קטע/אינטרוול: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי
- $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$.
- $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leq b\}$.
- $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x<b\}$.
- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$.
- $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$.
- $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\}$.
- $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$.
- $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq b\}$.
- $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

שדה סדור: שדה $\mathbb{F}$ ויחס סדר חזק $<$ על $\mathbb{F}$ המקיימים
- טריכוטומיה/לינאריות: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\,(x<y)\vee(x>y)\vee(x=y)$.
- קומפטביליות עם חיבור: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}.x<y\Longrightarrow x+z<y+z$.
- קומפטביליות עם כפל: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\forall z>0_{\mathbb{F}}.x<y\Longrightarrow x\cdot z<y\cdot z$.

שדה בעל תכונת ארכימדס: שדה $\mathbb{F}$ עבורו $\forall x\in\mathbb{F}.\exists n\in\mathbb{N}.x<\sum_{i=0}^{n}1$.

טענה: $\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ארכימדס.

הערך השלם/ערך שלם תחתון: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lfloor x\rfloor=[x]=\max\left(n\in\mathbb{Z}\mid n\leq x\right)$.

הערך השברי: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\{x\}=x-[x]$.

ערך שלם עליון: $\lceil x\rceil=\min\left(n\in\mathbb{Z}\mid x\leq n\right)$.

טענה: $\nexists q\in\mathbb{Q}.q^2=2$.

טענה: לא קיים $x\in\mathbb{Q}$ עבורו לכל $a\in\mathbb{Q}$ המקיים $a^2\leq 2$ ולכל $b\in\mathbb{Q}_+$ המקיים $b^2\geq 2$ מתקיים $a\leq x\leq b$.

חסם מלעיל: מספר $x\in\mathbb{R}$ המקיים $\forall y\in A.y\leq x$.

קבוצת החסמים מלעיל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A \text{ חסם מלעיל של } x\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\overline{B}_A\neq\varnothing$.

חסם מלרע: מספר $x\in\mathbb{R}$ המקיים $\forall y\in A.x\leq y$.

קבוצת החסמים מלרע: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\underline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A \text{ חסם מלרע של } x\}$.

קבוצה חסומה מלרע: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\underline{B}_A\neq\varnothing$.

קבוצה חסומה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה A חסומה מלעיל וכן A חסומה מלרע.

מקסימום: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $x\in A$ המקיים $\forall y\in A.y\leq x$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה ויהי $x\in A$ המקיים $\forall y\in A.y\leq x$ אזי $\max\left(A\right)=x$.

מינימום: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $x\in A$ המקיים $\forall y\in A.x\leq y$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה ויהי $x\in A$ המקיים $\forall y\in A.x\leq y$ אזי $\min\left(A\right)=x$.

אקסיומת השלמות: תהיינה $X,Y\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\{\varnothing\}$ עבורן $\forall x\in X.\forall y\in Y.x\leq y$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.\forall x\in X.\forall y\in Y.x\leq c\leq y$.

טענה: תהא $A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\{\varnothing\}$ עבורה $\overline{B}_A\neq\varnothing$ אזי $\min\left(\overline{B}_A\right)$ קיים.

מסקנה: תהא $A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\{\varnothing\}$ עבורה $\underline{B}_A\neq\varnothing$ אזי $\max\left(\underline{B}_A\right)$ קיים.

טענה: $\mathbb{R}$ הינו השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את $\mathbb{Q}$.

סופרמום/חסם עליון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\sup\left(A\right)=\min\left(\overline{B}_A\right)$.

אינפימום/חסם תחתון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(A\right)=\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\min\left(A\right)$ קיים אזי $\inf\left(A\right)=\min\left(A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\max\left(A\right)$ קיים אזי $\sup\left(A\right)=\max\left(A\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $a<b$ אזי $\inf\left((a,b)\right)=a$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $a<b$ אזי $\sup\left((a,b)\right)=b$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b\in\mathbb{R}$ חסם מלעיל של A התב"ש
- $b=\sup\left(A\right)$.
- $\forall d\in\overline{B}_A.b\leq d$.

- $\forall a\in\mathbb{R}.\left(\left(a<b\right)\implies\left(a\notin\overline{B}_{A}\right)\right)$.

מסקנה: תהא $A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\left\{ \varnothing\right\}$ חסומה מלעיל אזי $\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left(\sup\left(A\right)-\varepsilon<a\leq\sup\left(A\right)\right)$.

מסקנה: תהא $A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\left\{ \varnothing\right\}$ אזי $\left(b=\sup\left(A\right)\right)\iff\left(\left(\forall x\in A.x\leq b\right)\wedge\left(\forall\varepsilon>0.\exists x\in A.x>b-\varepsilon\right)\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\left\{ \varnothing\right\}$ חסומות אזי

- $\inf\left(A+B\right)=\inf\left(A\right)+\inf\left(B\right)$.
- $\sup\left(A+B\right)=\sup\left(A\right)+\sup\left(B\right)$.
- $\sup\left(-A\right)=-\inf\left(A\right)$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}_{+}$ אזי קיים $b\in\mathbb{R}_{+}$ עבורו $b^{2}=c$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}_{+}$ יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי קיים $b\in\mathbb{R}_{+}$ עבורו $b^{n}=c$.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי קבוצה $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהא $S\subseteq\mathbb{R}$ אזי (S צפופה ב־$\mathbb{R}$)$\iff$$\left(\forall a,b\in\mathbb{R}.\left(\left(a<b\right)\implies\left(\left(a,b\right)\cap S\neq\varnothing\right)\right)\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{Q}$ עבורם $a<b$ אזי $\left|\left(a,b\right)\cap\mathbb{Q}\right|=\aleph_{0}$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{Q}$ עבורם $a<b$ אזי $\exists r\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\left(a<r<b\right)$.

טענה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ עבורם $x<y$ אזי $\exists q\in\mathbb{Q}.\left(x<q<y\right)$.

מסקנה: $\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$.

מסקנה: לכל $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $a<b$ מתקיים כי $\left[a,b\right]\cap\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\left[a,b\right]$.

עצרת: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $n!=\begin{cases} 1 & n=0\\ \left(n-1\right)!\cdot n & \text{else} \end{cases}$.

בחר: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot\left(n-k\right)!}$.

זהות פסקל: יהיו $n,k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(a+b\right)^{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{i}b^{n-i}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left[n\right]=\left\{ 1\ldots n\right\}$.

למה: יהיו $a_{1}\ldots a_{n}\in\mathbb{R}$ עבורם $a_{i}\geq0$ לכל $i\in\left[n\right]$ וכן $\prod_{i=1}^{n}a_{i}=1$ אזי $\sum_{i=1}^{n}a_{i}\geq n$.

אי־שיוויון הממוצעים: יהיו $a_{1}\ldots a_{n}\in\mathbb{R}$ עבורם $a_{i}\geq0$ לכל $i\in\left[n\right]$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{i}}{n}\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_{i}}\geq\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_{i}}}$.

טענה: יהיו $a_{1}\ldots a_{n}\in\mathbb{R}$ עבורם $a_{i}\geq0$ לכל $i\in\left[n\right]$ אזי $\left(\forall i,j\in\left[n\right].a_{i}=a_{j}\right)\iff\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_{i}}{n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_{i}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_{i}}}\right)$.

אי־שיוויון ברנולי: יהי $x>-1$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(1+x\right)^{n}\geq1+nx$.

הערך המוחלט: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\left|x\right|=\begin{cases} x & x\geq0\\ -x & x<0 \end{cases}$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\left|a\right|\geq b\right)\iff\left(\left(b\leq a\right)\vee\left(a\leq-b\right)\right)$

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\left|a\right|\leq b\right)\iff\left(-b\leq a\leq b\right)$.

אי־שיוויון המשולש (אש"מ): יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\left|a+b\right|\leq\left|a\right|+\left|b\right|$.

אי־שיוויון המשולש המוכלל: יהיו $x_{1}\ldots x_{n}\in\mathbb{R}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^{n}x_{i}\right|\leq\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|$.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\left|a-b\right|\leq\left|a\right|+\left|b\right|$.

מסקנה: יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$ אזי $\left|x-y\right|\leq\left|x-z\right|+\left|z-y\right|$.

