פעולה בינארית: תהא A קבוצה אזי פונקציה $*:A\times A\to A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*:A\times A\to A$ פעולה בינארית אזי $a*b=*(a,b)$ לכל $a,b\in A$.

אסוציטיביות/קיבוציות: תהא A קבוצה אזי פעולה בינארית $*$ המקיימת $(a*b)*c=a*(b*c)$ לכל $a,b,c\in A$.

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: תהא A קבוצה אזי פעולה בינארית $*$ המקיימת $a*b=b*a$ לכל $a,b\in A$.

איבר יחידה: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $e\in A$ המקיים $e*g=g*e=g$ לכל $g\in A$.

איבר הופכי/נגדי: תהא A קבוצה תהא $*$ פעולה בינארית יהי $e\in A$ איבר יחידה ויהי $g\in A$ אזי $h\in A$ המקיים $g*h=h*g=e$.

מונואיד: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $\langle A,*\rangle$ באשר $*$ אסוציטיבית וכן קיים איבר יחידה.

סימון: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד ויהי $e\in A$ איבר היחידה של A אזי $e_A=e$.

חבורה: מונואיד $\langle G,*\rangle$ המקיים כי לכל $g\in G$ קיים קיים איבר הופכי.

הגדרה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $A^{\times}=\{a\in A\mid \exists h\in A.a*h=h*a=e_A\}$.

טענה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $\left\langle A^{\times},*_{\restriction_{A^{\times}\times A^{\times}}}\right\rangle$ חבורה.

סימון: תהא A קבוצה אזי $S_A=\{f:A\to A\mid \text{חח"ע ועל } f\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_n=S_{[n]}$.

טענה חבורת התמורות: תהא A קבוצה אזי $\langle S_A,\circ\rangle$ חבורה.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ נגדיר $\sim_n\subseteq\mathbb{Z}^2$ כך $\sim_n=\left\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{Z}^2\mid (n|\left(x-y\right))\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\sim_n$ יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ ויהיו $x,y\in\mathbb{Z}$ אזי $[x]_{\sim_n}+[y]_{\sim_n}=[x+y]_{\sim_n}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\mathbb{Z}/\sim_n=\left\{[0]_{\sim_n},\ldots,[n-1]_{\sim_n}\right\}$.

טענה חבורת השאריות: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\langle\mathbb{Z}/\sim_n,+\rangle$ חבורה.

טענה יחידות איבר היחידה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד ויהיו $e_1,e_2\in A$ איברי יחידה אזי $e_1=e_2$.

טענה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ויהיו $a,b,c\in G$ באשר $a*b=a*c$ אזי $b=c$.

מסקנה יחידות איבר הופכי: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ויהיו $a,b,c\in G$ באשר b,c הופכיים ל־a אזי $b=c$.

סימון: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה יהי $a\in G$ ויהי $b\in G$ הופכי ל־a אזי $a^{-1}=b$.

הגדרה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ותהא $a\in G$ אזי $a^0=e_G$ וכן $a^{n+1}=a*a^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן $a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

סדר של איבר: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ויהי $a\in G$ אזי $\operatorname{ord}(a)=\min\{n\in\mathbb{N}_+\mid a^n=e_G\}$.

משפט: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה באשר $|G|<\aleph_0$ אזי קיים $a\in G$ המקיים $\operatorname{ord}(a)\leq|G|$.

תת־חבורה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ עבורה $\left\langle H,*_{\restriction_{H\times H}}\right\rangle$ חבורה אזי $\left\langle H,*_{\restriction_{H\times H}}\right\rangle$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H\subseteq G$ תת־חבורה אזי $H\leq G$.

טענה בוחן תת־חבורה: תהא G חבורה ותהא $H\subseteq G$ תת קבוצה אזי (H חבורה)$\Longleftrightarrow$($e_G\in H$ וכן $h^{-1}\in H$ לכל $h\in H$ וכן $g*h\in H$ לכל $g,h\in H$).

איזומורפיזם בין חבורות: תהיינה G,H חבורות אזי $f:G\to H$ חח"ע ועל המקיימת $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in G$.

דו־מונואיד בעל חוק הפילוג: תהא R קבוצה ותהיינה $+,*$ פעולות בינאריות באשר $\langle R,+\rangle$ מונואיד וכן $\langle R,*\rangle$ מונואיד אזי $\langle R,+,*\rangle$ המקיים $a*(b+c)=a*b+a*c$ וכן $(b+c)*a=b*a+c*a$ לכל $a,b,c\in R$.

חוג עם יחידה: דו־מונואיד בעל חוג הפילוג $\langle R,+,*\rangle$ המקיים כי $+$ אבלית.

הערה: כל החוגים בקורס זה הם בעלי יחידה.

איזומורפיזם בין חוגים: יהיו R,F חוגים אזי $f:R\to F$ חח"ע ועל המקיימת

- משמרת יחידה: $f(1_R)=1_F$.
- משמרת כפל: $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in R$.
- משמרת חיבור: $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$ לכל $\alpha,\beta\in R$.

חוג עם יחידה אבלי: חוג $\langle R,+,\cdot\rangle$ המקיים כי $*$ אבלית.

חוג הפולינומים: יהי $\langle R,+,\cdot\rangle$ חוג אבלי אזי $\langle R[x],+,\cdot\rangle$.

טענה נוסחאת המעלות: יהי $\langle R[x],+,\cdot\rangle$ חוג פולינומים אזי לכל $p,q\in R[x]$ מתקיים $\deg(p+q)\leq\max(\deg(p),\deg(q))$ וכן $\deg(p\cdot q)\leq\deg(p)+\deg(q)$.

תת־חבורה נוצרת: תהא G חבורה ותהא $T \subseteq G$ אזי $\left\langle T\right\rangle = \bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{\prod_{i=1}^{n}a_i^{\varepsilon_i} \mid (a\in T^n)\wedge(\varepsilon\in\{\pm1\}^n)\right\}$.

משפט מינימליות התת־חבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $T\subseteq G$ ותהא $H\leq G$ באשר $T\subseteq H$ אזי $\left\langle T\right\rangle \leq H$.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי $\left|\left\langle g\right\rangle\right| = \operatorname{ord}(g)$ לכל $g\in G$.

מנה של חבורה: תהא G חבורה ויהי $H\leq G$ אזי $\left(g_1 * g_2^{-1}\in H\right) \iff (g_1\sim_H g_2)$ לכל $g_1,g_2\in G$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ אזי ${}^{G}/_{H} = {}^{G}/_{\sim_H}$.

משפט: תהא G חבורה אזי $\operatorname{ord}(g) \mid |G|$ לכל $g\in G$ וכן $|G| = |{}^{G}/_{H}|\cdot|H|$ לכל $H\leq G$.

משפט: תהא G חבורה באשר $|G|\in\mathbb{P}$ אזי G אבלית וכן $\left\langle g\right\rangle = G$ לכל $g\in G\backslash\{e_G\}$.

מחלק אפס: יהי R חוג אזי $a\in R\backslash\{0\}$ עבורו קיים $b\in R\backslash\{0\}$ המקיים $a*b=0_G$.

