \to B איי פתוחות ותהא A, B \subset \mathbb{R}^n איי
                                                                                                                                               אניחה). \varphi\left( E
ight)  זניחה). •
                                                                              .((\operatorname{Vol}(\varphi(E)) = 0) \land (\overline{\varphi(E)} \subseteq B)) \longleftarrow ((\operatorname{Vol}(E) = 0) \land (\overline{E} \subseteq A)) \bullet
                                                                                                   \varphi(E) \wedge (\overline{\varphi(E)} \subseteq B) \Leftrightarrow ((\overline{E} \subseteq A)) \bullet (\overline{E} \subseteq A)) \bullet
   (f\circ\varphi)\det\mathcal{D}_{arphi}\in R(A) אזי f\in R(B) מסקנה: תהיינה G:A	o B דיפאומורפיזם ותהא G:A	o B איי
טענה: תהיינה A,B\subseteq\mathbb{R} פתוחות וחסומות יהי G:A	o B דיפאומורפיזם ותהא A,B\subseteq\mathbb{R} אזי ובפרט ובפרט
                                                                                                                                                          \int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) |\varphi'| dt
דיפאומורפיזם עבורו קיימת \psi:\mathbb{R}	o\mathbb{R} פתוחות המיינה \phi:A	o B דיפאומורפיזם אלמנטרי: תהיינה A,B\subseteq\mathbb{R} פתוחות וחסומות אזי
                                                                                                                                                 \varphi(x) = (x_1, \ldots, \psi(x_i), \ldots x_n)
                                 טענה: תהיינה A,B\subseteq\mathbb{R}^n פתוחות וחסומות יהי \varphi:A	o B יהי פתוחות פיזם אלמנטרי ותהא
                                                                                                                                             \int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) \left| \det \mathcal{D}_{\varphi}(t) \right| dt
טענה: תהיינה אלמנטריים ותהא וחסומות יהיו \psi:A	o B ,\varphi:B	o C יהיו וחסומות וחסומות אלמנטריים אלמנטריים A,B,C\subseteq\mathbb{R}^n טענה:
                                                                                                                                \int_{C} f = \int_{A} f\left(\left(\varphi \circ \psi\right)(t)\right) \left| \det \mathcal{D}_{\varphi \circ \psi}(t) \right| dt
טענה: תהיינה A,B\subseteq\mathbb{R}^n אזי קיימת A,B\subseteq\mathbb{R}^n סביבה של g:A\to B סביבה של סענה
                                                                                        arphiעל arphi=\psi_1\circ\ldots\circ\psi_m על עבורם אלמנטריים אלמנטריים על דיפאומורפיזים אלמנטריים עבורם
                                               משפט: תהיינה A,B\subseteq\mathbb{R}^n פתוחות וחסומות יהי arphi:A	o B דיפאומורפיזס ותהא A,B\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                                             \int_{B} f = \int_{A} f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_{\varphi}(t)| dt
\int_{arphi(E)}f=\int_{E}f\left(arphi\left(t
ight)
ight)\left|\det\mathcal{D}_{arphi}\left(t
ight)
ight|ובפרט לו ובפרט ובפרט ולפרט ובפרט וליטוו וליטווי ובפרט וובפרט
```

משפט: תהיינה $A \setminus E, S \setminus B$ פתוחות עבורן $A \setminus E, S \setminus B$ אזיינה $A \subseteq B$ אניחות וכן משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות ורך משפט: על $A \setminus E, S \setminus B$ פתוחות וחסומות בעל דיפרנציאל חסום על $A \setminus E$ ותהא $A \setminus E$ כמו כן $A \setminus E$ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על $A \setminus E$ ותהא $A \setminus E$ כמו כן $A \setminus E$ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על $A \setminus E$ ותהא $A \setminus E$ כמו כן $A \setminus E$ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על

משפט פוביני: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^n$, $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבות ותהא עבורה $f\in R$ עבורה $P\subseteq\mathbb{R}^n$ קיים אזי

 $\iint_{P \times Q} f = \int_P \int_Q f\left(x,y\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_Q \int_P f\left(x,y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ קיימים ובפרט היימים $\int_P \int_Q f\left(x,y\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$, $\int_Q \int_P f\left(x,y\right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ מסקנה: תהיינה $\int_Q f\left(a,y\right) \mathrm{d}y$ תיבות ותהא $Q \subseteq \mathbb{R}^m$, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, $Q \subseteq \mathbb{R}^m$

```
.\int_{B}f=\int_{A\setminus E}f\left( arphi\left( t
ight) 
ight) \left| \det\mathcal{D}_{arphi}\left( t
ight) 
ight| \mathrm{d}t ובפרט
זניחות עבורן S \subseteq B ,E \subseteq A חסום תהיינה \varphi:A \to B זניחות וחסומות תהא מסקנה: תהיינה A,B \subseteq \mathbb{R}^n
(f\circ\varphi)|\det\mathcal{D}_{arphi}|\in R(A) אזי f\in R(S) ותהא אורפיזם על \varphi כמו כן \varphi כמו כן \varphi כמו כן \varphi כמו כן \varphi בתוחות וכן \varphi
                                                                                                                                     \int_{B}f=\int_{A}f\left( arphi\left( t
ight) 
ight) \left| \det\mathcal{D}_{arphi}\left( t
ight) 
ight| \mathrm{d}t ובפרט
                y=
ho\sin{(\phi)} אזי x=
ho\cos{(\phi)} עבורן (
ho,\phi)\in(0,\infty]	imes[0,2\pi] אזי (x,y)\in\mathbb{R}^2 וכן
                                                            |\det \mathcal{D}_{\omega}\left(t
ight)|=
ho אזי לפולריות אוקלידיות מקואורדינטות מעבר מקואורדינטות arphi:\mathbb{R}^2	o\mathbb{R}^2 מעבר
             y=
ho\sin{(\phi)} וכן x=
ho\cos{(\phi)} עבורן (
ho,\phi,\iota)\in(0,\infty]	imes[0,2\pi]	imes\{z\} אזי (x,y,z)\in\mathbb{R}^2 וכן
                                                            |\det \mathcal{D}_{\omega}\left(t
ight)|=
ho מעבר מקואורדינטות אוקלידיות אזיarphi:\mathbb{R}^{2}	o\mathbb{R}^{2} מעבר מקואורדינטות מענה:
                     וכן x=
ho\sin(	heta)\cos(\phi) עבורן (
ho,\phi,	heta)\in(0,\infty]	imes[0,2\pi]	imes[0,2\pi]	imes[0,\pi] אזי (x,y,z)\in\mathbb{R}^2 עבורן
                                                                                                                                           z = \rho \cos(\theta) וכן y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)
                                              |\det \mathcal{D}_{\omega}\left(t
ight)|=
ho^{2}\sin\left(	heta
ight) אזי לכדוריות אוקלידיות מעבר מקואורדינטות מעבר arphi:\mathbb{R}^{2}	o\mathbb{R}^{2} מעבר
                            .Vol\left(E
ight)=2\pi\iint_{S}
ho\mathrm{d}
ho\mathrm{d}z אזי אוי איז בקואורדינטות ענה: תהא S\subseteq\mathbb{R}^{2} חתהא איז סיבוב S סיבוב S סיבוב סיבוב איר פון זיין איזי
                                            מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה S סביב E\subseteq\mathbb{R}^3 תהא f\leq g עבורן f,g:[a,b]	o\mathbb{R} סביב ציר אזי
                                                                                                                                             .Vol (E) = \pi \int_{a}^{b} (g^{2}(x) - f^{2}(x)) dx
\mathrm{Vol}\,(E)=2\pi R_c\cdot\mathrm{Vol}\,(S) יהי S\subseteq\mathbb{R}^2 יהי S\subseteq\mathbb{R}^2 מרכז המסה של E\subseteq\mathbb{R}^3 ותהא E\subseteq\mathbb{R}^3 משפט פאפוט: תהא
                                                                                                                                                                  .c באשר רדיוס סיבוב R_c
                                             \bigcup_{k=1}^\infty E_k = E איי E \subseteq \mathbb{R}^n איי ז'ורדן עולה עבורה סדרת קבוצות סדרת איי איי איי איי איי מיצוי E \subseteq \mathbb{R}^n מיצוי איורדן: תהא
                                                        \lim_{k	o\infty}\operatorname{Vol}\left(E_{k}
ight)=\operatorname{Vol}\left(E
ight) אזי E איזי ז'ורדן של מיצוי ז'ורדן ויהי ויהי E\in J\left(\mathbb{R}^{n}
ight)
                                   \lim_{k	o\infty}\int_{E_k}f=\int_Ef אזי f\in R\left(E
ight) מיצוי ז'ורדן של E\in J\left(\mathbb{R}^n
ight) אזי E\in J\left(\mathbb{R}^n
ight) מסקנה: תהא
וכן orall k\in\mathbb{N}.f\in R\left(E_k
ight) מיצוי ז'ורדן של E מתקיים E ותהא אינטגרל לא אמיתי: תהא E\subseteq\mathbb{R}^n ותהא אינטגרל לא אמיתי: תהא
                                                                                                                  \int_E f = \lim_{k 	o \infty} \int_{E_k} f קיים ושווה אזי \lim_{k 	o \infty} \int_{E_k} f
וכן orall k\in\mathbb{N}.f\in R\left(E_k
ight) אי של E\subseteq\mathbb{R}^n של ז'ורדן אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן E\subseteq\mathbb{R}^n של E\subseteq\mathbb{R}^n וכן אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן
                                                                                               מתכנס. \int_E f פיים אזי \lim_{k	o\infty}\int_{E_k} f מתכנס. \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2}\mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}} אזי n\in\mathbb{N}_+ אזי מסקנה: יהי n\in\mathbb{N}_+
                                      משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא E\subseteq\mathbb{R}^n ותהיינה f,g:E	o\mathbb{R} עבורן
                                          . מתכנסים \int_{E}f,\int_{E}\left|f\right| מתכנסים \forall A\in\mathcal{P}\left(E\right)\cap J\left(\mathbb{R}^{n}\right).\left(f\in R\left(A\right)\right)\Longleftrightarrow\left(g\in R\left(A\right)\right)
                                                                           (מסקנה: תהא E\subseteq \mathbb{R}^n מתכנס) מסקנה: תהא E\subseteq \mathbb{R}^n מתכנס) מסקנה: תהא
                                                             . orall arepsilon > 0. orall A \subseteq E. \left| \int_A f \right| > rac{1}{2} \int_E |f| - arepsilon אזי f \in R\left( E 
ight) ותהא E \in J\left( \mathbb{R}^n 
ight)
\int_E |f|משפט: תהא f:E	o\mathbb{R} מתכנס) בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות אניחה אזי ז'ורדן ותהא
                                     \int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g מתכנסים אזי \int_E f, \int_E g עבורן f,g:E	o \mathbb{R} ותהיינה E\subseteq \mathbb{R}^n מענה: תהא
                                                                                                                          . פתוחה E \subseteq \mathbb{R}^n מיצוי ז'ורדן E \subseteq \mathbb{R}^n הערה: תהא
משפטית לכל E\subseteq B א'ורדן לכל עבורה לכל קים ותהא א דיפאומורפיזם ותהא f:B	o \mathbb{R} איורדן וקומפקטית איורדן יקומפקטית
                                                                               \int_{B}f=\int_{A}f\left( arphi\left( t
ight) 
ight) |\det\mathcal{D}_{arphi}\left( t
ight) | מתקיים f\in R\left( E
ight) מתקיים לכן אזי f\in R\left( E
ight)
                                                                                                                  \Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx אזי איז אמא: יהי יהי t > 0 אזי גאמא:
                                                                                                                                        \Gamma(n)=(n-1)! אזי n\in\mathbb{N}_+ טענה: יהי
                                                                                                                                                   טענה: יהי t>0 אזי \Gamma(t) מתכנס.
                                                                                             B(t,s) = \int_0^\infty x^{t-1} (1-x)^{s-1} dx אזי א איי הייו פונקציית בטא: יהיו
                                                                                                                                          טענה: יהיו B\left(t,s
ight) אזי t,s>0 מתכנס.
