אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq2^{\Omega}$ המקיימת

- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.

σ־אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq2^{\Omega}$ המקיימת

- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.

משפט: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $\mathcal{F}$ הינה אלגברה מעל Ω.

פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1\ldots B_n\in\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}B_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(B_i\right)$.

מידה על אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to\left[0,\infty\right]$ אדטיבית.

פונקציה σ־אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $\left\{B_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B_i\right)$.

מידה על σ־אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to\left[0,\infty\right]$ σ־אדטיבית.

מרחב מדיד: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $\left(\Omega,\mathcal{F}\right)$.

קבוצה מדידה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא μ מידה על $\mathcal{F}$ המקיימת $\exists E\in\mathcal{F}.\mu\left(E\right)>0$ אזי $\mu\left(\varnothing\right)=0$.

למה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ אזי μ אדטיבית.

למה: תהא μ מידה ותהיינה $A,B\in\mathcal{F}$ עבורן $A\subseteq B$ אזי $\mu\left(A\right)\le\mu\left(B\right)$.

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי

- מונוטונית עולה חלש: $\forall n\in\mathbb{N}.A_n\subseteq A_{n+1}$.
- מונוטונית יורדת חלש: $\forall n\in\mathbb{N}.A_{n+1}\subseteq A_n$.

סופרמום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\sup\left(A\right)=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$.

אינפימום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\inf\left(A\right)=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i$.

גבול עליון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$.

גבול תחתון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i$.

גבול: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ עבורה $\liminf_{n\to\infty}A_n=\limsup_{n\to\infty}A_n$ אזי $\lim_{n\to\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n$.

טענה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n\to\infty}A_n=B$ אזי $\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_n\right)=\mu\left(B\right)$.

מרחב מידה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה/σ־אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על $\mathcal{F}$ אזי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mu\right)$.

מידת הסתברות: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת $\mathbb{P}\left(\Omega\right)=1$.

מרחב הסתברות: מרחב מידה $\left(\Omega,\mathcal{F},\mu\right)$ עבורו μ מידת הסתברות.

מרחב התוצאות: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מאורע: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות אזי $E\in\mathcal{F}$.

מרחב המאורעות: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות אזי $\mathcal{F}$.

אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $\left(\left(0,1\right],\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ עבורו לכל $A\subseteq\left(0,1\right]$ ולכל $b\in\left(0,1\right]$ באשר $A+b\subseteq\left(0,1\right]$ מתקיים $\mathbb{P}\left(A\right)=\mathbb{P}\left(A+b\right)$.

טענה: לכל מרחב הסתברות $\left(\left(0,1\right],2^{\left(0,1\right]},\mathbb{P}\right)$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.\left(x-\varepsilon,x+\varepsilon\right)\subseteq A$.

קבוצה סגורה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $A^{\mathcal{C}}$ פתוחה.

טענה: תהיינה $\left\{\mathcal{F}_i\right\}_{i\in I}$ σ־אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ הינה σ־אלגברה מעל Ω.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}$: תהיינה $\left\{\mathcal{F}_i\right\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

קבוצה בורלית: $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

טענה: σ־אלגברה בורלית הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$ המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω ותהא $A \subseteq \Omega$ אזי $\{E \cap A \mid E \in \mathcal{F}\}$ הינה σ־אלגברה מעל A.

σ־אלגברה בורלית מעל $(0,1]$: $\mathfrak{B}_{(0,1]} = \{B \cap (0,1] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$.

מידת לבג: תהא $B \in \mathfrak{B}$ אזי $\lambda(B) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \mid B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\}$.

טענה: $\left((0,1], \mathfrak{B}_{(0,1]}, \lambda\right)$ מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

מרחב אחיד על A: עבור $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(A, \mathfrak{B}_A, \lambda)$.

σ־אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ותהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל Ω המכילות את $\mathcal{T}$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

הצילינדר של ה־σ־אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ו־σ־אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי $\mathcal{T}$.

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\varnothing, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha+1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \left\{A^{\mathcal{C}} \mid A \in \mathcal{F}_\alpha\right\} \cup \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_\alpha\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_\alpha$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ויהיו $\omega, \kappa \in \Omega$ עבורן $\forall A \in \mathcal{T}.\omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A$ אזי $\forall A \in \sigma(\mathcal{T}).\omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A$.

