

פולינום: יהי \mathbb{F} שדה ויהיו $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ אזי $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$.

שוויון פולינומים: יהיו $f(x) = \sum a_i x^i, g(x) = \sum b_i x^i$ פולינומים אזי $(f = g) \iff (\forall i. a_i = b_i)$.

חיבור פולינומים: יהיו $f(x) = \sum a_i x^i, g(x) = \sum b_i x^i$ פולינומים אזי $(f + g)(x) = \sum (a_i + b_i) x^i$.

כפל פולינומים: יהיו $f(x) = \sum a_i x^i, g(x) = \sum b_i x^i$ פולינומים אזי $(fg)(x) = \sum_k \left(\sum_{m=0}^k a_m b_{k-m} \right) x^k$.

הגדרה: יהי \mathbb{F} שדה אזי $\mathbb{F}[x] = \{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{F} \}$.

משפט: $(\mathbb{F}[x], +, \cdot)$ חוג $(\mathbb{F}[x], \cdot)$ מעל \mathbb{F} .

מחלק: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ אזי $g \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ עבורו $gh = f$ עבור $h \in \mathbb{F}[x]$.

סימון: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $g \in \mathbb{F}[x]$ מחלק אזי $(g \mid f) \wedge (f : g)$.

דרגה: יהי $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ פולינום אזי $\deg \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) = \begin{cases} -\infty & f = 0 \\ \max \{k \mid a_k \neq 0\} & \text{else} \end{cases}$.

למה: יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ אזי $(\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)) \wedge (\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\})$.

מסקנה: יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ אזי $(g \mid f) \implies (\deg(g) \leq \deg(f))$.

מסקנה: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ אזי $(f \in \mathbb{F} \setminus \{0\}) \iff \left(\frac{1}{f} \in \mathbb{F}[x] \right)$.

תחום שלמות: חוג קומוטטיבי R המקיים $\forall a, b \in R \setminus \{0\}. ab \neq 0$.

משפט: יהי \mathbb{F} שדה אזי $\mathbb{F}[x]$ תחום שלמות.

משפט: יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ עבורם $\deg(g) \leq \deg(f)$ אזי $\exists! q, r \in \mathbb{F}[x]. (f = gq + r) \wedge (\deg(r) \leq \deg(g))$.

שארית: יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ אזי $r \in \mathbb{F}[x]$ עבורו $(f = gq + r) \wedge (\deg(r) \leq \deg(g))$.

מנה חלקית: יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ אזי $q \in \mathbb{F}[x]$ עבורו $(f = gq + r) \wedge (\deg(r) \leq \deg(g))$.

הערה: אם $r = 0$ אזי במקום מנה חלקית נאמר מנה שלמה.

אידיאל: יהי R חוג קומוטטיבי אזי $I \subseteq R$ המקיים $\forall a \in I. (\forall b \in I. a + b \in I) \wedge (\forall c \in R. ca \in I)$.

האידיאל הנוצר: יהיו $f_1 \dots f_n \in R$ אזי $\langle f_1 \dots f_n \rangle = \{ \sum_{i=1}^n f_i g_i \mid g_1 \dots g_n \in R \}$.

טענה: יהי R חוג קומוטטיבי ויהיו $f_1 \dots f_n \in R$ אזי $\langle f_1 \dots f_n \rangle$ אידיאל.

למה: יהיו $f_1 \dots f_n \in R$ ויהי $I \subseteq R$ אידיאל המקיים $f_1, \dots, f_n \in I$ אזי $\langle f_1 \dots f_n \rangle \subseteq I$.

אידיאל ראשי: אידיאל $I \subseteq R$ המקיים $\exists f \in R. I = \langle f \rangle$.

תחום ראשי: תחום שלמות R עבורו כל אידיאל ראשי.

משפט: יהי $I \subseteq \mathbb{F}[x]$ אידיאל אזי I ראשי.

מחלק משותף: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי $g \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ המקיים $\forall i. g \mid f_i$.

מחלק משותף מקסימלי: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\max_{\deg} \{g \mid \forall i. (g \mid f_i)\}$.

משפט: מחלק משותף מקסימלי קיים ויחיד עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי המחלק המשותף המקסימלי הינו $\gcd(f_1 \dots f_n)$.

טענה: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ יהי g מחלק משותף אזי $g \mid \gcd(f_1 \dots f_n)$.

משפט: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\gcd(f_1 \dots f_n) = \sum_{i=1}^n h_i f_i$ עבור $h_1 \dots h_n \in \mathbb{F}[x]$.

אלגוריתם אוקלידס: יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ עבורם $f = pg + r$ וכן $r \neq 0$ אזי $\gcd(f, g) = \gcd(g, r)$.

פולינומים זרים: $f, g \in \mathbb{F}[x]$ המקיימים $\gcd(f, g) = 1$.

מסקנה: יהיו $f, g, h \in \mathbb{F}[x]$ אזי $(h \mid g) \implies (h \mid fg) \wedge (\gcd(f, h) = 1) \implies (h \neq 0)$.

הפיך: יהי R תחום שלמות אזי $u \in R \setminus \{0\}$ המקיים $u \mid 1$.

הגדרה: יהי R תחום שלמות אזי $R^* = \{u \in R \mid (u \mid 1)\}$.

אי-פריק (א"פ): $p \in R \setminus R^*$ המקיים $\forall a, b \in R. (p = ab) \implies (a \in R^*) \vee (b \in R^*)$.

ראשוני: $p \in R \setminus \{0\}$ המקיים $\forall a, b \in R. (p \mid ab) \implies (p \mid a) \vee (p \mid b)$.

למה: יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ א"פ אזי p ראשוני.

חברים/שקולים: $f, g \in R$ המקיימים $\exists u \in R^*. fu = g$.

טענה: יהיו $f, g \in R$ אזי (f, g) חברים $\iff (f \mid g) \wedge (g \mid f)$.

משפט: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ אזי קיימים יחידים $p_1 \dots p_n \in \mathbb{F}[x]$ א"פ עבורם $\prod p_i = f$.

כפולה משותפת: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי $g \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ המקיים $\forall i. f_i \mid g$.

כפולה משותפת מינימלית: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\min_{\deg} \{g \mid \forall i. (f_i \mid g)\}$.

משפט: כפולה משותפת מינימלית קיימת ויחידה עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי הכפולה המשותפת המינימלית הינה $\text{lcm}(f_1 \dots f_n)$.

טענה: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ יהי g כפולה משותפת אזי $\text{lcm}(f_1 \dots f_n) \mid g$.

שורש: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $f \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\alpha \in \mathbb{F}$ המקיים $f(\alpha) = 0$.

משפט בז'ור: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$

• נניח כי $f(x) = p(x)(x - \alpha) + r(x)$ אזי $f(\alpha) = r(\alpha)$

• $(\alpha \text{ שורש של } f) \iff (f \mid (x - \alpha))$.

ריבוי שורש: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ אזי $\left\{ k \in \mathbb{N} \mid ((x - \alpha)^k \mid f) \right\}$.

משפט: יהי $f \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ ויהיו $r_1 \dots r_n \in \mathbb{F}$ ריבוי שורשים שונים אזי $\sum_{i=1}^n r_i \leq \deg(f)$.

מסקנה: יהי \mathbb{F} שדה אינסופי עבורו $f(\alpha) = g(\alpha) \forall \alpha \in \mathbb{F}$ אזי $f = g$.

שדה סגור אלגברית: שדה \mathbb{F} המקיים $f(\alpha) = 0 \exists \alpha \in \mathbb{F} \forall f \in \mathbb{F}_{\geq 1}[x]$.

המשפט היסודי של האלגברה: \mathbb{C} שדה סגור אלגברית.

משפט: יהי $f \in \mathbb{R}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$ אזי $(f(\alpha) = 0) \iff (f(\bar{\alpha}) = 0)$.

מסקנה: יהי $f \in \mathbb{R}[x]$ אזי קיימים $p_1 \dots p_n \in \mathbb{R}[x]$ לינאריים וכן $q_1 \dots q_m \in \mathbb{R}[x]$ ממעלה שנייה ללא שורש ממשי המקיימים

$$f = \prod p_i \prod q_i$$

משפט: יהי $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ המקיים $\gcd(a_0 \dots a_n) = 1$ וכן $a_n a_0 \neq 0$ ויהי $\alpha = \frac{p}{q}$ עבור $\gcd(p, q) = 1$

• $(f(\alpha) = 0) \implies (p \mid a_0) \wedge (q \mid a_n)$

• $(\alpha \neq 1) \implies ((p - q) \mid f(1))$

• $(\alpha \neq -1) \implies ((p + q) \mid f(-1))$

קריטריון איזונשטיין: יהי $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ המקיים $\gcd(a_0 \dots a_n) = 1$ וכן $a_n a_0 \neq 0$ ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו

$$(\gcd(a_n, p) = 1) \wedge (\forall 0 \leq i \leq n-1. p \mid a_i) \wedge (p^2 \nmid a_0)$$

נגזרת: יהי $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ אזי $f' = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$.

