```
. סענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ חוג אבלי בעל יחידה R
                                                        ab=0 מתקיים ab=0 מתקיים a,b\in R עבורו לכל עבורו לכל
                                                         R\left[x_{1}\dots x_{n+1}
ight]=\left(R\left[x_{1}\dots x_{n}
ight]
ight)\left[x_{n+1}
ight] אוג אבלי בעל יחידה אזי
                                                                    . תחום שלמות R\left[x_1\dots x_n\right] אזי איי ויהי שלמות ויהי שלמות תחום שלמות יהי
                                                         R^{\times}=\{a\in R\mid \exists h\in R.ah=ha=1\} הגדרה: יהי חוג אבלי בעל יחידה אזי
                                                                                          למה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי (R^{	imes},*) חבורה.
                                                                                        (R[x])^{	imes}=R^{	imes} טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי
                                                                                            \mathbb{F}^{	imes}=\mathbb{F}\backslash\left\{ 0
ight\} המקיים \mathbb{F} העלי בעל אבלי אבלי חוג אבלי
                         .\sim_{	ext{Frac}}=\left\{ \left(\left(a,b
ight),\left(c,d
ight)
ight)\in\left(R	imes\left(Rackslash\left\{0
ight\}
ight)
ight)^{2}\mid ad=bc
ight\} אזי R
eq\left\{0
ight\} אזי איני R תחום שלמות באשר R\neq\left\{0
ight\} אזי
                                                                          .Frac (R)=R/_{\sim_{	ext{Frac}}} אזיR
eq\{0\} איזי איזי תחום שלמות באשר
[(a,b)]_{	ext{Frac}}+[(c,d)]_{	ext{Frac}}=\left[\left(ad+cb,bd
ight)
ight]_{	ext{Frac}} אזי (a,b)\,,(c,d)\in R	imes (R\setminus\{0\}) ויהיו R
eq\{0\} ויהיו הגדרה: יהי
                                                                                                        [(a,b)]_{\text{Frac}} \cdot [(c,d)]_{\text{Frac}} = [(ac,bd)]_{\text{Frac}} וכן
                                                               שדה. Frac (R) אזי אזי אזי אזי דרם: יהי אזר השברים: יהי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אוה.
                                                                                                        . ענה: יהי \mathbb{K} שדה אזי [x] תחום שלמות שלמות.
                                                                                     \mathbb{K}\left(x
ight)=\operatorname{Frac}\left(\mathbb{K}\left[x
ight]
ight) איז שדה איי הי \mathbb{K} יהי רציונליות: יהי
                                                                                                               מסקנה: יהי \mathbb{K} שדה אזי (x) שדה.
                                                                           הומומורפיזם בין חוגים: יהיו R,S חוגים אזי 
u:R	o S המקיימת

u(ab) = \nu(a) \nu(b) מתקיים u, b \in R משמרת כפל: לכל

u(a+b) = \nu(a) + \nu(b) מתקיים a,b \in R משמרת חיבור: לכל
   .
u\left(1_{R}
ight)=1_{S} המקיים בעלי יחידה: יהיו R,S חוגים בעלי יחידה אזי הומומורפיזם בין חוגים בעלי יחידה: יהיו
                                                            \ker\left(
u
ight)=
u^{-1}\left[\left\{0
ight\}
ight] אזי \left[\left\{0
ight\}
ight] הומומורפיזם אזי ויהי R,S חוגים ויהי
                                                            . חוגים \ker\left(\nu\right), \operatorname{Im}\left(\nu\right) אזי \left(\nu\right), \operatorname{Im}\left(\nu\right) חוגים \left(\nu\right), \operatorname{Im}\left(\nu\right) חוגים ויהי
                                R \hookrightarrow S = \{ \nu : R \to S \mid \mathsf{pr}ח חומורפיזם איז איז v \in R חוגים איז תמומורפיזם חח"ע
                                              (\ker(\nu)=0)אוי (א מונומורפיזם) אזי יהיו R,S ויהי ויהי ויהי R,S הומומורפיזם אזי (\ker(\nu)=0)
                                               R 	o S = \{ 
u: R 	o S \mid v \} הומומורפיזם על חוגים יהיו R,S חוגים אזי קבוצת האפימורפיזמים: יהיו
                                              (\operatorname{Im}(
u)=S)אפימורפיזם איז (
u,S) הומים ויהי(R,S) הומים ויהי(R,S) הומים ויהי
                                                                                                 R \simeq S יהיו איזומורפיים אויי חוגים חוגים חוגים דימון: יהיו
                     למה: יהיו R,S חוגים ויהי R,S הומומורפיזם אזי \nu אפימורפיזם וכן \nu אפימורפיזם וכן \nu אפימורפיזם).
                                                                                                            \mathbb{Z}\left[i
ight]=\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} חוג השלמים של גאוס:
                                                                    I+I\subset I וכן I\cdot R\subset I המקיימת וכן I\cdot R\subset I חוג אבלי אזי
                                                                              I(I,+) \leq (R,+) טענה: יהי R חוג אבלי ויהי ויהי I \subseteq R טענה: יהי
                                                                    . אידאל \ker\left(\nu\right) אידאל אוי \nu:R	o S חוגים ויהי חוגים ויהי R,S חוגים ויהי
                                      I\subseteq\{\{0\},R\} משפט: יהי I\subseteq R מחלים (אידאל שדה) משפט: יהי I\subseteq R מחלים (אידאל ווידה אזי מוד מחלים).

u \in (\mathbb{F} \hookrightarrow \mathbb{K}) \cup \{0\} אזי אזי 
u : \mathbb{F} \to \mathbb{K} שדות ויהי \mathbb{F}, \mathbb{K} הומומורפיזם אזי
```

חוג: תהא R קבוצה ותהיינה *,+ פעולות בינאריות אזי R המקיים

 $0_R=e$ אזי אוי (R,+,*) איבר היחידה של (R,+,*) אזי

(a*b)*c=a*(b*c) מתקיים $a,b,c\in R$ לכל לכל • אסוציאטיביות ספל:

 $a,b\in R$ לכל a*b=b*a המקיים a*b=b*a לכל חוג (R,+,*) חוג אבלי/קומוטטיבי/חילופי: חוג (R,+,*) עבורו (R,+,*) בעל איבר יחידה m וכן m סימון: יהי (R,+,*) חוג ויהי m איבר היחידה של (R,+,*) אזי m חוג ויהי m איבר היחידה וכן m חוג אבלי בעל יחידה. m טענה: יהי m אזי m חוג אבלי בעל יחידה וכן m חוג אבלי בעל יחידה.

a*(b+c)=(a*b)+(a*c) מתקיים $a,b,c\in R$ חוג הפילוג משמאל: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a,b,c\in R$ חוק הפילוג מימין: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a,b,c\in R$

. חבורה אבלית (R,+)

```
R/I = \{a+I \mid a \in R\} אידאל אזי I \subseteq R חוג אבלי ויהי חוג אבלי ויהי
a(ab)+I=(cd)+I אזי b+I=d+I וכן a+I=c+I אזי a+I=c+I איזי a+I=c+I איזי a+I=c+I טענה: יהי
                                           A(a+I) (b+I)=(ab)+I אזי איזי a,b\in R אידאל ויהיו ויהיו אבלי יהי I\subseteq R חוג אבלי יהי
                                                                   משפט חוג מנה: יהי R חוג אבלי ויהי I\subseteq R אידאל אזי R חוג אבלי.
  \ker(p)=I טענה: יהי p חוג אבלי יהי p איז ענהיר p:R 	o P כך p:R 	o R/I אידאל ונגדיר ונגדיר ונגדיר I\subseteq R
                                                             . חוגים אזי R/\mathrm{ker}(
u) חוגים חוגים חוגים 
u:R	o S חוגים ויהי רביזם חוגים אזי למה:
                                                    R/\ker(
u)\simeq \mathrm{Im}\,(
u) אזי חוגים חוגים 
u:R	o S חוגים ויהי תוגים ויהי
                                                           I 
eq R המקיים והיים I \subseteq R אידאל אמיתי: יהי
                                                       (I\cap R^{\times}=\varnothing)אזי (I\cap R^{\times}=\varnothing) אזי (I\cap R^{\times}=\varnothing) אזי (I\cap R^{\times}=\varnothing) טענה: יהי
             S(S)=\{\sum_{i=1}^n r_i s_i \mid (n\in\mathbb{N}_+) \land (r\in R^n) \land (s\in S^n)\} איז איזאל נוצר: יהי S\subseteq R חוג אבלי בעל יחידה ותהא
                                                                         . טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ותהא S\subseteq R אזי (S) אידאל
                                                                                                                     \mathbb{Z}[x]/(x^2+1)\simeq \mathbb{Z}\left[i
ight] טענה:
                                                  I=(a) המקיים a\in R עבורו קיים ועבור איז אידאל אזי אידאל חוג אבלי יהי אידאל אידאל אידאל יהי
             ab\in I עבורו לכל a,b\in R עבורו לכל a,b\in R מתקיים מחקיים ווג אבלי אזי אידאל איז אידאל איז עבורו לכל
                                   I \subsetneq J אידאל מקסימלי: יהי R חוג אבלי איזי אידאל I \subseteq R עבורו לכל אידאל I \subseteq R לא מתקיים
                                                                                 משפט: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי I \subseteq R משפט:
                                                                                            .(תחום שלמות) אידאל ראשוני) אידאל ראשוניR/I •
                                                                                                   שדה). אידאל מקסימלי)\Longleftrightarrow(ו אידאל I) •
                                                      . ראשי: חוג אבלי בעל יחידה R עבורו לכל אידאל I\subseteq R מתקיים כי I ראשי
    a,b\in R^{	imes} עבורו לכל a,b\in R^{	imes} מתקיים a,b\in R מתקיים עבורו איז a,b\in R^{	imes} עבורו לכל
                    a,b \in R עבורו לכל עבר המקיימים a,b \in R מתקיים אזי בעל יחידה אזי בעל יחידה אזי r \in R עבורו לכל
                                                                                                                         משפט: יהי \mathbb{K} שדה אזי
                                                                                                                       תחום ראשי. \mathbb{K}[x]
                                                    (x] מקסימלי) מקסימלי) אי־פריק ב־(f) אי־פריק ב־(f) איזי f \in \mathbb{K}[x].
                                                                        Rמסקנה: יהי R תחום שלמות אזי (R[x] תחום ראשי) שדה).
                Aבורש A\subseteq M עבורו A\subseteq M אידאל אזי קיים אידאל מקסימלי והיי A\subseteq M עבורו A\subseteq M אידאל אזי קיים אידאל מקסימלי
    \gcd(f_1\dots f_n)=d וכן dוכן מתוקן אזי f_1\dots f_n, d\in\mathbb{K}\left[x
ight] באשר שדה ויהיו \mathbb{K} אזי יהי \mathbb{K} שדה ויהיו
משפט חלוקה עם שארית: יהי g חוג אבלי בעל יחידה ויהיו f,g\in R\left[x
ight] באשר המקדם המוביל של חוג אבלי בעל יחידה ויהיו
                                                                                    deg(r) < deg(g) באשר q, r \in R[x]
                                                                  \gcd(f,g)=1 פולינומים זרים: יהי{\mathbb F} שדה אזי f,g\in{\mathbb F}[x] המקיימים
                                                   \gcd(a_1\dots a_n)=1 המקיים \sum_{i=0}^n a_i x^i אזי a_0\dots a_n\in\mathbb{Z} הייו
 f=(rg)\,(sh) וכן sh,rg\in\mathbb{Z}\,[x] המקיימים r,s\in\mathbb{Q} האי קיימים g,h\in\mathbb{Q}\,[x] ויהיו f\in\mathbb{Z}\,[x]\setminus\{0\} ויהיו
                                          d\in\mathbb{Z}\left[x
ight] אזי אזי d\in\mathbb{Z}\left[x
ight] מסקנה גאוס: יהי d\in\mathbb{Z}\left[x
ight] מחקן ויהי מתוקן ויהי
                                               \mathbb{Q}[x] וכן f פרימיטיבי). למה גאוס: יהי \mathbb{Q}[x] אזי f \in \mathbb{Z}[x] אזי f \in \mathbb{Z}[x] אזי למה גאוס:
טענה קריטריון אייזנשטיין: יהיו a_0\ldots a_n\in\mathbb{Z} ויהי p
mid a_i וכן i< n לכל p|a_i וכן p
mid a_n אי־פריק איזיa_0\ldots a_n\in\mathbb{Z} אי־פריק אייזנשטיין: יהיו
טענה קריטריון אייזנשטיין המוכלל: יהי \mathbb{F} שדה יהיו a_0\ldots a_n\in\mathbb{F}\left[x_1\ldots x_m
ight] ויהי שדה יהיו שדה יהיו שדה יהיו שדה יהיו
                                                            \mathbb{F}\left(x_1 \dots x_m
ight)[x] אי־פריק מעל \sum_{i=0}^n a_i x^i אזי p^2 \nmid a_0 וכן i < n לכל p \mid a_i
                                                    a\in\mathbb{K} אזי a\in\mathbb{K} המקיים a\in\mathbb{K} אזי a\in\mathbb{K} אזי שדה ויהי a\in\mathbb{K} שדה ויהי
                                                        \mathrm{sols}_{\mathbb{K}}\left(f
ight)=\left\{lpha\in\mathbb{K}\mid f\left(lpha
ight)=0
ight\} אזי f\in\mathbb{K}\left[x
ight]\setminus\left\{0
ight\} שדה ויהי
                                           \alpha\in\mathrm{Sols}_{\mathbb{K}}(f) אזי \alpha\in\mathrm{Sols}_{\mathbb{K}}(f) ויהי f\in\mathbb{K}[x] ויהי שדה יהי שדה יהי שדה יהי f\in\mathbb{K}[x]
                                                                    |\mathrm{sols}_{\mathbb{K}}\left(f
ight)| \leq \deg\left(f
ight) אזי f \in \mathbb{K}\left[x
ight] \setminus \{0\} שדה ויהי שדה ויהי
                                               (x-lpha)^2
mid f המקיים lpha\in\mathrm{sols}_{\mathbb{K}}(f) אזי f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\} המקיים שורש שוט: יהי
                                               (x-lpha)^2\,|f המקיים lpha\in\operatorname{sols}_{\mathbb{K}}(f) אזי f\in\mathbb{K}\,[x]\setminus\{0\} המקיים \mathbb{K} שדה ויהי
                                  .ig(\sum_{i=0}^n a_i x^iig)' = \sum_{i=1}^n a_i x^{i-1} אזי a_0 \dots a_n \in \mathbb{K} ויהיו n \in \mathbb{N} יהי של פולינום: יהי
```

```
(\gcd(f,f')=1) שדה ויהי f\in\mathbb{K}[x]\setminus\{0\} אזי (כל השורשים של f הם פשוטים) משפט: יהי
                                                         \deg(f)>1 באשר f\in\mathbb{F}[x] איי (אייפריק) שדה אזי ויהי f\in\mathbb{F}[x] באשר באשר ויהי
                                                                                                                                             \mathbb{F}_p=\mathbb{Z}_p אזי p\in\mathbb{P} סימון: יהי
                                                                                                             \mathbb{K} \subseteq \mathbb{L} שדה אזי שדה \mathbb{L} המקיים שדה אזי יהי
                                                                                                         \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי אזי \mathbb{K} אזי אוי \mathbb{K},\mathbb{L} יהיו יהיו \mathbb{K},\mathbb{L} אזי
                                                                                    . כאובייקט \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי נתייחס לביטוי אזי באשר אדות באשר \mathbb{K},\mathbb{L} כאובייקט.
                                                                                                      \mathbb{L}/\mathbb{K} טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי הינו מרחב וקטורי מעל
                                   .
u_{\mathbb{F}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{F}} המיינה 
u:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{L} איי שיכון \mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{L} הרחבות. ההיינה \mathbb{K}/\mathbb{F},\mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבות איי שיכון
                                                 \mathbb{K}/\mathbb{F} \to \mathbb{L}/\mathbb{F} = \{ 
u : \mathbb{K} \hookrightarrow \mathbb{L} \mid 
u_{\mathbb{I}_{\mathbb{F}}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}} \} הרחבות אזי \mathbb{K}/\mathbb{F}, \mathbb{L}/\mathbb{F} שדה ותהיינה
                                           \mathbb{F} טענה: יהי \mathbb{F} שזה תהיינה \mathbb{K}/\mathbb{F}, \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבות ויהי \mathbb{F}/\mathbb{F} \to \mathbb{L}/\mathbb{F} שזה תהיינה שלה מעל מענה: יהי
                                                                                                     \mathbb{K}\subset\mathbb{F} שדה פשוט: שדה \mathbb{K} עבורו לא קיים שדה עבורו
                                                                                                          טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי \mathbb{K} שדה אזי \mathbb{K} שדה פשוט.
                                                                                                             \mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} מסקנה: יהי \mathbb{F} שדה אזי קיים ויחיד שדה פשוט
                                                                                                     \mathbb{F} = \mathbb{F} = \mathbb{F} = \mathbb{F}משפט: יהי \mathbb{F} שדה פשוט אזי אזי (\exists p \in \mathbb{P}.\mathbb{F} \simeq \mathbb{F}_p) משפט: יהי
                                                                                                        \mathbb{F}_p\subseteq\mathbb{K} עבורו p\in\mathbb{P} עבורו אזי קיים שדה סופי אזי יהי
                                                                                 \|\mathbb{K}\|=p^n עבורם n\in\mathbb{N} וקיים וקיים אזי קיים אזי סופי אזי סופי אזי p\in\mathbb{P}
                                                                                                             מציין של שדה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} שדה פשוט אזי
                                                                                                                                        .char (\mathbb{F})=0 אז \mathbb{K}\simeq\mathbb{Q} אם ullet
                                                                                                            .char (\mathbb{F})=p אז \mathbb{K}\simeq\mathbb{F}_p עבורו p\in\mathbb{P} אם קיים p\in\mathbb{F}
                                                                      .char (\mathbb{F})\cdot a=0 מתקיים a\in\mathbb{F} אזי לכל char (\mathbb{F})>0 שדה המקיים
                                                    (x+y)^p=x^p+y^p אזי (x+y)^p=x^p+y^p לכל אזי המקיים שדה המקיים שדה המקיים p\in\mathbb{R}
                                 \operatorname{Fr}_p(a)=a^p כך \operatorname{Fr}_p:\mathbb{K}	o\mathbb{K} אזי נגדיר המקיים p\in\mathbb{F} וויהי p\in\mathbb{F} שדה המקיים רובניום: יהי p\in\mathbb{K}
                                                                                . מונומורפיזם \mathrm{Fr}_p אזי \mathrm{char}\left(\mathbb{K}\right)=pשדה המקיים שבט: יהי ויהי p\in\mathbb{P} יהי יהי משפט:
                    \operatorname{sols}\left(ax^2+bx+c\right)=\left\{rac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
ight\} אזי איזי a
eq 0 באשר a,b,c\in\mathbb{F} ויהיו (\mathbb{F})
eq 2 שענה: יהי
                                                                                        . אינה ציקלית אינה אינסופי באשר באשר אינסופי אינה אינסופי באשר \mathbb{F}^{	imes} אינה אינסופי באשר
                             f(lpha)=0 איבר אלגברי מעל שדה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת שדות אזי lpha\in\mathbb{L} עבורו קיים lpha\in\mathbb{K} המקיים
                                                 \mathbb K אינו אלגברי מעל שדה: תהא \mathbb L/\mathbb K הרחבת שדות אזי lpha\in\mathbb L באשר אינו אלגברי מעל
                                                                       \mathbb{K} אלגברי מעל lpha: הרחבה אלגברית: הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} עבורה לכל
                                                                                                                                                .טענה: \mathbb{C}/\mathbb{R} הרחבה אלגברית
                       \mathbb{K}\subseteq R סטענה: תהא \mathbb{K}\subseteq R הרחבה אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה אלגברית) אלגברית: המקיים \mathbb{K}\subseteq R מתקיים כי \mathbb{K}
פולינום מינימלי של איבר אלגברי: תהא \mathbb{K} הרחבה ויהי אלגברי מעל \mathbb{K} איי פולינום מתוקן f\in\mathbb{K} תהא אלגברי: תהא A\in\mathbb{L} הרחבה ויהי ביל מעל איי
```