אי־שיוויון המשולש ההפוך: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\left|\left|a\right|-\left|b\right|\right|\leq\left|a-b\right|$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $\forall\varepsilon>0.\left|a-b\right|<\varepsilon$ אזי $a=b$.

טענה: יהי $r\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sum_{i=0}^{n}r^{i}=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

סדרה: פונקציה $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

סימון: תהא a סדרה אזי $a_{n}=a\left(n\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $a=\left(a_{n}\right)_{n=0}^{\infty}$.

הגדרה: תהא a_{n} סדרה אזי

- סדרה חיובית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}>0$.
- סדרה אי שלילית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}\geq0$.
- סדרה שלילית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}<0$.
- סדרה אי חיובית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}\leq0$.

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה אזי

- **עולה ממש**: $\forall n,m\in\mathbb{N}.\left(\left(n<m\right)\Longrightarrow\left(a_{n}<a_{m}\right)\right)$.
- **עולה**: $\forall n,m\in\mathbb{N}.\left(\left(n<m\right)\Longrightarrow\left(a_{n}\le a_{m}\right)\right)$.
- **יורדת ממש**: $\forall n,m\in\mathbb{N}.\left(\left(n<m\right)\Longrightarrow\left(a_{n}>a_{m}\right)\right)$.
- **יורדת**: $\forall n,m\in\mathbb{N}.\left(\left(n<m\right)\Longrightarrow\left(a_{n}\ge a_{m}\right)\right)$.

סדרה חסומה מלעיל: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.a_{n}<M$.

סדרה חסומה מלרע: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.M<a_{n}$.

סדרה חסומה: סדרה a באשר a חסומה מלרע וכן a חסומה מלעיל.

סדרה מתכנסת/גבול סופי: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_{n}-L\right|<\varepsilon$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_{n}=L$.

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה עבורה $\lim_{n\to\infty}a_{n}=L$ אזי $a_{n}\to L$.

טענה: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{n\to\infty}r=r$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

טענה: יהי $q\in\left(0,1\right)$ אזי $q^{n}\to0$.

טענה: יהי $c>0$ אזי $\sqrt[n]{c}\to1$.

טענה: $\sqrt[n]{n}\to1$.

טענה: יהי $\alpha\in\mathbb{Q}_{+}$ אזי $\frac{1}{n^{\alpha}}\to0$.

משפט יחידות הגבול: יהיו $L_{1},L_{2}\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה עבורה $\lim_{n\to\infty}a_{n}=L_{1}$ וכן $\lim_{n\to\infty}a_{n}=L_{2}$ אזי $L_{1}=L_{2}$.

משפט: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה עבורה $\lim_{n\to\infty}a_{n}=L$ אזי $\lim_{n\to\infty}\left|a_{n}\right|=\left|L\right|$.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_{n}=0\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\left|a_{n}\right|=0\right)$.

טענה: תהיינה a,b סדרות עבורן $\left|\left\{ n\in\mathbb{N}\mid a_{n}\ne b_{n}\right\} \right|\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}b_{n}=L\right)$.

טענה: תהא a סדרה ויהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}a_{n+k}=L\right)$.

סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה עבורה $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.M<a_{n}$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_{n}=\infty$.

סדרה מתבדרת למינוס אינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה עבורה $\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_{n}<-M$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_{n}=-\infty$.

טענה: יהי $a>1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a^{n}=\infty$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}n=\infty$.

טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_{n}=0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n}}=\infty$.

למה: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_{n}=L$ אזי a חסומה.

מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.

טענה: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\left|\left\{ n\in\mathbb{N}\mid a_{n}\notin\left(L-\varepsilon,L+\varepsilon\right)\right\} \right|\in\mathbb{N}\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}a_{n}=L\right)$.

למה: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_{n}=L$ אזי $\forall r\in\left(0,\left|L\right|\right).\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_{n}\right|>r$.

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה יורדת ממש עבורה $a_{n}\to L$ אזי $a_{n}\downarrow L$.

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה עולה ממש עבורה $a_{n}\to L$ אזי $a_{n}\uparrow L$.

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה יורדת עבורה $a_{n}\to L$ אזי $a_{n}\searrow L$.

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא a סדרה עולה עבורה $a_{n}\to L$ אזי $a_{n}\nearrow L$.

טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיימות סדרות $a,b:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ עבורן $a_{n}\searrow x$ וכן $b_{n}\nearrow x$.

טענה ייצוג עשרוני: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ וקיימת $a:\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}\to\left\{ 0,\ldots,9\right\}$ עבורם $x=n+\sum_{i=-\infty}^{-1}a_{i}\cdot10^{i}$.

שארית: יהיו $n,m,k\in\mathbb{N}$ ויהי $\ell\in\left\{ 0\ldots n\right\}$ עבורם $n=km+\ell$ אזי $m\%n=\ell$.

סימון פיתוח מחזורי אינסופי: יהיו $d_{1}\ldots d_{n}\in\left\{ 0\ldots9\right\}$ נגדיר $a:\mathbb{N}\to\left\{ d_{1}\ldots d_{n}\right\}$ כך $a\left(i\right)=d_{i\%n}$ אזי $a=\overline{d_{1}\ldots d_{n}}$.

טענה: יהי $q\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\exists n,k,\ell\in\mathbb{N}.\exists a_{1}\ldots a_{k},b_{1}\ldots b_{\ell}\in\left\{ 0\ldots9\right\} .\left(q=n.a_{1}\ldots a_{k}\overline{b_{1}\ldots b_{\ell}}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(q\in\mathbb{Q}\right)$.

משפט אוקלידס: $\mathbb{P}$ חסומה מלרע אך לא מלעיל.

סדרות אוקלידס־מולין: סדרה p עבורה $p_{1}\in\mathbb{P}$ וכן $p_{n}\in\left\{ p\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_{i}\right)\right\}$ לכל $n\in\mathbb{N}_{+}$.

משפט דריכלה: יהי $\theta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ אזי $\left|\left\{ \left\langle p,q\right\rangle \in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\;\middle|\;\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2}}\right\} \right|\ge\aleph_{0}$.

מספר מקורב רע: מספר $a\in\mathbb{R}$ עבורו לכל $p\in\mathbb{Q}$ ולכל $q\in\mathbb{N}$ עבורם $\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2}}$ מתקיים $\exists c\in\mathbb{R}.\frac{c}{q^{2}}<\left|\theta-\frac{p}{q}\right|$.

טענה חשבון גבולות: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ ותהיינה a,b סדרות המקיימות $a_{n}\to x$ וכן $b_{n}\to y$ אזי

- $a_n+b_n\to x+y$.
- $a_n\cdot b_n\to x\cdot y$.
- אם $y\neq 0$ וכן $\forall n\in\mathbb{N}.b_n\neq 0$ אזי $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{x}{y}$.

למה: יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהא d_n סדרה אי־שלילית עבורה $d_n\to L$ אזי $L\geq 0$.

טענה: תהא a סדרה אי שלילית המקיימת $a_n\to L$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[k]{a_n}\to\sqrt[k]{L}$.

סימון: תהיינה a,b סדרות עבורן $\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_n\leq b_n$ אזי $a\preccurlyeq b$.

סימון: תהיינה a,b סדרות עבורן $\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_n<b_n$ אזי $a\prec b$.

מונוטוניות גבולות: תהיינה a,b סדרות מתכנסות עבורן $a\preccurlyeq b$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}b_n$.

משפט הסנדוויץ': יהי $L\in\mathbb{R}$ ותהיינה a,b,c סדרות עבורן $a\preccurlyeq b$ וכן $b\preccurlyeq c$ וכן $a,c\to L$ אזי $b_n\to L$.

טענה: תהא a סדרה חסומה ותהא b סדרה עבורה $b\to 0$ אזי $a\cdot b\to 0$.

מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי $\frac{a}{n}\to 0$.

משפט: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי קיימת $b:\mathbb{N}\to B$ עבורה $b\to\sup(B)$.

מסקנה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי קיימת $b:\mathbb{N}\to B$ עבורה $b\to\inf(B)$.

טענה: תהיינה a,b סדרות עבורן $a\to\infty$ וכן $a\preccurlyeq b$ אזי $b\to\infty$.

