פעולה בינארית: תהא A קבוצה אזי פונקציה $*:A\times A\to A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*:A\times A\to A$ פעולה בינארית אזי $*(a,b)=a*b$ לכל $a,b\in A$.

אסוציטיביות/קיבוציות: תהא A קבוצה אזי פעולה בינארית $*$ המקיימת $a*(b*c)=(a*b)*c$ לכל $a,b,c\in A$.

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: תהא A קבוצה אזי פעולה בינארית $*$ המקיימת $a*b=b*a$ לכל $a,b\in A$.

איבר יחידה: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $e\in A$ המקיים $e*g=g*e=g$ לכל $g\in A$.

איבר הופכי/נגדי: תהא A קבוצה תהא $*$ פעולה בינארית יהי $e\in A$ איבר יחידה ויהי $g\in A$ אזי $h\in A$ המקיים $g*h=h*g=e$.

מונואיד: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $\langle A,*\rangle$ באשר $*$ אסוציטיבית וכן קיים איבר יחידה.

סימון: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד ויהי $e\in A$ איבר היחידה של A אזי $e_A=e$.

חבורה: מונואיד $\langle G,*\rangle$ המקיים כי לכל $g\in G$ קיים קיים איבר הופכי.

הגדרה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $A^\times=\{a\in A\mid \exists h\in A.a*h=h*a=e_A\}$.

טענה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $\left\langle A^\times,*\restriction_{A^\times\times A^\times}\right\rangle$ חבורה.

סימון: תהא A קבוצה אזי $S_A=\{f:A\to A\mid f \text{ חח"ע ועל}\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_n=S_{[n]}$.

טענה חבורת התמורות: תהא A קבוצה אזי $\langle S_A,\circ\rangle$ חבורה.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ נגדיר $\sim_n\subseteq\mathbb{Z}^2$ כך $\sim_n=\left\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}^2\mid (n|(x-y))\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\sim_n$ יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ ויהיו $x,y\in\mathbb{Z}$ אזי $[x]_{\sim_n}+[y]_{\sim_n}=[x+y]_{\sim_n}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\mathbb{Z}/\sim_n=\left\{[0]_{\sim_n},\ldots,[n-1]_{\sim_n}\right\}$.

טענה חבורת השאריות: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\langle \mathbb{Z}/\sim_n,+\rangle$ חבורה.

טענה יחידות איבר היחידה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד ויהיו $e_1,e_2\in A$ איברי יחידה אזי $e_1=e_2$.

טענה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ויהיו $a,b,c\in G$ באשר $b*a=c*a$ אזי $b=c$.

מסקנה יחידות איבר הופכי: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ויהיו $a,b,c\in G$ באשר b,c הופכיים ל־a אזי $b=c$.

סימון: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה יהי $a\in G$ ויהי $b\in G$ הופכי ל־a אזי $a^{-1}=b$.

הגדרה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ותהא $a\in G$ אזי $a^0=e_G$ וכן $a^{n+1}=a*a^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן $a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

סדר של איבר: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ויהי $a\in G$ אזי $\mathrm{ord}(a)=\min\{n\in\mathbb{N}_+\mid a^n=e_G\}$.

משפט: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה באשר $|G|<\aleph_0$ אזי קיים $a\in G$ המקיים $\mathrm{ord}(a)\le|G|$.

תת חבורה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה אזי $H\subseteq G$ המקיימת $\left\langle H,*\restriction_{H\times H}\right\rangle$ חבורה.

סימון: תהא G חבורה וכן $H\subseteq G$ תת חבורה אזי $H\le G$.

בוחן תת חבורה: תהא $H\subseteq G$ תת קבוצה אזי (H חבורה)$\iff$(H סגורה לפעולה $*$)$\wedge$($e_G\in H$)$\wedge$($\forall h\in H.h^{-1}\in H$).

איזומורפיזם בין חבורות: $f:G\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}H$ המקיימת $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$.

חוק הפילוג: $((b+c)*a=b*a+c*a)\wedge(a*(b+c)=a*b+a*c)$.

חוג עם יחידה: $\langle R,+,*\rangle$ המקיים ($\langle R,+\rangle$ חבורה אבלית)$\wedge$($\langle R,*\rangle$ מונואיד)$\wedge$(חוק הפילוג).

איזומורפיזם בין חוגים: $f:R\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}F$ המקיימת $(f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta))\wedge(f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta))\wedge(f(1_R)=1_F)$.

חוג הפולינומים: יהי $\langle R,+,\cdot\rangle$ חוג חילופי אזי $\langle R[x],+,\cdot\rangle$.

נוסחאת המעלות: $\deg(p+q)\le\max(\deg(p),\deg(q))$ וגם $\deg(p\cdot q)\le\deg(p)+\deg(q)$.

הגדרה: $T^{-1}=\left\{t^{-1}\mid t\in T\right\}$.

תת החבורה שנוצרת על ידי T: $\langle T\rangle=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{\mathop{*}_{i=1}^{n}a_i\mid a\in\left(T\cup T^{-1}\right)^n\right\}=\left\{a_1*\ldots*a_n\mid a_1,\ldots,a_n\in T\cup T^{-1}\right\}$.

משפט: $\forall H\ge T.\langle T\rangle\le H$, במילים אחרות $\langle T\rangle$ תת החבורה הקטנה ביותר ביחס ההכלה שמכילה את T.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי $\forall g\in G.|\langle g\rangle|=\mathrm{ord}(g)$.

מנה של חבורה: יהיו $H\le G$ אזי $g_1\sim_H g_2\iff g_1*g_2^{-1}\in H$.

סימון: יהיו $H\le G$ אזי $G/H=G/\sim_H$.

משפט: תהא G חבורה אזי $(|G|=|G/H|\cdot|H|)\wedge(\forall g\in G.\mathrm{ord}(g)\mid|G|)$.

משפט: תהא G חבורה עבורה $|G|\in\mathbb{P}$ אזי (G אבלית)$\wedge(\forall g\ne e_G.\langle g\rangle=G)$.

מחלק אפס: יהי R חוג אזי $a\in R\backslash\{0\}$ המקיים $\exists b\in R\backslash\{0\}.a*b=0_G$.

תחום שלמות: $\langle R,+,*\rangle$ המקיים ($\langle R,+,*\rangle$ חוג אבלי)$\wedge$(לא קיימים מחלקי אפס).

חוק צמצום: יהי R תחום שלמות אזי $\forall a\neq 0_R.\forall b,c\in R.\left(a*c=a*b\right)\Longrightarrow\left(c=b\right)$.

שדה: $\langle \mathbb{F},+,*\rangle$ המקיים ($\langle \mathbb{F},+,*\rangle$ חוג)$\wedge$($\langle \mathbb{F}\backslash\left\{0_{\mathbb{F}}\right\},*\rangle$ חבורה אבלית)$\wedge$($0_{\mathbb{F}}\neq 1_{\mathbb{F}}$).

טענה: ($\mathbb{F}$ שדה)$\Longrightarrow$($\mathbb{F}$ תחום שלמות).

