פולינום טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על a אזי $P_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{\left(k\right)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^{k}$.

שארית טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על a אזי $R_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=f\left(x\right)-P_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)$.

טור טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ חלקה על a אזי $P\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{\left(k\right)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^{k}$.

פונקציה קדומה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ אזי $\left(G'=f\right)\iff\left(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c\right)$.

חלוקה: יהי $\left[a,b\right]$ אזי $\Pi=\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ המקיימות $a=x_{0}<x_{1}\ldots<x_{n-1}<x_{n}=b$.

סימון: תהא $\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\Delta x_{i}=x_{i}-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i=1}^{n}\left|\Delta x_{i}\right|$.

עידון: תהא Π_{1} חלוקה אזי חלוקה Π_{2} המקיימת $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$.

טענה: תהא Π_{1} חלוקה וכן Π_{2} עידון אזי $\lambda\left(\Pi_{2}\right)\le\lambda\left(\Pi_{1}\right)$.

נקודות מתאימות: תהא $\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\left\{ t_{1}\ldots t_{n}\right\}$ המקיימות $\forall i\in\left\{ 1\ldots n\right\} .t_{i}\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{ t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)=\sum f\left(t_{i}\right)\Delta x_{i}$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\left\{ t_{i}\right\}$ מתקיים $\left|S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)-L\right|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(\varphi\right)d\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_{a}^{b}f=\int_{\left[a,b\right]}f=\int_{\left[a,b\right]}f\left(t\right)dt=\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt$.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R\left(\left[a,b\right]\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}\mid\text{אינטגרבילית רימן } f\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt=\lim_{\lambda\left(\Pi\right)\to0}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{ t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_{a}^{b}c\cdot dt=c\left(b-a\right)$.

טענה: $D\left(x\right)\notin R\left(\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{\left[x_{i},x_{i-1}\right]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{\left[x_{i},x_{i-1}\right]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sup_{\left\{ t_{i}\right\} \text{נקודות מתאימות}}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\inf_{\left\{ t_{i}\right\} \text{נקודות מתאימות}}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה Π_{1},Π_{2} חלוקות אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי $\overline{I}\left(f\right)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\overline{I}\left(f\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

קריטריון דרבו : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f \in R([a,b])) \Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$).

תנודה : תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f,J) = \sup_{x,y\in J}(f(x) - f(y))$.

משפט : תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0 \in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\Longleftrightarrow (\lim_{\delta\to 0}\omega(f,[x_0-\delta,x_0+\delta]) = 0)$.

משפט : תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow (\forall I \subseteq J.\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > \text{len}(I).\omega(f,I) < \varepsilon)$.

תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$.

מסקנה : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi) = \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

למה : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_2 = \Pi_1 \cup \{p\}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \le \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) + \lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \ge \underline{\Sigma}(f,\Pi_2) - \lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

מסקנה : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_2 = \Pi_1 \cup \{p_1 \dots p_m\}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \le \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) + m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \ge \underline{\Sigma}(f,\Pi_2) - m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

טענה : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}(f,\Pi) \le \underline{I}(f) \le \underline{\Sigma}(f,\Pi) + \varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi) \ge \overline{I}(f) \ge \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \varepsilon$.

מסקנה : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ אזי $f \in R([a,b])$.

קריטריון דרבו משופר : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}(f,\Pi) - \underline{\Sigma}(f,\Pi) < \varepsilon$ אזי $f \in R([a,b])$.

משפט : $C([a,b]) \subseteq R([a,b])$.

משפט : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי $f \in R([a,b])$.

סימון : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b \in [a,c]$ עבורה $f_{\upharpoonright_{[a,b]}} \in R([a,b])$ אזי $f \in R([a,b])$.

משפט : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b \in [a,c]$ עבורה $(f \in R([a,b])) \wedge (f \in R([b,c]))$ אזי $f \in R([a,c])$.

משפט : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b < c \in [a,d]$ עבורה $f \in R([a,d])$ אזי $f \in R([b,c])$.

משפט : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b \in (a,c).f \in R([a,b])$ אזי $f \in R([a,c])$.

מסקנה : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b \in (a,c).f \in R([b,c])$ אזי $f \in R([a,c])$.

טענה : תהא $f \in R([a,c])$ נגדיר $g(x) = \begin{cases} y & x = b \\ f(x) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g \in R([a,c])$.

מסקנה : נגדיר $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אזי $f \in R([-1,1])$.

מסקנה : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f \in R([a,b])$.

משפט : תהיינה $f,g \in R([a,b])$ תהא $H \in C(\mathbb{R})$ וכן $c \in \mathbb{R}$

- $(f+g),(cf) \in R([a,b])$.
- $(f\cdot g),(H\circ f),|f| \in R([a,b])$.

