```
\bigcup_{i=1}^n A_i בת מנייה אזי בנות מנייה אזי בת מנייה. \bigcup_{i=1}^n A_i
טענה: תהא \langle f_n \mid n \in \mathbb{N} 
angle חדרת פונקציות באשר או בת מנייה לכל A_i סדרת פונקציות באשר או סענה:
                                                                             על לכל n\in\mathbb{N} אזי סופית או בת מנייה. f_n:\mathbb{N}	o A_n
                                                     A 	imes B = \{\langle a,b 
angle \mid (a \in A) \land (b \in B)\} מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                        טענה: תהיינה A,B בת מנייה אזי A \times B טענה:
                                                                        . בת מנייה A_1 \times \ldots \times A_n בנות מנייה אזיA_1 \ldots A_n בת מנייה
                                                                                                            A^1=A הגדרה: תהא A קבוצה אזי
                                                                                 A^n=A	imes A^{n-1} אזי n\in\mathbb{N}_+ ויהי קבוצה A הגדרה: תהא
                                                                                                                        .טענה: \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n בת מנייה
                                                                                                            |\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A\}| = \aleph_0 מסקנה: |\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A\}|
                                                                                                                                    |\mathbb{Z}|=leph_0 :טענה
                                                                                                                                    |\mathbb{Q}|=\aleph_0 :טענה
                                                                      p\left(a
ight)=0 מספר אלגברי: מספר a\in\mathbb{C} עבורו קיים a\in\mathbb{C} מספר
                                                                 p\left(a
ight)
eq0 מתקיים p\in\mathbb{Z}\left[x
ight] עבורו לכל a\in\mathbb{C} מספר מספר מספר
                                                                                                      |\{a\in\mathbb{C}\mid A אלגברי a\}|=leph_0 משפט קנטור:
                                                                        יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי A אזי A באשר יחס סדר חלקי/חלש:
                                                                                                      x \preccurlyeq x אזי x \in A יהי •
                                                                  x \preccurlyeq z אזי y \preccurlyeq z וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y,z \in A אזי יהיו x \preccurlyeq y
                                                         x=y אזי y \preccurlyeq x וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y \in A אזי יהיו חלשה: x = y אנטי סימטריות חלשה:
                                                                                יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי A^2 אזי A באשר יחס סדר חזק: תהא
                                                                                           \neg \left( x \prec x \right) אזי אזי יהי יהי פלקסיביות: •
                                                                  x\prec z אזי y\prec z וכן x\prec y עבורם x,y,z\in A אזי יהיו
                                                                  \neg (y \prec x) אזי x \prec y עבורם x,y \in A יהיו חזקה: \bullet
                                   (x\preccurlyeq y)\lor(y\preccurlyeq x) מתקיים x,y\in A אבורו לכל (A,\preccurlyeq) עבורו סדר חלקי יחס סדר אווי האקיים מדר אווי הא
                               (x \prec y) \lor (y \prec x) \lor (x = y) מתקיים x, y \in A עבורו לכל (x, x) עבור חזק יחס סדר חזק יחס עבורו לכל
                                                                                                             טענה: \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle יחס סדר קווי חלקי.
                                                                                        . יחס סדר חלקי \langle \mathcal{P}\left(A\right),\subseteq \rangle יחס סדר חלקי ענה: תהא
(aRb) \Longleftrightarrow (f(a)Sf(b)) מתקיים a,b \in A מתקיים (A,R), \langle B,S \rangle מדרים אזי (A,R), \langle B,S \rangle מתקיים
                                    . סדרים הפיכה \pi:A	o B הפימת \langle A,R \rangle, עבורם סדרים הפיכה שומרת הפיכה \pi:A	o B
                                                                     \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle איזומורפיים איזו סדרים \langle A,R \rangle , \langle B,S \rangle סדרים איזומורפיים
```

 $|X| \leq |Y|$  חח"ע אזי f: X o Y הגדרה: תהיינה X, Y קבוצות ותהא  $Y \mapsto f: X \to Y$  חח"ע ועל אזי |X| = |Y| הגדרה: תהיינה  $X, Y \mapsto X$ 

|X|<|Y| אזי אזי  $|X|\neq |Y|$  וכן  $|X|\leq |Y|$  אזי קבוצות עבורן אזי |X|<|Y|

 $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$  המקיים  $n\in\mathbb{N}$  עבורה עבורה עבורה חופית:

 $.|A|=|\{0,\dots,n-1\}|$  המקיים  $n\in\mathbb{N}$  קיים לא עבורה A קבוצה אינסופית: קבוצה אינסופית

טענה: תהא B סופית או בת מנייה תהא f:A o B ותהא קבוצה ותהא מנייה מנייה מנייה מנייה

|X|=|Y| אאי  $|Y|\leq |X|$  וכן  $|X|\leq |Y|$  אאי און |X|=|Y| איי ואין און איי וואר אוווי אווי און אווי וואר אי וואר אווי וואר אווי וואר אי וואר אווי וואר אי וואר אי וואר אווי וואר איי וואר אי וואר

 $|X| \neq |Y|$  אזי  $\neg (|X| = |Y|)$  איזי קבוצות עבורן תהיינה X,Y איזי

טענה: תהא B בת מנייה ותהא  $B\subseteq A$  אינסופית אזי B בת מנייה. מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא  $B\subseteq A$  אזי B סופית או בת מנייה.