תחום שלמות: חוג אבלי $\left\langle R,+,*\right\rangle$ עבורו לכל $a\in R$ מתקיים כי a אינו מחלק אפס.

חוק צמצום: יהי R תחום שלמות יהי $a\in R\backslash\{0\}$ ויהיו $b,c\in R$ באשר $a*c=a*b$ אזי $c=b$.

שדה: חוג $\left\langle \mathbb{F},+,*\right\rangle$ המקיים כי $\left\langle \mathbb{F}\backslash\{0_{\mathbb{F}}\},*\right\rangle$ חבורה אבלית וכן $0_{\mathbb{F}}\neq 1_{\mathbb{F}}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}$ תחום שלמות.

משפט: יהי R תחום שלמות סופי אזי R שדה.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $(n\in\mathbb{P})\Longleftrightarrow(\left\langle \mathbb{Z}_n,+,*\right\rangle$ שדה).

מציין של שדה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = \min\left\{n\in\mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n}1_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}\right\}$.

הערה: יהי $\mathbb{F}$ שדה עבורו המציין לא קיים אזי $\operatorname{char}(\mathbb{F})=0$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\operatorname{char}(\mathbb{F})\in\mathbb{P}\cup\{0\}$.

הבינום של ניוטון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\forall a,b\in\mathbb{F}.\,(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה עבורו $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = p\neq 0$ אזי $\forall a,b\in\mathbb{F}.\forall k\notin\{0,p\}.\left(\binom{p}{k}\cdot a=0\right)\wedge\left((a+b)^p = a^p+b^p\right)$.

המשפט הקטן של פרמה: $\forall p\in\mathbb{P}.\forall a\in\mathbb{Z}_p.a^p\equiv a \mod p$.

קוסט/מחלקה שמאלית: יהיו $H\leq G$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $g*H = \{g*h \mid h\in H\}$.

קוסט/מחלקה ימנית: יהיו $H\leq G$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $H*g = \{h*g \mid h\in H\}$.

סימון: $G/H = \{g*H \mid g\in G\}$, $H\backslash G = \{H*g \mid g\in G\}$.

טענה: $(G/H)\wedge(H\backslash G)$ חלוקות של G.

טענה: $|G/H| = |H\backslash G|$.

אינדקס: יהיו $H\leq G$ חבורות אזי $[G:H] = |G/H|$.

משפט לגראנז': יהיו $H\leq G$ חבורות סופיות אזי $\left(|H| \mid |G|\right)\wedge\left([G:H]=\frac{|G|}{|H|}\right)$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $N\leq G$ המקיימת $\forall g\in G.gN=Ng$.

סימון: תהא G חבורה וכן $N\leq G$ תת חבורה נורמלית אזי $N\trianglelefteq G$.

כפל קבוצות: תהיינה $B,A\leq G$ חבורות אזי $A*B = \{a*b \mid a\in A\wedge b\in B\}$.

משפט: יהיו $g_1,g_2\in G$ אזי (H נורמלית)$\Longleftrightarrow\left((g_1H)*(g_2H) = (g_1*g_2)H\right)$.

טענה: (G/H חבורה עם כפל קבוצות)$\Longleftrightarrow$(H נורמלית).

משוואה: יהיו f,g פונקציות עבורן $\operatorname{dom}(g) = \operatorname{dom}(f)$ אזי הטענה $f(x) = g(x)$.

הגדרה: תהא X קבוצה עבורה $\operatorname{dom}(g)=\operatorname{dom}(f)=X^n$ אזי המשוואה מעל X עם n משתנים.

קבוצת פתרונות: תהא $f\in X^B$ ותהא $A\subseteq X$ אזי $\operatorname{sols}_A(f) = \{a\in A \mid f(a)=0\}$.

מערכת משוואות: יהיו n משוואות $f_i(x) = g_i(x)$ אזי $E = \left\langle f_1(x)=g_1(x),\ldots,f_n(x)=g_n(x)\right\rangle$.

סימון: תהא מערכת משוואות E אזי E_i תהיה משוואה מספר i.

קבוצת פתרונות של מערכת: $\operatorname{sols}_A(E) = \bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{sols}_A(E_i)$.

שקילות: E,E' מערכות/משוואות עבורן $\operatorname{sols}_A(E) = \operatorname{sols}_A(E')$.

טענה: תהא h חח"ע אזי $\operatorname{sols}((h\circ f)(x) = (h\circ g)(x)) = \operatorname{sols}(f(x)=g(x))$.

קבוצה אלגברית: $A\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת מערכת משוואות E מעל $\mathbb{R}$ עם n משתנים המקיימת $\operatorname{sols}(E) = A$.

פונקציה ליניארית: $f:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}$ המקיימת $\exists a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}.f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}a_ix_i$.

משוואה ליניארית: תהא f פונקציה ליניארית אזי $f(x_1,\ldots,x_n) = b$.

מערכת משוואות ליניארית: מערכת משוואות שכל המשוואות בה ליניאריות.

סימון: כדי לייצג מערכת משוואות ליניארית נכתוב $\begin{cases} a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n & =b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1+\ldots+a_{m,n}x_n & =b_m \end{cases}$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^2$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee(\mathbb{R}^2)$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^3$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee$(מישור)$\vee(\mathbb{R}^3)$.

וקטור: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{F}$ אזי $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

חיבור וקטורים: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n\in\mathbb{F}$ אזי $\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

כפל וקטורים: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{F}$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $\begin{pmatrix}\lambda\cdot\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\cdot\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\cdot\lambda$.

וקטור ה־0: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\bar{0}_n=\begin{pmatrix}0_{\mathbb{F}}\\ \vdots\\ 0_{\mathbb{F}}\end{pmatrix}$.

טענה: יהי $v\in\mathbb{F}^n$ וקטור יהי $t\in\mathbb{F}$ אזי $\left((t=0_{\mathbb{F}})\vee\left(v=\bar{0}_n\right)\right)\iff\left(t\cdot v=\bar{0}\right)$.

משוואה לינארית הומוגנית: משוואה לינארית $f(x_1,\ldots,x_n)=0$.

טענה: תהא מערכת משוואות לינאריות הומוגניות E אזי $\bar{0}\in\text{sols}(E)$.

משפט: תהא E מערכת משוואות לינאריות הומוגניות אזי $\text{sols}(E)$ סגורה ביחס לחיבור וקטורים וכפילה בסקלר.

סימון: תהא E מערכת משוואות לינאריות אזי E_0 מערכת המשוואות הלינאריות ההומגניות עם אותן פונקציות לינאריות.

משפט: $\forall p\in\text{sols}(E).\text{sols}(E)=\text{sols}(E_0)+p$.

מטריצה: $A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\ldots&a_{1,n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m,1}&\ldots&a_{m,n}\end{pmatrix}$.

סימון: $(A)_{i,j}=a_{i,j}$.

סדר מטריצה: מטריצה A תקרא מסדר $m\times n$ אם יש לה m שורות ו־n עמודות.