                                \forall x \in [a,b] \ . f\left(x,t_n
ight) \xrightarrow{u} f\left(x,\ell
ight) אזי ותהא t_n 	o \ell עבורה עבורה t_n \in [c,d]^{\mathbb{N}} ותהא ותהא ותהא ותהא
                                                                                                 \int_{a}^{b}f\left(x,t
ight)\mathrm{d}x\in C\left(\left[c,d
ight]
ight) אזי f\in C\left(\left[a,b
ight]	imes\left[c,d
ight]
ight)
                                        וכן \int_a^b f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\in C^1\left([c,d]
ight) אזי איז \frac{\partial f}{\partial t}\in C\left([a,b]	imes[c,d]
ight) וכן f\in C\left([a,b]	imes[c,d]
ight)
                                                                                                                                             \frac{d}{dt} \left( \int_a^b f(x,t) \, \mathrm{d}x \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} (x,t) \, \mathrm{d}x 
                       משפט: תהא \alpha, \beta \in C^1\left(\left[c,d\right],\left[a,b\right]\right) ותהיינה \frac{\partial f}{\partial t} \in C\left(\left[a,b\right] \times \left[c,d\right]\right) אזי מתקיים \frac{\partial f}{\partial t} \in C\left(\left[a,b\right] \times \left[c,d\right]\right) אזי מתקיים \frac{d}{dt}\left(\int_{lpha(t)}^{eta(t)} f\left(x,t\right) \mathrm{d}x\right) = f\left(eta\left(t\right),t\right) eta'\left(t\right) - f\left(lpha\left(t\right),t\right) lpha'\left(t\right) + \int_{lpha(t)}^{eta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\left(x,t\right) \mathrm{d}x
```

```
.B\left(t,s
ight)=rac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)} אזי t,s>0 מסקנה: יהיו t,s>0 אזי איי t,s>0 משפט: יהי n\in\mathbb{N}_{+} אזי n\in\mathbb{N}_{+} משפט: יהי
                                                                                                   \Delta_n=\{x\in\mathbb{R}^n\mid (orall i\in[n].x_i\geq 0)\land (\sum_{i=1}^nx_i\stackrel{?}{\leq}1)^{\frac{r}{2}}\}ייהי n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} סימפלקט: יהי n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} א איי n\in\mathbb{N} א n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} א n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} א n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} א n\in\mathbb{N} א n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} א n\in\mathbb{N} א n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N} איי n\in\mathbb{N
                   \int \cdots \int_{\substack{x_1,\dots x_n \geq 0 \\ \sum x^{\gamma_i} < 1}} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1}\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \gamma_i} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{p_i}{\gamma_i}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\gamma_i}\right)} איז \gamma_1 \dots \gamma_n > 0 ויהיו p_1 \dots p_n > 0 מסקנה: יהיו
                                                                                                                                                                               טענה: יהיו p_1 \dots p_n > 0 רציפה כמעט תמיד אזי \psi: [0,1] 	o \mathbb{R} ותהא
                                                                                                                            \int \dots \int_{\Delta_n} \psi(x_1 \dots x_n) \left( \prod_{i=1}^n x_i^{p_i - 1} \right) dx_1 \dots dx_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n p_i)} \int_0^1 \psi(u) u^{(\sum p_i) - 1} du
עבורה לכל x\in\mathcal{M} פתוחה וכן קיימת סביבה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n עבורה לכל x\in\mathcal{M} קיימת x\in\mathcal{M} פתוחה וכן קיימת סביבה x\in\mathcal{M} של x\in\mathcal{M}
                                                                                                                                   עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. \Gamma_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{O} עבורה f \in C^m\left(G,\mathbb{R}^{n-k}
ight)
יריעה חלקה k־מימדית: קבוצה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n עבורה לכל x\in\mathcal{M} קיימת x\in\mathcal{M} פתוחה וכן קיימת סביבה x של x\in\mathcal{M} וכן קיימת
                                                                                                                                   . עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות עד ר\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O} עבורה f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}
ight)
                                                                                                                                        C^{\omega}\left(A,B
ight)=\{f:A	o B\mid סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי לf\} אנליטית קבוצות היינה
יריעה אנליטית x־מימדית: קבוצה M\subseteq \mathbb{R}^n עבורה לכל x\in M פתוחה וכן קיימת סביבה x של x\in M וכן קיימת x\in M וכן קיימת
                                                                                              עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות עבורה \Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O} עד כדי פרמוטציה אנליטית אנליטית אנליטית עבורה רf:G\to\mathbb{R}^{n-k}
                                                                                                                                                                                                                                                              עקומה: יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n שהינה חד־מימדית.
                                                                                                                                                                                                                                                                  . שטיח: יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n שהינה דו־מימדית \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                                     . מימדית n-1 שהינה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מימדית: יריעה
                                                                                                                                                                                                                                                                   . טענה: \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n הינה היפר־משפט חלק.
                                                                                                                                                                                                                                              הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.
יריעה לכל \mathcal{M}\cap\mathcal{U}_{lpha} אזי (\mathcal{M} יריעה)\iff(קיימות ל\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_{lpha} פתוחות עבורן פתוחות לכל אזי (\mathcal{M} יריעה)
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           .(\alpha \in \Lambda)
                                                                                                  יריעה), אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (בורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} יריעה) קיימת סביבה x \in \mathcal{M} יריעה), יריעה אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (\mathcal{M} \cap \mathcal{U}
                              עבורה r\in C^m(G,\mathbb{R}^n) פתוחה אזי G\subseteq \mathbb{R}^k אממדית ותהא הנאה כירעה T^mיריעה M\subseteq \mathbb{R}^n עבורה עבורה איזי
            \operatorname{Lank}\left(\mathcal{D}_{r}\left(x
ight)
ight)=k מתקיים x\in G מתקיים לכל עבורה לכל עבורה אזי פרמטריזציה אזי פרמטריזציה אזי פרמטריזציה אזי פרמטריזציה מתקיים אזי פרמטריזציה פרמטריזציה אזי פרמטריזציה פרמטריזציה אזי פרמטריזציה פרמטריזציה פרמטריזציה אזי פרמטריזציה פרמטריז פרמטריזציה פרמטריז פרמטריזציה פרמטריזציה פרמטריז פרמטריים פרמטריז פ
                                                                                             f^{-1}\in C\left(B,A
ight) הפיכה עבורה f\in C\left(A,B
ight) אזי אזי B\subseteq\mathbb{R}^{m} ותהא A\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                                     . פרמטריזציה שהינה הומאומורפיזם r:G 	o A שהינה רגולרית אזי פרמטריזציה ותהא מובה: תהא ותהא ותהא A \subseteq \mathbb{R}^n שהינה הומאומורפיזם.
וכן קיימות \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha עבורן ביחס ל־\mathcal{M} עבורן אזי (קיימות ליימות יריעה)\Longleftrightarrow(קיימות יריעה) אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי (משפט: תהא
                                                                       \mathcal{U}_{lpha}\left(G_{lpha}
ight)=\mathcal{U}_{lpha} עבורן r_{lpha}\subseteq C^{m}\left(G_{lpha},\mathbb{R}^{n}
ight) טובות טובות פרמטריזציות פרמטריזציות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות \left\{G_{lpha}\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{k}
ight)
                                           . בעלת פרמטריזציה טובה) בענה: \mathcal{M}\cap\mathcal{U} אזי \mathcal{M}\in\mathcal{M} אזי (\mathcal{M} יריעה) אזי (לכל \mathcal{M}\in\mathcal{M} קיימת סביבה \mathcal{M} עבורה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי (מענה: תהא
(f_1\dots f_{n-k})(x)=0 המקיימת x\in\mathcal{U} עבורה לכל עבורה אזי \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                             מתקיים כי \{\nabla f_i(x)\} בת"ל.
עבורו x\in\mathcal{U} פערכת משוואות רגולרית)\Longleftrightarrow(לכל שבורית) מענה: תהא ותהא f_1\dots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} אזי f_1\dots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}
                                                                                                                                                                                             . (rank \left(\mathcal{D}_{(f_1\dots f_{n-k})}\left(x
ight)
ight)=n-k מתקיים \left(f_1\dots f_{n-k}
ight)\left(x
ight)=0
                                               רית משוואות הגולרית: תהא מערכת משוואות ותהא הצגה מימדית ותהא הצגה משוואות רגולרית: תהא הצגה משוואות רגולרית: תהא הצגה מימדית ותהא
                                                                                                                                                                                                                          \{(f_1\dots f_{n-k})=0\}=\mathcal{M} עבורה \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                             . בעלת הצגה סתומה רגולרית). בעלת הצגה \mathcal{M}\cap\mathcal{U} אזי (לכל \mathcal{M}\in\mathcal{M}) קיימת סביבה x\in\mathcal{M} אזי (\mathcal{M}יריעה) אזי (לכל \mathcal{M}) אזי (\mathcal{M}יריעה)
                                                                                                                                                                        \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid rac{x^2}{a^2}+rac{y^2}{b^2}+rac{z^2}{c^2}=1\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} יהיו הינו a,b,c\in\mathbb{R} טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                                                                                                                                  -\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid rac{x^2}{a^2}+rac{y^2}{b^2}-rac{z^2}{c^2}=1
ight\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו
                                                                                                                                             . טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                                                                                                                              \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid rac{x^2}{a^2}+rac{y^2}{b^2}-rac{z^2}{c^2}=-1\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} אזי הינורירעתי: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
```

 $-\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid rac{x^2}{a^2}+rac{y^2}{b^2}=rac{z^2}{c^2}
ight\}$ אזי $a,b,c\in\mathbb{R}$ קונוס: יהיו

```
למה: טבעת מוביוס אינו משטח קו־אוריינטבילי.
                                                                                                     טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} יריעה דו־מימדית.
                                                            טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M} אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.
                                                                          . טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.
                                                                                                       a	imes b=\left(egin{array}{c} a_2b_3-a_3b_2\ a_3b_1-a_1b_3\ a_1b_2-a_1b_1 \end{array}
ight) אזי a,b\in\mathbb{R}^3 יהיו יהיו
                                                                                                            (u \times v) \perp u וכן (u \times v) \perp v אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                      .(u 	imes v = 0) \Longleftrightarrow (u \in \mathrm{span}\,(v)) אזי u,v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                     \det(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 \ge 0 אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיי
                                                                                                     \|v \times u\| = \|v\| \|u\| \sin(\angle(v,u)) אזי u,v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
וכן קיים A\subseteq\mathcal{U} פתוחה המקיימת \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n עבורה קיימת על ידי דיפאומורפיזם ממימד וכן קבוצה אבורה אבורה קיימת אבורה ממימד אוכן קיים
                                                                                           f(A) = f(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}) דיפאומורפיזם עבורו f: \mathcal{U} \to \mathcal{V}
עבורה P מתקיימת שביבה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n קיימת סביבה על עבורו לכל עבורה אזי פרידיקט P קבוצה אזי פרידיקט עבורה אזי פרידיקט איימת מקומית: תהא
                                                                                                                                                                                       A \cap \mathcal{U}
                                                                                                                               משפט: תהא k\in\mathbb{N}_+ ויהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n התב"ש
                                                                                                                                                         .יריעה k־מימדית \mathcal{M}
                                            . עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות עד f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}
ight) של פונקציה של פונקציה \mathcal{M}
                                                                                         r:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^n מקומית בעלת פרמטריזציה טובה \mathcal M • .\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^k	o\mathbb{R} מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית \mathcal M •
מסקנה: תהא W\subseteq\mathbb{R}^n של (a,0_{n-k}) של וקיים דיפאומורפיזם קיימת סביבה r:G	o\mathbb{R}^n של מסקנה:
                                                                                                           .s_{\restriction_{W\cap(G	imes 0_{n-k})}}=r עבורו s:W	o s\left(W
ight) הינה s:W	o s\left(W
ight) הינה ס־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.
                                          \mathcal{U}=W\cap A פתוחה עבורה עבורה אזי W\subseteq\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזי A\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי מתוחה יחסית:
                                            \mathcal{U}=W\cap A סגורה עבורה סגורה אזי W\subset\mathbb{R}^d עבורה קיימת \mathcal{U}\subset A אזיA\subset\mathbb{R}^d אזי
                                       (\forall x\in\mathcal{U}.\exists r>0.B_r\ (x)\cap A\subseteq\mathcal{U})משפט: תהא A\subseteq\mathcal{U} אזי (\mathcal{U} פתוחה ביחס ל-\mathcal{U}) איזי (\mathcal{U} פתוחה ביחס ל-\mathcal{U})
                                           \mathcal{U}\in\{A,\varnothing\} פתוחה יחסית ל־A\subseteq\mathbb{R}^d מתקיים A\subseteq\mathbb{R}^d פתוחה וסגורה יחסית ל־A\subseteq\mathbb{R}^d
                      \mathcal{U},\mathcal{U}\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית לA\subset\mathbb{R}^d אזי אזי (A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית לA\subset\mathbb{R}^d אזי אזי (A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\}
פתוחה f^{-1}\left(\mathcal{U}\right) פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי f אזי f:A\to B אוי היינה A,B\subseteq\mathbb{R}^d פתוחה יחסית ל־A,B\subseteq\mathbb{R}^d
arphi^{-1} וכן פתוחה arphi פתוחה ירעה arphi פתוחה ירעה arphi פתוחה ירעה \mathcal{U}\subset\mathcal{M} פתוחה וכן \mathcal{U}\subset\mathcal{M} פתוחה וכן \mathcal{U}\subset\mathcal{M} מפה: תהא
                                                                                                                                                     (\mathcal{U}, \varphi) אזי טובה טובה פרמטרזיציה
                                                  U \in \mathcal{C}_1 \mid \mathcal{C} \in \mathcal{A} = \mathcal{M} עבורה עלס: תהא איי קבוצה איי איי איי יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אטלס: תהא
            . מפה. (r(\mathcal{U}),r^{-1}) אזי r(\mathcal{U}) אזי רגולרית של פרמטריזציה ראיר r:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n מפה. \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n איריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מפה.
                                                                                                       \mathbb{RP}^n = \left\{ vv^T \mid v \in \mathbb{S}^n 
ight\} אזי n \geq 2 המרחב הפרוייקיבי: יהי
```

(0,0,0) טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה

 $f(t,
ho)=egin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(
ho) \ \gamma_1(t)\cos(
ho) \ \gamma_2(t) \$

 $f(x)=-rac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,rac{\|x\|^2-1}{2}
ight)$ כך $f:\mathbb{R}^n o\mathbb{S}^n$ נגדיר וגדיר $n\in\mathbb{N}_+$ נגדיר יהי

 γ של γ של γ של הסיבוב עקומה עבורה γ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של ווה $\gamma:Im(\gamma)$ אזי משפט הסיבוב $\gamma:Im(\gamma)$ של הינו

 $\forall x \in \mathcal{M}. (|N\left(x\right)|=1) \land (N\left(x\right) \perp x)$ המקיימת $N \in C\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\right)$ על־משטח אזי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת של יריעה: יהי

 $.\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Big\}$ אזי $a,b,c\in\mathbb{R}$ יהיו היו היו גליל/צילינדר: יהיו אזי מענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

. $\mathrm{Im}\left(f\right)$ של טובה טוביה פרמטריזציה

 \mathbb{S}^1 טורוס: משטח הסיבוב של \mathbb{T}^2 סימון: נסמן טורוס בעזרת

```
.i\in\left\{ 1,2
ight\} מפות עבור arphi_{i}\left(\mathcal{U}_{1}\cap\mathcal{U}_{2}
ight) מפות אזי מפות \left(\mathcal{U}_{1},arphi_{1}
ight),\left(\mathcal{U}_{2},arphi_{2}
ight) מיענה: תהיינה
                                                                                                                                                       . טענה: תהיינה (\mathcal{U}_1, arphi_1), (\mathcal{U}_1, arphi_2), (\mathcal{U}_2, arphi_2) מפות אזי
f \circ \varphi^{-1} הינה f \circ \varphi^{-1} מיריעה: תהא f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^m יריעה f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^m מיריעה: \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n מיריעה: מיריעה
                                                                                                      C^{lpha} הינה מדרגת מדרגת היותר הינה f:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^m אזי אזי \mathcal{M} יריעה כי נניח כי
עבורו \mathcal{M} של \{(\mathcal{U}_lpha,arphi_lpha)\}_{lpha\in\Lambda} יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי (C^lpha) אזי f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m אזי ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה
                                                                                                                                                                                                                                  \alpha \in \Lambda לכל C^{\alpha} הינה f \circ \varphi^{-1}
                                                                                                                                                           . אטלס \mathcal{M}יריעה אזי קיים ל־k יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אטלס.