משפט: (R תחום שלמות סופי)$\Longrightarrow$(R שדה).

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(n\in\mathbb{P}\right)\Longleftrightarrow$($\langle\mathbb{Z}_n,+,*\rangle$ שדה).

מציין של שדה: $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)=\min\left\{n\in\mathbb{N}\mid\sum_{i=1}^{n}1_{\mathbb{F}}=0_{\mathbb{F}}\right\}$ ואחרת $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)=0$.

טענה: $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\in\mathbb{P}\cup\{0\}$.

הבינום של ניוטון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\forall a,b\in\mathbb{F}.\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה עבורו $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)=p\neq 0$ אזי $\forall a,b\in\mathbb{F}.\forall k\notin\{0,p\}.\left(\binom{p}{k}\cdot a=0\right)\wedge\left(\left(a+b\right)^p=a^p+b^p\right)$.

המשפט הקטן של פרמה: $\forall p\in\mathbb{P}.\forall a\in\mathbb{Z}_p.a^p\equiv a \mod p$.

קוסט/מחלקה שמאלית: יהיו $H\le G$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\left\{g*h\mid h\in H\right\}$.

קוסט/מחלקה ימנית: יהיו $H\le G$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $H*g=\left\{h*g\mid h\in H\right\}$.

סימון: $G/H=\left\{g*H\mid g\in G\right\}$, $H\backslash G=\left\{H*g\mid g\in G\right\}$.

טענה: $\left(G/H\right)\wedge\left(H\backslash G\right)$ חלוקות של G.

טענה: $|G/H|=|H\backslash G|$.

אינדקס: יהיו $H\le G$ חבורות אזי $[G:H]=|G/H|$.

משפט לגראנז': יהיו $H\le G$ חבורות סופיות אזי $\left([G:H]=\frac{|G|}{|H|}\right)\wedge\left(|H|\mid|G|\right)$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $N\le G$ המקיימת $\forall g\in G.gN=Ng$.

סימון: תהא G חבורה וכן $N\le G$ תת חבורה נורמלית אזי $N\trianglelefteq G$.

כפל קבוצות: תהיינה $B,A\le G$ חבורות אזי $A*B=\left\{a*b\mid a\in A\wedge b\in B\right\}$.

משפט: יהיו $g_1,g_2\in G$ אזי (H נורמלית)$\Longleftrightarrow\left(\left(g_1H\right)*\left(g_2H\right)=\left(g_1*g_2\right)H\right)$.

טענה: (G/H חבורה עם כפל קבוצות)$\Longleftrightarrow$(H נורמלית).

משוואה: יהיו f,g פונקציות עבורן $\text{dom}\left(f\right)=\text{dom}\left(g\right)$ אזי הטענה $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.

הגדרה: תהא X קבוצה עבורה $\text{dom}\left(f\right)=\text{dom}\left(g\right)=X^n$ אזי המשוואה מעל X עם n משתנים.

קבוצת פתרונות: תהא $f\in X^B$ ותהא $A\subseteq X$ אזי $\text{sols}_A\left(f\right)=\left\{a\in A\mid f\left(a\right)=0\right\}$.

מערכת משוואות: יהיו n משוואות $f_i\left(x\right)=g_i\left(x\right)$ אזי $E=\langle f_1\left(x\right)=g_1\left(x\right),\dots,f_n\left(x\right)=g_n\left(x\right)\rangle$.

סימון: תהא מערכת משוואות E אזי E_i תהיה משוואה מספר i.

קבוצת פתרונות של מערכת: $\text{sols}_A\left(E\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\text{sols}_A\left(E_i\right)$.

שקילות: E,E' מערכות/משוואות עבורן $\text{sols}_A\left(E\right)=\text{sols}_A\left(E'\right)$.

טענה: תהא h חח"ע אזי $\text{sols}\left(\left(h\circ f\right)\left(x\right)=\left(h\circ g\right)\left(x\right)\right)=\text{sols}\left(f\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

קבוצה אלגברית: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת מערכת משוואות E מעל $\mathbb{R}$ עם n משתנים המקיימת $\text{sols}\left(E\right)=A$.

פונקציה ליניארית: $f:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$ המקיימת $\exists a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}.f\left(x_1,\dots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$.

משוואה ליניארית: תהא f פונקציה ליניארית אזי $f\left(x_1,\dots,x_n\right)=b$.

מערכת משוואות ליניארית: מערכת משוואות שכל המשוואות בה ליניאריות.

סימון: כדי לייצג מערכת משוואות ליניארית נכתוב $\begin{cases}a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n & =b_1\\ \vdots & \vdots\\ a_{m,1}x_1+\ldots+a_{m,n}x_n & =b_m\end{cases}$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^2$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee(\mathbb{R}^2)$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^3$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee$(מישור)$\vee(\mathbb{R}^3)$.

וקטור: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{F}$ אזי $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle$.

חיבור וקטורים: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n\in\mathbb{F}$ אזי $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$.

כפל וקטורים: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{F}$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $\lambda\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\cdot\alpha_n\end{pmatrix}$.

וקטור ה־0: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\bar{0}_n = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{F}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{F}} \end{pmatrix}$.

טענה: יהי $v \in \mathbb{F}^n$ וקטור יהי $t \in \mathbb{F}$ אזי $\left((t = 0_{\mathbb{F}}) \vee \left(v = \bar{0}_n\right)\right) \iff \left(t \cdot v = \bar{0}\right)$.

משוואה לינארית הומוגנית: משוואה לינארית $f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 0$.

טענה: תהא מערכת משוואות לינאריות הומוגניות E אזי $\bar{0} \in \text{sols}\left(E\right)$.

משפט: תהא E מערכת משוואות לינאריות הומוגניות אזי $\text{sols}\left(E\right)$ סגורה ביחס לחיבור וקטורים וכפילה בסקלר.

סימון: תהא E מערכת משוואות לינאריות אזי E_0 מערכת המשוואות הלינאריות ההומגניות עם אותן פונקציות לינאריות.

משפט: $\forall p \in \text{sols}\left(E\right) . \text{sols}\left(E\right) = \text{sols}\left(E_0\right) + p$.

מטריצה: $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}$.

סימון: $\left(A\right)_{i,j} = a_{i,j}$.

סדר מטריצה: מטריצה A תקרא מסדר $m \times n$ אם יש לה m שורות ו־n עמודות.

הגדרה: קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ מעל R תסומן $M_{m \times n}\left(R\right)$.

סימון: $C_j\left(A\right)$ הינה העמודה ה־j־ית, $R_i\left(A\right)$ הינה השורה ה־i־ית.

מטריצת ה־0: תהא מטריצה $A \in M_{m \times n}\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים $\forall i \in [m] . \forall j \in [n] . \left(A\right)_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}$.

מטריצה ריבועית: $A \in M_{m \times m}\left(\mathbb{F}\right)$.

מטריצת מקדמים: עוד סימון אפשרי לייצוג מערכת לינארית של משוואות הינה $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$.