X העוצמה של |X| העוצמה של

 $|X|=leph_0$  קבוצה X עבורה מנייה: קבוצה בת מנייה

 $|\{0,\ldots,n-1\}|=n$  אזי  $n\in\mathbb{N}$  סימון: יהי

. טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\cup B$  בת מנייה מנייה

סימון:  $|\mathbb{N}|=0$ %.

```
(aRb) \lor (a=b) מתקיים b \in A מתקיים a \in A עבורו קיים a \in A עבורו קיים a \in A מתקיים סדר קווי
                                                                     \min(A) = a אזי a \in A איבר ראשון בעל איבר קווי בעל אדר קווי אזי \langle A, R \rangle יהי
        . טענה: יהי \langle B,S \rangle אזי \langle B,S \rangle אזי איבר ראשון ויהי \langle B,S \rangle סדר קווי באשר סענה: יהי \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle סדר איבר ראשון ויהי
       (aRb) \lor (a=b) מתקיים a \in A מתקיים b \in A מתקיים סדר קווי \langle A,R \rangle עבורו קיים a \in A באשר לכל
                                                                     \max(A) = a אזי a \in A אזיבר אחרון בעל איבר סדר קווי בעל איבר אחרון יהי
        . טענה: אזי \langle B,S \rangle אזי אזי איבר אחרון ויהי יבעל איבר אחרון איבר אחרון ויהי יהי אחרון איבר \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle סדר קווי באשר
                        zRy וכן xRz עבורו z\in A קיים xRy המקיימים xRy המקיימים עבורו z\in A עבורו וכן אינור z\in A
                                     טענה: יהי \langle A,R
angle\simeq \langle B,S
angle סדר קווי באשר \langle B,S
angle אזי \langle B,S
angle צפוף.
                                                                    טענה: \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
                                                                                                                        \mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}} \not\simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle מסקנה:
      \langle A, \preccurlyeq 
angle \simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} 
angle אזי |A| = leph_0 משפט קנטור: יהי \langle A, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר
       \langle A, \prec 
angle \simeq \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} 
angle אזי משפט קנטור: יהי \langle A, \prec 
angle סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר משפט קנטור: משפט קנטור:
                            (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים X \subseteq A אזי X \subseteq A מדר קווי ותהא A \subseteq A
                                                  \overline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי X \subseteq A סדר קווי ותהא סימון: יהי
                                                                   \overline{B}_X 
eq \emptyset עבורה X \subseteq A אזי אזי X \subseteq A סדר קווי אזי יהי
                            (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים מלרע: יהי אזי X \subseteq A אזי אזי תהא X \subseteq A מחסם מלרע: יהי
                                                   \underline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי ותהא סדר קווי יהי לא סדר קווי ותהא סדר אזי אזי לימון: יהי
                                                                    \underline{B}_X 
eq \emptyset עבורה X \subseteq A אזי אזי X \subseteq A סדר קווי אזי יהי יהי מלרע: יהי
                                                           . סדר חסם מלרע חסם מלרע חסם מלרע אזי איזי X\subseteq A סדר קווי אזי \langle A,R \rangle יהי
                                                                      \operatorname{sup}(X) = \min\left(\overline{B}_X\right) אזי X \subseteq A אדר קווי ותהא A, R סדר קווי ותהא
                                                                       \inf\left(X
ight)=\max\left(\underline{B}_{X}
ight) אזי אזי X\subseteq A סדר קווי ותהא אוי לאזי \langle A,R
angle
                                                    \operatorname{sup}\left(X
ight) אינים סדר קווי אלם: סדר קווי \left\langle A,R
ight
angle עבורו לכל
                             (\sup(X),\inf(X),\inf(X)) סדר קווי אזי איי שלם)(A,R) סדר שלם) סטענה: יהי
            המקיים \langle L,\sqsubseteq 
angle הזי סדר קווי חלקי: יהי \langle P,\preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי סדר חלקי או המקיים מקיים
                                                                                                                                           .P \subseteq L \bullet
                                                                                            (x \preccurlyeq y) \Longleftrightarrow (x \sqsubseteq y) מתקיים x, y \in P לכל
                                                                              . סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון. \langle L, \Box \rangle
                                                                                                                        \langle L, \sqsubseteq \rangle צפוף ב־ \langle P, \preccurlyeq \rangle \bullet
משפט יחידות השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר סדר קווי חלקי צפוף השלמות אזי
                                                                                    p \in P לכל \pi\left(p\right) = p עבורו \pi:L 	o L^* לכל
                      משפט קיום השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.
                                                    באשר \langle A,B \rangle אזי אזי A,B \subseteq P ויהיו חלקי ויהיו סדר קווי אזי אזי \langle P,\preccurlyeq \rangle באשר התך דדקינד: יהי
                                                                                                                                     A \cap B = \emptyset •
                                                                                                                                     A \cup B = P \bullet
                                                                                                    a \preccurlyeq b מתקיים b \in B ולכל •
                                                                                                                      ללא איבר אחרון. \langle A, \preccurlyeq \rangle
```

 $[p] = \langle (-\infty,p)\,,[p,\infty)
angle$  אזי  $p\in P$  ויהי חלקי חלקי סדר קווי חלקי יהי אזי  $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ 

.Ded  $(P)=\{\langle A,B\rangle \mid$  חתך דדקינד  $\langle A,B\rangle \}$  סדר קווי חלקי אזי מימון: יהי  $\langle P,\preccurlyeq \rangle$ 

 $\langle A,B
angle \preccurlyeq \langle C,D
angle$  אזי  $A\subseteq C$  חתכי דדקינג באשר  $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$  וויהיו חלקי ויהיו איזי  $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$  חתכי מהגדרה: יהי

סענה: יהי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי ויהי  $p \in P$  אזי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  חתך דדקינד.

 $.\langle\{[p]\mid p\in P\}\,,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$  טענה: יהי יהי יהי סדר קווי חלקי אזי יהי ענה: יהי יהי ערה פחתכי בהתאמה מעל בתור שיכון של  $P,\preccurlyeq\rangle$  בחתכי הדדקינד שלה.

טענה: יהי  $\langle \mathrm{Ded}\,(P)\,,\preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי סענה: יהי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי סענה: יהי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי  $\langle \mathrm{Ded}\,(P)\,, \preccurlyeq \rangle$ 

```
\mathcal{C}=igcap_{i=0}^\infty C_i אזי n\in\mathbb{N} לכל C_{n+1}=\left(rac{1}{3}C_n
ight)\cup\left(rac{2}{3}+rac{1}{3}C_n
ight) ונגדיר ונגדיר C_0=[0,1] לכל
                                                                                                                            .(\mathcal{C},<_{\mathbb{R}})\simeq\left(^{\mathbb{N}}\left\{ 0,1
ight\} ,<_{\mathsf{lex}}
ight) טענה:
|A\cup B|=|C\cup D| אזי און |B|=|D| וכן |A|=|C| סענה: תהיינה |A\cup B|=|C\cup D| אזי אזי ותהיינה לבוצות ארות ותהיינה
                                                                                     |A|+|B|=|A\cup B| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות זרות אזי
                                                                                                              |A \times \{0\}| = |A| טענה: תהא A קבוצה אזי
                                                            |A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}| הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי
                                      |A \times B| = |C \times D| אזי |B| = |D| וכן |A| = |C| אזי |A, B, C, D| טענה: תהיינה
                                                                                        |A|\cdot |B| = |A	imes B| הגדרה כפל: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                             |A|=\kappa עבורה עבורה קבוצה אם קיימת עוצמה א היא עוצמה הערה: נאמר כי היא אוצמה אם היא
                                                                                                                    \kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa טענה: תהא א עוצמה אזי \kappa
                                                                                   \kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu טענה: תהיינה \kappa, \lambda, \mu עוצמות אזי
                                                                                        A = \{f \mid f: B \to A\} הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי
                                                |BA|=|DC| אזי אזי |B|=|D| וכן |A|=|C| אזי אזי |A,B,C,D| טענה: תהיינה
                                                                                                      |A|^{|B|}=|^BA| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                                                                                  |\mathbb{R}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                                        \kappa \cdot \kappa = \kappa^2 טענה: תהא א עוצמה אזי
                          (\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu}) וכן (\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)} וכן \kappa^{(\lambda + \mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} עוצמות אזי \kappa, \lambda, \mu וכן \kappa, \lambda, \mu
                                                                                              .\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0 וכן אזי n\in\mathbb{N} וכן n\in\mathbb{N} יהי אזי יהי
                                                                                               \aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0 טענה: יהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ וכן וכן n\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                              \aleph_0^n=leph_0 אזי n\in\mathbb{N}_+ טענה: יהי
                                                       2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+\aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                          2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot \aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי n\in\mathbb{N}_+
                                                                                        (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן (2^{\aleph_0})^n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי יהי
                                                                                                  \mathfrak{K}_0^{leph_0}=2^{leph_0} וכן n^{leph_0}=2^{leph_0} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי יהי
                                                                                                                                         (2^{\aleph_0})^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0} :טענה
                                          |\mathbb{N}\mathbb{N}|=2^{\aleph_0} וכן |\mathbb{N}	o\mathbb{R}|=2^{\aleph_0} וכן וכן |\mathbb{C}|=2^{\aleph_0} וכן |\mathbb{R}^n|=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי וכן
                                          |B \backslash A| = 2^{\aleph_0} אזי |A| \leq \aleph_0 באשר A \subseteq B ותהא ותהא |B| = 2^{\aleph_0} אזי באשר שנה: תהא
                                                                                                       |\{a\in\mathbb{C}\mid מסקנה: a\}|=2^{leph_0} מספר טרנסצנדנטי
                                                                                                                  |\{a\in\mathbb{R}\mid aמסקנה: |\{a\in\mathbb{R}\mid a\}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                     |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R})\wedge (f)\}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R})\wedge (f)\}|=2^{leph_0} מסקנה: |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R}) + (f)\}|=2^{leph_0}
                                                                                                            |\{A\mid (A\subseteq\mathbb{R})\land (פתוחה|A|\}|=2^{leph_0} טענה:
                                            יחס סדר טוב: סדר קווי \langle W, \prec 
angle עבורו לכל A 
eq \varnothing באשר איבר קטן ביותר. עבורו לכל
```