טענה: תהיינה a,b סדרות עבורן $a\to-\infty$ וכן $b\preccurlyeq a$ אזי $b\to-\infty$.

מבחן השורש: תהא a סדרה אי שלילית עבורה קיים $\alpha\in[0,1)$ המקיים $a\prec\alpha^n$ אזי $a\to 0$.

מבחן השורש הגבולי: יהי $p\in\mathbb{R}$ ותהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n^{\frac{1}{n}}\to p$ אזי

- $(0\leq p<1)\Longrightarrow(a_n\to 0)$.
- $(p>1)\Longrightarrow(a_n\to\infty)$.

סימון: תהא a סדרה חסומה מלעיל אזי $\sup(a_n)=\sup(\operatorname{Im}(a))$.

סימון: תהא a סדרה חסומה מלרע אזי $\inf(a_n)=\inf(\operatorname{Im}(a))$.

משפט: תהא a סדרה אזי

- אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי $a_n\nearrow\sup(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי $a_n\nearrow\infty$.
- אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי $a_n\searrow\inf(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי $a_n\searrow-\infty$.

מבחן המנה הגבולי: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L$ אזי

- $(L<1)\Longrightarrow(a_n\to 0)$.
- $(L>1)\Longrightarrow(a_n\to\infty)$.

התכנסות צ'זארו: תהא a סדרה אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a_n סדרה המקיימת $a_n\to a$ במובן הרחב אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

משפט התכנסות ממוצע הנדסי: תהא a_n סדרה חיובית המקיימת $a_n\to a$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}a_i}\to a$.

משפט ד'אלאמבר: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to c$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{a_n}\to c$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $a\to L$ במובן הרחב ותהא $t\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=1}^n t_k\to\infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^n t_k a_k}{\sum_{k=1}^n t_k}\to L$.

משפט שטולץ: תהא a סדרה ותהא $b\uparrow\infty$ סדרה נניח כי $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\to L$ במובן הרחב אזי $\frac{a_n}{b_n}\to L$.

טענה: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in(2,3]$.

קבוע אוילר: $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $a_n\to\infty$ אזי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\to e$.

תת סדרה/סדרה חלקית (ת"ס): תהא a סדרה ותהא $n\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה אזי $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה של a אזי

- (a חסומה מלעיל)$\Longleftarrow$(b חסומה מלעיל).
- (a חסומה מלרע)$\Longleftarrow$(b חסומה מלרע).
- $(a\to L)\Longrightarrow(b\to L)$.
- (a מונוטונית)$\Longleftarrow$(b מונוטונית).

טענה: תהא a סדרה ללא מקסימום אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

טענה: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מונוטונית.

הלמה של קנטור על קטעים מקוננים: תהיינה a,b סדרות המקיימות $b-a\to 0$ וגם $\forall n\in\mathbb{N}.\left(a_n\le b_n\right)\wedge\left(\left[a_{n+1},b_{n+1}\right]\subseteq\left[a_n,b_n\right]\right)$ אזי $\left|\bigcap_{n=0}^{\infty}\left[a_n,b_n\right]\right|=1$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C}=[0,1]\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

סימון: $\mathbb{R}_\infty=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$.

גבול חלקי: תהא a סדרה אזי $x\in\mathbb{R}_\infty$ עבורו קיימת תת סדרה b עבורה $b\to x$ במובן הרחב.

סימון: תהא a סדרה אזי $\mathcal{P}(a)=\{L\in\mathbb{R}\mid$ גבול חלקי של a $L\}$, $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\{L\in\mathbb{R}_\infty\mid$ גבול חלקי של a $L\}$.

טענה: תהא a סדרה אזי

- (a אינה חסומה מלעיל)$\Longleftrightarrow$($\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$).
- (a אינה חסומה מלרע)$\Longleftrightarrow$($-\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$).

טענה: תהא a סדרה אזי $\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|>0$.

משפט: תהא a סדרה אזי $\left(L\in\mathcal{P}\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\left|\left\{a_n\mid\left|a_n-L\right|<\varepsilon\right\}\right|=\aleph_0\right)$.

מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי $\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\subseteq\left[\inf(a),\sup(a)\right]$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim\left(\sup(a)\right)=\sup\left(\mathcal{P}\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\overline{\lim}(a)=\lim\left(\sup(a)\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim\left(\inf(a)\right)=\inf\left(\mathcal{P}\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\underline{\lim}(a)=\lim\left(\inf(a)\right)$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow$($\left(\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|=1\right)\wedge\left(\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\right)$).

משפט: תהא a סדרה חסומה אזי $\min\left(\mathcal{P}\right),\max\left(\mathcal{P}\right)$ קיימים.

טענה: יהיו $b_1\ldots b_m:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ זרות בזוגות המקיימות $\left(\biguplus b_i=\mathbb{N}\right)\wedge\left(b_i\uparrow\infty\right)$ ותהא a סדרה אזי $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\bigcup_{i=1}^{m}\widehat{\mathcal{P}}\left(a_{b_i}\right)$.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.\left(x-\varepsilon,x+\varepsilon\right)\subseteq A$.

טענה: תהא $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ באשר A_i פתוחה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ פתוחה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות פתוחות אזי $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ פתוחה.

קבוצה סגורה: קבוצה $B\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\mathbb{R}\backslash B$ פתוחה.

טענה: תהא $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R})$ באשר B_i סגורה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$ סגורה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות סגורות אזי $\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ סגורה.

נקודת הצטברות: תהא $S\subseteq\mathbb{R}$ אזי $x\in\mathbb{R}$ המקיימת $\exists a\in\left(S\backslash\{x\}\right)^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n=x$.

טענה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- B קבוצה סגורה.
- $\forall a\in B^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n\in B$.
- $\{x\in\mathbb{R}\mid$ נקודת הצטברות של B $x\}\subseteq B$.

משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים $\mathcal{P}(a)$ קבוצה סגורה.

כמעט תמיד: פרידקט $P(n)$ המקיים $\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N.P(n)$.

שכיח: פרידקט $P(n)$ המקיים $\left|\{n\in\mathbb{N}\mid P(n)\}\right|=\aleph_0$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\iff\left(\limsup a=\liminf a\right)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in[-\infty,\infty]$ אזי

- $\left(\limsup a\le L\right)\Longrightarrow\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\le L\right)$.
- $\left(\limsup a\ge L\right)\Longrightarrow\left(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\ge L\right)$.
- $\left(\liminf a\ge L\right)\Longrightarrow\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\ge L\right)$.
- $\left(\liminf a\ge L\right)\Longrightarrow\left(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\le L\right)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in\mathbb{R}$ התב"ש

- $\limsup a=L$.

- $\forall\varepsilon>0.\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N.a_n<L+\varepsilon\right)\wedge\left(\forall\varepsilon>0.\forall N\in\mathbb{N}.\exists n\ge N.a_n>L-\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה a,b סדרות המקיימות $a_n\preccurlyeq b_n$ אזי $(\liminf a\le\liminf b)\wedge(\limsup a\le\limsup b)$.

סדרת קושי: סדרה a המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m,n\ge N.\left|a_m-a_n\right|<\varepsilon$.

למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow$(a סדרת קושי).

סכום אינסופי: יהי $k\in\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{i=k}^{\infty}a_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^{n}a_i$.

טור: תהא a סדרה אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$.

סימון: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור אזי $\sum a_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$.

סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרה אזי $S_n^a=\sum_{i=0}^{n}a_i$.

טור מתכנס: תהא a סדרה אזי $\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_i=L\right)\Longrightarrow\left(S_n^a\to L\right)$.

טור גאומטרי: יהי $a\neq0$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$.

משפט: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum_{n=0}^{\infty}ar^n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow\left(|r|<1\right)$.

הטור ההרמוני: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty$.

משפט: תהא a סדרה אזי ($\sum_{i=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)$\Longleftarrow\left(a_n\to0\right)$.

קריטריון קושי: יהי $\sum a_n$ טור אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m>N.\forall k\in\mathbb{N}.\left|\sum_{n=m}^{m+k}a_n\right|<\varepsilon\right)$.

חשבון טורים: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ טורים ויהי $\xi\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ אזי

- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}\xi a_n$ מתכנס).