קבוצה ממידה אפס : $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $\{(a_i,b_i)\}_{i=0}^{\infty}$ עבורם $A \subseteq \bigcup(a_i,b_i)$ וכן $\sum(b_i - a_i) < \varepsilon$.

טענה : תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $|A| \le \aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה : תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A \subseteq B$ המקיימת $\forall b \in B.\forall\varepsilon > 0.\exists a \in A.|b-a| < \varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_A}=g_{\restriction_A}$ אזי $\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b g\left(x\right)dx$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_i & x\in\left\{b_1\dots b_m\right\} \\ f\left(x\right) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f\left(x\right)dx=\int_a^c g\left(x\right)dx$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ ויהי $b\in\left(a,c\right)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\geq 0$ אזי $\int_a^b f\left(x\right)dx\geq 0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_a^b f\left(x\right)dx\geq\int_a^b g\left(x\right)dx$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $m\leq f\leq M$ אזי $m\left(b-a\right)\leq\int_a^b f\left(x\right)dx\leq M\left(b-a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b\left|f\right|\leq\sup_{\left[a,b\right]}\left(\left|f\right|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסוים: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)dt$ אזי $F\in C\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $0\leq g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(x_0\right)\int_a^b g\left(x\right)dx$.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0\leq g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_a^{x_0} g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_0}^b g\left(x\right)dx$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_0\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)dt$ אזי $F'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ יהיו $x_1\dots x_n\in\left[a,b\right]$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]\backslash\left\{x_1\dots x_n\right\}$ אזי $\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $\left[f\right]|_a^b=f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_a^b f'g=\left[f\cdot g\right]|_a^b-\int_a^b fg'$.

הלמה של בונה: תהא $\substack{f\in C\left(\left[a,b\right]\right)\\ f\in C^1\left(\left(a,b\right)\right)}$ עבורה $\left(f'\geq 0\right)\vee\left(f'\leq 0\right)$ ותהא $g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_a^{x_0} g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_0}^b g\left(x\right)dx$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $R_n\left(f,a\right)\left(x\right)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)\left(x-t\right)^n dt$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $\substack{\varphi\in\left[a,b\right]^{\left[\alpha,\beta\right]}\\ \varphi\in C^1\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)}$ המקיימת $\substack{\varphi\left(\alpha\right)=a\\ \varphi\left(\beta\right)=b}$ אזי $\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

למה: תהא $f\in C^1\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi} f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx=-\int_0^{2\pi} f'\left(x\right)\frac{\sin\left(nx\right)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi} f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx\right|\leq\frac{2\pi\sup\left(\left|f'\right|\right)}{n}$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}\left(k-2n\right)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x\right)^m dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x\right)^m dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\left(m-1\right)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{\left(m-1\right)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\dots\left(2n-2\right)\cdot\left(2n-2\right)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\dots\left(2n-1\right)\cdot\left(2n-1\right)}=\prod_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=\left[a,\infty\right)$ וכן $f\in R\left(\left[a,b\right]\right).\forall b\in\left[a,\infty\right)$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=\left(-\infty,b\right]$ וכן $f\in R\left(\left[a,b\right]\right).\forall a\in\left(-\infty,b\right]$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.

- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.\left(a<b\right)\implies\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)$ אזי $\int_{-\infty}^{\infty}f=\int_{-\infty}^{0}f+\int_{0}^{\infty}f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=\left(a,b\right]$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[c,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim\limits_{r\to a^{+}}\int_{r}^{b}f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=\left[a,b\right)$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim\limits_{r\to b^{-}}\int_{a}^{r}f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R\left(I\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{I}\mid\int_{I}f\text{ קיים וסופי}\right\}$.

הערה: מכאן כל המשפטים יהיו חד צדדים ימינה אך תקפים לכל סוגי הקטעים עם שינויים קלים.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\left\{ \infty\right\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{\omega}\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\int_{a}^{\omega}f+\beta\int_{a}^{\omega}g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהי $c\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{a}^{c}f+\int_{c}^{\omega}f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_{a}^{\omega}f\ge\int_{a}^{\omega}g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ על $\left[a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\lim_{b\to\omega}F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f'g=\lim_{b\to\omega}\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{\omega}fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $\underset{\varphi\in C^{1}\left(\left[c,\eta\right)\right)}{\varphi\in\left[a,\omega\right)^{\left[c,\eta\right)}}$ המקיימת $\underset{\lim_{b\to\eta}\varphi\left(b\right)=\omega}{\varphi\left(c\right)=a}$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{c}^{\eta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in\left(a,\omega\right).\forall b_{1},b_{2}\in\left[B,\omega\right).\left|\int_{b_{1}}^{b_{2}}f\right|<\varepsilon\right)\iff\left(f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ אינו מתכנס אך $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_{a}^{\omega}f\right|\le\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)\iff$ $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$) חסומה על $\left[a,\omega\right)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימות $\forall b\in\left(a,\omega\right).f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}g<\infty\right)\implies\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימות $\forall b\in\left(a,\omega\right).f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f=\infty\right)\implies\left(\int_{a}^{\omega}g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)<\infty\right)\iff\left(\int_{1}^{\infty}f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^{\infty}f\left(n\right)\le\int_{1}^{\infty}f\le\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:\left(1,\infty\right)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$.