f:A o B עבורו קיימת  $\langle B,\sqsubset
angle$  עבור איבר אחרון וללא איבר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון

 $\langle P, \preccurlyeq 
angle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} 
angle$  משפט: יהי  $\langle P, \preccurlyeq 
angle$  סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי

 $\langle {
m Ded}\,(P)\,,\preccurlyeq \rangle$  טענה: יהי  $\langle P,\preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי פופה אזי  $\langle P,\preccurlyeq \rangle$  טענה: יהי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי  $\langle {
m Ded}\,(P)\,, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי

 $(\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}})$  מספרים ממשיים:  $(\mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}})$  הינה ההשלמה של

 $|\mathcal{P}\left(X
ight)|=\left|^X2
ight|$  אזי קבוצה א קבוצה איזי אינה: תהא  $|X|<|\mathcal{P}\left(X
ight)|$  משפט קנטור: תהא  $|X|<|\mathcal{P}\left(X
ight)|$ 

 $\mathcal{P}\left(X\right)=\left\{Y\mid Y\subseteq X\right\}$  אזי קבוצה החזקה: תהא קבוצה אזי תהא Xקבוצה החזקה: סימון: תהא אזי Xקבוצה אזי X

שומרת סדר.

 $|\mathbb{R}| 
eq \aleph_0$  טענה:

 $|\mathbb{R}|=|\mathbb{N}2|$  :טענה

```
W[a] = \{b \in W \mid b \prec a\} אזי a \in W יחס סדר טוב ויהי \langle W, \prec \rangle יחי יחס סדר טוב ויהי
                                                                        Wב־עוס היא W[a] אזי u\in W יחס היח סדר טוב ויהי אזי W[a] רישא ב־
                                               S=W\left[x
ight] יחס סדר טוב ותהא Sרישא ב־W אזי קיים איים עבורו אחס סדר \langle W, \prec 
angle יחס יחס סדר טוב ותהא
                     (x \prec f(x)) \lor (x \prec f(x)) \lor (x \prec f(x)) אומרת סדר אזי (x \prec f(x)) \lor (x \prec f(x)) \lor (x \prec f(x)) לכל
                                                                               W \not\simeq W \left[ a 
ight] אזי a \in W יחס סדר טוב ויהי \langle W, \prec 
angle אזי מסקנה: יהי
                                                               f=\mathrm{Id} איזומורפיזם אזי f:W	o W יחס סדר טוב ויהי יהי איזימורפיזם אזי
                                           f=g איזומורפיזמים אזי f,g:W	o A ויהיו סדר טובים אזי \langle W, \prec 
angle, \langle A, 
angle מסקנה: יהיו
                                                 משפט ההשוואה: יהיו מהבאים מתקיים סדר טובים אזי משפט ההשוואה: יהיו \langle W, \prec 
angle \, , \langle A, \sqsubset 
angle יחסי סדר טובים אזי
                                                                                                                                .\langle W, \prec \rangle \simeq \langle A, \Box \rangle \bullet
                                                                                                 \langle W[w], \prec \rangle \simeq \langle A, \Box \rangle עבורו w \in W •
                                                                                                    \langle W, \prec \rangle \simeq \langle A[a], \sqsubseteq \rangle עבורו a \in A סיים •
                                                              y \in X מתקיים y \in A ולכל A \in X עבורה עבורה לכל קבוצה ארנזיטיבית:
                                                                                       סדר טוב. \langle X, \in 
angle יחס סדר טוב. \langle X, \in 
angle
                                                                                                                טענה: יהי \alpha \cup \{\alpha\} סודר אזי \alpha \cup \{\alpha\}
                                                                                                                          \alpha \notin \alpha טענה: יהי \alpha סודר אזי טענה:
                                                                                                          . סודר x אזי אזי x \in \alpha סודר ויהי \alpha סודר מענה: יהי
                                                                                                 \alpha \notin \beta אזי \beta \in \alpha טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים באשר
                                                                                                 \alpha \in \beta אזי \alpha \subseteq \beta טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים באשר
                                                                    טענה משפט ההשוואה: יהיו lpha,eta סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים
                                                                                                                                              \alpha = \beta \bullet
                                                                                                                                              \alpha \in \beta \bullet
                                                                                                                                              .\beta \in \alpha \bullet
                                                                                  . סענה: \min{(S)} אזי סודרים אל ריקה לא ריקה לא קבוצה S קבוצה לא יים.
                                                                                                                          \mathcal{O}_n = \{ \alpha \mid סודר \alpha \} הגדרה:
                                                                                                                                        \mathcal{O}_n = \mathrm{Ord} : סימון
                                                                                                       טענה פרדוקס גוראלי־פורטי: מינה קבוצה. טענה
                                                               (\alpha \cup \{\alpha\} \in \beta) \lor (\alpha \cup \{\alpha\} = \beta) אזי \alpha \in \beta סודרים באשר \alpha, \beta אזי יהיו
                                                                                                           \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} סודר אזי \alpha סודר מימון: יהי
                                                          eta \in \alpha טענה: תהא eta \in S מתקיים אזי קיים סודר אזי קיים מודרים אזי קבוצת סודרים אזי קיים סודר
                                            \langle lpha, \in 
angle \simeq \langle W, \prec 
angle עבורו מידר אזי סדר טוב יהי יהי יהי יהי טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי
                                                                      \langle W, \prec 
angleיחס משפט: יהי \langle W, \prec 
angleיחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל־
                                                  \operatorname{cotp}\left(\langle W, \prec 
angle
ight) = lpha אזי אזי אזי סודר טיפוס מודר טיפוס מדר טוב ויהי \langle W, \prec 
angle אזי מימון: יהי
אזי לכל קבוצה P אזי לכל קבוצה Y אזי קיימת קבוצה Y אזי לכל קבוצה לכל קבוצה Y אזי לכל קבוצה אקסיומת ההחלפה:
                                                                           באשר לכל P\left(a,b
ight) קיים b\in B קיים a\in A זוהי אינה טענה B
                            קבוצה. אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי \{a\in A\mid P\left(a
ight)\} קבוצה. אוהי אינה טענה
משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר \alpha מתקיים משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P מוסחה באשר לכל סודר מתקיים
                                                                                                                                                       .P(\gamma)
                                                                              lpha=eta+1 סודר עוקב: סודר eta עבורו קיים סודר עוקב סודר lpha
                                                                               משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת
```