מטריצת המקדמים המצומצמת: $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix}$.

עמודת המקדמים החופשיים: $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

איבר פותח בשורה: $\min\left(j \in [n] \mid \left(A\right)_{i,j} \neq 0\right)$.

מטריצה מדורגת: מטריצה המקיימת כי (כל שורות האפסים נמצאות למטה)$\wedge$(בכל שורה שיש בה איבר פותח האיבר הפותח הינו מימין ממש לאיבר הפותח בשורה מעליו).

מטריצה מדורגת קנונית: מטריצה מדורגת המקיימת כי (כל האיברים הפותחים הם 1)$\wedge$(בכל עמודה של איבר פותח שאר אברי העמודה הם 0).

שורת סתירה: שורה מהצורה $\left(0, \ldots, 0 | b\right)$ באשר $b \neq 0$.

אלגוריתם: תהא $A \in M_{m \times (n+1)}\left(\mathbb{F}\right)$ מטריצה מדורגת קנונית

- אם קיימת שורת סתירה, $\text{sols}\left(A\right) = \varnothing$.
- אם לא קיימת שורת סתירה, נניח כי בעמודות $I = \left\{i_1 \ldots i_k\right\}$ לא קיים איבר פותח אזי

$$\text{sols}\left(A\right) = \left\{ v \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; \forall i \notin I . v_i = \left(A\right)_{i,n+1} - \sum_{j \in I}\left(\left(A\right)_{i,j} v_j\right) \right\}$$

פעולה אלמנטרית: פונקציה $\varphi : M_{m \times n}\left(\mathbb{F}\right) \to M_{m \times n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת $\forall A \in M_{m \times n}\left(\mathbb{F}\right) . \text{sols}\left(A\right) = \text{sols}\left(\varphi\left(A\right)\right)$.

הפעולות האלמנטריות של גאוס: (החלפת שורה $\varphi_{R_i \leftrightarrow R_j}\left(A\right)$)$\wedge$(הכפלה בסקלר $\varphi_{R_i \to \lambda R_i}\left(A\right)$)$\wedge$(חיבור שורה $\varphi_{R_i \to R_i + R_j}\left(A\right)$).

שקילות שורה (ש״ש): $A, B \in M_{m \times n}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורן קיימות פעולות אלמנטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ המקיימות $\left(\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n\right)\left(A\right) = B$.

משפט גאוס: $A \in M_{m \times n}\left(\mathbb{F}\right)$ שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

אלגוריתם גאוס: $\mathcal{O}\left(n^2 m\right)$

$$
\begin{array}{l}
\text{row} = 1 \\
\text{for} \;\; (1 \le \text{col} \le n) \\
\qquad \text{if} \;\; \left(\exists \min(j) \ge \text{row}. \, (A)_{j,\text{col}} \ne 0\right) \\
\qquad\qquad \text{if} \;\; (j \ne \text{row}) \\
\qquad\qquad\qquad R_j \leftrightarrow R_{\text{row}} \\
\qquad\qquad R_{\text{row}} \to \dfrac{1}{(A)_{\text{row},\text{col}}} R_{\text{row}} \\
\qquad\qquad \text{for} \;\; (1 \le k \le m \land k \ne \text{row}) \\
\qquad\qquad\qquad R_k \to R_k - (A)_{k,\text{col}} R_{\text{row}} \\
\qquad\qquad \text{row} + = 1
\end{array}
$$

מסקנה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מדורגת קנונית ללא שורת סתירה בעלת k שורות ללא איבר פותח אזי $|\text{sols}(A)| = |\mathbb{F}|^k$.

הדלתא של קרונקר: $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & else \end{cases}$.

מטריצת היחידה: $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$.

משפט: תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אזי (למערכת $(A|0)$ יש פתרון יחיד)$\iff$(הצורה הקנונית של A היא I_n).

משפט: מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו־n נעלמים שקולה למשוואה אחת של m־יות.

צירוף לינארי: יהיו $\langle \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \rangle \in (\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v_i}$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}^n$.

כפל מטריצה ב־n־יה: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . \forall \vec{v} \in \mathbb{F}^n . A\vec{v} = \sum_{i=1}^n C_i(A)\, \vec{v}_i$.

משפט: $(A \cdot (\alpha \cdot \underline{v}) = \alpha \cdot (A \cdot \underline{v})) \land (A \cdot (\underline{v} + \underline{u}) = A \cdot \underline{v} + A \cdot \underline{u})\land$(יש מחלקי אפס).

מטריצת סיבוב: $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

מטריצת ונדרמונד: מטריצה שבא כל עמודה או שורה הינה סדרה הנדסית.

פולינום לגראנז' ה־i: $P_i(x) = \left(\prod_{k=1}^{j-1} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k}\right)\right) \left(\prod_{k=j+1}^{n} \left(\frac{x - x_k}{x_i - x_k}\right)\right)$, מתקיים $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

סימון: יהי $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \in (\mathbb{F}^m)^n$ נגדיר $\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

הגדרה: נגדיר $e_j \in \mathbb{F}^n$ כך $(e_j)_i = \delta_{j,i}$.

מטריצת תמורה: יהי $\sigma \in S_n$ נגדיר $P(\sigma) = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \ldots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$ מתקיים $(P(\sigma) \cdot v)_i = v_{\sigma^{-1}(i)}$.

משפט אי הפרישה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ וכן B הצורה הקנונית אזי $(\exists i . R_i(B) = 0) \iff (\exists b \in \mathbb{F}^m . \text{sols}(A|b) = \varnothing)$.

מסקנה: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . (n < m) \implies (\exists b \in \mathbb{F}^m . \text{sols}(A|b) = \varnothing)$.

סימון: $M_{n\times n}(\mathbb{F}) = M_n(\mathbb{F})$.

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{F}) . (\forall b \in \mathbb{F}^n . \text{sols}(A|b) \ne \varnothing) \implies (\forall b \in \mathbb{F}^n . |\text{sols}(A|b)| = 1)$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v \in (\mathbb{F}^n)^m$ נגדיר $\text{span}(v) = \left\{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid \alpha \in \mathbb{F}^m\right\}$.

סדרה פורשת: סדרה $v \in (\mathbb{F}^n)^m$ שמקיימת $\text{span}(v) = \mathbb{F}^n$.

הגדרה: נגדיר $T : (\mathbb{F}^n)^m \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ כך α $T_{\vec{v}}(\alpha) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ על)$\Longleftrightarrow$($\vec{v}$ פורשת).

סדרה בת"ל (בלתי תלויה לינארית): סדרה $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ המקיימת $(\alpha = 0) \Longleftrightarrow (\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0) .\forall \alpha \in \mathbb{F}^n$.

בסיס: $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ בת"ל ופורשת.

טענה: יהיו $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ ונגדיר $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

- (v פורשת)$\Longleftrightarrow (\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| > 0)$.
- (v בת"ל)$\Longleftrightarrow (\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| < 2)$.
- (v בסיס)$\Longleftrightarrow (\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| = 1)$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\vec{v}$ בת"ל).

