רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1,\dots,a_n\}$ מתקיים $(a\in\{a_1,\dots,a_n\})\iff((a=a_1)\vee\ldots\vee(a=a_n))$.

סימון: תהא Σ אלפבית אזי Σ^* כל המחרוזות הסופיות באלפבית.

טענה: יהי עולם Σ תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת

- $B\subseteq S$.
- S סגורה להפעלת F.
- מינימליות: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ עבורה $B\subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S\subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: יהי עולם Σ תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}\subseteq\Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq X_{B,F}$.

טענה: תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid(B\subseteq Y)\wedge(F\text{ סגורה להפעלת }Y)\}$.

מסקנה: יהי עולם Σ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$ אזי $X_{B,F}\subseteq Y$.

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על $\mathbb{N}$ אזי $(p(0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.p(n)\implies p(n+1)))\implies(\forall n\in\mathbb{N}.p(n))$.

סדרת יצירה: יהי $a\in X_{B,F}$ אזי $(a_1,\dots,a_n)$ עבורה $a_n=a$ וכן לכל $i\in[n]$ מתקיים $(a_i\in B)\vee(a_i$ מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ־$\{a_1,\dots,a_{i-1}\}$).

טענה: יהי $a\in\Sigma^*$ אזי $(a\in X_{B,F})\Longleftrightarrow$(קיימת סדרת יצירה ל־$a$).

מסקנה: $X_{B,F}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a\in\Sigma^*\mid n\text{ בעלת סדרת יצירה באורך }a\}$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma=\{\wedge,\vee,\neg,\implies,(,)\}\cup\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a\in\Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי

- $\wedge(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\wedge\omega_2)\text{"}$.
- $\vee(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\vee\omega_2)\text{"}$.
- $\implies(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\implies\omega_2)\text{"}$.
- $\neg(\omega_1)=\text{"}(\neg\omega_1)\text{"}$.

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $\mathrm{WFF}=X_{\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\implies\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p\in\mathrm{WFF}$ עבורו $p\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p\in\mathrm{WFF}$ אזי (p פסוק אטומי)$\vee$(הפסוק p מתחיל עם "(" ונגמר עם ")").

מסקנה: יהיו $q_1,q_2\in\mathrm{WFF}$ אזי $q_1(q_2\notin\mathrm{WFF}$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha\in\mathrm{WFF}$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α פסוק אטומי.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\wedge\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\vee\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\implies\gamma)$.
- קיים ויחיד $\beta\in\mathrm{WFF}$ עבורו $\alpha=(\neg\beta)$.

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם $\mathcal{O}(\mathrm{len}(\alpha))$ לבדיקה האם $\alpha\in\mathrm{WFF}$.

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\neg$.
2. $\wedge,\vee$.
3. $\implies$.

אמת: T, true.

שקר: F, false.

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

סימון: תהא $\circ\in\{\wedge,\vee,\neg,\implies\}$ אזי טבלת האמת של $\circ$ הינה $TT_\circ$.

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	$\neg q$
true	false
false	true

q	p	$q \implies p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

השמה: פונקציה $v:\{p_i\}\to\{F,T\}$.

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\overline{v}:\mathrm{WFF}\to\{F,T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\overline{v}(p)=v(p)$.
- יהי α פסוק אזי $\overline{v}(\neg\alpha)=TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\overline{v}(\beta\circ\gamma)=TT_{\circ}(\overline{v}(\beta),\overline{v}(\gamma))$.

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha\in\mathrm{WFF}$ עבורה $\overline{v}(\alpha)=T$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\mathrm{WFF}$ מסופקת על ידי v אזי $v\models\alpha$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\mathrm{WFF}$ לא מסופקת על ידי v אזי $v\not\models\alpha$.

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $\mathrm{Var}:\mathrm{WFF}\to\mathcal{P}(\{p_i\})$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\mathrm{Var}(p)=\{p\}$.
- יהי α פסוק אזי $\mathrm{Var}(\neg\alpha)=\mathrm{Var}(\alpha)$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\mathrm{Var}(\beta\circ\gamma)=\mathrm{Var}(\beta)\cup\mathrm{Var}(\gamma)$.

משפט התלות הסופית: תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי $\alpha\in\mathrm{WFF}$ עבורה $v_1(p)=v_2(p)$.$\forall p\in\mathrm{Var}(\alpha)$ אזי $\overline{v_1}(\alpha)=\overline{v_2}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\mathrm{WFF}$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_α.

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K\subseteq\{\wedge,\vee,\neg,\implies\}$ עבורה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha\in\mathrm{WFF}$ עבורו $TT=TT_\alpha$.

טענה: $\{\wedge,\vee,\neg,\implies\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg,\wedge,\vee\in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha\in\mathrm{WFF}$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v\models\alpha$.

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha\in\mathrm{WFF}$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: יהי $\alpha\in\mathrm{WFF}$ טאוטולוגיה אזי $\models\alpha$.

סתירה: פסוק $\alpha\in\mathrm{WFF}$ עבורו $\models(\neg\alpha)$.

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\overline{v}(\alpha)=\overline{v}(\beta)$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\mathrm{WFF}$ שקולים אזי $\alpha\equiv\beta$.

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma\subseteq\mathrm{WFF}$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha\in\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\mathrm{WFF}$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v\models\Gamma$.

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma\subseteq\mathrm{WFF}$ אזי $\alpha\in\mathrm{WFF}$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v\models\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\mathrm{WFF}$ ויהי $\alpha\in\mathrm{WFF}$ פסוק נובע סמנטית מ־Γ אזי $\Gamma\models\alpha$.

טענה: יהיו $\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{WFF}$ אזי

- $(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma\equiv(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$.
- $(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma\equiv(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$.
- $(\alpha\wedge\beta)\equiv(\beta\wedge\alpha)$.
- $(\alpha\vee\beta)\equiv(\beta\vee\alpha)$.
- $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$.
- $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\equiv\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$.
- $\neg(\neg\alpha)\equiv\alpha$.
- $\neg(\alpha\wedge\beta)\equiv(\neg\alpha)\vee(\neg\beta)$.
- $\neg(\alpha\vee\beta)\equiv(\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)$.
- $(\alpha\implies\beta)\equiv(\neg\alpha)\vee\beta$.

למה: יהי $\gamma \in \text{WFF}$ סתירה אזי לכל $\alpha \in \text{WFF}$ מתקיים $\gamma \models \alpha$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$ אזי $\Gamma \models \beta$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ אזי $\Gamma \models (\neg\alpha)$.

טענה: יהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ אזי $(\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta))$.

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ ויהי p פסוק אטומי אזי

- אם $\alpha = p$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) = \varphi$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) = \alpha$.
- אם קיים $\beta \in \text{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) = \neg\beta\left({}^{\varphi}/_{p}\right)$.
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) = \beta\left({}^{\varphi}/_{p}\right) \circ \gamma\left({}^{\varphi}/_{p}\right)$.

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ ויהי $p \in \text{Var}(\alpha)$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right) \in \text{WFF}$.

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ ויהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי

- אם $\alpha = p_i$ עבור $i \in [n]$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) = \varphi_i$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p_i$ לכל $i \in [n]$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) = \alpha$.
- אם קיים $\beta \in \text{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) = \neg\beta\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$.
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) = \beta\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right) \circ \gamma\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$.

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & i \neq j \\ \overline{v}(\varphi) & i = j \end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)\right) = \overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ יהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & j \notin [n] \\ \overline{v}(\varphi_j) & j \in [n] \end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)\right) = \overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ ויהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$ טאוטולוגיה.

הצורה הנורמלית NNF: $\text{NNF} = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{NNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

סימון: $\text{Conj} = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge\}}$.

הצורה הנורמלית DNF: $\text{DNF} = X_{\text{Conj}, \{\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{DNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

סימון: $\text{Disj} = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\vee\}}$.

הצורה הנורמלית CNF: $\text{CNF} = X_{\text{Disj}, \{\wedge\}}$.

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{CNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

מערכת הוכחה: יהי Σ אלפבית תהא $N \subseteq \Sigma^*$ תהא $A \subseteq N$ ותהא $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (N^n \to N)$ אזי (Σ, N, A, F).

הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.

נוסחאות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי N.

אקסיומות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי A.

כללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי F.

קבוצת המשפטים: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $X_{A,F}$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ משפט אזי $\underset{S}{\vdash} \varphi$.

מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$.

קבוצת הטענות היכיחות מהנחות: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי $X_{A \cup \Gamma, F}$.

הוכחה: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי סדרת יצירה של φ.

סימון: תהא S מערכת הוכחה תהיינה $\Gamma \subseteq N$ הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$.

טענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ אזי

- מונוטוניות: תהא $\Delta \subseteq N$ עבורה $\Delta \underset{S}{\vdash} \varphi$ ותהא $\Delta \subseteq \Gamma$ אזי $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$.
- קומפקטיות: תהא $\Gamma \subseteq N$ עבורה $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$ אזי קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \underset{S}{\vdash} \varphi$.
- טרנזיטיביות: תהיינה $\Delta, \Gamma \subseteq N$ באשר $\Delta \underset{S}{\vdash} \varphi$ וכן לכל $\alpha \in \Delta$ מתקיים $\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha$ אזי $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $f \in F$ כלל היסק המקיים $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ אזי $f : \frac{x_1 \ldots x_n}{y}$.

כלל הניתוק (Modus Ponens): תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $\text{MP} : \frac{(\alpha \Longrightarrow \beta), \alpha}{\beta}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

- אלפבית: $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$.
- נוסחאות: $N = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$.
- אקסיומות: $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$, $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$, $A_3 = (((\neg\alpha) \Longrightarrow (\neg\beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
- כללי היסק: $F = \{\mathrm{MP}\}$.

טענה: יהיו α, β נוסחאות ב־HPC אזי

- $\underset{\text{HPC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \alpha)$.
- $\underset{\text{HPC}}{\vdash} ((\neg\alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta))$.
- $\{\neg\alpha\} \underset{\text{HPC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \beta)$.

מסקנה: יהיו α, β נוסחאות ב־HPC באשר $\underset{\text{HPC}}{\vdash} (\neg\alpha)$ אזי $\{\alpha\} \underset{\text{HPC}}{\vdash} \beta$.

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון $\vdash$ הוא במערכת HPC.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוחסאות מעל HPC אזי $(\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \Longleftrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta))$.

סימון: תהא מערכת הוכחה S ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $\mathrm{Ded}(\Gamma) = \{\alpha \in N \mid \Gamma \vdash \alpha\}$.

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $\vdash ((\neg(\neg\alpha)) \Longrightarrow \alpha)$.

מערכת הוכחה נאותה: מערכת הוכחה S עבורה לכל Γ הנחות מעל S ולכל α נוסחה מעל S מתקיים $\left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right) \Longrightarrow (\Gamma \models \alpha)$.

מערכת הוכחה שלמה: מערכת הוכחה S עבורה לכל Γ הנחות מעל S ולכל α נוסחה מעל S מתקיים $(\Gamma \models \alpha) \Longrightarrow \left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right)$.

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט: HPC מערכת נאותה.

למה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β, γ נוחסאות מעל HPC אזי $((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \wedge (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוחסאות מעל HPC אזי $((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \wedge (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$.

קבוצת הנחות עקבית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\Gamma \underset{S}{\nvdash} \alpha$.

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ אינה עקבית)$\Longleftrightarrow$(קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\left(\Gamma \underset{S}{\nvdash} \alpha\right) \wedge \left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right)$).

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות עקבית מעל S עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית מעל S המקיימת $\Gamma \subseteq \Delta$ מתקיים $\Gamma = \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC עבורה $\Gamma \vdash \alpha$ אזי $\alpha \in \Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\alpha \in \Gamma) \vee (\neg\alpha \in \Gamma)$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg\alpha \in \Gamma) \vee (\beta \in \Gamma))$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Δ עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(Γ ספיקה).

משפט: HPC מערכת שלמה.

מסקנה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash \alpha) \Longleftrightarrow (\Gamma \models \alpha)$.

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

סימון: תהא $\Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ אזי $\mathrm{Ass}(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid v \models \Gamma\}$.

טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\} \to \{F, T\}) \backslash \mathrm{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על $\{p_i\} \to \{F, T\}$.

טענה: הטופולוגיה $\{(\{p_i\} \to \{F, T\}) \backslash \mathrm{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

הגדרה: יהי G גרף פשוט לא מכוון תהא $f : V \to \mathrm{WFF}$ חח"ע ויהיו $(v, u) \in E$ אזי $\varphi_G : E \to \mathrm{WFF}$ כך $\varphi_G((v, u)) = "f(v) \Longrightarrow f(u)"$.

טענה: יהי G גרף פשוט לא מכוון ותהא $f:V\to\text{WFF}$ חח"ע אזי (G הינו 2־צביע)$\Longleftrightarrow$($\{\varphi_G(e)\mid e\in E\}$ ספיקה).

מסקנה: יהי G גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו 2־צביע)$\Longleftrightarrow$(לכל $G'\le G$ סופי G' הינו 2־צביע).

טענה: יהי G גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו k־צביע)$\Longleftrightarrow$(לכל $G'\le G$ סופי G' הינו k־צביע).

קבוצת השמות גדירה: קבוצה $K\subseteq\mathcal{P}(\{p_i\}\to\{F,T\})$ עבורה קיימת $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ המקיימת $K=\text{Ass}(\Gamma)$.

טענה: $\varnothing$ גדירה, $\{p_i\}\to\{F,T\}$ גדירה, לכל v השמה $\{v\}$ גדירה.

טענה: קיימת $K\subseteq\mathcal{P}(\{p_i\}\to\{F,T\})$ שאינה גדירה.

סימון: $K_{\text{finite}}=\left\{v\in\{p_i\}\to\{F,T\}\mid\left|v^{-1}(\{T\})\right|<\aleph_0\right\}$.

טענה: K_{finite} אינה גדירה.

קבוצת השמות גדירה באופן סופי: קבוצה $K\subseteq\mathcal{P}(\{p_i\}\to\{F,T\})$ עבורה קיימת $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ סופית המקיימת $K=\text{Ass}(\Gamma)$.

משפט: תהא $K\subseteq\mathcal{P}(\{p_i\}\to\{F,T\})$ התב"ש

- K גזירה וכן $K^{\mathcal{C}}$ גדירה.
- K גדירה באופן סופי.
- K גדירה על ידי פסוק יחיד.

מילון: יהי Σ אלפבית אזי $(\{c_i\in\Sigma\mid i\in\mathbb{N}\},\{R_{n,i}\subseteq\Sigma^n\mid i,n\in\mathbb{N}\},\{f_{n,i}\subseteq\Sigma^n\to\Sigma\mid i,n\in\mathbb{N}\})$.

סימני קבוע במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי C.

סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי R.

סימני פונקציה במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי F.

מילון סופי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ בעל מספר סופי של סימנים.

מילון יחסי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ חסר סימני פונקציה.

לוגיקה מסדר ראשון: יהי Σ אלפבית ויהי σ מילון אזי $(\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\},\{"(",")"\},\{\neg,\vee,\wedge,\Longrightarrow\},\{\forall,\exists\},\sigma)$.

משתנים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: $\{"(",")"\}$.

קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{\neg,\vee,\wedge,\Longrightarrow\}$.

כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: תהא L לוגיקה מסדר ראשון אזי המילון D בה.

שמות עצם מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i\mid i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}\mid i,n\in\mathbb{N}\}}$.

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי σ מילון ויהי t שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- t משתנה.
- t סימן קבוע.
- קיים ויחיד סימן פונקציה $f_{i,n}$ ושמות עצם $t_1\dots t_n$ עבורם $t=f(t_1\dots t_n)$.

הגדרה: יהי σ מילון יהי x משתנה ותהא $\alpha\in\sigma$ אזי

- $\forall(\alpha,x)="\forall x\alpha"$.
- $\exists(\alpha,x)="\exists x\alpha"$.

נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $\{R_{n,i}(t_1\dots t_n)\mid(i,n\in\mathbb{N})\wedge(\text{שמות עצם }t_1\dots t_n)\}$.

נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{R_{n,i}(t_1\dots t_n)\mid(i,n\in\mathbb{N})\wedge(\text{שמות עצם }t_1\dots t_n)\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow,\forall,\exists\}}$.

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α נוסחה אטומית.
- קיימת ויחידה נוסחה β עבורה $\alpha="(\neg\beta)"$.
- קיימות ויחידות נוסחאות β,γ וכן פעולה בולינארית $\circ$ עבורן $\alpha="(\beta\circ\gamma)"$.
- קיימת ויחידה נוסחה β וכן משתנה x וכן כמת Q עבורם $\alpha="Qx\beta"$.

משתנה חופשי בשם עצם: נגדיר $\text{FV}:\{t\mid\sigma\text{ שם עצם במילון }t\}\to\mathcal{P}(\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\})$ כך

- יהי $c\in\sigma$ סימן קבוע אזי $\text{FV}(c)=\varnothing$.
- יהי $x\in\sigma$ משתנה אזי $\text{FV}(x)=\{x\}$.
- יהיו $t_1\dots t_n$ שמות עצם ויהי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $\text{FV}(f(t_1\dots t_n))=\bigcup\text{FV}(t_i)$.

משתנה חופשי בנוסחה: נגדיר $\text{FV}:\{\varphi\mid\sigma\text{ נוסחה במילון }\varphi\}\to\mathcal{P}(\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\})$ כך

- יהיו $t_1 \ldots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $\text{FV}(R(t_1 \ldots t_n)) = \bigcup \text{FV}(t_i)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\text{FV}(\neg\varphi) = \text{FV}(\varphi)$.
- תהיינה φ, ψ נוסחאות ויהי $\circ$ פעולה בוליאנית אזי $\text{FV}(\varphi \circ \psi) = \text{FV}(\varphi) \cup \text{FV}(\psi)$.
- תהא נוסחה φ יהי משתנה x ויהי כמת Q עבורם $\text{FV}(Qx\varphi) = \text{FV}(\varphi) \setminus \{x\}$.

נוסחה סגורה: נוסחה φ עבורה $\text{FV}(\varphi) = \varnothing$.

סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\forall, \exists$.
2. $\neg$.
3. $\wedge, \vee$.
4. $\Longrightarrow$.

מבנה עבור מילון: יהי σ מילון יהי $D \neq \varnothing$ ותהא $D \to \{c_i\} : C$ חח"ע וכן $R : \{R_{n,i}\} \to D^n$ חח"ע לכל $n \in \mathbb{N}$ וכן $F : \{f_{n,i}\} \to (D^n \to D)$ חח"ע אזי $(D, C(c_0), \ldots, R(R_{2,0}), \ldots, f(f_{0,0}))$.

תחום של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי D.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ בעל תחום D אזי $D^M = D$.

פירוש של סימנים במילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $(C(c_0), \ldots, R(R_{2,0}), \ldots, f(f_{0,0}))$.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $c_i^M = C(c_i)$ וכן $R_{n,i}^M = R(R_{n,i})$ וכן $f_{n,i}^M = F(f_{n,i})$.

השמה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $v : \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to D^M$.

השמת ערך לשם עצם: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ יהי ותהא v השמה אזי

- יהי $c_i \in \sigma$ סימן קבוע אזי $\overline{v}(c_i) = c_i^M$.
- יהי $x_i \in \sigma$ משתנה אזי $\overline{v}(x_i) = v(x_i)$.
- יהיו $t_1 \ldots t_n$ שמות עצם ויהי $f \in \sigma$ סימן פונקציה אזי $\overline{v}(f(t_1 \ldots t_n)) = f^M(\overline{v}(t_1) \ldots \overline{v}(t_n))$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ויהי t שם עצם עבורו $\forall x \in \text{FV}(t) . v_1(x) = v_2(x)$ אזי $\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t)$.

השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי $x_j \in \sigma$ משתנה ויהי $d \in D^M$ אזי נגדיר השמה $v[d/x_j](x_i) = \begin{cases} v(x_i) & i \neq j \\ d & \text{else} \end{cases}$.

ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא v השמה אזי

- יהיו $t_1 \ldots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $\left((\overline{v}(t_1), \ldots, \overline{v}(t_n)) \in R^M\right) \Longleftrightarrow (\overline{v}(R(t_1 \ldots t_n)) = T)$.
- תהא α נוסחה אזי $\overline{v}(\neg\alpha) = TT_\neg(\overline{v}(\alpha))$.
- תהיינה α, β נוסחאות ויהי $\circ$ קשר בינארי אזי $\overline{v}(\alpha \circ \beta) = TT_\circ(\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\beta))$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\exists d \in D^M \left(\overline{v[d/x]}(\varphi) = T\right)\right) \Longleftrightarrow (\overline{v}(\exists x\varphi) = T)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\forall d \in D^M \left(\overline{v[d/x]}(\varphi) = T\right)\right) \Longleftrightarrow (\overline{v}(\forall x\varphi) = T)$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x \in \text{FV}(t) . v_1(x) = v_2(x)$ אזי $\overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi)$.

נוסחה ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי נוסחה φ עבורה $\overline{v}(\varphi) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא φ נוסחה ספיקה ב־M אזי $M, v \models \varphi$.

t־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה יהי M מבנה ותהא v השמה עבורם $M, v \models \varphi$ אזי (M, v).

קבוצת נוסחאות ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים $\overline{v}(\varphi) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא Γ קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M אזי $M, v \models \Gamma$.

נוסחה t־ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M והשמה v עבורם $M, v \models \varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא v השמה תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה אם (M, v) t־מודל של Γ אז (M, v) t־מודל של φ אזי $\Gamma \overset{t}{\models} \varphi$.

נוסחאות t־שקולות: יהי σ מילון ותהא v השמה אזי נוסחאות φ, ψ עבורן $\{\psi\} \overset{t}{\models} \varphi$ וכן $\{\varphi\} \overset{t}{\models} \psi$.

נוסחה t־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ ולכל v השמה מתקיים (M, v) t־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t־תקפה אזי $\overset{t}{\models} \varphi$.

נוסחה נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי נוסחה φ עבורה לכל v השמה מתקיים $M,v\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא φ נוסחה נכונה ב־M אזי $M\models\varphi$.

v־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה אזי מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi\in\Gamma$ מתקיים $M\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא Γ קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי $M\models\Gamma$.

נוסחה v־ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה אם M v־מודל של Γ אז M v־מודל של φ אזי $\Gamma\overset{v}{\models}\varphi$.

נוסחאות v־שקולות: יהי σ מילון אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\}\overset{v}{\models}\varphi$ וכן $\{\varphi\}\overset{v}{\models}\psi$.

נוסחה v־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ מתקיים M v־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה v־תקפה אזי $\overset{v}{\models}\varphi$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי $\left(\overset{v}{\models}\varphi\right)\Longleftrightarrow\left(\overset{t}{\models}\varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה תקפה אזי $\exists x\varphi$ תקפה וכן $\forall x\varphi$ תקפה.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ תקפה אזי φ תקפה.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma\overset{t}{\models}\varphi\right)\Longrightarrow\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)$.

פסוק: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה $\mathrm{FV}\left(\varphi\right)=\varnothing$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת פסוקים ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma\overset{t}{\models}\varphi\right)\Longleftarrow\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי ($\Gamma\cup\{\varphi\}$ הינה t־ספיקה)$\Longleftrightarrow$($\Gamma\overset{t}{\not\models}\neg\varphi$).

טענה: יהי σ מילון ותהיינה φ,ψ נוסחאות אזי (φ,ψ הן t־שקולות)$\Longleftrightarrow$(($\varphi\Longleftrightarrow\psi$) תקפה).