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ עבורה $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$.

פונקציה מדידה בורל: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.\varphi^{-1}[B] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

סימון: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ כך $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}[B]\right)$.

טענה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ מ"מ אזי $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_X)$ מרחב הסתברות.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ אזי

- $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}\left[A^{\mathcal{C}}\right] = f^{-1}[A]^{\mathcal{C}}$.

טענה: יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד ותהא $X : \Omega \to \mathbb{R}$ אזי $\left\{E \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}[E] \in \mathcal{F}\right\}$ הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

משפט: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X : \Omega \to \mathbb{R}$ אזי (X מ"מ)$\Longleftrightarrow\left(\forall t \in \mathbb{R}.X^{-1}[(-\infty, t)] \in \mathcal{F}\right)$.

σ־אלגברה נוצרת על ידי משתנה מקרי: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $\sigma(X) = \sigma\left(\left\{X^{-1}[B] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\right\}\right)$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

- יהי $c \in \mathbb{R}$ אזי cX מ"מ.
- $X + Y$ מ"מ.
- XY מ"מ.
- יהי Z מ"מ על $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ אזי $f \circ X$ מ"מ.

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אזי $f^{-1}[\mathcal{U}]$ פתוחה.

מסקנה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ אזי f מ"מ על $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$.

פונקציית התפלגות מצטברת (פה"מ): יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ המקיימת $F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t)$.

טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

- $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$.
- $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$.
- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t\to a^+} F_X(t) = F_X(a)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X, Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

למה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}_0 \subseteq 2^{\Omega}$ סגורה לחיתוכים סופיים עבורה $\Omega \in \mathcal{F}_0$ ותהא $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ סגורה להפרשים וסגורה לגבולות אינסופיים עבורה $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ אזי $\sigma(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $(F_X = F_Y) \Longleftrightarrow (\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y)$.

תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X) = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0.\mathbb{P}(t - \varepsilon < X < t + \varepsilon) > 0\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X)$ הקבוצה הסגורה המינימלית ב־$\mathbb{R}$ עבורה $\mathbb{P}(X \in \text{supp}(X)) = 1$.

אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $t \in \mathbb{R}$ המקיים $\mathbb{P}(X = t) > 0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי $A_X = \{t \in \mathbb{R} \mid X \text{ אטום של } t\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $|A_X| \le \aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי X המקיים $\mathbb{P}\left(X \in A_X\right) = 1$.

פונקציית צפיפות: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f \ge 0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) \mathrm{d}x = 1$.

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי X עבורו קיימת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a < b$ מתקיים $\mathbb{P}\left(a < X < b\right) = \int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x$.

סימון: יהי X מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של X.

טענה: יהי X מ"מ אזי (X רציף)$\Longleftrightarrow$($\mathbb{P}\left(X \in A_X\right) = 0$).

הערה: לא כל משתנה מקרה הוא בדיד או רציף, ובמקרה זה $0 < \mathbb{P}\left(X \in A_X\right) < 1$.

טענה: יהי X מ"מ רציף אזי

- יהי $t \in \mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}\left(X = t\right) = 0$.
- $F_X\left(t\right) = \int_{-\infty}^{t} f_X\left(x\right) \mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $a \in \mathbb{R}$ עבורה $f_X \in C\left(a\right)$ אזי $F'_X\left(a\right) = f_X\left(a\right)$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ממש עד אשר $F_X = 1$ ויהי $p \in (0,1)$ אזי $x_p \in \mathbb{R}$ המקיים $F_X\left(x_p\right) = p$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ויהי $p \in (0,1)$ אזי $x_p = \sup\left\{t \mid F_X\left(t\right) \le p\right\}$.

טענה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty} F\left(x\right) = 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} F\left(x\right) = 1$ אזי קיים מ"מ X על מרחב הסתברות $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ עבורו $F_X = F$.

סימון: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty} F\left(x\right) = 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} F\left(x\right) = 1$ אזי $X^\star\left(s\right) = \sup\left\{t \mid F\left(t\right) \le s\right\}$.

טענה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim\limits_{x\to-\infty} F\left(x\right) = 0$ וכן $\lim\limits_{x\to\infty} F\left(x\right) = 1$ אזי $X^\star$ מ"מ על $\left(\left(0,1\right), \mathfrak{B}_{(0,1)}, \lambda\right)$.

