

גודל מעגל בוליאני: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ ויהי C מעגל בוליאני בעל n חוטים וכן m קלטים אזי $\text{Size}(C) = n + m$.

עומק מעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $\text{depth}(C)$ הינו אורך המסלול המקסימלי מקלט לפלט.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ אזי $\vee_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ המוגדרת $\vee_n(x) = \bigvee_{i=1}^n x_i$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ אזי $\wedge_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ המוגדרת $\wedge_n(x) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$.

מעגל בוליאני בעל fan-in לא מוגבל: מעגל בוליאני מעל בסיס הפונקציות הבוליאניות $\{\wedge, \vee, \neg\}$ $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\wedge_n\}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\vee_n\})$ הערה: אלא אם נאמר אחרת מעגל בוליאני הוא בעל fan-in מוגבל.

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C בעל fan-in לא מוגבל המחשב את f בגודל $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ ובעומק 2.

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C המחשב את f בגודל $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ ובעומק $n + \log_2(n)$.

מסקנה: תהא L שפה אזי קיימת משפחת מעגלים \mathcal{C} מגודל $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ ומעומק $n + \log(n)$ המחשבת את L .

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי קיימת $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ עבורה לכל מעגל בוליאני C המחשב אותה מתקיים $\text{Size}(C) \geq \frac{2^n}{2n}$.

הגודל של פונקציה בוליאנית: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $\text{Size}(f) = \min \{\text{Size}(C) \mid C \text{ מחשבת את } f\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $\text{Size}(f) \leq 15 \cdot (2^n - 1)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $\text{Size}(f) = \mathcal{O}\left(\frac{2^n}{n}\right)$.

מסקנה שאנון: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\max \{\text{Size}(f) \mid f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}\} = \Theta\left(\frac{2^n}{n}\right)$.

משפט: קיים $C \in \mathbb{R}_+$ עבורו לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המקיימת $n \leq S < C \cdot \frac{2^n}{n}$ קיימת $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ באשר f חשיבה על ידי מעגל מגודל $S(n) + 10n$ וכן f לא חשיבה על ידי מעגל מגודל $S(n)$.

הגדרה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי L חשיבה על ידי משפחת מעגלים מגודל לכל היותר $S(n)$ $\text{Size}(S(n)) = \{L \subseteq \{0, 1\}^* \mid S(n) \text{ חשיבה על ידי מעגל מגודל לכל היותר } S(n)\}$.

מסקנה: $\text{Size}(2^n) = \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$.

מסקנה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה $n \leq S(n) \leq \frac{2^n}{n}$ אזי $\text{Size}(S(n)) \subsetneq \text{Size}(S(n) + 10n)$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{Size}(\mathcal{O}(n^k)) = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{Size}(c \cdot n^k)$.

הגדרה Polynomial Size Circuits: $\text{Size}(\text{poly}) = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{Size}(n^c)$.

הגדרה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא L שפה עבורה קיימת קבוצת מעגלים $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ המקיימת

• לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\text{Size}(C_n) = S(n)$.

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \in L$ אז $\exists w. C_{|x|}(x, w) = 1$.

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \notin L$ אז $\forall w. C_{|x|}(x, w) = 0$.

אזי $L \in \text{NSize}(S(n))$.

הגדרה Nondeterministic Polynomial Size Circuits: $\text{NSize}(\text{poly}) = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NSize}(n^c)$.

הגדרה Non Uniform Alternating Class: תהיינה $s, d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי

$\text{nu-AC}(s, d) = \left\{ L \subseteq \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} L(C) = L \\ \text{Size}(C_n) \leq s(n) \\ \text{depth}(C_n) \leq d(n) \end{array} \right\}$ קיימת משפחת מעגלים C בעלת fan-in לא מוגבל עבורה

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-AC}^k = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{nu-AC}(n^c, \log^k(n))$.

הגדרה Non Uniform Nick's Class: תהיינה $s, d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי

$\text{nu-NC}(s, d) = \left\{ L \subseteq \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} L(C) = L \\ \text{Size}(C_n) \leq s(n) \\ \text{depth}(C_n) \leq d(n) \end{array} \right\}$ קיימת משפחת מעגלים C עבורה

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-NC}^k = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{nu-NC}(n^c, \log^k(n))$.

מסקנה: תהיינה $s, d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-NC}(s, d) \subseteq \text{nu-AC}(s, d)$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-AC}^k \subseteq \text{nu-NC}^{k+1}$.

מסקנה: $\text{nu-NC}^0 \subsetneq \text{nu-AC}^0$.

פונקציית זוגיות: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{parity} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ המוגדרת $\text{parity}(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$.

טענה: קיים מעגל C המחשב את parity_n מגודל $\mathcal{O}(n)$ ועומק $\mathcal{O}(\log(n))$.

מסקנה: $\text{parity} \in \text{nu-NC}^1$.

פולינום מולטי-לינארי (מ"ל): יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ עבורו קיים $\alpha \in \mathbb{R}^{2^n}$ וקיימת $\eta \in M_{2^n \times n}(\mathbb{Z}_2)$ המקיימים

$$p = \sum_{i=1}^{2^n} \left(\alpha_i \cdot \prod_{j=1}^n x_j^{\eta_{i,j}} \right)$$

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל עבורו $f(x) = p(x)$ לכל $x \in \{0, 1\}^n$.

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיים פולינום מ"ל יחיד המחשב את f .

סימון: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל המחשב את f אזי $\deg(f) = \deg(p)$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\deg(V_n) = n$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\deg(\text{parity}_n) = n$.

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה ε : יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל עבורו $\mathbb{P}_{x \leftarrow \{0, 1\}^n} (p(x) = f(x)) \geq 1 - \varepsilon$.

טענה: הפולינום 1 מחשב את V_n בממוצע עם שגיאה $\frac{1}{3}$.

התפלגות משפחת פולינומים מחשבת פונקציה בוליאנית עם שגיאה ε : יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קבוצת פולינומים מ"ל $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ עבורה לכל $x \in \{0, 1\}^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{p \leftarrow P} (p(x) = f(x)) \geq 1 - \varepsilon$.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ותהא $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל המחשבת את f עם שגיאה ε אזי קיים $p \in P$ המחשב בממוצע את f עם שגיאה ε .

סימון: יהי (Ω, \mathbb{P}) מרחב הסתברות אזי $\Omega \rightarrow \Omega : (x \leftarrow \Omega) = \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}((x \leftarrow \Omega) = \omega)$ הינו מ"מ באשר $\mathbb{P}((x \leftarrow \Omega) = \omega) = \mathbb{P}(\omega)$.

הערה: תהא A קבוצה סופית אזי $x \leftarrow A$ הינו המ"מ כאשר A עם ההתפלגות האחידה.

סימון: יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $\mathcal{P}([n])$ לכל $k \in \{0 \dots \log(n)\}$ ולכל $j \in [c \log(\frac{1}{\varepsilon})]$ אזי $S_{j,k} \leftarrow \mathcal{P}([n])$ וכל $x \in \{0, 1\}^n$ עבורו $V_n(x) = 0$ אזי $R_V(x) = 0$ לכל $S_{j,k} \leftarrow \mathcal{P}([n])$.

למה: יהי $x \in \{0, 1\}^n$ ותהינה $S_{j,k} \leftarrow \mathcal{P}([n])$ עבורן קיימים j, k המקיימים $|S_{j,k} \cap \{i \mid x_i = 1\}| = 1$ אזי $R_V(x) = 1$ וכן $V_n(x) = 1$.

למה: יהי $k \in \mathbb{N}$ ויהי $x \in \{0, 1\}^n$ עבורו $|\{i \mid x_i = 1\}| \leq 2^{k-1}$ אזי $\mathbb{P}_{S \leftarrow \mathcal{P}([n])} (|S \cap I| = 1) \geq \frac{1}{2e}$.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}(\log(n) \cdot \log(\frac{1}{\varepsilon}))$ שמחשבת את V_n עם שגיאה ε .

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל $s(n)$ ועומק $d(n)$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת קבוצת פולינומים מ"ל $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\left(\log(n) \cdot \log\left(\frac{s(n)}{\varepsilon}\right)\right)^{d(n)}\right)$ המחשבת את f עם שגיאה ε .

מסקנה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל $s(n)$ ועומק $d(n)$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום מ"ל $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\left(\log(n) \cdot \log\left(\frac{s(n)}{\varepsilon}\right)\right)^{d(n)}\right)$ המחשב את f בממוצע עם שגיאה ε .

למה: יהי $\delta > 0$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל המחשב את parity_n בממוצע עם שגיאה $\frac{1}{2} + \delta$ אזי $\deg(p) = \Omega(\delta \sqrt{n})$.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל המחשב את parity_n בממוצע עם שגיאה ε אזי $\deg(p) = \Omega(\sqrt{n})$.

מסקנה: יהי C מעגל המחשב את parity_n בעל fan-in לא מוגבל ועומק $d(n)$ אזי $\text{Size}(C) \geq 2^{\Omega\left(n^{\frac{1}{4-d(n)}}\right)}$.

משפט: $\text{parity} \notin \text{nu-AC}^0$.

מסקנה: $\text{nu-AC}^0 \subsetneq \text{nu-NC}^1$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{BinAdd}_n : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{n+1}$ המוגדרת $\text{BinAdd}_n(x, y) = x + y$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{BinAdd}_n \in \text{nu-AC}^0$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{IteratedBinAdd}_n : (\{0, 1\}^n)^n \rightarrow \{0, 1\}^{2^n}$ המוגדרת $\text{IteratedBinAdd}_n(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$.

טענה: $\text{IteratedBinAdd} \in \text{nu-AC}^1$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{BinMult}_n : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{2^n}$ המוגדרת $\text{BinMult}_n(x, y) = x \cdot y$.

טענה: $\text{BinMult} \in \text{nu-AC}^1$.

טענה: $\text{BinMult} \notin \text{nu-AC}^0$.

חתך מקסימלי: יהי G גרף אזי חתך (A, B) עבורו $|E(A, B)| \geq |E(C, D)|$ לכל חתך (C, D) .

סימון: יהי G גרף ויהי (A, B) חתך מקסימלי אזי $\max\text{Cut}(G) = |E(A, B)|$.

למה: יהי G גרף אזי $\mathbb{E}_{\text{חתך}(A, B)} [|E(A, B)|] = \frac{|E(G)|}{2}$.

טענה: יהי G גרף אזי קיים חתך (A, B) עבורו $|E(A, B)| \geq \frac{|E(G)|}{2}$.

אלגוריתם חיפוש אלים למציאת חתך גדול: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי

function BruteForceBigCut($E, \{v_1 \dots v_n\}$):

$S \in \mathcal{P}(\{v_1 \dots v_n\})$

for $r \in \{0, 1\}^n$ **do**

$S \leftarrow \{v_i \mid r_i = 1\}$

if $|E(S, \overline{S})| \geq \frac{|E|}{2}$ **then return** S

end

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי BruteForceBigCut בעלת סיבוכיות זמן ריצה $\Omega(2^n)$.
טענה: קיימת מ"ט אקראית M_{supp} עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $r \leftarrow \{0, 1\}^{\log(n)+1}$ מתקיים כי $M_{\text{supp}}(1^n; r)$ מחזירה מ"מ $X_1 \dots X_n : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ עבורם

- $X_1 \dots X_n$ ב"ת בזוגות.
- $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ לכל $i \in [n]$.
- M_{supp} רצה בזמן $\text{poly}(n)$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ולכל $c, d \in \mathbb{F}$ נגדיר מ"מ $X_{c,d} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ כך $X_{c,d}(\alpha) = c\alpha + d$ אזי $\{X_{c,d}\}_{c,d \in \mathbb{F}}$ ב"ת בזוגות וכן $X_{c,d} \sim \text{Uni}(\mathbb{F})$ לכל $c, d \in \mathbb{F}$.

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $r \in \{0, 1\}^{\log(n)+1}$ ותהא $\{v_1 \dots v_n\}$ קבוצה אזי $S_{\text{supp}} = \{v_i \mid M_{\text{supp}}(1^n; r)_i = 1\}$.
טענה: יהי G גרף באשר $V = \{v_1 \dots v_n\}$ אזי $\mathbb{E}_{r \leftarrow \{0, 1\}^{\log(n)+1}} [|E(S_{\text{supp}}, \overline{S_{\text{supp}}})|] = \frac{|E|}{2}$.
אלגוריתם בעל משתנים מקריים למציאת חתך גדול: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי

```
function IndVarBigCut( $E, \{v_1 \dots v_n\}$ ):
   $S \in \mathcal{P}(\{v_1 \dots v_n\})$ 
  for  $r \in \{0, 1\}^{\log(n)+1}$  do
     $X \leftarrow M_{\text{supp}}(1^n; r)$ 
     $S \leftarrow \{v_i \mid X_i = 1\}$ 
    if  $|E(S, \overline{S})| \geq \frac{|E|}{2}$  then return  $S$ 
  end
```

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי IndVarBigCut בעלת סיבוכיות זמן ריצה $\text{poly}(n)$.
סימון: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה ויהי $r \in \{0, 1\}^n$ אזי $S_r = \{v_i \mid r_i = 1\}$.
אלגוריתם למציאת חתך גדול עם תוחלת מותנית: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי

```
function CEBigCut( $E, \{v_1 \dots v_n\}$ ):
   $a \in \bigcup_{i=0}^n \{0, 1\}^i$ 
   $a \leftarrow \epsilon$ 
  for  $i \in [1 \dots n]$  do
     $c_0 \leftarrow \mathbb{E}_{r \leftarrow \{0, 1\}^n} [|E(S_r, \overline{S_r})| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}), (r_i = 0)]$ 
     $c_1 \leftarrow \mathbb{E}_{r \leftarrow \{0, 1\}^n} [|E(S_r, \overline{S_r})| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1}), (r_i = 1)]$ 
     $a_i \leftarrow \arg \max_{\ell \in \{0, 1\}} (c_\ell)$ 
  end
  return  $S_a$ 
```

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי לכל $i \in [n]$ באיטרציה ה- i של CEBigCut מתקיים $\mathbb{E}_{r \leftarrow \{0, 1\}^n} [|E(S_r, \overline{S_r})| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1})] = |\{(v_i, v_j) \in E \mid (i, j \leq k) \wedge (a_i \neq a_j)\}| + \frac{1}{2} |\{(v_i, v_j) \in E \mid (i > k) \vee (j > k)\}|$.
מסקנה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי CEBigCut בעלת סיבוכיות זמן ריצה $\text{poly}(n)$.

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי לכל $i \in [n]$ באיטרציה ה- i של CEBigCut מתקיים $\mathbb{E}_{r \leftarrow \{0, 1\}^n} [|E(S_r, \overline{S_r})| \mid (r_1 = a_1), \dots, (r_{i-1} = a_{i-1})] \geq \frac{|E|}{2}$.