 $f\left(lpha
ight)=0$ מינימלית המקיים $f\left(lpha
ight)=0$. משפט: תהא \mathbb{Z}/\mathbb{Z} הרחבה ויהי $lpha\in\mathbb{Z}$ אלגברי מעל \mathbb{Z} אזי קיים ויחיד פולינום מינימלי $f_lpha\in\mathbb{Z}$ עבור lpha וכן $f_lpha=0$. $f_lpha=0$

 f_lpha הינו lpha הינו מעל אזי הפולינום המינימלי של אלגברי מעל מעל הרחבה ויהי מעל $lpha\in\mathbb{L}$ הרחבה היהי

. אי־פריק f_lpha אזי מסקנה: תהא \mathbb{K} אזי מסקנה ויהי ויהי $lpha\in\mathbb{L}$ אהרחבה ויהי

 $f=f_{lpha}$ אזי $f\left(lpha
ight)=0$ טענה: תהא \mathbb{Z}/\mathbb{K} הרחבה יהי $lpha\in\mathbb{L}$ אלגברי מעל \mathfrak{Z} ויהי $f\in\mathbb{K}$ אי־פריק מתוקן המקיים $lpha\in\mathbb{L}$ אזי $lpha\in\mathbb{L}$ טענה: יהי \mathfrak{Z} שדה תהיינה $\mathfrak{Z}/\mathbb{F},\mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבות יהי $\mathfrak{Z}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבות יהי $\mathfrak{Z}/\mathbb{F},\mathbb{L}/\mathbb{F}\to\mathbb{K}$ הרחבות יהי $\mathfrak{Z}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבות יהי \mathfrak{Z}/\mathbb{F} הרחבות יחבות יחבו

המינימלי המקיים בעל יחידה האבלי בעל יחידה אבלי ויהי אבליים בעל יחידה באשר אבריים ויהי אבליים בעל יחידה אבלי איז א איז או האבלי ויהי אבליים בעל יחידה באשר אבריים בעל יחידה באשר איז או איז או איז או איז או איז א

A[S]=R סימון: יהיו A,B חוגים אבליים בעלי יחידה באשר $A\subseteq B$ תהא $A\subseteq B$ ויהי $A\subseteq B$ החוג הנוצר מ־A על ידי A אזי $A[S]=\bigcup_{n=1}^\infty \left\{f\left(s_1\dots s_n\right)\,\middle|\, f\in A[s_1\dots s_n\in S] \atop s_1\dots s_n\in S\right\}$ אזי $A\subseteq B$ אויהים אבליים בעלי יחידה באשר $A\subseteq B$ ותהא $A\subseteq B$ ותהא $A\subseteq B$ אזי $A\subseteq B$ הרחבה נוצרת: תהא $A\subseteq B$ הרחבה תהא $A\subseteq B$ ויהי $A\subseteq B$ ויהי $A\subseteq B$ הרחבה הנוצרת על ידי $A\subseteq B$ אזי $A\subseteq B$ ותהא $A\subseteq B$ ווהי $A\subseteq B$ ווחים בעלי יחידה באשר $A\subseteq B$ ווחידה בא

```
\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) טענה:
                                                                                                                 \mathbb{K}\left(lpha
ight)/\mathbb{K} אזי lpha\in\mathbb{L} ויהי ויהי \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי
                                                                                              משפט מבנה של הרחבה פשוטה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי משפט מבנה של הרחבה פשוטה
                                                                                                        \mathbb{K}\left(lpha
ight)/\mathbb{K}\simeq\mathbb{K}\left(x
ight)/\mathbb{K} אז אז \alpha טרנסצנדנטי מעל • •
                                                                                                        \mathbb{K}(\alpha)/\mathbb{K}\simeq \left(\mathbb{K}[x]/(f_{\alpha})\right)/\mathbb{K} אז אלגברי מעל \alpha אלגברי מעל \alpha

u:\mathbb{K}\left(lpha
ight)/\mathbb{K} 	o \mathbb{K}\left(eta
ight)/\mathbb{K} שורשים של f אזי קיים איזומורפיזם f\in\mathbb{K}\left[x
ight]\setminus\{0\} אי־פריק ויהיו f\in\mathbb{K}\left[x
ight]\setminus\{0\} שורשים של
                                                                                                                                                                        .\nu\left(\alpha\right)=\beta באשר
 המקיים f\in\mathbb{K}\left[x_1\dots x_n
ight] איי קיים eta\in\mathbb{K}\left(lpha_1\dotslpha_n
ight) איי איי קיים מעל lpha_1\dotslpha_n\in\mathbb{L} המקיים החחבה יהיו
                                                                                                                                                                      f(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \beta
                                                                                                    \mathbb{L}:\mathbb{K}=\dim_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{L}
ight) הרחבה אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} תהא
                                                                                                                  \mathbb{L} : \mathbb{K}] < \infty המקיימת \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית: הרחבה
                                     \mathbb{F}^{[x]/(f)} בסיס של \{x^i+(f)\}_{i=0}^{n-1} אזי \deg(f)=n באשר באשר f\in\mathbb{F}[x] ביסיס של n\in\mathbb{N}_+ יהי הי
                                                                                                  טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה נוצרת סופית.
                                                    טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה סופית) הרחבה אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה אזי
                                                                      \mathbb{L}[\mathbb{K}\left(lpha
ight):\mathbb{K}]=\deg\left(f_{lpha}
ight) אזי מענה: תהא lpha\in\mathbb{L} הרחבה ויהי lpha\in\mathbb{L}
                                                     \mathbb{F}:\mathbb{K}=[\mathbb{F}:\mathbb{L}]\cdot[\mathbb{L}:\mathbb{K}] אזי \mathbb{F}/\mathbb{L},\mathbb{L}/\mathbb{K} משפט מולטיפליקטיביות של דרגה: תהיינה
    (פימים \mathbb{F}/\mathbb{K} המקיים \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבה סופית) אזי (\alpha\in\mathbb{F} המקיים \alpha\in\mathbb{F} המקיים אזי (\alpha\in\mathbb{F} הרחבה סופית).
הרחבה \mathbb{F}/\mathbb{K} הכחבה \mathbb{F} המקינם שדה \mathbb{F}\subseteq\mathbb{L} המקינם מעל \alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{L} הרחבה ויהיו \alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{L} הרחבה ויהיו
                                                                                   מסקנה: תהיינה \mathbb{F}/\mathbb{L}, \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבות אלגבריות אזי \mathbb{F}/\mathbb{L}, \mathbb{L}/\mathbb{K} מסקנה:
                                                                                                                     \mathbb{Q}\left(\sqrt{q}
ight)
ot\simeq\mathbb{Q}\left(\sqrt{p}
ight) שונים אזי p,q\in\mathbb{P} טענה: יהיו
               \mathbb{L}\left[x
ight] איז אי־פריק מעל f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אי־פריק מעל f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אי־פריק מעל אי־פריק מעל f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אי־פריק מעל
                                                                          \overline{\mathbb{K}_{\mathbb{L}}}=\{lpha\in\mathbb{L}\mid\mathbb{K} אלגברי מעל lpha\} הרחבה אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה: תהא
                                                                                                                                     מסקנה: תהא \mathbb{K}_{\mathbb{L}} הרחבה אזי שדה.
                                                                                                                          |\mathbb{F}[x]| = \max\{|\mathbb{F}|, \aleph_0\} טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי
                                                                                                    \|\mathbb{L}\| \leq \max\left\{ |\mathbb{K}| \, , \aleph_0 
ight\} טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אלגברית אזי
                                       a\in\mathbb{K} המקיים lpha\in\mathbb{K} המקיים מצור אלגברית: שדה שדה לכל לכל באשר f\in\mathbb{K}\left[x
ight] באשר באשר שדה סגור אלגברית: שדה עבורו לכל
                                                                                                           טענה המשפט היסודי של האלגברה: \mathbb C שדה סגור אלגברית.
                                                                                       הרחבה סגורה אלגברית: הרחבה אלגברית \mathbb{L}/\mathbb{K} באשר שלגברית:
f=lpha_0\cdot\prod_{i=1}^n(x-lpha_i) בולינום מתפרק לגורמים לינאריים: יהי \mathbb K שדה אזיf\in\mathbb K\left[x
ight] עבורו קיימים lpha_0,lpha_1\ldotslpha_n\in\mathbb K
                                                              טענה: יהי \mathbb{K} שדה סגור אלגברית ויהי f \in \mathbb{K}[x] \setminus \{0\} אזי f \in \mathbb{K}[x] טענה:
                                     . הרחבה סגורה אלגברית \mathbb{L}/\mathbb{F} אזי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} המקיים \mathbb{F}\subseteq\mathbb{L} הרחבה סגורה אלגברית ויהי
                                                                                   \mathbb{L}=\mathbb{K} אזי אלגברית אוי הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אלגברית אזי שדה סגור אלגברית ותהא
                            \mathrm{sols}_{\mathbb{L}}(f) 
eq \varnothing המקיימת \mathbb{L}/\mathbb{K} שדה ויהי \mathbb{E}/\mathbb{K} שדה ויהי באשר f \in \mathbb{K}[x] באשר החבה אז קיימת הרחבה אין מיימת הרחבה הויהי
                      למה: יהי \mathbb{Z} שדה ויהי f\in\mathbb{K} [x]\setminus\{0\} אזי קיימת הרחבה סופית עבורה קיימים f\in\mathbb{K} אזי קיימת הרחבה למה:
                                                                                                                                                            f = \alpha_0 \cdot \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)
 המקיימת lpha\in M_{m	imes(n+1)}\left(\mathbb{L}
ight) עבורה קיימת \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי קיימת הרחבה אזי קיימת הרחבה f_1\dots f_m\in\mathbb{K}\left[x
ight]\setminus\{0\} המקיימת
                                                                                                                              j \in [m] לכל f_j = \alpha_{j,1} \cdot \prod_{i=1}^n (x - \alpha_{j,i+1})
\mathbb{L}/\mathbb{K} משפט: יהי \mathcal{T} שדה תהא \mathcal{T} קבוצה ויהיו \langle f_	au \in \mathcal{T} | 	au \in \mathcal{T} \rangle באשר באשר לכל לכל לכל שדה תהא \mathcal{T} קבוצה ויהיו באלגברית להיו ליהיו
                                                                                                                                         .	au \in \mathcal{T} לכל \mathrm{sols}_{\mathbb{L}}\left(f_{	au}
ight) 
eq arnothing המקיימת
                                                                                                       \mathbb{L}/\mathbb{K} שדה אזי קיימת הרחבה סגורה אלגברית שפט: יהי \mathbb{K} שדה אזי קיימת
\Phi:\mathbb{L}\hookrightarrow\mathbb{F} משפט שטייניץ: תהא 
u:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{F} הרחבה אלגברית יהי 
u:\mathbb{K}\hookrightarrow\mathbb{F} שדה סגור אלגברית ויהי שדה סגור אלגברית היהי
                                                                                      \mathbb{F}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{L}/\mathbb{K} אזי אלגברית סגורות הרחבות הרחבות \mathbb{F}/\mathbb{K},\mathbb{L}/\mathbb{K} מסקנה:
```