משפט: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty} F\left(x\right) = 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} F\left(x\right) = 1$ אזי $F_{X^\star} = F$.

טענה: יהי $\lambda > 0$ ויהיו $X_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ מ"מ ויהי $X \sim \text{Poi}\left(\lambda\right)$ מ"מ ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}\left(X_n = k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left(X = k\right)$.

תהליך פואסון: משתנים מקריים $\left\{N_t\right\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ כך שלכל $t \in \mathbb{R}_+$ המ"מ N_t סופר את מספר האירועים בלתי תלויים שקרו עד זמן t, בפרט $N_0 = 0$ וכן $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poi}\left(\lambda t\right)$ באשר λ ממוצע האירועים ליחידת זמן.

טענה: יהי $\lambda > 0$ יהי $X \sim \text{Exp}\left(\lambda\right)$ ויהיו $a, b > 0$ אזי $\mathbb{P}\left(X > a + b \mid X > a\right) = \mathbb{P}\left(X > b\right)$.

טענה: יהי X מ"מ המקיים $\forall a, b > 0 . \mathbb{P}\left(X > a + b \mid X > a\right) = \mathbb{P}\left(X > b\right)$ אזי קיים $\lambda > 0$ עבורו $X \sim \text{Exp}\left(\lambda\right)$.

טענה: הזמן הבינמופעי של תהליך פואסון עם קצב λ מופעים ליחידת זמן מתפלג $\text{Exp}\left(\lambda\right)$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על, עולה ממש וגזירה אזי $f_{\varphi\circ X}\left(t\right) = \frac{f_X\left(\varphi^{-1}(t)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על, יורדת ממש וגזירה אזי $f_{\varphi\circ X}\left(t\right) = -\frac{f_X\left(\varphi^{-1}(t)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(t)\right)}$.

הגדרה: יהי X מ"מ אזי $X^+ = \max\left\{X, 0\right\}$, $X^- = \min\left\{X, 0\right\}$.

תוחלת: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{c\in A_X} c \cdot \mathbb{P}\left(X = c\right)$.

טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^+\right] + \mathbb{E}\left[X^-\right]$.

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו $\mathbb{E}\left[X\right]$ סופי.

משתנה מקרי סימטרי: יהי $a \in \mathbb{R}$ אזי מ"מ X עבורו $\forall b \in \mathbb{R} . \mathbb{P}\left(X \ge a + k\right) = \mathbb{P}\left(X \le a - k\right)$.

טענה: יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי סימטרי סביב a אזי $\mathbb{E}\left[X\right] = a$.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\mathbb{E}\left[X\right] + b$.

משתנה מקרי שולט: יהיו X, Y מ"מ אזי X שולט על Y אם $Y \le X$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $X \ge Y$ מ"מ בדידים אזי $\mathbb{E}\left[X\right] \ge \mathbb{E}\left[Y\right]$.

תוחלת: יהי X מ"מ אזי

- $\mathbb{E}\left[X^+\right] = \sup\left\{\mathbb{E}\left[Y\right] \mid \left(0 \le Y \le X^+\right) \wedge \left(Y \text{ מ"מ בדיד}\right)\right\}$.
- $\mathbb{E}\left[X^-\right] = -\sup\left\{\mathbb{E}\left[Y\right] \mid \left(0 \le Y \le -X^-\right) \wedge \left(Y \text{ מ"מ בדיד}\right)\right\}$.
- $\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^+\right] + \mathbb{E}\left[X^-\right]$.

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו $\mathbb{E}\left[X\right]$ סופי.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\mathbb{E}\left[X\right] + b$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $X \ge Y$ מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\right] \ge \mathbb{E}\left[Y\right]$.

טענה נוסחת הזנב: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{0}^{\infty}\left(1-F_{X}\left(t\right)\right)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\left(0-F_{X}\left(t\right)\right)\mathrm{d}t$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}tf_{X}\left(t\right)\mathrm{d}t$.

משתנה מקרי שולט סטוכסטית: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט סטוכסטית על Y אם $F_{Y}\geq F_{X}$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}\left(Y\leq X\right)=1$ אזי X שולט סטוכסטית על Y.