סימון: נגדיר $\mathcal{D} : \mathbb{F}[x] \rightarrow \mathbb{F}[x]$ כך $\mathcal{D}(f) = f'$.

טענה: $(\mathcal{D}(fg) = g\mathcal{D}(f) + f\mathcal{D}(g)) \wedge (\mathcal{D}(1) = 0)$.

שורש פשוט: שורש שהריבוי שלו 1.

שורש מרובה: שורש שהריבוי שלו גדול מ-1.

משפט: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ שורש אזי $(\alpha \text{ שורש מרובה}) \iff (\alpha \text{ שורש של } f')$.

מאפיין שדה: יהי \mathbb{F} שדה אזי $\text{char}(\mathbb{F}) = \min \{m \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1 = 0\}$ ואם אינו מוגדר אזי $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$.

משפט: יהי \mathbb{F} שדה המקיים $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ אזי $(\alpha \text{ שורש מריבוי } r \text{ של } f) \iff (\alpha \text{ שורש מריבוי } r-1 \text{ של } f')$.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי הצורה הקנונית היא $A_{\text{can}}^{\mathbb{F}}$.

אופרטור לינארי/loop closed: $\varphi \in \text{Hom}(L)$.

loop open: $\varphi \in \text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

סימון: $\text{GL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid |A| \neq 0\}$.

מטריצות דומות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $B = C^{-1}AC$ $\exists C \in \text{GL}(n, \mathbb{F})$.

ערך עצמי (ע"ע): יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $\varphi(v) = \lambda v$ $\exists v \in L \setminus \{0\}$.

הספקטרום: יהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\{\lambda \in \mathbb{F} \mid \lambda \text{ ע"ע של } A\} = \text{Spec}_{\mathbb{F}}(A)$.

וקטור עצמי (ו"ע): יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $0 \neq v \in V$ עבורו $\varphi(v) = \lambda v$ $\exists \lambda \in \mathbb{F}$.

תת מרחב עצמי (מ"ע): יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע אזי $L_{\lambda} = \{v \in L \mid \varphi(v) = \lambda v\}$.

למה: $(L_{\lambda} = \ker(\varphi - \lambda I)) \wedge (L_{\lambda} \subseteq L)$ תמ"ז.

בסיס עצמי: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי בסיס \mathcal{B} המורכב מוקטורים עצמיים של φ .

העתקה לכסינה: $\varphi \in \text{Hom}(L)$ עבורה קיים בסיס \mathcal{B} המקיים $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ אלכסונית.

משפט: יהי L מ"ז נ"ס ויהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $(\varphi \text{ ניתן ללכסון}) \iff (\text{קיים בסיס עצמי ל-} L)$.

הערה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה אזי A_{can} צורה אלכסונית.

למה: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שונים אזי $\bigoplus_{i=1}^n L_{\lambda_i}$.

מסקנה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ בעל $\lambda_1, \dots, \lambda_{\dim(L)}$ ע"ע שונים אזי φ ניתן ללכסון.

פולינום אופייני: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A(x) = \det(xI - A)$

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A \in \mathbb{F}[x]$

למה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ ויהיו $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ בסיסים אזי $p_{[\varphi]_{\mathcal{B}_1}}(x) = p_{[\varphi]_{\mathcal{B}_2}}(x)$

פולינום אופייני: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ ויהי \mathcal{B} בסיס אזי $p_\varphi(x) = p_{[\varphi]_{\mathcal{B}}}(x)$

פולינום מתוקן: $\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ עבורו $a_n = 1$

משפט: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי p_φ פולינום מתוקן $(\deg(p_\varphi) = \dim(L)) \wedge$

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ עבורו $p_A = \sum_{i=0}^n a_i x^i$

$$\bullet a_{n-1} = -\text{trace}(A)$$

$$\bullet a_0 = (-1)^n \det(A)$$

למה: תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $(p_A = p_{A^t}) \wedge (p_{AB} = p_{BA})$

מסקנה: תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ אזי $(\lambda \in \text{Spec}(A)) \iff (p_A(\lambda) = 0)$

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ יהי $x \in \mathbb{F}^n$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ אזי $(x \in \ker(\lambda I - A)) \iff (\lambda \text{ ע"ע של } x)$

חיבור מרוכב: יהי L מ"ז מעל \mathbb{R} ויהיו $a, b, c, d \in L$ אזי $\langle a, b \rangle +_{\mathbb{C}} \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$

כפל מרוכב: יהי L מ"ז מעל \mathbb{R} ויהיו $a, b, c, d \in L$ אזי $\langle a, b \rangle \cdot_{\mathbb{C}} \langle c, d \rangle = \langle ac - bd, ad + bc \rangle$

מירכוב: יהי L מ"ז מעל \mathbb{R} אזי $L_{\mathbb{C}} = \langle L^2, +_{\mathbb{C}}, *_{\mathbb{C}} \rangle$

סימון: יהי $\langle a, b \rangle \in L_{\mathbb{C}}$ אזי $a + ib = \langle a, b \rangle$

טענה: יהי L מ"ז מעל \mathbb{R} אזי $L_{\mathbb{C}}$ מ"ז מעל \mathbb{C}

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $\alpha + i\beta$ ע"ע עבור ו"ע $u + iv$ אזי $(Au = \alpha u - \beta v) \wedge (Av = \beta u + \alpha v)$

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ לכסינה מעל \mathbb{C} באשר $A_{\text{can}}^{\mathbb{C}} = \text{Diag}(\lambda_1 \dots \lambda_m, \alpha_1 + i\beta_1 \dots \alpha_\ell + i\beta_\ell)$

$$A_{\text{can}}^{\mathbb{R}} = \text{Diag}\left(\lambda_1 \dots \lambda_m, \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \alpha_\ell & \beta_\ell \\ -\beta_\ell & \alpha_\ell \end{pmatrix}\right)$$

מסקנה: תהא $\varphi \in \text{Hom}(L)$ לכסינה מעל \mathbb{C} עם ו"ע $u_1 + iv_1, \dots, u_\ell + iv_\ell$ אזי $u_1 \dots u_\ell, v_1 \dots v_\ell$ בסיס קנוני מעל \mathbb{R}

ריבוי גאומטרי: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_g(\lambda) = \dim(L_\lambda)$

ריבוי אלגברי: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_a(\lambda) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid ((x - \lambda)^n \mid f_A(x))\}$

למה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_g(\lambda) \leq r_a(\lambda)$

מסקנה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $(\varphi \text{ לכסין מעל } \mathbb{F}) \iff (p_\varphi(x) \text{ מתפרק לגורמים לינאריים}) \wedge (\text{לכל ע"ע } (r_g(\lambda) = r_a(\lambda)))$

מסקנה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ לכסין ויהיו $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ע"ע אזי בצורה הקנונית כל λ_i מופיע $r_a(\lambda)$ פעמים.

מסקנה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ לכסין אזי הצורה האלכסונית יחידה עד כדי תמורת האיברים על האלכסון.

הגדרה: יהי $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ותהא $A \in M_m(\mathbb{F})$ אזי $p(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$

למה: יהי \mathcal{B} בסיס של L ויהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $[f(\varphi)]_{\mathcal{B}} = f([\varphi]_{\mathcal{B}})$

פולינום מינימלי: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $m_\varphi = \min_{\deg}(p \in \mathbb{F}[x] \mid p(\varphi) = 0)$

הערה: הפולינום המינימלי הינו מתוקן.

משפט: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $m_\varphi(x)$ קיים ויחיד.