טענה: $\lim_{s\to1^{+}}\zeta\left(s\right)\left(s-1\right)=1$.

משפט אבל: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)\cap R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $f\in C^{1}\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_{a}^{\omega}fg<\infty$.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_{a}^{x}g$ חסומה ותהא $f\in C^{1}\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $\int_{a}^{\omega}fg<\infty$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^{n}}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

שאיפה נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^{I}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\forall x\in I.\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}\left(x\right)=g\left(x\right)\right)\iff\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)$.

סימון: $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)\iff\left(f_{n}\xrightarrow{\text{p.w.}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in C\left(I\right)\right)\centernot\implies\left(f\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in R\left(I\right)\right)\centernot\implies\left(f\in R\left(I\right)\right)$.

- **גבול האינטגרל**: נניח $\underset{\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I)}{f\in R(I)}$ אזי $\left(\int_I f=L\right) \not\Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)$.
- **נגזרת**: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(f'(x)=L\right) \not\Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=L\right)$.

שאיפה במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0\right) \Longleftrightarrow \left(f_n \xrightarrow{\text{uniform}} g\right)$.

סימון: $\left(f_n \xrightarrow{\text{unifom}} f\right) \Longleftrightarrow \left(f_n \xrightarrow{\text{u}} f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}} f\right) \Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\right)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.|f_n(x)|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(g_n\xrightarrow{\text{u}} g\right)\wedge\left(f_n\xrightarrow{\text{u}} f\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{\text{u}} fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי
$\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{\text{u}} f\right) \Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C(I)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}} f$ אזי $f\in C(I)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists B\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in B}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $\underset{\forall n<m.f_m<f_n}{f_n\xrightarrow{\text{p.w.}} f}$ באשר $f\in C([a,b])$ אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}} f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{p.w.}} f$ באשר $f\in C([a,b])$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}} f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}} f$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}} f$ אזי $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R([a,\omega))$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}} f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi\in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.|f_n|\le\Psi$ אזי $\left(\forall b\in[a,\omega).f\in R([a,b])\right)\wedge\left(\int_a^\omega f \text{ מתכנסת בהחלט}\right)\wedge\left(\int_a^\omega f=\lim_{n\to\infty}\int_a^\omega f_n\right)$.

טענה: $\int_0^\infty e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: תהיינה $f_n\in C^1([a,b])$ עבורן $f_n'\xrightarrow{\text{u}} g$ ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $\exists f\in\mathbb{R}^{[a,b]}.\underset{f_n\xrightarrow{\text{u}} f}{f'=g}$.

סימון: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^n f_n\xrightarrow{\text{u}} f$ אזי $\sum_{i=0}^\infty f_n=f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^\infty u_n=f$ במ"ש אזי $\int_a^b f(t)\,dt=\sum_{n=0}^\infty\int_a^b u_n(t)\,dt$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^\infty u_n=f$ במ"ש אזי $\int_a^b f(t)\,dt=\sum_{n=0}^\infty\int_a^b u_n(t)\,dt$.

משפט M בוחן של וירשטראס: תהיינה $u_n\in\mathbb{R}^I$ ותהא $M\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^\infty M_n<\infty$ וכן $\forall x\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.|u_n(x)|\le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^n a_kb_k=\sum_{k=1}^n a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^k a_m\left(b_k-b_{k+1}\right)$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^n f_ig_i$ מתכנסת במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n\xrightarrow{\text{u}} 0$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^n f_ig_i$ מתכנסת במ"ש.

פונקציית וירשטראס: יהי $a\in(0,1)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x)=\sum_{k=0}^\infty a^k\cos\left(b^k\pi x\right)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0\left(4^kx\right)}{4^k}\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0(x+1)=\triangle_0(x)\right)\wedge\left(\triangle_0(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1-x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}\right)$.

טענה: $\triangle_n \xrightarrow{\text{u}} \triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $\exists p \in \mathbb{R}[x] . \max_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ אזי קיימת $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורה $p_n \xrightarrow{\text{u}} f$.

הגדרה: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n \xrightarrow{\text{u}} f$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ ויהי $r < |q|$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|, |r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0,\infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס} & x \in (-R,R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R,R] \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right) \Longrightarrow (R=\infty)\right) \wedge \left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right) \Longrightarrow (R=0)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.