הגדרה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור אזי

- טור חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n>0$.
- טור אי שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\ge0$.
- טור שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n<0$.
- טור אי חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\le0$.

טור מתכנס בהחלט: טור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ המקיים $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור מתכנס בהחלט אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס.

סימון: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים חיוביים עבורם ממקום מסויים $a_n\le b_n$ אזי $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$.

משפט ההשוואה: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים המקיימים $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$ אזי

- ($\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר).

מבחן ההשוואה הגבולי: יהיו a_n,b_n סדרות חיוביות המקיימות $\frac{a_n}{b_n}\to L$ במובן הרחב אזי

- $\left(L\in(0,\infty)\right)\Longrightarrow\left(\left(\sum b_n<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\sum a_n<\infty\right)\right)$.
- $\left(L=0\right)\Longrightarrow\left(\left(\sum b_n<\infty\right)\Longrightarrow\left(\sum a_n<\infty\right)\right)$.
- $\left(L=\infty\right)\Longrightarrow\left(\left(\sum b_n<\infty\right)\Longleftarrow\left(\sum a_n<\infty\right)\right)$.

מבחן השורש: יהי $\sum a_n$ טור אי שלילי (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $a_n^{\frac{1}{n}}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתכנס).

מבחן השורש הגבולי: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)<1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)>1\right)$.

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

- (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתכנס).
- (כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge1$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתבדר).

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\sup\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)<1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\inf\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)>1\right)$.

משפט העיבוי: תהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\iff$($\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $m\geq 2$ ותהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\iff$($\sum m^n a_{m^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum\frac{1}{n^x}$ מתכנס)$\iff$($x>1$).

משפט לייבניץ: תהא $a_n\searrow 0$ אזי $\sum\left(-1\right)^n a_n$ מתכנס.

טור מתכנס בתנאי: טור $\sum a_n$ מתכנס המקיים $\sum\left|a_n\right|$ מתבדר.

טענה: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=m}^{n}a_k\left(b_{k+1}-b_k\right)=\left(a_nb_{n+1}-a_mb_m\right)-\sum_{k=m+1}^{n}b_k\left(a_k-a_{k-1}\right)$.

התמרת אבל: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m\left(b_k-b_{k+1}\right)$.

קריטריון דריכלה: תהא $b\to 0$ סדרה מונוטונית ותהא a סדרה עבורה S_n^a חסומה אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

קריטריון אבל: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

משפט: $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}=\infty$.

משפט: יהי $\sum a_n=L$ טור ותהא $\underset{b_0=0}{b\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ עולה ממש אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}a_k=L$.

למה: תהא a סדרה ותהא $b\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש עבורה $b_0=0$ וכן $\left(a_i\right)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1}$ בעלי אותו סימן וגם $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}a_k=L$ אזי $\sum a_n=L$.

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתכנס ויהי $p\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)}=\sum a_n$.

סימון: תהא a_n סדרה אזי $a_n^-=\frac{\left|a_n\right|-a_n}{2}$.

סימון: תהא a_n סדרה אזי $a_n^+=\frac{\left|a_n\right|+a_n}{2}$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בהחלט)$\iff$(($\sum a_n^+$ מתכנס)$\wedge$($\sum a_n^-$ מתכנס)).

משפט: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט ויהי $p\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)}=\sum a_n$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בתנאי)$\Longrightarrow$($\sum a_n^+=\infty=\sum a_n^-$).

סימון: $\hat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\left\{-\infty,\infty\right\}$.

משפט רימן: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי אזי

- לכל $S\in\hat{\mathbb{R}}$ קיימת $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפיכה עבורה $\sum a_{\sigma(n)}=S$.
- קיימת $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפיכה עבורה $\sum a_{\sigma(n)}$ לא מתכנסת במובן הרחב.

משפט קושי: יהיו $p,q\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט אזי $\sum\sum a_{p(n)}b_{q(k)}=\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.

טור חזקות: תהא a_n סדרה ויהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\sum a_k\left(x-x_0\right)^k$.

משפט: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q\in\mathbb{R}$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס בהחלט עבור $x\in\left(-\left|q\right|,\left|q\right|\right)$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי $R\in\left[0,\infty\right]$ עבורו

- לכל $x\in\left(-R,R\right)$ מתקיים $\sum a_kx^k$ מתכנס בהחלט.
- לכל $x\notin\left[-R,R\right]$ מתקיים $\sum a_kx^k$ מתבדר.

משפט אבל: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי קיים רדיוס התכנסות.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס ההתכנסות R אזי $R=\frac{1}{\limsup\left(\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס ההתכנסות R אזי$\left(R=\infty\right)\Longrightarrow\left(\limsup\left(\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right)$.

הערה: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות בעל רדיוס ההתכנסות R אזי $\left(R=0\right)\Longrightarrow\left(\limsup\left(\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right)$.

מכפלת קושי: יהיו $\sum a_nx^n,\sum b_nx^n$ טורי חזקות אזי $\left(\sum a_nx^n\right)\left(\sum b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}x^n$.

טענה: יהיו $\sum a_nx^n,\sum b_nx^n$ טורי חזקות המתכנסים עבור $q\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}x^n$ מתכנס עבור q.

התכנסות צ'זארו: יהי $\sum a_n$ טור אזי $\left(C\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}S_i^a}{n}$.

טענה: יהי $\sum a_n$ טור אזי $\sum_{i=0}^{n-1}a_n\left(1-\frac{i}{n}\right)=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}S_i^a}{n}$.

פונקציה מונוטונית: תהא $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי

- עולה ממש: $\forall x,y\in\mathbb{R}.\left(x<y\right)\Longrightarrow\left(f\left(x\right)<f\left(y\right)\right)$.
- עולה: $\forall x,y\in\mathbb{R}.\left(x<y\right)\Longrightarrow\left(f\left(x\right)\leq f\left(y\right)\right)$.
- יורדת ממש: $\forall x,y\in\mathbb{R}.\left(x<y\right)\Longrightarrow\left(f\left(x\right)>f\left(y\right)\right)$.
- יורדת: $\forall x,y\in\mathbb{R}.\left(x<y\right)\Longrightarrow\left(f\left(x\right)\geq f\left(y\right)\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי x^n מונוטונית עולה ממש בקטע $[0,\infty)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(f\left(x\right)=x^n\right)\Longrightarrow\left(f^{-1}\left(x\right)=x^{\frac{1}{n}}\right)$.

טענה: יהיו $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ המקיימים $\frac{m}{n}=\frac{k}{\ell}$ אזי $\left(x^{m}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(x^{k}\right)^{\frac{1}{\ell}}$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהיינה $a,b\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימות $a_n,b_n\searrow b$ אזי $\lim\left(c^{a_n}\right)=\lim\left(c^{b_n}\right)$.

הגדרה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ יהי $b\in\mathbb{R}$ ותהא $b\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $b_n\searrow b$ אזי

- $x^{-n}=\frac{1}{x^{n}}$.
- $x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{m}\right)^{\frac{1}{n}}$.
- $a^{b}=\lim_{n\to\infty}a^{b_n}$.

פונקציית החזקה: יהי $\alpha>0$ נגדיר $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ כך $f\left(x\right)=x^{\alpha}$.

פונקציית החזקה: יהי $\alpha<0$ נגדיר $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ כך $f\left(x\right)=x^{\alpha}$.

שורש: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

משפט: יהיו $a,b,x,y\in\mathbb{R}$ אזי $\left(yx\right)^{a}=y^{a}x^{a}$.

משפט: יהיו $a,b,x\in\mathbb{R}$ אזי $\left(x^{a}\right)^{b}=x^{ab}$.

משפט: יהיו $a,b,x\in\mathbb{R}$ אזי $x^{a}x^{b}=x^{a+b}$.

טענה: יהי $x>1$ ויהיו $0<r<\ell$ אזי $x^{r}<x^{\ell}$.

טענה: יהי $0<x<1$ ויהיו $0<r<\ell$ אזי $x^{r}>x^{\ell}$.

הפונקציה המעריכית: יהי $0<\alpha\neq1$ נגדיר $f\in\left(0,\infty\right)^{\mathbb{R}}$ כך $f\left(x\right)=a^{x}$.