                                                                                                                                                                 \dim\left(\mathcal{M}
ight)=k יריעה k־מימדית אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}
עבורה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעה אזי יריעה \mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m יריעה \mathcal{M}'\subseteq\mathcal{R}^m יריעה איריעה \mathcal{M}'\subseteq\mathcal{R}^m יריעה איריעה איר
                                                                                                                                                                                                                                                 .C^{lpha} הינה f:\mathcal{M}
ightarrow\mathbb{R}^{m}
                              g\circ f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}''
ight) אזי g\in C^{lpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''
ight) ותהא ותהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) יריעות תהא יריעות יריעות יריעות מהא
p של p \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n קיימת סביבה קיימת f אזי f: \mathcal{M} \to \mathbb{R}^m איריעה ותהא יריעה איריעה f: \mathcal{M} \to \mathbb{R}^m אזי לבורה אימת f
                                                                                                                                                                                                            g_{
abla_{n}
u}=f המקיימת g\in C^{lpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)
\mathcal{M}' של \mathcal{M} ולכל מפה (\mathcal{U},\psi) של \mathcal{M} ולכל מפה (לכל מפה אזי (\mathcal{U},\varphi) של אזי וותהא \mathcal{M}' אזי וותהא \mathcal{M}' אזי וותהא אזי וותהא אזי וותהא ליכות מפה (\mathcal{U},\psi) של אזי וותהא
                                                                                                                                                                                                                          מתקיים כי \psi \circ f \circ \varphi^{-1} הינה מתקיים
                                                                          f,f^{-1}\in C^lpha יבורה f הפיכה וכן f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעות אזי \mathcal{M},\mathcal{M}' הפיכה וכן \mathcal{M}
                                                                                                                             \dim\left(\mathcal{M}
ight)=\dim\left(\mathcal{M}'
ight) אזי ריעות דיפאומורפיות אזי \mathcal{M},\mathcal{M}' מסקנה: תהיינה
                                   טענה: תהא \mathcal{U},\mathcal{V} סביבות של \mathcal{U},\mathcal{V} מפות באשר \mathcal{U},\mathcal{V} סביבות של p\in\mathcal{M} ותהיינה p\in\mathcal{M} סביבות של \mathcal{U},\mathcal{V} סביבות של מ
                                                                                                                                                                                                          \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)
                                                אזי סביבה של סביבה מפה (\mathcal{U}, arphi) ותהא p \in \mathcal{M} ותהא המימדית יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                                                                    T_p(\mathcal{M}) = \operatorname{Im} \left( \mathcal{D}_{\varphi(p)} \left( \varphi^{-1} \right) \right)
                                                                                                                              T_p\left(\mathcal{M}
ight)\subseteq\mathbb{R}^n אזי p\in\mathcal{M} איזי הערה: תהא יריעה יריעה יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                     \dim\left(T_p\left(\mathcal{M}
ight)
ight)=\dim\left(\mathcal{M}
ight) אזי p\in\mathcal{M} יריעה ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: תהא
                                            p\in\mathcal{M} ימימדית בסביבה של p\in\mathcal{M} ותהא אוp\in\mathcal{M} ותהא הירועה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n הצגה סתומה רגולרית בסביבה של
                                                                                                                                                                                                                                                 T_{p}\left(\mathcal{M}\right) = \ker\left(\mathcal{D}_{p}\left(f\right)\right)
                                                                                                                                                           \dot{\gamma}=rac{d\gamma}{dt} אזי C^1 מסילה \gamma:(a,b)	o \mathcal{M} אהירות: תהא
                                                                                                                                                      \dot{\gamma}\left(t
ight)\in T_{\gamma\left(t
ight)}\left(\mathcal{M}
ight) אזי מסילה \gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathcal{M} טענה: תהא
                  T_p\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{\dot{\gamma}\left(0
ight)\mid\left(\gamma\in C^1\left(\left(-arepsilon,arepsilon
ight),\mathcal{M}
ight)
ight)\wedge\left(\gamma\left(0
ight)=p
ight)
ight\} אזי p\in\mathcal{M} אזי אינה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}^n יריעה
\gamma_{i}\left(0
ight)=p מסילות המקיימות מסילות ענה: תהיינה \gamma_{1},\gamma_{2}:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o\mathcal{M} ותהיינה ותהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא ותהיp\in\mathcal{M} תהא
                                                                                                                                                                    \left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}\right)\right)\left(0\right) אזי \dot{\gamma}_{i}\left(0\right)=v וכן
\mathcal{D}_pf:T_p\left(\mathcal{M}
ight)	o T_{f(p)}\left(\mathcal{M}'
ight) אזי f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעות: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא
                                                \dot{\gamma}\left(0
ight)=v וכן \gamma\left(0
ight)=p המקיימת \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} עבור מסילה \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} עבור מסילה עבור מסילה
                                                                            . טענה: תהיינה \mathcal{D}_p f אזי f \in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}') ותהא p \in \mathcal{M} העתקה לינארית. \mathcal{M},\mathcal{M}' טענה:
                                                     משפט כלל השרשרת: תהיינה M, \mathcal{M}', \mathcal{M}'' יריעות תהא f \in C^{lpha}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') יריעות תהא יריעות תהא משפט כלל השרשרת: משפט כלל השרשרת אויי
                                                                                                                                                                                                                             \mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right) = \mathcal{D}_{f(p)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)
                                                                  \mathcal{L}(\mathcal{D}_{p}f)\left(v
ight)=\mathcal{D}_{p}\left(f
ight)\cdot v אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעות תהא \mathcal{M},\mathcal{M}'
                                                          טענה: תהא p \subseteq \mathcal{M} יריעה תהא עבור סביבה של הצגה סתומה ותהא \{F=0\} ותהא ותהא p \in \mathcal{M} יריעה יריעה אזי
                                                                                                                                                                                     T_{p}\left(\mathcal{M}\right) = \operatorname{span}\left(\left\{\nabla F_{1}\left(p\right), \dots, \nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\}^{\perp}\right)
\left\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{1}
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{k}
ight)
ight\} אזי p\in\mathcal{M} יריעה תהא יריעה תהא p\in\mathcal{M} ותהא משנה: תהא שנה של p\in\mathcal{M} יריעה תהא יריעה תהא
                                                                                                                                                                                                                                                                T_{p}\left(\mathcal{M}\right) בסיס של
                                                                            T_p\left(\mathcal{M}
ight) של הסטנדרטי הבסיס הסטנדרטי להיות \left\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_1
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_k
ight)
ight\} הערה: נגדיר את
(\mathcal{V},\psi) עסענה: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא p\in\mathcal{M} תהא תהא f\in C^{lpha}(\mathcal{M},\mathcal{M}') יריעות תהא יריעות תהא פביבה של f\in\mathcal{M}
```

. יריעה n יריעה $\mathbb{RP}^n\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ אזי $n\geq 2$ יריעה יהי

 $\left[\mathcal{D}_{p}f
ight]_{i,j}=rac{\partial\left(\psi\circ f\circarphi^{-1}
ight)_{i}}{\partial x_{i}}$ אזי $\left[\mathcal{D}_{p}f
ight]_{i,j}=\mathcal{D}$ באשר \mathcal{D} סביבה של

 $arphi_{1,2}=arphi_2\circarphi_1^{-1}$ המוגדרת $arphi_{1,2}:\mathbb{R}^k o\mathbb{R}^k$ מפות אזי ($\mathcal{U}_1,arphi_1$), $(\mathcal{U}_2,arphi_2)$ המינה העתקת מעבר:

```
L_vf=\sum_{i=1}^k v_i\cdot rac{\partial \left(f\circ arphi^{-1}
ight)}{\partial x_i} אאי v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) מפה בסביבה של p מפה בסביבה של f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אאי f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) טענה: תהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) ותהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אאי f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight)
                                                                                                                     v \perp T_p(\mathcal{M}) עבורו v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} אזי p \in \mathcal{M} על־משטח על־משטח על־משטח ותהא v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}
                                                                      \|v\|=1 עבורו עבורו עבורו נורמל יחידה: יהי v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} על־משטח ותהא על־משטח עבורו אזי וקטור נורמל יחידה: יהי
 טענה: יהי p \subseteq \mathcal{N} אזי איז וקטור נורמל יחידה ותהא p \in \mathcal{M} על־משטח תהא על־משטח ותהא ותהא p \in \mathcal{M} ותהא ותהא איז וקטור נורמל יחידה וענה: יהי
                                                    \mathcal{M} אזי קו־אוריינטציה של אזי אזי \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} קו־אוריינטציה המחמה הצגה חתומה אווהא \{f=0\} הצגה על־משטח ותהא
 טענה: יהי \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),...,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p),-1\right)^n}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^2}} איי איי p איי בסביבה של p ותהא p\in\mathcal{M} ותהא וקטור נורמל יחידה p\in\mathcal{M} איי בסביבה של איי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       ב-p.
                                                             \mathcal{M} אזי \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},-1
ight)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} קו־אוריינטציה של \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n קו־אוריינטציה של \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: יהי
                                                  . מענה: יהיו v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית. v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n טענה: יהיו v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n אזי v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n דטרמיננטת גראם: יהיו v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n אזי v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                                                                       v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \perp v_i מתקיים i \in [n-1] לכל
                                                                                                                                                                                                                                                             ||v_1 \times \ldots \times v_{n-1}|| = \sqrt{\Gamma(v_1 \ldots v_{n-1})} \bullet
                                                                                                                                                                                                                                                         \det(v_1 \times ... \times v_{n-1}, v_1, ..., v_{n-1}) \ge 0
 וקטור rac{\partial r}{\partial x_1}(p)	imes\dots	imesrac{\partial r}{\partial x_{n-1}}(p) אזי אזי p\in\mathcal{M} וקטור פרמטריזציה ווקטור אזי m\in\mathcal{M} על־משטח תהא
                                          \mathcal{M} מסקנה: יהי \frac{\partial r}{\partial x_1} 	imes \ldots 	imes \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}} אזי של אזי פרמטריזציה של r פרמטריזציה של \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי יהי
                                                                                                                                                                                                            \partial^{lpha}f=rac{\partial^{|lpha|}}{\partial x^{lpha}}(f) אזי lpha\in\mathbb{N}^{k} ותהא f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight) איזי
C^{\alpha} שלמון: אוז אלמון: C^{\alpha} שלמון: C^{\alpha}
```

אופרטור $\overline{\mathcal{U}}$ אושר אזי (\mathcal{U},φ) על מפה לכל מפה $D:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight) o C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי אופרטור אופרטור יריעה אזי אופרטור איינען אופרטור איינען אופרטור איינען איינען

שדה וקטורי $p\in\mathcal{M}$ וכן לכל מפה $v:\mathcal{M} o\mathbb{R}^n$ מתקיים כי $v:\mathcal{M} o\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן לכל מפה $v:\mathcal{M} o\mathbb{R}^n$ מתקיים כי \mathcal{M}

סענה: תהא $\mathcal{L}_v\left(f
ight)(x)=L_{v(x)}\left(f
ight)$ הינה המוגדרת $L_v:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי חלק אזי חלק אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה

. מתקיים $m\in\mathbb{N}$ וכן $m\in\mathbb{N}$ וכן $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן $m\in\mathbb{N}$ מתקיים $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן $m\in\mathbb{N}$ מתקיים $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ מתקיים $m\in\mathbb{N}$

 $C_C^\infty\left(\mathcal{U}
ight)=\{f\in C^\infty\left(\mathcal{U}
ight)\mid$ קומפקטית supp $(f)\}$ פתוחה אזי $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ יריעה ותהא \mathcal{M} יריעה ותהא

 $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ באשר $g\in C^lpha(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f:\mathcal{M} o\mathcal{M}'$ באשר יריעה תהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יסענה: תהא

 $\mathcal{D}_pf=\left(\mathcal{D}_pg\right)_{\restriction_{T_p(\mathcal{M})}}$ אזי $g_{\restriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}=f$ וכן p סביבה של $v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight)$ ותהא $f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight)$ אזי $t\in\mathcal{D}_pf\left(v\right)$ אזי

וכן a_{α} וכן $m \in \mathbb{N}$

אופרטור דיפרנציאלי.