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\text{LD}(v) = \{\alpha \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0\}$.

הערה: (v בת"ל)$\Longleftrightarrow (\text{LD}(v) = \{0\})$.

הנפרשׁ/ספאן: תהא $K \subseteq \mathbb{F}^n$ אזי $\text{span}(K) = \{u \in \mathbb{F}^n \mid \exists m \in \mathbb{N}_+ . \exists v \in K^m . \exists \alpha \in \mathbb{F}^m . u = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i\} \cup \{0\}$.

משפט: (v בת"ל $\Longleftarrow$ כל תת סדרה של v בת"ל)$\wedge$(v פורשת $\Longleftarrow$ כל על סדרה של v פורשת).

משפט: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ בת"ל וסדרה $u \in \mathbb{F}^m$ מתקיים ($v^\frown \langle u \rangle$ בת"ל)$\Longleftrightarrow (u \notin \text{span}(v))$.

טענה: $(u \in \text{span}(v)) \Longleftrightarrow (\text{span}(v) = \text{span}(v^\frown \langle u \rangle)) .\forall u \in \mathbb{F}^m .\forall v \in (\mathbb{F}^m)^n$.

טענה: $(\exists x \in \text{LD}(v) . x_i \neq 0) \Longleftrightarrow \left(v_i \in \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)\right) .\forall i \in [n] .\forall v \in (\mathbb{F}^m)^n$.

משפט: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ התב"ש

- v בת"ל.
- $\forall i \in [n] . v_i \notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)$.
- $\forall i \in [n] . v_i \notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[i-1]}}\right)$.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ פחות מ־n n־יות לא פורשות.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ יותר מ־n n־יות ת"ל.

מסקנה: מעל $\mathbb{F}^n$ לכל בסיס B מתקיים $|B| = n$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$, כל שניים מהשלושה שקולים

- v בת"ל.
- v פורשת.
- $n = m$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- לכל b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון.
- עמודות A פורשות.
- קיים b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בת"ל.
- לכל b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בסיס.

כפל מטריצות: $(AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^m (A)_{i,t} (B)_{t,j} .\forall j \in [m] .\forall i \in [k] .\forall \langle A, B \rangle \in M_{k\times m}(\mathbb{F}) \times M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

נוסחה: $(BA)_{i,j} = R_i(B) \cdot C_j(A)$.

טענה: $C_i(YX) = YC_i(X)$, $R_i(YX) = R_i(Y)X$.

כפל מטריצה בסקלר: $(\alpha A)_{i,j} = \alpha (A)_{i,j}$.

מטריצה סקלארית: αI_n.

טענה: $A(\alpha B) = \alpha (AB)$.

טענה: $(AI_n = A) \wedge (I_m A = A) .\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

מסקנה: $\langle M_n(\mathbb{F}), \cdot \rangle$ מונואיד.

מטריצות מתחלפות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $AB = BA$.

שחלוף: $\left(A^T\right)_{i,j} = (A)_{j,i} .\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

הערה: $R_i\left(A^T\right)=C_i\left(A\right)$.

טענה: $\left(A^T\right)^T=A$, $\left(\alpha A\right)^T=\alpha\left(A^T\right)$, $\left(AB\right)^T=B^TA^T$.

מטריצה סימטרית: $A^T=A$.

מטריצה אנטי סימטרית: $A^T=-A$.

חיבור מטריצות: $\forall A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(A+B\right)_{i,j}=\left(A\right)_{i,j}+\left(B\right)_{ij}$.

טענה: $\left\langle M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right),+\right\rangle$ חבורה אבלית וסגורה לכפל בסקלר.

טענה: $\left(A\left(B+C\right)=AB+AC\right)\wedge\left(\left(A+B\right)^T=A^T+B^T\right)$.

הפיכות: תהא $A_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- הפיכה משמאל: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).BA=I_n$.
- הפיכה מימין: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).AB=I_m$.
- הפיכה: (הפיכה משמאל)$\wedge$(הפיכה מימין).

טענה: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\forall B,C\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).\left(AB=I_m\right)\wedge\left(CA=I_n\right)\Longrightarrow B=C$.

מסקנה: אם קיימת הופכית היא יחידה.

סימון: ההופכית של A היא A^{-1}.

מטריצה אלכסונית: $\left(A\right)_{i,j}=\begin{cases}\lambda_i & i=j\\ 0 & else\end{cases}$.

משפט: מטריצה בעלת שורת עמודות/שורות אפסים לא הפיכה.

הערה: $R\left(-\theta\right)R\left(\theta\right)=I_2=R\left(\theta\right)R\left(-\theta\right)$.

טענה: $\left(\left(A^{-1}\right)^{-1}=A\right)\wedge\left(\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T\right)\wedge\left(\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\right)$.

משפט: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\text{sols}\left(A|b\right)\neq\varnothing\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\iff\left(\left|\text{sols}\left(A|0\right)\right|\leq1\right)$.
- (A הפיכה)$\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\left|\text{sols}\left(A|b\right)\right|=1\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\Longleftarrow$(עמודות A פורשות)$\wedge\left(m\leq n\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longleftarrow$(עמודות A בת"ל)$\wedge\left(m\geq n\right)$.
- (A הפיכה)$\Longleftarrow$(עמודות A בסיס)$\wedge\left(m=n\right)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ התב"ש

- A הפיכה משמאל.
- A הפיכה.
- A הפיכה מימין.
- A^T הפיכה.

טענה: תהא φ פונקציה אלמנטרית אזי $\varphi\left(AB\right)=\varphi\left(A\right)B$.

מטריצה אלמנטרית: $E_\varphi=\varphi\left(I_m\right)$.

מסקנה: $\varphi\left(A\right)=E_\varphi A$.

טענה: $E_\varphi^{-1}=R_{\varphi^{-1}}$.

אלגוריתם: $\left(A\mid I\right)\sim\left(I\mid A^{-1}\right)$.

מטריצה נילפוטנטית: $\exists m\in\mathbb{N}.A^m=0$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי (A הפיכה)$\iff\left(A\sim I\right)$.

מסקנה: (A,B הפיכות)$\iff$(AB הפיכה).

הגדרה: $\text{Par}\left(\left\{v_1,\ldots,v_m\right\}\right)=\left\{\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i\mid\alpha\in\left[0,1\right]^m\right\}$.

טענה: A הפיכה $\iff\text{Vol}\left(\text{Par}\left(A\right)\right)\neq0$ (הנפח של המקבילון).

לינארית על פי שורה: פונקציה שמקיימת $f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i+R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}$.

פונקציית נפח: פונקציה $\mathcal{N}:M_n\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ (לינארית על פי שורה)$\wedge\left(\mathcal{N}\left(I\right)=1\right)\wedge\left(\left(\exists i\neq j.R_i\left(A\right)=R_j\left(A\right)\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(A\right)=0\right)$.

טענה: אם ב־A יש שורת אפסים אז $\mathcal{N}\left(A\right)=0$.