סינוס: נגדיר $\sin:[0,2\pi]\to[-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ממול הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

סינוס: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\sin\left(x+2\pi k\right)=\sin\left(x\right)$.

קוסינוס: נגדיר $\cos:[0,2\pi]\to[-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

קוסינוס: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\cos\left(x+2\pi k\right)=\cos\left(x\right)$.

טנגנס: נגדיר $\tan:\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ כך $\tan\left(x\right)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

קוטנגנס: נגדיר $\cot:\mathbb{R}\backslash\left\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ כך $\cot\left(x\right)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

טענה: זהויות טריגונומטריות.

הגדרה: $\arcsin=\sin^{-1}$.

הגדרה: $\arccos=\cos^{-1}$.

הגדרה: $\arctan=\tan^{-1}$.

הגדרה: $\mathrm{arccot}=\cot^{-1}$.

לוגריתם: יהי $a>0$ נסמן $f\left(x\right)=a^{x}$ אזי $f^{-1}=\log_{a}$.

סימון (הלוגריתם הטבעי): $\ln=\log_{e}$.

טענה: זהויות לוגרתמיות.

פונקציה מחזורית: פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורה קיים $a\in\mathbb{R}_{+}$ המקיים $f\left(x+a\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה זוגית: פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה אי־זוגית: פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

קטע מנוקב: יהי $\delta>0$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $I_{x,\delta}=\left(x-\delta,x+\delta\right)\backslash\left\{x\right\}$.

פונקציה מתכנסת בנקודה: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $a,b,x_0\in A$ עבורם $a<x_0<b$ ותהא $f:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_0,\delta}.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.
- היינה: $\forall y\in\left(a,b\right)^{\mathbb{N}}.\left(y_n\to x_0\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_n\right)\to L\right)$.

טענה: יהי $L\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,x_0\in A$ עבורם $a<x_0<b$ ותהא $f:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתכנסת ב־x_0 ל־L לפי קושי)$\Longleftrightarrow$(f מתכנסת ב־x_0 ל־L לפי היינה).

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,x_0\in A$ עבורם $a<x_0<b$ ותהא $f:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}$ המתכנסת ב־x_0 ל־L אזי $\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=L$.

פונקציה מתכנסת חד־צדדית מימין בנקודה: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $b,x_0\in A$ עבורם $x_0<b$ ותהא $f:\left(x_0,b\right)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(x_0,\min\left\{x_0+\delta,b\right\}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$.
- היינה: $\forall y\in\left(x_0,b\right)^{\mathbb{N}}.\left(y_n\downarrow x_0\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_n\right)\to L\right)$.

טענה: יהי $L\in\mathbb{R}$ ויהיו $b,x_0\in A$ עבורם $x_0<b$ ותהא $f:\left(x_0,b\right)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתכנסת חד־צדדית מימין ב־x_0 ל־L לפי קושי)$\Longleftrightarrow$(f מתכנסת חד־צדדית מימין ב־x_0 ל־L לפי היינה).

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $b,x_0\in A$ עבור $x_0<b$ ותהא $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ המתכנסת חד־צדדית מימין ב־x_0 ל־L אזי $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L$.

פונקציה מתכנסת חד־צדדית משמאל בנקודה: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $a,x_0\in A$ עבור $a<x_0$ ותהא $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in(\max\{x_0-\delta,a\},x_0).|f(x)-L|<\varepsilon$.
- היינה: $\forall y\in(a,x_0)^{\mathbb{N}}.(y_n\uparrow x_0)\implies(f(y_n)\to L)$.

טענה: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $a,x_0\in A$ עבור $a<x_0$ ותהא $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתכנסת חד־צדדית משמאל ב־x_0 ל־L לפי קושי)$\iff$(f מתכנסת חד־צדדית משמאל ב־x_0 ל־L לפי היינה).

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $a,x_0\in A$ עבור $a<x_0$ ותהא $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ המתכנסת חד־צדדית משמאל ב־x_0 ל־L אזי $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

פונקציה מתכנסת באינסוף: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $a,x_0\in A$ עבור $a<x_0$ ותהא $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\geq M.|f(x)-L|<\varepsilon$.
- היינה: $\forall y\in(a,\infty)^{\mathbb{N}}.(y_n\to\infty)\implies(f(y_n)\to L)$.

טענה: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $a,x_0\in A$ עבור $a<x_0$ ותהא $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתכנסת באינסוף ל־L לפי קושי)$\iff$(f מתכנסת באינסוף ל־L לפי היינה).

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $a,x_0\in A$ עבור $a<x_0$ ותהא $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ המתכנסת באינסוף ל־L אזי $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$.

פונקציה מתכנסת במינוס אינסוף: יהי $L\in\mathbb{R}$ יהיו $x_0,b\in A$ עבור $x_0<b$ ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\leq M.|f(x)-L|<\varepsilon$.
- היינה: $\forall y\in(a,x_0)^{\mathbb{N}}.(y_n\uparrow x_0)\implies(f(y_n)\to L)$.

טענה: יהי $L\in\mathbb{R}$ ויהיו $x_0,b\in A$ עבור $x_0<b$ ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתכנסת במינוס אינסוף ל־L לפי קושי)$\iff$(f מתכנסת במינוס אינסוף ל־L לפי היינה).

סימון: יהי $L\in\mathbb{R}$ ויהיו $x_0,b\in A$ עבור $x_0<b$ ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ המתכנסת במינוס אינסוף ל־L אזי $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$.

הערה: במקום פונקציה מתכנסת נאמר גם כי היא בעלת גבול סופי.

פונקציה מתבדרת לאינסוף בנקודה: יהיו $a,b,x_0\in A$ עבור $a<x_0<b$ ותהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_0,\delta}.f(x)>M$.
- היינה: $\forall y\in(a,b)^{\mathbb{N}}.(y_n\to x_0)\implies(f(y_n)\to\infty)$.

טענה: יהיו $a,b,x_0\in A$ עבור $a<x_0<b$ ותהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת לאינסוף ב־x_0 לפי קושי)$\iff$(f מתבדרת לאינסוף ב־x_0 לפי היינה).

סימון: יהיו $a,b,x_0\in A$ עבור $a<x_0<b$ ותהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ המתבדרת לאינסוף ב־x_0 אזי $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

פונקציה מתבדרת למינוס אינסוף בנקודה: יהיו $a,b,x_0\in A$ עבור $a<x_0<b$ ותהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_0,\delta}.f(x)<M$.
- היינה: $\forall y\in(a,b)^{\mathbb{N}}.(y_n\to x_0)\implies(f(y_n)\to-\infty)$.

טענה: יהיו $a,b,x_0\in A$ עבור $a<x_0<b$ ותהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת למינוס אינסוף ב־x_0 לפי קושי)$\iff$(f מתבדרת למינוס אינסוף ב־x_0 לפי היינה).

סימון: יהיו $a,b,x_0\in A$ עבור $a<x_0<b$ ותהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ המתבדרת למינוס אינסוף ב־x_0 אזי $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$.

פונקציה מתבדרת חד־צדדית מימין לאינסוף בנקודה: יהיו $b,x_0\in A$ עבור $x_0<b$ ותהא $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta>0.\forall x\in(x_0,\min\{x_0+\delta,b\}).f(x)>M$.
- היינה: $\forall y\in(x_0,b)^{\mathbb{N}}.(y_n\downarrow x_0)\implies(f(y_n)\to\infty)$.

טענה: יהיו $b,x_0\in A$ עבור $x_0<b$ ותהא $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת חד־צדדית מימין לאינסוף ב־x_0 לפי קושי)$\iff$(f מתבדרת חד־צדדית מימין לאינסוף ב־x_0 לפי היינה).

סימון: יהיו $b,x_0\in A$ עבור $x_0<b$ ותהא $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ המתבדרת חד־צדדית מימין לאינסוף ב־x_0 אזי $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$.

פונקציה מתבדרת חד־צדדית מימין למינוס אינסוף בנקודה: יהיו $b,x_0\in A$ עבור $x_0<b$ ותהא $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta>0.\forall x\in(x_0,\min\{x_0+\delta,b\}).f(x)<M$.
- היינה: $\forall y\in(x_0,b)^{\mathbb{N}}.(y_n\downarrow x_0)\implies(f(y_n)\to-\infty)$.