 $\mathbb{L}(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{f,g \in \mathbb{K}[x_1 \dots x_n]} \left\{ rac{f(s_1 \dots s_n)}{g(s_1 \dots s_n)} \;\middle|\; rac{s_1 \dots s_n \in S}{g(s_1 \dots s_n)
eq 0}
ight\}$ אזי $S \subseteq \mathbb{L}$ אזי $S \subseteq \mathbb{L}$ הרחבה ותהא

```
. טענה: יהי \mathbb{F} שדה אינסופי אזי \mathbb{F}^{	imes} אינה ציקלית
                               אזי \gcd(f,g)=1 וכן a=rac{f}{a} באשר f,g\in\mathbb{K}[x] ויהיו a\in\mathbb{K}(x) שדה תהא שדה תכיינלית: יהי
                                                                                                                                                                                \deg(a) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}\
משפט: יהי \mathbb{K}\left(x\right)/\mathbb{K}\left(a\right) וכן איז a איז אי \deg\left(a\right)\geq1 באשר a\in\mathbb{K}\left(x\right) הרחבה אלגברית מדרגה a
.(a=rac{lpha x+eta}{\gamma x+\delta} וכן lpha \delta-eta\gamma
eq 0 המקיימים lpha,eta,\gamma,\delta\in\mathbb{K} וכן (lpha) אוי (lph
                                     . \mathrm{Aut}\left(\mathbb{K}\left(x\right)\right) = \left\{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \;\middle|\; (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}) \land (\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0)\right\} שדה אזי \alpha \in \mathbb{K}\left(x\right) אוטומורפיזם ויהי \alpha \in \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} \to \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} \to \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} אוטומורפיזם ויהי \alpha \in \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} \to \mathbb{K}\left(x\right) / \mathbb{K} אוטומורפיזם ויהי
                                                                \mathbb{L}=\mathbb{K}\left(lpha
ight) טרנסצנדטי המקיים lpha\in\mathbb{L} עבורה קיים עבורה מקיים המקיים lpha
  משפט לורות': יהיו \mathbb{L}/\mathbb{K} שדות באשר \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה לא טריוואלית וכן \mathbb{L}(x) הרחבה אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה טרנסצנדנטית פשוטה.
                                f\left(
u,\psi
ight)=0 עבורן עבורן 
u,\psi\in\mathbb{K}\left(x
ight) אזי פונקציות רציונליות שדה ותהא איז שדה ותהא ותהא f:\mathbb{K}^{2}	o\mathbb{K} אזי פרמטריזציה איזי פונקציות יהי
                                  . עקומה רציונלית: יהי \mathbb K שדה תהא איז עקומה f:\mathbb K^2	o\mathbb K אזי עקומה רציונלית: יהי שדה תהא שדה תהא איז עקומה רציונלית: יהי
                   \mathbb{K}\left(u_1\dots u_m
ight) איבר תלוי אלגברית מעל שדה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה ויהיו u_1\dots u_m\in\mathbb{L} איבר תלוי אלגברית מעל שדה: תהא
אינו תלוי אלגברית מעל שדה (בת"א): תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה ויהיו u_1 \ldots u_m \in \mathbb{L} אינו תלוי אלגברית מעל שדה (בת"א): איבר בלתי תלוי אלגברית מעל אינו תלוי אלגברית מעל שדה (בת"א): איבר בלתי תלוי אלגברית מעל שדה (בת"א): תהא
\mathbb K מעל u_1\ldots u_{m-1} בת"א ב־u_1\ldots u_m מעל u_1\ldots u_m מעל u_1\ldots u_m,v\in\mathbb L בת"א ברית מעל u_1\ldots u_m מעל u_1\ldots u_m
                                                                                                                                                         \mathbb{K} מעל u_1 \dots u_{m-1}, vמעל אלגברית תלוי אלגברית תלוי
למה: תהא v_j וכן \mathbb K וכן v_j חלוי אלגברית ב־u_1 \dots u_m, v_1 \dots v_n באשר שוכן v_j \dots v_n מעל \mathbb L/\mathbb K הרחבה הייו
                                                                                                     \mathbb{K} מעל וu_1\ldots u_m מעל אזי אלגברית אזי j\in [n] מעל אזי מעל ברu_1\ldots u_m
קבוצה בלתי תלויה אלגברית/טרנסצנדנטיים בלתי תלויים אלגברית זה בזה (בת"א): תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי u_1\dots u_m\in\mathbb{L} עבורם
                                                                                                                  f=0 אז f\left(u_1\ldots u_m
ight)=0 מתקיים כי אם f\in\mathbb{K}\left[x_1\ldots x_m
ight]
                                                          \mathbb{K}(u_1\dots u_m)\simeq \mathbb{K}(x_1\dots x_m) אוי משפט: תהא \mathbb{K} אוי u_1\dots u_m\in \mathbb{L} ויהיו הרחבה ויהיו הרחבה u_1\dots u_m\in \mathbb{L}
f\in \mathbb{K}\left[x_1,\ldots,x_{|S|}
ight] סופית ולכל S\subseteq \mathcal{B} סופית הראברית (בת"א): תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי\mathcal{B}\subseteq \mathbb{L} עבורה לכל
                                                                                                                                                                                                f = 0 אז f(S) = 0 כי אם
                          \mathbb{K}\left(\{u_{lpha}\}_{lpha\in\mathcal{I}}
ight)\simeq\mathbb{K}\left(\{x_{lpha}\}_{lpha\in\mathcal{I}}
ight) אזי משפט: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} אהרחבה תהא \mathbb{L} קבוצה ותהא \{u_{lpha}\}_{lpha\in\mathcal{I}}\subseteq\mathbb{L}
\mathbb K בת"א מעל \mathbb A עבורה לכל בת"א בת"א מעל בת"א מעל בת"א מעל \mathbb A\subseteq\mathbb L בת"א מעל בת"א מעל בת"א מעל בת"א מעל בת"א מעל
                                                                                                                                                                                                                       \mathcal{B} \not\subset \mathcal{A} מתקיים
                                                                                              . משפט: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} בסיס טרנסצנדנטי אזי קיים ל־\mathbb{L}/\mathbb{K} בסיס טרנסצנדנטי
              \mathbb{L}/\mathbb{K} המקיים \mathbb{L}/\mathbb{K} של \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת שדות ותהא אזי קיים בשר \mathbb{L}=\mathbb{K}(S) באשר S\subseteq\mathbb{L} באשר באים טרנסצנדנטי
                                                             \mathbb{L}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{K}\left(\{x_lpha\}_{lpha\in\mathcal{I}}
ight)/\mathbb{K} הרחבה טרנסצנדנטית: הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{K}\left(\{x_lpha\}_{lpha\in\mathcal{I}}
ight) אבורה קיימת קבוצה \mathcal{I} המקיימת
מסקנה משפט הפיצול: תהא \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבה אזי קיים שדה \mathbb{F} באשר \mathbb{F}/\mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבה טרנסצנדנטית וכן
                                                                                                                                                                                                           \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבה אלגברית.
eta\in B וכן לכל \mathbb{K}\left(B
ight) אלגברי מעל \mathbb{K}\left(B
ight) וכן לכל A,B\subseteq\mathbb{L} אבון לכל A,B\subseteq\mathbb{L} וכן לכל
                                                                                                                                                                                      \mathbb{K}\left(A
ight) מתקיים כי eta אלגברי מעל
           \mathbb{A}באשר A,M שקולות אלגברית מעל \mathbb{K}. דורש A\subset\mathbb{L} אזי קיימת A\subset\mathbb{L} אזי קיימת A\subset\mathbb{L} אזי קיימת
וכן B\subseteq M באשר M\subseteq A בת"א מעל M\subseteq A בת"א אזי קיימת בת"א באשר B\subseteq A באשר A,B\subseteq \mathbb{L} באשר באחר \mathbb{L}/\mathbb{K}
```

למה משפט ההחלפה: תהא b_j וכן \mathbb{K} הרחבה ויהיו באשר $\{b_1\dots b_s\}$ באשר $\{b_1\dots b_s\}$ בת"א מעל \mathbb{K} וכן \mathbb{K} הרחבה ויהיו אלגברית באטר $S\subseteq \{a_1\dots a_r,b_1\dots b_s\}$ איז $S\subseteq \{a_1\dots a_r\}$ וכן קיימת $S\subseteq \{a_1\dots a_r\}$ ביונר אז איז בין איז איז בין דיימת באטר איז מעל $S\subseteq \{a_1\dots a_r\}$

|A|=|B| אזי אזי אוגברית מעל \mathbb{K} אזי אקולות אלגברית בת"א בת"א בת"א בת"ג בת"ג הרחבה ותהיינה

 $\overline{\mathbb{K}}=\mathbb{L}$ אזי $\mathbb{K}=\mathbb{L}$ הרחבה סגורה אלגברית אזי $\mathbb{K}=\mathbb{L}$

 $.\overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{C}}}=\overline{\mathbb{Q}}$ טענה: $|\overline{\mathbb{Q}}|=leph_0$

