גודל מעגל בוליאני: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ ויהי C מעגל בוליאני בעל n חוטים וכן m קלטים אזי $\text{Size}\left(C\right)=n+m$.

עומק מעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $\text{depth}\left(C\right)$ הינו אורך המסלול המקסימלי מקלט לפלט.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq3}$ אזי $\vee_{n}:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ המוגדרת $\vee_{n}\left(x\right)=\bigvee_{i=1}^{n}x_{i}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq3}$ אזי $\wedge_{n}:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ המוגדרת $\wedge_{n}\left(x\right)=\bigwedge_{i=1}^{n}x_{i}$.

מעגל בוליאני בעל fan-in לא מוגבל: מעגל בוליאני מעל בסיס הפונקציות הבוליאניות $\left\{\wedge,\vee,\neg\right\}\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\vee_{n}\right\}\right)\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\wedge_{n}\right\}\right)$.

הערה: אלא אם נאמר אחרת מעגל בוליאני הוא בעל fan-in מוגבל.

טענה: תהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C בעל fan-in לא מוגבל המחשב את f בגודל $\mathcal{O}\left(n\cdot2^{n}\right)$ ובעומק 2.

טענה: תהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C המחשב את f בגודל $\mathcal{O}\left(n\cdot2^{n}\right)$ ובעומק $n+\log_{2}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא L שפה אזי קיימת משפחת מעגלים $\mathcal{C}$ מגודל $\mathcal{O}\left(n\cdot2^{n}\right)$ ומעומק $n+\log\left(n\right)$ המחשבת את L.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי קיימת $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ עבורה לכל מעגל בוליאני C המחשב אותה מתקיים $\text{Size}\left(C\right)\geq\frac{2^{n}}{2n}$.

הגודל של פונקציה בוליאנית: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי $\text{Size}\left(f\right)=\min\left\{\text{Size}\left(C\right)\mid\left(\text{מעגל }C\right)\wedge\left(f\text{ מחשבת את }C\right)\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי $\text{Size}\left(f\right)\leq15\cdot\left(2^{n}-1\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ אזי $\text{Size}\left(f\right)=\mathcal{O}\left(\frac{2^{n}}{n}\right)$.

מסקנה שאנון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\max\left\{\text{Size}\left(f\right)\mid f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}\right\}=\Theta\left(\frac{2^{n}}{n}\right)$.

משפט: קיים $C\in\mathbb{R}_{+}$ עבורו לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימת $n\leq S<C\cdot\frac{2^{n}}{n}$ קיימת $f:\left\{0,1\right\}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ באשר f חשיבה על ידי מעגל מגודל $S\left(n\right)+10n$ וכן f לא חשיבה על ידי מעגל מגודל $S\left(n\right)$.

הגדרה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{Size}\left(S\left(n\right)\right)=\left\{L\subseteq\left\{0,1\right\}^{*}\mid S\left(n\right)\text{ חשיבה על ידי משפחת מעגלים מגודל לכל היותר }L\right\}$.

מסקנה: $\text{Size}\left(2^{n}\right)=\mathcal{P}\left(\left\{0,1\right\}^{*}\right)$.

מסקנה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה $n\leq S\left(n\right)\leq\frac{2^{n}}{n}$ אזי $\text{Size}\left(S\left(n\right)\right)\subsetneq\text{Size}\left(S\left(n\right)+10n\right)$.

הגדרה: $\text{Size}\left(\text{poly}\right)=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{Size}\left(n^{c}\right)$.

חתך מקסימלי: יהי G גרף אזי חתך $\left(A,B\right)$ עבורו $\left|E\left(A,B\right)\right|\geq\left|E\left(C,D\right)\right|$ לכל חתך $\left(C,D\right)$.

סימון: יהי G גרף ויהי $\left(A,B\right)$ חתך מקסימלי אזי $\text{MC}\left(G\right)=\left|E\left(A,B\right)\right|$.

למה: יהי G גרף אזי $\mathbb{E}_{\text{חתך }\left(A,B\right)}\left[\left|E\left(A,B\right)\right|\right]=\frac{\left|E\left(G\right)\right|}{2}$.