טענה: יהיו X,Y מ"מ

- אם X שולט סטוכסטית על Y אזי $\mathbb{E}\left[Y\right]\leq\mathbb{E}\left[X\right]$.
- אם $\mathbb{P}\left(Y\leq X\right)=1$ אזי $\mathbb{E}\left[Y\right]\leq\mathbb{E}\left[X\right]$.
- חיבוריות: $\mathbb{E}\left[X+Y\right]=\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[Y\right]$.

טענה אי־שיוויון מרקוב: יהי $X\geq0$ מ"מ אינטגרבילי ויהי $b>0$ אזי $\mathbb{P}\left(X\geq b\right)\leq\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{b}$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא φ מדידה בורל אזי $\mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\sum_{c\in A_{X}}\varphi\left(c\right)\cdot\mathbb{P}\left(X=c\right)$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא φ רציפה למקוטעין אזי $\mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(t\right)f_{X}\left(t\right)\mathrm{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{0}^{1}X^{\star}\left(t\right)\mathrm{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום מלרע אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0}^{1-\varepsilon}X^{\star}\left(t\right)\mathrm{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום מלעיל אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^{1}X^{\star}\left(t\right)\mathrm{d}t$.

שונות: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\mathrm{Var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^{2}\right]$.

סטיית תקן: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\sigma\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\mathrm{Var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left[X^{2}\right]-\mathbb{E}^{2}\left[X\right]$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\mathrm{Var}\left(aX+b\right)=a^{2}\mathrm{Var}\left(X\right)$.

טענה אי־שיוויון צ'בישב: יהי X מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי $a>0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq a\right)\leq\frac{\mathrm{Var}\left(X\right)}{a^{2}}$.

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_{X}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $M_{X}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_{X}\in C^{n}\left(I\right)$ אזי $M_{X}^{\left(n\right)}\left(0\right)=\mathbb{E}\left[X^{n}\right]$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_{X}\left(t\right)$ קיים וסופי על I אזי $\mathbb{E}\left[\left|X\right|^{n}\right]$ מתכנס לכל $n\in\mathbb{N}$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי $\varepsilon>0$ עבורו $M_{X}\left(t\right)$ קיים וסופי על $\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)$ אזי $M_{X}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{n}\frac{t^{n}\mathbb{E}\left[X^{n}\right]}{n!}$.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}^{n}$: תהיינה $\left\{ \mathcal{F}_{i}\right\} _{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}^{n}$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_{i}$.

משתנה מקרי n־מימדי: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות אזי $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n}$ עבורו $X^{-1}\left[B\right]\in\mathcal{F}$.$\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}}$.

משפט: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n}$ אזי (X מ"מ)$\iff\left(\forall t\in\mathbb{R}^{n}.\forall i\in\left[n\right].X_{i}^{-1}\left[\left(-\infty,t\right)\right]\in\mathcal{F}\right)$.

סימון: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n}$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_{X}:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}}\to\mathbb{R}^{n}$ כך $\mathbb{P}_{X}\left(B\right)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B\right]\right)$.

טענה: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n}$ מ"מ אזי $\left(\mathbb{R}^{n},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}},\mathbb{P}_{X}\right)$ מרחב הסתברות.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת: יהי X מ"מ n־מימדי על $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ אזי $F:\mathbb{R}^{n}\to\left[0,1\right]$ המקיימת $F_{X}\left(t\right)=\mathbb{P}\left(X_{1}\leq t_{1},\ldots,X_{n}\leq t_{n}\right)$.

טענה: יהי $\left(X,Y\right)$ מ"מ דו־ערכי אזי

- יהי $\ell\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{k\to-\infty}F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=0$.
- יהי $k\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{\ell\to-\infty}F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=0$.
- $\lim_{\ell\to\infty}\lim_{k\to\infty}F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=1$.
- רציפות מימין: יהיו $p,q\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{k\to p^{+}}\lim_{\ell\to q^{+}}F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=F_{X,Y}\left(p,q\right)$.

טענה: יהי $\left(X,Y\right)$ מ"מ דו־ערכי ויהיו $k_{1}<k_{2}$ וכן $\ell_{1}<\ell_{2}$ אזי $F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{2}\right)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{1}\right)\geq F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{1}\right)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{2}\right)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ n־מימדיים עבורם $\mathbb{P}_{X}=\mathbb{P}_{Y}$.