 \mathbb{A} ורש \mathbb{K} . אפקולות אלגברית מעל A,M

 \mathbb{K} מעל $\{a_1 \dots a_r\}$ מעל

 $L/\mathbb{K} o \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}$ מסקנה: תהא $\mathbb{L}/\mathbb{K} o \mathbb{K}$ הרחבה אלגברית אזי קיים הומומורפיזם

```
\mathbb{K} 
eq \mathbb{R} וכן \mathbb{K} \simeq \mathbb{R} טענה: קיים שדה \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C} באשר
                                                                                                                                                            |\operatorname{Aut}\left(\mathbb{C}/\mathbb{Q}\right)|=2^{\aleph_0} וכן \operatorname{Aut}\left(\mathbb{R}/\mathbb{Q}\right)=\{e\} טענה:
                                                                   \mathbb{F},\mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} שדות אזי השדה המינימלי \mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} המקיים שדה ויהיו שדה ויהיו שדה ויהיו שדה קומפוזיט: יהי
                                                                                                    \mathbb{F}\cdot\mathbb{K}=\mathbb{E} אזי \mathbb{F},\mathbb{K} אזי שדה קומפוזיט של \mathbb{F},\mathbb{K}\subseteq\mathbb{L} איזי שדה יהיו
\operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{FE}
ight)\leq \mathfrak{k} אזי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} אזי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} ויהייו \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}
ight)<\aleph_{0} אזי
                                                                                                                                                                                                                   \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}(\mathbb{F}) + \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}(\mathbb{E})
\mathbb{L}\left[x
ight] מתקיים כי f אינו מתפרק לגורמים לינאריים מעל בכל שדה \mathbb{L}\subset\mathbb{F}
                              \mathbb{F}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{L}/\mathbb{K} מתקיים f של f\in\mathbb{K}[x] אזי קיים ל-f שדה פיצול וכן לכל שדות פיצול f\in\mathbb{K}[x] אזי קיים ל-
                                                                                                                        \|\mathbb{F}\|=p^n טענה: יהי\mathbb{F} באשר n\in\mathbb{R} אזי קיים ויחיד שדה ויהי n\in\mathbb{R}_+ טענה:
                                                                                                                                    \mathbb{F}_{p^n}=\left\{x\in\overline{\mathbb{F}_p}\mid x^{p^n}=x
ight\} אזי p\in\mathbb{P} ויהי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי n\in\mathbb{N}_+
                                                            \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי f שדה הפיצול של ויהי \mathbb{L} ויהי \mathbb{L} שדה יהי f \in \mathbb{K}[x] אזי שדה יהי יהי \mathbb{K} שדה יהי יהי א
                                                                                                                                  \mathbb{L}[\mathbb{L}:\mathbb{K}]=2 אזי \mathbb{L}
eq \mathbb{K} איי באשר הרחבה ריבועית הא
מתפרק איז \mathrm{sols}_{\mathbb{L}}(f) 
eq \varnothing מתקיים כי אם f \in \mathbb{K}[x] עבורה לכל פולינום אי־פריק עבורה f \in \mathbb{K}[x] מתפרק
                                                                                                                                                                                                               \mathbb{L}\left[x
ight] לגורמים לינאריים מעל
                                                                                                                                    משפט: תהא \mathbb{K}/\mathbb{K} הרחבה סופית באשר שו\mathbb{K}/\mathbb{K} הרחבה אזי התב"ש
                                                                                                                                                                                                               . הרחבה נורמלית \mathbb{L}/\mathbb{K}
                                                                                                                                                                  f \in \mathbb{K}[x] שדה הפיצול של f \in \mathbb{K}[x]
                                                                                                                                                            \mathbb{F}=\mathbb{L} אז \mathbb{F}/\mathbb{K}\simeq\mathbb{L}/\mathbb{K} אם \overline{\mathbb{K}}/\mathbb{F} אז ullet
                                                                                                                                        .
u\left(\mathbb{L}
ight)=\mathbb{L} מתקיים 
u:\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}	o\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K} פלכל אוטומורפיזם •
                                                                       . הרחבה נורמלית \mathbb{L}/\mathbb{F} אזי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} אזי \mathbb{F}\subseteq\mathbb{L} הרחבה נורמלית ויהי מסקנה: תהא
                                                                                   \mathbb{L}\subset\mathbb{F} עבורה \mathbb{F}/\mathbb{K} עבורה סופית אוי קיימת הרחבה סופית נורמלית \mathbb{L}/\mathbb{K}
מסקנה: יהי \mathbb{K} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{L}\subset\mathbb{F} וכן \mathbb{K}\subset\mathbb{F} הרחבות נורמליות אזי \mathbb{F},\mathbb{L}\subset\mathbb{K} הרחבה \mathbb{F},\mathbb{L}\subset\mathbb{F}
                                                                                                                                                                                    נורמלית וכן \mathbb{L} \cap \mathbb{F}) /\mathbb{K} ורחבה נורמלית.
                                                                                                                                       מסקנה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה מדרגה 2 אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה נורמלית.
                                                                                                          \mathbb{L}/\mathbb{F} אזי \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבה נורמלית. שדה סופי ותהא \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבה כופית אזי
\mathbb{L}[x] אינ איי לגברית איי לגברית איי (לכל \mathbb{L}[x] הרחבה לכלית) הרחבה בורמלית) הרחבה אלגברית איי הרחבה על הרחבה נורמלית)
                                                                 (\mathbb{L}\left[x
ight] איי f,g) איי ארים מעל f,g איי ארים מעל f,g\in\mathbb{K}\left[x
ight] זרים מעל \mathbb{L}/\mathbb{K} איי גוווי תהא
                           אזי \mathbb{L}\left[x
ight] מעל g,h|f אי־פריקים באשר g,h\in\mathbb{L}\left[x
ight] אי־פריק אי־פריק מעל פריקים אי־פריקים אי־פריק מעל אי־פריק מעל אי־פריק מעל אי־פריקים אי־פ
                                                                                                                                                                                                                                  \deg(q) = \deg(h)
                                                                                          \overline{\mathbb{K}}\left[x
ight] שדה אזי באשר f באשר בעל שורשים מעל שדה אזי שדה אזי פולינום ספרבילי: יהי
                                                                                  \overline{\mathbb{K}}[x] אי־ספרבילי טהור: יהי \mathbb{K} שדה אזי f \in \mathbb{K}[x] באשר f בעל שורש יחיד מעל
                                                                                             . איבר אוו שדה: תהא שדה: תהא הרחבה אלגברית היחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} שבורו ספרבילי מעל איבר איבר מעל שדה: תהא
                                                                              \mathbb{K} עבורה מער מער פרבילית: הרחבה אלגברית עבורה לכל עבורה לכל עבורה אלגברית הרחבה אלגברית מעל
                          \mathbb{F} מסקנה: תהא \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} ארי \alpha\in\mathbb{L} אוי \alpha\in\mathbb{L} ספרבילי מעל \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F} באשר באשר \mathbb{F}\subseteq\mathbb{L} אוי מסקנה: תהא
                                                                                        מסקנה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה ספרבילית. באשר באשר הרחבה אלגברית הא ברחבה הרחבה שלגברית באשר
g\in\mathbb{K}\left[x
ight] מסקנה: יהי p\in\mathbb{K} בעל שורש מרובה)\Rightarrow הרחבה אלגברית באשר ויהי להמר ויהי מסקנה: יהי הראב אלגברית באשר הראב האלגברית באשר ויהי
                                                                                                                                                                                                                        f_{\alpha}\left(x\right)=g\left(x^{p}\right) עבורו
```

 $\det_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})=|\mathcal{B}|$ אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי טרנסצנדנטית של \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה שאינה אלגברית ויהי \mathcal{B} בסיס טרנסצנדנטי של

 \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי \mathbb{A}/\mathbb{K} אזי

 $\operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{L}\right) = \operatorname{degtr}_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{F}\right) + \operatorname{degtr}_{\mathbb{F}}\left(\mathbb{L}\right)$ הרחבות אזי היינה $\mathbb{F}/\mathbb{K}, \mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבות אזי

 $.\overline{\mathbb{C}\left(x
ight) }\simeq\mathbb{C}$:טענה

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא ותהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי

 \mathbb{L}/\mathbb{K} ט פרבילית) ספרבילית) ספרבילית) ספרבילית) ספרבילית).

 $|\mathbb{L} \hookrightarrow \overline{\mathbb{K}}| \leq |\mathbb{L} : \mathbb{K}| \bullet$

```
(\mathbb{K} ספרביליים מעל lpha_1\ldotslpha_m) ספרבילית) ספרביליים מעל אזי מסקנה: יהיו lpha_1\ldotslpha_m\in\overline{\mathbb{K}} אזי מסקנה:
                                                             מסקנה: יהי \mathbb{K} שדה ותהיינה \mathbb{L}/\mathbb{K}, \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבות ספרביליות אזי שדה ותהיינה
                                                           . מסקנה סגור ספרבילי בשדה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי lpha ספרבילי מעל שדה. תהא
                                                                                        \overline{\mathbb{K}}_s=ig\{lpha\in\overline{\mathbb{K}}\mid\mathbb{K} מער ספרבילי: יהי שדה אזי שדה אזי מפרבילי: יהי
        \mathbb{R} טענה: יהי p\in\mathbb{R} עבורו lpha^{p^r} ספרבילי מעל מעל ויהי היהי רומב האזי היחבה אלגברית באשר באשר רובה a\in\mathbb{R} ויהי a\in\mathbb{R} אזי קיים a\in\mathbb{R}
                                                                         טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} ספרבילית. char (\mathbb{K}) 
mid | [\mathbb{L}:\mathbb{K}] ספרבילית.
                                                                                      שדה משוכלל: שדה \mathbb{L} עבורו לכל הרחבה \mathbb{L}/\mathbb{K} מתקיים כי \mathbb{L} ספרבילי.
                                                                                                                                          אזי p \in \mathbb{P} אזי שדה ויהי \mathbb{K} אזי
                                                                                                                           אז \mathbb{K} שדה משוכלל. char (\mathbb{K})=0
                                                      (eta^p=lpha) אז (eta^p=lpha עבורו eta\in\mathbb{K} אם lpha\in\mathbb{K} אז (לכל שדה משוכלל) שדה משוכלל) איז (har (oldsymbol{\mathbb{K}}) אם ראס
                                                                                                                          מסקנה: יהי \mathbb F שדה סופי אזי \mathbb F שדה משוכלל.
                                                                         טענה: יהי p\in\mathbb{P} ויהי \mathbb{F} שדה באשר הויר אזי p\in\mathbb{P} אזי יהי p\in\mathbb{P}
                                                                                            \mathbb{L}=\mathbb{K}\left(lpha
ight) עבורו lpha\in\mathbb{L} איבר פרימיטיבי: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה אזי
               \mathbb{L}=\mathbb{K}\left(lpha
ight) עבורו lpha\in\mathbb{L} שנסופי חרחבה סופית ספרבילית אזי קיים שדה אינסופי ותהא
                                                                                                למה: יהי \mathbb{K} שדה ותהא G\subseteq\mathbb{K}^	imes חבורה סופית אזי \mathbb{K} ציקלית.
                                                                                                                                \mathbb{F}^{	imes} ציקלית. שדה סופי אזי \mathbb{F}^{	imes} ציקלית.
                                  \mathbb{L}=\mathbb{K}\left(lpha
ight) עבורו lpha\in\mathbb{L} עבורו איי קיים lpha\in\mathbb{L} שבה סופי ותהא אוי קיים lpha\in\mathbb{L}
                             (p \nmid n) \Longleftrightarrow (\mathbb{K} \, [x] \,  ספרבילי מעל אזי (n \in \mathbb{N}_+ ויהי הי n \in \mathbb{N}_+ טענה: יהי p \in \mathbb{P} יהי יהי p \in \mathbb{R} יהי
          \mu_n=\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(x^n-1) אזי \gcd(n,p)=1 באשר n\in\mathbb{N}_+ ויהי ויהי p\in\mathbb{R} אזי שדה באשר p\in\mathbb{R} אזי ויהי
                             . אזי \gcd(n,p)=1 באשר ויהי \gcd(n,p)=1 ויהי ויהי רבאשר ויהי הבאשר שדה באשר אזי באשר ויהי ויהי ויהי p\in\mathbb{P} יהי יהי
שורש g\in\mu_n אזי \gcd(n,p)=1 באשר ויהי n\in\mathbb{N}_+ ויהי ויהי ראשר שדה באשר g\in\mu_n יהי אזי יוצר מיטיבי: יהי ויהי p\in\mathbb{P} יהי שדה באשר שדה באשר אזי יוצר
                                                                                                                                                                                 \mu_n של
                 \mathbb{E}[\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)]=|\mathrm{sols}_{\mathbb{K}(lpha)}\left(f_{lpha}
ight)| איזי \alpha איזי f_{lpha}\in\mathbb{K}\left[x
ight] הרחבה פשוטה ויהי
                                                                                        הרחבת גלואה: הרחבה סופית \mathbb{L}/\mathbb{K} באשר \mathbb{L}/\mathbb{K} נורמלית וספרבילית.
                                                          טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{F} אזי \mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} שדה באשר \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L} הרחבת גלואה ויהי בענה: תהא
                                     טענה: אזי \mathbb{F}/\mathbb{K} אזי \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבת גלואה. \mathbb{F} שדה פיצול של f\in\mathbb{K} הרחבת גלואה. אויהי \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבת גלואה.
                                                             . אוי \mathbb{L}/\mathbb{F} שדה באשר \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבה סופית אזי \mathbb{L}/\mathbb{F} הרחבת גלואה.
             .
u: \mathbb{F}/\mathbb{K} 	o \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית ספרבילית אזי קיימת הרחבת גלואה \mathbb{L}/\mathbb{K} עבורה קיים הומומורפיזם
                                                        \mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)=\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight) הרחבת גלואה אזי בורת גלואה של הרחבת גלואה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K}
                                                                                                          . חבורה \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\right) אזי הרחבת \mathbb{L}/\mathbb{K} חבורה \mathbb{L}/\mathbb{K}
                                                                                              a^{\sigma}=\sigma\left(a
ight) אזי \sigma\in\operatorname{Aut}\left(\mathbb{L}
ight) ויהי a\in\mathbb{L} אזי שדה יהי \mathbb{L} יהי
                                        \mathrm{GA}\left(\sigma,lpha
ight)=a^{\sigma} כך \mathrm{GA}:\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)	imes\mathbb{L}	o\mathbb{L} פעולת גלואה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי נגדיר
                                                                                                  \mathrm{GA}\in\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight) \curvearrowright \mathbb{L} למה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי
טענה: תהא f(x)=\prod_{eta\in \mathrm{Orb}(lpha)}(x-eta) כך כך f\in\mathbb{L}[x] איזי lpha\in\mathbb{L} וכן אי־פּריק מעל lpha\in\mathbb{L}
                                                                                                                                                                                   \mathbb{K}[x]
                                                \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{F}
ight)<\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight) אזי \mathbb{K}\subset\mathbb{F} שדה באשר \mathbb{F}\subset\mathbb{L} הרחבת גלואה ויהי
                                                                                                 \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת \mathbb{L}/\mathbb{K} משפט: תהא
                                                          \mathbb{L}[\mathbb{L}:\mathbb{K}]=|\mathrm{Aut}\,(\mathbb{L}/\mathbb{K})|טענה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה)
                                           עת־חבורה אזי H<\operatorname{Aut}\left(\mathbb{L}
ight) שדה ותהא של שדה ביחס לחבורה אזי H<\operatorname{Aut}\left(\mathbb{L}
ight)
                                                                                                                                        \mathbb{L}^H = \{ a \in \mathbb{L} \mid \forall h \in H.a^h = a \}
```