טענה: יהי G גרף אזי קיים חתך $\left(A,B\right)$ עבורו $E\left(A,B\right)\geq\frac{\left|E\left(G\right)\right|}{2}$.

מסקנה אלגוריתם איטי למציאת חתך גדול: תהא E קבוצה יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\left\{v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ קבוצה אזי

```
function SlowBigCut(E, {v_1 ... v_n}):
    S ← P({v_1 ... v_n})
    for r ∈ {0,1}^n do
        S ← {v_i | r_i = 1}
        if |E(S, S̄)| ≥ |E|/2 then return S
    end
```

טענה: תהא E קבוצה יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\left\{v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ קבוצה אזי SlowBigCut בעלת סיבוכיות זמן ריצה $\Omega\left(2^{n}\right)$.

טענה: קיימת מ"ט אקראית M_{supp} עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $r\leftarrow\left\{0,1\right\}^{\log\left(n\right)+1}$ מתקיים כי $M_{\text{supp}}\left(1^{n};r\right)$ מחזירה מ"מ $X_{1}\ldots X_{n}:\left[\log\left(n\right)+1\right]\to\left\{0,1\right\}$ עבורם

- $X_{1}\ldots X_{n}$ ב"ת בזוגות.
- $\mathbb{P}\left(X_{i}=1\right)=\frac{1}{2}$ לכל $i\in\left[n\right]$.
- M_{supp} רצה בזמן $\text{poly}\left(n\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $r\in\left\{0,1\right\}^{\log\left(n\right)+1}$ ותהא $\left\{v_{1}\ldots v_{n}\right\}$ קבוצה אזי $S_{\text{supp}}=\left\{v_{i}\mid M_{\text{supp}}\left(1^{n};r\right)_{i}=1\right\}$.

טענה: יהי G גרף באשר $V=\left\{v_{1}\ldots v_{n}\right\}$ אזי $\mathbb{E}_{r\leftarrow\left\{0,1\right\}^{\log\left(n\right)+1}}\left[\left|E\left(S_{\text{supp}},\overline{S_{\text{supp}}}\right)\right|\right]=\frac{\left|E\right|}{2}$.

מסקנה אלגוריתם מהיר למציאת חתך גדול: תהא E קבוצה יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\left\{v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ קבוצה אזי

```
function FastBigCut(E, {v_1 ... v_n}):
    S ← P({v_1 ... v_n})
    for r ∈ {0,1}^{log(n)+1} do
        X ← M_supp(1^n; r)
        S ← {v_i | X_i = 1}
        if |E(S, S̄)| ≥ |E|/2 then return S
    end
```

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה אזי FastBigCut בעלת סיבוכיות זמן ריצה $\text{poly}(n)$.

סימון: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה ויהי $r \in \{0,1\}^n$ אזי $S_r = \{v_i \mid r_i = 1\}$.

אלגוריתם למציאת חתך גדול עם תוחלת מותנית: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה אזי

```
function CEBigCut(E, {v_1 ... v_n}):
    S ← P({v_1 ... v_n})
    a ← ⋃_{i=0}^{n} {0,1}^i
    a ← ε
    for i ∈ [1 ... , n] do
        c_0 ← E_{r←{0,1}^n} [|E(S_r, S̄_r)| | (r_1 = a_1), ..., (r_{i-1} = a_{i-1}), (r_i = 0)]
        c_1 ← E_{r←{0,1}^n} [|E(S_r, S̄_r)| | (r_1 = a_1), ..., (r_{i-1} = a_{i-1}), (r_i = 1)]
        a_i ← arg max_{ℓ∈{0,1}} (c_ℓ)
    end
    return S_a
```

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה אזי לכל $i \in [n]$ באיטרציה ה־i של CEBigCut מתקיים $\mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n}\left[\left|E\left(S_r, \overline{S_r}\right)\right| \mid (r_1 = a_1), \ldots, (r_{i-1} = a_{i-1})\right] = |\{(v_i, v_j) \in E \mid (i, j \leq k) \wedge (a_i \neq a_j)\}| + \frac{1}{2}|\{(v_i, v_j) \in E \mid (i > k) \vee (j > k)\}|$.