מסקנה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אזי $E(\text{CEBigCut}, \overline{\text{CEBigCut}}) \geq \frac{|E|}{2}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $k \geq 2 \log_2(2n)$ אזי קיימת צביעת קשתות f של K_n בשני צבעים עבורה לא קיים תת-גרף K_k מונוכרומטי.

מספר הפסוקיות המסופקות: תהא $\varphi \in \text{CNF}$ באשר $\varphi = \bigwedge_{i=1}^m C_i$ בעלת n משתנים ותהא $\alpha \in \{0, 1\}^n$ השמה אזי $\text{CL}(\varphi, \alpha) = |\{i \in [m] \mid \alpha(C_i) = \text{True}\}|$.

יחס הפסוקיות המסופקות: תהא $\varphi \in \text{CNF}$ באשר $\varphi = \bigwedge_{i=1}^m C_i$ אזי $\text{RCL}(\varphi, \alpha) = \frac{1}{m} \cdot \text{CL}(\varphi, \alpha)$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ נגדיר $k\text{CNF} : \text{CNF} \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\max k\text{SAT}(\varphi) = \max \left\{ \text{RCL}(\varphi, \alpha) \mid \alpha \in \{0, 1\}^{|\text{FV}(\varphi)|} \right\}$.

טענה: תהא $\varphi \in 3\text{CNF}$ בעלת m פסוקיות אזי $\max 3\text{SAT}(\varphi) \geq \frac{7}{8} m$.

הגדרה Exactly $k\text{CNF}$: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{EkSAT} = \{ \langle \varphi \rangle \mid (\langle \varphi \rangle \in k\text{SAT}) \wedge (|\text{FV}(C)| = k) \}$ מתקיים C .

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ נגדיר $\text{EkSAT} : \text{EkSAT} \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\max \text{EkSAT}(\varphi) = \max \left\{ \text{RCL}(\varphi, \alpha) \mid \alpha \in \{0, 1\}^{|\text{FV}(\varphi)|} \right\}$.

סימון: תהא M מ"ט k -סרטית ותהא $c_1 \$ c_2 \$ \dots \$ c_k$ קונפיגורציה אזי c_i $(c_1 \$ c_2 \$ \dots \$ c_k)^i = c_i$.

סימון: תהא $x \in \Sigma^*$ ותהא $A \subseteq \Sigma^*$ אזי $x \setminus A$ הינה המחרוזת x ללא אברי A .

מכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי מ"ט תלת-סרטית M עבורה לכל קונפיגורציות $c_0 \dots c_n$ באשר $c_0 = q_0 x$ וכן c_{i-1} עוברת ל- c_i לכל $i \in [n]$ מתקיים

- סרט לקריאה בלבד: לכל $i \in [n]$ מתקיים $c_i^1 = x \setminus Q$.
 - סרט חסום במקום: לכל $i \in [n]$ מתקיים $|c_{i-1}^2| \leq S(n) + 1$.
 - סרט לכתובה חד-פעמית: לכל $i \in [n]$ ולכל $j \in [|c_{i-1}^3|]$ מתקיים $(c_{i-1}^3 \setminus Q)_j = (c_i^3 \setminus Q)_j$.
- חסם עליון למקום ריצה של מכונת טיורינג:** תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא M מ"ט בעלת סיבוכיות מקום S אזי S .

הערה: נקרא למכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום מכונת טיורינג.

הגדרה Deterministic Space: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $\{M \mid M \text{ מ"ט שרצה במקום } \mathcal{O}(S(n)) \mid L(M)\} = \text{DSpace}(S(n))$.

הגדרה Polynomial Space: $\text{PSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DSpace}(n^c)$.

הגדרה Logarithmic Space: $\text{LOG} = \text{DSpace}(\log(n))$.

סימון: $\text{LOG} = \text{LOGSPACE} = \text{LSPACE} = \text{L}$.

טענה: $\text{DSpace}(1) = \text{DSpace}(\log(\log(n))) = \{L \mid L \text{ רגולרית}\}$.

טענה: תהא T חשיבה בזמן אזי $\text{DTime}(T(n)) \subseteq \text{DSpace}(T(n))$.

טענה: $\mathcal{NP} \subseteq \text{PSPACE}$.

טענה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באשר $S \geq \log$ אזי $\text{DSpace}(S(n)) \subseteq \text{DTime}(2^{\mathcal{O}(S(n))})$.

מסקנה: $\text{LOG} \subseteq \mathcal{P}$.

מסקנה: $\text{PSPACE} \subseteq \text{EXP}$.

פונקציה חשיבה במקום: פונקציה $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה קיימת מ"ט M המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי M על הקלט 1^n מחשבת את $(S(n))_2$ במקום $\mathcal{O}(S(n))$.

משפט היררכיית המקום: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה במקום ותהא $t(n) = o(S(n))$ אזי $\text{DSpace}(t(n)) \subsetneq \text{DSpace}(S(n))$.

מסקנה: $\text{LOG} \subsetneq \text{PSPACE}$.

מסקנה: לפחות אחד מהבאים נכון

• $\text{LOG} \subsetneq \mathcal{P}$

• $\mathcal{P} \subsetneq \text{PSPACE}$

השערה: $\text{LOG} \subsetneq \mathcal{P}$ השערה פתוחה

השערה: $\mathcal{P} \subsetneq \text{PSPACE}$ השערה פתוחה

פונקציה חשיבה במקום S : תהא $D \subseteq \Sigma$ אזי $f : D \rightarrow (\Gamma \setminus \{\perp\})^*$ עבורה קיימת מ"ט M בעלת סיבוכיות מקום $S(n)$ המחשבת את f .

רדוקציית מיפוי במקום לוגריתמי: יהיו Δ, Σ אלפביטים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה אזי רדוקציית מיפוי f מ- A ל- B חשיבה במקום לוגריתמי.

סימון: יהיו Δ, Σ אלפביטים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה ותהא $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ רדוקציית מיפוי במקום לוגריתמי אזי $A \leq_{\text{Log}} B$.

טענה: תהיינה A, B שפות עבורן $A \leq_{\text{Log}} B$ אזי $A \leq_p B$.

טענה: תהא f חשיבה במקום $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ תהא g חשיבה במקום $R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \Sigma^n$ מתקיים $|f(x)| \leq m(n)$ אזי $g \circ f$ חשיבה במקום $\mathcal{O}(S(n) + \log(m(n)) + R(m(n)))$.

מסקנה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה במקום תהא f חשיבה במקום S תהא g חשיבה במקום $R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \Sigma^n$ מתקיים $|f(x)| \leq m(n)$ אזי $g \circ f$ חשיבה במקום $\mathcal{O}(S(n) + R(m(n)))$.

טענה: תהיינה A, B שפות באשר $B \in \text{LOG}$ וכן $A \leq_{\text{Log}} B$ אזי $A \in \text{LOG}$.

מסקנה: תהיינה A, B, C שפות באשר $A \leq_{\text{Log}} B$ וכן $B \leq_{\text{Log}} C$ אזי $A \leq_{\text{Log}} C$.

סימון: תהיינה A, B שפות ותהא φ רדוקציית מיפוי מ- A ל- B אזי $A \leq_{\varphi} B$.

מחלקה: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$.

סימון: תהיינה A, B שפות תהא \mathcal{C} מחלקה ותהא φ רדוקציית מיפוי מ- A ל- B באשר $\varphi \in \mathcal{C}$ אזי $A \leq_{\mathcal{C}} B$.

שפה קשה למחלקה: תהא \mathcal{C} מחלקה אזי שפה \mathcal{L} עבורה לכל שפה $L \in \mathcal{C}$ מתקיים $L \leq_{\text{Log}} \mathcal{L}$.

שפה שלמה למחלקה: תהא \mathcal{C} מחלקה אזי שפה $\mathcal{L} \in \mathcal{C}$ באשר \mathcal{L} הינה \mathcal{C} -קשה.

טענה: תהא $A \in \text{LOG}$ באשר A הינה \mathcal{P} -שלמה אזי $\mathcal{P} = \text{LOG}$.

הגדרה Circuit Value Problem: $\text{CVAL} = \{\langle C, x \rangle \mid (C \text{ מעגל בוליאני}) \wedge (C(x) = 1)\}$.

למה קוק-ליון: תהא M מ"ט רצה בזמן פולינומי אזי קיימת פונקציה חשיבה f במקום לוגריתמי עבורה $f(1^n) = \langle C_{M,n} \rangle$ באשר $C_{M,n}$ מעגל עבורו לכל $z \in \{0, 1\}^n$ מתקיים $(C_{M,n}(z) = 1) \iff (M(z) \text{ מקבלת})$.

טענה: CVAL הינה \mathcal{P} -שלמה.

נוסחה מכומתת לחלוטין: תהא φ נוסחה באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ ויהיו $Q_1 \dots Q_n \in \{\forall, \exists\}$ כמתים אזי $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n (\varphi)$ **הגדרה True Quantified Boolean Formula Problem:** $\text{TQBF} = \{\langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ נוסחה מכומתת לחלוטין וספיקה}\}$.

טענה: $\text{TQBF} \in \text{PSPACE}$.

טענה: TQBF הינה PSPACE -שלמה.

מילה בעלת ייצוג: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $x \in \Sigma^n$ עבורה קיימת מ"ט M המקיימת $|M| = k$ וכן $M(i) = x_i$ לכל $i \in [n]$.

מעגל מיוצג על ידי מעגל: יהי C מעגל בגודל s אזי מעגל A המקבל $\log(s)$ ביטים עבורו קיימת $f: V(C) \rightarrow [s]$ הפיכה המקיימת $i \in [s] \implies A(i) = \langle f(i), \text{adj}^-(f(i)), \text{adj}^+(f(i)) \rangle$.

סימון: יהי C מעגל ויהי A מעגל המייצג את C אזי $C = [A]$.

הגדרה Succinct Circuit Value Problem: $\text{Succ-CVAL} = \{\langle A, x \rangle \mid (A \text{ מעגל המייצג מעגל}) \wedge (\langle [A], x \rangle \in \text{CVAL})\}$.

טענה: $\text{Succ-CVAL} \in \text{EXP}$.

טענה: Succ-CVAL הינה EXP -שלמה.

מטריצה מיוצגת על ידי מעגל: תהא $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ אזי מעגל C המקיים $C(i, j) = (A)_{i,j}$ לכל $i, j \in [n]$.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ ויהי C מעגל המייצג את A אזי $A = [C]$.

הגדרה: $\text{Succ-BoolMatPower} = \left\{ \langle \langle C \rangle, n, t, i, j \rangle \mid (C \text{ מעגל המייצג מטריצה מסדר } n) \wedge \left(([C]^t)_{i,j} = 1 \right) \right\}$.

טענה: Succ-BoolMatPower הינה PSPACE -שלמה.

הגדרה Circuit Satisfiability Problem: $\text{CSAT} = \{\langle C \rangle \mid C \text{ מעגל ספיק}\}$.

טענה: CSAT הינה \mathcal{NP} -שלמה.

הגדרה: $\text{Succ-CSAT} = \{\langle A \rangle \mid (A \text{ מעגל המייצג מעגל}) \wedge (\langle [A] \rangle \in \text{CSAT})\}$.

טענה: Succ-CSAT הינה \mathcal{NEXP} -שלמה.

סדרת מעגלים Log-יוניפורמית: משפחת מעגלים \mathcal{C} עבורה קיימת מ"ט M באשר M רצה במקום $\mathcal{O}(\log(n))$ וכן $M(1^n) = \langle C_n \rangle$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

הגדרה Uniform Alternating Class: תהיינה $s, d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $\text{u-AC}(s, d) = \left\{ L \subseteq \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} L(C) = L \\ \text{Size}(C_n) \leq s(n) \\ \text{depth}(C_n) \leq d(n) \end{array} \right\}$ קיימת משפחת מעגלים יוניפורמית C בעלת fan-in לא מוגבל עבורה

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{u-AC}^k = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{u-AC}(n^c, \log^k(n))$.

הגדרה Uniform Nick's Class: תהיינה $s, d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $\text{u-NC}(s, d) = \left\{ L \subseteq \{0, 1\}^* \mid \begin{array}{l} L(C) = L \\ \text{Size}(C_n) \leq s(n) \\ \text{depth}(C_n) \leq d(n) \end{array} \right\}$ קיימת משפחת מעגלים יוניפורמית C עבורה

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{u-NC}^k = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{u-NC}(n^c, \log^k(n))$.

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{AC}^k = \text{u-AC}^k$.

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{NC}^k = \text{u-NC}^k$.

מסקנה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{NC}^k \subseteq \text{AC}^k$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{AC}^k \subseteq \text{NC}^{k+1}$.

הגדרה: $\text{AC} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{AC}^k$.

הגדרה: $\text{NC} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{NC}^k$.

מסקנה: $\text{AC} = \text{NC}$.

טענה: $\text{LOG} \subseteq \text{AC}^1$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{NC}^k \subseteq \text{DSpace}(\mathcal{O}(\log^k(n)))$.

טענה: תהא $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ יהי M מ"ט רץ בזמן S יהי $x \in \Sigma^*$ ותהא G מטריצה המייצגת את עץ הקונפיגורציות אזי $M(x)$ מקבלת $\iff (I + G)^{S(|x|)}_{x,y} \geq 1$ באשר y קונפיגורציה במצב מקבל.

השערה: קיימת מ"ט M הרצה בזמן פולינומי ובזיכרון $o(n)$ עברה לכל מטריצה A המייצגת גרף מכוון בעל n קודקודים ולכל קודקודים s, t מתקיים $(\langle A, s, t \rangle) \in M$ (מקבלת) \iff (קיים מסלול מ- s ל- t). השערה פתוחה

מכונת טיורינג עם עצה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן תהא $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא L שפה עברה קיימת $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ המקיימת $|\alpha_n| \leq a(n)$ וקיימת מ"ט M עם זמן ריצה T המקיימת $(M(x, \alpha_{|x|}) = 1) \iff (x \in L)$ אזי $L \in \text{DTIME}(T(n))/a(n)$.

הגדרה Polynomial Time with Advice: תהא $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $\mathcal{P}/a(n) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{DTIME}(n^k)/a(n)$.

טענה: קיימת שפה לא כריעה L המקיימת $L \in \mathcal{P}/1$.

הגדרה: $\mathcal{P}/\text{poly} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{P}/n^\ell$.

טענה: $\mathcal{P}/\text{poly} = \text{Size}(\text{poly})$.

מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית עם עצה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן תהא $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא L שפה עברה קיימת $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ המקיימת $|\alpha_n| \leq a(n)$ וקיימת מ"ט לא דטרמיניסטית M עם זמן ריצה T המקיימת $(M(x, \alpha_{|x|}) = 1) \iff (x \in L)$ אזי $L \in \text{NTIME}(T(n))/a(n)$.