הגדרה: קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ מעל R תסומן $M_{m\times n}(R)$.

סימון: $C_j(A)$ הינה העמודה ה־j־ית, $R_i(A)$ הינה השורה ה־i־ית.

מטריצת ה־0: תהא מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, מתקיים $\forall i\in[m].\forall j\in[n].(A)_{i,j}=0_{\mathbb{F}}$.

מטריצה ריבועית: $A\in M_{m\times m}(\mathbb{F})$.

מטריצת מקדמים: עוד סימון אפשרי לייצוג מערכת לינארית של משוואות הינה $\left(\begin{array}{ccc|c}a_{1,1}&\ldots&a_{1,n}&b_1\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ a_{m,1}&\ldots&a_{m,n}&b_m\end{array}\right)$.

מטריצת המקדמים המצומצמת: $\begin{pmatrix}a_{1,1}&\ldots&a_{1,n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m,1}&\ldots&a_{m,n}\end{pmatrix}$.

עמודת המקדמים החופשיים: $\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$.

איבר פותח בשורה: $\min\left(j\in[n]\mid(A)_{i,j}\neq0\right)$.

מטריצה מדורגת: מטריצה המקיימת כי (כל שורות האפסים נמצאות למטה)$\wedge$(בכל שורה שיש בה איבר פותח האיבר הפותח הינו מימין ממש לאיבר הפותח בשורה מעליו).

מטריצה מדורגת קנונית: מטריצה מדורגת המקיימת כי (כל האיברים הפותחים הם 1)$\wedge$(בכל עמודה של איבר פותח שאר אברי העמודה הם 0).

שורת סתירה: שורה מהצורה $(0,\ldots,0|b)$ באשר $b\neq0$.

אלגוריתם: תהא $A\in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת קנונית

- אם קיימת שורת סתירה, $\text{sols}(A)=\varnothing$.
- אם לא קיימת שורת סתירה, נניח כי בעמודות $I=\{i_1\ldots i_k\}$ לא קיים איבר פותח אזי

$$\text{sols}(A)=\left\{v\in\mathbb{F}^n\;\middle|\;\forall i\notin I.v_i=(A)_{i,n+1}-\sum_{j\in I}\left((A)_{i,j}v_j\right)\right\}$$

פעולה אלמנטרית: פונקציה $\varphi:M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)\to M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת $\mathrm{sols}\left(A\right)=\mathrm{sols}\left(\varphi\left(A\right)\right)$.$\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.

הפעולות האלמנטריות של גאוס: (החלפת שורה $\varphi_{R_i\leftrightarrow R_j}\left(A\right)$)$\wedge$(הכפלה בסקלר $\varphi_{R_i\to\lambda R_i}\left(A\right)$)$\wedge$(חיבור שורה $\varphi_{R_i\to R_i+R_j}\left(A\right)$).

שקילות שורה (ש"ש): $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורן קיימות פעולות אלמנטריות $\varphi_1\ldots\varphi_n$ המקיימות $\left(\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_n\right)\left(A\right)=B$.

משפט גאוס: $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

אלגוריתם גאוס: $\mathcal{O}\left(n^2m\right)$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{row}=1\\
&\mathrm{for}\ \ \left(1\le \mathrm{col}\le n\right)\\
&\qquad \mathrm{if}\ \ \left(\exists\min\left(j\right)\ge\mathrm{row}.\left(A\right)_{j,\mathrm{col}}\neq0\right)\\
&\qquad\qquad \mathrm{if}\ \ \left(j\neq\mathrm{row}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad R_j\leftrightarrow R_{\mathrm{row}}\\
&\qquad\qquad R_{\mathrm{row}}\to\frac{1}{\left(A\right)_{\mathrm{row},\mathrm{col}}}R_{\mathrm{row}}\\
&\qquad\qquad \mathrm{for}\ \ \left(1\le k\le m\wedge k\neq\mathrm{row}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad R_k\to R_k-\left(A\right)_{k,\mathrm{col}}R_{\mathrm{row}}\\
&\qquad\qquad \mathrm{row}+=1
\end{aligned}
$$

מסקנה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ מדורגת קנונית ללא שורת סתירה בעלת k שורות ללא איבר פותח אזי $\left|\mathrm{sols}\left(A\right)\right|=\left|\mathbb{F}\right|^k$.

הדלתא של קרונקר: $\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & else\end{cases}$.

מטריצת היחידה: $I_n\in M_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת $\left(I_n\right)_{i,j}=\delta_{i,j}$.

משפט: תהא $A\in M_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי (למערכת $\left(A|0\right)$ יש פתרון יחיד)$\Longleftrightarrow$(הצורה הקנונית של A היא I_n).

משפט: מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו־n נעלמים שקולה למשוואה אחת של m־יות.

צירוף לינארי: יהיו $\left\langle \vec{v_1},\ldots,\vec{v_n}\right\rangle\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n$ אזי $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v_i}$ עבור $\alpha\in\mathbb{F}^n$.

כפל מטריצה ב־n־יה: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\forall\vec{v}\in\mathbb{F}^n.A\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}C_i\left(A\right)\vec{v}_i$.

משפט: $\left(A\cdot\left(\alpha\cdot\underline{v}\right)=\alpha\cdot\left(A\cdot\underline{v}\right)\right)\wedge\left(A\cdot\left(\underline{v}+\underline{u}\right)=A\cdot\underline{v}+A\cdot\underline{u}\right)\wedge$(יש מחלקי אפס).

מטריצת סיבוב: $R\left(\theta\right)=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{pmatrix}$.

מטריצת ונדרמונד: מטריצה שבא כל עמודה או שורה הינה סדרה הנדסית.

פולינום לגראנז' ה־i: $P_i\left(x\right)=\left(\prod_{k=1}^{j-1}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)\left(\prod_{k=j+1}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)$, מתקיים $P_i\left(x_j\right)=\delta_{i,j}$.

סימון: יהי $\left\langle v_1,\ldots,v_n\right\rangle\in\left(\mathbb{F}^m\right)^n$ נגדיר $\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \ldots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.

הגדרה: נגדיר $e_j\in\mathbb{F}^n$ כך $\left(e_j\right)_i=\delta_{j,i}$.

מטריצת תמורה: יהי $\sigma\in S_n$ נגדיר $P\left(\sigma\right)=\begin{pmatrix}| & & |\\ e_{\sigma\left(1\right)} & \ldots & e_{\sigma\left(n\right)}\\ | & & |\end{pmatrix}$ מתקיים $\left(P\left(\sigma\right)\cdot v\right)_i=v_{\sigma^{-1}\left(i\right)}$.

משפט אי הפרישה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ וכן B הצורה הקנונית אזי $\left(\exists i.R_i\left(B\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(\exists b\in\mathbb{F}^m.\mathrm{sols}\left(A|b\right)=\varnothing\right)$.

מסקנה: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(n<m\right)\Longrightarrow\left(\exists b\in\mathbb{F}^m.\mathrm{sols}\left(A|b\right)=\varnothing\right)$.

סימון: $M_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)=M_n\left(\mathbb{F}\right)$.