מסקנה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה אזי CEBigCut בעלת סיבוכיות זמן ריצה $\text{poly}(n)$.

טענה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה אזי לכל $i \in [n]$ באיטרציה ה־i של CEBigCut מתקיים $\mathbb{E}_{r \leftarrow \{0,1\}^n}\left[\left|E\left(S_r, \overline{S_r}\right)\right| \mid (r_1 = a_1), \ldots, (r_{i-1} = a_{i-1})\right] \geq \frac{|E|}{2}$.

מסקנה: תהא E קבוצה יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה אזי $E\left(\text{CEBigCut}, \overline{\text{CEBigCut}}\right) \geq \frac{|E|}{2}$.

הגדרה: תהיינה $s, d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-AC}(s, d) = \left\{L \subseteq \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{קיימת משפחת מעגלים } C \text{ בעלת fan-in לא מוגבל עבורה } \begin{smallmatrix} L(C)=L \\ \text{Size}(C_n) \leq s(n) \\ \text{depth}(C_n) \leq d(n) \end{smallmatrix}\right\}$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-AC}^k = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{nu-AC}\left(n^c, \log^k(n)\right)$.

הגדרה: תהיינה $s, d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-NC}(s, d) = \left\{L \subseteq \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{קיימת משפחת מעגלים } C \text{ עבורה } \begin{smallmatrix} L(C)=L \\ \text{Size}(C_n) \leq s(n) \\ \text{depth}(C_n) \leq d(n) \end{smallmatrix}\right\}$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-NC}^k = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{nu-NC}\left(n^c, \log^k(n)\right)$.

מסקנה: תהיינה $s, d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-NC}(s, d) \subseteq \text{nu-AC}(s, d)$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\text{nu-AC}^k \subseteq \text{nu-NC}^{k+1}$.

מסקנה: $\text{nu-NC}^0 \subsetneq \text{nu-AC}^0$.

פונקציית זוגיות: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{parity} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ המוגדרת $\text{parity}(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$.

טענה: קיים מעגל C המחשב את parity_n מגודל $\mathcal{O}(n)$ ועומק $\mathcal{O}(\log(n))$.

מסקנה: $\text{parity} \in \text{nu-NC}^1$.

פולינום מולטי־לינארי (מ"ל): יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ בעל דרגה 1.

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית: תהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ מ"ל עבורו $f(x) = p(x)$ לכל $x \in \{0,1\}^n$.

טענה: תהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ אזי קיים פולינום מ"ל יחיד המחשב את f.

סימון: תהא $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ויהי $p \in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n]$ מ"ל המחשב את f אזי $\deg(f) = \deg(p)$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\deg(\vee_n) = n$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\deg(\text{parity}_n) = n$.

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה ε: יהי $0 < \varepsilon$ ותהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי $p\in\mathbb{R}\left[x_1\ldots x_n\right]$ מ"ל עבורו $\mathbb{P}_{x\leftarrow\{0,1\}^n}\left(p\left(x\right)=f\left(x\right)\right)\ge 1-\varepsilon$.

טענה: הפולינום 1 מחשב את $\vee_n$ בממוצע עם שגיאה $\frac{1}{3}$.

התפלגות משפחת פולינומים מחשבת פונקציה בוליאנית עם שגיאה ε: יהי $0 < \varepsilon$ ותהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי קבוצת פולינומים מ"ל $P\subseteq\mathbb{R}\left[x_1\ldots x_n\right]$ עבורה לכל $x\in\{0,1\}^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{p\leftarrow P}\left(p\left(x\right)=f\left(x\right)\right)\ge 1-\varepsilon$.

טענה: יהי $0 < \varepsilon$ תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ ותהא $P\subseteq\mathbb{R}\left[x_1\ldots x_n\right]$ מ"ל המחשבת את f עם שגיאה ε אזי קיים $p\in P$ המחשב בממוצע את f עם שגיאה ε.