הגדרה Nondeterministic Polynomial Time with Advice: תהא $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $\mathcal{NP}/a(n) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{NTIME}(n^k)/a(n)$.

הגדרה: $\mathcal{NP}/\text{poly} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} \mathcal{NP}/n^\ell$.

טענה: תהא $F : 3\text{CNF} \rightarrow \{0, 1\}^* \cup \{\perp\}$ באשר $(F(\varphi))$ השמה מספקת עבור $\varphi \iff (F(\varphi) \in \{0, 1\}^*)$ אזי $F \in \mathcal{P}^{\text{SAT}}$.

טענה: אם קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו $\text{SAT} \in \mathcal{P}/\lfloor k \cdot \log(n) \rfloor$ אזי $\text{SAT} \in \mathcal{P}$.

הגדרה Linear Programming: $\text{LIN-PROG} = \{(A, b) \mid (A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})) \wedge (b \in \mathbb{R}^m) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}^n. Ax \leq b)\}$.

טענה: LIN-PROG הינה \mathcal{P} -קשה.

מודל RAM מקבילי (PRAM/Parallel RAM): יהי (k, Π) מודל RAM ויהי $p \in \mathbb{N}$ אזי (p, k, Π) .

מספר המעבדים במודל PRAM: יהי (p, k, Π) מודל PRAM אזי p .

קונפיגורציה במודל PRAM: יהי (p, k, Π) מודל PRAM ותהא (T, R, PC) קונפיגורציה של מודל ה-RAM (k, Π) אזי (T, R, PC) .

קונפיגורציה עוברת במודל PRAM: יהי (k, Π) מודל RAM ותהא (T, R, PC) קונפיגורציה אזי קונפיגורציה (T', R', PC') באשר

$$\bullet \text{PC}' = \text{PC} + 1$$

\bullet קיימים $i_1 \dots i_p \in [k]$ עבורם לכל $j \in [k] \setminus \{i_1 \dots i_p\}$ מתקיים $R'_j = R_j$ וכן קיימים $\pi_1 \dots \pi_p \in \Pi \cup \{\text{Id}\}$ עבורם לכל

$$R'_{i_\ell} = \pi_{i_\ell}(R_{i_\ell}) \quad \ell \in [p]$$

\bullet קיימים $i_1 \dots i_p \in \mathbb{N}$ עבורם לכל $j \in \mathbb{N} \setminus \{i_1 \dots i_p\}$ מתקיים $T'(j) = T(j)$ וכן קיימים $\pi_1 \dots \pi_p \in \Pi \cup \{\text{Id}\}$ עבורם לכל

$$T'(\ell) = \pi(T(\ell)) \quad \ell \in [p]$$

אלגוריתם במודל PRAM: יהי (p, k, Π) מודל PRAM אזי פונקציה δ מקונפיגורציות לקונפיגורציות עברה לכל קונפיגורציה C מתקיים C עוברת ל- $\delta(C)$.

סימון: יהי (p, k, Π) מודל PRAM ויהי $x \in \mathbb{N}$ נגדיר $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך $T(x) = \begin{cases} x & x=0 \\ \text{else} & \end{cases}$ אזי $\text{Start}_x = (T, \{0\}, 0)$.

סימון: יהי (p, k, Π) מודל PRAM יהי A אלגוריתם ויהי $x \in \mathbb{N}$ אזי $A_{\text{stop}} = \min \{n \in \mathbb{N} \mid A^{(n+1)}(\text{Start}_x) = A^{(n)}(\text{Start}_x)\}$.

ריצה של מודל PRAM: יהי (p, k, Π) מודל PRAM יהי A אלגוריתם ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(A^{(i)}(\text{Start}_x))_{i=1}^{A_{\text{stop}}}$.

זמן ריצה במודל PRAM: יהי (p, k, Π) מודל PRAM יהי A אלגוריתם ויהי $x \in \mathbb{N}$ אזי $\text{Time}(A, x) = (A^{(A_{\text{stop}})}(\text{Start}_x))_3$.

עבודה במודל PRAM: יהי (p, k, Π) מודל PRAM יהי A אלגוריתם ויהי $x \in \mathbb{N}$ אזי $\text{Work}(A, x) = p \cdot \text{Time}(A, x)$.

טענה: תהא $L \in \text{NC}^k$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $L \cap \Sigma^n$ ניתנת לחישוב במודל PRAM בעל $\text{poly}(n)$ מעבדים בזמן $\mathcal{O}(\log^k(n))$.

טענה: תהא L שפה באשר $L \cap \Sigma^n$ ניתנת לחישוב במודל PRAM בעל $\text{poly}(n)$ מעבדים בזמן $\mathcal{O}(\log^k(n))$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי $L \in \text{NC}^k$.

השערה: קיים מודל PRAM וקיים אלגוריתם A הפותר את CVAL בזמן $\text{polylog}(n)$ ובעבודה $\text{poly}(n)$. השערה פתוחה

השערה: $\mathcal{P} = \text{NC}$. השערה פתוחה

טענה: $\text{APSP} \in \text{NC}$.

מכונת טיורינג בעלת אורקל: תהא $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ תהא $Q \neq \emptyset$ קבוצה סופית ויהיו $q_{\text{query}}, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}} \in Q$ אזי מ"ט דו-סרטית $M^{\mathcal{O}}$ באשר $(M^{\mathcal{O}})_1 = Q$ המקיימת

\bullet סרט שאלתה: לכל קונפיגורציות c_0, c_1 של $M^{\mathcal{O}}$ באשר c_0 עוברת ל- c_1 וכן $c_0 \cap Q = \{q_{\text{query}}\}$ מתקיים

$$- \text{אם } c_1 \cap Q = \{q_{\text{yes}}\} \text{ אזי } c_0^2 \setminus Q \in \mathcal{O}$$

$$- \text{אם } c_1 \cap Q = \{q_{\text{no}}\} \text{ אזי } c_0^2 \setminus Q \notin \mathcal{O}$$

הערה: תהא $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ אזי מכאן והלאה $M^{\mathcal{O}}$ תסמן מ"ט עם אורקל \mathcal{O} .

הגדרה: תהא $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ ותהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן אזי $M^{\mathcal{O}}$ מ"ט הרצה בזמן $T(n)$ $\{L(M) \mid T(n)\}$ $\text{DTIME}^{\mathcal{O}}(T(n)) =$

הגדרה: תהא $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ ותהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה במקום אזי $M^{\mathcal{O}}$ מ"ט הרצה במקום $\{L(M) \mid T(n)\}$. $\text{DSpace}^{\mathcal{O}}(T(n)) =$

הגדרה: תהא $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ אזי $\mathcal{P}^{\mathcal{O}} = \bigcup_{c=0}^{\infty} \text{DTime}^{\mathcal{O}}(n^c)$.

הגדרה: תהא $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ אזי $\text{PSPACE}^{\mathcal{O}} = \bigcup_{c=0}^{\infty} \text{DSpace}^{\mathcal{O}}(n^c)$.

הגדרה: תהא $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ ותהא L שפה עבורה קיימת מ"ט $M^{\mathcal{O}}$ שרצה בזמן $\text{poly}(n)$ באשר לכל $x \in \Sigma$ מתקיים

$L \in \mathcal{NP}^{\mathcal{O}}$ אזי $(x \in L) \iff (\exists y \in \Sigma^{\text{poly}(|x|)} . M^{\mathcal{O}}(x, y) = 1)$

הגדרה: תהיינה \mathcal{A}, \mathcal{B} מחלקות אזי $\mathcal{A}^{\mathcal{B}} = \bigcup_{L \in \mathcal{B}} \mathcal{A}^L$.

טענה: $\mathcal{NP}^{\text{PSPACE}} = \text{PSPACE}$

מסקנה: $\mathcal{NP}^{\text{PSPACE}} = \mathcal{P}^{\text{PSPACE}}$

טענה: קיימת $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ עבורה $\mathcal{NP}^{\mathcal{O}} \neq \mathcal{P}^{\mathcal{O}}$

טענה משפט היררכיית הזמן עם אורקל: תהא $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ ותהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן ותהא $t(n) = o\left(\frac{T(n)}{\log(T(n))}\right)$ אזי

$\text{DTime}^{\mathcal{O}}(t(n)) \subsetneq \text{DTime}^{\mathcal{O}}(T(n))$

טענה משפט היררכיית הזמן עם אורקל: תהא $\mathcal{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ ותהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה במקום ותהא $t(n) = o(S(n))$ אזי

$\text{DSpace}^{\mathcal{O}}(t(n)) \subsetneq \text{DSpace}^{\mathcal{O}}(T(n))$

ריפוד של שפה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא $L \in \text{DTime}(T(n))$ ותהא f חח"ע חשיבה בזמן באשר לכל $n \in \mathbb{N}$ $f(n) \geq n$

$L_{\text{pad}}^f = \{x \mid |1^{f(|x|)-|x|-1}| \mid x \in L\}$

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא $L \in \text{DTime}(T(n))$ ותהא $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $L_{\text{pad}}^f \in \text{DTime}(\text{poly}(n) + T(f^{-1}(n)))$

הגדרה: $2\text{EXP} = \bigcup_{c=0}^{\infty} \text{DTime}(2^{2^{n^c}})$

טענה: $\text{EXP}^{\text{EXP}} = 2\text{EXP}$

טענה: $\mathcal{P}^{\text{EXP}} = \text{EXP}$

מסקנה: $\mathcal{P}^{\text{EXP}} \neq \text{EXP}^{\text{EXP}}$

טענה: $\mathcal{P}^{\text{EXP}} = \mathcal{NP}^{\text{EXP}}$

טענה: אם $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ אז $\text{EXP} = \text{NEXP}$

הגדרה: $\text{E} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \text{DTime}(2^{kn})$

טענה: $\text{E} \neq \text{EXP}$

טענה: $\text{E} \neq \text{PSPACE}$

טענה: תהא \mathcal{C} מחלקת שפות ותהא L שפה \mathcal{C} -שלמה אזי $\mathcal{P}^{\mathcal{C}} = \mathcal{P}^L$

מסקנה: $\mathcal{NP}^{\text{TQBF}} = \text{PSPACE}^{\text{TQBF}}$

טענה: $\text{EXP} \neq \text{DSpace}(\mathcal{O}(2^n))$

טענה: $\text{PSPACE}^{\text{PSPACE}} \neq \text{EXP}^{\text{PSPACE}}$

טענה: $\mathcal{P}^{\text{HALT}} \neq \text{EXP}^{\text{HALT}}$

הגדרה NP Error Zero: תהא L שפה עבורה קיימת מטל"ד M עם זמן ריצה פולינומי המקיימת

• לכל $x \in L$ מתקיים $M(x) \in \{1, \text{quit}\}$

• לכל $x \notin L$ מתקיים $M(x) \in \{0, \text{quit}\}$

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ קיים מסלול חישוב עבורו $M(x) \neq \text{quit}$

אזי $L \in \mathcal{ZNP}$

טענה: $\mathcal{ZNP} = \mathcal{NP} \cap \text{coNP}$

טענה: $\mathcal{P}^{\mathcal{ZNP}} = \mathcal{ZNP}$

טענה: $\mathcal{NP}^{\mathcal{ZNP}} = \mathcal{NP}$

הגדרה Bounded-error Probabilistic: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ותהא שפה \mathcal{L} עבורה קיימת מ"ט

אקראית M עם זמן ריצה T המקיימת כי החל ממקום מסויים $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

• שלמות: לכל $x \in \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0, 1\}^{T(n)}}(M(x; r)) \geq c(n)$ (מקבלת)

• נאותות: לכל $x \notin \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0, 1\}^{T(n)}}(M(x; r)) \leq s(n)$ (מקבלת)

אזי $\mathcal{L} \in \mathcal{BPP}\text{-Time}_{[s, c]}(T(n))$

הגדרה Bounded-error Probabilistic Polynomial-time: תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\mathcal{BPP}_{[s, c]} = \mathcal{BPP}\text{-Time}_{[s, c]}(\text{poly}(n))$

טענה: $\bigcup_{\alpha: \mathbb{N} \rightarrow (0, 1]} \mathcal{BPP}_{[0, \alpha]} = \mathcal{NP}$

סימון: $BPP = BPP_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}$

הגדרה Randomized Polynomial-time: תהא $c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\mathcal{RP}_{[c]} = BPP_{[0, c]}$

סימון: $\mathcal{RP} = BPP_{[0, \frac{1}{2}]}$

משלים של מחלקת שפות: תהא \mathcal{C} מחלקת שפות אזי $\text{co}\mathcal{C} = \{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$

טענה: $\text{co}\mathcal{RP} = BPP_{[\frac{1}{2}, 1]}$

טענה: תהיינה $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ מחלקות שפות באשר $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ אזי $\text{co}\mathcal{C}_1 \subseteq \text{co}\mathcal{C}_2$

בעיית הזיווג המושלם: $\text{PM} = \{\langle G \rangle \mid (G \text{ גרף דו-צדדי}) \wedge (G \text{ מושלם ב-} G)\}$

טענה: $\text{PM} \in \mathcal{P}$

פרמנטה של מטריצה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n (A)_{i, \sigma(i)}$

טענה: יהי G גרף דו-צדדי ותהא A מטריצת השכנויות של G אזי $\text{perm}(A) = \# \{G\text{-זיווגים מושלמים ב-} G\}$

טענה: $\text{det} \in \text{NC}^2$

אלגוריתם אקראי לקיום זיווג מושלם: יהי G גרף דו-צדדי ויהי $X \in M_n(\mathbb{N})$ באשר $(X)_{i,j} \sim \text{Uni}([10n])$ ב"ת לכל $(i, j) \in [n]^2$ אזי

function IsPerfectMatching(G, X):

```
   $A \in M_n(\mathbb{N})$ 
   $A \leftarrow 0$ 
  for  $(i, j) \in E(G)$  do
     $(A)_{i,j} \leftarrow (X)_{i,j}$ 
  end
  return  $\mathbb{1}[\text{det}(A) \neq 0]$ 
```

טענה: יהי G גרף דו-צדדי אזי

• אם $\langle G \rangle \notin \text{PM}$ אז $\mathbb{P}_X(\text{IsPerfectMatching}(G, X) = 0) = 1$

• אם $\langle G \rangle \in \text{PM}$ אז $\mathbb{P}_X(\text{IsPerfectMatching}(G, X) = 0) \leq \frac{1}{10}$

מודל RAM מקבילי הסתברותי (PPRAM/Probabilistic Parallel RAM): יהי (p, k, Π) מודל PRAM אזי (p, k, Π)

קונפיגורציה במודל PPRAM: יהי (p, k, Π) מודל PPRAM תהא (T, R, PC) קונפיגורציה כמודל PRAM ויהי $X \in \{0, 1\}^*$ אזי (T, R, PC, X)

אקראיות בקונפיגורציה: יהי (p, k, Π) מודל PPRAM ותהא (T, R, PC, X) קונפיגורציה אזי X

הערה: את כל הפעולות ממודל PRAM נכליל בצורה הטבעית עבור PPRAM

טענה: קיים מודל PPRAM המחשב את IsPerfectMatching בזמן $\mathcal{O}(\log^2(n))$ ובעבודה $\text{poly}(n)$

מעגל אריתמטי: יהי \mathbb{F} שדה אזי נוסחה מעל הבסיס $\{+, *, -\}$

הגדרה Polynomial Identity Testing Problem: $\text{PIT} = \{\langle \mathbb{F}, C \rangle \mid (\mathbb{F} \text{ שדה}) \wedge (C \text{ מעגל אריתמטי מעל } \mathbb{F} \text{ המייצג את פולינום ה-} 0)\}$

הערה: בבעיית PIT נרצה שבפולינום שהמעגל מייצג כל המקדמים יהיו 0 זהותית.