.טענה:  $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$  סדר טוב

 $.S \neq W \bullet$ 

טענה: יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $n \in \mathbb{N}$  סדר טוב.  $n \in \mathbb{N}$ 

 $b \in S$  אזי  $b \prec a$  אם  $b \in W$  ולכל  $a \in S$ 

רישא של יחס סדר טוב: יהי  $\langle W, \prec 
angle$  יחס סדר טוב אזי המקיימת רישא של יחס סדר טוב:

```
P(\emptyset) • לכל סוז • לכל סוז • לכל סוז • לכל סודר \gamma לכל מודר \gamma לכה: תהא \gamma מון: הסודר
```

 $.P\left(\alpha\right)\Longrightarrow P\left(\alpha+1\right)$ מתקיים  $\alpha$ סודר לכל •

 $(\forall \beta \in \alpha.P(\beta)) \Longrightarrow (P(\alpha))$  מתקיים  $\alpha$  מתקיים •

 $.P\left(\gamma
ight)$  אזי לכל סודר  $\gamma$  מתקיים

מתקיים S אינה טענה  $x+1\in S$  מתקיים  $x\in S$  אינה טענה באשר באשר  $x\in S$  מתקיים באשר

. טענה: תהא  $\delta \notin S$  אזי א הסודר הראשון באשר  $\delta \in S$  טענה: תהא א קבוצה באשר אזי לכל לכל מתקיים מתקיים אזי  $x+1 \in S$  מתקיים

 $\omega$  סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו הסודר הגבולי

סימון:  $\emptyset = 0$ .

 $\mathbb{N} = \omega$  :הגדרה

 $n \in \mathbb{N}$  לכל  $n+1=n \cup \{n\}$  הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה

lpha < eta אזי  $lpha \in eta$  אזי מון: יהיו lpha, eta סודרים באשר

הגדרה חיבור: יהי lpha סודר אזי

 $.\alpha + 0 = \alpha \bullet$ 

 $.\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ יהי  $\beta$  סודר אזי •

 $\alpha+\beta=igcup_{\gamma<eta}(lpha+\gamma)$  יהי eta סודר גבולי אזי יהי eta

 $.(lpha+eta)+\gamma=lpha+(eta+\gamma)$  אזי סענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים אזי

 $.\gamma+\alpha<\gamma+\beta$  אזי  $\alpha<\beta$  באשר סודרים  $\alpha,\beta,\gamma$  יהיו יהיו טענה: יהיו

 $.\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$  אזי  $\alpha<\beta$  באשר סודרים מחדרים  $\alpha,\beta,\gamma$  יהיו טענה: יהיו

 $.\alpha+\gamma=\beta$  עבורו סודר חיים אזי קיים אזי באשר באשר סודרים  $\alpha,\beta$ יהיו יהיו סענה: יהיו

 $\omega + 1 > \omega$  וכן  $1 + \omega = \omega$  וכן  $0 + \omega = \omega$ 

הגדרה כפל: יהי  $\alpha$  סודר אזי

 $\cdot \alpha \cdot 0 = 0 \bullet$ 

 $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$  יהי  $\beta$  סודר אזי •

 $.\alpha\cdot\beta = \bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha\cdot\gamma\right)$ אזי גבולי אזי סודר  $\beta$ יהי יהי

 $.\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$  אזי  $\gamma \neq 0$  וכן  $\alpha < \beta$  סודרים באשר  $\alpha, \beta, \gamma$  אזי יהיו

 $lpha\cdot\gamma<eta\cdot\gamma$  אזי lpha<eta טענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים באשר

 $lpha\left(b+\gamma
ight)=lpha\cdoteta+lpha\cdot\gamma$  סענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים אזי

 $\omega\cdot 2=\omega+\omega$  וכן  $2\cdot\omega=\omega$  וכן  $1\cdot\omega=\omega$  וכן  $0\cdot\omega=0$ 

 $\omega+\omega>\omega+n$  אזי  $n<\omega$ 

טענה: יהי  $\alpha+\omega$  סודר אזי  $\alpha+\omega$  סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי  $\alpha$  סודר אזי

 $.\alpha^0 = 1 \bullet$ 

 $.lpha^{eta+1}=lpha^eta\cdotlpha$  יהי eta סודר אזי •

 $.lpha^{eta}=igcup_{\gamma<eta}(lpha^{\gamma})$  יהי eta סודר גבולי אזי •

 $.\gamma^{lpha}<\gamma^{eta}$  אזי  $1<\gamma$  וכן lpha<eta סענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים באשר

 $lpha^{\gamma} \leq eta^{\gamma}$  אזי lpha < eta טענה: יהיו  $lpha, eta, \gamma$  סודרים באשר

 $.lpha^eta\cdotlpha^\gamma=lpha^{eta+\gamma}$  אזי סענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים אזי

 $(lpha^eta)^\gamma=lpha^{eta\cdot\gamma}$  טענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים אזי

 $\omega^2>2^\omega$  וכן  $\omega^2=\omega\cdot\omega$  וכן  $\omega^1=\omega$  וכן  $\omega^2=\omega$  וכן  $\omega^1=\omega$  וכן  $\omega^2=\omega$ 

 $\omega^{\alpha} \geq \alpha$  טענה: יהי  $\alpha$  סודר אזי טענה:

טענה צורת קנטור נורמלית: יהי  $\beta_i>\beta_j$  סדר אזי קיים ויחידים  $\beta_1\dots\beta_k$  קיימים ויחידים אזי קיים ויחיד סיים ויחיד סיים ויחידים אויחידים  $k<\omega$  סיים ויחידים אזי קיים ויחידים  $\alpha=\sum_{i=1}^k\omega^{\beta_i}\cdot n_i$  עבורם עבורם ויחידים  $\alpha=\sum_{i=1}^k\omega^{\beta_i}\cdot n_i$ 