משפט: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ ויהי $p \in \mathbb{F}[x]$ המקיים $p(\varphi) = 0$ אזי $m_\varphi \mid p$

טענה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $\{p \in \mathbb{F}[x] \mid p(\varphi) = 0\}$ אידיאל של $\mathbb{F}[x]$

מסקנה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $\langle m_\varphi \rangle = \{p \in \mathbb{F}[x] \mid p(\varphi) = 0\}$

משפט קיילי המילטון: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A(A) = 0$

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $m_A \mid p_A$

למה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $m_\varphi(\lambda) = 0$

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A \mid m_A^n$

משפט הפירוק הפרימרי: תהא $\varphi \in \text{Hom}(L)$ ויהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ זרים אזי

$$\ker((f \circ g)(\varphi)) = \ker(f(\varphi)) \oplus \ker(g(\varphi))$$

מסקנה: תהא $\varphi \in \text{Hom}(L)$ ויהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ זרים בזוגות אזי $\ker(\prod f_i(\varphi)) = \bigoplus \ker(f_i(\varphi))$

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ והיו $\lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_k$ כל הע"ע אזי A לכסינה $\iff (m_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i))$.

למה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה עבורה $p_A(x) = \prod (x - \lambda_i)$ והי $g \in \mathbb{F}[x]$ אזי $p_{g(A)}(x) = \prod (x - g(\lambda_i))$.

הגדרה: תהא $G(x)$ אנליטית עבורה $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס בתחום $|x| < R$ אזי $G(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$.

למה: תהא $G(x)$ אנליטית עבורה $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס בתחום $|x| < R$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה עם ע"ע $\lambda_1 \dots \lambda_n$ המקיימים $\forall i \in [n]. |\lambda_i| < R$

• הטור $G(A)$ מתכנס.

• $\text{Spec}(F(A)) = \{F(\lambda) \mid \lambda \in \text{Spec}(A)\}$.

• $(A_{\text{can}} = C^{-1}AC) \implies (F(A)_{\text{can}} = C^{-1}F(A)C = F(A_{\text{can}}))$.

לכסון סימולטני: $\varphi, \psi \in \text{Hom}(L)$ לכסינות המקיימות קיים בסיס B עבורו $[\varphi]_B, [\psi]_B$ אלכסוניות.

למה: תהא A מטריצת בלוקים אלכסונית לכסינה אזי כל בלוק לכסין.

משפט: יהיו $\varphi, \psi \in \text{Hom}(L)$ לכסינות אזי (φ, ψ) לכסינות סימולטניות $\iff (\varphi\psi = \psi\varphi)$.

תת מרחב אינווריאנטי/שמור: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי תמ"ז $M \subseteq L$ המקיים $\varphi(M) \subseteq M$.

מסקנה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ והי $M \subseteq L$ תת מרחב אינווריאנטי אזי $\varphi|_M$ ט"ל.

למה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $\{0\}, L, \ker(\varphi), \text{Im}(\varphi)$ אינווריאנטים.

משפט: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ והי λ ע"ע אזי L_λ אינווריאנטי.

למה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ והי M אינווריאנטי אזי קיים בסיס B עבורה $[\varphi]_B = \begin{pmatrix} [\varphi|_M]_B & P \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

משפט: יהי $L = \bigoplus_{i=1}^k L_i$ אינווריאנטים אזי קיים בסיס $B_1 \dots B_k$ עבורו $[\varphi]_B = \text{Diag} \left([\varphi|_{L_1}]_{B_1}, \dots, [\varphi|_{L_k}]_{B_k} \right)$.

מטריצה דו אלכסונית: $A \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

תיבת/בלוק ג'ורדן: יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ אזי $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F})$

צורת/מטריצת ג'ורדן: יהיו $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{F}$ וכן $k_1 \dots k_n$ אזי $\text{Diag}(J_{k_1}(\lambda_1) \dots J_{k_n}(\lambda_n))$

משפט ג'ורדן: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ עבורו $p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ אזי קיים בסיס B עבורו $[\varphi]_B$ מטריצת ג'ורדן.

טענה: צורת ג'ורדן מוגדרת באופן יחיד כדי תמורת תיבות ג'ורדן.

הערה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ בעלת צורת ג'ורדן אזי A_{can} צורת ג'ורדן.

מסקנה: יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A, B) דומות $\iff (A_{\text{can}} = B_{\text{can}})$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי A^t דומה אל A .

דרגת נילפוטנטיות: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\eta(A) = \min(n \in \mathbb{N} \mid A^n = 0)$

טענה: יהי $n \geq 2$ אזי $(J_n(\lambda))$ אינה לכסינה $\wedge (\eta(J_n(\lambda)) = n)$.

מסקנה: יהי $n \geq 2$ אזי $m_{J_n(\lambda)}(x) = (x - \lambda)^n = p_{J_n(\lambda)}(x)$

מרחב עצמי מוכלל: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ והי μ ע"ע אזי $L_\mu^{(k)} = \ker(\varphi - \mu I)^k$

למה: $L_\mu = L_\mu^{(1)} \subseteq \dots \subseteq L_\mu^{(r_g(\lambda))} = L$

למה: $L_\mu^{(i)}$ אינווריאנטי ביחס אל φ .

למה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\dim(L_\mu^{(k)}) \leq r_a(\mu)$

למה: נניח כי $p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)^{k_i}$ עבור $\lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_n$ אזי $L = \bigoplus_{i=1}^n L_{\lambda_i}^{(k_i)}$

בלתי תלוייה ביחס לתת מרחב: יהי תמ"ז $M \subseteq L$ אזי $v_1 \dots v_k \in L$ המקיימת $(\sum \alpha_i v_i \in M \implies \alpha = 0)$ $\forall \alpha \in \mathbb{F}^k$.

קו-בסיס: יהי תמ"ז $M \subseteq L$ אזי $\{A \subseteq L \mid M \text{ בלתי תלוייה ביחס אל } A\}$ $\max_{|A|}$

טענה: יהי תמ"ז $M \subseteq L$ עם בסיס B אזי קו-בסיס C הוא השלמה לבסיס של L .

למה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ והי μ ע"ע יהי $k \in \mathbb{N}_+$ והי $e_1 \dots e_m$ קו-בסיס של $L_\mu^{(k)}$ ביחס אל $L_\mu^{(k-1)}$

• $(\varphi - \mu I)(e_1) \dots (\varphi - \mu I)(e_m) \in L_\mu^{(k-1)}$

• $L_\mu^{(k-2)} \subseteq \text{בלתי תלויים ביחס אל } (\varphi - \mu I)(e_1) \dots (\varphi - \mu I)(e_m)$

למה: תהא $\varphi \in \text{Hom}(L)$ עבורה $[\varphi]_B = \text{Diag}(I(\lambda_1) \dots I(\lambda_k))$ באשר $I(\lambda_i) = \text{Diag}(J_{k_1^i}(\lambda_i) \dots J_{k_{n_i}^i}(\lambda_i))$

• כל הע"ע של φ הם $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

$$r_a(\lambda_i) = \sum_{j=1}^{n_i} k_j^i$$

$$r_g(\lambda_i) = n_i$$

$$\max(k_1^i, \dots, k_{n_i}^i)$$

הריבוי של λ_i בפולינום המינימלי הוא

$$|\{j \mid k_j^i \geq r\}| = \dim(\ker((T - \lambda_i I)^r)) - \dim(\ker((T - \lambda_i I)^{r-1}))$$

$$J_n(a+ib, a-ib)_{\text{can}}^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} & \ddots & \\ & & \ddots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & & & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{2k \times 2k}$$

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ וכן $a, b \in \mathbb{R}$ אזי

$$J_n(\mu)^m = \begin{pmatrix} \mu^m & n\mu^{m-1} & \binom{m}{2}\mu^{m-2} & & \\ & \mu^m & & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \binom{m}{2}\mu^{m-2} \\ & & & \mu^m & m\mu^{m-1} \\ & & & & \mu^m \end{pmatrix}$$

למה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ וכן $\mu \in \mathbb{F}$ אזי

$$J_n(\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & -\mu^{-2} & \mu^{-3} & & \\ & \mu^{-1} & -\mu^{-2} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mu^{-3} \\ & & & \mu^{-1} & -\mu^{-2} \\ & & & & \mu^{-1} \end{pmatrix}$$

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ וכן $\mu \neq 0$ אזי

$$\exp(J_n(\mu)) = e^\mu \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 1 & \frac{1}{1!} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{2!} \\ & & & 1 & \frac{1}{1!} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ וכן $\mu \in \mathbb{F}$ אזי

מכפלה פנימית ממשית (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $L^2 \rightarrow \mathbb{R} : (\cdot, \cdot)$ המקיימת

$$\forall a, b \in L. (a, b) = (b, a) \text{ סימטריות:}$$

$$\forall a, b, c \in L. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. (\alpha a + \beta b, c) = \alpha (a, c) + \beta (b, c) \text{ דו-לינאריות:}$$

$$\forall a \in L. (a, a) \geq 0 \text{ חיוביות:}$$

$$\forall a \in L. ((a, a) = 0) \iff (a = 0) \text{ חיוביות ממש:}$$

מכפלה פנימית מרוכבת (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $L^2 \rightarrow \mathbb{C} : (\cdot, \cdot)$ המקיימת

$$\forall a, b \in L. (a, b) = \overline{(b, a)} \text{ הרמיטיות:}$$

$$\forall a, b, c \in L. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. (\alpha a + \beta b, c) = \alpha (a, c) + \beta (b, c) \text{ לינאריות:}$$

$$\forall a \in L. (a, a) \in \mathbb{R}_+ \text{ חיוביות:}$$

$$\forall a \in L. ((a, a) = 0) \iff (a = 0) \text{ חיוביות ממש:}$$

מרחב אוקלידי: $(L, +, *, (\cdot, \cdot))$ באשר $(L, +, *)$ מ"ו מעל $(\mathbb{R}, (\cdot, \cdot))$ מכפלה פנימית ממשית.