סימון: יהי $\left(\Omega,\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות אזי $\left(x\leftarrow\Omega\right):\Omega\to\Omega$ הינו מ"מ באשר $\mathbb{P}\left(\left(x\leftarrow\Omega\right)=\omega\right)=\mathbb{P}\left(\omega\right)$.

הערה: תהא A קבוצה סופית אזי $x\leftarrow A$ הינו המ"מ כאשר A עם ההתפלגות האחידה.

סימון: יהי $0 < \varepsilon$ ותהא $S_{j,k}\leftarrow\mathcal{P}\left(\left[n\right]\right)$ לכל $k\in\{0\ldots\log\left(n\right)\}$ ולכל $j\in\left[c\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$ אזי $R_\vee\left(x\right)=1-\prod_{k,j}\left(1-\sum_{i\in S_{j,k}}x_i\right)$.

למה: יהי $x\in\{0,1\}^n$ עבורו $\vee_n\left(x\right)=0$ אזי $R_\vee\left(x\right)=0$ לכל $S_{j,k}\leftarrow\mathcal{P}\left(\left[n\right]\right)$.

למה: יהי $x\in\{0,1\}^n$ ותהיינה $S_{j,k}\leftarrow\mathcal{P}\left(\left[n\right]\right)$ עבורן קיימים j,k המקיימים $\left|S_{j,k}\cap\{i\mid x_i=1\}\right|=1$ אזי $R_\vee\left(x\right)=1$ וכן $\vee_n\left(x\right)=1$.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}$ ויהי $x\in\{0,1\}^n$ עבורו $2^{k-1}\le\left|\{i\mid x_i=1\}\right|\le 2^k$ אזי $\mathbb{P}_{S\leftarrow\mathcal{P}(\left[n\right])}\left(\left|S\cap I\right|=1\right)\ge\frac{1}{2e}$.

טענה: יהי $0 < \varepsilon$ אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל $P\subseteq\mathbb{R}\left[x_1\ldots x_n\right]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\log\left(n\right)\cdot\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$ שמחשבת את $\vee_n$ עם שגיאה ε.

טענה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל $s\left(n\right)$ ועומק $d\left(n\right)$ אזי לכל $0 < \varepsilon$ קיימת קבוצת פולינומים מ"ל $P\subseteq\mathbb{R}\left[x_1\ldots x_n\right]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\left(\log\left(n\right)\cdot\log\left(\frac{s(n)}{\varepsilon}\right)\right)^{d(n)}\right)$ המחשבת את f עם שגיאה ε.

מסקנה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל $s\left(n\right)$ ועומק $d\left(n\right)$ אזי לכל $0 < \varepsilon$ קיים פולינום מ"ל $p\in\mathbb{R}\left[x_1\ldots x_n\right]$ מדרגה $\mathcal{O}\left(\left(\log\left(n\right)\cdot\log\left(\frac{s(n)}{\varepsilon}\right)\right)^{d(n)}\right)$ המחשב את f בממוצע עם שגיאה ε.

למה: יהי $0 < \delta$ ויהי $p\in\mathbb{R}\left[x_1\ldots x_n\right]$ מ"ל המחשב את parity_n בממוצע עם שגיאה $\frac{1}{2}+\delta$ אזי $\deg\left(p\right)=\Omega\left(\delta\sqrt{n}\right)$.

טענה: יהי $0 < \varepsilon$ ויהי $p\in\mathbb{R}\left[x_1\ldots x_n\right]$ מ"ל המחשב את parity_n בממוצע עם שגיאה ε אזי $\deg\left(p\right)=\Omega\left(\sqrt{n}\right)$.

מסקנה: יהי C מעגל המחשב את parity_n בעל fan-in לא מוגבל ועומק $d\left(n\right)$ אזי $\text{Size}\left(C\right)\ge 2^{\Omega\left(n^{\frac{1}{4\cdot d(n)}}\right)}$.

משפט: $\text{parity}\notin\text{nu-AC}^0$.