טענה: יהיו מ"מ n־מימדיים X,Y אזי $\left(F_{X}=F_{Y}\right)\iff\left(\mathbb{P}_{X}=\mathbb{P}_{Y}\right)$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי X_{i} מ"מ חד־מימדי.

משתנה מקרי שולי: יהי X מ"מ n־מימדי אזי X_{i}.

פונקציית התפלגות מצטברת שולית: יהי $\left(X,Y\right)$ מ"מ דו־מימדי אזי

- $F_{X}\left(t\right)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}\left(t,y\right)$.
- $F_{Y}\left(t\right)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}\left(x,t\right)$.

אטום: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $a\in\mathbb{R}^{n}$ עבורו $\mathbb{P}\left(X=a\right)>0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $A_{X}=\left\{ t\in\mathbb{R}^{n}\mid X\text{ אטום של }t\right\}$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $|A_X| \leq \aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: X מ"מ n־מימדי עבורו $\mathbb{P}(X \in A_X) = 1$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי בדיד אזי $\forall a \in A_X . \mathbb{P}_X(a) = \mathbb{P}(X = a)$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי (X מ"מ בדיד)$\Longleftrightarrow$(X_i מ"מ בדיד לכל $i \in [n]$).

פונקציית צפיפות משותפת: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f \geq 0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n = 1$.

משתנה מקרי רציף: X מ"מ n־מימדי עבורו קיימת $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a, b \in \mathbb{R}^n$ המקיימות $a_i < b_i$ מתקיים $\mathbb{P}(a_1 < X_1 < b_1, \ldots, a_n < X_n < b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי (X רציף)$\Longleftrightarrow$($\mathbb{P}(X \in A_X) = 0$).

טענה: הי X מ"מ n־מימדי ויהי $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף אזי $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a_n} \ldots \int_{-\infty}^{a_1} f_X(x_1 \ldots x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $p : [n] \to [n]$ תמורה אזי $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a_{p(n)}} \ldots \int_{-\infty}^{a_{p(1)}} f_X(x_1 \ldots x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ עבורה $f_X \in C(a)$ אזי $\frac{\partial^2 F_X}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 F_X}{\partial y \partial x}(a) = f_X(a)$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף אזי X_i מ"מ רציף לכל $i \in [n]$.

פונקציית צפיפות שולית: יהי (X, Y) מ"מ דו־מימדי אזי

- $f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, y) \mathrm{d}y$.
- $f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t) \mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ אזי $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X$.

פונקציה מדידה בורל: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המקיימת $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} . \varphi^{-1}[B] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי ותהא $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מדידה בורל אזי $\varphi(X)$ מ"מ חד־מימדי.

מסקנה: יהי (X, Y) מ"מ דו־מימדי אזי $f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, s - x) \mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי ותהא $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ בורלית רציפה למקוטעין אזי $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1 \ldots x_n) f_X(x_1 \ldots x_n) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$.

שונות משותפת: יהיו X, Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות אזי $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.

משתנים בלתי מתואמים: X, Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות עבורם $\mathrm{Cov}[X, Y] = 0$.

מקדם מתאם: יהיו X, Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

משפט אי־שיוויון קושי־שוורץ: יהיו X, Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי $\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]$.

מסקנה: יהיו X, Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי $(\exists c \in \mathbb{R} . \mathbb{P}(Y = cX) = 1) \iff \left(\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]\right)$.

מסקנה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$.

מסקנה: יהיו X, Y מ"מ אזי

- $(\exists a > 0 . \exists b \in \mathbb{R} . \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \iff (\rho_{X,Y} = 1)$.
- $(\exists a < 0 . \exists b \in \mathbb{R} . \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \iff (\rho_{X,Y} = -1)$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי

- $\mathrm{Cov}[X, X] = \mathrm{Var}[X]$.
- $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{Cov}[Y, X]$.
- $\mathrm{Cov}[aX + b, Y] = a\mathrm{Cov}[X, Y]$.
- $\mathrm{Cov}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{m} Y_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Cov}[X_i, Y_i]$.

משתנים מקריים בלתי תלויים: $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ חד־מימדיים עבורם לכל מאורעות $\{B_i\}_{i=1}^n$ המקיימים $\forall k \in [n] . B_k \in \sigma(X_k)$ מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת ותהיינה $\{g_i\}_{i=1}^n$ פונקציות מדידות בורל אזי $\{g_i(X_i)\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ אזי ($\{X_i\}_{i=1}^n$ ב"ת)$\Longleftrightarrow$($F_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$).