טענה: $\text{PIT} \in \text{co}\mathcal{RP}$

השערה: $\text{PIT} \in \mathcal{P}$. השערה פתוחה

טענה: יהי $\delta > 0$ תהא $L \in \mathcal{RP}$ ותהא V מ"ט העדה לכך באשר V מטילה m מטבעות אזי קיימת מ"ט M המטילה $m \cdot \log(\frac{1}{\delta})$

מטבעות הרצה בזמן $\text{Time}(V) \cdot \log(\frac{1}{\delta})$ אשר עדה להיות $L \in \mathcal{RP}_{[\delta]}$

טענה אמפליפיקציה חד-צדדית: תהא $L \in \mathcal{RP}$ אזי לכל $c \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $L \in \mathcal{RP}_{[1-2^{-nc}]}$

טענה אמפליפיקציה דו-צדדית: תהא $L \in BPP$ אזי לכל $c \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $L \in BPP_{[2^{-nc}, 1-2^{-nc}]}$

משפט צ'רנוף: יהי $p \in (0, 1)$ ויהיו $Y_1 \dots Y_n \sim \text{Ber}(p)$ ב"ת אזי $\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^n Y_i - pn| \geq \alpha \cdot pn) \leq 2^{-\Omega(\alpha^2 \cdot pn)}$

טענה: יהי $p \in [0, 1]$ ויהיו $c, d \in \mathbb{N}$ אזי $BPP_{[p, p + \frac{1}{nc}]} = BPP_{[2^{-nd}, 1-2^{-nd}]}$

הגדרה: תהא L שפה עבורה קיים $k \in \mathbb{N}$ וקיימת מ"ט אקראית M המקיימת

• זמן פולינומי בממוצע: לכל $x \in \{0, 1\}^*$ מתקיים $\mathbb{E}_r(\text{Time}(M(x; r))) = \mathcal{O}(|x|^k)$

• נכונות: לכל $x \in \{0, 1\}^*$ מתקיים $x \in L \iff (x \text{ לכל } r \text{ אם } M(x; r) = 1 \text{ עוצרת אז } 1)$

אזי $L \in \mathcal{ZPP}_1$

טענה: $\mathcal{ZPP}_1 = \mathcal{RP} \cap \text{co}\mathcal{RP}$

הגדרה: תהא L שפה עבודה קיימת מ"ט אקראית M המחזירה $\{\text{Accept}, \text{Reject}, \text{Quit}\}$ עם זמן ריצה פולינומי המקיימת

- לכל $x \in \{0, 1\}^*$ מתקיים $\mathbb{P}_r(M(x; r) = \text{Quit}) \leq \frac{1}{2}$.
- נכונות: לכל $x \in \{0, 1\}^*$ ולכל r באשר $M(x; r) \neq \text{Quit}$ מתקיים $(M(x; r) = 1) \iff (x \in L)$.

אזי $L \in \mathcal{ZPP}_2$.

טענה: $\mathcal{ZPP}_1 = \mathcal{ZPP}_2$.

הגדרה Zero-error Probabilistic Polynomial-time: $\mathcal{ZPP} = \mathcal{ZPP}_1$.

איזומורפיזם בין גרפים: יהיו G, K גרפים אזי זיווג $\pi : V(G) \rightarrow V(K)$ המקיים $(u, v) \in E(G) \iff (\pi(u), \pi(v)) \in E(K)$ לכל $u, v \in V(G)$.

סימון: יהיו G, K גרפים איזומורפיים אזי $G \cong K$.

הגדרה Tree Isomorphism Problem: $\text{Tree-ISO} = \{\langle T, S \rangle \mid (T, S) \text{ עצים} \wedge (T \cong S)\}$.

הגדרה Rooted Tree Isomorphism Problem: $\text{RTree-ISO} = \{\langle T, S \rangle \mid (T, S) \text{ עצים בעלי שורש} \wedge (T \cong S)\}$.

סימון: יהי T עץ ויהי $v \in V(T)$ אזי $T_v = T[\text{child}(v)]$.

פולינום אופייני של עץ בעל שורש: יהי T עץ בעל שורש r אזי $p_T \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_{\text{depth}(T)}]$ המוגדרת כך

- אם $T = (\{r\}, \emptyset)$ אזי $p_T(x) = x$.

- אחרת $p_T(x_0, \dots, x_{\text{depth}(T)}) = \prod_{(r,v) \in E} (x_{\text{depth}(T)} - p_{T_v})$.

טענה: יהיו T, S עצים בעלי שורש אזי $(T \cong S) \iff (p_T = p_S)$.

אלגוריתם לבדיקת איזומורפיזם העצים בעלי שורש: יהיו T, S עצים בעלי שורש ותהא $A \in \mathbb{N}^{\text{depth}(T)}$ באשר $A_i \sim \text{Uni}([2 \cdot |V(T)|])$ ב"ת לכל $i \in [\text{depth}(T)]$ אזי

function IsTreeIsomorphic(T, S, A):

```

    if (depth( $T$ )  $\neq$  depth( $S$ ))  $\vee$  ( $|V(T)| \neq |V(S)|$ ) then
        | return False
    return  $\mathbb{1}[p_T(A_0, \dots, A_{\text{depth}(T)}) = p_S(A_0, \dots, A_{\text{depth}(T)})]$ 

```

טענה: $\text{RTree-ISO} \in \text{co}\mathcal{RP}$.

מסקנה: $\text{Tree-ISO} \in \text{co}\mathcal{RP}$.

מסקנה: קיים אלגוריתם A ב- $\text{co}\mathcal{RP}$ המחשב איזומורפיזם בין עצים.

טענה: אם $\text{SAT} \in \mathcal{BPP}$ אזי $\text{SAT} \in \mathcal{RP}$.

אלגוריתם Schöning: תהא $\varphi \in 3\text{CNF}$ באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_m\}$ וכן $\varphi = \bigwedge_{i=1}^k C_i$ ותהא $\alpha \sim \text{Uni}(\{0, 1\}^m)$ אזי

function Schöning'sAlgorithm(φ, α):

```

    for  $i \in [m]$  do
        if  $\varphi(\alpha) = \text{True}$  then return True
         $C \leftarrow \arg \min\{n \in [m] \mid C_i(\alpha) = \text{False}\}$ 
         $\ell \leftarrow \text{FV}(C)$ 
         $j \leftarrow \text{un} \in [m]. \ell = x_n$ 
         $\alpha_j = 1 - \alpha_j$ 
    end
    return False

```

טענה: תהא $\varphi \in 3\text{CNF}$ באשר φ אי-ספיקה אזי $\text{Schöning'sAlgorithm}(\varphi, \alpha) = \text{False}$ לכל $\alpha \in \{0, 1\}^m$.

מרחק המינג: יהי $m \in \mathbb{N}_+$ ותהינה $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^m$ אזי $d(\alpha, \beta) = |\{i \in [m] \mid \alpha_i \neq \beta_i\}|$.

סימון: יהי $m \in \mathbb{N}_+$ ותהינה $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^m$ אזי $\Delta(\alpha, \beta) = d(\alpha, \beta)$.

טענה: תהא $\varphi \in 3\text{CNF}$ באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_m\}$ וכן φ ספיקה אזי $\mathbb{P}_\alpha(\text{Schöning'sAlgorithm}(\varphi, \alpha) = \text{True}) \geq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{m}{2}}$.

טענה: תהא $\varphi \in 3\text{CNF}$ באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_m\}$ וכן φ ספיקה אזי $\mathbb{P}_\alpha(\text{Schöning'sAlgorithm}(\varphi, \alpha) = \text{True}) \geq \left(\frac{2}{3}\right)^m$.

מסקנה: תהא $\varphi \in 3\text{CNF}$ באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_m\}$ וכן φ ספיקה אזי

$$\mathbb{P}_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^m \cdot \mathbb{P}_{\alpha_i}(\text{Schöning'sAlgorithm}(\varphi, \alpha_i) = \text{True}) \geq \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{2}$$

מסקנה: $3\text{SAT} \in \mathcal{BP}\text{-Time}_{[0, \frac{1}{2}]}(\text{poly}(m) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^m)$.

טענה: $BPP \subseteq PSPACE$

טענה: $BPP = coBPP$

השערה: $RP = NP$ השערה פתוחה

טענה: אם $NP \subseteq BPP$ אזי $NP = RP$

טענה: אם $coNP \subseteq BPP$ אזי $NP = RP$

טענה: $NP = BPP_{[0, \frac{1}{2^n}]}$

השערה: $BPP \not\subseteq NP$ השערה פתוחה

השערה: $NP \subseteq BPP$ השערה פתוחה

פרוטוקול תקשורת: יהי $t \in \mathbb{N}_+$ תהייה $A, B : \{0, 1\}^* \times \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ ויהי $Ret \in \{A, B\}$ אזי (t, A, B, Ret) .

משתתפים בפרוטוקול תקשורת: יהי (t, A, B, Ret) פרוטוקול תקשורת אזי $\{A, B\}$.

הרצת פרוטוקול תקשורת: יהי (t, A, B, Ret) פרוטוקול תקשורת ויהיו $x, y \in \{0, 1\}^*$ אזי $b_1 \dots b_t \in \{0, 1\}^*$ וכן $ANS \in \{0, 1\}$ המקיימים

• לכל $i \in \{2 \dots t\}$ אם $i \% 2 = 1$ אז $b_i = A(x, b_1 \dots b_{i-1})$

• לכל $i \in \{2 \dots t\}$ אם $i \% 2 = 0$ אז $b_i = B(y, b_1 \dots b_{i-1})$

• אם $Ret = A$ אז $ANS = A(x, b_1 \dots b_t)$ אחרת $ANS = B(y, b_1 \dots b_t)$

סיבוב בפרוטוקול תקשורת: יהי Π פרוטוקול תקשורת אזי b_i באשר $i \in [t]$.

מספר הסיבובים בפרוטוקול תקשורת: יהי (t, A, B, Ret) פרוטוקול תקשורת אזי t .

סימון: יהי Π פרוטוקול תקשורת ויהיו $x, y \in \{0, 1\}^*$ אזי $\Pi(x, y) = ANS$.

פרוטוקול תקשורת מחשב פונקציה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי פרוטוקול תקשורת Π עבורו מתקיים $\Pi(x, y) = f(x, y)$ לכל $x, y \in \{0, 1\}^n$

עלות תקשורת של פרוטוקול תקשורת: יהי Π פרוטוקול תקשורת אזי $\mathcal{C}(\Pi) = \max_{x, y \in \{0, 1\}^n} \sum_{i=1}^t |b_i(x, y)|$

סיבוכיות תקשורת: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $\mathcal{D}(f) = \min \{\mathcal{C}(\Pi) \mid f \text{ פרוטוקול המחשב את } f\}$

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $\mathcal{D}(f) \leq n$

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $EQ_n : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ המוגדרת $EQ_n(x, y) = \mathbb{1}[x = y]$

המטריצה המייצגת של פונקציה בוליאנית: תהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $M_f \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ המוגדרת $(M_f)_{i,j} = f(i, j)$ לכל $i, j \in [n]$

מלבן קומבינטורי: תהייה $S, T \subseteq \{0, 1\}^n$ אזי $S \times T$

מלבן קומבינטורי מונוכרומטי: תהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי מלבן קומבינטורי R עבורו $1 = \left| \left\{ (M_f)_{i,j} \mid (i, j) \in R \right\} \right|$

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיימת חלוקה של $\{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n$ ל- $2^{\mathcal{D}(f)}$ מלבנים מונוכרומטיים.

מסקנה: תהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $\text{rank}(M_f) \leq 2^{\mathcal{D}(f)}$

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{D}(EQ_n) = n$

פרוטוקול תקשורת בעל מטבעות פרטיים מחשב פונקציה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ויהי $\varepsilon \in [0, 1]$ אזי

פרוטוקול תקשורת Π עבורו מתקיים $\mathbb{P}_{r_1, r_2}(\Pi((x; r_1), (y; r_2)) = f(x, y)) \geq 1 - \varepsilon$ לכל $x, y \in \{0, 1\}^n$

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהיו $x, y \in \{0, 1\}^n$ אזי נגדיר פרוטוקול תקשורת בעל מטבעות פרטיים $\Pi_{rEQ}[n]$ כך

Communication Protocol $\Pi_{rEQ}[n](x, y)$:

A draws $p \leftarrow \{1, \dots, n^4\}$
 A sends $(p, x \bmod p)$
 B outputs $\mathbb{1}[x \bmod p = y \bmod p]$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\Pi_{rEQ}[n]$ מחשבת את EQ_n בהסתברות $\frac{1}{n^2}$ ובעלות $8 \log(n)$

פרוטוקול תקשורת בעל מטבעות פומביים מחשב פונקציה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ ויהי $\varepsilon \in [0, 1]$ אזי

פרוטוקול תקשורת Π עבורו מתקיים $\mathbb{P}_r(\Pi((x; r), (y; r)) = f(x, y)) \geq 1 - \varepsilon$ לכל $x, y \in \{0, 1\}^n$

קידוד לינארי: יהי \mathbb{F} שדה ויהיו $n, k, d \in \mathbb{N}_+$ אזי $C : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$ המקיימת

• לינאריות: לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $a, b \in \mathbb{F}^k$ מתקיים $C(\alpha a + \beta b) = \alpha \cdot C(a) + \beta \cdot C(b)$

• מרחק: לכל $a, b \in \mathbb{F}^k$ באשר $a \neq b$ מתקיים $\Delta(C(x), C(y)) \geq d$

מימד של קידוד לינארי: יהי \mathbb{F} שדה יהיו $n, k, d \in \mathbb{N}_+$ ויהי $C : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$ קוד לינארי אזי k .

מרחק של קידוד לינארי: יהי \mathbb{F} שדה יהיו $n, k, d \in \mathbb{N}_+$ ויהי $C : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$ קוד לינארי אזי d .