 $.\xi < lpha$  וכן  $eta = lpha \cdot \delta + \xi$  עבורם  $\xi, \delta$  עבורם אזי קיימים ויחידים מיאי lpha < eta וכן lpha < eta וכן lpha < eta

|eta|<|lpha| מתקיים eta<lpha עבורו לכל lpha

 $\aleph_0 = \omega$  :סימון

```
. טענה: קיים סודר \alpha המקיים \omega < \alpha המקיים \alpha אינו בן מנייה
                                                                                                   .\delta < \kappa טענה: יהי \delta סודר אזי קיים מונה \kappa באשר
                                                                                  lpha < lpha^+ סודר אזי lpha^+ הינו המונה הראשון עבורו lpha^+ סימון: יהי
                                                                                                               \aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha}^+ אזי \alpha סודר אזי מיהי אוי הגדרה א: יהי
                                                                                                  \aleph_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_{\beta} אזי גבולי סודר מודר \alpha יהי : איז הגדרה
                                                                                                                        .טענה: יהי lpha סודר אזי מונה מענה:
                                                                                         \kappa=\aleph_{lpha} עבורו סיענה: יהי מונה אזי קיים ויחיד סודר מונה א
                                                                                                                      \omega_{lpha}=leph_{lpha} סודר אזי סודר מימון: יהי
                                                                                          |\delta|=\aleph_{\alpha} אזי אין |\delta|=|\aleph_{\alpha}| אזי אורים באשר אוי סימון: יהיו
הערה: כאשר מבצעים פעולות בין מונים הכוונה היא לפי ההגדרה של עוצמות, כאשר מבצעים פעולות בין סודרים הכוונה היא לפי
                                                                                                                                       ההגדרה של סודרים.
הגדרה: יהי \alpha סודר אזי יחס סדר \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \rangle באשר לכל \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \rangle באשר לכל הגדרה: יהי \alpha סודר אזי יחס סדר אי
                                                                                                                                                       מתקיים
                                                                                                                       \max(\beta, \gamma) < \max(\delta, \kappa) \bullet
                                                                                                          .\beta < \delta וכן \max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa) •
                                                                                            .\gamma < \kappa וכן \beta = \delta וכן \max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa)
                                                                                               טענה: יהי \alpha סודר אזי \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}, \lhd \rangle יחס סדר טוב.
                                                                                                 .otp (\langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}, \lhd \rangle) = \aleph_{\alpha} משפט: יהי \alpha סודר אזי משפט:
                                                                                                               \aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\alpha}=\aleph_{\alpha} מסקנה: יהי \alpha סודר אזי מסקנה:
                                                                                                                  משפט: יהיו \kappa,\lambda מונים אינסופיים אזי
                                                                                                                             .\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\} \bullet
                                                                                                                              .\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\} \bullet
                                                                                                                           מסקנה: יהיו lpha,eta סודרים אזי
                                                                                                                          \aleph_{\alpha} + \aleph_{\beta} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \bullet
                                                                                                                            \aleph_{\alpha} \cdot \aleph_{\beta} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \bullet
                               f\left(X
ight)\in X מתקיים X\in S מתקיים f:S	o A מוק באשר S פונקציית בחירה: תהא
                             אקסיומת הבחירה (AC): תהא S קבוצה באשר קבוצה באיר אינה טענה S אווי אינה אינה טענה אקסיומת הבחירה (AC).
                                                              g:\mathbb{N}	o A אזי (קיימת f:A	o\mathbb{N} חח"ע) אזי (קיימת f:A	o\mathbb{N} אזי (קיימת מענה: תהא
         A משפט הסדר הטוב/משפט צרמלו: תהא A קבוצה עבורה קיימת פונקציית בחירה על
                                                        הגדרה משפט הסדר הטוב: תהא A קבוצה אזי קיים סדר טוב על A. זוהי אינה טענה
                                                                                                                  משפט: (AC)\Longleftrightarrow(AC)
                                                         AC טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד סודר lpha עבורו A
                                                                             אינה טענה ,AC דורש .2^{\aleph_0}=leph_1:(CH) השערת הרצף הפרטית
                                                    אינה טענה ,AC אורי אינה אינה אינה מודר אזי (GCH): יהי lpha סודר איזי יהי אינה אינה מערת הרצף הכללית
                                                                                                                           .ZFC בלתי תלויה ב־CH
                                                                                                                         .ZFC בלתי תלויה ב־GCH
                                                                                                                             הערה: AC בלתי תלויה ב־ZF.
                                                                       AC טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיימת אוB\subseteq A בת מנייה. דורש
  AC טענה: תהא (A_n\mid n\in\mathbb{N}) סופית או בת מנייה. דורש או בת מנייה לכל i\in\mathbb{N} אזי הורש באשר קבוצות באשר
          (b \leq a) \Longrightarrow (b=a) מתקיים b \in A באשר לכל a \in A עבורו קיים b \in A מתקיים (b \leq a) מתקיים (b \leq a).
           a\in A מתקיים a\in A מתקיים a\in A עבורו קיים b\in A עבורו קיים עבור מקסימלי: סדר קווי בעל איבר מקסימלי:
הגדרה הלמה של צורן: יהי \langle P,\leq 
angle יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת A\subseteq P קיים חסם מלעיל אזי קיים בA\subseteq P יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת
                                                                                                                       (AC) \Longleftrightarrow (AC)משפט:
```