מסקנה: $\forall A\in M_n\left(\mathbb{F}\right).\left(\forall b\in\mathbb{F}^n.\mathrm{sols}\left(A|b\right)\neq\varnothing\right)\Longrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^n.\left|\mathrm{sols}\left(A|b\right)\right|=1\right)$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^{n}\right)^{m}$ נגדיר $\text{span}\left(v\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}v_{i}\mid\alpha\in\mathbb{F}^{m}\right\}$.

סדרה פורשת: סדרה $v\in\left(\mathbb{F}^{n}\right)^{m}$ שמקיימת $\text{span}\left(v\right)=\mathbb{F}^{n}$.

הגדרה: נגדיר $T:\left(\mathbb{F}^{n}\right)^{m}\times\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ כך α $\left(\begin{array}{ccc} | & & |\\ \vec{v}_{1} & \dots & \vec{v}_{n}\\ | & & | \end{array}\right)=T_{\vec{v}}\left(\alpha\right)$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ על)$\iff$($\vec{v}$ פורשת).

סדרה בת"ל (בלתי תלויה לינארית): סדרה $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ המקיימת $\left(\alpha=0\right)\iff\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}=0\right).\forall\alpha\in\mathbb{F}^{n}$.

בסיס: $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ בת"ל ופורשת.

טענה: יהיו $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ ונגדיר $A=\left(\begin{array}{ccc} | & & |\\ v_{1} & \dots & v_{n}\\ | & & | \end{array}\right)$

- (v פורשת)$\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\left|\text{sols}\left(A\underline{x}=b\right)\right|>0\right)$.
- (v בת"ל)$\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\left|\text{sols}\left(A\underline{x}=b\right)\right|<2\right)$.
- (v בסיס)$\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\left|\text{sols}\left(A\underline{x}=b\right)\right|=1\right)$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ חח"ע)$\iff$($\vec{v}$ בת"ל).

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ אזי $\text{LD}\left(v\right)=\left\{ \alpha\in\mathbb{F}^{n}\mid\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}=0\right\}$.

הערה: (v בת"ל)$\iff\left(\text{LD}\left(v\right)=\left\{ 0\right\} \right)$.

הנפרשת/ספאן: תהא $K\subseteq\mathbb{F}^{n}$ אזי $\text{span}\left(K\right)=\left\{ u\in\mathbb{F}^{n}\mid\exists m\in\mathbb{N}_{+}.\exists v\in K^{m}.\exists\alpha\in\mathbb{F}^{m}.u=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}v_{i}\right\} \cup\left\{ 0\right\}$.

משפט: (v בת"ל $\Longleftarrow$ כל תת סדרה של v בת"ל)$\wedge$(v פורשת $\Longleftarrow$ כל על סדרה של v פורשת).

משפט: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ בת"ל וסדרה $u\in\mathbb{F}^{m}$ מתקיים ($v^{\frown}\left\langle u\right\rangle$ בת"ל)$\iff\left(u\notin\text{span}\left(v\right)\right)$.

טענה: $\left(u\in\text{span}\left(v\right)\right)\iff\left(\text{span}\left(v\right)=\text{span}\left(v^{\frown}\left\langle u\right\rangle \right)\right).\forall u\in\mathbb{F}^{m}.\forall v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$.

טענה: $\left(\exists x\in\text{LD}\left(v\right).x_{i}\neq0\right)\iff\left(v_{i}\in\text{span}\left(v_{\restriction_{\left[n\right]\backslash\left\{ i\right\} }}\right)\right).\forall i\in\left[n\right].\forall v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$.

משפט: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ התב"ש

- v בת"ל.
- $\forall i\in\left[n\right].v_{i}\notin\text{span}\left(v_{\restriction_{\left[n\right]\backslash\left\{ i\right\} }}\right)$.
- $\forall i\in\left[n\right].v_{i}\notin\text{span}\left(v_{\restriction_{\left[i-1\right]}}\right)$.

משפט: מעל $\mathbb{F}^{n}$ פחות מ־n n־יות לא פורשות.

משפט: מעל $\mathbb{F}^{n}$ יותר מ־n n־יות ת"ל.

מסקנה: מעל $\mathbb{F}^{n}$ לכל בסיס B מתקיים $\left|B\right|=n$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$, כל שניים מהשלושה שקולים

- v בת"ל.
- v פורשת.
- $n=m$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ התב"ש

- לכל b למערכת $Ax=b$ קיים פתרון.
- עמודות A פורשות.
- קיים b למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בת"ל.
- לכל b למערכת $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בסיס.

כפל מטריצות: $\left(AB\right)_{i,j}=\sum_{t=1}^{m}\left(A\right)_{i,t}\left(B\right)_{t,j}.\forall j\in\left[m\right].\forall i\in\left[k\right].\forall\left\langle A,B\right\rangle \in M_{k\times m}\left(\mathbb{F}\right)\times M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.

נוסחה: $\left(BA\right)_{i,j}=R_{i}\left(B\right)\cdot C_{j}\left(A\right)$.

טענה: $C_{i}\left(YX\right)=YC_{i}\left(X\right)$, $R_{i}\left(YX\right)=R_{i}\left(Y\right)X$.

כפל מטריצה בסקלר: $\left(\alpha A\right)_{i,j}=\alpha\left(A\right)_{i,j}$.

מטריצה סקלארית: αI_n.

טענה: $A(\alpha B) = \alpha (AB)$.

טענה: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . (AI_n = A) \wedge (I_m A = A)$.

מסקנה: $\langle M_n(\mathbb{F}), \cdot \rangle$ מונואיד.

מטריצות מתחלפות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $AB = BA$.

שחלוף: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . \left(A^T\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$.

הערה: $R_i\left(A^T\right) = C_i(A)$.

טענה: $\left(A^T\right)^T = A$, $(\alpha A)^T = \alpha\left(A^T\right)$, $(AB)^T = B^T A^T$.

מטריצה סימטרית: $A^T = A$.

מטריצה אנטי סימטרית: $A^T = -A$.

חיבור מטריצות: $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . (A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{ij}$.

טענה: $\langle M_{m\times n}(\mathbb{F}), + \rangle$ חבורה אבלית וסגורה לכפל בסקלר.

טענה: $(A(B+C) = AB + AC) \wedge \left((A+B)^T = A^T + B^T\right)$.

הפיכות: תהא $A_{m\times n}(\mathbb{F})$

- הפיכה משמאל: $\exists B \in M_{n\times m}(\mathbb{F}) . BA = I_n$.
- הפיכה מימין: $\exists B \in M_{n\times m}(\mathbb{F}) . AB = I_m$.
- הפיכה: (הפיכה משמאל)$\wedge$(הפיכה מימין).

טענה: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . \forall B, C \in M_{n\times m}(\mathbb{F}) . (AB = I_m) \wedge (CA = I_n) \Longrightarrow B = C$.

מסקנה: אם קיימת הופכית היא יחידה.

סימון: ההופכית של A היא A^{-1}.

מטריצה אלכסונית: $(A)_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & else \end{cases}$.