מרחב אוניטרי: $(L, +, *, (\cdot, \cdot))$ באשר $(L, +, *)$ מ"ו מעל $(\mathbb{C}, (\cdot, \cdot))$ מכפלה פנימית מרוכבת.

מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ): $(\text{מרחב אוניטרי}) \vee (\text{מרחב אוקלידי}).$

מימוש: יהי $\langle L, +, \cdot \rangle$ מרחב אוניטרי אזי $\langle L_{\mathbb{R}}, +, \cdot \rangle$

משפט: יהי L מרחב אוניטרי אזי $(L_{\mathbb{R}}, +, *)$ מ"ו מעל \mathbb{R} $(a, b)_{\mathbb{R}} = \text{Re}(a, b)$ על $L_{\mathbb{R}}$.

למה: יהי L מרחב אוניטרי אזי $\dim_{\mathbb{R}}(L_{\mathbb{R}}) = 2 \dim_{\mathbb{C}}(L)$

$$(a, b)_{\text{st}} = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i} \text{ נגדיר } a, b \in \mathbb{C}^n$$

$$(A, B)_{\text{st}} = \text{trace}(A^t \overline{B}) \text{ נגדיר } A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$$

$$(f, g)_{\text{st}} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \overline{g(x)} dx \text{ נגדיר } f, g \in C_{\mathbb{C}}([\alpha, \beta])$$

משפט קושי שוורץ: יהי L ממ"פ ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a, b)^2 \leq (a, a) \cdot (b, b)$

$$(a, b)^2 = (a, a) \cdot (b, b) \iff (a \in \text{span}(b)) \text{ יהיו } a, b \in L$$

$$\|a\| = \sqrt{(a, a)} \text{ יהי } a \in L$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|} \text{ יהיו } a, b \in L \setminus \{0\} \text{ עבורה } \alpha \in [0, \pi]$$

$$\widehat{ab} \text{ יהיו } a, b \in L \setminus \{0\} \text{ הזווית בין } a, b$$

$$\text{dist}(a, b) = \|a - b\| \text{ יהיו } a, b \in L$$

למה: יהי L ממ"פ יהיו $a, b \in L$ ויהי λ סקלר

- $(\|a\| \geq 0) \wedge ((\|a\| = 0) \iff (a = 0))$.
- $\|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\|a\| - \|b\| \leq \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $a, b \in L \setminus \{0\}$

- $-1 \leq \cos(\widehat{ab}) \leq 1$.
- $(\cos(\widehat{ab}) = 1) \iff (\exists t > 0. b = ta)$.
- $(\cos(\widehat{ab}) = -1) \iff (\exists t < 0. b = ta)$.
- **וקטורים ניצבים/אורתוגונליים (א"ג):** $a, b \in L$ המקיימים $(a, b) = 0$.

סימון: יהיו a, b ניצבים אזי $a \perp b$.

משפט פיתגורס: יהיו $a, b \in L$ אזי $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \iff a \perp b$.

למה: יהי L ממ"פ ויהיו $a, b, c \in L$

- סימטריות: $\text{dist}(a, b) = \text{dist}(b, a)$.
- חיוביות: $\text{dist}(a, b) \geq 0$.
- חיוביות ממש: $(\text{dist}(a, b) = 0) \iff (a = b)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\text{dist}(a, b) \leq \text{dist}(a, c) + \text{dist}(c, b)$.

שחזור מכפלה פנימית מנורמה: יהי L ממ"פ ויהיו $a, b \in L$

- L מרחב אוקלידי אזי $(a, b) = \frac{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}{4}$.
- L מרחב אוניטרי אזי $(a, b) = \frac{\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2}{4} + i \frac{\|a+ib\|^2 - \|a-ib\|^2}{4}$.

מרחב בעל נורמה: יהי L מ"ז נ"ס אזי $v : L \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת

- $(v(a) \geq 0) \wedge ((v(a) = 0) \iff (a = 0))$.
- $v(\lambda a) = |\lambda| \cdot v(a)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $v(a + b) \leq v(a) + v(b)$.

טענה: יהי L ממ"פ אזי L מרחב בעל נורמה.

שיוויון המקבילית: נורמה v המקיימת $\forall a, b \in L. v(a + b)^2 + v(a - b)^2 = 2(v(a)^2 + v(b)^2)$

משפט: יהי L מרחב בעל נורמה v אזי $(v$ מקיימת שיוויון המקבילית) $\iff (v$ משרה מכפלה פנימית).

טענה: מעל $C([\alpha, \beta])$ הנורמה $\|f\| = \max_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x)|$ אינה מושרתת ממכפלה פנימית.

מטריצת גראם: יהי L ממ"פ ויהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי $G(a_1 \dots a_k) \in M_k(\mathbb{C})$ כך $(G(a_1 \dots a_k))_{i,j} = (a_i, a_j)$.

מטריצה הרמיטית: $A \in M_n(\mathbb{C})$ המקיימת $A^t = \overline{A}$.

טענה: יהי L ממ"פ ויהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי $G(a_1 \dots a_k)^t = \overline{G(a_1 \dots a_k)}$.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי $G(a_1 \dots a_k)^t = G(a_1 \dots a_k)$.

משפט: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי $(a_1 \dots a_k)$ בת"ל $\iff (\det(G(a_1 \dots a_k)) \neq 0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{B} \subseteq L$ בסיס אזי $\det G(\mathcal{B}) \neq 0$.

וקטורים אורתונורמלים (א"נ): $a_1 \dots a_n \in L$ המקיימים $(a_i, a_j) = \delta_{i,j}$.

מסקנה: יהיו $a_1 \dots a_n \in L$ אורתונורמלים אזי $G(a_1 \dots a_n) = I_n$.

מסקנה: יהיו $a_1 \dots a_n \in L$ אורתונורמליים אזי $a_1 \dots a_n$ בת"ל.

משפט: יהי \mathcal{B} בסיס ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a, b) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ([a]_{\mathcal{B}})_i \overline{([b]_{\mathcal{B}})_j} (B_i, B_j)$.

מסקנה: יהי \mathcal{B} בסיס ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a, b) = [a]_{\mathcal{B}}^t G(\mathcal{B}) \overline{[b]_{\mathcal{B}}}$.

משפט: יהיו \mathcal{B}, \mathcal{D} בסיסים ותהא C מטריצת מעבר בין הבסיסים אזי $G(\mathcal{D}) = C^t G(\mathcal{B}) \overline{C}$.

מטריצות חופפות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $\exists C \in GL(n, \mathbb{F}). C^t B C = A$.

מסקנה: יהיו \mathcal{B}, \mathcal{D} בסיסים למרחב אוקלידי אזי $G(\mathcal{B}), G(\mathcal{D})$ חופפות.

בסיס דואלי: יהי \mathcal{B} בסיס אזי בסיס \mathcal{D} המקיים $(\mathcal{D}_i, \mathcal{B}_j) = \delta_{i,j}$.

סימון: יהי \mathcal{B} בסיס אזי \mathcal{B}^* בסיס דואלי.