מסקנה: $\text{nu-AC}^0\subsetneq\text{nu-NC}^1$.

סימון: תהא M מ"ט k־סרטית ותהא $c_1\$c_2\$\ldots\$c_k$ קונפיגורציה אזי $\left(c_1\$c_2\$\ldots\$c_k\right)^i=c_i$.

סימון: תהא $x\in\Sigma^*$ ותהא $A\subseteq\Sigma^*$ אזי $x\backslash A$ הינה המחרוזת x ללא אברי A.

מכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי מ"ט תלת־סרטית M עבורה לכל קונפיגורציות $c_0\ldots c_n$ באשר $c_0=q_0x$ וכן c_{i-1} עוברת ל־c_i לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים

- סרט לקריאה בלבד: לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $c_i^1=x\backslash Q$.
- סרט חסום במקום: לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $\left|c_{i-1}^2\right|\le S\left(n\right)+1$.
- סרט לכתיבה חד־פעמית: לכל $i\in\left[n\right]$ ולכל $j\in\left[\left|c_{i-1}^3\right|\right]$ מתקיים $\left(c_{i-1}^3\backslash Q\right)_j=\left(c_i^3\backslash Q\right)_j$.

חסם עליון למקום ריצה של מכונת טיורינג: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ותהא M מ"ט בעלת סיבוכיות מקום S אזי S.

הערה: נקרא למכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום מכונת טיורינג.

הגדרה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{DSpace}\left(S\left(n\right)\right)=\{L\left(M\right)\mid$ מ"ט שרצה במקום $\mathcal{O}\left(S\left(n\right)\right)$ $M\}$.

שפה PSPACE: $\text{PSPACE}=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{DSpace}\left(n^c\right)$.

שפה LOGSPACE: $\text{LOG}=\text{DSpace}\left(\log\left(n\right)\right)$.

סימון: $\text{LOG}=\text{LOGSPACE}=\text{LSPACE}=\mathcal{L}$.

טענה: $\text{DSpace}\left(1\right)=\text{DSpace}\left(\log\left(\log\left(n\right)\right)\right)=\{L\mid$ רגולרית $L\}$.

טענה: תהא T חשיבה בזמן אזי $\text{DTime}\left(T\left(n\right)\right)\subseteq\text{DSpace}\left(T\left(n\right)\right)$.

טענה: $\mathcal{NP}\subseteq\text{PSPACE}$.

טענה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באשר $S\ge\log$ אזי $\text{DSpace}\left(S\left(n\right)\right)\subseteq\text{DTime}\left(2^{\mathcal{O}(S(n))}\right)$.

מסקנה: $\text{LOG}\subseteq\mathcal{P}$.

מסקנה: $\text{PSPACE}\subseteq\mathcal{EXP}$.

פונקציה חשיבה במקום: פונקציה $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה קיימת מ"ט M המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי M על הקלט 1^n מחשבת את $(S(n))_2$ במקום $\mathcal{O}(S(n))$.

משפט היררכיית המקום: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חשיבה במקום ותהא $t(n)=o(S(n))$ אזי $\text{DSpace}(t(n))\subsetneq\text{DSpace}(T(n))$.

מסקנה: $\text{LOG}\subsetneq\text{PSPACE}$.

מסקנה: לפחות אחד מהבאים נכון

- $\text{LOG}\subsetneq\mathcal{P}$.
- $\mathcal{P}\subsetneq\text{PSPACE}$.

השערה: $\text{LOG}\subsetneq\mathcal{P}$. השערה פתוחה

השערה: $\mathcal{P}\subsetneq\text{PSPACE}$. השערה פתוחה

פונקציה חשיבה במקום S: תהא $D\subseteq\Sigma$ אזי $f:D\to(\Gamma\backslash\{\sqcup\})^*$ עבורה קיימת מ"ט M בעלת סיבוכיות מקום $S(n)$ המחשבת את f.

רדוקציית מיפוי במקום לוגריתמי: יהיו Σ,Δ אלפבייתים באשר $\Delta\subseteq\Sigma$ תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה ותהא $B\subseteq\Delta^*$ שפה אזי רדוקציית מיפוי f מ־A ל־B חשיבה במקום לוגריתמי.