משפט: מטריצה בעלת שורת עמודות/שורות אפסים לא הפיכה.

הערה: $R(-\theta) R(\theta) = I_2 = R(\theta) R(-\theta)$.

טענה: $\left(\left(A^{-1}\right)^{-1} = A\right) \wedge \left(\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T\right) \wedge \left((AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\right)$.

משפט: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$

- (A הפיכה מימין)$\Longleftrightarrow \left(\forall b \in \mathbb{F}^m . \text{sols}(A|b) \neq \varnothing\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longleftrightarrow \left(|\text{sols}(A|0)| \leq 1\right)$.
- (A הפיכה)$\Longleftrightarrow \left(\forall b \in \mathbb{F}^m . |\text{sols}(A|b)| = 1\right)$.

מסקנה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$

- (A הפיכה מימין)$\Longleftarrow$(עמודות A פורשות)$\wedge (m \leq n)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longleftarrow$(עמודות A בת"ל)$\wedge (m \geq n)$.
- (A הפיכה)$\Longleftarrow$(עמודות A בסיס)$\wedge (m = n)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- A הפיכה משמאל.
- A הפיכה.
- A הפיכה מימין.
- A^T הפיכה.

טענה: תהא φ פונקציה אלמנטרית אזי $\varphi(AB) = \varphi(A) B$.

מטריצה אלמנטרית: $E_\varphi = \varphi(I_m)$.

מסקנה: $\varphi(A) = E_\varphi A$.

טענה: $E_\varphi^{-1} = R_{\varphi^{-1}}$.

אלגוריתם: $(A \mid I) \sim \left(I \mid A^{-1}\right)$.

מטריצה נילפוטנטית: $\exists m \in \mathbb{N} . A^m = 0$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A הפיכה)$\Longleftrightarrow (A \sim I)$.

מסקנה: (A,B הפיכות)$\Longleftrightarrow$(AB הפיכה).

הגדרה: $\text{Par}\left(\left\{v_1,\dots,v_m\right\}\right)=\left\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i\mid\alpha\in\left[0,1\right]^m\right\}$.

טענה: A הפיכה $\iff \text{Vol}\left(\text{Par}\left(A\right)\right)\neq 0$ (הנפח של המקבילון).

לינארית על פי שורה: פונקציה שמקיימת

$$f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i+R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}.$$

פונקציית נפח: פונקציה $\mathcal{N}:M_n\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ (לינארית על פי שורה)$\wedge\left(\mathcal{N}\left(I\right)=1\right)\wedge\left(\left(\exists i\neq j.R_i\left(A\right)=R_j\left(A\right)\right)\Longrightarrow\mathcal{N}\left(A\right)=0\right)$.

טענה: אם ב־A יש שורת אפסים אז $\mathcal{N}\left(A\right)=0$.

משפט: תהא φ פעולה אלמנטרית אזי

$$\mathcal{N}\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathcal{N}\left(A\right)\cdot\begin{cases}\lambda & \varphi=f_{R_i\to\lambda R_i}\\ -1 & \varphi=f_{R_i\leftrightarrow R_j}\\ 1 & \varphi=f_{R_i\to R_i+\lambda R_j}\end{cases}.$$

מסקנה: יהיו A,B שקולות שורה אזי $\left(\mathcal{N}\left(A\right)=0\right)\iff\left(\mathcal{N}\left(B\right)=0\right)$.

מסקנה: (A הפיכה)$\Longleftrightarrow\left(\mathcal{N}\left(A\right)\neq 0\right)$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(E_\varphi A\right)=\mathcal{N}\left(E_\varphi\right)\mathcal{N}\left(A\right)$.

משפט: יהיו $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2:M_n\left(\mathbb{F}\right)\to\mathbb{F}$ פונקציות נפח אזי $\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_2$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(AB\right)=\mathcal{N}\left(A\right)\mathcal{N}\left(B\right)$.

מסקנה: $\mathcal{N}\left(A\right)=\mathcal{N}\left(A^T\right)$.

מינור: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו $i,j\in\left[n\right]$ אזי $A_{i,j}\in M_{n-1}\left(\mathbb{F}\right)$ כך שמתקיים

$$\left(A_{i,j}\right)_{r,s}=\begin{cases}\left(A\right)_{r,s} & \left(r\leq i-1\right)\wedge\left(s\leq j-1\right)\\ \left(A\right)_{r+1,s} & \left(r\geq i\right)\wedge\left(s\leq j-1\right)\\ \left(A\right)_{r,s+1} & \left(r\leq i-1\right)\wedge\left(s\geq j\right)\\ \left(A\right)_{r+1,s+1} & \left(r\geq i\right)\wedge\left(s\geq j\right)\end{cases}$$

דטרמיננטה: פונקציית הנפח היחידה תיקרא $\det^n$.

הערה: $\forall A\in M_1\left(\mathbb{F}\right).\det\left(A\right)=\left(A\right)_{1,1}$.

פיתוח דטרמיננטה על פי עמודה: יהי $j\in\left[n\right]$ אזי $\det_j^n\left(A\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+j}\left(A\right)_{k,j}\det_j^{n-1}\left(A_{k,j}\right)$.

מסקנה: $\forall j,i\in\left[n\right].\det_j^n\left(A\right)=\det_i^n\left(A\right)$.

סימון: $\det_j^n=\det$.

סימון: $\det\left(A\right)=\left|A\right|$.

פיתוח דטרמיננטה על פי שורה: יהי $i\in\left[n\right]$ אזי $\det\left(A\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+i}\left(A\right)_{i,k}\det\left(A_{i,k}\right)$.

מטריצה מצורפת: $\left(\text{adj}\left(A\right)\right)_{i,j}=\left(-1\right)^{i+j}\left|A_{j,i}\right|$.

טענה: $\text{adj}\left(A^T\right)=\left(\text{adj}\left(A\right)\right)^T$.

משפט: $A\cdot\text{adj}\left(A\right)=\left|A\right|I=\text{adj}\left(A\right)\cdot A$.

מסקנה: $A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}\text{adj}\left(A\right)$.

כלל קרמר: תהא מערכת משוואת $Ax=b$ כאשר A הפיכה אזי $x_i=\frac{\left|A_i\right|}{\left|A\right|}$ כאשר $C_j\left(A_i\right)=\begin{cases}b & i=j\\ C_j\left(A\right) & else\end{cases}$.

הגדרה: תהא $\sigma\in S_n$ נגדיר יחס שקילות $a\sim_{\text{cycle}}b\iff\exists i\in\mathbb{N}.\sigma^i\left(a\right)=b$.

ציקלוס/מחזור: $\left[a\right]_{\sim_{\text{cycle}}}$.

פירוק תמורה לציקלוסים זרים: כל תמורה ניתנת לפירוק יחיד של ציקלוסים.

חילוף: $\left(\begin{array}{cc} i & j\end{array}\right)(x)=\begin{cases} j & x=i\\ i & x=j\\ x & else \end{cases}$.

טענה: כל מחזור ניתן לכתיבה כהרכבה של חילופים.