משפט: יהי \mathcal{B} בסיס ויהי $a \in L$

- \mathcal{B}^* קיים ויחיד.

$$\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B} \bullet$$

$$a = \sum_{i=1}^n (a, \mathcal{B}_i^*) \mathcal{B}_i \bullet$$

למה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי קיימים $e_1 \dots e_m \in L$ אורתונורמליים עבורם $\text{span} \{e_1 \dots e_m\} = \text{span} \{a_1 \dots a_k\}$
אורתונורמליזצית גראם שמידט: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל נגדיר $\text{GS}(a_1 \dots a_k) = \{e_1 \dots e_k\}$ כך

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} \bullet$$

$$\text{לכל } 2 \leq i \leq k \bullet$$

$$a'_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i, e_j) e_j -$$

$$e_i = \frac{a'_i}{\|a'_i\|} -$$

טענה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $\text{GS}(a_1 \dots a_k)$ אורתונורמליים $(\text{span} \{ \text{GS}(a_1 \dots a_k) \} = \text{span} \{a_1 \dots a_k\}) \wedge$

מסקנה: יהי L ממ"פ אזי קיים בסיס \mathcal{B} אורתונורמלי.

למה: יהי L ממ"פ יהי \mathcal{B} בסיס אורתונורמלי ויהיו $a, b \in L$

$$a = \sum_{i=1}^n (a, \mathcal{B}_i) \mathcal{B}_i \bullet$$

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n ([a]_{\mathcal{B}})_i^2} \bullet$$

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n ([a]_{\mathcal{B}})_i ([b]_{\mathcal{B}})_i \bullet$$

$$\text{dist}(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (([a]_{\mathcal{B}})_i - ([b]_{\mathcal{B}})_i)^2} \bullet$$

$$\cos(\hat{ab}) = \frac{\sum_{i=1}^n ([a]_{\mathcal{B}})_i ([b]_{\mathcal{B}})_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n ([a]_{\mathcal{B}})_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n ([b]_{\mathcal{B}})_i^2}} \bullet$$

מסקנה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי $\det(G(a_1 \dots a_k)) \geq 0$

מסקנה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $\det(G(a_1 \dots a_k)) > 0$

מקבילון: יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $\left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \mid \forall i \in [k]. \lambda_i \in [0, 1] \right\}$

נפח מקבילון: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $\text{Vol}(P(a_1 \dots a_k)) = \sqrt{\det(G(a_1 \dots a_k))}$

למה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אורתונורמליים אזי $\text{Vol}(P(a_1 \dots a_k)) = \prod_{i=1}^k \|a_i\|$

למה: יהי \mathcal{B} בסיס אורתונורמלי יהי \mathcal{D} בסיס ותהא C מטריצת מעבר אזי $|\det(C)| \cdot \text{Vol}(P(\mathcal{D})) = \text{Vol}(P(\mathcal{B}))$

אורינטציה: יהיו \mathcal{B}, \mathcal{D} בסיסים ותהא C מטריצת מעבר אזי $\text{sign}(\det(C))$

מטריצה אורתוגונלית: יהיו \mathcal{B}, \mathcal{D} בסיסים אורתונורמליים במרחב אוקלידי אזי מטריצת המעבר C

מטריצה אוניטרית: יהיו \mathcal{B}, \mathcal{D} בסיסים אורתונורמליים במרחב אוניטרי אזי מטריצת המעבר C

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $(C^t C = I) \iff (C \text{ אורתוגונלית})$

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{C})$ אזי $(C^t \overline{C} = I) \iff (C \text{ אוניטרית})$

סימון: $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$

סימון: $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^t \overline{A} = I\}$

משפט: תהא $C \in O(n) \cup U(n)$ אזי $|\det(C)| = 1$

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $(C \in O(n)) \iff (\mathbb{R}^n \text{ בסיס אורתונורמלי של } \mathbb{R}^n)$

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{C})$ אזי $(C \in U(n)) \iff (\mathbb{C}^n \text{ בסיס אורתונורמלי של } \mathbb{C}^n)$

מטריצות אורתוגונליות מיוחדות: $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$

מטריצות אוניטריות מיוחדות: $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$

משפט: $(\langle O(n), \cdot, \cdot \rangle \wedge \langle SO(n), \cdot, \cdot \rangle \wedge \langle U(n), \cdot, \cdot \rangle \wedge \langle SU(n), \cdot, \cdot \rangle)$ חבורה.

משלים ניצב: יהי $M \subseteq L$ תמ"ז אזי $M^\perp = \{a \in L \mid \forall b \in M. (a, b) = 0\}$

משפט: יהי $M \subseteq L$ תמ"ז אזי $(M^\perp \text{ תמ"ז } M) \wedge (M \oplus M^\perp = L)$

למה: יהי $M \subseteq L$ תמ"ז

$$(M^\perp)^\perp = M \bullet$$

$$\dim(M^\perp) = \dim(L) - \dim(M) \bullet$$

$$(M + U)^\perp = M^\perp \cap U^\perp \bullet$$

$$(M \cap U)^\perp = M^\perp + U^\perp \bullet$$

מרחק: יהי $M \subseteq L$ תמ"ז ויהי $a \in L$ אזי $\text{dist}(a, M) = \inf \{\text{dist}(a, b) \mid b \in M\}$

סימון: יהי $a \in L$ אזי $a_M \in M, a_\perp \in M^\perp$ היחידים שמקיימים $a = a_\perp + a_M$

הטלה אורתוגונלית: יהי $M \subseteq L$ תמ"ז אזי $\text{pr}_M \in \text{Hom}(L, M)$ המוגדרת $\text{pr}_M(a) = a_M$.

משפט: יהי $M \subseteq L$ תמ"ז ויהי $a \in L$

$$\bullet \text{dist}(a, M) = \|a_\perp\|$$

$$\bullet \text{dist}(a, a_M) = \min \{ \text{dist}(a, b) \mid b \in M \}$$

$$\bullet \forall b \in M \setminus \{a_M\} . \text{dist}(a, b) > \text{dist}(a, a_M)$$

$$\bullet \text{dist}(a, M) = \sqrt{\frac{\det(G(a, \mathcal{B}))}{\det(G(\mathcal{B}))}}$$

משפט: יהי $M \subseteq L$ תמ"ז ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a, b) = (a_M, b_M) + (a_\perp, b_\perp)$

למה: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\dim_{\mathbb{C}}(L) = \dim_{\mathbb{R}}(L)$

משפט: יהי L מרחב אוקלידי אזי $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ מכפלה פנימית מעל $L_{\mathbb{C}}$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ משפט אוילר-פוריה-פרסבל:}$$

פונקציונל ליניארי: יהי V מ"ז מעל \mathbb{F} אזי $f \in \text{Hom}(V, \mathbb{F})$

$$\bullet V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{F}) \text{ המרחב הדואלי:}$$

הגדרה: יהי L ממ"פ על \mathbb{F} ויהי $a \in L$ אזי $\varphi_a : L \rightarrow \mathbb{F}$ המוגדרת $\varphi_a(b) = (b, a)$

למה: יהי L ממ"פ ויהי $a \in L$ אזי $\varphi_a \in L^*$

משפט: יהי L ממ"פ נ"ס אזי $f : L \rightarrow L^*$ המוגדרת $f(a) = \varphi_a$ חח"ע ועל.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי נ"ס אזי $f : L \rightarrow L^*$ המוגדרת $f(a) = \varphi_a$ העתקה הפיכה.

איזומטריה: איזומורפיזם $\varphi \in \text{Hom}(L_1, L_2)$ המקיים $(\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$ $\forall a, b \in L_1$.

משפט: יהיו $\varphi, \phi \in \text{Hom}(L_1, L_2)$ איזומטריות יהיו $a, b \in L_1$ ותהא $\mathcal{D} \subseteq L_1$ בת"ל

$$\bullet \varphi \circ \phi \text{ איזומטריה} \wedge (\varphi^{-1}) \text{ איזומטריה.}$$

$$\bullet (\|\varphi(a)\| = \|a\|) \wedge (\text{dist}(\varphi(a), \varphi(b)) = \text{dist}(a, b))$$

$$\bullet \left(\widehat{a, b} = \varphi(\widehat{a}), \varphi(\widehat{b}) \right) \wedge (a \perp b \iff \varphi(a) \perp \varphi(b))$$

$$\bullet \text{Vol}(P(\mathcal{D})) = \text{Vol}(P(\varphi(\mathcal{D})))$$

מסקנה: יהי L ממ"פ נ"ס מעל \mathbb{F} אזי $L, \mathbb{F}^{\dim L}$ איזומטריים.