סימון: יהיו Σ,Δ אלפבייתים באשר $\Delta\subseteq\Sigma$ תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה תהא $B\subseteq\Delta^*$ שפה ותהא $f:\Sigma^*\to\Delta^*$ רדוקציית מיפוי במקום לוגריתמי אזי $A\le_{\text{Log}}B$.

טענה: תהיינה A,B שפות עבורן $A\le_{\text{Log}}B$ אזי $A\le_p B$.

שפה קשה ביחס למחלקה: תהא $\mathcal{C}$ קבוצה של שפות אזי שפה $\mathcal{L}$ עבורה לכל שפה $L\in\mathcal{C}$ מתקיים $L\le_{\text{Log}}\mathcal{L}$.

שפה שלמה ביחס למחלקה: תהא $\mathcal{C}$ קבוצה של שפות אזי שפה $\mathcal{L}\in\mathcal{C}$ באשר $\mathcal{L}$ הינה $\mathcal{C}$־קשה.

טענה: תהא f חשיבה במקום $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ תהא g חשיבה במקום $R:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ותהא $m:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים $|f(x)|\le m(n)$ אזי $g\circ f$ חשיבה במקום $\mathcal{O}(S(n)+\log(m(n))+R(m(n)))$.

מסקנה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ תהא f חשיבה במקום S תהא g חשיבה במקום $R:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ותהא $m:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים $|f(x)|\le m(n)$ אזי $g\circ f$ חשיבה במקום $\mathcal{O}(S(n)+R(m(n)))$.

טענה: תהיינה A,B שפות באשר $B\in\text{LOG}$ וכן $A\le_L B$ אזי $A\in\text{LOG}$.

מסקנה: תהיינה A,B,C שפות באשר $A\le_{\text{Log}}B$ וכן $B\le_{\text{Log}}C$ אזי $A\le_{\text{Log}}C$.

טענה: תהא $A\in\text{LOG}$ באשר A הינה $\mathcal{P}$־שלמה אזי $\mathcal{P}=\text{LOG}$.

הגדרה: $\text{CVAL}=\{\langle C,x\rangle\mid(\text{מעגל בוליאני } C)\wedge(C(x)=1)\}$.

למה קוק־לוין: תהא M מ"ט רצה בזמן פולינומי אזי קיימת פונקציה חשיבה f במקום לוגריתמי עבורה $f(1^n)=\langle C_{M,n}\rangle$ באשר $C_{M,n}$ מעגל עבורו לכל $z\in\{0,1\}^n$ מתקיים $(M(z) \text{ מקבלת})\Longleftrightarrow(C_{M,n}(z)=1)$.

טענה: CVAL הינה $\mathcal{P}$־שלמה.

נוסחה מכומתת לחלוטין: תהא φ נוסחה באשר $\text{FV}(\varphi)=\{x_1\ldots x_n\}$ ויהיו $Q_1\ldots Q_n\in\{\forall,\exists\}$ כמתים אזי $Q_1x_1\ldots Q_nx_n(\varphi)$.

הגדרה: $\text{TQBF}=\{\langle\varphi\rangle\mid(\text{נוסחה מכומתת לחלוטין } \varphi)\wedge(\text{ספיקה } \varphi)\}$.

טענה: $\text{CVAL}\in\text{PSPACE}$.

טענה: TQBF הינה PSPACE־שלמה.

מילה בעלת ייצוג: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $x\in\Sigma^n$ עבורה קיימת מ"ט M המקיימת $|\langle M\rangle|=k$ וכן $M(i)=x_i$ לכל $i\in[n]$.

מעגל מיוצג על ידי מעגל: יהי C מעגל בגודל s אזי מעגל A המקבל $\log(s)$ ביטים עבורו קיימת $f:V(C)\to[s]$ הפיכה המקיימת $A(i)=\langle f(i),\text{adj}^-(f(i)),\text{adj}^+(f(i))\rangle$ לכל $i\in[s]$.