 $\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{L}^H\right)=H$ משפט: יהי \mathbb{L} שדה ותהא $H\leq\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}
ight)$ תת־חבורה סופית אזי $H\leq\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}
ight)$ שדה ותהא $H\leq\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)$ שדה ותהא $H\leq\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)$ ותת־חבורה אזי $H\leq\mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)$ הרחבה גלואה ותהא

 $\operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q
ight)$ יוצר של Fr $_p$ יוצר איז $\operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q
ight)$ אאי $n\in\mathbb{N}_+$ יוצר של $q\in\mathbb{P}$ יהי יהי

 $\mathbb{L}^{\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})}=\mathbb{K}$ מסקנה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי

(ספרביליות). באשר $\mathbb{L}/\mathbb{F},\mathbb{F}/\mathbb{K})$ שבר בילית) של שדה באשר $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{F}$ שדה באשר $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{E}$ שבר בילית).

```
\|\{H\mid H<\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)\}\|=\|\{\mathbb{F}\mid (\mathbb{K}\subset\mathbb{F}\subset\mathbb{L})\wedge (\mathbb{F})\}\|טענה המשפט היסודי של תורת גלואה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אזי
                                                                                                                                                               \mathbb{L}^G\subseteq\mathbb{L}^Hמסקנה: יהי \mathbb{L} שדה ותהיינה H,G\leq \mathrm{Aut}\,(\mathbb{L}) מסקנה: יהי שדה ותהיינה מסקנה:
                                                                                                                                (\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})\subseteq\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{F})) שדות אזי (\mathbb{F}\subseteq\mathbb{K}) שדות אזי שדה ויהיו שדה ויהיו שדה \mathbb{F},\mathbb{K}\subseteq\mathbb{L}
                                                                                                                              \|\mathbb{F} \mid (\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}) \land (שדה\|\mathbb{F} \mid \mathbb{F} \mid (\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}) \land \mathbb{F} \mid \mathbb
                                                                                                                                                                                                                        \{\mathbb{F}\mid (\mathbb{F}) \wedge (\mathbb{F}) \wedge (\mathbb{F})\} = \{\mathbb{C}\} מסקנה:
צמודות \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{F}\right),\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{E}\right) הרחבת גלואה ויהיו \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} הרחבת גלואה ויהיו
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                .(\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})ב-
                                                                                                                                                                                          אזי \mathbb{K} \subset \mathbb{F} אזי \mathbb{F} \subset \mathbb{L} אזי הרחבת גלואה ויהי \mathbb{F} \subset \mathbb{L} אזי
                                                                                                                                                                                                                      .(Gal (\mathbb{L}/\mathbb{F}) \leq Gal (\mathbb{L}/\mathbb{K}))\iff גלואה) הרחבת גלואה) •
                                                                                                                                                                                               \operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}/\mathbb{K}
ight)\simeq\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})/\operatorname{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{F}) אם \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבת גלואה אז \bullet
                                                                         . הרחבת \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי אזי שדה הרחבת גלואה. בעל שורשים פשוטים בעל שורשים בעל בעל f\in\mathbb{K}\left[x\right] הרחבת גלואה.
    \operatorname{Gal}\left(f
ight)=\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight) אזי שדה הפיצול של f אזי שדה יהי \mathbb{K} שדה יהי f בעל שורשים פשוטים ויהי \mathbb{L} שדה הפיצול של אזי אזי f
\operatorname{RA}:\operatorname{Gal}(f)	imes\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f)	o\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f) בעל שורשים פשוטים אזי נגדיר f\in\mathbb{K}[x] בעל שדה ויהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 .RA(\sigma,\alpha) = \sigma(\alpha)
                                                                                                                                \mathrm{RA}\in\mathrm{Gal}\left(f
ight) \curvearrowright \mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{Z}}}\left(f
ight) אזי פשוטים בעל שורשים בעל דה ויהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] בעל
                                                                                                         .(אי־פריק) אי־פריק) אריפרית אזי (אורשים שוטים בעל שורשים בעל אי־פריק) שדה איהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אי־פריק).
                                              |\operatorname{Gal}(f)| |\operatorname{deg}(f)| וכן |\operatorname{Gal}(f)| |\operatorname{Gal}(f)| |\operatorname{Gal}(f)| אי־פריק בעל שורשים פשוטים אזיf \in \mathbb{K}[x] מסקנה: יהי
f(x_1\dots x_n)=f\left(x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)}
ight) מתקיים \sigma\in S_n מתקיים f\in \mathbb{K} אזי n\in \mathbb{N}_+ אזי n\in \mathbb{N}_+ אזי מטרית: יהי
                                                                                                          המוגדר s_k \in \mathbb{K}\left[x_1 \dots x_n
ight] אזי איזי k \in [n] ויהי n \in \mathbb{N}_+ המוs_k \in \mathbb{K}\left[x_1 \dots x_n
ight] איזי
                                                                                                                                                                                                                          .s_k\left(x_1,\ldots,x_n
ight)=\sum_{\substack{a\in[n]^k\ udh\ aav}}\prod_{i=1}^kx_{a_i} טענה: יהי \mathbb X שדה ויהי k\in\mathbb N_+ אזי s_k פונקציה סימטרית.
            f=g\left(s_1,\ldots,s_n
ight) עבורה g\in\mathbb{K}\left(x_1\ldots x_n
ight) סימטרית אזי קיימת f\in\mathbb{K}\left(x_1\ldots x_n
ight) ותהא ותהא n\in\mathbb{N}_+ יהי
                \prod_{i=1}^n (x-lpha_i) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} \cdot s_{n-i} \left(lpha_1,\ldots,lpha_n
ight) \cdot x^i איזי lpha_1\ldotslpha_n\in\mathbb{K} ויהיו n\in\mathbb{N}_+ ויהיו n\in\mathbb{N}_+ איזי יהי
                                                                                                                                              \operatorname{Gal}\left(\prod_{i=1}^n (x-lpha_i)\right) \simeq S_n אזי מסקנה: יהי lpha שדה ויהיו lpha_1 \ldots lpha_n בת"א מעל
                                                                   . \mathbb K משפט: יהי \mathbb X שדה ויהיו lpha_1 בת"א מעל \mathbb X איז lpha_n איז lpha_n בת"א מעל lpha_n בת"א מעל
                                   |z_i| \le \sum_{i=1}^n |z_i| = \sum_{i=1}^n |z_i|לכל איז (i,j \in [n] לכל איז איז (z_1 \ldots z_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\} ויהיו n \in \mathbb{N}_+ יהי איז ווהיו
                                                                                                                                \mathbb{Q}\left(\sqrt[d_1]{a_1},\ldots,\sqrt[d_n]{a_n}
ight)=\mathbb{Q}\left(\sum_{i=1}^n\sqrt[d_i]{a_i}
ight) אזי a_1\ldots a_n,d_1\ldots d_n\in\mathbb{N}_+ מסקנה: יהיו
                                                                                                        c=lpha a^2+eta b^2 עבורם a,b\in\mathbb{F} אזי קיימים אזי מענה: יהי lpha,eta\in\mathbb{F}^	imes ויהי lpha,eta\in\mathbb{F}
                                                                                                                                                                        |G|\geq [\mathbb{L}:\mathbb{L}^G] סופית אזי G\leq \mathrm{Aut}\,(\mathbb{L}) שדה ותהא שדה משפט ארטין: יהי
                                                                                                                                                                                 G=\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}/\mathbb{L}^G
ight) סופית אזי G\leq\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}
ight) שדה ותהא מסקנה: יהיG\leq\mathrm{Aut}\left(\mathbb{L}
ight)
הרחבת גלואה אזי \mathbb{F}\mathbb{E}/\mathbb{E} שדות באשר \mathbb{F} וכן \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} וכן \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} הרחבת גלואה אזי \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} אינה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          \mathbb{FE}:\mathbb{E}=[\mathbb{F}:\mathbb{F}\cap\mathbb{E}] וכן
                                                              טענה: תהא \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבת גלואה ויהיו \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{L} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{E}\subseteq\mathbb{E} וכן \mathbb{K}\subseteq\mathbb{E} הרחבת גלואה אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                    \operatorname{Gal}\left(\mathbb{FE}/\mathbb{E}\right) \simeq \operatorname{Gal}\left(\mathbb{E}/\left(\mathbb{E} \cap \mathbb{F}\right)\right)
\mathbb{E}\cap\mathbb{F}=\mathbb{K} וכן \mathbb{F}/\mathbb{K},\mathbb{E}/\mathbb{K} הרחבות גלואה ויהיו \mathbb{F},\mathbb{E}\subset\mathbb{L} שדות באשר \mathbb{F},\mathbb{E}\subset\mathbb{E} וכן \mathbb{F}/\mathbb{K},\mathbb{E}/\mathbb{K} הרחבות גלואה ויהיו
                                                                                                                                                                                                                          \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)\simeq\operatorname{Gal}\left(\mathbb{E}/\mathbb{K}
ight)	imes\operatorname{Gal}\left(\mathbb{F}/\mathbb{K}
ight) אזי \mathbb{FE}=\mathbb{L} וכן
טענה: יהיו \deg(f) = p באשר f \in \mathbb{K}\left[x
ight] ויהי ויהי אינו שדה אינו שדה pq הרחבת גלואה ממעלה הרחבת באשר pq באשר אינו שדה pq הרחבת גלואה ממעלה שדה פיצול
```

 $G=\operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight)$ עבורה \mathbb{L}/\mathbb{K} עבורה אזי קיימת הרחבת גלואה \mathbb{L}/\mathbb{K}

 $\pi_q(n)=|\{f\in\mathbb{F}_q\left[x
brackled{x}\mid (\deg\left(f
ight)=n
ight)\wedge(\pi^*$ מתוקן ואי־פּריק) כך $\pi_q:\mathbb{N}_+ o\mathbb{N}_+$ אזי נגדיר $\pi_q(n)=|\{f\in\mathbb{F}_q\left[x
brackled{x}\mid (\deg\left(f
ight)=n
ight)\wedge(\pi^*$ מתוקן ואי־פּריק) ענה: יהי $\pi_q(n)=|\{f\in\mathbb{F}_q\left[x
brackled{x}\mid (d\in\mathbb{N}_+) + \pi^*\}\}$ אזי $\pi_q(n)=|\pi_q(n)|$ אזי $\pi_q(n)=|\pi_q(n)|$

f של

 $\overline{\mathbb{F}_p}=igcup_{n-1}^\infty\mathbb{F}_{p^n}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ טענה: יהי

 $(\mathbb{F}_{p^d}\subseteq\mathbb{F}_{p^n})\Longleftrightarrow (d|n)$ אזי $d,n\in\mathbb{N}_+$ ויהיו $p\in\mathbb{P}$ טענה: יהי