משפט: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי φ איזומטריה \iff קיים בסיס א"נ \mathcal{B} עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot \overline{[\varphi]_{\mathcal{B}}}^t = I$.

משפט: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ התב"ש

$$\bullet \varphi \text{ איזומטריה.}$$

$$\bullet \forall a \in L. \|\varphi(a)\| = \|a\|$$

$$\bullet \text{קיים בסיס א"נ } \mathcal{B} \text{ עבורו } \varphi(\mathcal{B}) \text{ בסיס א"נ.}$$

העתקה קונפורמית: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ המקיים $\widehat{\varphi(a), \varphi(b)} = \widehat{a, b}$ $\forall a, b \in L$.

משפט: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי φ העתקה קונפורמית \iff קיים בסיס א"נ \mathcal{B} עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}} \in O(n)$ $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

דטרמיננטה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L_1, L_2)$ איזומורפיזם ויהיו $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ בסיסים א"נ בהתאמה אזי $\det(\varphi) = \det([\varphi]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1})$

למה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L_1, L_2)$ אזי $\det(\varphi)$ מוגדר היטב עד כדי אוריינטציה.

משפט: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L_1, L_2)$ איזומורפיזם ויהי \mathcal{B} בסיס של L_1 אזי $\text{Vol}(P(\varphi(\mathcal{B}))) = |\det(\varphi)| \text{Vol}(P(\mathcal{B}))$

העתקה שומרת נפח: יהיו L_1, L_2 מרחבים אוקלידיים אזי איזומורפיזם $\varphi \in \text{Hom}(L_1, L_2)$ עבורו לכל בסיס \mathcal{B} של L_1 מתקיים

$$\text{Vol}(P(\varphi(\mathcal{B}))) = \text{Vol}(P(\mathcal{B}))$$

מסקנה: יהי $\varphi \in \text{Hom}(L_1, L_2)$ איזומורפיזם אזי φ שומרת על נפח $\iff (\det(\varphi) = 1)$

העתקה צמודה: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי $\phi \in \text{Hom}(L)$ עבורו $(\varphi(a), b) = (a, \phi(b))$ $\forall a, b \in L$.

משפט: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי העתקה צמודה קיימת ויחידה.

סימון: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi \in \text{Hom}(L)$ אזי ההעתקה הצמודה ל- φ היא φ^* .

למה: יהי L ממ"פ יהיו $\varphi, \psi \in \text{Hom}(L)$ יהי λ סקלר ויהי \mathcal{B} בסיס א"נ

$$\bullet [\varphi]_{\mathcal{B}}^* = \overline{[\varphi]_{\mathcal{B}}}^t$$

$$\bullet (\varphi^*)^* = \varphi$$

$$\bullet (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$$

$$\bullet (\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*$$

$$\bullet (\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$$

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי אזי $f \in L^L$ המוגדרת $f(\varphi) = \varphi^*$ היא אוטומורפיזם.

משפט: $\left(\ker(\varphi) = (\operatorname{Im}(\varphi^*))^\perp \right) \wedge \left(\operatorname{Im}(\varphi) = (\ker(\varphi^*))^\perp \right)$.

משפט: יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי $\varphi\varphi^* = I$ \iff φ איזומטריה.

העתקה צמודה לעצמה: יהי L ממ"פ אזי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ המקיימת $\varphi = \varphi^*$.

למה: יהי B בסיס א"נ אזי $[\varphi]_B = [\varphi]_B^t$ \iff $(\varphi = \varphi^*)$.

משפט: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי $(\varphi(a), a) \in \mathbb{R}$ \iff $(\varphi = \varphi^*)$.

למה: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ המקיים $(\varphi(a), a) = 0$ $\forall a \in L$ אזי $\varphi = 0$.

למה: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי קיימים ויחידים $\varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{Hom}(L)$ צמודים לעצמם המקיימים $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$.

העתקה נורמלית: יהי L ממ"פ אזי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ המקיים $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$.

טענה: תהא $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ נורמלית אזי $(\lambda \text{ ע"ע של } \varphi \text{ עם } a) \iff (\bar{\lambda} \text{ ע"ע של } \varphi^* \text{ עם } a)$.

טענה: תהא $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ נורמלית ויהיו $\lambda \neq \mu$ אזי $L_\lambda \perp L_\mu$.

טענה: תהא $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ נורמלית אזי $(M \text{ תמ"ו } \varphi \text{ שמור}) \iff (M^\perp \text{ תמ"ו } \varphi \text{ שמור})$.

משפט הפירוק הספקטרי: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי $(\varphi \text{ לכסין בבסיס א"נ}) \iff (\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi)$.

משפט שור: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי קיים בסיס א"נ B עבורו $[\varphi]_B$ משולשית עליונה.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי $(\varphi \text{ לכסין בבסיס א"נ}) \iff (\varphi = \varphi^t)$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית אזי קיימת $U \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית עבורה $U^{-1}AU$ אלכסונית ממשית.

למה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ אוניטרית ויהי λ ע"ע אזי $\|\lambda\| = 1$.

משפט: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ נורמלי אזי $(\varphi \text{ איזומטריה}) \iff (\|\lambda\| = 1 \text{ } \forall \lambda \in \operatorname{Spec}(\varphi))$.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ איזומטריה אזי קיים בסיס א"נ B המקיים

$$[\varphi]_B = \operatorname{Diag} \left(1 \dots 1, -1 \dots -1, \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \right)$$

מסקנה: תהא $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ איזומטריה

• $L = \mathbb{R}$, אזי $(\varphi \text{ שיקוף ביחס לראשית}) \vee (\varphi = I)$.

• $L = \mathbb{R}^2$, אזי $(\varphi \text{ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית}) \vee (\varphi \text{ סיבוב סביב הראשית})$.

• $L = \mathbb{R}^3$, אזי $(\varphi \text{ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית}) \vee (\varphi \text{ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית})$

$\vee (\varphi \text{ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית ושיקוף ביחס לקו ישר שאנך למישור ועובר דרך הראשית})$.

תבנית בילינארית (ת"ב): יהיו L, M מ"ו מעל \mathbb{F} ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ אזי $\Phi : L \times M \rightarrow \mathbb{F}$

• לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v, u \in L$ ויהי $w \in M$ אזי $\Phi(\alpha v + \beta u, w) = \alpha \Phi(v, w) + \beta \Phi(u, w)$

• לינאריות ברכיב שני: יהי $v \in L$ ויהיו $u, w \in M$ אזי $\Phi(v, \alpha u + \beta w) = \alpha \Phi(v, u) + \beta \Phi(v, w)$

סימון: יהיו L, M מ"ו מעל \mathbb{F} אזי $\{ \Phi : L \times M \rightarrow \mathbb{F} \mid \Phi \text{ תבנית בילינארית} \}$ $B(L, M)$

סימון: יהי L מ"ו מעל \mathbb{F} אזי $B(L) = B(L, L)$

מטריצה מייצגת: תהא $\Phi \in B(L, M)$ ויהיו $\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M$ בסיסים אזי $\left(([\Phi]_{\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M})_{i,j} \right) = \Phi \left((B_L)_i, (B_M)_j \right)$

משפט: תהא $\Phi \in B(L, M)$ יהיו $\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M$ בסיסים יהי $a \in L$ ויהי $b \in M$ אזי $[\Phi]_{\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M}^t [a]_{\mathcal{B}_L}^t [b]_{\mathcal{B}_M}$

משפט: $(\dim(B(L, M)) = \dim(L) \dim(M)) \wedge (\mathbb{F} \text{ על } \mathbb{F})$.

משפט: תהא $\Phi \in B(L, M)$ ויהיו $\mathcal{B}_L, \mathcal{B}'_L, \mathcal{B}_M, \mathcal{B}'_M$ בסיסים אזי $[\Phi]_{\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}'_L, \mathcal{B}_L}^{\mathcal{B}_L} [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}_M, \mathcal{B}'_M}^{\mathcal{B}_M}$

דרגה: תהא $\Phi \in B(L, M)$ אזי $\operatorname{rank}(\Phi) = \operatorname{rank}([\Phi]_{\mathcal{B}_L, \mathcal{B}_M})$

למה: תהא $\Phi \in B(L, M)$ אזי $\operatorname{rank}(\Phi)$ מוגדרת היטב.