 $.C^{m}$ העתקה $x\mapsto \mathcal{D}_{x}\varphi\left(v\left(x
ight)
ight)$

.supp $(f) = \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \neq 0\}}$ אזי $f \in C(\mathcal{M})$ תומך: תהא

 $f_{\dagger u}=g_{\dagger u}$ עבורן $f,g\in C_C^\infty$ פתוחה ולכל $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ אופרטור $L:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ עבורן אזי \mathcal{U} אופרטור מקומי: תהא $L:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ עבורן אזי בעבורן מתקיים $L:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ עבורן אזי בעבורן מתקיים בעבורן מתקיים בעבורן אזי בעבורן אזי בעבורן בעבורן בעבורן מתקיים בעבורן בעבורן

 $\|f\|_{W,n}=\sup_{\substack{x\in w\\|\alpha|< n}}\|(\partial^{\alpha}f)\left(x
ight)\|$ איי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}
ight)$ פתוחה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{k}$

טענה: תהא $|\alpha| \leq n$ לכל $(\partial^{\alpha} f)(x) = 0$ עבורה $x \in \mathcal{W}$ עבורה $f \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ ויהי ויהי $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ אזי קיימת $g \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ ויהי $\delta \in (0, \varepsilon)$

- $.g_{\restriction_{B_{\underline{\delta}}(x)}} = 0 \bullet$
- $.g_{\upharpoonright_{\mathcal{W}\backslash B_{\delta}(x)}}^{2} = 0 \bullet$
- $\|f-g\|_{W,n}<\varepsilon$

 $.inom{lpha}{eta}=\prod_{i=1}^kinom{lpha_i}{eta_i}$ אזי $lpha,eta\in\mathbb{N}^k$ איזי

משפט פיטרה: תהא $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ יריעה ותהא יריעה ותהא $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$

- . אופרטור מקומי L
- . supp $(L\left(f\right))\subseteq$ supp (f) מתקיים $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$
 - אופרטור דיפרנציאלי. L

טענה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ פתוחה יהי $\mathcal{U}\in\mathbb{R}^k$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{U}\in\mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $\mathcal{U}\in\mathbb{R}^k$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $\mathcal{U}\in\mathbb{R}^k$ מתקיים $\mathcal{U}\in\mathbb{R}^k$ אופרטור דיפרנציאלי מסדר $\mathcal{U}=\mathcal{U}$ עבורם לכל $\mathcal{U}=\mathcal{U}$ מתקיים $\mathcal{U}=\mathcal{U}$ מתקיים $\mathcal{U}=\mathcal{U}$ אופרטור דיפרנציאלי מסדר $\mathcal{U}=\mathcal{U}$

עבורן $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathbb{R}^n
ight)$ אזי קיימות של X אזי קיימות אויהי ויהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן $X\subseteq\mathbb{R}^n$

- $0 \leq \rho_i \leq 1$ מתקיים $i \in \mathbb{N}$ לכל
- .supp $(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$ עבורו $\alpha \in \Lambda$ קיים $i \in \mathbb{N}$ •
- $\{i\in\mathbb{N}\mid
 ho_i(\mathcal{W})
 eq 0\}$ ו $\in\mathbb{N}$ עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פיימת סביבה פתוחה $x\in X$ לכל
 - $\sum_{i\in\mathbb{N}}
 ho_{i}\left(x
 ight)=1$ מתקיים $x\in X$ לכל

. אופרטור דיפרנציאלי. אופרטור ויהי $L:C^\infty\left(\mathcal{V}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{V}
ight)$ אופרטור אופרטור דיפרנציאלי. עמסקנה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$ אופרטור דיפרנציאלי.

עבורן $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי קיימות של X אזי פתוח כיסוי $\{\mathcal{U}_lpha\}_{lpha\in\Lambda}$ ויהי $X\subseteq\mathcal{M}$ ויהי איי פתוח של $X\subseteq\mathcal{M}$ אזי קיימות

- $0 < \rho_i < 1$ מתקיים $i \in \mathbb{N}$ •
- .supp $(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$ עבורו $\alpha \in \Lambda$ קיים $i \in \mathbb{N}$ •
- $|\{i\in\mathbb{N}\mid\rho_{i}\left(\mathcal{W}
 ight)
 eq0\}|\in\mathbb{N}$ עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ שביבה פתוחה $x\in X$ לכל
 - $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_i(x)=1$ מתקיים $x\in X$ לכל •

 $\Pi\left(v_1\dots v_k
ight)=\left\{\sum_{i=1}^k t_i v_i\mid orall i\in[k]\ .t_i\in[0,1]
ight\}$ אזי $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^n$ מקבילון: יהיו $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^n$ אזי $v_1\dots v_k\in\mathbb{R}^n$ נפח מקבילון: יהיו

טענה: יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^k$ אזי

- $. Vol_k \left(\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ 0^{n-k} \end{smallmatrix} \right), \dots, \left(\begin{smallmatrix} v_k \\ 0^{n-k} \end{smallmatrix} \right) \right) = \left| \det \left(v_1 \dots v_k \right) \right| \bullet$
- $\operatorname{Vol}_k\left(Tv_1,\ldots,Tv_k
 ight)=\operatorname{Vol}_k\left(v_1,\ldots,v_k
 ight)$ אזי $T\in O\left(n
 ight)$ תהא

זניחה $\varphi\left(E\cap\mathcal{U}\right)$ מתקיים כי מפה ליריעה: עבורה אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ אזי יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה איריעה: $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אניחה ביחס ליריעה: \mathbb{R}^k ב- \mathbb{R}^k

(לכל $(\mathcal{M}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$) איזי אזי E אזי ותהא $E \subseteq \mathcal{M}$ אוותהא איזי אטלס של איזי איזי איזי איזי איזיים פירעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ איזי איזיים ביחס ל־ $(\mathcal{M}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ איזיים בי (\mathcal{R}^k) איזיים בי (\mathcal{R}^k) איזיים בי (\mathcal{R}^k) איזיים בי (\mathcal{R}^k) איזיים בי

 \mathcal{M} טענה: תהא $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ אזי אזי זניחות ביחס ל־ $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}
ight)$ זניחה ביחס ל־ $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ איי מענה: תהא

 \mathcal{M} יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ טענה: תהא

 $B_f=\{x\in\mathcal{M}\mid x$ אינה רציפה לאינה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ יריעה ותהא איריעה על אינה אינה אינה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אינה רציפה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$

- .חסומה $f \bullet$
- supp(f) •
- \mathcal{M} זניחה ביחס ל־ $B_f ullet$

```
M עבורה 1_E אינטגרבילית רימן על M\subseteq \mathbb{R}^n יריעה אזי M\subseteq \mathbb{R}^n אינטגרבילית רימן על M\subseteq \mathbb{R}^n
(E)טענה: תהא \overline{E}\subseteq \mathcal{U} אזי (E\subseteq \mathcal{M} מפה ותהא E\subseteq \mathcal{M} מפה ותהא מבידה ז'ורדן ב־E איזי (E מדידה ז'ורדן ב־E
                                                                                                                                                                                                                                                          \mathbb{R}^{k}מדידה ז'ורדן ב
    \operatorname{supp}(f)\subseteq\mathcal{U} אונרה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אבורה f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} עבורה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אינימת מפה מנקציה נוחה:
                                                                                                                                                  . נוחה: \mathbb{1}_A עבורה A\subseteq\mathcal{M} יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n נוחה: תהא
                                                                 .i\in\mathbb{N} טענה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה\{(\mathcal{U}_i,arphi_i)\} של \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n נוחה לכל \mathcal{M}
מסקנה: תהא ליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות איי אינטגרביליות איי אינטגרביליות ואינטגרביליות איינטגרביליות יריעה ותהא לf:\mathcal{M}	o\mathbb{R} יריעה ותהא מסקנה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                         f = \sum_{i=1}^n f_i עבורן
וכן G_i\subseteq\mathbb{R}^k פרמטרזיציות טובות באשר באשר ריינה r_i:G_i	o\mathcal{M} פרמטריזציה טובה באשר בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה
                                                                                                                                                                               ותהא f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} אינטגרבילית רימן אזי i\in\{1,2\}
\int_{G_1} \left(f\circ r_1
ight)\left(q
ight)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r_1
ight)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r_1
ight)
ight)}\mathrm{d}q=\int_{G_2} \left(f\circ r_2
ight)\left(q
ight)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q\left(r_2
ight)^T\cdot\mathcal{D}_q\left(r_2
ight)
ight)}\mathrm{d}q}אינטגרבילית רימן f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} ותהא \mathcal{M} יריעה f:\mathcal{M}מימדית בעלת פרמטריזציה טובה f:\mathcal{M}	o\mathcal{R} באשר בישר f:\mathcal{M}	o\mathcal{R}
\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}\left(f\circ r\right)\left(q
ight)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r
ight)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r
ight)
ight)}\mathrm{d}q} אינטגרבילית רימן f:\mathcal{M}
ightarrow\mathbb{R} ותהא G\subseteq\mathbb{R}^{k} ותהא G\subseteq\mathbb{R}^{k} אינטגרבילית פרמטריזציה טובה f:\mathcal{M}
ightarrow\mathbb{R}
                                                                                                                                                                                 \int_{\mathcal{M}} f = \int_{G} \left(f \circ r\right) \left(q\right) \cdot \sqrt{\Gamma\left(rac{\partial r}{\partial x_{1}} \dots rac{\partial r}{\partial x_{k}}
ight)} \mathrm{d}q} אזי
                          R_{\mathcal{U}}=\{f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}\mid(\mathrm{supp}\,(f)\subseteq\mathcal{U})\wedge(\mathsf{pridential}) נוחה ואינטגרבילית מפה (\mathcal{U},arphi) מפה אזי (\mathcal{U},arphi) מפה מיינון: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא
                                                                                                                                                       . טענה: תהא R_{\mathcal{U}} מרחב אזי מפה (\mathcal{U}, arphi) מרחב לינארי תהא \mathcal{M} איריעה ותהא
                                                                                                     . מסקנה: תהא M יריעה ותהא (\mathcal{U}, arphi) מפה אזי הינו פונקציונל לינארי תהא מסקנה: תהא
טענה: תהא f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} נוחות ואינטגרביליות רימן ותהיינה f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} טענה: תהא אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרביליות ואינטגרביליות רימן
                                                                                                                                \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{M}} g_i אזי f = \sum_{i=1}^m g_i וכן f = \sum_{i=1}^n f_i עבורן
עבורן נוחות ואינטגרביליות רימן פורן f_1\dots f_n:\mathcal{M}	o\mathbb{R} אינטגרלי רימן אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרבילייות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליים אינטגרביליות רימן אינטגרבילי
                                                                                                                                                                                                         \int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i אא f = \sum_{i=1}^n f_i
                                                                                                                          R\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{f:\mathcal{M}
ightarrow\mathbb{R}\mid סימון: תהא fל יריעה אזי ל
                                                                                                                                                                                         . טענה: תהא \mathcal{M} יריעה אזי R(\mathcal{M}) מרחב לינארי.