.f של שדה הפיצול שדה $\mathbb{F}_{p^{\deg(f)}}$ אי־פריק אזי אי־פריק ויהי ויהי ויהי איז ויהי ויהי אי־פריק אי

```
\mathbb{K}\left(\zeta_{n}
ight)=\mathbb{F} אזי n שדה יהי \mathbb{K} שדה יהי n\in\mathbb{N}_{+} ותהא \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבת מעגל מסדר \mathbb{K}
                                                                    \mathbb{K}\left(\zeta_n
ight)=\mathbb{K}\left(\zeta_{\gcd(n,p)}
ight) אזי n\in\mathbb{N}_+ וויהי הוא char (\mathbb{K})=p שדה באשר p\in\mathbb{P} יהי למה: יהי
                                                                                                                            למה: יהי \mathbb{K} שדה ויהי \mathbb{N}_+ אזי \mathbb{K} (\zeta_n)/\mathbb{K} הרחבת גלואה.
                                                                                                                                                                           אזי n\in\mathbb{N}_+ אזי שדה ויהי \mathbb{K} אזי
                                                                                                                                                                                    . אבלית \operatorname{Gal}\left(\mathbb{K}\left(\zeta_{n}\right)/\mathbb{K}\right)
                                                                                                                                    H \cong \operatorname{Gal}\left(\mathbb{K}\left(\zeta_{n}\right)/\mathbb{K}\right) עבורה H < \left(\mathbb{Z}_{n}\right)^{\times} קיימת
                                                                                                                                                         ציקלית. \operatorname{Gal}\left(\mathbb{K}\left(\zeta_{n}\right)/\mathbb{K}\right) אז n\in\mathbb{P} אם n\in\mathbb{P}
                                                                                                                                                   \mathbb{Q}\left(\zeta_{n}
ight)/\mathbb{Q} אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי ציקלוטומית: יהי
               \Phi_n=f_{\zeta_n} כך \Phi_n\in\mathbb{Q}[x] אזי נגדיר \Phi_n\in\mathbb{Q}[x] הפולינום המינימלי של הפולינום המינימלי של חיהי f_{\zeta_n}\in\mathbb{Q}[x] ויהי ויהי
                                                                                                                                   \Phi_n\left(x
ight)=\prod_{\substack{i\in[n]\\gcd(i,n)=1}}\left(x-\zeta_n^i
ight) אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי
                                                                                                                                                     \mathbb{Q}\left[x
ight]טענה: יהי p\in\mathbb{P} אזי \frac{x^p-1}{x-1} אי־פריק מעל
                                                                                                                                                                       \Phi_{p}\left(x
ight)=rac{x^{p}-1}{x-1} אזי p\in\mathbb{P} טענה: יהי
                                                   \Phi_{\prod_{i=1}^k p_i^{e_i}}(x)=\Phi_{\prod_{i=1}^k p_i}\left(x^{\prod_{i=1}^k p_i^{e_i-1}}
ight) אזי e_1\dots e_k\in\mathbb{N}_+ שונים ויהיו p_1\dots p_k\in\mathbb{P}
                                                                                                  \Phi_n\left(x
ight) = \Phi_n\left(x^p
ight)טענה: יהיn \in \mathbb{N}_+ ויהי n \in \mathbb{N}_+ באשר n 
otin p 
otin p אזי
                                                                                                                                                          .\Phi_{n}\left(0
ight)=\left\{ egin{array}{ll} -1 & n=1 \ 1 & n>1 \end{array} 
ight. אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי הי
                                                                                                                                           \Phi_{2m}\left(x
ight)=\Phi_{m}\left(-x
ight) אזי m\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}\setminus\{1\} טענה: יהי
                                                                                                                                                        \mathbb{Q}\left(\zeta_{n}
ight):\mathbb{Q}=arphi\left(n
ight) אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי משפט: יהי
                                                                                            \|\mathbb{K}\cap\{\zeta_n\mid n\in\mathbb{N}\}\|<\aleph_0 אזי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{C} טענה: תהא \mathbb{K}/\mathbb{Q} הרחבה סופית באשר
                                                                                                                                \mathbb{Q}\left(\zeta_{n}
ight) אי־פריק מעל n,m\in\mathbb{N}_{+} אי־פריק מעל טענה: יהיו
                                                                                                                                      \mathbb{Q}\left(\zeta_{n}
ight)\cap\mathbb{Q}\left(\zeta_{m}
ight)=\mathbb{Q} אזי זרים אזי n,m\in\mathbb{N}_{+} יהיו
                                                                                                                                  \mathbb{Q}\left(\zeta_n,\zeta_m
ight)=\mathbb{Q}\left(\zeta_{rac{nm}{\gcd(n,m)}}
ight) אזי n,m\in\mathbb{N}_+ יהיו יהיו יהיו
                                                                                        \operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{n},\zeta_{m}
ight)/\mathbb{Q}\left(\zeta_{n}
ight)
ight)\simeq\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{m}
ight)/\mathbb{Q}
ight) זרים אזי n,m\in\mathbb{N}_{+} זרים אזי n,m\in\mathbb{N}_{+}
                                                           \operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{n},\zeta_{m}\right)/\mathbb{Q}
ight)\simeq\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{n}\right)/\mathbb{Q}
ight)	imes\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(\zeta_{m}\right)/\mathbb{Q}
ight) זרים אזי n,m\in\mathbb{N}_{+} זרים אזי
                                                                                           p \equiv 1 \mod d אזי p \nmid d וכן p \mid \Phi_d(m) באשר p \in \mathbb{P} ויהי m, d \in \mathbb{N} טענה: יהיו
                                        \mathrm{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{Q}
ight)\simeq G טענה: תהא D חבורה אבלית סופית אזי קיים שדה \mathbb{L}\subseteq\mathbb{C} עבורו ענה: תהא
                                                  \mathbb{K}[\mathbb{K}] = \mathbb{K} טענה: יהי \mathbb{K} איז \mathbb{K} איז \mathbb{K} איז \mathbb{K} שורה) \mathbb{K} הרחבת גלואה) אונה: \mathbb{K} שורה) \mathbb{K} שורה) אונה \mathbb{K} שורה) אונה \mathbb{K} שורה) אונה \mathbb{K}
הפולינום f_lpha\in\mathbb{F}[x] היי \mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}\subset\mathbb{L} שדה באשר \mathbb{F} שדה בשר \mathbb{E}=\mathbb{K}(lpha) עבורו lpha\in\mathbb{L} א הפולינום lpha\in\mathbb{E}
                                                                                \mathbb{K}\left(\zeta
ight)=\mathbb{F} אזי f_lpha=\sum_{i=0}^m\zeta_i\cdot x^i באשר באשר \zeta\in\mathbb{F}^{m+1} ויהי m\in\mathbb{N} יהי lpha יהי lpha
                                                        \|\mathbb{F} \mid (\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}) \land (שדה \mathbb{F} \mid (\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}) \land (משפט: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} \mid (\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{L}) \land (שדה שוטה)
                                     . טענה: יהי \mathbb{K} שדה סופי יהי f_1 \dots f_r \in \mathbb{K}[x] ויהיו r \in \mathbb{N}_+ ויהיו אי־פריקים מתוקנים שונים אזי יהי
\deg(f_i)=d_i טענה: יהי d_1\ldots d_r\in\mathbb{K}\left[x
ight] יהיו אי־פריקים מתוקנים שונים ויהיו ויהיו רוהיו f_1\ldots f_r\in\mathbb{K}\left[x
ight] יהיו יהי יהי שדה סופי יהי
        i \in [r] לכל \operatorname{len}(C_i) = d_i וכן \prod_{i=1}^r C_i \in \operatorname{Gal}(\prod_{i=1}^r f_i) עבורם C_1 \dots C_r \in S_{\deg(f)} וכן זרים איי קיימים מעגלים זרים i \in [r]
                                                                                                                              \Omega^{(1)}=\left\{ \mathrm{line}_{a,b}\mid a,b\in\Omega^{(0)}
ight\} אזי \Omega^{(0)}\subseteq\mathbb{C} הגדרה: תהא
                                                                                                           \Omega^{(2)}=\left\{\partial B_{\mathrm{dist}(a,b)}\left(c\right)\mid a,b,c\in\Omega^{(0)}
ight\} אזי \Omega^{(0)}\subseteq\mathbb{C} הגדרה: תהא
```

 $\mu\left(\prod_{i=1}^k p_i^{e_i}
ight)=\left\{egin{array}{ll} (-1)^k & e=1 \ 0 & ext{else} \end{array}
ight.$ כך $\mu:\mathbb{N} o\{0,\pm1\}$ אזי נגדיר $e\in\mathbb{N}_+^k$ אוי נגדיר $p_1\dots p_k\in\mathbb{P}$ יהיי $k\in\mathbb{N}$ יהיי והי

 $f\left(n
ight)=\sum_{d\in\mathbb{N}top d\mid n}\left(\mu\left(d
ight)\cdot\left(\sum_{\substack{a\in\mathbb{N}\alpha
eq a\midrac{n}{d}}}f\left(a
ight)
ight)
ight)$ אזי $f:\mathbb{N}_{+} o\mathbb{C}$ אויהי $f:\mathbb{N}_{+} o\mathbb{C}$ טענה נוסחת ההיפוך של מוביוס: תהא

 $\mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(x^n-1)$ אזי שורש יחידה g מסדר n באשר שורש ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי שורה ויהי \mathbb{K} יוצר של

 $\pi_q(n)=rac{1}{n}\sum_{\substack{d\in\mathbb{N}\d|n}}\left(\mu\left(rac{n}{d}
ight)\cdot q^d
ight)$ אזי $n\in\mathbb{N}_+$ שדה ויהי $\pi_q(n)=\mathbb{N}_q$ אזי $\pi_q(n)=\frac{1}{n}$

 $\zeta_n=g$ אזי n שדה יהי \mathbb{K} שדה יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי g שורש יחידה פרימיטיבי מסדר \mathbb{K} שדה יהי \mathbb{K} שדה ויהי \mathbb{K} אזי שדה הפיצול של \mathbb{K} מעל \mathbb{K}

 $\pi_q\left(n
ight)\sim rac{q^n}{n}$ שדה אזי \mathbb{F}_q באשר $q\in\mathbb{N}$ באיניים: יהי

 $\mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}\left(x^{n}-1
ight)$ אזי $n\in\mathbb{N}_{+}$ שדה ויהי \mathbb{K} שדה היחידה: יהי