הגדרה: תהא $\Phi \in B(L, M)$ נגדיר $\Phi_1 \in \operatorname{Hom}(L, M^*)$ כך $\Phi_1(a)(b) = \Phi(a, b)$

הגדרה: תהא $\Phi \in B(L, M)$ נגדיר $\Phi_2 \in \operatorname{Hom}(M, L^*)$ כך $\Phi_2(b)(a) = \Phi(a, b)$

משפט: תהא $\Phi \in B(L, M)$ אזי $\operatorname{rank}(\Phi) = \operatorname{rank}(\Phi_1) = \operatorname{rank}(\Phi_2)$

תבנית אי-מנוונת: $\Phi \in B(L, M)$ עבורה $[\Phi]$ הפיכה.

משפט: תהא $\Phi \in B(L, M)$ התב"ש

• Φ אי-מנוונת.

• Φ_1, Φ_2 איזומורפיזמים.

$$\bullet \text{rank}(\Phi) = \dim(M) = \dim(L)$$

משפט: תהא $\Phi \in B(L)$ אזי $(\Phi \text{ אי-מנונת}) \iff (\forall a \in L \setminus \{0\}. \exists b \in L. \Phi(a, b) \neq 0)$.

משפט: יהיו $M \neq L$ ותהא $\Phi \in B(L, M)$ באשר $\text{rank}(\Phi) = r$ אזי $[\Phi]_{B_L, B_M} = \text{Diag}(I_r, 0)$.

מסקנה: יהיו $M \neq L$ ותהא $\Phi \in B(L, M)$ באשר $\text{rank}(\Phi) = r$ אזי קיימים $\varphi_1 \dots \varphi_r \in L^*$ וכן $\psi_1 \dots \psi_r \in M^*$ עבורם $\Phi = \varphi_1 \psi_1 + \dots + \varphi_r \psi_r$.

למה: יהיו $\varphi_1 \dots \varphi_r, \psi_1 \dots \psi_r \in L^*$ אזי $\text{rank}(\Phi) = r$ עבור $\Phi = \varphi_1 \psi_1 + \dots + \varphi_r \psi_r$.

משפט: תהא $\Phi \in B(L)$ באשר $\text{rank}(\Phi) = r$ אזי קיימים $\varphi_1 \dots \varphi_r, \psi_1 \dots \psi_r \in L^*$ עבורם $\Phi = \varphi_1 \psi_1 + \dots + \varphi_r \psi_r$.

תבנית ריבועית: תהא $\Phi \in B(L)$ אזי $Q : L \rightarrow \mathbb{F}$ המוגדרת $Q(a) = \Phi(a, a)$.

למה: תהא $Q : L \rightarrow \mathbb{F}$ תבנית ריבועית עבור ת"ב $\Phi \in B(L)$ ויהי $a \in L$

$$\bullet \text{יהי } \lambda \in \mathbb{F} \text{ אזי } Q(\lambda a) = \lambda^2 Q(a)$$

$$\bullet \text{יהי } b \in L \text{ אזי } Q(a+b) = Q(a) + Q(b) + \Phi(a, b) + \Phi(b, a)$$

$$\bullet \text{יהי } B \text{ בסיס אזי } ([\Phi]_B)_{i,i} ([a]_B)_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(([\Phi]_B)_{i,j} + ([\Phi]_B)_{j,i} \right) ([a]_B)_i ([a]_B)_j$$

למה: יהי $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ותהא $Q : L \rightarrow \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיימת יחידה $\Phi \in B(L)$ סימטרית מתאימה לתבנית.

$$\text{מסקנה: יהי } \text{char}(\mathbb{F}) \neq 2 \text{ ותהא } Q : L \rightarrow \mathbb{F} \text{ תבנית ריבועית אזי } \Phi(a, b) = \frac{Q(a+b) - Q(a) - Q(b)}{2}$$

הגדרה: יהי B בסיס ותהא $Q : L \rightarrow \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $[Q]_B = [\Phi]_B$

מסקנה: תהא $Q : L \rightarrow \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $[Q]^t = [Q]$

מסקנה: יהי $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ותהא $Q : L \rightarrow \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $Q(a) = [a]_B^t [Q]_B [a]_B$

למה: תהא $Q : L \rightarrow \mathbb{F}$ ויהיו B, B' בסיסים אזי $[Q]_{B'} = ([\text{Id}]_{B'}^B)^t [Q]_B ([\text{Id}]_{B'}^B)^t$

מטריצות חופפות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $B = C^t A C$ $\exists C \in \text{GL}(n, \mathbb{F})$.

משפט לגראנז': יהי $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ותהא $Q : L \rightarrow \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס B עבורו $Q(a) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(Q)} \alpha_i x_i^2$

משפט: תהא $Q : L \rightarrow \mathbb{C}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס B עבורו $Q(a) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(Q)} x_i^2$

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ סימטרית אזי קיימת $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ עבורה $C^t A C = \text{Diag}(I_{\text{rank}(A)}, 0)$

משפט: תהא $Q : L \rightarrow \mathbb{R}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס B עבורו $Q(a) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{\text{rank}(Q)} x_i^2$

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ סימטרית אזי קיימת $C \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ עבורה $C^t A C = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$

סיגנטורה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ סימטרית אזי (p, q) עבורם $A \sim_{\text{חופפת}} \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ סימטרית עם סיגנטורה (p, q) אזי p .

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ סימטרית עם סיגנטורה (p, q) אזי q .

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא $Q : L \rightarrow \mathbb{R}$ תבנית ריבועית עבורה $[Q]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ וכן $[Q]_{B'} = \text{Diag}(I_{p'}, -I_{q'}, 0)$

$$\text{אזי } (p, q) = (p', q')$$

מינור ראשי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ יהי $k < n$ ויהי $B \in M_k(\mathbb{F})$ המקיים $(B)_{i,j} = (A)_{i,j}$ אזי $\Delta_k^A = \det(B)$

מטריצה יחידה משולשית עליונה (unitriangular upper): $A \in M_n(\mathbb{F})$ המקימת $A = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ ותהא $C \in M_n(\mathbb{F})$ יחידה משולשית עליונה אזי $\Delta_k^{C^t A C} = \Delta_k^A$

משפט: יהי $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ סימטרית עבורה $\Delta_1, \dots, \Delta_{\text{rank}(A)} \neq 0$ וכן $\Delta_{\text{rank}(A)+1}, \dots, \Delta_n = 0$ אזי קיימת

$$C^t A C = \text{Diag}\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \dots \frac{\Delta_{\text{rank}(A)}}{\Delta_{\text{rank}(A)-1}}, 0 \dots 0\right)$$

הגדרה: תהא $Q : L \rightarrow \mathbb{R}$ תבנית ריבועית

$$\bullet \text{תבנית חיובית לחלוטין (תחל"ח): } Q(v) > 0 \text{ } \forall v \in L \setminus \{0\}$$

$$\bullet \text{תבנית אי-שלילית: } Q(v) \geq 0 \text{ } \forall v \in L \setminus \{0\}$$

$$\bullet \text{תבנית אי-חיובית: } Q(v) \leq 0 \text{ } \forall v \in L \setminus \{0\}$$

$$\bullet \text{תבנית שלילית לחלוטין: } Q(v) < 0 \text{ } \forall v \in L \setminus \{0\}$$

הגדרה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית

$$\bullet \text{חיובית לחלוטין (חל"ח): } x^t A x > 0 \text{ } \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\bullet \text{אי-שלילית: } x^t A x \geq 0 \text{ } \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\bullet \text{אי-חיובית: } x^t A x \leq 0 \text{ } \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

• שלילית לחלוטין: $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. x^t A x < 0$.

משפט סילבסטר: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי $(A \text{ חל"ח}) \iff (\forall i \in [n]. \Delta_i > 0)$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי $(A \text{ שלילית לחלוטין}) \iff (\forall i \in [n]. (-1)^i \Delta_i > 0)$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי $(A \text{ חל"ח}) \iff$ (כל הע"ע של A חיוביים).

למה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית חל"ח אזי $B^2 = A$ עבור $B \in M_n(\mathbb{R})$.

פירוק פולרי: תהא $D \in GL(n, \mathbb{R})$ אזי קיימים ויחידים $R \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית חל"ח וכן $Q \in O(n)$ עבורם $D = QR$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי קיימת $C \in O(n)$ עבורה $C^t A C$ אלכסונית.

מסקנה: תהא $Q_1 : L \rightarrow \mathbb{R}$ תחל"ח ותהא $Q_2 : L \rightarrow \mathbb{R}$ אזי קיים בסיס B עבורו $[Q_1]_B, [Q_2]_B$ אלכסוניות.