משפט: תהא φ פעולה אלמנטרית אזי $\mathcal{N}\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathcal{N}\left(A\right)\cdot\begin{cases}\lambda & \varphi=f_{R_i\to\lambda R_i}\\ -1 & \varphi=f_{R_i\leftrightarrow R_j}\\ 1 & \varphi=f_{R_i\to R_i+\lambda R_j}\end{cases}$.

מסקנה: יהיו A,B שקולות שורה אזי $\left(\mathcal{N}\left(A\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(\mathcal{N}\left(B\right)=0\right)$.

מסקנה: (A הפיכה)$\Longleftrightarrow\left(\mathcal{N}\left(A\right)\neq0\right)$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(E_\varphi A\right)=\mathcal{N}\left(E_\varphi\right)\mathcal{N}\left(A\right)$.

משפט: יהיו $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2:M_n\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ פונקציות נפח אזי $\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_2$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(AB\right)=\mathcal{N}\left(A\right)\mathcal{N}\left(B\right)$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(A\right)=\mathcal{N}\left(A^T\right)$.

מינור: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו $i,j\in\left[n\right]$ אזי $A_{i,j}\in M_{n-1}\left(\mathbb{F}\right)$ כך שמתקיים

$$\left(A_{i,j}\right)_{r,s}=\begin{cases}\left(A\right)_{r,s} & \left(r\leq i-1\right)\wedge\left(s\leq j-1\right)\\ \left(A\right)_{r+1,s} & \left(r\geq i\right)\wedge\left(s\leq j-1\right)\\ \left(A\right)_{r,s+1} & \left(r\leq i-1\right)\wedge\left(s\geq j\right)\\ \left(A\right)_{r+1,s+1} & \left(r\geq i\right)\wedge\left(s\geq j\right)\end{cases}$$

דטרמיננטה: פונקציית הנפח היחידה תיקרא $\det^n$.

הערה: $\forall A\in M_1\left(\mathbb{F}\right).\det\left(A\right)=\left(A\right)_{1,1}$.

פיתוח דטרמיננטה על פי עמודה: יהי $j\in\left[n\right]$ אזי $\det_j^n\left(A\right)=\sum_{k=1}^n\left(-1\right)^{k+j}\left(A\right)_{k,j}\det_j^{n-1}\left(A_{k,j}\right)$.

מסקנה: $\forall j,i\in\left[n\right].\det_j^n\left(A\right)=\det_i^n\left(A\right)$.

סימון: $\det_j^n=\det$.

סימון: $\det\left(A\right)=\left|A\right|$.

פיתוח דטרמיננטה על פי שורה: יהי $i\in\left[n\right]$ אזי $\det\left(A\right)=\sum_{k=1}^n\left(-1\right)^{k+i}\left(A\right)_{i,k}\det\left(A_{i,k}\right)$.

מטריצה מצורפת: $\left(\text{adj}\left(A\right)\right)_{i,j}=\left(-1\right)^{i+j}\left|A_{j,i}\right|$.

טענה: $\text{adj}\left(A^T\right)=\left(\text{adj}\left(A\right)\right)^T$.

משפט: $A\cdot\text{adj}\left(A\right)=\left|A\right|I=\text{adj}\left(A\right)\cdot A$.

מסקנה: $A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}\text{adj}\left(A\right)$.

כלל קרמר: תהא מערכת משוואות $Ax=b$ כאשר A הפיכה אזי $x_i=\frac{\left|A_i\right|}{\left|A\right|}$ כאשר $C_j\left(A_i\right)=\begin{cases}b & i=j\\ C_j\left(A\right) & else\end{cases}$.

הגדרה: תהא $\sigma\in S_n$ נגדיר יחס שקילות $a\sim_{\text{cycle}}b\Longleftrightarrow\exists i\in\mathbb{N}.\sigma^i\left(a\right)=b$.

ציקלוס/מחזור: $\left[a\right]_{\sim_{\text{cycle}}}$.

פירוק תמורה לציקלוסים זרים: כל תמורה ניתנת לפירוק יחיד של ציקלוסים.

חילוף: $\begin{pmatrix}i & j\end{pmatrix}\left(x\right)=\begin{cases}j & x=i\\ i & x=j\\ x & else\end{cases}$.

טענה: כל מחזור ניתן לכתיבה כהרכבה של חילופים.

מסקנה: כל תמורה ניתנת לכתיבה כהרכבה של חילופים.

טענה: $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$.

סימון: $\text{sign}\left(\sigma\right) = \det\left(P\left(\sigma\right)\right)$.

טענה:

- יהיו $E_{R_i \leftrightarrow R_j}, \ldots, E_{R_\lambda \leftrightarrow R_\theta}$ אזי $E_{R_i \leftrightarrow R_j} \cdot \ldots \cdot E_{R_\lambda \leftrightarrow R_\theta} = P\left(\sigma\right)$.
- אם $\left(P\left(\sigma\right)\right)_{i,j} = 1$ אז $P\left(\sigma\right)_{i,j}$ מטריצת תמורה.
- $\text{sign}\left(\sigma\right) = \pm 1$.

מטריצת תמורה זוגית: $\text{sign}\left(\sigma\right) = 1$.

מטריצת תמורה איזוגית: $\text{sign}\left(\sigma\right) = -1$.

טענה: (Id זוגית)$\wedge$($\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ אי זוגית).

טענה: $P\left(\sigma\tau\right) = P\left(\sigma\right) P\left(\tau\right)$.

מסקנה: $\text{sign}\left(\sigma\tau\right) = \text{sign}\left(\sigma\right) \text{sign}\left(\tau\right)$.

אי סדר של תמורה: זוג סדור $\langle i, j\rangle$ שמקיים $\left(i < j\right) \wedge \left(\sigma\left(i\right) > \sigma\left(j\right)\right)$.

אי הסדרים של איבר: $z\left(\sigma, i\right) = \left|\left\{j > i \mid \sigma\left(i\right) > \sigma\left(j\right)\right\}\right|$.

אי הסדרים של תמורה: $N\left(\sigma\right) = \left|\left\{\langle i, j\rangle \mid \left(j > i\right) \wedge \left(\sigma\left(i\right) > \sigma\left(j\right)\right)\right\}\right|$.

משפט: $\text{sign}\left(\sigma\right) = \left(-1\right)^{N\left(\sigma\right)}$.

דטרמיננטה על פי תמורה: $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\text{sign}\left(\sigma\right) \prod_{i=1}^{n} \left(A\right)_{i,\sigma\left(i\right)}\right)$.

מסקנה: $\forall A \in M_n\left(\mathbb{Z}\right).\, |A| \in \mathbb{Z}$.

מסקנה: $\forall A \in M_n\left(\mathbb{Z}\right).\, \left(\|A\| = 1\right) \Longrightarrow \left(A^{-1} \in M_n\left(\mathbb{Z}\right)\right)$.

מסקנה: $\det\left(A\right) \in \mathbb{F}\left[x_1, \ldots, x_{n^2}\right]$.