                                                                                                                                       . מסקנה: תהא איי פונקציונל הינו פונקציונל הינו הינו \int_{\mathcal{M}}:R\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow\mathbb{R} יריעה איי
                                                                                                                                              \int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}f\mathrm{dVol}_{k} אזי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) יריעה ותהא \mathcal{M} יריעה ותהא
  \bigcup_{i=1}^\infty E_i = \mathcal{M} יריעה איי א'ורדן של יריעה: תהא יריעה איי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יריעה איי איריעה איי איריעה איי א'ורדן אייריעה איי א'ורדן אייריעה איי
עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של L\in\mathbb{R} אינטגרל לא אמיתי: f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} יריעה ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אינטגרל לא אמיתי: תהא
                                                                                                          \int_{\mathcal{M}}f=L אזי אוו\lim_{i	o\infty}\int_{E_i}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}=L מתקיים \mathcal{M} של של (E_i)_{i=1}^\infty אזי
                          טענה: תהא M \subseteq \mathbb{R}^n יריעה ותהא ותהא לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות אזי לכל מיצוי של f \in R(\mathcal{M}) של \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n איי לכל מיצוי ז'ורדן אזי לכל מיצוי ז'ורדן אזי לכל מיצוי אייריעה ותהא
                                                                                                                                                                                                                                   \int_{\mathcal{M}} f = \lim_{i \to \infty} \int_{\mathcal{M}} f \cdot \mathbb{1}_{E_i}
                                                                                                                                   \operatorname{Vol}_k\left(\mathcal{M}
ight)=\int_{\mathcal{M}}1 אזי אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה
                                                                                                                                                                               \mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing עבורן עבורן (\mathcal{U},arphi), (\mathcal{V},\psi) מפות זרות: מפות
f_{\uparrow_{\mathcal{M}\setminus (S\cup (orall^n+\mathcal{U}_i))}}=0 אזיי עבורה f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} אניחה ותהא איי אניה f(\mathcal{U}_i,arphi_i)_{i=1}^n מפות זרות בזוגות על
                                                                                                                                                                                                                                                      \int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{U}_i} f
                                                                   \int_{\gamma}f\mathrm{dVol}_1 אינטגרל קווי מסוג ראשון: תהא \gamma:[a,b]	o\mathbb{R}^n ותהא אינטגרל קווי מסוג ראשון: תהא
```

. Length $(\gamma)=\lim_{m \to \infty} \sup_{a=t_0 < \ldots < t_m=b} \sum_{i=1}^m \|\gamma\left(t_i\right) - \gamma\left(t_{i-1}\right)\|$ אזי $\gamma \in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$ תהא $\gamma \in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$

.Length $(\mathcal{M})=$ Length (γ) יריעה טובה אזי $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ ותהא ותהא יריעה חד־מימדית ענה: תהא \mathcal{M}

 $\|\gamma'\|=\sqrt{r^2+r'}$ אזי $\gamma\left(t
ight)=\left(r\left(t
ight)\cos\left(heta\left(t
ight)
ight),r\left(t
ight)\sin\left(heta\left(t
ight)
ight)
ight)$ כך $\gamma:\left(a,b
ight) o\mathbb{R}^2$ אזי $\gamma:\left(a,b
ight) o \mathbb{R}^2$ מסקנה: תהיינה

.Length $(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'\left(t
ight)
ight)^2}\mathrm{d}t$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$

.Length $(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'\left(t\right)\|\,\mathrm{d}t$ אזי $\gamma\in C^1\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n
ight)$ אונה: תהא \mathcal{M} יריעה חד־מימדית אזי \mathcal{M} יריעה חד־מימדית אזי \mathcal{M}

.Area $(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_2\left(\mathcal{M}\right)$ איי אזי חד־מימדית יריעה \mathcal{M} יריעה \mathcal{M}

```
.\operatorname{Vol}_k\left(\Gamma_f\right)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|
abla f\left(x
ight)
ight\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k איז f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k מסקנה: תהא
x בנקודה \alpha (x) בענה: \alpha באשר \alpha: \Gamma_f 	o \mathbb{R} ותהא ווית בין הנורמל של \alpha בתוחה תהא \alpha בתוחה תהא \alpha בתוחה תהא \alpha בנקודה \alpha ותהא
                                                                                                                                                      \left\| \sqrt{1 + \left\| \nabla f\left(x \right) \right\|^2} = \frac{1}{\cos(\alpha(x))} אזי e_{k+1} ציר e_{k+1}
משפט ארכימדס: יהיו P_1 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את \mathbb{S}^2 ויהי \mathcal{M} השטח הכלוא על \mathbb{S}^2 בין P_1 ל־P_2 אזי יהיו
                                                                                                                                                                                                        .Area (\mathcal{M}) = 2\pi h
P_1 בין P_1 בין R\cdot\mathbb{S}^2 השטח הכלוא על R\cdot\mathbb{S}^2 ויהי ווהי R\cdot\mathbb{S}^2 אזי במרחק משקנה: יהיו
               P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \max\{d\left(x,H_1
ight),d\left(x,H_2
ight)\}\leq d\left(H_1,H_2
ight)\} על־משטחים מקבילים אזי H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n יהיו
                                                                                        .Width (P_{H_1,H_2})=d\left(H_1,H_2
ight) אזי על־משטחים אH_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n יהיו
                                                                                     . Width (K)=\inf_{\{K\subset P\mid_{\mathsf{GICR}}|P\}} (Width (P)) אוף קמור אזי K\subseteq\mathbb{R}^n יהי יהי
משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי K\subseteq igcup_{i=1}^m P_i גוף קמור קומפקטי ויהיו P_1\dots P_m קורות עבורן אזי איזי יהי
                                                                                                                                                                               .Width (K) \leq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Width}(P_i)
                                                                                                      רוחב יחסי של קורה: יהי K\subseteq\mathbb{R}^n גוף קמור קומפקטי ותהא קורה אזי
                                                                                                                  .Width_K(P) = \inf_{m \in \mathbb{R}_+} \{ m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists a \in \mathbb{R}^n . K \subseteq m \cdot P + a \}
השערה 1 \leq \sum_{i=1}^m WidthK(P_i) אזי איז איז K \subseteq \bigcup_{i=1}^m P_i קורות עבורן קומפקטי ויהיו ויהיו קמור קומפקטי אזיי אזי אזי K \subseteq \mathbb{R}^n השערה באנג: יהי
                                                                                                                                                                                                                             פתוחה
1 \le \sum_{i=1}^m WidthK(P_i) אזי אוי איך קמור קומפקטי עבורו אויהיו איזי איזי אויהיו איזי אויר קומפקטי עבורו אזיK \subseteq \bigcup_{i=1}^m P_i קורות עבורן איזי
                                                                     . על־משטח על־משטח על־משטח אזי 
abla arphi^{-1}(t) אזי על־משטח על־משטח פאנה: תהא על־
abla arphi \in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) על־משטח פתוחה על־משטח
טענה: יהי p\in\mathcal{V} אזי קיים \delta>0 באשר \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) אזי קיים \delta>0 עבורו לכל עבורו לכל יהי יהי יהי יהי
\int_{B_{\delta}(p)}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) ותהא \varphi\left(\mathcal{V}
ight)=\left(a,b
ight) וכן \nablaarphi\neq0 וכן \varphi\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}
ight) ותהא \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n} באשר
                                                                                                              \int_{\mathcal{V}} f = \int_a^b \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\|\nabla \varphi(x)\|} d\mathrm{Vol}_{n-1}(x) dt אויי אוי supp (f)
v\in T_x\left(\mathcal{M}
ight) לכל \langle u,v
angle=L_varphi\left(x
ight) עבורו u\in T_x\left(\mathcal{M}
ight) לכל x\in\mathcal{M} ותהא x\in\mathcal{M} ותהא \varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n לכל

abla 
abla x הוא arphi = arphi אזי הגרדיאנט של arphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M},\mathbb{R}) ותהא arphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M},\mathbb{R}) יריעה תהא יריעה תהא arphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M},\mathbb{R})
\psi_{ert_{\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}}=arphi_{ert_{\mathcal{U}}} באשר באשר \psi\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) ותהא x\in\mathcal{M} טענה: תהא \varphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) באשר באשר \varphi\in\mathcal{C}^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) באשר
                                                                                                                                                                                .\nabla_x \varphi = \operatorname{Proj}_{T_{-}(\mathcal{M})} (\nabla_x \psi) אא
ותהא arphi\left(\mathcal{M}
ight)=(a,b) וכן 
ablaarphi\neq0 באשר arphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה תהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} וכן משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה:
\int_{\mathcal{M}}f=\int_a^b\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי supp (f) איי באשר f\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא f\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר \varphi\in C^1\left(\mathcal{V},\mathbb{R}^k
ight) באשר \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: יהי
                                     \int_{\mathcal{V}}f=\int_{arphi(\mathcal{V})}\int_{arphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\sqrt{\det\left((\mathcal{D}_{x}arphi)\cdot(\mathcal{D}_{x}arphi)^{T}
ight)}}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t . \int_{\mathbb{S}^{n}}f\left(x
ight)\mathrm{dVol}_{n}=\int_{\mathbb{S}^{n}}f\left(Ax
ight)\mathrm{dVol}_{n} אינטגרבילית רימן ותהא f:\mathbb{S}^{n}	o\mathbb{R} איז f:\mathbb{S}^{n}	o\mathbb{R}
                                                                                                         \mathrm{Vol}_n\left(r\cdot\mathbb{S}^n
ight)=r^n\cdot\mathrm{Vol}_n\left(\mathbb{S}^n
ight) אזי r>0 טענה: יהי r>0 טענה שטח פנים של ספירה: יהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ טענה שטח פנים של ספירה: יהי
                                                                                                                   \operatorname{Vol}_n\left(B_1\left(0
ight)
ight)=rac{\pi^{rac{n}{2}}}{\Gamma\left(rac{n}{2}+1
ight)} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהיn\in\mathbb{N}_+ יהי
```

 $\mathfrak{X}^lpha\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{v:\mathcal{M} o\mathbb{R}^k\mid\mathcal{M}$ מעל מעל C^{lpha^2} שדה וקטורי $v\}$ שדה אזי \mathcal{M} יריעה אזי \mathcal{M}

 $(C^lpha$ הינה $v:\mathcal{M} o\mathbb{R}^k)$ אזי ($v:\mathcal{M}$ אזי $v:\mathcal{M}$ אזי $v:\mathcal{M}$ אזי וקטורי על

 (C^lpha) אזי $(v(x),rac{\partial arphi^{-1}}{\partial x_i}(x)$ מתקיים כי $i\in[k]$ מתקיים לכל מפה ($(\mathcal{U},arphi)$ הינה הינה $(v(x),rac{\partial arphi^{-1}}{\partial x_i}(x))$ אזי ולכל ($(v(x),rac{\partial arphi^{-1}}{\partial x_i}(x))$ אזי ולכל ($(v(x),rac{\partial arphi^{-1}}{\partial x_i}(x))$

 $.rac{\partial arphi^{-1}}{\partial x_{i}}\in\mathfrak{X}^{lpha}\left(\mathcal{U}
ight)$ מפה אזי \mathcal{M} יריעה \mathcal{C}^{lpha} ותהא תהא \mathcal{C}^{lpha}

 $G\subseteq\mathbb{R}^2$ יריעה אויר פרמטריזציה ותהא אויר ותהא אויריעה דו־מימדית יריעה דו־מימדית אויריעה $T:G\to\mathcal{M}$ אוי

.Area $(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|
abla f\left(x,y
ight)\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ אחר: תהא

.Area $(\mathcal{M}) = \int_{G} \left| \frac{\partial r}{\partial x_{1}} (x) \times \frac{\partial r}{\partial x_{2}} (y) \right| dxdy$

 $\det\left(I+uv^T
ight)=1+\langle u,v
angle$ אזי $u,v\in\mathbb{R}^n$ טענה: תהיינה

```
.u_{
estriction_{A\cap\mathcal{U}}}=v_{
estriction_{A\cap\mathcal{U}}} עבורו עבורו u\in\mathfrak{X}^{m}\left(\mathcal{U}
ight)
Mוקיימת A\subseteq\mathcal{U} פתוחה בA\subseteq\mathcal{U} מעל (A) מעל מעל C^lpha אזי v:A	o\mathbb{R}^k ותהא און A\subseteq\mathcal{M} ותהא און ייניעה תהא
                                                                                                                                                                                             u_{
abla u} = v עבורה u \in \mathfrak{X}^{lpha} \left( \mathcal{U} 
ight)

abla arphi \in \mathfrak{X}^0\left(\mathcal{M}
ight) אזי arphi \in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה ותהא יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי אזי
                                                                       .(סיענה: יהי M על־משטח קשיר אזי M בעל 0 קו־אוריינטציות) על־משטח קשיר אזי M בעל 0 קו־אוריינטציות).
                            עבורו F שדה וקטורי דרך M אזי F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) איי ויהי M קו־אוריינטציה של M קו־אוריינטציה של M\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                                                           \operatorname{.Flux}_{F}\left(\mathcal{M}\right) = \int_{\mathcal{M}} \left\langle F\left(x\right), N\left(x\right) \right\rangle d\operatorname{Vol}_{n-1}\left(x\right)
M אזי דרך שדות וקטוריים דרך F_1,F_2\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) ויהיו של אוריינטציה של קו־אוריינטציה על־משטח ערהא אויהיו אוריינטציה של \mathcal{M}
                                                                                                                                                 .\operatorname{Flux}_{\alpha F_1 + \beta F_2}(\mathcal{M}) = \alpha \operatorname{Flux}_{F_1}(\mathcal{M}) + \beta \operatorname{Flux}_{F_2}(\mathcal{M})
עבורו F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) על־משטחים ארים עד כדי קבוצה אניחה בעלי קו־אוריינטציה אויהי על־משטחים ארים עד כדי קבוצה אניחה בעלי אינואריינטציה \mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                  \operatorname{Flux}_F(M_1 \cup \mathcal{M}_2) = \operatorname{Flux}_F(\mathcal{M}_1) + \operatorname{Flux}_F(\mathcal{M}_2) אזי \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 שדה וקטורי דרך
                                           עלימשטח בעל קו־אוריינטציה N ויהי F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) על־משטח בעל קו־אוריינטציה אויהי ויהי M\subseteq\mathbb{R}^n על־משטח בעל קו
                                                                                                                                                                                   .Flux_F(\mathcal{M}, N) = Flux_F(\mathcal{M}, -N)
                                                                                        .\operatorname{div}\left(F
ight)(x)=\sum_{i=1}^{n}rac{\partial F_{i}}{\partial x_{i}}\left(x
ight) אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי תהא
                  \mathrm{div}\left(F
ight)(x)=\mathrm{trace}\left(\mathcal{D}_{x}\left(f
ight)
ight) אזי f\left(x
ight)=F\left(x
ight) כך f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{n} נגדיר F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} נגדיר
                                        \operatorname{div}\left(A\circ F
ight)\left(A^{-1}x
ight)=\operatorname{div}\left(F
ight)\left(x
ight) אזי A\in\operatorname{GL}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) ותהא F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יהי
                                          \operatorname{div}\left(f\cdot F
ight)=f\cdot\operatorname{div}\left(F
ight)+\left\langle 
abla f,F
ight
angle אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) ותהא ותהא F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יהי
                                                                                                          \Delta f=\sum_{i=1}^{n}rac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}} אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי לפלסיאן: תהא
                                                                                                                  \Delta f=\operatorname{div}\left(
abla f
ight) אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}
                                               \operatorname{Cube}_\ell(x) = \{Q \subseteq \mathbb{R}^n \mid (x \in Q) \land (\ell \text{ hin } Q \text{ below } \alpha) \land (\alpha)\} אזי x \in \mathbb{R}^n אזי x \in \mathbb{R}^n אזי x \in \mathbb{R}^n אזי אזי x \in \mathbb{R}^n אזי אזי פימון:
עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני Flux_F(\partial Q)=\sum Flux_F(E_i) איז עQ\in \mathsf{Cube}_\ell(x) ויהי x\in\mathbb{R}^n באשר \{E_i\}
                                                                                                                                                                                                                                             .Q-b
.\operatorname{div}\left(F
ight)(x)=\lim_{\substack{Q\in\operatorname{Cube}_{\ell}(x)\ \ell	o 0}}\operatorname{Flux}_{F}\left(\partial Q
ight) אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} פתוחה אזי f\in\mathcal{C}^{1}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight) סביבה של x וקיימת x\in\partial\mathcal{U} פתוחה אזי x\in\partial\mathcal{U} פתוחה אזי x\in\partial\mathcal{U} עבורה פיימת x\in\mathcal{U}
                                                                                                                                                        \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\} וכן f(x) = 0 וכן \nabla_x f \neq 0
                                                                                                      \mathcal{J}^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}=\{x\in\partial\mathcal{U}\mid סימון: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה אזי x\} נקודת שפה חלקה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n
f(x)=0 פימון: תהא \mathcal{V}_xf
eq 0 פתוחה תהא \mathcal{V}_xf
eq 0 ותהא f\in C^1(\mathcal{W},\mathbb{R}) ותהא x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n באשר
                                                                                                                                                   .Smooth_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f) אזי \mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{f<0\} וכן
                                    . סענה: תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n פתוחה ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי קיימת x \in \partial^{\mathrm{sm}} \mathcal{U} פתוחה ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n מענה: תהא
                                                                                                                                      \partial \mathcal{U}טענה: תהא \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה כיחס ל
                                                                                                                                                             . יריעה \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} יריעה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה מסקנה: תהא
                                                                                                                                       .\partial\mathcal{U}=\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} עבורה עבורה פתוחה פתוחה קבוצה חלקה:
                                         \lim_{arepsilon 	o 0} rac{1}{arepsilon} {
m Vol}_n \left( \left( \partial \mathcal{U} ackslash \partial^{
m sm} \mathcal{U} 
ight) + B^n_arepsilon \left( 0 
ight) 
ight) = 0 עבורה עלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n
              . נורמל יחידה rac{
abla f}{\|
abla f\|}:\mathcal{W}\cap\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n אזי ההא איי איי בורה עבורה x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} נורמל יחידה. \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n נורמל יחידה.