טענה: יהיו $b,x_0\in A$ עבור $x_0<b$ ותהא $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת חד־צדדית מימין למינוס אינסוף ב־x_0 לפי קושי)$\iff$(f מתבדרת חד־צדדית מימין למינוס אינסוף ב־x_0 לפי היינה).

סימון: יהיו $b,x_0\in A$ עבורם $x_0<b$ ותהא $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ המתבדרת חד־צדדית מימין למינוס אינסוף ב־x_0 אזי $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$.

פונקציה מתבדרת חד־צדדית משמאל לאינסוף בנקודה: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta>0.\forall x\in(\max\{x_0-\delta,a\},x_0).f(x)>M$.
- היינה: $\forall y\in(a,x_0)^{\mathbb{N}}.(y_n\uparrow x_0)\Longrightarrow(f(y_n)\to\infty)$.

טענה: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת חד־צדדית משמאל לאינסוף ב־x_0 לפי קושי)$\Longleftrightarrow$(f מתבדרת חד־צדדית משמאל לאינסוף ב־x_0 לפי היינה).

סימון: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ המתבדרת חד־צדדית משמאל לאינסוף ב־x_0 אזי $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$.

פונקציה מתבדרת חד־צדדית משמאל למינוס אינסוף בנקודה: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta>0.\forall x\in(\max\{x_0-\delta,a\},x_0).f(x)<M$.
- היינה: $\forall y\in(a,x_0)^{\mathbb{N}}.(y_n\uparrow x_0)\Longrightarrow(f(y_n)\to-\infty)$.

טענה: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת חד־צדדית משמאל למינוס אינסוף ב־x_0 לפי קושי)$\Longleftrightarrow$(f מתבדרת חד־צדדית משמאל למינוס אינסוף ב־x_0 לפי היינה).

סימון: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$ המתבדרת חד־צדדית משמאל למינוס אינסוף ב־x_0 אזי $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$.

פונקציה מתבדרת באינסוף לאינסוף: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\ge\delta.f(x)>M$.
- היינה: $\forall y\in(a,\infty)^{\mathbb{N}}.(y_n\to\infty)\Longrightarrow(f(y_n)\to\infty)$.

טענה: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת באינסוף לאינסוף לפי קושי)$\Longleftrightarrow$(f מתבדרת באינסוף לאינסוף לפי היינה).

סימון: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ המתבדרת באינסוף לאינסוף ב־x_0 אזי $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

פונקציה מתבדרת באינסוף למינוס אינסוף: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\ge\delta.f(x)<M$.
- היינה: $\forall y\in(a,\infty)^{\mathbb{N}}.(y_n\to\infty)\Longrightarrow(f(y_n)\to-\infty)$.

טענה: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת באינסוף למינוס אינסוף לפי קושי)$\Longleftrightarrow$(f מתבדרת באינסוף למינוס אינסוף לפי היינה).

סימון: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a<x_0$ ותהא $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ המתבדרת באינסוף למינוס אינסוף ב־x_0 אזי $\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$.

פונקציה מתבדרת במינוס אינסוף לאינסוף: יהיו $b,x_0\in A$ עבורם $x_0<b$ ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\le\delta.f(x)>M$.
- היינה: $\forall y\in(-\infty,b)^{\mathbb{N}}.(y_n\to-\infty)\Longrightarrow(f(y_n)\to\infty)$.

טענה: יהיו $b,x_0\in A$ עבורם $x_0<b$ ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת במינוס אינסוף לאינסוף לפי קושי)$\Longleftrightarrow$(f מתבדרת במינוס אינסוף לאינסוף לפי היינה).

סימון: יהיו $b,x_0\in A$ עבורם $x_0<b$ ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ המתבדרת במינוס אינסוף לאינסוף אזי $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$.

פונקציה מתבדרת במינוס אינסוף למינוס אינסוף: יהיו $b,x_0\in A$ עבורם $x_0<b$ ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ אזי

- קושי: $\forall M\in\mathbb{R}.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\le\delta.f(x)<M$.
- היינה: $\forall y\in(-\infty,b)^{\mathbb{N}}.(y_n\to-\infty)\Longrightarrow(f(y_n)\to-\infty)$.

טענה: יהיו $b,x_0\in A$ עבורם $x_0<b$ ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ אזי (f מתבדרת במינוס אינסוף למינוס אינסוף לפי קושי)$\Longleftrightarrow$(f מתבדרת במינוס אינסוף למינוס אינסוף לפי היינה).

סימון: יהיו $b,x_0\in A$ עבורם $x_0<b$ ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ המתבדרת במינוס אינסוף למינוס אינסוף אזי $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

הערה: במקום פונקציה מתבדרת לאינסוף או למינוס אינסוף נאמר גם כי היא בעלת גבול במובן הרחב או מתכנסת במובן הרחב.

סימון: יהי $L\in\hat{\mathbb{R}}$ יהי $a\in\hat{\mathbb{R}}$ ותהא $f:I\to\mathbb{R}$ עבורה $\lim_{x\to a}f(x)=L$ אזי $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}L$.

משפט: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע פתוח תהא $f:I\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in I$ אזי $((\lim_{x\to a}f(x)=L_1)\wedge(\lim_{x\to a}f(x)=L_2))\Longrightarrow(L_1=L_2)$.

טענה: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע פתוח יהי $L\in\hat{\mathbb{R}}$ תהא $f:I\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in I$ עבורו $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ וכן $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ אזי $\lim_{x\to a} f(x)=L$.

פונקציית דריכלה: נגדיר $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך $D(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

הגדרה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ באשר $a<b$ אזי

- $\widetilde{(a,b)}=[a,b]$.
- $\widetilde{(a,\infty)}=[a,\infty]$.
- $\widetilde{(-\infty,b)}=[-\infty,b]$.

טענה חשבון גבולות: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע פתוח יהי $a\in\tilde{I}$ ויהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ אזי

- $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)+\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)$.
- $\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a}g(x)\right)$.

למה: יהי $a\in\hat{\mathbb{R}}$ אזי $\lim_{x\to a} x=a$.

מסקנה: יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי $p\in\mathbb{R}[x]$ אזי $\lim_{x\to a}p(x)=p(a)$.

משפט: יהיו $I,J\subseteq\mathbb{R}$ קטעים פתוחים יהי $a\in\tilde{I}$ יהי $b\in\tilde{J}$ תהא $g:\tilde{J}\to\mathbb{R}$ ותהא $f:\tilde{I}\to\tilde{J}$ המקיימת $\lim_{x\to a}f(x)=b$ אזי $\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{x\to b}g(x)$.

פונקציות אלמנטריות בסיסיות: $\mathbb{R}[x]\cup\{\sin,\cos\}\cup\{x^a\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\left(\bigcup\{\{\log_a(x),a^x\}\mid a>0\}\right)$.

פונקציה אלמנטרית: תהיינה f,g פונקציות אלמנטריות בסיסיות אזי $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ באשר אחד מהבאים מתקיים

- $h=f\circ g$.
- $h=f+g$.
- $h=f\cdot g$.
- $h=f^{-1}$.

טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי $\forall a\in\mathrm{Dom}(f).\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

משפט: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $|\sin(x)|\le|x|$.

סימון: יהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ המקיימות $\forall x\in I.f(x)\le g(x)$ אזי $f(x)\preccurlyeq g(x)$.

מונוטוניות גבולות: יהי $a\in\hat{\mathbb{R}}$ ותהיינה $f,g:I\to\mathbb{R}$ המקיימות $f(x)\preccurlyeq g(x)$ אזי $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$.

כלל הסנדוויץ': יהי $L\in\hat{\mathbb{R}}$ יהי $a\in\hat{\mathbb{R}}$ ותהיינה $f,g,h:\mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x)\preccurlyeq g(x)\preccurlyeq h(x)$ אזי $\left(f(x),h(x)\xrightarrow[x\to a]{}L\right)\implies\left(g(x)\xrightarrow[x\to a]{}L\right)$.

למה: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי

- רציפה בנקודה: $a\in I$ עבורה $\lim_{x\to a}f(x)=f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית מימין בנקודה: $a\in I$ עבורה $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית משמאל בנקודה: $a\in I$ עבורה $\lim_{x\to a^-}f(x)=f(x_0)$.