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ רציפים אזי ($\{X_i\}_{i=1}^n$ ב"ת)$\Longleftrightarrow$($f_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$).

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ רציפים ותהיינה $\{g_i\}_{i=1}^n$ אי־שליליות רציפות למקוטעין המקיימות $f_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$ אזי $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת.

למה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת אינטגרביליים אזי $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי $\text{Cov}[X,Y]=0$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי $\text{Var}[\sum_{i=1}^n X_i]=\sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי $M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t)=\prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$.

סטטיסטיי הסדר: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $X_{(k)}$ הערך ה־k בגודלו באוסף $\{X_i\}_{i=1}^n$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי

- $F_{X_{(k)}}(t)=\sum_{i=1}^n\left(\binom{n}{i}\cdot F_{F_{X_1}}(t)^i\cdot(1-F_{X_1}(t))^{n-i}\right)$.
- $f_{X_{(k)}}(t)=n\cdot f_{X_1}(t)\cdot F_{X_1}(t)^{k-1}\cdot(1-F_{X_1}(t))^{n-k}$.

ממוצע מדגמי: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\overline{X_n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right]=\mathbb{E}[X_1]$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\text{Var}\left[\overline{X_n}\right]\to 0$.

התכנסות משתנים מקריים: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי

- התכנסות בהתפלגות: $\left(X_n\xrightarrow{D}X\right)\iff\left(\forall t\in\mathbb{R}.(F_X\in C(\{t\}))\implies\left(F_{X_n}(t)\xrightarrow[n\to\infty]{}F_X(t)\right)\right)$.
- התכנסות בהסתברות: $\left(X_n\xrightarrow{p}X\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\mathbb{P}(|X_n-X|\ge\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)$.
- התכנסות כמעט תמיד: $\left(X_n\xrightarrow{a.s.}X\right)\iff\left(\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega\mid X_n(\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{}X(\omega)\right\}\right)=1\right)$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי $\left(X_n\xrightarrow{a.s.}X\right)\implies\left(X_n\xrightarrow{p}X\right)\implies\left(X_n\xrightarrow{D}X\right)$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ עבורם $\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right]\xrightarrow{p}0$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט שני אזי $\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right]\xrightarrow{p}0$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם $\frac{\sum_{k=1}^n\text{Var}[X_k]}{n^2}\to 0$ אזי $\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right]\xrightarrow{p}0$.

למה הלמה של קרונקר: תהיינה a_n,b_n סדרות עבורן $a_n\ge 0$ וכן $b_n\uparrow\infty$ וכן $\sum_{n=1}^\infty\frac{a_n}{b_n}<\infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{b_n}\to 0$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם $\sum_{n=1}^\infty\frac{\text{Var}[X_n]}{n^2}<\infty$ אזי $\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right]\xrightarrow{p}0$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי $\left(X_n\xrightarrow{a.s.}X\right)\iff(\forall\varepsilon>0.\mathbb{P}(\limsup\{|X_n-X|\ge\varepsilon\})=0)$.

מאורעות בלתי תלויים: מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ המקיימים כי לכל $I\subseteq\mathbb{N}$ סופית מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$.

טענה הלמה של בורל־קנטלי: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות אזי

- $\left(\sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}(A_n)<\infty\right)\implies(\mathbb{P}(\limsup A_n)=0)$.
- (($\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות ב"ת)$\wedge\left(\sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}(A_n)=\infty\right)$)$\implies$($\mathbb{P}(\limsup A_n)=1$).

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ עבורם לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}(|X_n-X|\ge\varepsilon)<\infty$ אזי $X_n\xrightarrow{a.s.}X$.

החוק החזק של המספרים הגדולים: מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ עבורם $\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right]\xrightarrow{a.s.}0$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ בעלי מומנט רביעי חסום במידה אחידה עבורם $\forall i\in\mathbb{N}.\mathbb{E}[X_i]=0$ אזי $\overline{X_n}\xrightarrow{a.s.}0$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ עבורם $\forall i\in\mathbb{N}.\mathbb{E}[X_i]=0$ וכן $\sum_{n=1}^\infty\frac{\text{Var}(X_n)}{n^2}<\infty$ אזי $\overline{X_n}\xrightarrow{a.s.}0$.