                         באשר x\in\partial^{	ext{sm}}\mathcal{U} עבורה לכל N:\partial^{	ext{sm}}\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n פתוחה אזי N:\partial^{	ext{sm}}\mathcal{U} באשר אבורה לכל שפה חלקה: תהא
                                        N_{
estriction_{\mathcal{W}\cap\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}}}=rac{
abla f}{\|
abla f\|} מתקיים Smooth_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f) אזי F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight) בעלת שפה כמעט חלקה תהא \mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה באשר \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                                                                                                                                                               \operatorname{Flux}_F(\partial \mathcal{U}) = \operatorname{Flux}_F(\partial^{\operatorname{sm}}\mathcal{U})
 A\in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^n
ight) אותהא M ותהא M שדה וקטורי דרך F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) יהי M יהי M קו־אוריינטציה של M על־משטח תהא M קו־אוריינטציה של
                                                                                                                                                                                 .Flux_{A\circ F}\left(A\cdot\mathcal{M}\right)= Flux_{F}\left(\mathcal{M}\right) אזי
\mathrm{supp}\left(F\right)\subseteq B_{r}\left(a\right) באשר F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right) יההי i\in\left[n\right] לכל לכל g\in C^{1}\left(B_{r}\left(a\right),\mathbb{R}\right) תהא r>0 יהי a\in\mathbb{R}^{n} לכל מענה:
                                                                                                                                                                       .Flux_F(\partial \{g < 0\}) = \int_{\{g < 0\}} \operatorname{div}(F) אזי
r>0 אזי קיים a\in\partial\mathcal{U}ackslash\partial^{	ext{sm}}\mathcal{U} תהא \log_{n-1}(\partial^{	ext{sm}}\mathcal{U})<\infty אזי קיים שפה כמעט חלקה עבורה עם שפה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n
               \mathcal{F}עבורו לכל \mathcal{W}\subseteq \mathcal{W} המקיים \mathcal{W}\subseteq \mathcal{W} ולכל \mathcal{U}\subseteq \mathcal{W} המקיים \mathcal{W}\subseteq \mathcal{W} המקיים לכל \mathcal{U}\subseteq \mathcal{W} המקיים אופר לכל בורו לכל \mathcal{U}\subseteq \mathcal{W}
```

 $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פיימת סביבה $p\in A$ מעל תת־קבוצה: תהא און $v:A o\mathbb{R}^k$ אזי $a\subseteq\mathcal{M}$ אזי מעל תת־קבוצה: תהא

מסקנה: תהא $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ חסומה פתוחה וחלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר שויהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{U}\in\mathbb{R}^n$ $\operatorname{Flux}_F(\partial \mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \operatorname{div}(F)$

למה: תהא $X+B_{arepsilon}(0)$ אזי ויהי arepsilon>0 אזי קומפקטית מדידה ז'ורדן.

למה: תהא $\psi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ קיימת לכל $\varepsilon>0$ עבורו לכל פיים אזי קיים אזי קיים אזי קיים למה:

- $.0 < \psi < 1 \bullet$
- $.\psi_{\uparrow_{X+B_{\varepsilon}(0)}}=1$ •
- $\psi_{\upharpoonright \mathbb{R}^n \setminus (X+B_{3\varepsilon}(0))} = 0 \bullet$
- $. \Big| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Big| \leq \frac{C}{\varepsilon}$ מתקיים $i \in [n]$ לכל •

משפט הדיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ משפט הביברגנץ: תהא א א פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה שפה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא משפט $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\operatorname{Flux}_F\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\operatorname{div}\left(F
ight)$ איז $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight)$ ויהי $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$

 \mathcal{U} טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא אוס חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי וורמל חיצוני ל־ \mathcal{U} .Vol_n $(\mathcal{U}) = \frac{1}{n} \int_{\partial^{\text{sm}} \mathcal{U}} \langle x, N \rangle \, d\text{Vol}_{n-1}(x)$ אזי

פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^\mathrm{sm}\mathcal{U}\right)<\infty$ עבורה עם שפה כמעט חלקה פתוחה עם שפה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא עבורה אינטגרציה בחלקים: $\int_{\mathcal{U}} \left(rac{\partial f}{\partial v} \cdot g
ight) = \int_{\partial \mathcal{U}} \left(f \cdot g \cdot \langle N, v
angle
ight) - \int_{\mathcal{U}} \left(f \cdot rac{\partial g}{\partial v}
ight)$ אזי $v \in \mathbb{R}^n$ איזי $f, g \in C^1 \left(\mathcal{W}, \mathbb{R}
ight)$ תהיינה

 $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ מתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{W}=\mathbb{R}^n$ תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר טענה נוסחאות גרין: תהא יהי $u,v:\mathcal{W} o\mathbb{R}$ יהי G נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $\overline{G}\subset\mathcal{W}$

- . $\int_G \Delta u = \int_{\partial G} rac{\partial u}{\partial N}$ אזי C^2 הינה u . 1 . $\int_G \langle \nabla u, \nabla v \rangle = -\int_G u \cdot \Delta v + \int_{\partial G} u \cdot rac{\partial v}{\partial N}$ אזי C^1 אזי C^2 הינה v . 2 . נניח כי
 - $\int_G (u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u)=\int_{\partial G} \left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial N}
 ight)$ אזי C^2 הן u,v כי גניח כי

פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G
ight)<\infty$ עבורה שפה כמעט חלקה עם שפה תוחה עם פתוחה אנרגיית $G\subseteq\mathbb{R}^n$ עהא $\int_G \left\|\nabla v\right\|^2$ אזי $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ותהא ותהא G ליהי לורמל יהי יהי $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$

 $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $G\subseteq \mathbb{R}^n$ מסקנה: תהא עבורה שפה כמעט חלקה עבורה שפה כמעט חלקה עבורה $\int_G \left\|\nabla v\right\|^2 = -\int_G v\cdot\Delta v + \int_{\partial G} v\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$ אזי $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ותהא ותהא ליהי נורמל חיצוני ל־

 $\Delta u=0$ המקיימת $u\in C^{2}\left(G,\mathbb{R}
ight)$ פתוחה אזי $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת פונקציה הרמונית:

 $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$ פתוחה באשר עם פה כמעט חלקה עבורה עם איז $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$ פתוחה באשר עם שפה כמעט חלקה עבורה תהא $G\subseteq \mathbb{R}^n$ עתהא נורמל חיצוני ל־G ותהא $u \in C^2\left(\mathcal{W}, \mathbb{R}
ight)$ ותהא N

- $.Flux_{\nabla u}(\partial G) = 0 \bullet$
- .Gב מקומית קבועה אזי u אזי $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}}=0$ נניח נניח נניח •
- Gבועה מקומית אזי קבועה מקומית בי נניח כי נניח כי קבועה מקומית •

 $.f_{\mathcal U}f=rac{1}{ ext{Vol}(\mathcal U)}\int_{\mathcal U}f$ אינטגרבילית רימן אזי $f:\mathcal U o\mathbb R$ תהא $\mathcal U\subseteq\mathbb R^n$ סימון: תהא

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight)$ ותהא ותהא $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ הרמונית הערך הממוצע: תהא $.u\left(a\right)=\int_{\partial B\left(a\right)}u$ אזי

 $u\left(a
ight)=\int_{B_{r}\left(a
ight)}u$ אזי אוי $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}
ight)$ ותהא $\overline{B_{r}\left(a
ight)}\subseteq\mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ מסקנה: תהא r>0 הרמונית אזי $a\in\mathbb{R}^{n}$ $\Delta f\left(a
ight)=\lim_{r
ightarrow0}rac{2n}{r^{2}}\left(f_{\partial B_{r}\left(a
ight)}f-f\left(a
ight)
ight)$ אזי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f\in C^{2}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}
ight)$ אזי $f\in\mathcal{C}^{2}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}
ight)$

u אזי $\max\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$ וכן G^{-} וכן המקסימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u:\overline{G} o\mathbb{R}$ רציפה באשר ב $u:\overline{G} o\mathbb{R}$ קבועה.

u אזי $\min\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$ וכן G הרמונית ב-G וכן $u:\overline{G} o\mathbb{R}$ תחום ותהא ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי המינמום: יהי קבועה.

. משפט ליוביל: תהא $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי $u:\mathbb{R}^n$

. מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלעיל אזי $u:\mathbb{R}^n$

טענה אינטגרל פואסון: יהי $n \geq 2$ תהא $u \in C^2\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}
ight)$ תהא תהא $n \geq 3$ אזי יטענה אינטגרל פואסון: יהי

 $u\left(a
ight)=rac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})(n-2)}\int_{\mathbb{R}^n}rac{\Delta u(x)}{|x-a|^{n-2}}\mathrm{d}x$ משפט גרעין פואסון: תהא $uert_{B_1^n(0)} o\mathbb{R}$ רציפה באשר $u:\overline{B_1^n(0)} o\mathbb{R}$ מתקיים

 $.u\left(a\right) = \tfrac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\left(x\right) \cdot \tfrac{1-\|a\|^2}{\|x-a\|^n} \mathrm{dVol}_{n-1}$

```
u\left(x
ight)=rac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}
ight)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y
ight)\cdotrac{1-\left\Vert x\right\Vert ^{2}}{\left\Vert y-x\right\Vert ^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y
ight) הינה u:\overline{B_{1}^{n}\left(0
ight)}
ightarrow\mathbb{R} אזי f\in C^{2}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}
ight) הינה וואסקנה:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                           .u_{\mid_{\mathbb{R}^{n-1}}}=f הרמונית וכן
                                                                                                                                                                                                                 V^* = \operatorname{\mathsf{Hom}}\left(V,\mathbb{R}
ight) המרחב הדואלי: יהי V מ"ו ממשי אזי
                                                               e_i^*\left(e_j
ight)=\delta_{i,j} המוגדרת e_i^*:V	o\mathbb{R} אזי i\in[n] אויהי V בסיס של \{e_1\dots e_n\} בסיס איז מישר מייהי ע
                                                                                                                                   V^* טענה: יהי V מ"ו ממשי ויהי \{e_1 \dots e_n\} בסיס של \{e_1 \dots e_n\} בסיס של
                                                                                                                                                                         T_p\left(\mathcal{M}
ight)^* אזי p\in\mathcal{M} יריעה ותהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי המרחב הקו־משיק:
                                                                                                                                                                         T_{n}^{*}\left(\mathcal{M}
ight)=T_{n}\left(\mathcal{M}
ight)^{*} אזי p\in\mathcal{M} יריעה ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}
                                                                                                                                                                                v\in T_p^*\left(\mathcal{M}
ight) אזי p\in\mathcal{M} יריעה ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי תהא
                                                                                                \omega\left(x
ight)\in T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}
ight) המקיימת \omega:\mathcal{M}	o\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{*} יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} המקיימת \mathcal{M}
                                                                                        \omega_x=\omega\left(x
ight) יריעה תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי זירעה תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא
                                                                                                                    \omega_x \in T^*_x(\mathcal{M}) אלא \omega_x \in (\mathbb{R}^n)^* מתקיים ולא מתקיים מכיוון ולא מדוייקת מלעיל אוא ההגדרה מלעיל
                                                                                                                                                                       טענה: יהי u \in \mathfrak{X}\left(\mathcal{M}\right) אזי v \in \mathfrak{X}\left(\mathcal{M}\right) ז־תבנית דיפרנציאלית.