טענה: יהי \mathbb{F} שדה יהיו $n, k, d \in \mathbb{N}_+$ ותהא $C : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$ אזי $(C \text{ קוד לינארי}) \iff (\text{Im}(C) \text{ תמי"ו של } \mathbb{F}^n \wedge (\text{לכל } x, y \in \text{Im}(C) \text{ שונים מתקיים } (\Delta(x, y) \geq d))$.

הגדרה: יהי \mathbb{F} שדה יהיו $n, k, d \in \mathbb{N}_+$ ויהי $C : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$ קוד לינארי אזי C הינו $[n, k, d]_{|\mathbb{F}|}$.

הגדרה: יהי \mathbb{F} שדה יהי $k \in \mathbb{N}_+$ יהי $n \leq |\mathbb{F}|$ ויהי $a \in \mathbb{F}^k$ אזי $p_a \in \mathbb{F}[x]$ המוגדר $p_a(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1}x^i$.

הגדרה קידוד ריד-סולומון: יהי \mathbb{F} שדה יהי $k \in \mathbb{N}_+$ יהי $n \leq |\mathbb{F}|$ ויהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}$ אזי $C : \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$ המוגדרת $C(a) = (p_a(f_1) \dots p_a(f_n))$.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה יהי $k \in \mathbb{N}_+$ יהי $n \leq |\mathbb{F}|$ ויהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}$ אזי קידוד ריד-סולומון הינו $[n, k, n-k]_{|\mathbb{F}|}$.

הגדרה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}_+$ יהי \mathbb{F} שדה באשר $|\mathbb{F}| = m$ ויהי $C : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ קידוד ריד-סולומון אזי נגדיר פרוטוקול תקשורת בעל מטבעות פרטיים $\Pi_{\text{REQ}}[n, m]$ כך

Communication Protocol $\Pi_{\text{REQ}}[n, m](x, y)$:

A draws $i \leftarrow \{1, \dots, m\}$
 A sends $(i, (C(x))_i)$
 B outputs $\mathbb{1}[(C(x))_i = (C(y))_i]$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\Pi_{\text{REQ}}[n, m]$ מחשבת את EQ_n בהסתברות $\frac{n}{m}$ ובעלות $2 \log(m)$.

סימון: תהיינה V, W קבוצות יהי $D \in \mathbb{N}_+$ תהא $C : V \times [D] \rightarrow W$ ותהא $A \subseteq V$ אזי $\Gamma(A) = \{C(a, i) \mid (a \in A) \wedge (i \in [D])\}$.

הגדרה Disperser: יהי $\varepsilon > 0$ יהי $k \in \mathbb{N}_+$ תהיינה V, W קבוצות ויהי $D \in \mathbb{N}_+$ אזי $C : V \times [D] \rightarrow W$ עבורה לכל $A \subseteq V$ באשר $|\Gamma(A)| \geq (1 - \varepsilon)|W|$ מתקיים $2^k \leq |A|$.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ ויהיו $k, t, m, D \in \mathbb{N}_+$ באשר $2^m \leq \frac{D \cdot 2^k}{2 \ln(\frac{\varepsilon}{2})}$ וכן $D > \frac{2 \cdot \ln(e \cdot \frac{2^t}{2^k})}{\varepsilon}$ אזי קיים $C : \{0, 1\}^t \times [D] \rightarrow \{0, 1\}^m$ אשר הינו disperser (k, ε) .

טענה: יהי $\delta > 0$ תהא $L \in \mathcal{RP}$ ותהא V מ"ט העדה לכך באשר V מטילה m מטבעות אזי קיימת מ"ט M המטילה $(\frac{1}{\delta})$ $m + \log$ מטבעות הרצה בזמן $\text{Time}(V) \cdot \mathcal{O}(\log(\frac{1}{\delta}))$ אשר עדה להיות $L \in \mathcal{RP}_{[\delta]}$.

מקור: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי מ"מ Y מעל $\{0, 1\}^n$.

k -מקור: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ באשר $k \leq n$ אזי מקור Y מעל $\{0, 1\}^n$ המקיים $\mathbb{P}(Y = y) \leq 2^{-k}$ לכל $y \in \{0, 1\}^n$.

מקור שטוח: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $S \subseteq \{0, 1\}^n$ אזי מקור Y המקיים $\mathbb{P}(Y = s) = \mathbb{P}(Y = x)$ לכל $s, x \in S$.

מרחק סטטיסטי: תהא Ω קבוצה סופית ויהיו X, Y מ"מ מעל Ω אזי $\|X - Y\| = \frac{1}{2} \sum_{s \in \Omega} |\mathbb{P}(X = s) - \mathbb{P}(Y = s)|$.

טענה: תהא Ω קבוצה סופית ויהיו X, Y מ"מ מעל Ω אזי $\|X - Y\| = \max_{S \subseteq \Omega} |\mathbb{P}(X \in S) - \mathbb{P}(Y \in S)|$.

הגדרה Extractor: יהיו $n, k, d, m \in \mathbb{N}$ באשר $k \leq n$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^d \rightarrow \{0, 1\}^m$ עבורה לכל k -מקור Y מעל $\{0, 1\}^n$ מתקיים $\left\| f(Y, \text{Uni}(\{0, 1\}^d)) - \text{Uni}(\{0, 1\}^m) \right\| < \varepsilon$.

משפט: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ באשר $k \leq n$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^d \rightarrow \{0, 1\}^m$ אשר הינו extractor (k, ε) באשר $d = \log(n - k) + 2 \log(\frac{1}{\varepsilon}) + \mathcal{O}(1)$ וכן $m = k + d - 2 \log(\frac{1}{\varepsilon}) - \mathcal{O}(1)$.

טענה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ באשר $k \leq n - 1$ יהי $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ אזי $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אינו extractor (k, ε) .

טענה: תהא $L \in \mathcal{BPP}$ אזי קיימת מ"ט הסתברותית M המשתמשת ב- t ביטי אקראיות אשר עדה להיות $L \in \mathcal{BPP}_{[2^{-\frac{2}{3}t}, 1 - 2^{-\frac{2}{3}t}]}$.

טענה: יהיו $n, k, d, m \in \mathbb{N}$ באשר $k \leq n$ יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^d \rightarrow \{0, 1\}^m$ באשר f הינה extractor (k, ε) אזי f הינה disperser (k, ε) .

טענה: תהא $L \in \mathcal{RP}$ אזי קיימת מ"ט הסתברותית M המשתמשת ב- t ביטי אקראיות אשר עדה להיות $L \in \mathcal{RP}_{[2^{-\frac{2}{3}t}]}$.

בעיית הבטחה: תהיינה $N, Y \subseteq \{0, 1\}^*$ באשר $N \cap Y = \emptyset$ אזי (Y, N) .

אלגוריתם פותר בעיית הבטחה: תהא (Y, N) בעיית הבטחה ותהא \mathcal{C} מחלקה אזי אלגוריתם $A : N \cup Y \rightarrow \{0, 1\}$ באשר A עדה להיות $Y \in \mathcal{C}$.

הערה: תהא $L \subseteq \{0, 1\}^*$ אזי $L \mapsto (L, \bar{L})$ הינו שיכון לבעיית הבטחה.

הגדרה: תהא \mathcal{C} מחלקה אזי $\{\text{קיים אלגוריתם } A \text{ אשר עד להיות } (Y, N) \wedge (Y \in \mathcal{C})\}$ בעיית הבטחה (Y, N) Promise- \mathcal{C} .

אלגוריתם קירוב בעיה מקסימלית: יהי $c \geq 1$ תהא X קבוצה ותהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ אזי אלגוריתם $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ המקיים
 $\forall x \in X \quad \frac{\max f(X)}{c} \leq A(x) \leq \max f(X)$

אלגוריתם קירוב בעיה מינימלית: יהי $c \geq 1$ תהא X קבוצה ותהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ אזי אלגוריתם $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ המקיים
 $\forall x \in X \quad \min f(X) \leq A(x) \leq c \cdot \min f(X)$

הגדרה Min Gap Problem: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ תהא X קבוצה ותהא $f : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ אזי $\min f = (\text{Yes}, \text{No})$ באשר
 $\text{Yes} = \{\langle x \rangle \mid (x \in X) \wedge (f(x) \leq a)\}$ •
 $\text{No} = \{\langle x \rangle \mid (x \in X) \wedge (f(x) > b)\}$ •

הגדרה Max Gap Problem: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ תהא X קבוצה ותהא $f : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ אזי $\max f = (\text{Yes}, \text{No})$ באשר
 $\text{Yes} = \{\langle x \rangle \mid (x \in X) \wedge (f(x) \geq b)\}$ •
 $\text{No} = \{\langle x \rangle \mid (x \in X) \wedge (f(x) < a)\}$ •

הערה: אם f הינה פונקציית \min, \max בצורה טבעית אזי $\text{GAP}_{[a,b]} f$ הינה בעיית המרווח המתאימה.

הגדרה Cover Vertex Min: נגדיר $\text{minVC} : \{G \mid \text{גרף } G\} \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\text{minVC}(G) = \min \{|A| \mid A \text{ כיסוי צמתים}\}$

טענה: יהי $c \geq 1$ תהא X קבוצה ותהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי A אלגוריתם פולינומי c -קירוב ל- $\min f(X)$ אזי $\text{GAP}_{[k, ck]} f \in \text{Promise-}\mathcal{P}$ לכל $k \in \mathbb{N}$

טענה: קיים אלגוריתם פולינומי 2-קירוב לבעיית minVC .

הגדרה Integer Linear Programming: $\text{INT-LIN-PROG} = \{\langle A, b \rangle \mid (A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})) \wedge (b \in \mathbb{R}^m) \wedge (\exists x \in \mathbb{N}^n. Ax \leq b)\}$

טענה: INT-LIN-PROG הינה \mathcal{NP} -קשה.

טענה: יהי G גרף אזי הבעיה $\text{minVC}(G)$ הינה

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{v \in V} w_v \\ \text{s.t.} \quad & w_v + w_u \geq 1, \forall (v, u) \in E \\ & w_v \in \{0, 1\}, \forall v \in V \end{aligned}$$

אלגוריתם קירוב לבעיית הכיסוי המינימלי בעזרת תכנות לינארי: יהי G גרף אזי

function Approx-minVC(G):

$$\left| \begin{array}{l} w \leftarrow \text{solve} \left(\begin{array}{l} \min \sum_{v \in V} w_v \\ \text{s.t. } w_v + w_u \geq 1, \forall (v, u) \in E \\ w_v \in [0, 1], \forall v \in V \end{array} \right) \\ \text{return } \{v \in V \mid w_v \geq \frac{1}{2}\} \end{array} \right|$$

טענה: יהי G גרף אזי $\text{Approx-minVC}(G)$ הינו כיסוי צמתים.

טענה: יהי G גרף אזי Approx-minVC בעל זמן ריצה פולינומי.

טענה: יהי G גרף אזי $\text{minVC}(G) \leq |\text{Approx-minVC}(G)| \leq 2 \cdot \text{minVC}(G)$

טענה: יהי G גרף אזי הבעיה $\text{maxCut}(G)$ הינה

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(u,v) \in E} \frac{1 - x_u x_v}{2} \\ \text{s.t.} \quad & x_v \in \{-1, 1\}, \forall v \in V \end{aligned}$$

הגדרה: יהי G גרף אזי נגדיר את maxCutExt_1 כך

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(u,v) \in E} \frac{1 - x_u \cdot x_v}{2} \\ \text{s.t.} \quad & x_v \in \mathbb{R}^n, \forall v \in V \\ & x_v \cdot x_v = 1, \forall v \in V \end{aligned}$$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ יהיו $v_1 \dots v_n \in \mathbb{S}^{n-1}$ ונגדיר $A \in M_n(\mathbb{R})$ כך $A = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix}$ אזי AA^T מוגדרת חיובית.
טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ מוגדרת חיובית}\}$ קמורה.
הגדרה: יהי G גרף אזי נגדיר את $\max\text{CutExt}_2$ כך

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(u,v) \in E} \frac{1 - (B)_{u,v}}{2} \\ \text{s.t.} \quad & B \in M_n(\mathbb{R}) \\ & (B)_{v,v} = 1, \forall v \in V \\ & (B)_{v,u} = (B)_{u,v}, \forall v, u \in V \end{aligned}$$

טענה: קיים אלגוריתם הפותר את $\max\text{CutExt}_2$ בזמן פולינומי.
טענה: יהי G גרף אזי $\max\text{CutExt}_1(G) = \max\text{CutExt}_2(G)$.
סימון: יהי G גרף אזי $\max\text{CutExt}(G) = \max\text{CutExt}_1(G)$.
טענה: יהי G גרף אזי $\max\text{Cut}(G) \leq |\max\text{CutExt}(G)| \leq \frac{1}{0.878} \max\text{Cut}(G)$.
פונקציית מרחק על גרף: יהי G גרף לא מכוון אזי $d: V^2 \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה

- סימטריות: לכל $u, v \in V$ מתקיים $d(u, v) = d(v, u)$.
- חיוביות ממש: לכל $u \in V$ מתקיים $d(u, u) = 0$.
- אי-שיוויון המשולש: לכל $u, v, w \in V$ מתקיים $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

סימון: יהי G גרף תהא d פונקציית מרחק תהא $S \subseteq V$ ותהא $u \in V$ אזי $d(u, S) = \min_{v \in S} d(u, v)$.
סימון: יהי G גרף תהא d פונקציית מרחק ותהא $S \subseteq V$ אזי $r(S) = \max_{u \in V} d(u, S)$.
הגדרה k-Center Problem: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ נגדיר $\min\text{Center}: \{(G, d, k) \mid (G \text{ גרף}) \wedge (d \text{ מרחק}) \wedge (k \in \mathbb{N})\} \rightarrow \mathbb{N}$ כך
 $\min\text{Center}(G, d, k) = \min \{r(S) \mid S \in \mathcal{P}_k(V)\}$.
אלגוריתם קירוב למציאת k-מרכז: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ יהי G גרף ויהי d מרחק אזי

```
function ApproxCenter(G, d, k):
    v ← V
    S ← {v}
    while |S| < k do
        v ← arg max{d(u, S) | u ∈ V}
        S ← S ∪ {v}
    end
    return S
```

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ יהי G גרף ויהי d מרחק אזי ApproxCenter בעלת זמן ריצה פולינומי.
טענה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ יהי G גרף ויהי d מרחק אזי $|\min\text{Center}(G)| \leq |\text{ApproxCenter}(G, d, k)| \leq 2 \cdot \min\text{Center}(G)$.
הגדרה Dominating Set: $\text{DS} = \{(G, k) \mid \exists S \in \mathcal{P}_k(V). \forall v \in V. ((\text{adj}(v) \cup \{v\}) \cap S \neq \emptyset)\}$.
טענה: DS הינה \mathcal{NP} -שלמה.
טענה: יהי $c < 2$ אם קיים אלגוריתם פולינומי A אשר מהווה c-קירוב לבעיית $\min\text{Center}$ אזי $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
רדוקציה פולינומית משמרת מרווח בין בעיות הבטחה: יהיו $(Y, N), (Y', N')$ בעיות הבטחה עבורן קיימת מ"ט פולינומית M המקיימת

- לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \in Y$ אז $M(x) \in Y'$
 - לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \in N$ אז $M(x) \in N'$
- אזי $(Y, N) \leq_p (Y', N')$.