נורמה: יהי $v \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}\left[x_1, \ldots, x_n\right]$ אזי f רציפה.

מסקנה: $\det$ רציפה.

מסקנה: $\forall A \in M_n^{\times}\left(\mathbb{F}\right).\exists \varepsilon.\forall B \in M_n\left(\mathbb{F}\right).\, \left(\forall i, j.\, \left(B\right)_{i,j} \in \left(\left(A\right)_{i,j} - \varepsilon, \left(A\right)_{i,j} + \varepsilon\right)\right) \Longrightarrow B \in M_n^{\times}\left(\mathbb{F}\right)$.

מרחב וקטורי (מ"ו): $\langle V, +, *\rangle$ המקיים

- $\langle V, +\rangle$ חבורה אבלית.
- $* : \mathbb{F} \times V \to V$ המקיימת
  - $\forall v \in V.1_{\mathbb{F}} * v = v$.
  - $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.\forall v \in V.\, \left(\alpha * \beta\right) * v = \alpha * \left(\beta * v\right)$.
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.\forall v, u \in V.\, \left(\left(\alpha + \beta\right) * v = \alpha * v + \beta * v\right) \wedge \left(\alpha * \left(v + u\right) = \alpha * v + \alpha * u\right)$.

טענה: $\left(\forall \alpha \in \mathbb{F}.\alpha \cdot 0_V = 0_V\right) \wedge \left(\alpha * v = 0_V \iff \left(\alpha = 0_{\mathbb{F}}\right) \vee \left(v = 0_V\right)\right) \wedge \left(-1_{\mathbb{F}} * v = -v\right) \wedge \left(\forall v \in V.0_{\mathbb{F}} * v = 0_V\right)$.

תת מרחב וקטורי (תמ"ו): קבוצה $\mathcal{U} \subseteq V^n$ המקיימת $\left(0 \in \mathcal{U}\right) \wedge \left(\forall u, v \in \mathcal{U}.u + v \in \mathcal{U}\right) \wedge \left(\forall v \in \mathcal{U}.\forall a \in \mathbb{F}.a \cdot v \in \mathcal{U}\right)$.

טענה: יהיו U, V תמ"ו אזי $U \cap V$ תמ"ו.

צירוף לינארי: יהיו $v \in V^n$, צירוף לינארי של v הינו ביטוי מהצורה $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ בעבור $\alpha \in \mathbb{F}^n$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v \in V^m$ נגדיר $\text{span}\left(v\right) = \left\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \mid \alpha \in \mathbb{F}^m\right\}$.

סדרה בת"ל: סדרה $v \in V^n$ שמקיימת $\forall \alpha \in \mathbb{F}^n.\, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \iff \alpha = 0$.

בסיס: $v \in V$ בת"ל ופורשת.

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v \in V^n$ נגדיר $\text{LD}\left(v\right) = \left\{\alpha \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0\right\}$.

טענה: $\left(A \subseteq B \Longrightarrow \text{span}\left(A\right) \subseteq \text{span}\left(B\right)\right) \wedge \left(A \subseteq \text{span}\left(B\right) \Longrightarrow \text{span}\left(A\right) \subseteq \text{span}\left(B\right)\right)$.

טענה: תהא $K \subseteq V$ אזי $\text{span}\left(K\right)$ הינו התמ"ו הקטן ביותר ביחס ההכלה המכיל את K.
$\wedge\left(\text{span}\left(\text{span}\left(A\right)\right) = \text{span}\left(A\right)\right) \wedge \left(\text{span}\left(\varnothing\right) = \left\{0\right\}\right)$.

משפט ההחלפה של ריס: תהא $v \in V^n$ פורשת ו-$u \in V^m$ בת"ל

- $m \leq n$.
- קיימים $1 \leq i_1 \ldots i_m \leq n$ כך שהקבוצה $\left\{u_1 \ldots u_k\right\} \cup \left\{v_j \mid j \notin \left\{i_1 \ldots i_k\right\}\right\}$ פורשת.

מסקנה: יהיו A,B בסיסים אזי $|A|=|B|$.

מימד: יהי B בסיס $\dim_{\mathbb{F}}\left(V\right)=|B|$.

נ"ס (נוצר סופית): מ"ו V שמקיים $\exists v\in V^{k}.\text{span}\left(v\right)=V$.

משפט: V נ"ס $\Longleftarrow$ קיים בסיס ל-V.

מסקנה: יהי V נ"ס

- פחות מ-$\dim\left(V\right)$ וקטורים לא פורשים.
- יותר מ-$\dim\left(V\right)$ וקטורים ת"ל.

משפט 2 מתוך 3: יהי V מ"ו נ"ס ויהי $B\in V^{k}$, כל שניים מהשלושה שקולים

- B בת"ל.
- B פורשת.
- $\dim\left(V\right)=k$.

משפט: תהא V נ"ס, לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים כי U נ"ס.

מסקנה: לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים $\dim\left(U\right)\le\dim\left(V\right)$.

משפט: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $\left(U\subseteq W\right)\wedge\left(\dim\left(U\right)=\dim\left(W\right)\right)\Longleftrightarrow U=W$.

סכום מרחבים וקטורים: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $U+W=\left\{ u+w\mid u\in U\wedge w\in W\right\}$ תמ"ו של V.

משפט: אם $U=\text{span}\left(A\right)$, $W=\text{span}\left(B\right)$ אז $W+U=\text{span}\left(A\cup B\right)$.

מסקנה: אם $U,W,T\subseteq V$ תמ"ו אז $U+W\subseteq T\Longrightarrow U,W\subseteq T$.

משפט: אם $U\cap W=\left\{ 0\right\}$ אז לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U+W$.

סכום ישר: אם $U\cap W=\left\{ 0\right\}$ אז $U\oplus W=U+W$.

משפט האפיון של סכום ישר: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו התב"ש

- $U\oplus W$.
- לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U+W$.
- $\forall k\in U+W.\exists!\left\langle u,w\right\rangle \in U\times W.u+w=k$.

מסקנה: $\dim\left(U\oplus W\right)=\dim\left(U\right)+\dim\left(W\right)$.

משפט המימד הראשון: יהיו U,W תמ"ו אזי $\dim\left(U+W\right)=\dim\left(U\right)+\dim\left(W\right)-\dim\left(U\cap W\right)$.

קואורדינטות: יהי $b\in V^{n}$ בסיס ויהי $v\in V$ אזי $\iota\alpha\in\mathbb{F}^{n}.v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}b_{i}$.

סימון: $\left[v\right]_{B}=\iota\alpha\in\mathbb{F}^{n}.v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}B_{i}$.

העתקת קואורדינטות: יהי B בסיס נגדיר $Q_{B}:V\to\mathbb{F}^{\dim\left(V\right)}$ כך $Q_{B}\left(v\right)=\left[v\right]_{B}$.