סימון: יהי C מעגל ויהי A מעגל המייצג את C אזי $C=[A]$.

הגדרה: $\text{succ-CVAL}=\{\langle A,x\rangle\mid(\text{מעגל המייצג מעגל } A)\wedge(\langle[A],x\rangle\in\text{CVAL})\}$.

טענה: $\text{succ-CVAL}\in\mathcal{EXP}$.

טענה: succ-CVAL הינה $\mathcal{EXP}$־שלמה.

סדרת מעגלים Log־יוניפורמית: משפחת מעגלים $\mathcal{C}$ עבורה קיימת מ"ט M באשר M רצה במקום $\mathcal{O}(\log(n))$ וכן $M(1^n)=\langle C_n\rangle$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

הגדרה: תהיינה $s,d:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{u-AC}(s,d)=\left\{L\subseteq\{0,1\}^*\;\middle|\;\text{קיימת משפחת מעגלים יוניפורמית } C \text{ בעלת fan-in לא מוגבל עבורה } \substack{L(C)=L\\ \text{Size}(C_n)\le s(n)\\ \text{depth}(C_n)\le d(n)}\right\}$.

הגדרה: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{u-AC}^k=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{u-AC}\left(n^c,\log^k(n)\right)$.

הגדרה: תהיינה $s,d:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{u-NC}\left(s,d\right)=\left\{L\subseteq\{0,1\}^{*}\ \middle|\ \text{קיימת משפחת מעגלים יוניפורמית } C \text{ עבורה } \substack{L(C)=L\\ \text{Size}(C_n)\le s(n)\\ \text{depth}(C_n)\le d(n)}\right\}$.

הגדרה: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{u-NC}^{k}=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{u-NC}\left(n^{c},\log^{k}\left(n\right)\right)$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{AC}^{k}=\text{u-AC}^{k}$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{NC}^{k}=\text{u-NC}^{k}$.

מסקנה: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{NC}^{k}\subseteq\text{AC}^{k}$.

טענה: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{AC}^{k}\subseteq\text{NC}^{k+1}$.

הגדרה: $\text{AC}=\bigcup_{k=0}^{\infty}\text{AC}^{k}$.

הגדרה: $\text{NC}=\bigcup_{k=0}^{\infty}\text{NC}^{k}$.

מסקנה: $\text{AC}=\text{NC}$.

טענה: $\text{LOG}\subseteq\text{AC}^{1}$.

טענה: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $\text{NC}^{k}\subseteq\text{DSpace}\left(\mathcal{O}\left(\log^{k}\left(n\right)\right)\right)$.

טענה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ יהי M מ"ט רץ בזמן S יהי $x\in\Sigma^{*}$ ותהא G מטריצה המייצגת את עץ הקונפיגורציות אזי ($M\left(x\right)$ מקבלת)$\Longleftrightarrow$($\left(\left(I+G\right)^{S(|x|)}\right)_{x,y}\ge1$ באשר y קונפיגורציה במצב מקבל).

השערה: קיימת מ"ט M הרצה בזמן פולינומי ובזיכרון $o\left(n\right)$ עבורה לכל מטריצה A המייצגת גרף מכוון בעל n קודקודים ולכל קודקודים s,t מתקיים ($M\left(\langle A,s,t\rangle\right)$ מקבלת)$\Longleftrightarrow$(קיים מסלול מ־s ל־t). השערה פתוחה

מודל PRAM: יהי $\left(k,\Pi\right)$ מודל RAM ויהי $p\in\mathbb{N}$ אזי $\left(p,k,\Pi\right)$.

מספר המעבדים במודל PRAM: יהי $\left(p,k,\Pi\right)$ מודל PRAM אזי p.

קונפיגורציה במודל PRAM: יהי $\left(k,\Pi\right)$ מודל RAM ותהא $\left(T,R,\text{PC}\right)$ קונפיגורציה במודל RAM אזי $\left(T,R,\text{PC}\right)$.