בעיית הבטחה \mathcal{NP} -Promise-קשה: בעיית הבטחה Π עבורה לכל $L \in \mathcal{NP}$ מתקיים $L \leq_p \Pi$.

טענה: תהא Π בעיית הבטחה אזי $(\Pi \text{ הינה } \mathcal{NP}\text{-Promise-קשה}) \iff (3\text{SAT} \leq_{\text{LOG}} \Pi)$.

בעיית קירוב \mathcal{NP} -קשה: יהי $c \geq 1$ ותהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה לכל A אשר c -מקרבת את f מתקיים $\text{SAT} \in \mathcal{P}^A$ אזי בעיית ה- c -קירוב של f .

טענה: תהא X קבוצה תהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$ באשר $\text{GAP}_{[a,b]} f$ הינה \mathcal{NP} -Promise-קשה אזי בעיית ה- $\frac{b}{a}$ קירוב של f הינה \mathcal{NP} -קשה.

מסקנה: $\text{minCenter}_{[1,2]} \text{GAP}$ הינה \mathcal{NP} -Promise-קשה.

הגדרה Max Clique: נגדיר $\text{maxClique} : \{G \mid \text{גרף } G\} \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\text{maxClique}(G) = \max \left\{ \frac{|K|}{|V|} \mid (K \text{ קליקה}) \wedge (K \text{ תת-גרף של } G) \right\}$.

הגדרה Max Independent Set: נגדיר $\text{maxIS} : \{G \mid \text{גרף } G\} \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\text{maxIS}(G) = \max \left\{ \frac{|I|}{|V|} \mid (I \subseteq V) \wedge (I \text{ בלתי תלויה}) \right\}$.

טענה: יהיו $a, b \in (0, 1)$ באשר $a < b$ אזי $\text{GAP}_{[a,b]} \text{maxClique} \leq_p \text{GAP}_{[a,b]} \text{maxIS}$.

טענה: יהיו $a, b \in (0, 1)$ באשר $a < b$ אזי $\text{GAP}_{[1-b, 1-a]} \text{minVC} \leq_p \text{GAP}_{[a,b]} \text{maxIS}$.

טענה: יהיו $a, b \in (0, 1)$ באשר $a < b$ אזי $\text{GAP}_{[\frac{a}{3}, \frac{b}{3}]} \text{maxClique} \leq_p \text{GAP}_{[a,b]} \text{max 3SAT}$.

הערה: משמעות $a, b \in (0, 1)$ היא אחוזים ביחס לטווח התוצאות האפשריות.

הגדרה: יהי $b \in \mathbb{N}_+$ אזי $\{ \varphi \in 3\text{SAT} \mid b \text{ הוא לכל היותר } x \text{ מספר המופיעים של } x \text{ ב-}\varphi \}$ $3\text{CNF}(b)$.

הגדרה: יהי $b \in \mathbb{N}_+$ אזי $3\text{SAT}(b) = \{ \langle \varphi \rangle \mid (\varphi \in 3\text{CNF}(b)) \wedge (\varphi \text{ ספיק}) \}$.

טענה: $3\text{SAT}(3)$ הינה \mathcal{NP} -קשה.

הגדרה: יהי $b \in \mathbb{N}_+$ אזי נגדיר $\text{max 3SAT}(b) : 3\text{CNF}(b) \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\text{max 3SAT}(b)(\varphi) = \text{max 3SAT}(\varphi)$.

טענה: יהי $d \in \mathbb{N}$ באשר $\frac{1}{2} \leq e^2 d \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{d-2} \leq \frac{1}{2}$ אזי קיימת סדרת גרפים מכוונים $\{G_k \mid k \in \mathbb{N}_+\}$ באשר G_n גרף על n קודקודים וכן

$\deg(v) \leq d$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $v \in G_n$ עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $A \subseteq V(G_n)$ באשר $|A| \leq \frac{|V(G_n)|}{2}$ מתקיים $|E(A, \bar{A})| \geq |A|$.

טענה: יהי $d \in \mathbb{N}$ באשר $\frac{1}{2} \leq e^2 d \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{d-2} \leq \frac{1}{2}$ אזי $\text{max 3SAT}(4d+1) \leq \text{GAP}_{[1-\frac{1}{10(12d+1)}, 1]} \text{max 3SAT}$.

הגדרה Three-variable Linear Equation: $3\text{LIN} = \left\{ (A, v) \in M_{m \times n}(\mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2^m \mid \forall i \in [m]. \sum_{j=1}^n \mathbb{1} \left[(A)_{i,j} = 1 \right] \leq 3 \right\}$.

יחס המשוואות המסופקות: יהיו $m, n \in \mathbb{N}$ תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{Z}_2)$ תהא $b \in \mathbb{Z}_2^m$ ותהא $x \in \mathbb{Z}_2^n$ אזי $\text{RTE}(A, v, x) = \frac{1}{m} |\{i \in [m] \mid R_i(A) \cdot x = v_i\}|$.

הגדרה: נגדיר $\text{max 3LIN} : 3\text{LIN} \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\text{max 3LIN}(A, v) = \max \left\{ \text{RTE}(A, v, x) \mid x \in \mathbb{Z}_2^{\text{rows}(A)} \right\}$.

טענה: יהיו $a, b \in [0, 1]$ אזי $\text{GAP}_{[\frac{4}{7}a, \frac{4}{7}b]} \text{max 3LIN} \leq_{\text{LOG}} \text{GAP}_{[a,b]} \text{max 3SAT}$.

טענה: יהיו $a, b \in [0, 1]$ אזי $\text{max 2SAT} \leq_{\text{LOG}} \text{GAP}_{[\frac{6+a}{10}, \frac{6+b}{10}]} \text{max 3SAT}$.

טענה: יהיו $a, b \in [0, 1]$ אזי $\text{maxIS} \leq_{\text{LOG}} \text{GAP}_{[\frac{a}{4}, \frac{b}{4}]} \text{max 3LIN}$.

מספר הצביעה: יהי G גרף אזי $\{ \text{קיימת צביעה חוקית של } G \text{ ב-} k \text{ צבעים} \mid k \in \mathbb{N}_+ \}$ $\chi(G)$.

טענה: אם $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ אז $\chi_{[2, \sqrt{|V|}]} \text{GAP}$ אינה \mathcal{NP} -Promise-קשה.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ אזי $\text{max E3SAT} \in \text{Promise-}\mathcal{P}$ $\text{GAP}_{[\frac{7}{8}-\varepsilon, \frac{7}{8}+\varepsilon]}$.

הגדרה: יהי $d \in \mathbb{N}$ אזי $\text{GraphDegree}_d = \{G \mid (\text{גרף } G) \wedge (\forall v \in V. \deg(V) \leq d)\}$.

הגדרה: יהי $d \in \mathbb{N}$ נגדיר $\text{maxIS}(d) : \text{GraphDegree}_d \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\text{maxIS}(d)(G) = \text{maxIS}(G)$.

טענה: אם $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ אז לכל $a, b \in (0, 1)$ באשר $a < b$ מתקיים $\text{maxIS}(2) \text{GAP}_{[a,b]}$ אינה \mathcal{NP} -Promise-קשה.

טענה: קיימים $a, b \in (0, 1)$ באשר $a < b$ וקיים $D \in \mathbb{N}$ עבורם $\text{maxIS}(D) \text{GAP}_{[a,b]}$ הינה \mathcal{NP} -Promise-קשה.

הגדרה Problem Circuit Minimal: $\{\langle C \rangle \mid (C \text{ מעגל}) \wedge (|D| \geq |C| \text{ אז } C(x) = D(x) \text{ לכל } x) \}$ אם D מעגל D .

טענה: $\text{MinCircuit} \in \text{PSPACE}$.

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}$ יהי A אלגוריתם ויהי x אזי $\text{Alt}_k^{\exists}(M, x) = Q_1 w_1 \dots Q_k w_k (A(x, w_1 \dots w_k))$ באשר $Q_i = \exists$ לכל $i \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$

וכן $Q_i = \forall$ לכל $i \in \mathbb{N}_{\text{even}}$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהא L שפה עבורה קיימת מ"ט פולינומית M המקיים כי $(x \in L) \iff \text{Alt}_k^{\exists}(M, x)$ אזי $L \in \Sigma_k$.

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}$ יהי A אלגוריתם ויהי x אזי $\text{Alt}_k^{\forall}(M, x) = Q_1 w_1 \dots Q_k w_k (A(x, w_1 \dots w_k))$ באשר $Q_i = \forall$ לכל $i \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$

וכן $Q_i = \exists$ לכל $i \in \mathbb{N}_{\text{even}}$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהא L שפה עבודה קיימת מ"ט פולינומית M המקיים כי $(x \in L) \iff (x \in \text{Alt}_k^\forall(M, x))$ אזי $L \in \Pi_k$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\Pi_k = \text{co}\Sigma_k$.

טענה: $\mathcal{P} = \Sigma_0 = \Pi_0$.

טענה: $\text{co}\mathcal{NP} = \Pi_1$ וכן $\mathcal{NP} = \Sigma_1$.

טענה: $\text{MinCircuit} \in \Pi_2$.

טענה: $\text{TQBF} \in \Sigma_{\text{poly}}$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\Sigma_k \subseteq \Sigma_{k+1}$ וכן $\Pi_k \subseteq \Pi_{k+1}$ וכן $\Sigma_k \subseteq \Pi_{k+1}$ וכן $\Pi_k \subseteq \Sigma_{k+1}$.

הגדרה Polynomial Hierarchy: $\mathcal{PH} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k$.

טענה: $\mathcal{PH} \subseteq \text{PSPACE}$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\Sigma_{k+1} = \mathcal{NP}^{\Sigma_k}$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{TQBF}_k^\exists = \{ \langle \varphi \rangle \mid (\varphi = \text{Alt}_k^\exists(\psi, \varepsilon)) \wedge (\psi \text{ עבודה קיימת נוסחה } \psi) \}$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\Sigma_k = \{ L \mid L \leq_{\text{LOG}} \text{TQBF}_k^\exists \}$.

טענה: יהי $\ell \in \mathbb{N}_+$ אם $\Sigma_\ell = \Pi_\ell$ אז $\mathcal{PH} = \Sigma_\ell$.

הגדרה: $\text{ExactClique} = \{ \langle G, k \rangle \mid \text{maxClique}(G) = k \}$.

טענה: $\text{ExactClique} \in \Sigma_2 \cap \Pi_2$.

למה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\Sigma_4 \not\subseteq \text{Size}(\mathcal{O}(n^k))$.

משפט קאנאן: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\Sigma_2 \not\subseteq \text{Size}(\mathcal{O}(n^k))$.

הגדרה Isomorphism Graph: $\text{GISO} = \{ \langle G, H \rangle \mid (G, H) \text{ עצים} \wedge (G \cong H) \}$.

הגדרה Isomorphism Non Graph: $\text{GNISO} = \overline{\text{GISO}}$.

טענה: $\text{GISO} \in \mathcal{NP}$.

השערה: $\text{GISO} \in \mathcal{P}$. השערה פתוחה

טענה: $\text{PSPACE} = \text{coPSPACE}$.

טענה: $\mathcal{PH} = \text{co}\mathcal{PH}$.

פרוטוקול אינטרקטיבי: תהייה $P, V : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי (P, V) .

מוכיח בפרוטוקול אינטרקטיבי: יהי (P, V) פרוטוקול אינטרקטיבי אזי P .

מוודא בפרוטוקול אינטרקטיבי: יהי (P, V) פרוטוקול אינטרקטיבי אזי V .

מספר הסיבובים בפרוטוקול אינטרקטיבי: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ ויהי (P, V) פרוטוקול אינטרקטיבי אזי k .

הרצת פרוטוקול אינטרקטיבי: יהי (P, V) פרוטוקול אינטרקטיבי יהי $x \in \{0, 1\}^n$ ויהיו $y_1 \dots y_k \in \{0, 1\}^m$ אזי

$\text{ANS} \in \{0, 1\}$ וכן $a_1 \dots a_k \in \{0, 1\}^\ell$ המקיימים

• לכל $i \in [t]$ מתקיים $a_i = P(x, V(y_1 \dots y_{i-1}))$

• $\text{ANS} = V(x, y_1 \dots y_k, a_1 \dots a_t)$

הערה: אלא אם נאמר אחרת $y_1 \dots y_k \in \{0, 1\}^{\text{poly}(|x|)}$ וכן $P : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^{\text{poly}(|x|)}$

הגדרה Deterministic Proof System: יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהא L שפה עבודה קיימת מ"ט פולינומית המקיימת לכל $x \in \{0, 1\}^*$ קיימים

$y_1 \dots y_k \in \{0, 1\}^{\text{poly}(|x|)}$ המקיימים

• אם $x \in L$ אז קיימת P עבודה $(P, V)(x) = 1$

• אם $x \notin L$ אז לכל P מתקיים $(P, V)(x) = 0$

אזי $L \in \text{dIP}(k)$

הגדרה: $\text{dIP} = \text{dIP}(\text{poly}(n))$

משפט: $\text{dIP} = \mathcal{NP}$

פרוטוקול אינטרקטיבי הסתברותי: תהא $P : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ תהא V מ"ט הסתברותית ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי הפרוטוקול האינטרקטיבי

(P, V)

פרוטוקול אינטרקטיבי בעל מטבעות פרטיים: פרוטוקול אינטרקטיבי הסתברותי (P, V) באשר $V(y_1 \dots y_{i-1}) \neq (y_1 \dots y_{i-1})$ לכל

$i \in [k]$

פרוטוקול אינטרקטיבי בעל מטבעות פומביים: פרוטוקול אינטרקטיבי הסתברותי (P, V) באשר $V(y_1 \dots y_{i-1}) = (y_1 \dots y_{i-1})$ לכל

$i \in [k]$

הערה: מכאן פרוטוקול אינטרקטיבי יתייחס להסתברותי ואם לא נאמר אחרת אז בעל מטבעות פומביים.

ערך של פרוטוקול אינטרקטיבי: יהי Π פרוטוקול אינטרקטיבי ויהי $x \in \{0, 1\}^n$ אזי $\text{Val}(\Pi, x) = \mathbb{P}_{y_1 \dots y_k} (\Pi(x) = 1)$.

ערך של מוודא: יהי V מוודא בפרוטוקול אינטרקטיבי אזי $\text{Val}(V, x) = \max_P \text{Val}((P, V), x)$.