משפט:

- $Q_{B}^{-1}\left(\alpha\right)=\sum_{i=1}^{\dim\left(V\right)}\alpha_{i}b_{i}$.
- $\left(Q\left(\alpha v\right)=\alpha Q\left(v\right)\right)\wedge\left(Q\left(v+w\right)=Q\left(v\right)+Q\left(w\right)\right)$.
- $v_{1}\ldots v_{k}$ בת"ל $\Longleftrightarrow$ $Q_{B}\left(v_{1}\right)\ldots Q_{B}\left(v_{k}\right)$ בת"ל.
- $v\in\text{span}\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\Longleftrightarrow Q_{B}\left(v\right)\in\text{span}\left(Q_{B}\left(v_{1}\right)\ldots Q_{B}\left(v_{k}\right)\right)$.

מרחב העמודות: $\mathcal{C}\left(A\right)=\text{span}\left(\left\{ C_{i}\left(A\right)\mid i\in\left[n\right]\right\} \right)$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}\left(A\right)=\text{span}\left(\left\{ R_{i}\left(A\right)\mid i\in\left[m\right]\right\} \right)$.

טענה: $\mathcal{C}\left(A\right)=\left\{ Ax\mid x\in\mathbb{F}^{n}\right\} =\text{Im}\left(T_{A}\right)$.

טענה: $\mathcal{R}\left(AB\right)\subseteq\mathcal{R}\left(B\right)$, $\mathcal{C}\left(AB\right)\subseteq\mathcal{C}\left(A\right)$.

משפט: $\dim\left(\mathcal{C}\left(A\right)\right)=\dim\left(\mathcal{R}\left(A\right)\right)$.

דרגה: $\text{rank}\left(A\right)=\dim\left(\mathcal{C}\left(A\right)\right)$.

מרחב האפסות: $\mathcal{N}\left(A\right)=\dim\left(\text{sols}\left(A\right)\right)$.

טענה: $\text{rank}\left(A\right)\le\min\left(n,m\right)$, $\text{rank}\left(AB\right)\le\min\left(\text{rank}\left(A\right),\text{rank}\left(B\right)\right)$, $\text{rank}\left(A+B\right)\le\text{rank}\left(A\right)+\text{rank}\left(B\right)$.

טענה: אם A הפיכה אזי $\text{rank}\left(AB\right)=\text{rank}\left(B\right)$.

המשפט היסודי של הדירוג: יהיו $A,A'\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ש"ש

- $\text{sols}\left(A\right)=\text{sols}\left(A'\right)$.
- $\mathcal{R}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(A'\right)$.

- $\text{rank}\left(A\right)=\text{rank}\left(A'\right)$.

טענה: $\text{sols}\left(A\right)=\text{LD}\left(\left\{ C_{i}\left(A\right)\mid i\in\left[n\right]\right\} \right)$.

מסקנה: תהא A מטריצה מדורגת קנונית אזי אין איבר פותח בעמודה ה־i $\iff C_{i}\left(A\right)\in\text{span}\left(C_{1}\left(A\right),\dots,C_{i-1}\left(B\right)\right)$.

משפט: יהיו $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו A',B' המטריצות הקנוניות שלהם בהתאמה, התב"ש

- $A\sim B$.
- $A'=B'$.
- $\mathcal{R}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(B\right)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $\left(\text{rank}\left(A\right)=n\right)\iff\left(A\text{ הפיכה}\right)$.

משפט הדרגה והאפסות: $n=\text{rank}\left(A\right)+\mathcal{N}\left(A\right)$.

פונקציה מטריציונית: $f:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ שמקיימת $\exists A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).f=T_{A}$.

הגדרה: $\ker\left(T_{A}\right)=T_{A}^{-1}\left[\left\{ 0\right\} \right]=\text{sols}\left(A\right)$.

טענה: $\forall A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).T_{A}=T_{B}\iff A=B$.

טענה: T_{A} לינארית.

העתקה לינארית/טרנספורמציה לינארית (ט"ל): יהיו U,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $T:V\to U$ שמקיימת כי T לינארית.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל מתקיים $\left(T\left(0\right)=0\right)\wedge\left(T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}T\left(v_{i}\right)\right)$.

טענה: תהא $T:U\to W$ ט"ל ותהא $S:V\to U$ ט"ל אזי $T\circ S$ ט"ל.

משפט: תהא $T:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ אזי T לינארית $\iff T$ מטריציונית.

משפט: תהא $T_{A}:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ ט"ל אזי $C_{i}\left(A\right)=T\left(\delta_{i}\right)$.

טענה: $\text{Im}\left(T\right)$, $\ker\left(T\right)$ תמ"ו.

טענה: תהא T ט"ל אזי

- $\left\langle T\left(v_{1}\right)\dots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow\left\langle v_{1}\dots v_{n}\right\rangle$ בת"ל.
- $\left\langle v_{1}\dots v_{n}\right\rangle$ פורשת $\Longleftarrow\left\langle T\left(v_{1}\right)\dots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ פורשת את $\text{Im}\left(T\right)$.

למה: תהא T ט"ל אזי

- נניח כי T חח"ע, $\left\langle v_{1}\dots v_{n}\right\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow\left\langle T\left(v_{1}\right)\dots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ בת"ל.
- נניח כי T על, $\left\langle v_{1}\dots v_{n}\right\rangle$ פורשת $\Longleftarrow\left\langle T\left(v_{1}\right)\dots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ פורשת.

מסקנה: תהא T ט"ל הפיכה ויהי $\left\langle b_{1}\dots b_{n}\right\rangle$ בסיס אזי $\left\langle T\left(b_{1}\right)\dots T\left(b_{n}\right)\right\rangle$ בסיס.

איזומורפיזם בין מרחבים וקטורים: $T:V\to U$ ט"ל הפיכה.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל

- T חח"ע $\iff\ker\left(T\right)=\left\{ 0\right\}$.
- T על $\iff\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)=\dim\left(U\right)$.
- $\forall u\in\text{Im}\left(T\right).\forall v\in T^{-1}\left[\left\{ u\right\} \right].T^{-1}\left[\left\{ u\right\} \right]=v+\ker\left(T\right)$.

משפט המימד השני: תהא $T:V\to U$ ט"ל $\dim\left(V\right)=\dim\left(\ker\left(T\right)\right)+\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $T:V\to U$ ט"ל, כל שניים מהשלושה שקולים

- T חח"ע.
- T על.
- $\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

טענה: $T:V\to U$ איזומורפיזם $\Longleftarrow\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

משפט: T איזומורפיזם $\iff T^{-1}$ איזומורפיזם.

משפט: לכל V מ"ו נ"ס מתקיים $V\cong\mathbb{F}^{\dim\left(V\right)}$.

מסקנה: יהיו V,W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $V\cong W\iff\dim\left(V\right)=\dim\left(W\right)$.

משפט: יהי $b\in V^{n}$ בסיס ויהי $c\in U^{n}$ אזי $T:V\to U$ המוגדרת $T\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[x\right]_{b}\right)_{i}\cdot c_{i}$ היא הט"ל היחידה שמקיימת $\forall i\in\left[n\right].T\left(b_{i}\right)=c_{i}$.