טענה: יהיו  $\alpha, \beta$  סודרים בני מנייה אזי  $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^{\beta}$  סודרים בני מנייה.

```
n<\omega לכל x_n\in X באשר x_n\mid m<\omega באשר אזי קיימת מעל אי יחס מלא מעל לכל תהא x_n\mid m<\omega באשר אקסיומת הבחירה התלויה
                                                                                                            עבורה n<\omega לכל לכל x_nRx_{n+1} אינה טענה
                                                                                    (DC) \Longrightarrow (AC_{\omega}) וכן (AC) \Longrightarrow (AC_{\omega}) \Longrightarrow (AC_{\omega})
         \prod_{i\in I}X_i=\left\{f\mid \left(f:I	o igcup_{i\in I}X_i
ight)\wedge (orall i\in I(f(i)\in X))
ight\} קבוצות אזי \left(X_i\mid i\in I
ight) קבוצה ותהיינה קבוצה אזי קבוצות אזי
                          AC טענה: תהא \alpha \in I אזי \alpha \in I אזי X_{lpha} 
eq \alpha קבוצות באשר קבוצה X_i \mid i \in I אזי X_i \mid i \in I סענה: תהא
                                   .(AC)\Longleftarrow(\prod_{i\in I}X_i
eq\varnothing אזי \alpha\in I אזי \alpha\in I סענה: (לכל קבוצה X_i\mid i\in I) טענה:
                                                                              (AC) \longleftarrow (|A| \geq |B| או |A| \leq |B| מתקיים A, B מענה: (לכל קבוצות
                                                                        AC טענה: יהי \mathbb F שדה ויהי \langle V,+,\cdot 
angle מ"ו מעל \mathbb F אזי קיים בסיס ל
A_i = |B_i| אזי ארות באשר אויר אוינה אוי ותהיינה אוי ארות ותהיינה לA_i = |B_i| לכל לכל אוי איינה לA_i = |B_i| לכל לכל אוי
                                                                                                                            AC דורש .\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|=\left|\bigcup_{i\in I}B_i\right|
AC דורש .\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|
                   |A_i|=|B_i| סטענה: תהא I קבוצות ההיינה |A_i|=|B_i| קבוצות ותהיינה |A_i|=|B_i| לכל לכל וואזי
                                                                                                                           AC דורש .\left|\prod_{i\in I}A_i\right|=\left|\prod_{i\in I}B_i\right|
             מנים: תהא |A_i|=\kappa_i לכל |A_i|=\kappa_i מונים ותהיינה אזיי אויינה |A_i|=\kappa_i קבוצות באשר אזיי אויינה |A_i|=\kappa_i איי
                                                                                                                              AC דורש .\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \prod_{i \in I} A_i \right|
                                                                                         .AC הערה: מכאן והלאה לא ייסומן כאשר הטענות יסתמכו על
                                                                         \sum_{i<\lambda}\kappa=\kappa\cdot\lambda אזי \kappa\geq 1 מונה אינסופי ויהי \kappa מונה באשר מונה אזי מונה \lambda
                 \sum_{i<\lambda} \kappa_i = \sup\left\{\kappa_i \mid i<\lambda
ight\}\cdot \lambda אזי i<\lambda לכל \kappa_i\geq 1 מונים באשר אינסופי ויהיו (היי ויהיו אינסופי ויהיו אינסופי ויהיו אינסופי ויהיו (היי מונה אינסופי ויהיו
                                                                                                                                       \sum_{1 \leq n < \aleph_0} n = \aleph_0 טענה:
                                                                                                                                      \prod_{1\leq n<\aleph_0} n=2^{\aleph_0} טענה:
  \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i אזי i\in I לכל הא לכל לכל משפט קניג: תהא i\in I מונים ויהיו אונים ויהיו \lambda_i \mid i\in I מונים משפט קניג: תהא
וכן i<\delta לכל lpha>lpha_i המקיימת סודר היה אוי הסודר המינימלי \delta עבורו קיימת סדרה עולה \langle lpha_i \mid i<\delta \rangle המקיימת סודר גבולי אזי הסודר המינימלי
                                                                                                                                                       .\alpha = \bigcup_{i < \delta} \alpha_i
                                                                                               \operatorname{cof}(\alpha) הינה \alpha סודר גבולי אזי הסופיות של סודר גבולי סודר גבולי
                                                                                           \operatorname{cof}(\aleph_{\omega}) = \omega וכן \operatorname{cof}(\omega + \omega) = \omega וכן \operatorname{cof}(\omega) = \omega
                                                                                                            .lpha=\cos{(lpha)} סודר סדיר: סודר גבולי lpha המקיים
                                                                                                            lpha 
eq \cot(lpha) סודר חריג: סודר גבולי lpha המקיים
                                                                                                                  מונה. \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                                          טענה: יהי \kappa מונה אזי \kappa סודר גבולי.
                                                                                                     \operatorname{cof}(\operatorname{cof}(\alpha)) = \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                           . מונה סדיר מונה \operatorname{cof}\left(\alpha\right) אזי מונה סדיר מונה סדיר מענה: יהי
.(\kappa = \sum_{i < \lambda} \kappa_i עבורם i < \lambda לכל לכל \kappa_i < \kappa מונה אזי (\kappa_i < \kappa חריג) לקיים סודר i < \kappa וקיימים מונים (\kappa_i < \kappa באשר i < \kappa באשר א
                                                                                                              AC טענה: יהי lpha סודר אזיlpha סדיר. דורש lpha
                                                                                                          \operatorname{cof}(\aleph_{\alpha}) = \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                                                           \operatorname{cof}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0 :טענה
                                                                                                                        \aleph_{\alpha} יהי אזי גבולי: יהי \alpha סודר גבולי
                                                                                                                        .אָ_{lpha} יהי חודר עוקב אזי מונה עוקב: יהי
```

אקסיומת הבחירה בת־מנייה ( $(AC_\omega)$ : תהא S קבוצה בת־מנייה באשר g אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S. אוהי אינה טענה

טענה: יהי  $\alpha$  מונה עוקב אזי  $(\alpha)$  ב $(\alpha)$  ב $(\alpha)$  טענה: יהי  $(\alpha)$  מונה עוקב אזי  $(\alpha)$  מונה גבולי וכן קיים  $(\alpha)$  אזי  $(\alpha)$  סענה: יהי  $(\alpha)$  סודר עבורו  $(\alpha)$  מונה גבולי וכן קיים  $(\alpha)$  וקיים מונה  $(\alpha)$  עבורם  $(\alpha)$  לכל  $(\alpha)$  ב $(\alpha)$   $(\alpha)$  אזי  $(\alpha)$   $(\alpha)$ 

מסקנה: יהי  $\aleph_{\alpha}$  מונה עוקב אזי מונה סדיר.

 $\mathbb{J}(\kappa)=\kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$  סימון: יהי  $\kappa$  מונה אזי