הגדרה Interactive Proof: יהי $k \in \mathbb{N}$ תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ותהא L שפה עבורה קיים מוודא V בפרוטוקול אינטרקטיבי בעל מפתחות פרטיים ו- k סיבוכים המקיים

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \in L$ אז $\text{Val}(V, x) \geq c(|x|)$

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \notin L$ אז $\text{Val}(V, x) \leq s(|x|)$

אזי $L \in \text{IP}_{[s,c]}(k)$.

הגדרה: תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{IP}_{[s,c]} = \text{IP}_{[s,c]}(\text{poly}(n))$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהיו G_1, G_2 גרפים על n קודקודים אזי נגדיר פרוטוקול אינטרקטיבי בעל מטבעות פרטיים כך

Interactive Proof $\Pi_{\text{GNISO}}^{\text{priv}}[n](G_1, G_2)$:

V draws $\sigma \leftarrow S_n$ and $b \leftarrow \{1, 2\}$
 V sends $\sigma(G_b)$
 P sends $c \in \{1, 2\}$
 V outputs $\mathbb{1}[b = c]$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהיו G_1, G_2 גרפים איזומורפיים על n קודקודים אזי $\mathbb{P}(\Pi_{\text{GNISO}}^{\text{priv}}[n](G_1, G_2) = 1) = \frac{1}{2}$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהיו G_1, G_2 גרפים לא איזומורפיים על n קודקודים אזי $\mathbb{P}(\Pi_{\text{GNISO}}^{\text{priv}}[n](G_1, G_2) = 1) = 0$

מסקנה: $\text{GNISO} \in \text{IP}_{[0, \frac{1}{2}]}[0, \frac{1}{2}]$

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ יהי $\ell \in \mathbb{N}$ באשר $4n! \leq 2^\ell < 8n!$ נגדיר $\mathcal{H} = \{h : \{0, 1\}^{n^2} \rightarrow \{0, 1\}^\ell \mid \exists a, b \in \mathbb{F}_{2^{n^2}}. h = ax + b\}$ ויהיו G_1, G_2 גרפים על n קודקודים אזי נגדיר פרוטוקול אינטרקטיבי כך $\Pi_{\text{GNISO}}^{\text{pub}}[n]$

Interactive Proof $\Pi_{\text{GNISO}}^{\text{pub}}[n](G_1, G_2)$:

V draws $h \leftarrow \mathcal{H}$ and $z \leftarrow \{0, 1\}^\ell$
 V sends (h, z)
 P sends $G \in \{\text{Graph on } n \text{ vertices}\}$ and $\sigma \in S_n$ and $b \in \{1, 2\}$
 V outputs $\mathbb{1}[(h(G) = z) \wedge (\sigma(G_b) = G)]$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהיו G_1, G_2 גרפים איזומורפיים על n קודקודים אזי $\mathbb{P}(\Pi_{\text{GNISO}}^{\text{pub}}[n](G_1, G_2) = 1) \leq \frac{n!}{2^\ell}$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהיו G_1, G_2 גרפים לא איזומורפיים על n קודקודים אזי $\mathbb{P}_r(\Pi_{\text{GNISO}}^{\text{pub}}[n](G_1, G_2) = 1) \geq 1.5 \cdot \frac{n!}{2^\ell}$

הגדרה Arthur Merlin: יהי $k \in \mathbb{N}$ תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ותהא L שפה עבורה קיים מוודא V בפרוטוקול אינטרקטיבי בעל k סיבוכים המקיים

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \in L$ אז $\text{Val}(V, x) \geq c(|x|)$

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \notin L$ אז $\text{Val}(V, x) \leq s(|x|)$

אזי $L \in \text{AM}_{[s,c]}(k)$.

הגדרה Merlin Arthur: יהי $k \in \mathbb{N}$ תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ותהא L שפה עבורה קיים מוודא V בפרוטוקול אינטרקטיבי בעל k סיבוכים המקיים

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \in L$ אז $\text{Val}(V, x \mid y_1 = \varepsilon) \geq c(|x|)$

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \notin L$ אז $\text{Val}(V, x \mid y_1 = \varepsilon) \leq s(|x|)$

אזי $L \in \text{MA}_{[s,c]}(k)$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{AM}(k) = \text{AM}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(k)$

הגדרה: תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{AM}_{[s,c]} = \text{AM}_{[s,c]}(2)$

הגדרה: $\text{AM} = \text{AM}(2)$

מסקנה: $\text{GNISO} \in \text{AM}$

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{MA}(k) = \text{MA}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(k)$

הגדרה: תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{MA}_{[s,c]} = \text{MA}_{[s,c]}(2)$

הגדרה: $\text{MA} = \text{MA}(2)$.

השערה: $\text{GNISO} \in \text{MA}$. השערה פתוחה

משפט: תהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{IP}_{[s,c]} = \text{AM}_{[s,c]}(\text{poly}(n))$

הגדרה: $\text{IP} = \text{IP}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}$

טענה: יהי \mathbb{F} שדה ותהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{perm}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,1} \cdot \text{perm}(A_{i,1})$

מטריצה פולינומית: יהי \mathbb{F} שדה ויהיו $n, m \in \mathbb{N}_+$ אזי $M_{n \times m}(\mathbb{F}[x])$

דרגה של מטריצה פולינומית: תהא $D \in M_{n \times m}(\mathbb{F}[x])$ אזי $\deg(D) = \max \left\{ \deg((D)_{i,j}) \mid (i \in [n]) \wedge (j \in [m]) \right\}$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $p > 2^{n^2}$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ אזי קיימת $D \in M_{n-1}(\mathbb{F}_p[x])$ באשר $\deg(D) \leq n-1$ המקיימת

$$D(i) = A_{i,1} \text{ לכל } i \in [n]$$

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $p > 2^{n^2}$ תהא $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ ותהא $D \in M_{n-1}(\mathbb{F}_p[x])$ באשר $\deg(D) \leq n-1$ וכן $D(i) = A_{i,1}$ לכל

$$D_A = D \text{ אזי } i \in [n]$$

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $q \in \mathbb{P}$ באשר $2^{n^2} < q < 2^{n^2+1}$ יהי $B_0 \in M_n(\mathbb{F}_q)$ ויהי $k \in \mathbb{F}_q$ אזי נגדיר פרוטוקול אינטרקטיבי $\Pi_{\text{perm}}[n]$

כך

Interactive Proof $\Pi_{\text{perm}}[n](B_0, p, k)$:

P sends $g_1 \in \mathbb{F}_q[x]$ such that $\deg(g_1) \leq (n-1)^2$

V computes $t_1 = \mathbb{1} \left[k = \sum_{i=1}^n (B_0)_{i,1} \cdot g_1(i) \right]$

V draws $y_1 \leftarrow \mathbb{F}_q$

V sends y_1

for $m \in \{2, \dots, n-3\}$ **do**

P sends $g_m \in \mathbb{F}_q[x]$ such that $\deg(g_m) \leq (n-m)^2$

V computes $B_{m-1} = D_{B_{m-2}}(y_{m-1})$ and $t_m = \mathbb{1} \left[g_{m-1}(y_{m-1}) = \sum_{i=1}^{n-m+1} ((B_{m-1})_{i,1} \cdot g_m(i)) \right]$

V draws $y_m \leftarrow \mathbb{F}_q$

V sends y_m

end

P sends $g_{n-2} \in \mathbb{F}_q[x]$ such that $\deg(g_{n-2}) \leq 4$

V computes $B_{n-3} = D_{B_{n-4}}(y_{n-3})$ and $t_{n-2} = \mathbb{1} [g_{n-2} = \text{perm}(D_{B_{n-3}})]$

V outputs $\mathbb{1} \left[\bigwedge_{i=1}^{n-2} t_i \right]$

טענה: יהי $k \in \mathbb{F}_p$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ באשר $\text{perm}(A) = k$ אזי $\mathbb{P}(\text{Val}_M(\Pi_{\text{perm}}[n], (A, k)) = 1) = 1$

טענה: יהי $k \in \mathbb{F}_p$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ באשר $\text{perm}(A) \neq k$ אזי $\mathbb{P}(\text{Val}_M(\Pi_{\text{perm}}[n], (A, k)) = 1) \leq \frac{1}{3}$

מסקנה: תהא $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באשר $2^{n^2} < p(n) < 2^{n^2+1}$ וכן $p(n) \in \mathbb{P}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי $\text{perm}_{\mathbb{F}_{p(n)}} \in \text{IP}$

הערה: משמעות \exists היא קיים עד, משמעות \forall היא לכל עד, משמעות $\$$ היא באופן הסתברותי.

הערה: בהגדרות מלרע M, x, w, r פולינומיים, משמע \mathcal{P} .

הגדרה: $\exists \mathcal{P} = \{L \mid \exists M. (x \in L) \iff (\exists w. M(x, w) = 1)\}$

טענה: $\exists \mathcal{P} = \mathcal{NP}$

הגדרה: $\forall \mathcal{P} = \{L \mid \exists M. (x \in L) \iff (\forall w. M(x, w) = 1)\}$

טענה: $\forall \mathcal{P} = \text{coNP}$

הגדרה: $\$_{[s,c]} \mathcal{P} = \left\{ L \mid \exists M. \left\{ \begin{array}{l} (x \in L) \implies (\mathbb{P}_r(M(x, r) = 1) \geq c) \\ (x \notin L) \implies (\mathbb{P}_r(M(x, r) = 1) \leq s) \end{array} \right\} \right\}$

הגדרה: $\exists \$_{[s,c]} \mathcal{P} = \left\{ L \mid \exists M. \left\{ \begin{array}{l} (x \in L) \implies (\exists w. \mathbb{P}_r(M(x, w, r) = 1) \geq c) \\ (x \notin L) \implies (\forall w. \mathbb{P}_r(M(x, w, r) = 1) \leq s) \end{array} \right\} \right\}$

טענה: $\exists \$_{[s,c]} \mathcal{P} = \text{MA}_{[s,c]}$

הגדרה: $\$_{[s,c]} \exists \mathcal{P} = \left\{ L \mid \exists M. \left\{ \begin{array}{l} (x \in L) \implies (\mathbb{P}_r(\exists w. M(x, r, w) = 1) \geq c) \\ (x \notin L) \implies (\mathbb{P}_r(\exists w. M(x, r, w) = 1) \leq s) \end{array} \right\} \right\}$

טענה: $\$_{[s,c]} \exists \mathcal{P} = \text{AM}_{[s,c]}$

הערה: ניתן להמשיך בצורה רקורסיבית זו על מנת להגדיר רצף קומבינציות בכל אורך של הכמתים.

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\underbrace{\text{MAMA} \dots}_k = \text{MA}(k)$

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\underbrace{\exists \exists \exists \dots}_k \mathcal{P} = \underbrace{\text{MAMA} \dots}_k$

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\underbrace{\text{AMAM} \dots}_k = \text{AM}(k)$

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\underbrace{\exists \exists \exists \dots}_k \mathcal{P} = \underbrace{\text{AMAM} \dots}_k$

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\underbrace{\exists \forall \forall \dots}_k \mathcal{P} = \Sigma_k$

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\underbrace{\forall \forall \forall \dots}_k \mathcal{P} = \Pi_k$

הערה: $\underbrace{\exists \exists \exists \dots}_{\text{poly}(n)} \mathcal{P} = \text{IP}$

הערה: $\underbrace{\exists \forall \forall \dots}_{\text{poly}(n)} \mathcal{P} = \text{PSPACE}$

פרוטוקול אינטרקטיבי מרובה משתתפים: יהיו $m, k \in \mathbb{N}_+$ ותהייה $P_1 \dots P_m, V : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ אזי (P_1, \dots, P_m, V) **הרצת פרוטוקול אינטרקטיבי מרובה משתתפים:** יהי (P_1, \dots, P_m, V) פרוטוקול אינטרקטיבי מרובה משתתפים יהי $x \in \{0, 1\}^n$ **ANS** $\in \{0, 1\}$ וכן $a \in M_{m \times k}(\{0, 1\}^\ell)$ אזי $y \in M_{m \times k}(\{0, 1\}^\mu)$

- לכל $\eta \in [m]$ ולכל $i \in [t]$ מתקיים $(a)_{\eta, i} = P_\eta \left(x, V \left((y)_{\eta, 1}, \dots, (y)_{\eta, i-1} \right) \right)$
- $\text{ANS} = V \left(x, (y)_{1, 1}, \dots, (y)_{m, k}, (a)_{1, 1}, \dots, (a)_{m, k} \right)$

ערך של מוודא: יהי V מוודא בפרוטוקול אינטרקטיבי מרובה משתתפים אזי $\text{Val}(V, x) = \max_{P_1 \dots P_m} \text{Val}((P_1 \dots P_m, V), x)$ **הגדרה Proofs Interactive Multi-prover:** יהיו $k, m \in \mathbb{N}_+$ ותהא $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ שפה עבורה קיים מוודא V בפרוטוקול אינטרקטיבי בעל מפתחות פרטיים m משתתפים ו- k סיבוכים המקיים

- לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \in L$ אז $\text{Val}(V, x) \geq c(|x|)$
- לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \notin L$ אז $\text{Val}(V, x) \leq s(|x|)$

אזי $L \in \text{MIP}_{[s, c]}(m, k)$

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ ותהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{MIP}_{[s, c]}(1, k) = \text{IP}_{[s, c]}(k)$

הגדרה: יהיו $m, k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{MIP}(m, k) = \text{MIP}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(m, k)$

משפט: $\text{MIP}(2, 2) = \text{NEXP}$

הגדרה: יהיו $n, q \in \mathbb{N}$ באשר $q > 2^n$ אזי $P_{x_i} \in \mathbb{F}_q[x_1 \dots x_n]$ המוגדר $P_{x_i}(x_1 \dots x_n) = x_i$

הגדרה: יהיו $n, q \in \mathbb{N}$ באשר $q > 2^n$ אזי $P_{\neg a} \in \mathbb{F}_q[x_1 \dots x_n]$ המוגדר $P_{\neg a}(x_1 \dots x_n) = 1 - P_a$

הגדרה: יהיו $n, q \in \mathbb{N}$ באשר $q > 2^n$ אזי $P_{a \vee b} \in \mathbb{F}_q[x_1 \dots x_n]$ המוגדר $P_{a \vee b} = P_a + P_b - P_a P_b$

הגדרה: יהיו $n, q \in \mathbb{N}$ באשר $q > 2^n$ אזי $P_{a \wedge b} \in \mathbb{F}_q[x_1 \dots x_n]$ המוגדר $P_{a \wedge b} = P_a \cdot P_b$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $\varphi \in 3\text{CNF}$ באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $P_\varphi(a) = \varphi(a)$ לכל $a \in \{0, 1\}^n$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $\varphi \in 3\text{CNF}$ באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $(\sum_{a \in \{0, 1\}^n} P_\varphi(a) = 0) \iff (\varphi \text{ אינה ספיקה})$

הגדרה: יהיו $n, m, k, q \in \mathbb{N}_+$ באשר $q > 2^n$ וכן $k \in \{0 \dots 2^n\}$ ויהי $\varphi \in 3\text{CNF}$ באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ וכן $\varphi = \bigwedge_{i=1}^m C_i$ נגדיר פרוטוקול אינטרקטיבי $\Pi_{3\text{SAT}}[n, m]$ כך

Interactive Proof $\Pi_{\text{perm}}[n, m](q, \varphi, k)$:

```

for  $i \in [n]$  do
     $P$  sends  $A_i \in \mathbb{F}_q[x]$  such that  $\deg(A_i) \leq 3m$ 
     $V$  draws  $y_i \leftarrow \mathbb{F}_q$ 
     $V$  sends  $y_i$ 

```

end

P sends $A_{n+1} \in \mathbb{F}_q[x]$

V outputs $\mathbb{1}[(A_1(0) + A_1(1) = k) \wedge (\forall i \in [n-1]. A_{i+1}(0) + A_{i+1}(1) = A_i(y_i)) \wedge (A_{n+1} = P_\varphi(y_1 \dots y_n))]$

מוכיח הוגן: תהא $L \in \text{IP}$ ויהי (P, V) פרוטוקול אינטרקטיבי אשר עד להיות $\text{Val}(V, x) \geq c(|x|)$ לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אזי P

משפט שמיר: קיים פרוטוקול אינטרקטיבי (P, V) בעל מוכיח הוגן ל-QBF תצא P רצה ב-PSPACE.