טענה: יהיו $T_{1},T_{2}:V\to U$ ט"ל ויהי b פורשת את V אזי $T_{1}=T_{2}\Longrightarrow\forall i\in\left[n\right].T_{1}\left(b_{i}\right)=T_{2}\left(b_{i}\right)$.

מרחב העתקות הלינאריות: $\text{Hom}\left(V,U\right)=\left\{ T\in V\to U\mid T\text{ ט"ל}\right\}$.

טענה: $\text{Hom}\left(V,U\right)$ מ"ו מעל השדה של V,U.

הערה: $\forall T_1,T_2\in\text{Hom}(V,U).T_1\circ T_2\in\text{Hom}(V,U)$.

משפט: $\dim(\text{Hom}(V,U))=\dim(V)\cdot\dim(U)$.

טענה: יהיו b,c בסיסים של V,U בהתאמה לכן $\left\{T_{i,j}(b_k)=\begin{cases}c_j & i=k\\ 0 & else\end{cases}\ \middle|\ i,j\in[n]\right\}$ בסיס של $\text{Hom}(V,U)$.

סימון: $\text{Hom}(V)=\text{Hom}(V,V)$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}(V,U)$ ויהיו B,C בסיסים של V,U בהתאמה לכן $Q_C\circ T\circ Q_B^{-1}$ מטריציונית.

מטריצה מייצגת: המטריצה $[T]_C^B=A$ עבורה $Q_C\circ T\circ Q_B^{-1}=T_A$.

סימון: $[T]_B=[T]_B^B$.

מסקנה: $C_i\left([T]_C^B\right)=[T(B_i)]_C$.

מסקנה: $[T]_C^B\cdot[v]_B=[T(v)]_C$.

הטלה: יהיו $V=U\oplus W$ מ"ו אזי $P_{(U,W)}:V\to V$ המוגדרת $P_{(U,W)}(v)=\iota u\in U.\exists w\in W.u+w=v$.

טענה: $P_{(U,W)}$ ט"ל, $\text{Im}\left(P_{(U,W)}\right)=U$, $\ker\left(P_{(U,W)}\right)=W$, $P_{(U,W)}^2=P_{(U,W)}$.

הערה: $[T]_C^B\in M_{\dim(U)\times\dim(V)}(\mathbb{F})$.

משפט:

- $\left(Q_B\right)_{\restriction_{\ker(T)}}:\ker(T)\to\text{sols}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.
- $\left(Q_C\right)_{\restriction_{\text{Im}(T)}}:\text{Im}(T)\to\mathcal{C}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.

מסקנה: $\mathcal{N}\left([T]_C^B\right)=\dim(\ker(T))$, $\text{rank}\left([T]_C^B\right)=\dim(\text{Im}(T))$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}(V,U)$ אזי T הפיכה $\iff$ $[T]_C^B$ הפיכה.

משפט: $T\in\text{Hom}(V,U)$, $S\in\text{Hom}(U,W)$ אז $[S\circ T]_D^B=[S]_D^C\cdot[T]_C^B$.

מסקנה: $\left([T]_C^B\right)^{-1}=\left[T^{-1}\right]_B^C$.

מטריצת שינוי קואורדינטות: $[Id_V]_C^B$.

הערה: $C_i\left([Id]_C^B\right)=[B_i]_C$.

מסקנה: $[T]_C^B=[Id]_C^E\cdot[T]_E^D\cdot[Id]_D^B$.

דמיון מטריצות: $\forall A,B\in M_n(\mathbb{F}).A\sim B\iff\exists P\in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BP=A$.

משפט: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- $B\sim A$.
- $\forall T\in\text{Hom}(V,U).A=[T]_D^C\Longrightarrow\exists C',D'.B=[T]_{D'}^{C'}$.
- $\exists T\in\text{Hom}(V,U).([T]_C=A)\land([T]_D=B)$.

טענה: A,B דומות אז $\det(A)=\det(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $\det(T)=\det([T]_B)$.

עקבה: $\text{trace}(A)=\sum_{i=1}^n(A)_{i,i}$.

טענה: $\forall A,B\in M_n(\mathbb{F}).\text{trace}(AB)=\text{trace}(BA)$.

מסקנה: A,B דומות $\Longleftarrow$ $\text{trace}(A)=\text{trace}(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $\text{trace}(T)=\text{trace}([T]_B)$.

מטריצות מתאימות: $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).A\sim_{\text{green}}B\iff\exists P,Q\in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BQ^{-1}=A$.

הערה: A,B דומות $\Longleftarrow$ A,B מתאימות.

טענה: $\text{rank}A=\text{rank}B\iff A,B$ מתאימות.

הגדרה: $[*]_C^B:\text{Hom}(V,W)\to M_{\dim(V)\times\dim(W)}(\mathbb{F})$ כך $[*]_C^B(T)=[T]_C^B$.

משפט: $[*]_C^B$ איזומורפיזם.

אלגברה: $\langle V,+,\cdot,*\rangle$ שמקיים ($\langle V,+,\cdot\rangle$ מ"ו)$\land$($*:V\times V\to V$).

אלגברת מטריצות: המרחב $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עם פעולת כפל מטריצות.

אלגברת Hom: המרחב $\text{Hom}(V,W)$ עם פעולת ההרכבה.

איזומורפיזם בין אלגברות: $T:A\to B$ ט"ל הפיכה שמקיימת $\forall\alpha,\beta\in A.T(\alpha*\beta)=T(\alpha)*T(\beta)$.

משפט: אם $[*]_B:\text{Hom}(V)\to M_{\dim(V)}(\mathbb{F})$ אז $[*]_B$ איזומורפיזם בין אלגברות.

מטריצת בלוקים:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

הערה: מספר העמודות והשורות בין מטריצות צמודות חייב להיות שווה.

סימון:

$$(A_{i,j})_{1\le i,j\le m} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

כפל מטריצת בלוקים: $(AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^{m} A_{i,t}B_{t,j}$.

מטריצת בלוקים ריבועית: מטריצת בלוקים כך שמקיימת $\forall i.A_{i,i} \in M_n(\mathbb{F})$.

מטריצת בלוקים משולשית עליונה: $\left((A_{i,j})_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell} = \begin{cases} A_{k,\ell} & k \le \ell \\ 0 & else \end{cases}$.

מטריצת בלוקים משולשית תחתונה: $\left((A_{i,j})_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell} = \begin{cases} A_{k,\ell} & k \ge \ell \\ 0 & else \end{cases}$.

מטריצת בלוקים אלכסונית: מטריצת בלוקים משולשית תחתונה ועליונה.

הגדרה: $\left(\text{Diag}\left(A_{1,1},\dots,A_{n,n}\right)\right)_{k,\ell} = \begin{cases} A_{k,k} & k = \ell \\ 0 & else \end{cases}$.

משפט: אם $(A_{i,j})_{1\le i,j\le m}$ משולשית אז $\det\left((A_{i,j})_{1\le i,j\le m}\right) = \prod_{i=1}^{n}\det\left(A_{i,i}\right)$.