σ־אלגברת הזנב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ אזי $\bigcap_{n=1}^\infty\sigma\left(\bigcup_{i=n}^\infty\sigma(X_i)\right)$.

מאורע זנב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ותהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברת הזנב אזי $A\in\mathcal{F}$.

חוק 0-1 של קולמוגורוב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת ויהי A מאורע זנב אזי $\mathbb{P}(A)\in\{0,1\}$.

מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות ב"ת אזי

- $(\mathbb{P}(\limsup A_n)=0)\iff\left(\sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}(A_n)<\infty\right)$.
- $(\mathbb{P}(\limsup A_n)=1)\iff\left(\sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}(A_n)=\infty\right)$.

התפלגות נורמלית סטנדרטית: מ"מ Z עבורו $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$.

טענה: יהי $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$ אזי $M_Z(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$.

טענה: יהי $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$ יהי $\mu\in\mathbb{R}$ ויהי $\sigma\in\mathbb{R}_+$ אזי $\sigma Z+\mu\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$.

מסקנה: יהי $Z\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ אזי $M_Z(t)=e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}+\mu t}$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת עבורם $X_i\sim\mathcal{N}\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)$ אזי $\sum_{i=1}^n X_i\sim\mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n\mu_i,\sum_{i=1}^n\sigma_i^2\right)$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת עבורם $X_i\sim\mathcal{N}\left(\mu_i,\sigma_i^2\right)$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^n X_i-\sum_{i=1}^n\mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n\sigma_i^2}}\sim\mathcal{N}(0,1)$.

משפט הגבול המרכזי: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט שני אזי $\frac{\sum_{i=1}^n X_i-n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\text{Var}(X_1)}}\xrightarrow{D}\mathcal{N}(0,1)$.

תוחלת מותנית: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות יהי X מ"מ ותהא $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\mathbb{E}\left[X\mid\mathcal{F}_0\right]$ מ"מ על $\mathcal{F}_0$ עבורו לכל $A\in\mathcal{F}_0$ מתקיים $\mathbb{E}\left[\chi_A\cdot X\right]=\mathbb{E}\left[\chi_A\cdot\mathbb{E}\left[X\mid\mathcal{F}_0\right]\right]$.

הגדרה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו X,Y מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\mid Y\right]=\mathbb{E}\left[X\mid\sigma\left(Y\right)\right]$.

משתנה מקרי מותנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי בדיד אזי $X\mid Y=y$ מ"מ עבורו $\mathbb{P}\left(X=x\mid Y=y\right)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$.

מסקנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי בדיד אזי $\mathbb{E}\left[X\mid Y=y\right]=\sum x\cdot\mathbb{P}\left(X=x\mid Y=y\right)$.

משתנה מקרי מותנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי רציף אזי $X|Y$ מ"מ עבורו $f_{X|Y}\left(x\mid y\right)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

מסקנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי רציף אזי $\mathbb{E}\left[X|Y=y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y=y}\left(x\right)\mathrm{d}x$.

טענה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות יהי X מ"מ ותהיינה $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\subseteq\mathcal{F}$ σ־אלגברות אזי $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_1\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_2\right]|\mathcal{F}_1\right]$.

מסקנה נוסחאת ההחלקה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו X,Y מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|Y\right]\right]$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף ויהי $A\in\mathcal{F}$ מאורע אזי $\mathbb{P}\left(A\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}\left(A\mid X=x\right)f_X\left(x\right)\mathrm{d}x$.

התפלגויות

התפלגות ברנולי: יהי $p\in[0,1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X אינדיקטור להצלחה בניסוי בעל סיכוי הצלחה p וסיכוי כישלון $1-p$.
- פונקציית הסתברות: $\mathbb{P}\left(X=1\right)=p$, $\mathbb{P}\left(X=0\right)=1-p$.
- סימון: $X\sim\text{Ber}\left(p\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=p$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=p\left(1-p\right)$.

התפלגות בינומית: יהי $p\in[0,1]$ ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר הניסויים שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p לניסוי.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\{0,\ldots,n\}$ אזי $\mathbb{P}\left(X=k\right)=\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}$.
- סימון: $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=np$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=np\left(1-p\right)$.