משפט: אם $\text{PSPACE} \subseteq \mathcal{P}/\text{poly}$ אז $\text{PSPACE} = \text{AM}$

השערה: $\text{PSPACE} \not\subseteq \mathcal{P}/\text{poly}$. השערה פתוחה

השערה: $\text{PSPACE} \neq \text{AM}$. השערה פתוחה

טענה: $\text{IP} \subseteq \text{PSPACE}$

מסקנה: $\text{IP} = \text{PSPACE}$

משפט אדלמן: $\text{BPP} \subseteq \mathcal{P}/\text{poly}$

השערה: $\text{BPP} \neq \text{EXP}$. השערה פתוחה

טענה: $\text{AM} \subseteq \mathcal{NP}/\text{poly}$

טענה: $\text{AM} \subseteq \text{NSize}(\text{poly})$

למה: אם $\mathcal{NP} = \text{co}\mathcal{NP}$ אז $\Sigma_2 = \mathcal{NP}$

הגדרה $\text{Solver SAT Correct}$: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ אזי $\{\langle C \rangle \mid (C \text{ מעגל בגודל } n \text{ על } m \text{ קלטים}) \wedge (3\text{SAT את } C)\}$

טענה: $\text{CorrectSATSolver} \in \Pi_2$

מסקנה: $\text{CorrectSATSolver} \in \Pi_1$

משפט קארפ-ליפטון: אם $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P}/\text{poly}$ אז $\Sigma_2 = \Pi_2$

משפט סיפסר: $\text{BPP} \subseteq \Sigma_2$

מסקנה: $\text{BPP} \subseteq \Sigma_2 \cap \Pi_2$

טענה: $\text{BPP} \subseteq \mathcal{RP}^{\text{SAT}}$

טענה: $\text{BPP} \subseteq \mathcal{ZP}^{\text{SAT}}$

טענה אמפליפיקציה: יהי $c \in \mathbb{N}$ אזי $\text{MA} = \text{MA}_{[2^{-n^c}, 1-2^{-n^c}]}$

טענה אמפליפיקציה: יהי $c \in \mathbb{N}$ אזי $\text{AM} = \text{AM}_{[2^{-n^c}, 1-2^{-n^c}]}$

משפט: $\text{MA} = \text{MA}_{[\frac{1}{2}, 1]}$

טענה: $\text{MA} \subseteq \text{AM}$

השערה: $\text{MA} = \text{AM}$. השערה פתוחה

טענה: $\text{AM} \subseteq \Pi_2$

טענה: $\text{MA} \subseteq \Sigma_2$

טענה: $\text{BPP} \subseteq \text{MA}$

מסקנה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{AM}(k) \subseteq \text{AM}$

טענה: אם GISO הינה \mathcal{NP} -קשה אז $\mathcal{PH} = \Sigma_2$

טענה: תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{IP}_{[s, c]} \subseteq \text{IP}_{[s, 1]}$

למה: $\text{MAM}_{[\frac{1}{2}, 1]} = \text{AM}_{[\frac{1}{2}, 1]}$

משפט: $\text{AM} = \text{AM}_{[\frac{1}{2}, 1]}$

טענה: $\text{AM}_{[0, \frac{1}{2}]} = \mathcal{NP}$

טענה: $\text{AM}_{[0, \frac{1}{2}]} = \text{MA}_{[0, \frac{1}{2}]}$

הגדרה: יהי Σ אלפבית תהיינה $r, q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי נגדיר פרוטוקול אינטרקטיבי

כך $\Pi_{\text{PCP}}(\Sigma, s, c, r, q)[n]$

• בהינתן קלט $x \in \{0, 1\}^n$

• P שולח מחרוזת $w \in \Sigma^m$ באשר $m \leq 2^{r(n)} \cdot q(n)$

• V מגריל $y \in \{0, 1\}^{r(n)}$ ומחשב $i \in [m]^{q(n)}$

• $V(x, y, w_{i_1} \dots w_{i_{q(n)}})$ עונה

הגדרה $\text{Probabilistically Checkable Proof}$: יהי Σ אלפבית תהיינה $r, q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ תהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ותהא L שפה עבורה קיים

מוודא V בפרוטוקול האינטרקטיבי $\Pi_{\text{PCP}}(\Sigma, s, c, r, q)$ המקיים

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \in L$ אז $\text{Val}(V, x \mid y_1 = \varepsilon) \geq c(|x|)$

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ אם $x \notin L$ אז $\text{Val}(V, x \mid y_1 = \varepsilon) \leq s(|x|)$

אזי $L \in \text{PCP}_{[s, c]}(r(n), q(n))_{\Sigma}$

הערה: במחלקה PCP המוכיח לא חייב להיות פולינומי וכן ההודעות לא חייבות להיות פולינומיות.

הגדרה: תהיינה $r, q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהיינה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s, c]}(r(n), q(n)) = \text{PCP}_{[s, c]}(r(n), q(n))_{\{0, 1\}}$

טענה: $3\text{SAT} \in \text{PCP}_{[1-\frac{1}{n}, 1]}(\log(n), 3)$

משוואה ריבועית: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{Z}_2)$ אזי $\text{Quad}_\alpha : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}$ המוגדרת $\text{Quad}_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A)_{i,j} \cdot x_i x_j$.

מכפלת וקטורים טנזורית: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ יהי $u \in \mathbb{Z}_2^n$ ויהי $v \in \mathbb{Z}_2^m$ אזי $u \otimes v \in \mathbb{Z}_2^{n \cdot m}$ המוגדר $(u \otimes v)_{i,j} = u_i \cdot v_j$.

מערכת משוואות ריבועיות: $\text{QuadEQ} = \{ \langle A, b \rangle \mid (A \in M_{m \times n \times n}(\mathbb{Z}_2)) \wedge (b \in \mathbb{Z}_2^m) \wedge (\exists x \in \mathbb{Z}_2^n. \forall k \in [m]. \text{Quad}_{A_k}(x) = b_k) \}$

טענה: QuadEQ הינה \mathcal{NP} -שלמה.

טענה: $\text{QuadEQ} = \{ \langle B, b \rangle \mid (B \in M_{m \times n^2}(\mathbb{Z}_2)) \wedge (b \in \mathbb{Z}_2^m) \wedge (\exists u \in \{0, 1\}^n. B \cdot (u \otimes u) = b) \}$

קוד הדמרד: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\text{HAD} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^{2^n}$ המוגדר $(\text{HAD}(x))_i = \langle x, (i)_2 \rangle$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי קוד הדמרד הינו קידוד לינארי $[2^n, n, 2^{n-1}]_2$.

הגדרה: יהי $m \in \mathbb{N}_+$ ותהייה $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^m$ אזי $\text{Ag}(\alpha, \beta) = |\{i \in [m] \mid \alpha_i = \beta_i\}|$

משפט: אם קיימת $z : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ וקיים $\rho \in (\frac{1}{2}, 1)$ עבורם $\mathbb{P}_{x,y}(z(x) + z(y) = z(x+y)) \geq \rho$ אז קיימת $u \in \{0, 1\}^n$ עבורה $\text{Ag}(z, \text{HAD}(u)) \geq \rho \cdot 2^n$.

משפט: $\mathcal{NP} \subseteq \text{PCP}_{[0.9,1]}(\mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(1))$

משפט ה-PCP: קיים $\gamma < 1$ עבורו $\mathcal{NP} = \text{PCP}_{[\gamma,1]}(\mathcal{O}(\log(n)), 3)$

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ אזי $\max_{[\frac{7}{8}+\varepsilon,1]} \text{E3SAT}$ הינה $\text{Promise-}\mathcal{NP}$ -קשה.

טענה: יהי Σ אלפבית ותהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(0, 0)_\Sigma = \mathcal{P}$

טענה: יהי Σ אלפבית אזי $\text{PCP}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(\text{poly}(n), 0)_\Sigma = \mathcal{BPP}$

טענה: יהי Σ אלפבית ותהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(\log(n), 0)_\Sigma = \mathcal{P}$

טענה: יהי Σ אלפבית ותהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(0, \text{poly}(n))_\Sigma = \mathcal{NP}$

טענה: תהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(0, \text{poly}(n)) = \mathcal{NP}$

טענה: תהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(\log \log(n), \mathcal{O}(1)) = \mathcal{P}$

טענה: תהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(\mathcal{O}(\log(n)), 1) = \mathcal{P}$

טענה: תהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(\mathcal{O}(\log(n)), 1)_{\{1, \dots, n^c\}} = \mathcal{P}$

טענה: תהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(\mathcal{O}(\log(n)), 1)_{\{1, \dots, 2^{n^c}\}} = \mathcal{NP}$

טענה: תהייה $r, q : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ותהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(r(n), q(n)) \subseteq \text{NTime}(\text{poly}(n, 2^{r(n)} \cdot q(n)))$

מסקנה: תהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(\mathcal{O}(\log(n)), \mathcal{O}(1)) = \mathcal{NP}$

מסקנה: תהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,c]}(\text{poly}(n), \text{poly}(n)) = \text{NEXP}$

טענה: יהי Σ אלפבית ותהייה $s, t : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{PCP}_{[s,1]}(r(n), q(n))_\Sigma \subseteq \text{PCP}_{[s^t,1]}(r(n) \cdot t(n), q(n) \cdot t(n))_\Sigma$

טענה: יהי Σ אלפבית אזי $\text{PSPACE} \subseteq \text{PCP}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}(\text{poly}(n), \text{poly}(n))_\Sigma$

הייפר גרף: יהי $q \in \mathbb{N}$ תהא V קבוצה ותהא $E \subseteq \mathcal{P}_{\leq q}(V)$ אזי (q, V, E)

הגדרה: יהי Σ אלפבית ויהי $q \in \mathbb{N}_+$ אזי $q\text{-GraphConstraint}_\Sigma = \{ (G, f) \mid (G \text{ הייפר גרף}) \wedge (\forall e \in E. f(e) : \Sigma^{|e|} \rightarrow \{0, 1\}) \}$

הגדרה: יהי Σ אלפבית ויהי $q \in \mathbb{N}_+$ אזי $\max q\text{-CSP}_\Sigma : q\text{-GraphConstraint}_\Sigma \rightarrow \mathbb{N}$

$\max q\text{-CSP}_\Sigma(G, f) = \max_{\sigma: V \rightarrow \Sigma} \mathbb{P}_{e \in E}(f_e(\sigma|_e) = 1)$

הגדרה q-Constraint Satisfiability Problem: יהי Σ אלפבית יהי $q \in \mathbb{N}_+$ ותהייה $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי

$q\text{-CSP}_{s,c,\Sigma} = \text{GAP}_{[s,c]} \max q\text{-CSP}_\Sigma$

טענה: יהי Σ אלפבית תהייה $r, q : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ותהא $s, c : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $L \in \text{PCP}_{[s,c]}(\mathcal{O}(\log(n)), q(n))_\Sigma$

$L \leq_p q\text{-CSP}_{[s,c],\Sigma}$

משפט: קיים $\gamma < 1$ עבורו $3\text{-CSP}_{[\gamma,1],\{0,1\}}$ הינה $\text{Promise-}\mathcal{NP}$ -קשה.

סימון: יהי $\gamma < 1$ באשר $3\text{-CSP}_{[\gamma,1],\{0,1\}}$ הינה $\text{Promise-}\mathcal{NP}$ -קשה אזי $\gamma_{\text{hard}} = \gamma$

מסקנה: $\max 3\text{SAT}$ הינה $\text{Promise-}\mathcal{NP}$ -קשה.

מסקנה: $\max \text{Clique}$ הינה $\text{Promise-}\mathcal{NP}$ -קשה.

מסקנה: בעיית ה- $\left(\frac{1}{\gamma_{\text{hard}}}\right)$ -קירוב של $\max \text{Clique}$ הינה \mathcal{NP} -קשה.

מסקנה: $\max \text{IS}$ הינה $\text{Promise-}\mathcal{NP}$ -קשה.

מסקנה: $\min \text{VC}$ הינה $\text{Promise-}\mathcal{NP}$ -קשה.

מסקנה: בעיית ה- $\left(\frac{3-\gamma_{\text{hard}}}{2}\right)$ -קירוב של $\min \text{VC}$ הינה \mathcal{NP} -קשה.

טענה: $\mathcal{NP} = \text{PCP}_{[\frac{1}{2},1]}(\mathcal{O}(\log(n)), \mathcal{O}(1))$

טענה: $\mathcal{NP} \subseteq \text{PCP}_{[2^{-n},1]}(\mathcal{O}(n \log(n)), \mathcal{O}(n))$

טענה: $\text{PCP}_{[\frac{1}{n}, 1]}(\mathcal{O}(\log(n)), \mathcal{O}(\log(n))) \leq_p \text{GAP}_{[\frac{1}{n}, 1]} \text{maxClique}$

טענה: $\mathcal{NP} = \text{PCP}_{[\frac{1}{n}, 1]}(\mathcal{O}(\log(n)), \mathcal{O}(\log(n)))$

מסקנה: קיים $\alpha > 0$ עבורו בעיית ה- n^α -קירוב של maxClique הינה \mathcal{NP} -קשה.

מסקנה: יהי $\varepsilon > 0$ אזי $\text{GAP}_{[n^\varepsilon, n^{1-\varepsilon}]} \text{maxClique}$ הינה Promise- \mathcal{NP} -קשה.