פונקציה רציפה בצורת קושי: פונקציה $f:I\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall a\in I.\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

פונקציה רציפה בצורת היינה: פונקציה $f:I\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall a\in I.\forall x\in I^{\mathbb{N}}.\left((x_n\to a)\implies\left(\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)\right)\right)$.

משפט: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה בצורת קושי)$\iff$(f רציפה בצורת הנייה).

פתוחה יחסית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $B\subseteq A$ המקיימת $\forall x\in B.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A\subseteq B$.

משפט: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על I)$\iff$(לכל $B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה $f^{-1}(B)$ פתוחה יחסית ל־I).

טענה: תהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ותהא $c\in(a,b)$ אזי (f רציפה על c)$\iff$(($f_{\restriction_{(a,c]}}$ רציפה על c)$\wedge$($f_{\restriction_{[c,b)}}$ רציפה על c)).

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $C(I)=\{f:I\to\mathbb{R}\mid f \text{ רציפה על } I\}$.

טענה: תהא $f\in C((a,b))$ רציפה מונוטונית עולה

- ($f[(a,b)]$ חסומה מלעיל)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^-}f(x)=\sup f[(a,b)]$).
- ($f[(a,b)]$ אינה חסומה מלעיל)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$).
- ($f[(a,b)]$ חסומה מלרע)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^-}f(x)=\inf f[(a,b)]$).
- ($f[(a,b)]$ חסומה אינה מלרע)$\Longleftarrow$($\lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty$).

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה על a המקיימת $f(a)>0$ אזי קיימת סביבה I של a עבורה $\forall x\in I.f(x)>0$.

מסקנה: תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפות על a המקיימות $f(a)>g(a)$ אזי קיימת סביבה I של a עבורה $\forall x\in I.f(x)>g(x)$.

טענה: יהיו $f,g\in C\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left(\forall q\in\mathbb{Q}.f\left(q\right)=g\left(q\right)\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

נקודת אי־רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $a\in I$ המקיימת

- סליקה: $\lim_{x\to a}f\left(x\right)\neq f\left(a\right)$.
- סוג ראשון/קפיצה: $\lim_{x\to a^{-}}f\left(x\right)\neq\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right)$.
- סוג שני: $\left(\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right)\right)$ לא קיים $\vee\left(\lim_{x\to a^{-}}f\left(x\right)\right)$ לא קיים.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\iff$($\lim f\left(y_{n}\right)$ קיים וסופי) $\Longrightarrow\left(y_{n}\to a\right)$.$\left(\forall y\in\mathbb{N}^{I}\right.$.

פונקציית רימן: נגדיר $R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך $R\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \exists p,q\in\mathbb{Z}.\left(\gcd\left(p,q\right)=1\right)\wedge\left(x=\frac{p}{q}\right)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $R\left(x\right)=R\left(x+1\right)$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a}R\left(x\right)=0$.

טענה חשבון רציפות: יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ רציפות על a אזי $f+g,f\cdot g,f^{g}$ רציפות על a.

טענה: תהא $f:A\to B$ רציפה על a וכן $g:B\to C$ רציפה על $f\left(a\right)$ אזי $g\circ f$ רציפה על a.

מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה ותהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\lim_{x\to a}g\left(x\right)\right)$.

פונקציה רציונאלית: יהיו $p,q\in\mathbb{R}\left[x\right]$ אזי $\frac{p}{q}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\forall x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי כמות נקודות האי־רציפות לכל היותר בת מנייה.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\forall x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)\Longrightarrow\left(\exists x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=f\left(x_{0}\right)\right)$.

משפט ויירשטראס הראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

משפט ויירשטראס השני: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)$ קיימים.

משפט ערך הביניים: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\forall y\in\left(\min\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right),\max\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right)\right).\exists c\in\left(a,b\right).f\left(c\right)=y$.

למה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$ אזי $\exists\zeta\in\left[a,b\right].f\left(\zeta\right)=0$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\left(\left[a,b\right]\right)=\left[\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)\right]$.

קטע מוכלל: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x,y\in A.\forall\lambda\in\left[0,1\right].\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\in A$.

למה: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ חח״ע אזי f מונוטונית ממש.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\wedge\left(f^{-1}\in C\left(f\left(I\right)\right)\right)$.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\iff\left(f\in C\left(I\right)\right)$.

מסקנה: יהי $a>0$ אזי $x^{a},a^{x}\in C\left(\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $a_{n}\to a>0$ סדרה חיובית וכן $b_{n}\to b$ סדרה אזי $a_{n}^{b_{n}}\to a^{b}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ ויהי $p\in\mathbb{R}_{n}\left[x\right]\backslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ אזי $\exists\zeta\in\mathbb{R}.p\left(\zeta\right)=0$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{ I_{n}\right\} _{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_{n}$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_{0}}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_{n}$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $\left[a,b\right]$ קומפקטית.

פונקציה רציפה במידה שווה (במ״ש): $f\in\mathbb{R}^{A}$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A.\forall y\in\left(x-\delta,x+\delta\right).\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{A}$ רציפה במ״ש אזי f רציפה.

תנאי ליפשיץ: תהא $f\in\mathbb{R}^{A}$ עבורה $\exists M>0.\forall x,y\in A.\left|\frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{x-y}\right|<M$ אזי f רציפה במ״ש.

משפט קנטור: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f רציפה במ״ש על $\left[a,b\right]$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{A}$ רציפה במ״ש על $\left(a,b\right],\left[c,d\right)$ אזי f רציפה במ״ש על $\left(a,d\right)$.

פרה־קומפקטיות: תהא $D\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^{D}$ רציפה במ״ש אזי $\forall x\in D^{\mathbb{N}}.\left(\lim_{n\to\infty}\in\mathbb{R}\right)\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f\left(x_{n}\right)\in\mathbb{R}\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right]\right)$ אזי (f רציפה במ״ש)$\iff\left(\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right)\right)$ אזי (f רציפה במ״ש)$\iff\left(\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right),\lim_{x\to b^{-}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[a,\infty\right)\right)$ המקיימת $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי f רציפה במ״ש על $\left[a,\infty\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ רציפה במ״ש אזי f חסומה.

מודולוס הרציפות: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\omega_{f}\left(\delta\right)=\sup\left\{ \left|f\left(x_{1}\right)-f\left(x_{2}\right)\right|\mid\left(x_{1},x_{2}\in I\right)\wedge\left(\left|x_{1}-x_{2}\right|<\delta\right)\right\}$.

גזירות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי

- נגזרת בנקודה: תהא $x_{0}\in I$ אזי $f'\left(x_{0}\right)=\lim_{x\to x_{0}}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)}{x-x_{0}}$.
- נגזרת חד צדדית מימין בנקודה: תהא $x_{0}\in I$ אזי $f'_{+}\left(x_{0}\right)=\lim_{x\to x_{0}^{+}}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)}{x-x_{0}}$.

- נגזרת חד צדדית משמאל בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$ אזי $f'(x_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

נגזרת: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $f':I\to\mathbb{R}$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\frac{df}{dx}(x)=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$.

טענה: יהי חלקיק ותהיינה $x,v\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי $x'(t)=v(t)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in\tilde{I}$ אזי (f גזירה בנקודה x_0)$\Longrightarrow$(f רציפה בנקודה x_0).

קירוב בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I$ אזי $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]\backslash\mathbb{R}_{n-1}[x]$ המקיימת $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

סדר הקירוב: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ויהי $p(x)$ קירוב בנקודה x_0 אזי $\deg(p)$.

דיפרנציאבילית בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $x_0\in I$ עבורה (f רציפה על x_0)$\wedge$(קיים קירוב מסדר ראשון של f בנקודה x_0).

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I$ אזי (f דיפרנציאבילית בנקודה x_0)$\Longleftrightarrow$(f גזירה בנקודה x_0).

חשבון גזירות: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ גזירות בנקודה x_0 אזי

- $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.
- $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
- $(g(x_0)\neq0)\Longrightarrow\left(\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right)$.