מסקנה: כל תמורה ניתנת לכתיבה כהרכבה של חילופים.

טענה: $\left(\begin{array}{cc} i & j\end{array}\right)\circ\left(\begin{array}{cc} n & m\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} n & m\end{array}\right)\circ\left(\begin{array}{cc} i & j\end{array}\right)$.

סימן: $\text{sign}(\sigma)=\det(P(\sigma))$.

טענה:

- יהיו $E_{R_i\leftrightarrow R_j},\dots,E_{R_\lambda\leftrightarrow R_\theta}$ אזי $P(\sigma)=E_{R_i\leftrightarrow R_j}\cdot\ldots\cdot E_{R_\lambda\leftrightarrow R_\theta}$.
- אם $(P(\sigma))_{i,j}=1$ אז $P(\sigma)_{i,j}$ מטריצת תמורה.
- $\text{sign}(\sigma)=\pm1$.

מטריצת תמורה זוגית: $\text{sign}(\sigma)=1$.

מטריצת תמורה איזוגית: $\text{sign}(\sigma)=-1$.

טענה: (Id זוגית)$\wedge$($\left(\begin{array}{cc} i & j\end{array}\right)$ אי זוגית).

טענה: $P(\sigma\tau)=P(\sigma)P(\tau)$.

מסקנה: $\text{sign}(\sigma\tau)=\text{sign}(\sigma)\,\text{sign}(\tau)$.

אי סדר של תמורה: זוג סדור $\langle i,j\rangle$ שמקיים $(i<j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))$.

אי הסדרים של איבר: $z(\sigma,i)=|\{j>i\mid\sigma(i)>\sigma(j)\}|$.

אי הסדרים של תמורה: $N(\sigma)=|\{\langle i,j\rangle\mid(j>i)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))\}|$.

משפט: $\text{sign}(\sigma)=(-1)^{N(\sigma)}$.

דטרמיננטה על פי תמורה: $|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\text{sign}(\sigma)\prod_{i=1}^n(A)_{i,\sigma(i)}\right)$.

מסקנה: $\forall A\in M_n(\mathbb{Z}).\,|A|\in\mathbb{Z}$.

מסקנה: $\forall A\in M_n(\mathbb{Z}).\,(\|A\|=1)\Longrightarrow\left(A^{-1}\in M_n(\mathbb{Z})\right)$.

מסקנה: $\det(A)\in\mathbb{F}[x_1,\dots,x_{n^2}]$.

נורמה: יהי $v\in\mathbb{R}^n$ נגדיר $\|v\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ אזי f רציפה.

מסקנה: $\det$ רציפה.

מסקנה: $\forall A\in M_n^\times(\mathbb{F}).\exists\varepsilon.\forall B\in M_n(\mathbb{F}).\left(\forall i,j.(B)_{i,j}\in\left((A)_{i,j}-\varepsilon,(A)_{i,j}+\varepsilon\right)\right)\Longrightarrow B\in M_n^\times(\mathbb{F})$.

מרחב וקטורי (מ"ו): $\langle V,+,*\rangle$ המקיים

- $\langle V,+\rangle$ חבורה אבלית.
- $*:\mathbb{F}\times V\to V$ המקיימת
  - $\forall v\in V.1_{\mathbb{F}}*v=v$.
  - $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v\in V.(\alpha*\beta)*v=\alpha*(\beta*v)$.
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v,u\in V.((\alpha+\beta)*v=\alpha*v+\beta*v)\wedge(\alpha*(v+u)=\alpha*v+\alpha*u)$.

טענה: $(\forall\alpha\in\mathbb{F}.\alpha\cdot0_V=0_V)\wedge(\alpha*v=0_V\iff(\alpha=0_{\mathbb{F}})\vee(v=0_V))\wedge(-1_{\mathbb{F}}*v=-v)\wedge(\forall v\in V.0_{\mathbb{F}}*v=0_V)$.

תת מרחב וקטורי (תמ"ו): קבוצה $\mathcal{U}\subseteq V^n$ המקיימת $(\forall v\in\mathcal{U}.\forall a\in\mathbb{F}.a\cdot v\in\mathcal{U})\wedge(\forall u,v\in\mathcal{U}.u+v\in\mathcal{U})\wedge(0\in\mathcal{U})$.

טענה: יהיו U,V תמ"ו אזי $U\cap V$ תמ"ו.

צירוף לינארי: יהי $v\in V^n$, צירוף לינארי של v הינו ביטוי מהצורה $\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i$ בעבור $\alpha\in\mathbb{F}^n$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v\in V^m$ נגדיר $\text{span}(v)=\{\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i\mid\alpha\in\mathbb{F}^m\}$.

סדרה בת"ל: סדרה $v\in V^n$ שמקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^n.\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=0\iff\alpha=0$.

בסיס: $v\in V$ בת"ל ופורשת.

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v\in V^n$ נגדיר $\text{LD}(v)=\{\alpha\in\mathbb{F}^n\mid\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=0\}$.

טענה: $(A\subseteq B\Longrightarrow\text{span}(A)\subseteq\text{span}(B))\wedge(A\subseteq\text{span}(B)\Longrightarrow\text{span}(A)\subseteq\text{span}(B))$.

טענה: תהא $K\subseteq V$ אזי $\text{span}(K)$ הינו התמ"ו הקטן ביותר ביחס ההכלה המכיל את K.
$\wedge(\text{span}(\text{span}(A))=\text{span}(A))\wedge(\text{span}(\varnothing)=\{0\})$.

משפט ההחלפה של ריס: תהא $v \in V^n$ פורשת ו־$u \in V^m$ בת"ל
- $m \leq n$.
- קיימים $1 \leq i_1 \dots i_m \leq n$ כך שהקבוצה $\{u_1 \dots u_k\} \cup \{v_j \mid j \notin \{i_1 \dots i_k\}\}$ פורשת.

מסקנה: יהיו A, B בסיסים אזי $|A| = |B|$.

מימד: יהי B בסיס $\dim_{\mathbb{F}}(V) = |B|$.

נ"ס (נוצר סופית): מ"ו V שמקיים $\exists v \in V^k . \text{span}(v) = V$.

משפט: V נ"ס $\Longleftarrow$ קיים בסיס ל־V.

מסקנה: יהי V נ"ס
- פחות מ־$\dim(V)$ וקטורים לא פורשים.
- יותר מ־$\dim(V)$ וקטורים ת"ל.

משפט 2 מתוך 3: יהי V מ"ו נ"ס ויהי $B \in V^k$, כל שניים מהשלושה שקולים
- B בת"ל.
- B פורשת.
- $\dim(V) = k$.

משפט: תהא V נ"ס, לכל $U \subseteq V$ תמ"ו מתקיים כי U נ"ס.

מסקנה: לכל $U \subseteq V$ תמ"ו מתקיים $\dim(U) \leq \dim(V)$.

משפט: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו אזי $U = W \iff (U \subseteq W) \wedge (\dim(U) = \dim(W))$.

סכום מרחבים וקטורים: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו אזי $U + W = \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$ תמ"ו של V.