 $\sum_{\substack{d\in\mathbb{N}\d|n}}\mu\left(d
ight)=\{egin{smallmatrix}1&n=1\0&n>1\end{smallmatrix}$ אזי $n\in\mathbb{N}_+$ יהי יהי

```
i \in [n-1] לכל
                        \mathbb{L}_n אזי שלה של און ריבועיות הרחבות הרחבות וותהא n\in\mathbb{N} ותהא שדה יהי און אזי אזי הרחבות הרחבות אזי אזי אזי וותהא
                                                                                                  \mathbb{K}_{
m sc} = igcup \{ \mathbb{L} \mid \mathbb{Q} שדה וכן \mathbb{K}_{
m sc} = \mathbb{L} שדה וכן \mathbb{K}_{
m sc} = \mathbb{L}
                                                                                                                                                                                 \{\sqrt{a},-\sqrt{a}\}\subseteq\mathbb{K}_{\mathrm{sc}} אזי a\in\mathbb{K}_{\mathrm{sc}} מסקנה: יהיa\in\mathbb{K}_{\mathrm{sc}}
                                                                                                                                          \operatorname{RegPol}_n = \{\zeta_n^0, \dots, \zeta_n^{n-1}\} אזי n \in \mathbb{N}_{\geq 3} יהי מצולע משוכלל: יהי
                        \mathbb{C} מסקנה: יהי \mathbb{C} אזי \mathbb{C} עבורו של \mathbb{C} עבורו שדה \mathbb{C} הנוצר מסדרת הרחבות עבורו אזי (RegPol_n\subseteq\mathbb{K}_{\mathrm{sc}}) אזי מסקנה: יהי
                                                                                                     .arphi\left(n
ight)=2^{r} עבורו אזי קיים אזי קיים אזי ראשר n\in\mathbb{N}_{\geq3} באשר מסקנה: יהי היn\in\mathbb{N}_{\geq3}
.(n=2^r\cdot\prod_{i=1}^kp_i וכן i\in[k] לכל 2^{2^{r_i}}+1\in\mathbb{P} עבורם r,r_1\dots r_k\in\mathbb{N} לכל (\mathrm{RegPol}_n\subseteq\mathbb{K}_{\mathrm{sc}}) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} יהי n\in\mathbb{N}_{\geq 3}
עבורו a\in\mathbb{K}^{n-1}_{
m sc} אזי (קיים a\in\mathbb{K}^{n-1}_{
m sc} אזי (קיים lpha\in\mathbb{K}_{
m sc} אונים באשר a\in\mathbb{K}_{
m sc} ויהיו n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי lpha\in(-\pi,\pi]
                                                                                              m\in\mathbb{N}_+ עבורו m\in\mathbb{N}_+ עבורו m\in\mathbb{N}_+ לכל m\in\mathbb{N}_+ מתקיים m\in\mathbb{N}_+ מתקיים m\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                                                                                                                     .טענה: \mathbb{K}_{sc}/\mathbb{O} הרחבת גלואה
                                                                                                        \mathbb{L}/\mathbb{K}_{\mathrm{sc}} עבורו \mathbb{L}/\mathbb{K}_{\mathrm{sc}} איי (קיים שדה \mathbb{L} עבורו עבורו \mathbb{L} איי (קיים שדה p\in\mathbb{P} איי יהי
                                                                                                                                            איקלית. באשר \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}
ight) באשר באשר גלואה אוקלית. הרחבת גיקלית:
\operatorname{cord}\left(\operatorname{Gal}\left(x^{n}-a
ight)
ight) ציקלית וכן \operatorname{Gal}\left(x^{n}-a
ight) ויהי a\in\mathbb{K} ויהי \zeta_{n}\in\mathbb{K} ויהי \zeta_{n}\in\mathbb{K} ויהי \zeta_{n}\in\mathbb{K} אזי וכן
a\in\mathbb{K}^{	imes}\setminus\left\{b^d\mid(b\in\mathbb{K}^{	imes})\land(d\in\mathbb{N}_{\geq2})\land(d|n)
ight\} ויהי \zeta_n\in\mathbb{K} ויהי \zeta_n\in\mathbb{K} אזי היי n\in\mathbb{N}_+ יהי n\in\mathbb{N}_+ יהי
                                                                                                                                                                                                                                       |\operatorname{Gal}(x^n - a)| = n
\operatorname{Gal}(x^n-a) יהי a\in\mathbb{N} ויהי a\in\mathbb{N} ויהי a\in\mathbb{N} ויהי a\in\mathbb{N} ויהי a\in\mathbb{N} אזי ויהי a\in\mathbb{N} יהי הי a\in\mathbb{N} יהי a\in\mathbb{N} יהי
                                                                                                                                                                                                         .ord (Gal (x^n - a)) |n| ציקלית וכן
                                                      וכן (n,p)=1 ויהי אור הוכן האור הוע מסקנה: יהי p\in\mathbb{R} יהי \gcd(n,p)=1 באשר האשר הוכן יהי p\in\mathbb{R}
                                                                                                                  |\operatorname{Gal}(x^n-a)|=n אזי a\in\mathbb{K}^{\times}\setminus\{b^d\mid (b\in\mathbb{K}^{\times})\wedge (d\in\mathbb{N}_{\geq 2})\wedge (d|n)\}
                        G=\mathrm{Gal}\,(x^n-a) עבורם a\in\mathbb{K} חבורה איז קיים שדה n\in\mathbb{N}_+ וכן קיים שדה a\in\mathbb{K} עבורם מסקנה:
\mathcal{L}:\mathbb{L}	o\mathbb{L} אזי נגדיר Gal (\mathbb{L}/\mathbb{K}) ויהי \sigma יוצר של \zeta_n\in\mathbb{K} אאי נגדיר באשר באשר הרחבה ציקלית מסדר \sigma וואר של \mathbb{G}
                                                                                                                                                                                                                   \mathcal{L}\left( lpha 
ight) =\sum_{i=0}^{n-1}\zeta_{n}^{-i}\cdot lpha ^{\sigma ^{i}} כך
                                                           אזי \operatorname{Gal}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\right) היוצר של \gamma_n\in\mathbb{K} ויהי \gamma_n\in\mathbb{K} אזי הרחבה ציקלית מסדר וצר הרחבה \gamma_n\in\mathbb{K}
                                                                                                                                                                            .\mathcal{L}\left(lpha
ight)^{\sigma}=\zeta_{n}\cdot\mathcal{L}\left(lpha
ight) מתקיים lpha\in\mathbb{L} לכל •
                                                                                                                                                                                               \mathcal{L}\left(\alpha\right)^{n}\in\mathbb{K} מתקיים \alpha\in\mathbb{L} לכל
                                                                                                                                                                                                 \mathcal{L}(\alpha) \neq 0 המקיים \alpha \in \mathbb{L} פיים
משפט: יהי b\in\mathrm{sol}_{\mathbb{L}}(x^n-b) הרחבה \beta\in\mathrm{sol}_{\mathbb{L}}(x^n-b) אזי קיים b\in\mathbb{K}^	imes אזי קיים להרחבה ציקלית מסדר מסדר באשר \gamma_n\in\mathbb{K} אזי קיים
                                                                                             המקיימים \mathbb{F}_0 \dots \mathbb{F}_k וקיימים שדות k \in \mathbb{N} עבורה עבורה \mathbb{L}/\mathbb{K} המקיימים
                                                                                                                                                                                                                        \mathbb{L}=\mathbb{F}_k וכן \mathbb{K}=\mathbb{F}_0
                                            \mathbb{F}_i = \mathbb{F}_{i-1}\left(lpha
ight) קיים lpha \in \mathrm{sols}_{\mathbb{F}_i}\left(x^n - a
ight) עבורם קיים a \in \mathbb{F}_i חמך קיים a \in \mathbb{F}_i חמך קיים a \in \mathbb{F}_i
                f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אזי א sols_{\overline{\mathbb{K}}}\left(f
ight)\subseteq\mathbb{L} המקיימת \mathbb{L}/\mathbb{K} המקיימת אזי אזי אזי אזי הוהי שדה ויהי
                          . משפט: תהא \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבה וורמלית באשר באשר היים אזי קיים שדה \mathbb{F}/\mathbb{K} הרחבה וורמלית באשר באשר היים אזי קיים שדה באיים שרה באשר באשר באשר באשר באשר באינת הרחבה נורמלית באשר באינת הרחבה נורמלית באשר באינת הרחבה נורמלית באשר באינת הרחבה נורמלית באינת באינת באינת באינת באשר באינת באשר באינת בא
                                                                                      פתירה. \mathbb{G}\mathrm{al}\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\right) אזי \mathrm{char}\left(\mathbb{K}\right)=0 פתירה. באשר ביקלית הרחבה נורמלית רדיקלית באשר
                                                            \operatorname{Gal}(f)ויהי \operatorname{M} שדה באשר \operatorname{char}(\mathbb{K})=0 וויהי ויהי \operatorname{char}(\mathbb{K})=0 אזי ויהי \operatorname{map}(f)
(n \leq 4)בת"י ברדיקלים) פתיר ברדיקלים) פתיר מסקנה: יהי \sum_{i=0}^n a_i x^i אזי מסקנה: יהי n \in \mathbb{N}_+ יהי יהי n \in \mathbb{N}_+ יהי יהי מסקנה: יהי \mathbb{K} שדה באשר
                                            \operatorname{Gal}(f)\simeq S_p אזי \left|\operatorname{sols}_{\mathbb{R}}\left(f
ight)
ight|=p-2 וכן \operatorname{deg}\left(f
ight)=p אי־פריק אי־פריק אי־פריק ויהי f\in\mathbb{Q}\left[x
ight] איזי אי
                                               |\operatorname{sols}_{\mathbb{R}}(f)|\in\{1,p\} איי \operatorname{deg}(f)=p אייבפריק פתיר ברדיקלים באשר f\in\mathbb{Q}\left[x
ight] ויהי ויהי f\in\mathbb{P}_{>2} אי־פריק
                                                                                                                                       \mathbb{L} \subseteq \mathbb{R} המקיימת \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה הרחבה הרחבה ממשית רדיקלית:
```

סדרת הרחבה ויהי $\mathbb{L}_{i+1}/\mathbb{L}_i$ ויהי וכן \mathbb{L}_1/\mathbb{K} עבורם \mathbb{L}_1/\mathbb{K} עבורם אזי שדות ויהי ויהי שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי שדות הרחבה ריבועית.

 $\Omega_{k+1}^{(0)}=\bigcup\left\{S_1\cap S_2\;\Big|\;S_1,S_2\in\left(\Omega_k^{(1)}\cup\Omega_k^{(2)}
ight)
ight\}$ וכן $\Omega_0^{(0)}=\{0,1\}$ אזי $k\in\mathbb{N}$ הגדרה: יהי $k\in\mathbb{N}$

 $\mathbb{K}_{
m sc} = igcup_{k=0}^\infty \Omega_k^{(0)}$:שדה המספרים הניתנים לבנייה בעזרת סרגל ומחוגה

 $a^2\in\mathbb{K}$ וכן וכן $\mathbb{L}=\mathbb{K}\left(a
ight)$ עבורו $a\in\mathbb{L}$ קיים אזי קיים אזי הרחבה הרחבה בא

```
משואה בתירה ברדיקלים ממשים: יהי \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R} שדה ויהי עבורו קיימת הרחבה ממשים: יהי \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R} שדה ויהי
                                                                                                                                                          f אזי \operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f) \subseteq \mathbb{L}
למה: יהי p\in\mathbb{F} אזי \mathbb{L}א איז \mathbb{L} שדות עבורם \mathbb{K}/\mathbb{F}, הרחבות גלואה וכן \mathbb{E}:\mathbb{F}=p וכן \mathbb{E}:\mathbb{F} אזי שדות עבורם \mathbb{E}
                                                                                                                                                                     \mathbb{L}[\mathbb{L}\mathbb{K}:\mathbb{K}]=p
                                       \mathbb{K}\left(\zeta_{n}
ight) איז פריק מעל x^{p}-a איז איז \operatorname{sols}_{\mathbb{K}}\left(x^{p}-a
ight)=\varnothing עבורו שדה ויהי x^{p}\in\mathbb{R} איז מעל x^{p}
   \mathbb{L}/\mathbb{K} פשפט: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} ביחבה סופית נורמלית באשר \mathbb{L}/\mathbb{K} אזי (\mathbb{L}/\mathbb{K}) הרחבה מפשית רדיקלית) הרחבה סופית נורמלית באשר
                                                              . פתיר ברדיקלים f_lpha אזי lpha פתיר ברדיקלים הפולינום המינימלי של lpha\in\mathbb{Q}\left[x
ight] ויהי lpha\in\mathbb{K}_{\mathrm{sc}}
                                        .(טענה: יהי \mathbb{K} שדה יהי f(x^n) פתיר ברדיקלים) אזי אזי f\in\mathbb{K} ויהי f\in\mathbb{K} פתיר ברדיקלים).
                                \sigma(i)=j אזי חבורה \sigma\in H קיים i,j\in [n] עבורה לכל איי חבורה אזי חבורה n\in \mathbb{N}_+ אזי חבורה אזי חבורה מרנזיטיבית:
                                                  .(משפט: יהי \mathbb{K} שדה ויהי f\in\mathbb{K}[x] חבורה טרנזיטיבית) ספרבילי אזי משפט: יהי \mathbb{K} שדה ויהי
\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f)=\{lpha_i\mid i\in[n]\} באשר lpha\in\overline{\mathbb{K}}^n ויהי lpha\in\overline{\mathbb{K}}^n באשר lpha\in\mathbb{K}[x] יהי lpha\in\mathbb{K}[x] יהי שדה יהי lpha\in\mathbb{K}[x] יהי
                                                                                                                                    .\operatorname{disc}\left(f\right) = \prod_{i,j \in [n]} \left(\alpha_i - \alpha_j\right)^2 אזי
                                                                          fטענה: יהי f שדה ויהי f\in\mathbb{K}[x] מתוקן אזי (\mathrm{disc}\,(f)
eq 0) טענה: יהי
                                                                                                    \operatorname{disc}\left(f
ight)\in\mathbb{K} אזי מתוקן מתוק f\in\mathbb{K}\left[x
ight] טענה: יהי שדה ויהי
                                                                                                                           \square_R = \{a^2 \mid a \in R\} סימון: יהי
                      \operatorname{disc}(f)\in\Box_{\mathbb{K}}יסענה: יהי \mathbb{K} שדה באשר f\in\mathbb{K}[x] ויהי ויהי f\in\mathbb{K}[x] מתוקן ספרבילי אזי ויהי
                                                                   lpha^2\in\mathbb{Q}_{<0} עבורו lpha\in\mathbb{L} טענה: תהא lpha\in\mathbb{L} הרחבה ציקלית ממעלה lpha אזי לא קיים
                                               אינה ציקלית. \operatorname{Gal}(f) אזי \operatorname{disc}(f) < 0 וכן \operatorname{deg}(f) = 4 אי־פריק באשר f \in \mathbb{Q}[x] איינה איי
                                                                                אזי \deg\left(f\right)=3 אזי איר מתוקן שדה יהי f\in\mathbb{K}\left[x
ight] מתוקן מפרבילי באשר
                                                                                                                       \operatorname{Gal}(f) \simeq \{0\} אם \operatorname{sols}_{\mathbb{K}}(f) = 3 אם •
```

- .Gal $(f) \simeq \mathbb{Z}_2$ אם $|\operatorname{sols}_{\mathbb{K}}(f)| = 1$ אם •
- $\operatorname{Gal}(f) \simeq A_3$ אז $\operatorname{disc}(f) \in \square_{\mathbb{K}}$ וכן •
- $\operatorname{Gal}(f) \simeq S_3$ אז $\operatorname{disc}(f) \notin \square_{\mathbb{K}}$ אם f אם f אי־פריק וכן •

 $\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f)=\{lpha_i\mid i\in[4]\}$ באשר $lpha\in\overline{\mathbb{K}}^4$ ויהי $lpha\in\overline{\mathbb{K}}^4$ באשר שדה יהי $f\in\mathbb{K}[x]$ מתוקן ספרבילי באשר $\mathcal{H}(f)(x) = (x - (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4))(x - (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4))(x - (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3))$ איי $\mathcal{H}(f)\in\mathbb{K}\left[x
ight]$ אזי $\deg\left(f
ight)=4$ טענה: יהי $\mathcal{H}\left(f
ight)\in\mathbb{K}\left[x
ight]$ מתוקן ספרבילי באשר $\operatorname{disc}\left(\mathcal{H}\left(f
ight)
ight)=\operatorname{disc}\left(f
ight)$ אזי $\operatorname{deg}\left(f
ight)=4$ מתוקן ספרבילי באשר $f\in\mathbb{K}\left[x
ight]$ אזי $f\in\mathbb{K}\left[x
ight]$

אזי $\deg\left(f
ight)=4$ אזי מתוקן ספרבילי אדה יהי $f\in\mathbb{K}\left[x
ight]$ אזי אדה יהי שדה יהי

- $\operatorname{Gal}(f)\simeq\mathbb{Z}_2$ אז $rac{\operatorname{disc}(g)}{\operatorname{disc}(h)}\in\square_\mathbb{K}$ וכן f=gh וכן $\operatorname{deg}(g)=\operatorname{deg}(h)=2$ אז $g,h\in\mathbb{K}[x]$ אז $g,h\in\mathbb{K}[x]$ אם קיימים $g,h\in\mathbb{K}[x]$ אז $\operatorname{Gal}(f)\simeq\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ אז $\operatorname{disc}(g)=\operatorname{deg}(g)=\operatorname{deg}(g)=\operatorname{deg}(g)=\operatorname{deg}(g)$ אז $g,h\in\mathbb{K}[x]$ אז $g,h\in\mathbb{K}[x]$ אם קיימים $g,h\in\mathbb{K}[x]$
- $\operatorname{Gal}(f) \simeq H$ עבורו $H \in \{S_4, A_4, D_4, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\}$ אי־פריק אז קיים f אם \bullet