משפט: תהא $x_0\in I$ ותהא $f\in C(I)$ מונוטונית חזק גזירה על $f^{-1}(y_0)$ אזי $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

מסקנה: $\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$.

מסקנה: $(e^x)'=e^x$.

מסקנה: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $(x^r)'=rx^{r-1}$.

מסקנה: $\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

כלל השרשרת: תהא $x_0\in I$ תהא $f\in C(I)$ גזירה על x_0 וכן $g\in C(f(I))$ גזירה על $f(x_0)$ אזי $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

הגדרה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $f^{(0)}=f$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$.

הפרש דיסקרטי: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $(\Delta f)(x)=f(x+1)-f(x)$.

הגדרה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $\Delta^{(0)}f=\Delta f$.

הגדרה: יהי $k\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $\Delta^{(k+1)}f=\Delta\left(\Delta^{(k)}f\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: $f:I\to\mathbb{R}$ גזירה עבורה f' רציפה.

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $C^0(I)=C(I)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $C^n(I)=\{f\in C^{n-1}(I)\mid$ f גזירה ברציפות$\}$.

פונקציות חלקות: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $C^\infty(I)=\bigcap_{n=0}^{\infty}C^n(I)$.

כלל לייבניץ: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהיינה $f,g:I\to\mathbb{R}$ גזירות אזי $(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$.

נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי

- מקסימום: $x_0\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f(x)\le f(x_0)$.
- מינימום: $x_0\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f(x_0)\le f(x)$.

משפט פרמה: תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) ותהא $x_0\in(a,b)$ נקודת קיצון אזי $f'(x_0)=0$.

משפט רול: תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) המקיימת $f(a)=f(b)$ אזי $\exists c\in(a,b).f'(c)=0$.

משפט לגרנז': תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) אזי $\exists c\in(a,b).f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה אזי (f' חסומה)$\Longrightarrow$(f רציפה במ"ש).

טענה: $\forall x>0.e^x>1+x$.

טענה: $\forall x,y\in\mathbb{R}.|\sin(x)-\sin(y)|\le|x-y|$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f'(x)=0$ אזי $\exists a\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f(x)=a$.

מסקנה: תהיינה $g,h\in\mathbb{R}^I$ המקיימות $g'=h'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.g=h+c$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $f=f'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.f(x)=e^x$.

משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה $f,g\in C([a,b])$ גזירות על (a,b) אזי $\exists x_0\in(a,b).\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה אזי

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'(x)>0$ אזי f עולה ממש.

- אם לכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) < 0$ אזי f יורדת ממש.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה פעמיים על $x_0 \in I$ עבורו $f'(x_0) = 0$ אזי
- אם $f''(x_0) > 0$ אזי x_0 מינימום מקומי של f.
- אם $f''(x_0) < 0$ אזי x_0 מקסימום מקומי של f.

משפט: תהא $f \in C([a,b])$ גזירה על (a,b) המקיימת $\lim_{x\to a^+} f'(x) \in \mathbb{R}$ אזי $f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$.

טענה: תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות ויהי $x_0 \in [a,b]$ עבורו $f'(x_0) > 0$ אזי $\exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). f'(x) > 0$.

למה: תהא $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ גזירה אזי
- אם $f'_+(a) < 0$ אזי a לא מינימום מקומי
- אם $f'_-(b) > 0$ אזי b לא מקסימום מקומי.

משפט דרבו: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה אזי $\forall y \in (\min(f'(a), f'(b)), \max(f'(a), f'(b))). \exists c \in (a,b). f'(c) = y$.

כלל לופיטל: תהיינה $f,g \in \mathbb{R}^I$ גזירות ותהא $x \in \tilde{I}$ עבורה $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ מתכנס במובן הרחב אזי
- $(\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.
- $(\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.

אי־שיוויון יאנג: יהיו $x,y > 0$ ויהיו $p,q > 0$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$.

אי־שיוויון הולדר: יהיו $x,y \in \mathbb{R}^n$ ויהיו $p,q > 0$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

אי־שיוויון מינקובסקי: יהיו $x,y \in \mathbb{R}^n$ ויהיו $p,q > 0$ המקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי
$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא $f,g : I \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in \tilde{I}$ אזי
- אם $\exists c > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). |f(x)| \leq c|g(x)|$ אזי $f \in O(g)$. אינטואיטיבית $f \leq g$
- אם $g \in O(f)$ אזי $f \in \Omega(g)$. אינטואיטיבית $f \geq g$
- אם $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ אזי $f \in o(g)$. אינטואיטיבית $f < g$
- אם $g \in o(f)$ אזי $f \in \omega(g)$. אינטואיטיבית $f > g$
- אם $f \in \Omega(g)$ וכן $f \in O(g)$ אזי $f \in \Theta(g)$. אינטואיטיבית $f = g$
- אם $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ אזי $f \sim g$. אינטואיטיבית $f = g$ בדיוק של קבועים

למה: יהי $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ תהיינה $f,g \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I$ עבורה $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} c$ אזי $f \in \Theta(g)$.

מזדהה עד סדר: יהי $a \in I$ אזי $f,g : I \to \mathbb{R}$ גזירות n פעמים על a עבורן $\forall k \in \{0 \ldots n\}. f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$.

טענה: יהי $x_0 \in (a,b)$ ותהיינה $f,g \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ המזדהות עד סדר n על x_0 אזי $f - g \in o((x - x_0)^n)$.

מסקנה: תהא $h \in \mathbb{R}^I$ רציפה על x_0 וכן $h \in o((x - x_0)^n)$ אזי h גזירה n פעמים על x_0 וכן $h^{(k)}(x_0) = 0$.

פולינום טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $p \in \mathbb{R}_n[x] \backslash \mathbb{R}_{n-1}[x]$ שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

למה: יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $\left((x - x_0)^k\right)^{(j)}(x_0) = \left\{\begin{matrix} j! & j=k \\ 0 & \text{else} \end{matrix}\right.$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי פולינום הטיילור הוא $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$.

שארית: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

משפט פאנו: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x) \in o(|x - x_0|^n)$.

למה: תהא $g \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים המקיימת $\forall k \in \{0 \ldots n\}. g^{(k)}(x_0) = 0$ אזי
$\forall x \in (a,b). \exists c \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0)). g(x) = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$.

משפט השארית של לגרנז': תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי
$\forall x \in (a,b). \exists c \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0)). R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f \in C^\infty((a,b))$ אזי $\forall x \in (a,b). \left(\exists M \in \mathbb{R}. \forall k \in \mathbb{N}. \left|f^{(k)}(x)\right| < M\right) \Longrightarrow \left(R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$.

מסקנה: תהא $f \in C^\infty((a,b))$ עבורה $\forall x \in (a,b). R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אזי $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$.

מסקנה: תהא $f \in C^\infty((a,b))$ ותהא a סדרה המקיימת $\forall x \in (a,b). \left|f^{(m)}(x)\right| < a_m$ אזי
$\forall c \in \mathbb{R}. \left(\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{m!} c^m = 0\right) \Longrightarrow \left(\forall x \in [x_0 - c, x_0 + c]. f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k\right)$.

מסקנה: $\left(\cos(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \wedge \left(\sin(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \wedge \left(e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\right)$.

מסקנה: $e\notin\mathbb{Q}$.

משפט השארית של קושי: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי

$\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$.

מסקנה: יהי $|x|<1$ אזי $\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}((a,b))$ המקיימת $\forall k\in\{0\dots n\}.f^{(k)}(x_0)=0$ וכן $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ אזי

- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי x_0 אינה נקודת קיצון של f.
- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי
  - אם $f^{(n+1)}(x_0)>0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.
  - אם $f^{(n+1)}(x_0)<0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.

פונקציה קמורה: $f\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in[0,1].f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$.

פונקציה קעורה: $f\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in[0,1].f(\alpha x+(1-\alpha)y)\geq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$.

נקודת פיתול: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי x_0 המקיימת (f קעורה מאחד מצדדיה)$\wedge$(f קמורה מאחד מצדדיה).

משפט שלושת המיתרים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ קמורה אזי לכל $x_1<x_2<x_3$ מתקיים $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה פעמיים אזי

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)>0$ אזי f קמורה.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)<0$ אזי f קעורה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $f\in C((a,b))$.