תבנית אחד-דוחצי-לינארית: יהי L מ"ו מעל \mathbb{C} ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ אזי $\Psi : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$

• לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v, u, w \in L$ אזי $\Psi(\alpha v + \beta u, w) = \alpha \Psi(v, w) + \beta \Psi(u, w)$

• יהיו $v, u, w \in L$ אזי $\Psi(v, \alpha u + \beta w) = \bar{\alpha} \Psi(v, u) + \bar{\beta} \Psi(v, w)$

מטריצה מייצגת: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית ויהי B בסיס אזי $([\Psi]_B)_{i,j} = \Psi(B_i, B_j)$

משפט: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית יהי B בסיס יהי $a \in L$ ויהי $b \in M$ אזי $[\Psi]_B(a, b) = [a]_B^t [\Phi]_B [b]_B$

משפט: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית ויהיו B, B' בסיסים אזי $[\Psi]_{B'} = ([\text{Id}]_{B'}^B)^t [\Psi]_B [\text{Id}]_{B'}^B$

דרגה: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית אזי $\text{rank}(\Psi) = \text{rank}([\Psi]_B)$

למה: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית אזי $\text{rank}(\Psi)$ מוגדרת היטב.

תבנית אחד-דוחצי-לינארית הרמיטית: Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית המקיימת $\Psi(a, b) = \overline{\Psi(b, a)}$ $\forall a, b \in L$.

למה: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית אזי $(\Psi \text{ הרמיטית}) \iff ([\Psi] \text{ הרמיטית})$.

מסקנה: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית הרמיטית אזי קיים בסיס B עבורו $[\Psi]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית הרמיטית עם $[\Psi]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ אזי p .

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית הרמיטית עם $[\Psi]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ אזי q .

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית הרמיטית עבורה $[Q]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ וכן

$(p, q) = (p', q')$ אזי $[Q]_{B'} = \text{Diag}(I_{p'}, -I_{q'}, 0)$

למה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית אזי $\Delta_1 \dots \Delta_n \in \mathbb{R}$

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית עבורה $\Delta_1, \dots, \Delta_{\text{rank}(A)} \neq 0$ וכן $\Delta_{\text{rank}(A)+1}, \dots, \Delta_n = 0$ אזי קיימת $C \in M_n(\mathbb{C})$ יחידה

משולשית עליונה עבורה $C^t A C = \text{Diag}\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \dots \frac{\Delta_{\text{rank}(A)}}{\Delta_{\text{rank}(A)-1}}, 0 \dots 0\right)$

הגדרה: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית הרמיטית

• חיובית לחלוטין (חל"ח): $\Psi(v, v) > 0 \forall v \in L \setminus \{0\}$

• אי-שלילית: $\Psi(v, v) \geq 0 \forall v \in L \setminus \{0\}$

• אי-חיובית: $\Psi(v, v) \leq 0 \forall v \in L \setminus \{0\}$

• שלילית לחלוטין: $\Psi(v, v) < 0 \forall v \in L \setminus \{0\}$

משפט: תהא Ψ תבנית אחד-דוחצי-לינארית הרמיטית אזי $(\Psi \text{ חל"ח}) \iff (\forall i \in [n]. \Delta_i > 0)$.

מסקנה: תהא Ψ_1, Ψ_2 תבניות אחד-דוחצי-לינאריות עבורן $\Psi_1 \text{ חל"ח}$ אזי קיים בסיס B עבורו $[\Psi_1]_B, [\Psi_2]_B$ אלכסוניות.

תבנית אנטי סימטרית: יהי $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ אזי $\Phi \in B(L)$ המקיימת $\Phi(a, b) = -\Phi(b, a) \forall a, b \in L$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $\Phi(a, a) = 0 \forall a \in L$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $[\Phi]$ אנטי סימטרית.

משפט: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי קיים בסיס B עבורו $[\Phi]_B = \text{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 0 \dots 0\right)$

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אזי $\text{rank}(A) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$

פולינום Pfaff: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אי-מנוונת אזי $p \in \mathbb{F}[x_1 \dots x_{n^2}]$ המקיים $\det(A) = p\left((A)_{1,1} \dots (A)_{n,n}\right)^2$

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אי-מנוונת אזי קיים פולינום pfaff

הגדרה: $\mathbb{R}_2[x, y] = \{f \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) = 2\}$

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{R}_2[x, y]$ אזי $q = \alpha p$ $\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

קבוצת העקומות האלגבריות המישוריות ממעלה 2: $C_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_2[x, y] / \sim$

עקומה גאומטרית מישורית ממעלה 2: יהי $p \in \mathbb{R}_2[x, y]$ אזי $\text{sols}(p)$

למה: עקומה אלגברית מישורית ממעלה 2 מגדירה עקומה גאומטרית מישורית ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור \mathbb{R}^2 : תהא $Q \in O(2)$ וכן $v \in \mathbb{R}^2$ אזי פונקציה $f \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת $f(u) = Qu + v$.

למה: תהא f תנועה במישור \mathbb{R}^2 אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y]$ המוגדרת $p(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$

• המטריצה המצומצמת: $A_p = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

• המטריצה המורחבת: $\widehat{A}_p = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y]$ ותהא f תנועה במישור \mathbb{R}^2 אזי $\text{Spec}(A_p) = \text{Spec}(A_{p \circ f})$

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y]$ ותהא f תנועה במישור \mathbb{R}^2 אזי $\det(\widehat{A}_p) = \det(\widehat{A}_{p \circ f})$

משפט: יהיו $p, q \in \mathbb{R}_2[x, y]$ עבורן A_p, A_q דומות וכן $\det(\widehat{A}_p) = \det(\widehat{A}_q)$

$(\det(\widehat{A}_p) = \det(\widehat{A}_q) \neq 0) \vee (\det(A_p) = \det(A_q) \neq 0)$ אזי קיימת T תנועה במישור \mathbb{R}^2 עבורה $p = q \circ T$

מסקנה: תהא $C \in C_2(\mathbb{R})$ עבורה $\det(\widehat{A}_p) \neq 0$ אזי קיימת תנועה ב- \mathbb{R}^2 עבורה C הינה אחת מהבאות

• קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$

• אליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

• היפרבולה: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

• פרבולה: $y^2 = 2px$

הגדרה: $\mathbb{R}_2[x, y, z] = \{f \in \mathbb{R}[x, y, z] \mid \deg(f) = 2\}$

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ אזי $q = \alpha p$ $\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

קבוצת המשטחים האלגבריים ממעלה 2: $S_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_2[x, y, z] / \sim$

משטח גאומטרי ממעלה 2: יהי $p \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ אזי $\text{sols}(p)$

למה: משטח אלגברי ממעלה 2 מגדיר משטח גאומטרי ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור \mathbb{R}^3 : תהא $Q \in O(3)$ וכן $v \in \mathbb{R}^3$ אזי פונקציה $f \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת $f(u) = Qu + v$

למה: תהא f תנועה במישור \mathbb{R}^3 אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $A \in M_3(\mathbb{R})$ סימטרית תהא $B \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ ותהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ המוגדרת $p(v) = v^t A v + 2B^t v + c$

• המטריצה המצומצמת: $A_p = A$

• המטריצה המורחבת: $\widehat{A}_p = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & c \end{pmatrix}$

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ ותהא f תנועה במישור \mathbb{R}^3 אזי $\text{Spec}(A_p) = \text{Spec}(A_{p \circ f})$

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ ותהא f תנועה במישור \mathbb{R}^3 אזי $\det(\widehat{A}_p) = \det(\widehat{A}_{p \circ f})$

משפט: יהיו $p, q \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ עבורן A_p, A_q דומות וכן $\det(\widehat{A}_p) = \det(\widehat{A}_q)$

$(\det(\widehat{A}_p) = \det(\widehat{A}_q) \neq 0) \vee (\det(A_p) = \det(A_q) \neq 0)$ אזי קיימת T תנועה במישור \mathbb{R}^3 עבורה $p = q \circ T$

מסקנה: תהא $S \in S_2(\mathbb{R})$ עבורה $\det(\widehat{A}_p) \neq 0$ אזי קיימת תנועה ב- \mathbb{R}^3 עבורה S הינה אחת מהבאות

• קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$

• אליפסואיד: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

• היפרבולואיד חד-יריעתי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

• היפרבולואיד דו-יריעתי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

• פרבולואיד אליפטי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

• פרבולואיד היפרבולי: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$