 $f\left(x
ight)=x^{q^n}+\sum_{i=0}^{n-1}t_ix^{q^i}$ כך $f\in\mathbb{F}_q\left(t_0\dots t_{n-1}
ight)[x]$ ונגדיר ונגדיר $n\in\mathbb{N}_+$ יהי \mathbb{F}_q עבורו קיים שדה שדה $q\in\mathbb{N}$ יהי מענה: $.\mathrm{Gal}(f) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$

אזי $\mathbb{Q}\left[x
ight]$ אי־פריק מעל x^4+ax^2+b עבורם $a,b\in\mathbb{Q}$ אי־פריק מעל

- $\operatorname{Gal}\left(f\right)\simeq\mathbb{Z}_{2} imes\mathbb{Z}_{2}$ אם $b\in\square_{\mathbb{Q}}$ שם •
- $\operatorname{Gal}(f)\simeq \mathbb{Z}_4$ אז $b\left(a^2-4b
 ight)\in \square_{\mathbb{Q}}$ וכן $b
 otin\mathbb{Q}$ אם b
- $\operatorname{Gal}(f) \simeq D_8$ אז $b\left(a^2-4b\right) \notin \square_{\mathbb{Q}}$ וכן $b \notin \square_{\mathbb{Q}}$ אם •

 $\sum_{i=1}^n a_i
eq -1$ מתקיים $a \in \square_\mathbb{K}^n$ ולכל ולכל המשי פורמלי: שדה $a \in \mathbb{N}_+$ המקיים וכן לכל המקיים ולכל $\mathbb{L}=\mathbb{K}$ שדה ממשי סגור: שדה ממשי פורמלי \mathbb{K} עבורו לכל שדה ממשי פורמלי בורמלי \mathbb{L}/\mathbb{K} המקיים שדה ממשי סגור. $\sum_{i=1}^n a_i \in \square_{\mathbb K}$ אזי $a \in \square_{\mathbb K}^n$ וויהי $n \in \mathbb N_+$ אזי סגור יהי סגור יהי \mathbb{K} ויהי ויהי סדר חזק קווי מעל ויהי ויהי אדה באשר המקיים char $(\mathbb{K})=0$ ויהי שדה סדור: יהי

- $x+z<_{\mathbb{K}}y+z$ מתקיים $x<_{\mathbb{K}}y$ המקיימים $x,y,z\in\mathbb{K}$ המקיים סיבור: לכל
- $x\cdot z<_{\mathbb{K}}y\cdot z$ מתקיים $0<_{\mathbb{K}}z$ המקיים $z\in\mathbb{K}$ ולכל ולכל $x<_{\mathbb{K}}y$ המקיימים המקיים מתקיים $x\cdot z<_{\mathbb{K}}y$ המקיים מתקיים

 $(\mathbb{K},<_{\mathbb{K}})$ אזי

```
\mathbb{K}_+,\mathbb{K}_-\subseteq\mathbb{K} שדה סדור)\Longrightarrow (קיימות \mathbb{K}_+,\mathbb{K}_-\subseteq\mathbb{K} המקיימות שדה באשר אזי המקיימות אזי המקיימות אזי המקיימות משפט: יהי
                                                          (a+b,ab)\subseteq\mathbb{K}_+ מתקיים a,b\in\mathbb{K}_+ וכן \mathbb{K}_-=-\mathbb{K}_+ וכן 1\in\mathbb{K}_+ וכן 1\in\mathbb{K}_+ שווי \mathbb{K}=(\mathbb{K}_+ \uplus \mathbb{K}_-)\cup\{0\}
                                                                     משפט: יהי \mathbb X שדה ממשי סגור אזי קיים ויחיד יחס סדר חזק\mathbb X מעל \mathbb X עבורו (\mathbb K,<_{\mathbb K}) שדה סדור.
                                                                                            \operatorname{sols}_{\mathbb{K}}\left(f
ight)
eqarnothing} אזי \operatorname{deg}\left(f
ight)\in\mathbb{N}_{\operatorname{odd}} באשר באשר f\in\mathbb{K}\left[x
ight] אזי סגור ויהי
                                                                                \mathbb{K} שדה סגור אלגברית). שדה ממשי פורמלי אזי \mathbb{K} שדה ממשי סגור שדה משי סגור אלגברית).
                                                                                                                                                                                                                                               מסקנה: \mathbb{R} שדה ממשי סגור.
                                                          \Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}\left(\gamma
ight)=a\cdot\gamma כך \Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}:\mathbb{L}	o\mathbb{L} אזי נגדיר a\in\mathbb{L} איי נגדיר הרחבה חופית ויהי
                                                                                                                 \mathbb{L}/\mathbb{K} העתקה לינארית מעל אזי \Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a} אזי a\in\mathbb{L} הרחבה סופית מעל
                                                              N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=\det\left(\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}
ight) כך N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}:\mathbb{L}	o\mathbb{K} כורמה של הרחבה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי נגדיר
                                                                                                                                                                                                                             למה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי
                                                                                                                                                       .N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(ab
ight)=N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)\cdot N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(b
ight) מתקיים a,b\in\mathbb{L} לכל
                                                                                                                                                                                                   .N_{\mathbb{L}./\mathbb{K}}\left(a
ight)=a^{\left[\mathbb{L}:\mathbb{K}
ight]} מתקיים a\in\mathbb{K} לכל •
                                                                                                                                                                      .ig(N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=0ig)\Longleftrightarrow\left(a=0
ight) מתקיים a\in\mathbb{L} לכל
                                                               . הומומורפיזם חבורות. (N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}})_{\uparrow_{\mathbb{L}^{\times}}} וכן (N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}})_{\uparrow_{\mathbb{L}^{\times}}}:\mathbb{L}^{\times} 	o \mathbb{K}^{\times} הומומורפיזם חבורות. ההא
                                                                                                                           משפט חישוב של נורמה בעזרת פולינום מינימלי: תהא \mathbb{L}/\bar{\mathbb{K}} הרחבה סופית אזי
                                                                                                                                                                                            .M_{\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}}\left(x
ight)=f_{a}\left(x
ight) מתקיים a\in\mathbb{L} לכל
                                                                                                                                                                            P_{\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}}(x)=f_a\left(x
ight)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}(a)]} מתקיים a\in\mathbb{L} לכל \bullet
                                                                                                                                                      N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(a)=(-1)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]}\cdot f_a\left(0
ight)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}(a)]} פ לכל a\in\mathbb{L} לכל a\in\mathbb{L}
                                                                                                                                           \mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f_a) אזי a\in\mathbb{K} אינברים צמודים: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית ויהי
                                                                                                  משפט חישוב של נורמה בעזרת איברים צמודים: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית ספרבילית אזי
                                                                                                                                                      .N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=\left(\prod_{s\in \mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f_a)}s
ight)^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}(a)]} מתקיים a\in\mathbb{L} לכל
                                                                                                                                                          .N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=\prod_{arphi\in\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\hookrightarrow\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}
ight)}\varphi\left(a
ight) מתקיים a\in\mathbb{L} לכל
                                                                                                 N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=\prod_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})}\sigma\left(a
ight) מתקיים a\in\mathbb{L} מתקיים לואה אז לכל
                                      N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}=N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}\circ N_{\mathbb{L}/\mathbb{F}} אזי סופיות סופיות של נורמה: יהיו \mathbb{K},\mathbb{F},\mathbb{L} שדות באשר \mathbb{K},\mathbb{F},\mathbb{K} הרחבות סופיות אזי
                                                        \mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=\mathrm{trace}\left(\Lambda_{\mathbb{L}/\mathbb{K},a}
ight) כך \mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}:\mathbb{L}	o\mathbb{K} עקבה של הרחבה פופית אזי נגדיר \mathbb{L}הרחבה סופית אזי נגדיר
                                                                                                                                                                  למה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית אזי הרחבה בונקציונל לינארי.
משפט חישוב של עקבה בעזרת פולינום מינימלי: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} הרחבה סופית יהי a\in\mathbb{L} יהי m\in\mathbb{N} ויהי באשר \zeta\in\mathbb{K}^{\{0...m\}}
                                                                                                                                                                     \operatorname{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a
ight)=-\left[\mathbb{L}:\mathbb{K}\left(a
ight)
ight]\cdot\zeta_{m-1} איז f_{a}=\sum_{i=0}^{m}\zeta_{i}\cdot x^{i}
                                                                                                   משפט חישוב של עקבה בעזרת איברים צמודים: תהא של הרחבה סופית ספרבילית אזי משפט חישוב של איברים בעזרת איברים בעודים בעזרת איברים בעזרת אורים בעזרת איברים בעזרת איברים בעזרת איברים בעזרת אורים בעזרת איברים בעודת איברים בעודת אורים בעודת אורים בעודת איברים בעודת אורים בעודת בעודת אורים בעודת אורים בעודת אורים בעוד
                                                                                                                                              .
Tr_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a\right)=\left[\mathbb{L}:\mathbb{K}\left(a\right)\right]\cdot\sum_{s\in\mathrm{sols}_{\mathbb{K}}\left(f_{a}\right)}sמתקיים <br/>מa\in\mathbb{L}לכל •
                                                                                                                                                        .\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(a\right)=\sum_{\varphi\in\left(\mathbb{L}/\mathbb{K}\hookrightarrow\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K}\right)}\varphi\left(a\right)מתקיים a\in\mathbb{L} לכל
                                                                                               \mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(a)=\sum_{\sigma\in\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})}\sigma\left(a
ight) מתקיים \stackrel{\cdot}{a}\in\mathbb{L} לכל אי לכל \stackrel{\cdot}{a}\in\mathbb{L}
                                   \mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}=\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}\circ\mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{F}} אזי סופיות סופיות אוי \mathbb{L}/\mathbb{F},\mathbb{F}/\mathbb{K} שדות באשר \mathbb{K},\mathbb{F},\mathbb{L} הרחבות סופיות איי
                                                                                                                      מסקנה: תהא \mathbb{L}/\mathbb{K} אינה ספרבילית. באשר סופית באשר חרחבה אינה \mathbb{L}/\mathbb{K} אינה ספרבילית.
                                                                              \mathbb{Q}\left(\sqrt[d]{a}
ight):\mathbb{Q}=d אי־פריק אזי x^n-a באשר a\in\mathbb{Q}_{>0} ויהי d|n באשר n,d\in\mathbb{N}_+ יהיו
[\mathbb{F}:\mathbb{Q}]=d וכן \mathbb{Q}\subseteq\mathbb{F}\subseteq\mathbb{Q} (\sqrt[d]{a} שדה באשר \mathbb{R} שי־פריק ויהי x^n-a באשר a\in\mathbb{Q}_{>0} יהי d|n באשר n,d\in\mathbb{N}_+ יהיו
                                                                                                                                \mathrm{Tr}_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} על וכן N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} על אזי אוי N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}} על וכן על.
\operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}(f)=\{lpha_i\mid i\in[n]\} עבורם lpha_1\ldotslpha_n\in\overline{\mathbb{K}} ויהיו \operatorname{deg}(f)=n באשר באשר f\in\mathbb{K}[x] יהי n\in\mathbb{N}_+ יהי שדה יהי שדה יהי
                                                                                                                                                                    .N_{\mathbb{K}\left(lpha_{1}
ight)/\mathbb{K}}\left(g\left(lpha_{1}
ight)
ight)=\prod_{i=1}^{n}g\left(lpha_{i}
ight) מתקיים g\in\mathbb{K}\left[x
ight]
עבורם lpha_1\ldotslpha_n\in\overline{\mathbb{K}} יהי שדה יהי \sum_{i=0}^n\zeta_ix^i וכן \zeta_n=1 וכן \zeta_n\in\mathbb{K}^{\{0\ldots n\}} יהי היה n\in\mathbb{N}_+ יהי שדה יהי \mathbb{K} שבורם עבורם
                                                N_{\mathbb{K}(lpha_1)/\mathbb{K}}\left(\etalpha_1+eta
ight)=\sum_{i=0}^n\left(-1
ight)^i\zeta_{n-i}eta^{n-i}\eta^i איז \eta,eta\in\mathbb{K} ויהיו \mathrm{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}\left(\sum_{i=0}^n\zeta_ix^i
ight)=\{lpha_i\mid i\in[n]\}
עבורם lpha_1\ldotslpha_n\in\overline{\mathbb{K}} יהי שדה יהי שרה אי־פריק וכן \sum_{i=0}^n\zeta_ix^i וכן \zeta_n=1 באשר באשר \zeta\in\mathbb{K}^{\{0...n\}} יהי n\in\mathbb{N}_+ יהי שדה יהי n\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                           \operatorname{SIR}_{\mathbb{K}(\alpha_1)/\mathbb{K}}\left(\alpha_1^2\right)=\zeta_{n-1}^2-2\zeta_{n-2} איי \operatorname{sols}_{\overline{\mathbb{K}}}\left(\sum_{i=0}^n\zeta_ix^i\right)=\{lpha_i\mid i\in[n]\}
```

טענה: יהי \mathbb{R} שדה יהי \mathbb{R} שדה יהי $n \in \mathbb{R}_+$ י