 $.2^{<\kappa}=\sup\left\{2^{\lambda}\mid ($ מונה אוי  $\lambda)\wedge(\lambda<\kappa)
ight\}$  מונה אוי מונה מונה אוי

```
.2^{\aleph_lpha}= בורו \aleph_lpha מונה גבולי וכן לכל eta<lpha ולכל מונה lpha<\kappa קיים eta<\gamma<lpha עבורו lpha מונה גבולי וכן לכל
                                                                                              השערת המונים החריגים (SCH): יהי \kappa מונה חריג באשר 2^{\mathrm{cof}(\kappa)} < \kappa אזי יהי \kappa: יהי א מונה חריגים
                                                            lpha \kappa^{\lambda} = \kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)} אז |lpha|^{\lambda} \leq \kappa מתקיים lpha < \kappa טענה: יהי lpha מונה גבולי יהי lpha מונה באשר
                                                                      (\xi \prec \eta) \Longleftrightarrow ((\cos(\xi) < \cos(\eta)) \lor ((\cos(\xi) = \cos(\eta)) \land (\xi < \eta))) סודרים גבוליים אזי
                                                                                                                                                                                                    \{ \alpha < \kappa \mid \alpha  סטענה: יהי \alpha  מונה אזי הינו סדר טוב על מונה אזי הינו סדר טוב על
                                                                                                             .[A]^\lambda = \{C \subseteq A \mid |C| = \lambda\} אזי אינסופית ויהי \lambda מונה מונה באשר A אזי תהא הגדרה: תהא אינסופית ויהי אינסופית ויהי א
                                                                                  .ig|[A]^\lambdaig|=|A|^\lambda אזי \lambda\leq |A| טענה: תהא A קבוצה אינסופית ויהי \lambda באשר אזי \lambda\leq |A| אזי \lambda\leq |A| המקיימת A המקיימת C\subseteq D המקיימת A קבוצה קופינלית: יהיו A מונים אזי A עבורה לכל A
                                                                                                                                                                                                   \text{.cof}\left(\left[\mu\right]^{\kappa},\subseteq\right)=\min\left\{\left|Y\right|\midקוניפלית אזי אזי מונים אזי \mu,\kappaיהיו יהיו יהיו
                                                                                                                             \operatorname{cof}\left(\left[\mu
ight]^{\kappa},\subseteq
ight)\leq\operatorname{cof}\left(\left[\mu
ight]^{\lambda},\subseteq
ight)\cdot\operatorname{cof}\left(\left[\lambda
ight]^{\kappa},\subseteq
ight) אזי \kappa<\lambda אזי \kappa<\lambda מונים באשר \mu,\kappa,\lambda מונים באשר
                                                                                                                                                                                  \operatorname{cof}([\mu]^\kappa,\subseteq) \stackrel{\prime}{\leq} \operatorname{cof}([\lambda]^\kappa,\subseteq) אזי \mu<\lambda מונים באשר \mu,\kappa,\lambda מונים באשר
                                                                                                                                                                                                                                                                       \mathrm{cof}\left(\left[leph_{n}
ight]^{leph_{0}},\subseteq
ight)=leph_{n} אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי n\in\mathbb{N}_{+}
                                                                                                                                                                                                                                   \aleph_\omega^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}\cdot \mathrm{cof}\left(\left[\aleph_\omega\right]^{\aleph_0},\subseteq
ight) טענה: יהי 	au טודר אזי קיים סודר lpha עבורו
                                                                                                                                                                                    מונה אי־נשיג חלש: יהי lpha סודר אזי מונה lpha באשר מונה בולי וסדיר.
                                                                     \lambda<leph_lpha מונה אי־נשיג חזק: יהי lpha סודר אזי מונה lpha באשר lpha מונה סדיר וכן לכל מונה \lambda<lpha מתקיים
                                                                                                                                                            .((קכל סודר lpha מתקיים (lpha אי־נשיג חלש) אי־נשיג חזק)). (GCH) טענה:
                                                                                                                                                                                            V_{\omega}=igcup_{n\in\mathbb{N}}V_n וכן n\in\mathbb{N} לכל V_{n+1}=\mathcal{P}\left(V_n
ight) וכן V_0=\emptyset הגדרה:
                                                                                                                                                                                                                                                A \in V_\omega באשר A באשר קבוצה קבוצה חופית באופן תורשתי:
                                                                                                                                                  . טענה: תהא V_{\omega} קבוצה טרנזיטיבית באופן הורשתי אזי קבוצה טרנזיטיבית.
                                                                                                                          x\in V_\omega אזי סטענה: תהא קבוצת הקבוצות הסופיות באופן תורשתי ותהא על קבוצת הקבוצות הסופיות באופן x\subseteq V_\omega
                                                                                                                                                                                                                              טענה: תהא קבוצת הקבוצות הסופיות באופן עורשתי אזי V_{\omega}
                                                                                                                                                                                          "אקסיומת האינסוף. לא מקיימת את אזי x \in V_\omega אזי אזי סיומת אזי אזי x \in V_\omega
                                                                                                                                                                                    "מקיימת את אדי x,y\in V_\omega אזי אזי x,y\in V_\omega מקיימת את \star
                                                                                                                                                                         "מקיימת את אקסיומת החזקה \mathcal{P}\left(x
ight)\in V_{\omega} אזי אזי x\in V_{\omega} מקיימת את \star
                                                                                                                            "מקיימת את את את בהחלפה. Im (f) \in V_\omega אזי f: x 	o V_\omega ותהא x \in V_\omega תהא x \in V_\omega
                                                                           V=igcup_{lpha\in\mathcal{O}_n}V_lpha וכן אזי V_eta=igcup_{\gamma<eta}V_\gamma וכן יהי eta סודר אזי וכן יהי V_{lpha+1}=\mathcal{P}\left(V_lpha
ight) וכן יהי lpha
                                                                                                                                                                                                                                                                                                             מסקנה: V מודל של תורת הקבוצות.
                                                                                                                                                                                                                                                                                                \operatorname{cof}(2^{\aleph_{\alpha}}) > \aleph_{\alpha} טענה: יהי \alpha סודר אזי
                                                                                                                                                                                                                                                  \operatorname{cof}\left(\kappa^{\aleph_{\alpha}}\right)>\aleph_{\alpha} סודר אזי מסקנה: יהי מונה ויהי מסקנה:
                                                                                                                                                                                                                                             \mathfrak{K}^{\aleph_{eta}}_{lpha}=2^{leph_{eta}} אזי lpha\leqeta סענה: יהיו lpha,eta סודרים באשר
                                                                                                                                                                         |\{X\subseteq\aleph_lpha\mid |X|=\aleph_eta\}|=\aleph_lpha^{\aleph_eta} אזי eta\leqlpha סודרים באשר מענה: יהיו lpha,eta סודרים באשר
                                                                                                                               .(\aleph_{\alpha}^{\aleph_{\beta}}=\aleph_{\alpha} סייים מתקיים איים מונה איים \beta<\alpha סודרים באשר (GCH) טענה:
                                                                                                                         (\mathrm{GCH}) מתקיים א_{eta}<\mathrm{cof}\left(\aleph_{lpha}
ight) וכן eta<lpha< סודרים באשר סודרים באשר (GCH) מסקנה:
                                                                                                                          ^{\mathcal{N}_{\alpha}}_{\alpha} = \mathcal{N}_{\alpha}^{\mathcal{N}_{\beta}} = \mathcal{N}_{\alpha}^{\mathcal{N}_{\alpha}} = \mathcal
                                                                                                                                                                                                       \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_{eta}}=\aleph_{lpha}^{\aleph_{eta}}\cdot leph_{lpha+1} טענה נוסחאת האוסדורף: יהיו lpha,eta סודרים אזי
                                                                                       A\subseteq \delta המקיים \delta<\kappa עבורה קיים אA\subseteq \kappa אזי קבוצה איז אי מונה סדיר באשר א מונה סדיר באשר איז קבוצה איז איז קבוצה איז מונה סדיר באשר
\bigcup_{i < \tau} \alpha_i \in C מתקיים i < j
                      . הסומה סגורה וכן סגורה וכן האינה סגורה מגורה אזי קבוצה אזי קבוצה האינה סדיר מונה סדיר באשר מונה סדיר באשר אזי קבוצה האורה וכן מינה סדיר האינה חסומה (סל"ח): יהי א מונה סדיר באשר אזי קבוצה האורה וכן מינה חסומה (סל"ח): יהי א מונה סדיר באשר אזי קבוצה האורה וכן מינה חסומה וכן מינה וכן מינה חסומה וכן מינה חסומה וכן מינה וכן מינה חסומה וכן מינה וכן מינה חסומה וכן מינה וכ
                                                                                                                                          . סענה: יהי אזי סדיר באשר אC_0\cap C_1 ותהיינה אזי מונה סדיר באשר אותהיינה אותהיינה אזי מונה סדיר באשר איינה אותהיינה מענה:
                     . סל"ח אזי i<\lambda סל"ח לכל היי מונה סדיר באשר אזי \lambda<\kappa יהי ותהא \lambda<\kappa יהי א0<\kappa יהי מונה סדיר באשר יהי מונה סדיר באשר
```

 $f(lpha)=igcup_{eta<lpha}f(eta)$  גבולי מתקיים  $lpha<\kappa$  גבולי אזי  $f:\kappa o\kappa$  אזי איזי איזי איזי מונה סדיר באשר מונה סדיר באשר

```
פונקציה נורמלית: יהי \alpha מונה סדיר באשר \alpha > 0 איז \alpha > 0 איז \alpha > 0 רציפה שומרת סדר. f: \alpha \to \alpha טענה: יהי \alpha מונה סדיר באשר \alpha > 0 ותהא \alpha \to 0 איז \alpha \to 0 עבורה לכל סל"ח \alpha \to 0 מתקיים \alpha \to 0 מחנה: יהי \alpha מונה סדיר באשר \alpha \to 0 ותהא \alpha \to 0 חסומה איז \alpha \to 0 אינה שבת. |S| = \alpha איז עבורה \alpha \to 0 ותהא \alpha \to 0 ותהא \alpha \to 0 שבת איז \alpha \to 0 המקיים \alpha \to 0 המקיים \alpha \to 0 איז \alpha \to 0 איז \alpha \to 0 שבת. |S| = \alpha עבורה קיים סל"ח \alpha \to 0 המקיים \alpha \to 0 איז \alpha \to 0 איז \alpha \to 0 טענה: יהי \alpha \to 0 מונה סדיר באשר \alpha \to 0 ותהא \alpha \to 0 שבת ויהי \alpha \to 0 סל"ח איז \alpha \to 0 שבת. |S| = \alpha עבורו \alpha \to 0 ותהא \alpha \to 0 שבת ויהי \alpha \to 0 סל"ח איז \alpha \to 0 שבח \alpha \to 0 שבחר \alpha \to 0
```

 $A_{lpha}$  עבורו אויי איי פונד איי איי פיים איי פיים איי איי פיים איי איי פורו א $A_{lpha}$  עבורו א $A_{lpha}$  שבת.