                                                                                                   \mathrm{d}f\left(x
ight)\left(x
ight)\left(v
ight)=rac{\partial f}{\partial v}\left(x
ight) המוגדרת \mathrm{d}f:\mathcal{M}	o\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{*} אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) המוגדרת
                                                                                                                                                                                                         . טענה: תהא לית דיפרנציאלית אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) תהא ישנה: תהא
                                                                                                                                                   \operatorname{d}(f\cdot g)=f\cdot\operatorname{d} g+g\cdot\operatorname{d} f אזי f,g\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) מענה כלל לייבניץ': תהיינה
                                                                                                                                                                       q_i\left(u
ight)=u_i המוגדרת q_i:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} אזי i\in[n] ויהי n\in\mathbb{N} יהי הטלה: יהי
                                                                                                                                                                x_i = q_i \circ arphi המוגדרת x_i : \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} אזי אזי מפה על (\mathcal{U}, arphi) מפה על
                                                                                                                                     \{x_1 \dots x_k\} אזי \mathcal M מערכת קואורדינטות מקומיות על יריעה: תהא מפה על
                                                       .rac{\partial f}{\partial x_i}\left(p
ight)=rac{\partial \left(f\circarphi^{-1}
ight)}{\partial x_i}\left(arphi\left(p
ight)
ight) איי i\in[k] ויהי p\in\mathcal{M} תהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תהא \mathcal{M} מפה על
                                                                                                                              \mathbb{R}^{k}כמו ב-\mathcal{M} על x_1 \dots x_k מטרת הסימונים מלעיל הינה לאפשר קואורדינטות
                                                                                                                                            \mathcal{U}טענה: תהא (\mathcal{U}, \varphi) מפה על \mathcal{M} ויהי i \in [k] אזי ויהי מפה על מפה לענה: תהא
                                                                                                                      rac{\partial}{\partial x_i}\left(p
ight)=rac{\partialarphi^{-1}}{\partial x_i}\left(arphi\left(p
ight)
ight) איז i\in[n] ויהי p\in\mathcal{M} תהא תהא \mathcal{M} מפה על מפה על
                                                                                                                                                       \mathrm{d}x_i|_p=\mathrm{d}x_i\left(p
ight) אזי p\in\mathcal{U} ווהי ווהי i\in[k] יהי על \mathcal{M} מפה על (\mathcal{U},arphi) מפה מימון: תהא
                                                                                                                     T_x^*\left(\mathcal{M}
ight) בסיס של \{\mathrm{d}x_1|_x,\ldots,\mathrm{d}x_k|_x\} אזי x\in\mathcal{U} ויהי \mathcal{M} ויהי מפה על (\mathcal{U},arphi) מפה על
                                      \mathrm{d}x_i|_p=\left(rac{\partial}{\partial x_i}\left(p
ight)
ight)^* אזי p\in\mathcal{U} אזי i\in[k] ויהי \mathcal{M} מפה על \mathcal{M} מפה על \mathcal{M} יהי ויהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n איזי ביפרנציאלית \mathcal{M} עבורה לכל מפה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n איזי ביפרנציאלית דיפרנציאלית \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזי ביערנאיאלית ביפרנציאלית וולכל איזי ביער אויי ביערנאיאלית וולכל איזי ביערנאיאלית וולכל איזי ביערנאיאלית וולכל איזי ביערנאיאלית וולכל איזי ביער איזי ביערנאיאלית וולכל איזי ביערנאיאלית וולכל וולכל איזי ביערנאיאלית וולכל וולכל איזי ביערנאיאלית וולכל וולכ
                                                                                                                                                      f_1\dots f_k\in C^m\left(\mathcal{U}
ight) מתקיים \omega=\sum_{i=1}^kf_i\cdot\mathrm{d}x_i באשר באשר f_1\dots f_k\in\mathcal{U}	o\mathbb{R}
עבורו לכל \{(\mathcal{U}_lpha, arphi_lpha)\}_{lpha \in \Lambda} אטלס שלס שלס שיים)\Longleftrightarrowו(\omega \in C^m) איזי דיפרנציאלית איזי דיפרנציאלית יריעה ותהא \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יריעה ותהא
                                                                                                         \omega = \sum_{i=1}^k f_i \cdot \mathrm{d} x_i באשר באשר f_1 \dots f_k \in \mathcal{U}_lpha 	o \mathbb{R} ולכל lpha \in \Lambda
                                                                                                                   .\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight)=\{\omega\mid\mathcal{M} על C^{\infty} על דיפרנציאלית 1 בנית הזי אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}
                                                                                                                                              \mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{k}rac{\partial f}{\partial x_{i}}\cdot\mathrm{d}x_{i} אזי אזי \mathcal{M} מפה על \mathcal{M} ותהא f\in C^{1}\left(\mathcal{M}
ight)
                                                                                                                                                                     C^m אזי f \in C^{m+1}(\mathcal{M}) הינה 1-תבנית דיפרנציאלית מסקנה: תהא
F^*:\Omega^1\left(\mathcal{N}
ight)	o\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight) אזי F\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{N}
ight) יריעה תהא \mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m אזי (pull back) משיכה לאחור
                                                                                                                                                                                                                                                .F^{*}\left(\omega,x,v\right)=\omega_{F\left(x\right)}\left(\mathcal{D}_{x}\left(F\right)\cdot v\right) המוגדרת
                          .(F^*_\omega)_x(v)=F^*\left(\omega,x,v
ight) אזי אזי F\in C^1\left(M,N
ight) יריעה תהא אינטגרל הוא יריעה עני: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n אינטגרל קווי מסוג שני: תהא \gamma:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה \gamma:[a,b]	o \mathcal{M} אזי אינטגרל אינטגרל קווי מסוג שני: תהא אינטגרל קווי מסוג שני
                                                                                               . טענה: תהא \int_{\gamma}:\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow\mathbb{R} אזי למקוטעין מסילה \gamma:[a,b]
ightarrow\mathcal{M} הינו פונקציונל לינארי
טענה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה: תהא \psi:[lpha,eta]	o [a,b] למקוטעין תהא \gamma:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה מסילה למקוטעין ענה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה: עובה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה מסילה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה עובה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה אי־תלות בבחירת פרמטריז אורים בעוד אורים בעוד אורים בעוד אי־תלות בעוד אורים בעוד או
                                                                                                                                                                                                                                                               .\int_{\gamma}\omega=\int_{\gamma\circ\psi}\omega אזי \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight) ותהא
                                                                                                                                   \det\left(\left[arphi
ight]_{\mathrm{st}}
ight)>0 עבורה arphi\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) העתקה לינארית שומרת אוריינטציה:
```

 $x\in\mathcal{U}$ אזי דיפאומורפיזם $\mathcal{D}_x\left(f
ight)$ עבורו $f:\mathcal{U} o\mathcal{V}$ עבורו אזי דיפאומורפיזם לכל תהיינטרציה: תהיינטרציה תהיינטר $O\left(x
ight)\in\mathcal{U}$ אזי דיפאומורפיזם $O\left(x
ight)\in\mathcal{U}$ אזי דיפאומורפיזם $O\left(x
ight)\in\mathcal{U}$ מסילה פשוטה אזי $O\left(x
ight)\in\mathcal{U}$ מסילה פשוטה אזי $O\left(x
ight)\in\mathcal{U}$ אוריינטציה של מסילה: תהא

הערה: אם המסילה לא פשוטה נפרק אותה מספר מסילות פשוטות ונחבר בסוף.

 $\{\pm\dot{\gamma}(\gamma^{-1}(x))\}$

```
המוגדרת O:\operatorname{Im}(\gamma)	o\mathbb{R}^n למקוטעין אזי \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} המוגדרת מסילה: תהא מסילה: תהא
                                                                                                                                                         O(x) = \dot{\gamma} \left( \gamma^{-1} (x) \right)
                     \operatorname{Im}(\gamma) שענה: תהא \gamma:[a,b]	o \mathcal{M} הינה אוריינטציה למקוטעין אזי האוריינטציה למקוטעין אזי מסילה \gamma:[a,b]	o \mathcal{M}
    ar{\gamma}(t)=\gamma\left(a+b-t
ight) המוגדרת ar{\gamma}:[a,b]	o\mathcal{M} מסילה למקוטעין אזי \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} המיגדרת \gamma:[a,b]	o\mathcal{M}
                                                                                    \int_{\overline{\gamma}}\omega=-\int_{\gamma}\omega אזי אזי מסילה \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} אזי סענה: תהא
                                                                                           \int_a^b \omega = -\int_b^a \omega אזי \omega \in \Omega^1\left([a,b]
ight) ותהא a,b \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
                            שרשור מסילה C^1 מסילה \gamma_2:[b,c]	o \mathcal{M} אזי למקוטעין אזי \gamma_1:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה מסילה שרשור מסילות. תהא
.(\gamma_1\cup\gamma_2)\,(t)=\left\{egin{array}{ll} \gamma_1(t) & t\in[a,b] \\ \gamma_2(t) & t\in[b,c] \end{array}
ight. אזי \omega\,\in\,\Omega^1\,(\mathcal{M}) מסילה C^1 למקוטעין ותהא \gamma_2:[b,c]	o \mathcal{M} אזי \gamma_2:[a,b]	o \mathcal{M} אזי
.\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\omega=\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega ביבה של f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} בה למקוטעין ותהא \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} קיימת \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} בה הינה מענה: תהא
                                                                                                                                 \int_{\gamma} \mathrm{d}f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) אזי C^1
                                      \|\omega_{x}\|_{\infty}=\max\left\{ \omega_{x}\left(v
ight)\mid\left(v\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight)
ight)\wedge\left(\|v\|=1
ight)
ight\} אזי x\in\mathcal{M} ותהא \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight) ותהא \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight)
                \int_{\gamma}\omega\leq \mathrm{Length}\left(\gamma
ight)\cdot\max_{t\in[a,b]}\left\|\omega_{\gamma(t)}
ight\|_{\infty} אזי \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight) למקוטעין ותהא \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} אזי \gamma:[a,b]
אזי ניתן לחשוב על \partial G בתור איחוד סופי Vol_{n-1} (\partial^{
m sm}G) <\infty חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה G\subseteq\mathbb{R}^n אזי ניתן לחשוב על
                                                                                                                                                          זר של מסילות סגורות.
אוריינטציה N עסוn-1 (\partial^{\mathrm{sm}}G)<\infty עבורה עבורה עם שפה פתוחה פתוחה אוריינטציית הגל שמאל: תהא אוריינטציית הגל שמאל
                      עבורה O:\partial G	o \mathbb{R}^2 אזי אוריינטציה אוריינטציה עבורן וסגורות וסגורות מסילות מסילות \gamma_1\dots\gamma_m
                                                                                                                              x \in \partial G לכל \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot O(x) = -N(x)
ינה C^1 אזי \partial G וכן Ol_{n-1}(\partial^{
m sm}G)<\infty אינה פרמטריזציה נורמלית: תהא מחוחה עם שפה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה
                 \|\gamma_i'(t)\|=1 מתקיים t\in \mathrm{Dom}\,(\gamma_i) ולכל וול לכל i\in [m] וכן לכל עבורן עבורן \gamma_i=\partial G מיימות ארות וסגורות עבורן
     משפט גרין: תהא \partial G וכן \partial G וכן \mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^\mathrm{sm}G
ight)<\infty משפט גרין: תהא שפה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה
\int_{\partial G}\left(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y
ight)=\int_{G}\left(rac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-rac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y פתוחה באשר R פתוחה באשר G יהי R נורמל חיצוני ל־R ותהיינה R ותהיינה על פתוחה באשר
                                                                                                                                  .באשר \partial G עם אוריינטציית רגל שמאל
למקוטעין C^1 וכן \partial G וכן \partial C^1 וכן \partial C^1 וכן \partial C^1 וכן אוס: תהא C^1 וכן \partial C^1 וכן אוס: תהא C^1 למקוטעין
                                                                             . באשר אוריינטציית עם אוריינטציית Area (G)=rac{1}{2}\int_{\partial G}\left(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x
ight) אזי
T\left(\left(\begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_s \end{array}\right)\right) = -T\left(R_{i\leftrightarrow j}\cdot \left(\begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_s \end{array}\right)\right)יכי
                                                         i,j הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות R_{i\leftrightarrow j}\in \mathring{M}_n(A) אזי איזי i,j\in [n] הינה מטריצת החלפת
                                                                .igwedge^k V^* = ig\{\omega \in \mathrm{Hom}\,(V^k,\mathbb{R}) \mid \omega אנטי סימטרית אזי \omega\} אזי מ"ו מעל מ"ו מעל מ"ו מעל אזי אנטי סימטרית.