קונפיגורציה עוברת במודל PRAM: יהי $\left(k,\Pi\right)$ מודל RAM ותהא $\left(T,R,\text{PC}\right)$ קונפיגורציה אזי קונפיגורציה $\left(T',R',\text{PC}'\right)$ באשר

- $\text{PC}'=\text{PC}+1$.
- קיימים $i_{1}\ldots i_{p}\in\left[k\right]$ עבורם לכל $j\in\left[k\right]\backslash\left\{i_{1}\ldots i_{p}\right\}$ מתקיים $R'_{j}=R_{j}$ וכן קיימים $\pi_{1}\ldots\pi_{p}\in\Pi\cup\left\{\text{Id}\right\}$ עבורם לכל $\ell\in\left[p\right]$ מתקיים $R'_{i_{\ell}}=\pi_{i_{\ell}}\left(R_{i_{\ell}}\right)$.
- קיימים $i_{1}\ldots i_{p}\in\mathbb{N}$ עבורם לכל $j\in\mathbb{N}\backslash\left\{i_{1}\ldots i_{p}\right\}$ מתקיים $T'\left(j\right)=T\left(j\right)$ וכן קיימים $\pi_{1}\ldots\pi_{p}\in\Pi\cup\left\{\text{Id}\right\}$ עבורם לכל $\ell\in\left[p\right]$ מתקיים $T'\left(\ell\right)=\pi\left(T\left(\ell\right)\right)$.

אלגוריתם במודל PRAM: יהי $\left(p,k,\Pi\right)$ מודל PRAM אזי פונקציה δ מקונפיגורציות לקונפיגורציות עבורה לכל קונפיגורציה C מתקיים C עוברת ל־$\delta\left(C\right)$.

סימון: יהי $\left(p,k,\Pi\right)$ מודל PRAM ויהי $x\in\mathbb{N}$ נגדיר $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך $T\left(n\right)=\begin{cases}x & n=0\\ 0 & \text{else}\end{cases}$ אזי $\text{Start}_{x}=\left(T,\left\{0\right\},0\right)$.

סימון: יהי $\left(p,k,\Pi\right)$ מודל PRAM יהי A אלגוריתם ויהי $x\in\mathbb{N}$ אזי $A_{\text{stop}}=\min\left\{n\in\mathbb{N}\mid A^{(n+1)}\left(\text{Start}_{x}\right)=A^{(n)}\left(\text{Start}_{x}\right)\right\}$.

ריצה של מודל PRAM: יהי $\left(p,k,\Pi\right)$ מודל PRAM יהי A אלגוריתם ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A^{\left(A_{\text{stop}}\right)}\left(\text{Start}_{x}\right)$.

זמן ריצה במודל PRAM: יהי $\left(p,k,\Pi\right)$ מודל PRAM יהי A אלגוריתם ויהי $x\in\mathbb{N}$ אזי $\left(A^{\left(A_{\text{stop}}\right)}\left(\text{Start}_{x}\right)\right)_{3}$.

טענה: תהא $L\in\text{NC}^{k}$ אזי $L\cap\Sigma^{n}$ ניתנת לחישוב במודל PRAM בעל $\text{poly}\left(n\right)$ מעבדים בזמן $\mathcal{O}\left(\log^{k}\left(n\right)\right)$.

מקום ריצה במודל PRAM: יהי $\left(p,k,\Pi\right)$ מודל PRAM יהי A אלגוריתם ויהי $x\in\mathbb{N}$ אזי $\max\left\{\min\left\{\left(A^{(i)}\left(\text{Start}_{x}\right)\right)_{1}^{-1}\left[\left\{0\right\}\right]\right\}\ \middle|\ i\in\left[A_{\text{stop}}\right]\right\}$.

השערה: קיים מודל PRAM $\left(p,k,\Pi\right)$ וקיים אלגוריתם A הפותר את CVAL בזמן $\text{polylog}\left(n\right)$ ובמקום $\text{poly}\left(n\right)$. השערה פתוחה

השערה: $\mathcal{P}=\text{NC}$. השערה פתוחה

טענה: $\text{APSP}\in\text{NC}$.