משפט: אם $U = \text{span}(A)$, $W = \text{span}(B)$ אז $W + U = \text{span}(A \cup B)$.

מסקנה: אם $U, W, T \subseteq V$ תמ"ו אז $U, W \subseteq T \Longrightarrow U + W \subseteq T$.

משפט: אם $U \cap W = \{0\}$ אז לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U + W$.

סכום ישר: אם $U \cap W = \{0\}$ אז $U \oplus W = U + W$.

משפט האפיון של סכום ישר: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו התב"ש
- $U \oplus W$.
- לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U + W$.
- $\forall k \in U + W . \exists! \langle u, w \rangle \in U \times W . u + w = k$.

מסקנה: $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$.

משפט המימד הראשון: יהיו U, W תמ"ו אזי $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

קואורדינטות: יהי $b \in V^n$ בסיס ויהי $v \in V$ אזי $\iota\alpha \in \mathbb{F}^n . v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$.

סימון: $[v]_B = \iota\alpha \in \mathbb{F}^n . v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i$.

העתקת קואורדינטות: יהי B בסיס נגדיר $Q_B : V \to \mathbb{F}^{\dim(V)}$ כך $Q_B(v) = [v]_B$.

משפט:
- $Q_B^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i b_i$.
- $(Q(\alpha v) = \alpha Q(v)) \wedge (Q(v + w) = Q(v) + Q(w))$.
- $v_1 \dots v_k$ בת"ל $\iff$ $Q_B(v_1) \dots Q_B(v_k)$ בת"ל.
- $v \in \text{span}(v_1 \dots v_k) \iff Q_B(v) \in \text{span}(Q_B(v_1) \dots Q_B(v_k))$.

מרחב העמודות: $\mathcal{C}(A) = \text{span}(\{C_i(A) \mid i \in [n]\})$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}(A) = \text{span}(\{R_i(A) \mid i \in [m]\})$.

טענה: $\mathcal{C}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{F}^n\} = \text{Im}(T_A)$.

טענה: $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$, $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$.

משפט: $\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A))$.

דרגה: $\text{rank}(A) = \dim(\mathcal{C}(A))$.

מרחב האפסות: $\mathcal{N}(A) = \dim(\text{sols}(A))$.

טענה: $\text{rank}(A) \leq \min(n, m)$, $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$, $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

טענה: אם A הפיכה אזי $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$.

המשפט היסודי של הדירוג: יהיו $A,A'\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ש"ש

- $\text{sols}\left(A\right)=\text{sols}\left(A'\right)$.
- $\mathcal{R}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(A'\right)$.
- $\text{rank}\left(A\right)=\text{rank}\left(A'\right)$.

טענה: $\text{sols}\left(A\right)=\text{LD}\left(\left\{ C_{i}\left(A\right)\mid i\in\left[n\right]\right\} \right)$.

מסקנה: תהא A מטריצה מדורגת קנונית אזי אין איבר פותח בעמודה ה־i $\iff$ $C_{i}\left(A\right)\in\text{span}\left(C_{1}\left(A\right),\ldots,C_{i-1}\left(B\right)\right)$.

משפט: יהיו $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו A',B' המטריצות הקנוניות שלהם בהתאמה, התב"ש

- $A\sim B$.
- $A'=B'$.
- $\mathcal{R}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(B\right)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $\left(\text{rank}\left(A\right)=n\right)\iff\left(A\text{ הפיכה}\right)$.

משפט הדרגה והאפסות: $n=\text{rank}\left(A\right)+\mathcal{N}\left(A\right)$.

פונקציה מטריציונית: $f:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ שמקיימת $\exists A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).f=T_{A}$.

הגדרה: $\ker\left(T_{A}\right)=T_{A}^{-1}\left[\left\{ 0\right\} \right]=\text{sols}\left(A\right)$.

טענה: $\forall A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).T_{A}=T_{B}\iff A=B$.

טענה: T_{A} לינארית.

העתקה לינארית/טרנספורמציה לינארית (ט"ל): יהיו U,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $T:V\to U$ שמקיימת כי T לינארית.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל מתקיים $\left(T\left(0\right)=0\right)\wedge\left(T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}T\left(v_{i}\right)\right)$.

טענה: תהא $T:U\to W$ ט"ל ותהא $S:V\to U$ ט"ל אזי $T\circ S$ ט"ל.

משפט: תהא $T:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ אזי T לינארית $\iff$ T מטריציונית.

משפט: תהא $T_{A}:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ ט"ל אזי $C_{i}\left(A\right)=T\left(\delta_{i}\right)$.

טענה: $\text{Im}\left(T\right)$, $\ker\left(T\right)$ תמ"ו.

טענה: תהא T ט"ל אזי

- $\left\langle T\left(v_{1}\right)\ldots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\left\langle v_{1}\ldots v_{n}\right\rangle$ בת"ל.
- $\left\langle v_{1}\ldots v_{n}\right\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\left\langle T\left(v_{1}\right)\ldots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ פורשת את $\text{Im}\left(T\right)$.

למה: תהא T ט"ל אזי

- נניח כי T חח"ע, $\left\langle v_{1}\ldots v_{n}\right\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\left\langle T\left(v_{1}\right)\ldots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ בת"ל.
- נניח כי T על, $\left\langle v_{1}\ldots v_{n}\right\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\left\langle T\left(v_{1}\right)\ldots T\left(v_{n}\right)\right\rangle$ פורשת.

מסקנה: תהא T ט"ל הפיכה ויהי $\left\langle b_{1}\ldots b_{n}\right\rangle$ בסיס אזי $\left\langle T\left(b_{1}\right)\ldots T\left(b_{n}\right)\right\rangle$ בסיס.

איזומורפיזם בין מרחבים וקטורים: $T:V\to U$ ט"ל הפיכה.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל

- T חח"ע $\iff$ $\ker\left(T\right)=\left\{ 0\right\}$.
- T על $\iff$ $\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)=\dim\left(U\right)$.
- $\forall u\in\text{Im}\left(T\right).\forall v\in T^{-1}\left[\left\{ u\right\} \right].T^{-1}\left[\left\{ u\right\} \right]=v+\ker\left(T\right)$.

משפט המימד השני: תהא $T:V\to U$ ט"ל $\dim\left(V\right)=\dim\left(\ker\left(T\right)\right)+\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $T:V\to U$ ט"ל, כל שניים מהשלושה שקולים

- T חח"ע.
- T על.
- $\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

טענה: $T:V\to U$ איזומורפיזם $\Longleftarrow$ $\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

משפט: T איזומורפיזם $\iff$ T^{-1} איזומורפיזם.

משפט: לכל V מ"ו נ"ס מתקיים $V\cong\mathbb{F}^{\dim\left(V\right)}$.

מסקנה: יהיו V,W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $V\cong W\iff\dim\left(V\right)=\dim\left(W\right)$.

משפט: יהי $b\in V^{n}$ בסיס ויהי $c\in U^{n}$ אזי $T:V\to U$ המוגדרת $T\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[x\right]_{b}\right)_{i}\cdot c_{i}$ היא הט"ל היחידה שמקיימת $\forall i\in\left[n\right].T\left(b_{i}\right)=c_{i}$.