                                                                                                                             .igwedge^0 V^* = \mathbb{R} אזי \mathbb{R} מ"ו מעל V מ"ו מימון: יהי
                                                                                         \det_n \in \bigwedge^n V^* אזי \dim\left(V
ight) = n באשר מ"נ מעלה: יהי עמ"נ מעל
                                     \omega\left(u_1\dots u_k
ight)=0 אזי \omega\inigwedge^kV^* אויים לינארית ותהא u_1\dots u_k\in V יהיו מעל u_1\dots u_k\in V יהי
                                                                   באשר arphi_1\wedge\ldots\wedgearphi_k\in igwedge^k V^* אזי arphi_1\ldotsarphi_k\in V^* באשר יהיו יהיו
                                                                             u_1 \dots u_k \in V לכל (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) (u_1 \dots u_k) = \det \left( (\varphi_i (u_j))_{i,j \in [k]} \right)
בסיס של \left\{e_{a_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{a_k}^* \mid 1 \leq a_1 < \ldots < a_k \leq n 
ight\} אזי k \in [n] בסיס של e_1 \ldots e_n בסיס של v מ"ו מעל v מ"ו מעל v יהי
                                                                                                                                                                              . \bigwedge^k V^*
                                                                              \dim\left(igwedge^k V^*
ight)=inom{n}{k} אזי \dim\left(V
ight)=n באשר מסקנה: יהי
                                                                            .igwedge^n V^* = \operatorname{span} \left\{ \det_n 
ight\} אזי \dim (V) = n באשר \mathbb R מטקנה: יהי V מ"י מעל
                                         טענה: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} ויהיו k,\ell\in\mathbb{N} אזי קיימת ויחידה k,\ell\in\mathbb{N} טענה: יהי יהי ע מ"ו מעל
                                    (\varphi_1 \ldots \varphi_k, \psi_1 \ldots \psi_\ell \in V^* לכל (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) \wedge (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k) = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k
                           \omega\left(x
ight)\inigwedge^pT_x^*\left(\mathcal{M}
ight) המקיימת \omega:\mathcal{M}	o\operatorname{Hom}\left(\left(\mathbb{R}^n
ight)^p,\mathbb{R}
ight) יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת \mathcal{M}
                                           \omega_x=\omega\left(x
ight) אזי אזי x\in\mathcal{M} ותהא אלית על דיפרנציאלית דיפרנציאלית תהא יריעה תהא יריעה תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא
                                     \omega_x\in \bigwedge^p T^*_x(\mathcal{M}) אלא \omega_x\in \operatorname{Hom}\left(\left(\mathbb{R}^n\right)^p,\mathbb{R}\right) הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים
```

```
הינה \omega \wedge \nu יריעה אזי M \subset \mathbb{R}^n בירנית היפרנציאלית ותהא הינה \omega \wedge \nu יריעה תהא אזי M \subset \mathbb{R}^n מכפלת וודג'/מכפלת יתד:
                                                                                                                            (\omega \wedge \nu)_x = \omega_x \wedge \nu_x באשר באשר דיפרנציאלית דיפרנציאלית ב
                                                         \mathrm{d}x_{\{a_1\dots a_n\}}=\mathrm{d}x_{a_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{a_n} אזי 1\leq a_1<\ldots< a_k\leq n באשר a:[p]	o[k] איזי a:[p]
                      ולכל \mathcal{M} של \mathcal{M} של \mathcal{M} של \mathcal{M} עבורה לכל מפה \mathcal{M} עבורה אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יריעה אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}
                                                I\in\mathcal{P}_{p}\left(\left[k
ight]
ight) לכל f_{I}\in C^{m}\left(\mathcal{U}
ight) מתקיים \omega=\sum_{I\in\mathcal{P}_{p}\left(\left[k
ight]
ight)}f_{I}\cdot\mathrm{d}x_{I} באשר f\in\mathcal{P}_{p}\left(\left[k
ight]
ight)
ightarrow\left(\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}
ight)
                                                            \Omega^p\left(\mathcal{M}
ight)=\{\omega\mid\mathcal{M} על C^\infty על הינה \sigma^pתבנית הינה \omega הינה \omegaיריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n הינה סימון: תהא
H^*:\Omega^p\left(\mathcal{N}
ight)	o\Omega^p\left(\mathcal{M}
ight) איז F\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{N}
ight) יריעה ותהא \mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m יריעה ותהא
                                                                                                  H^*\left(\omega,x,v_1\ldots v_p\right)=\omega_{H(x)}\left(\mathcal{D}_x\left(H\right)\cdot v_1,\ldots,\mathcal{D}_x\left(H\right)\cdot v_p\right) המוגדרת
                                    M \in \mathcal{C}^1יריעה תהא M \subseteq \mathcal{C}^1 אזי \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n יריעה תהא יריעה תהא \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m יריעה תהא יריעה תהא
G\in C^1(\mathcal{N},\mathcal{L}) אזי H\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N}) יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא \mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא
                                                                                                                                                                                        (G \circ H)^* = H^* \circ G^*
\operatorname{dd}\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_{p}([k])}f_{I}\cdot\operatorname{d}\!x_{I}
ight)=\sum_{I\in\mathcal{P}_{p}([k])}\left(\operatorname{d}\!f_{I}\wedge\operatorname{d}\!x_{I}
ight) המוגדרת חיצונית: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} פתוחה אזי \mathcal{U}=\mathbb{R}^{n} פתוחה אזי
                                                                                                                                                     .טענה: תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n לינארית \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                 \mathrm{d}\left(\mathrm{d}\omega
ight)=0 אזי \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי \mathcal{U}
                                                                                                                          \Omega\left(\mathcal{U}
ight)=igcup_{p\in\mathbb{N}_{+}}\Omega^{p}\left(\mathcal{U}
ight) אזי פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} תהא
b\left(\omega
ight)\in\Omega^{p+1}\left(\mathcal{U}
ight) באשר באניות אווי אופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות דיפרנציאליות: תהא
                 \alpha_1\ldots\alpha_k\in\mathcal{U}^* לכל b (\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k)=\sum_{i=1}^k\left(-1
ight)^{i+1}\left(lpha_1\wedge\ldots\wedgelpha_{i-1}\wedge\mathrm{b}\left(lpha_i
ight)\wedgelpha_{i+1}\wedge\ldots\wedgelpha_k
ight) לכל \omega\in\Omega^p\left(\mathcal{U}
ight)
                                                                                                     . טענה כלל לייבניץ: תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n פתוחה אזי \mathcal{U} מקיימת את כלל לייבניץ
טענה: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n לכל \mathcal{U}: \mathcal{U} לינארית המקיימת את כלל לייבניץ וכן לכל \mathcal{U}: \mathcal{U} לכל \mathcal{U}: \mathcal{U} לכל שנה: תהא
                                                                                                                                                         b = d אזי f \in C^{\infty}(\mathcal{U}) לכל b(f) = df
                                           .<br/>d(F_{\omega}^*)=F_{\mathrm{d}\omega}^*אזי אזי \omega\in\Omega^p\left(\mathcal{V}\right) ותהא דיפאומורפיזם היינה יהי<br/>טענה: \mathcal{U}\to\mathcal{V} פתוחות יהי יהי \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n איינה
                                 (F^{-1})^*=(F^*)^{-1} אזי \omega\in\Omega^p\left(\mathcal{V}
ight) אזי היינה F:\mathcal{U}	o\mathcal{V} פתוחות יהי \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n איינה.
                                       \omega אזי \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}
ight) אזי \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}
ight) אזי אינה \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}
ight) אזי אינה \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי איינה מינה
  .arphi_2^*\left(\mathrm{d}\left(arphi_2^{-*}\left(\omega
ight)
ight)
ight)=arphi_1^*\left(\mathrm{d}\left(arphi_1^{-*}\left(\omega
ight)
ight)
ight) מפות אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא \omega\in\Omega^p\left(\mathcal{M}
ight) ותהיינה \omega\in\Omega^p\left(\mathcal{M}
ight) מפות אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא
\omega^{-*}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\left(arphi^{-*}\omega
ight) מתקיים (\mathcal{U},arphi) מתקיים \mathrm{d}\omega\in\Omega^{p+1}\left(\mathcal{M}
ight) אזי\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}
ight) אזי\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}
ight) אזי\omega\in\Omega^{p}(\mathcal{M}) מתקיים
                                                           \mathrm{d}\omega=arphi^{st}\left(\mathrm{d}\left(arphi^{-st}\omega
ight)
ight) אזי \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}
ight) מפה ותהא מפה \left(\mathcal{M},arphi
ight) יריעה תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}
                                           T_n(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n עצמה עצמה T_n(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n עצמה ק־תבנית היא שקולה ל־ק־תבנית דיפרנציאלית מהיות ומתקיים
                                                                                          \det_n = \mathrm{d} x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d} x_n אזי \dim(V) = n באשר \mathbb{R} מסקנה: יהי V מיינ מיינ מעל
                                              עבורה f\cdot \mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_k בעלת תומך קומפקטי אזי f\in C\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא שינגטרל: תהא
                                                                                                                                          \int_{\mathcal{U}} (f \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = \int_{\mathcal{U}} f(x) dx_1 \ldots dx_k
                                                                  \omega=f\cdot\det_{k} עבורה f\in C\left(\mathcal{U}
ight) אזי קיימת \omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{k}
                                     טענה: יהיו \omega\in\Omega^k תחומים יהי \mathcal{U}	o\mathcal{V} דיפאומורפיזם ותהא בעלת \omega\in\Omega^k בעלת תומך קומפקטי אזי F:\mathcal{U}	o\mathcal{V}
                                                                                                                                                                   \int_{\mathcal{U}} \omega = \operatorname{sign} \left( \det \left( \mathcal{D} \left( T \right) \right) \right) \cdot \int_{\mathcal{U}} T_{\omega}^{*}
                                                                 \omega_x \in \mathcal{M} לכל \omega_x \neq 0 עבורה \omega \in \Omega^k\left(\mathcal{M}\right) יריעה \omega_x \neq 0 יריעה \omega_x \neq 0 יריעה אזי שנית נפח:
f>0 באשר f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} עבורן קיימת \omega_1,\omega_2\in\Omega^k\left(\mathcal{M}
ight) באשר אזי תבניות נפח יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה
                                                                                                                                                                                          \omega_2 = f \cdot \omega_1 המקיימת
                                                                                         . יריעה אזי שקילות תבניות נפח על \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n יריעה אזי שקילות תבניות נפח על \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n
                                                \mathcal M טענה: תהא \mathcal M \subset \mathbb R^n אי יריעה קשירה אזי קיימות לכל היותר 2 מחלקות שקילות של תבניות נפח על
                                                           \mathcal M אוריינטציה של יריעה: תהא \mathcal M\subseteq\mathbb R^n יריעה קשירה אזי מחלקת שקילות של תבניות נפח על
                                                                                   \det_n אזי מחלקת השקילות של יהי יהי האוריינטציה האוקלידית הסטנדרטית: יהי
                   תבנית נפח חיובית: תהא \eta\in\Omega^k יריעה k־מימדית עם אוריינטציה אזי תבנית נפח \eta\in\Omega^k השייכת לאוריינטציה. \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
\mathcal{U} אי יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה עם אוריינטציה אזי מפה משמרת אוריינטציה: תהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה איזי מפה משמרת אוריינטציה: תהא
                                                                                                                                          \mathbb{R}^k מתקיים כי \left(arphi^{-1}
ight)^*(\eta) תבנית נפח חיובית על
```

 (\mathcal{U},ψ) מפה אזי קיימת מפה אוריינטציה עם אוריינטציה ותהא אוריינטציה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ פענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אוריינטציה ותהא

 C^1 משפט גרין בשפה של תבנית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $G\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן Vol_{n-1} ($\partial^{\mathrm{sm}}G$) אינה Vol_{n-1} בשפר Vol_{n-1} ($\partial^{\mathrm{sm}}G$) אינה Vol_{n-1} באשר למקוטעין תהא Vol_{n-1} פתוחה באשר Vol_{n-1} יהי Vol_{n-1} נורמל חיצוני ל- Vol_{n-1} ותהא Vol_{n-1} אזי Vol_{n-1} באשר Vol_{n-1} פתוחה באשר Vol_{n-1} יהי Vol_{n-1} נורמל חיצוני ל- Vol_{n-1} ותהא של אזי Vol_{n-1} פתוחה באשר Vol_{n-1} יהי Vol_{n-1} נורמל חיצוני ל- Vol_{n-1} ותהא של אזי שמאל.

 $\mathrm{d}\omega=0$ עבורה שנית איני $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight)$ יריעה איזי אוי תהא תהא מגורה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$

 $\omega=\mathrm{d}f$ המקיימת $f\in C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ עבורה קיימת $\omega\in\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)$ יריעה אזי איריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\omega\in\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)$ המקיימת $\omega\in\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)$ הריעה ותהא $\omega\in\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)$ מסקנה: תהא $\omega\in\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)$ יריעה ותהא

מתקיים מחקיים γ למקוטעין ל C^1 מסילה לכל מסילה עבורה $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ מתקיים משמרת: תהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ יריעה אזי $\omega=0$

 C^1 מסילה $\gamma:[a,b] o \mathcal{M}$ עבורה לכל $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ עבורה לכל $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ אזי ($\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ מסילה $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ אזי ($\int_{\gamma}\omega=f\left(\gamma\left(b\right)\right)-f\left(\gamma\left(a\right)\right)$ למקוטעין מתקיים ($\int_{\gamma}\omega=f\left(\gamma\left(b\right)\right)-f\left(\gamma\left(a\right)\right)$

. טענה: תהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)$ משמרת טענה: תהא

 ω) \Longleftrightarrow (טענה: תהא ω) אזי (ω מדוייקת) אזי (ω משמרת).

(משמרת). מדוייקת) \Longleftrightarrow אזי (ω סגורה) \Longleftrightarrow אזי (ω סגורה) אזי (ω מאזי (ω משמרת).

 $\mathcal{A}_a\mathcal{M}=\overline{\mathcal{M}}ackslash\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא: תהא שפה גאומטרית/קצה:

 $\mathcal{M}\cap B_{\delta}\left(x
ight)\subseteq\mathcal{N}$ באשר $\mathcal{N}\subseteq B_{\delta}\left(x
ight)$ וקיימת קצה חלקה: תהא יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq \mathcal{R}^n$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq \mathcal{R}^n$ עבורה קיים $\delta>0$ וקיימת $\mathcal{N}=\mathcal{N}$ וקיימת פרמטריזציה טובה $\mathcal{N}=\mathcal{N}$ עבורן $\mathcal{N}=\mathcal{N}$ עבורן $\mathcal{N}=\mathcal{N}$ וקיימת פרמטריזציה טובה אורי אביה טובה אורי אבירן ווייט אבורן ווייט אבירן ווייט אבי

. אינה נקודת קצה חלק: יריעה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה כל $x\in\partial_a\mathcal{M}$ עבורה יריעה יריעה יריעה יריעה יריעה אינה יריעה

. מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה \mathcal{M} יריעה בעלת קצה חלק אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה מסקנה: תהא

 $\omega\in\Omega^k\left(\mathcal{M}
ight)$ אוריינטציה מושרית על קצה חלק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אוריינטציה מושרית על קצה חלק: תהא $\omega^0_x\left(u_1\ldots u_{k-1}\right)=\omega_x\left(N\left(x\right),u_1\ldots u_{k-1}\right)$ המוגדרת $\omega^0_x\in\Omega^{k-1}\left(\mathcal{M}\right)$

 $\int_{\mathcal{M}}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial_n\mathcal{M}}\omega$ אזי $\omega\in\Omega^{k-1}\left(\mathbb{R}^n
ight)$ ותהא קצה חלק בעלת קצה חסומה בעלת יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי משפט סטוקס: