פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_{+}(a)=f(a)$ וכן $F'_{-}(b)=f(b)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^{I}\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\iff(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int(f+g)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int(\alpha f)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int((f\circ g)\cdot g')$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^{n}|\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\ldots t_n\}$ המקיימות $\forall i\in\{1\ldots n\}.t_i\in[x_{i-1},x_i]$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-L|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a,b])=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid f\text{ אינטגרבילית רימן}\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot\mathrm{d}t=c(b-a)$.

טענה: $D(x)\notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f\in R([a,b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}\text{ נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{ נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ חסומה אזי $\int_{a}^{b}f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי $\omega\left(f,J\right)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה ויהי $x_{0}\in J$ אזי (f רציפה על x_{0})$\iff$($\lim_{\delta\to0}\omega\left(f,\left[x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right]\right)=0$).

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\iff$($\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}\left(I\right).\omega\left(f,I\right)<\varepsilon$).

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right)\Delta x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p_{1}\ldots p_{m}\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\ge\overline{I}\left(f\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

משפט: $C\left(\left[a,b\right]\right)\subseteq R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $f_{\upharpoonright_{\left[a,b\right]}}\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\wedge\left(f\in R\left(\left[b,c\right]\right)\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,d\right]}$ חסומה ויהיו $b<c\in\left[a,d\right]$ עבורה $f\in R\left(\left[a,d\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$ אזי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\left\{ \left(a_{i},b_{i}\right)\right\} _{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_{i},b_{i}\right)$ וכן $\sum\left(b_{i}-a_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\left|A\right|\le\aleph_{0}$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\upharpoonright_{A}}=g_{\upharpoonright_{A}}$ אזי $\int_{a}^{b}f=\int_{a}^{b}g$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_{i} & x\in\left\{ b_{1}\ldots b_{m}\right\} \\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_{a}^{c}f=\int_{a}^{c}g$.

משפט ליניאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{b}\alpha f+\beta g=\alpha\int_{a}^{b}f+\beta\int_{a}^{b}g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ ויהי $b\in\left(a,c\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f+\int_{b}^{c}f=\int_{a}^{c}f$.

הגדרה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=-\int_{b}^{a}f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\ge0$ אזי $\int_{a}^{b}f\ge0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_{a}^{b}f\ge\int_{a}^{b}g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ רציפה המקיימת $f\ge0$ וכן $\int_{a}^{b}f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\le\sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R([a,b])$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F\in C([a,b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b(f\cdot g)=f(x_0)\int_a^b g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ יהיו $x_1\ldots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\int_a^b f(x)=F(b)-F(a)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]|_a^b=f(b)-f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\varphi\in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ המקיימת $(\varphi(\alpha)=a)\wedge(\varphi(\beta)=b)$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=-\int_0^{2\pi}f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,dx\right|\le\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty).f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b].f\in R([a,b])$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.(a<b)\Longrightarrow(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R([a,c])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\mid\int_I f\text{ קיים וסופי}\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ אזי

- ליניאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ויהי $c\in(a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^\omega f\ge\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'(x)=f(x)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F(b)-F(a)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,\omega))$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}[f\cdot g]|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $\varphi\in C^1([c,\eta),[a,\omega))$ המקיימת $\varphi(c)=a$ וכן $\lim_{b\to\eta}\varphi(b)=\omega$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in(a,\omega).\forall b_1,b_2\in[B,\omega).\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow(f\in R([a,\omega)))$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\le\int_a^\omega|f|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftrightarrow$($F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega).f,g\in R([a,b])$ אזי

- $\left(\int_a^\omega g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega f<\infty\right)$.
- $\left(\int_a^\omega f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\int_1^\infty f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

משפט אבל: תהא $g\in C([a,\omega))\cap R([a,\omega))$ ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C([a,\omega))$ עבורה $G(x)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega} f(x)=0$ אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{x_0} g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_{x_0}^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

הלמה של בונה: תהא $f\in C^1((a,b))$ רציפה על a,b עבורה $(f'\ge0)\vee(f'\le0)$ ותהא $g\in C([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{x_0}g(x)\,dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)\,dx$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ אזי $R_n(f,a)(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1}(k-2n)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^m\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^m\,dx = \begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}=\prod_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta(s)(s-1)=1$.

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in(\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\iff\left(\forall x\in I.\lim_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C(I))\not\Longrightarrow(f\in C(I))$.
- אינטגרביליות רימן: $(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I))\not\Longrightarrow(f\in R(I))$.
- גבול האינטגרל: נניח $\underset{\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I)}{f\in R(I)}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)\not\Longrightarrow\left(\int_I f=L\right)$.
- נגזרות: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=L\right)\not\Longrightarrow(f'(x)=L)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in(\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\iff(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.|f_n(x)|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\wedge\left(g_n\xrightarrow{\text{u}}g\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{\text{u}}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon)\iff\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C(I)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in C(I)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ ותהא $f\in C([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ וכן $\forall n<m.f_m<f_n$ אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ כאשר $f\in C([a,b])$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a\in(0,1)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x)=\sum_{k=0}^\infty a^k\cos(b^k\pi x)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ כך $\left(\triangle_0(x)=\begin{cases}x&0\le x\le\frac12\\1-x&\frac12\le x\le1\end{cases}\right)\wedge(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0(x+1)=\triangle_0(x))\wedge\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0(4^kx)}{4^k}\right)$.

טענה: $\triangle_n\xrightarrow{\text{u}}\triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט: תהיינה $f_n \in C^1([a,b])$ עבורה $f_n' \xrightarrow{u} g$ ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n \xrightarrow{u} f$ וכן $f' = g$.
סימון: תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n} f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} f_n = f$ במ״ש.
משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty} u_n$ במ״ש אזי $\int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} u_n = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b u_i$.
משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ״ש ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ״ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} u_i$.
משפט M בוחן של וירשטראס: תהיינה $u_n \in \mathbb{R}^I$ ותהא $M \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ וכן $\forall x \in \mathbb{R}.\forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ״ש.
למה התמרת אבל: תהיינה $a,b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} a_m (b_k - b_{k+1})$.
משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ מתכנסת במ״ש וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנסת במ״ש.
משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n \xrightarrow{u} 0$ וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנסת במ״ש.
למה: תהא $f \in C([0,1])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין עבורה $\max|f - \varphi| < \varepsilon$.
למה: תהא $f \in C([0,1])$ ויהי $N \in \mathbb{N}$ נגדיר $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין כך $\varphi(x) = f(0) + N \sum_{k=0}^{N-1} (f(a_{k+1}) - 2f(a_k) + f(a_{k-1})) \max\{x - a_k, 0\}$ אזי $\varphi(a_m) = f(a_m)$. $\forall m \in \{0 \dots N\}$.
למה: קיימות $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורן $\lim_{n\to\infty} \max_{[-1,1]} |p_n(x) - |x|| = 0$.
משפט וירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $\exists p \in \mathbb{R}[x] . \max_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.
משפט וירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ אזי קיימות $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורן $p_n \xrightarrow{u} f$.
הגדרה: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
משפט: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n \xrightarrow{u} f$.
משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n \in R([a,\omega))$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi \in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n \in \mathbb{N}. |f_n| \le \Psi$ אזי $\left(\int_a^{\omega} f = \lim_{n\to\infty} \int_a^{\omega} f_n\right) \wedge \left(\text{מתכנסת בהחלט } \int_a^{\omega} f\right) \wedge (\forall b \in [a,\omega) . f \in R([a,b]))$.
טענה: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ ויהי $r < |q|$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ״ש על $[-|r|, |r|]$.
משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0,\infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} x \in (-R,R) & \text{מתכנס} \\ x \notin [-R,R] & \text{מתבדר} \end{cases}$.
רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.
משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.
הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right) \Longrightarrow (R=\infty)\right) \wedge \left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right) \Longrightarrow (R=0)\right)$.
טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ הינו R).
מסקנה: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = f'(x)$ על $(-R,R)$.
משפט: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k = f^{(m)}(x)$ על $(-R,R)$.