התפלגות בינומית שלילית: יהי $p\in[0,1]$ ויהי $r\in\mathbb{N}$ אזי

- המשתנה המקרי: X ...
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\mathbb{N}\backslash\{0\ldots r-1\}$ אזי $\mathbb{P}\left(X=k\right)=\binom{k-1}{r-1}p^{r}\left(1-p\right)^{k-r}$.
- סימון: $X\sim\text{NB}\left(n,p\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{r}{p}$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\frac{r(1-p)}{p^{2}}$.

התפלגות גאומטרית: יהי $p\in[0,1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\mathbb{P}\left(X=k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}p$.
- סימון: $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{1}{p}$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\frac{1-p}{p^{2}}$.

התפלגות הייפרגאומטרית: יהי $N\in\mathbb{N}$ ויהיו $D,n\in\{0\ldots N\}$ אזי

- המשתנה המקרי: X ...
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\{\max\{0,n+D-N\}\ldots\min\left(n,D\right)\}$ אזי $\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
- סימון: $X\sim\text{HG}\left(N,D,n\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{nD}{N}$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\frac{nD}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$.

התפלגות הייפרגאומטרית שלילית: יהי $N\in\mathbb{N}$ יהי $K\in\{0,\ldots,N\}$ ויהי $r\in\{0,\ldots,N-K\}$ אזי

- המשתנה המקרי: X ...
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\{0,\ldots,K\}$ אזי $\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{\binom{k+r-1}{k}\binom{N-r-k}{K-k}}{\binom{N}{K}}$.
- סימון: $X\sim\text{NHG}\left(N,K,r\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{rK}{N-K+1}$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\left(\frac{r(N+1)K}{(N-K+1)(N-K+2)}\right)\left(1-\frac{r}{N-K+1}\right)$.

התפלגות פואסונית: יהי $\lambda>0$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר האירועים שקרו בפרק זמן נתון בעל קצב אירועים בפרק זמן זה λ.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}\left(X=k\right)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}$.
- סימון: $X\sim\text{Poi}\left(\lambda\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\lambda$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\lambda$.

התפלגות אחידה בדידה: יהיו $a<b\in\mathbb{Z}$ אזי

- המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקבוצה $\{a\ldots b\}$.
- פונקציית הסתברות: יהי $k\in\mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}\left(X=k\right)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1} & k\in[a,b]\cap\mathbb{Z}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.
- סימון: $X\sim\text{Uni}\left(\{a\ldots b\}\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{a+b}{2}$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\frac{(b-a+1)^{2}-1}{12}$.

התפלגות אחידה רציפה: יהיו $a<b$ אזי

- המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקטע (a,b).
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_{X}\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\le a\\ \frac{t-a}{b-a} & t\in(a,b)\\ 1 & t\ge b\end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_{X}\left(t\right)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & t\in(a,b)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.
- סימון: $X\sim\text{Uni}\left(a,b\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{a+b}{2}$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\frac{(b-a)^{2}}{12}$.

התפלגות מעריכית: יהי $\lambda>0$ אזי

- המשתנה המקרי: X משך חיים של תהליך הנמשך λ יחידות זמן בממוצע.
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_{X}\left(t\right)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\ge0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_{X}\left(t\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- סימון: $X\sim\text{Exp}\left(\lambda\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{1}{\lambda}$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\frac{1}{\lambda^{2}}$.

התפלגות גאמה: יהיו $n,\lambda>0$ אזי

- המשתנה המקרי: X ...
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_{X}\left(t\right)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\ge0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_{X}\left(t\right)=\begin{cases}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\ge0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- סימון: $X\sim\text{Gamma}\left(n,\lambda\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\frac{n}{\lambda}$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\frac{n}{\lambda^{2}}$.

התפלגות נורמלית: יהי $\sigma\in\mathbb{R}_{+}$ ויהי $\mu\in\mathbb{R}$ אזי

- המשתנה המקרי: X ...
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_{X}\left(t\right)=\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$.
- פונקציית צפיפות: $f_{X}\left(t\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^{2}}$.
- סימון: $X\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^{2}\right)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right]=\mu$.
- שונות: $\text{Var}\left(X\right)=\sigma^{2}$.