טענה: יהיו $T_1,T_2:V\to U$ ט"ל ויהי b פורשת את V אזי $T_1=T_2 \Longrightarrow \forall i\in[n].T_1(b_i)=T_2(b_i)$.

מרחב העתקות הלינאריות: $\text{Hom}(V,U)=\{T\in V\to U \mid T \text{ ט"ל}\}$.

טענה: $\text{Hom}(V,U)$ מ"ו מעל השדה של V,U.

הערה: $\forall T_1,T_2\in\text{Hom}(V,U).T_1\circ T_2\in\text{Hom}(V,U)$.

משפט: $\dim(\text{Hom}(V,U))=\dim(V)\cdot\dim(U)$.

טענה: יהיו b,c בסיסים של V,U בהתאמה לכן $\left\{T_{i,j}(b_k)=\begin{cases}c_j & i=k\\ 0 & else\end{cases}\middle| i,j\in[n]\right\}$ בסיס של $\text{Hom}(V,U)$.

סימון: $\text{Hom}(V)=\text{Hom}(V,V)$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}(V,U)$ ויהיו B,C בסיסים של V,U בהתאמה לכן $Q_C\circ T\circ Q_B^{-1}$ מטריציונית.

מטריצה מייצגת: המטריצה $[T]_C^B=A$ עבורה $Q_C\circ T\circ Q_B^{-1}=T_A$.

סימון: $[T]_B=[T]_B^B$.

מסקנה: $C_i\left([T]_C^B\right)=[T(B_i)]_C$.

מסקנה: $[T]_C^B\cdot[v]_B=[T(v)]_C$.

הטלה: יהיו $V=U\oplus W$ מ"ו אזי $P_{(U,W)}:V\to V$ המוגדרת $P_{(U,W)}(v)=\iota u\in U.\exists w\in W.u+w=v$.

טענה: $P_{(U,W)}$ ט"ל, $\text{Im}\left(P_{(U,W)}\right)=U$, $\ker\left(P_{(U,W)}\right)=W$, $P_{(U,W)}^2=P_{(U,W)}$.

הערה: $[T]_C^B\in M_{\dim(U)\times\dim(V)}(\mathbb{F})$.

משפט:

- $(Q_B)_{\restriction_{\ker(T)}}:\ker(T)\to\text{sols}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.
- $(Q_C)_{\restriction_{\text{Im}(T)}}:\text{Im}(T)\to\mathcal{C}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.

מסקנה: $\mathcal{N}\left([T]_C^B\right)=\dim(\ker(T))$, $\text{rank}\left([T]_C^B\right)=\dim(\text{Im}(T))$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}(V,U)$ אזי T הפיכה $\Longleftrightarrow$ $[T]_C^B$ הפיכה.

משפט: $T\in\text{Hom}(V,U)$, $S\in\text{Hom}(U,W)$ אז $[S\circ T]_D^B=[S]_D^C\cdot[T]_C^B$.

מסקנה: $\left([T]_C^B\right)^{-1}=\left[T^{-1}\right]_B^C$.

מטריצת שינוי קואורדינטות: $[Id_V]_C^B$.

הערה: $C_i\left([Id]_C^B\right)=[B_i]_C$.

מסקנה: $[T]_C^B=[Id]_C^E\cdot[T]_E^D\cdot[Id]_D^B$.

דמיון מטריצות: $\forall A,B\in M_n(\mathbb{F}).A\sim B\Longleftrightarrow\exists P\in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BP=A$.

משפט: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- $B\sim A$.
- $\forall T\in\text{Hom}(V,U).A=[T]_D^C\Longrightarrow\exists C',D'.B=[T]_{D'}^{C'}$.
- $\exists T\in\text{Hom}(V,U).([T]_C=A)\wedge([T]_D=B)$.

טענה: A,B דומות אז $\det(A)=\det(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $\det(T)=\det([T]_B)$.

עקבה: $\text{trace}(A)=\sum_{i=1}^n(A)_{i,i}$.

טענה: $\forall A,B\in M_n(\mathbb{F}).\text{trace}(AB)=\text{trace}(BA)$.

מסקנה: A,B דומות $\Longleftarrow$ $\text{trace}(A)=\text{trace}(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $\text{trace}(T)=\text{trace}([T]_B)$.

מטריצות מתאימות: $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).A\sim_{\text{green}}B\Longleftrightarrow\exists P,Q\in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BQ^{-1}=A$.

הערה: A,B דומות $\Longleftarrow$ A,B מתאימות.

טענה: $\text{rank}A=\text{rank}B\Longleftrightarrow$ A,B מתאימות.

הגדרה: $[*]_C^B:\text{Hom}(V,W)\to M_{\dim(V)\times\dim(W)}(\mathbb{F})$ כך $[*]_C^B(T)=[T]_C^B$.

משפט: $[*]_C^B$ איזומורפיזם.

אלגברה: $\langle V,+,\cdot,*\rangle$ שמקיים ($\langle V,+,\cdot\rangle$ מ"ו)$\wedge$($*:V\times V\to V$).

אלגברת מטריצות: המרחב $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עם פעולת כפל מטריצות.

אלגברת Hom: המרחב $\text{Hom}\left(V,W\right)$ עם פעולת ההרכבה.

איזומורפיזם בין אלגברות: $T:A\to B$ ט"ל הפיכה שמקיימת $\forall\alpha,\beta\in A.T\left(\alpha*\beta\right)=T\left(\alpha\right)*T\left(\beta\right)$.

משפט: אם $\left[*\right]_{B}:\text{Hom}\left(V\right)\to M_{\dim\left(V\right)}\left(\mathbb{F}\right)$ אז $\left[*\right]_{B}$ איזומורפיזם בין אלגברות.

מטריצת בלוקים:

$$\left(\begin{array}{ccc}A_{1,1} & \dots & A_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n}\end{array}\right)$$

הערה: מספר העמודות והשורות בין מטריצות צמודות חייב להיות שווה.

סימון:

$$\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}=\left(\begin{array}{ccc}A_{1,1} & \dots & A_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n}\end{array}\right)$$

כפל מטריצת בלוקים: $\left(AB\right)_{i,j}=\sum_{t=1}^{m}A_{i,t}B_{t,j}$.

מטריצת בלוקים ריבועית: מטריצת בלוקים כך שמקיימת $\forall i.A_{i,i}\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$.

מטריצת בלוקים משולשית עליונה: $\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\le\ell\\ 0 & else\end{cases}$.

מטריצת בלוקים משולשית תחתונה: $\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\ge\ell\\ 0 & else\end{cases}$.

מטריצת בלוקים אלכסונית: מטריצת בלוקים משולשית תחתונה ועליונה.

הגדרה: $\left(\text{Diag}\left(A_{1,1},\dots,A_{n,n}\right)\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,k} & k=\ell\\ 0 & else\end{cases}$.

משפט: אם $\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}$ משולשית אז $\det\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)=\prod_{i=1}^{n}\det\left(A_{i,i}\right)$.