עבורו  $\alpha^*<\mu$  אזי קיים סודר  $f:S o\mu$  אחדר ותהא שבת יהי  $\mu<\kappa$  שבת יהי א בת אנה  $\beta\in\kappa$  עבורו אזי קיים סודר א  $f:S o\mu$  שבת.

 $\kappa$  שבת היי א מונה סדיר באשר  $S^*\subseteq S$  שבת היי שבת יהי שבת סדר ותהא שבת  $\kappa$  סודר האיי קיימת אונה סדיר באשר איי  $\kappa$  עבורה.  $\kappa$ 

 $f\left(lpha
ight)<lpha$  מתקיים  $lpha\in S$  מתקיים  $eta\in S$  פונקציה דוחסת: יהי eta מונה סדיר ותהא  $S\subseteq\kappa$  אזי  $S\subseteq\kappa$  אזי  $S\subseteq\kappa$  מתקיים  $S\subseteq\kappa$  מונה סדיר ותהיינה  $S\subseteq\kappa$  אזי  $S\subseteq\kappa$  אזי  $S\subseteq\kappa$  אזי  $S\subseteq\kappa$  מונה סדיר ותהיינה  $S\subseteq\kappa$  ותהיינה  $S\subseteq\kappa$  אזי  $S\subseteq\kappa$  אזי  $S\subseteq\kappa$  מסקנה: יהי S מונה סדיר אזי  $S\subseteq\kappa$  ותהיינה  $S\subseteq\kappa$  אזי  $S\subseteq\kappa$  מסקנה: יהי S מונה סדיר אזי  $S\subseteq\kappa$ 

 $.\kappa$ משפט: יהי  $\kappa$  מונה סדיר באשר  $\kappa$  מיל ויהיו אוי  $\kappa$  ויהיו אוי  $\kappa$  מל"חים ב $\kappa$  אוי הבי $\kappa$  מונה סדיר באשר מ

שבת ב־S שבת אזי קיימת אזי קיימת  $f:S o\kappa$  שבת ותהא א $S\subseteq\kappa$  שבת בהא שבת ב־S שבת בה אונה סדיר באשר אונה סדיר באשר אונה אונה אונה סדיר באשר ב־S שבת ברS שברS שבת ברS שב

מסקנה: יהי  $\alpha\in S$  מתקיים  $\alpha\in S$  מונה סדיר ותהא  $\beta\subseteq \kappa$  שבת עבורה לכל  $\delta<\kappa$  יהי  $\delta<\kappa$  יהי מונה סדיר באשר  $\delta<\kappa$  שבת עבורה לכל  $\delta<\kappa$  שבת ב־ $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  שבת ב־ $\delta<\kappa$  עבורן  $\delta<\kappa$  עבורן  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  שבת ב־ $\delta<\kappa$  עבורן  $\delta<\kappa$  עבורן  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  שבת ב־ $\delta<\kappa$  עבורן  $\delta<\kappa$  עבורן  $\delta<\kappa$  באשר  $\delta<\kappa$  בא

אזי קיימות קבוצות ארות  $\alpha\in S$  מסקנה: יהי  $\alpha$  מונה סדיר באשר אוווא מסקנה: יהי א מונה סדיר באשר אווא אווה אווא אווא שבת עבורה לכל  $S=\bigcup_{\alpha<\kappa}S_\alpha$  עבורן אינ עבורן  $S=\bigcup_{\alpha<\kappa}S_\alpha$  שבת ב-S טבורן אווא שבת ב-S לכל אינ מסקנה: יהי אווא מסקנה:

 $\kappa$ בת ב־  $\{lpha<\kappa\mid$  מונה מאהלו מזק: מונה אי־נשיג חזק עבורו אי־נשיג מונה מאהלו מונה מאהלו

 $\alpha<\kappa$  שבת ב־  $\{\alpha<\kappa\mid$  שבת איינשיג חזק אזי מונה מאהלו מאהלו אוי מענה: יהי

מסנן: תהא X קבוצה אזי  $F\subseteq\mathcal{P}\left( X
ight)$  המקיימת

- $X \in F$  וכן  $\varnothing \notin F \bullet$
- $A\cap B\in F$  אזי  $A,B\in F$  תהיינה
- $B\in F$  אזי  $A\subseteq B$  באשר  $B\subseteq X$  ותהא  $A\in F$  תהא

אידאל: תהא  $I\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$  אידאל: תהא א קבוצה אזי

- $X \notin F$  וכן  $\varnothing \in F$
- $A \cup B \in I$  אזי  $A, B \in I$  תהיינה

```
\bigcup_{i=1}^o A_i \in I מתקיים \langle A_i \in I \mid i < \delta 
angle ולכל \delta < \kappa ולכל עבורו אזי אידאל אידאל קבוצה אזי אידאל אידאל אידאל ארונה ותהא אונה ותהא אונה אזי אידאל אידאל
Iסענה: יהי R מונה תהא R קבוצה יהי R מסגן ויהי ויהי R מסגן ויהי ויהי R מסגן ויהי R מסגן ויהי ויהי R
                                                                            X\backslash Y\in F א Y\in F מתקיים Y\subseteq X עבורו לכל אזי מסנן F\subseteq\mathcal{P}\left( X
ight) אזי מסנן Y\in Y או אזי מסנן
                                                                   .\kappa \setminus lpha \in F מחקיים lpha < \kappa עבורו לכל אF \subseteq \mathcal{P}\left(\kappa
ight) אזי מסנן אזי מונה סדיר באשר מטנן אזי מסנן אזי מסנן
             F=\{Y\subseteq X\mid A\subseteq Y\} המקיימת A
eq\varnothing באשר A
eq\emptyset באשר A
eq\emptyset עבורו קיימת אזי מסנן וור אזי מסנן אזי מסנן וור אשי: תהא
                                                                               .F=\{Y\subseteq X\mid a\in Y\} עבורו a\in X על־מסנן אזי קיים F\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) איהי קבוצה ויהי
                                                                                                                               \{Y\subseteq X\mid |X\backslash Y|<\omega\} המסנן של פרשה/מסנן קו־סופי: תהא אינסופית אזי
                                                                                                                                                         . טענה: תהא אינסופית אזי המסגן של פרשה מסגן וכן אינו על־מסגן על־מסגן תהא אינסופית אינסופית אזי המסגן של פרשה מסגן אינסופית אינס
                                                                                    Aכ אורש דורש אינסופית אי קיימת F באשר באשר אינסופית איז קיימת איז קיימת הא אור F
                                                                                                            \mathrm{Cub}_\kappa = \{A \subseteq \kappa \mid \mathsf{n''}מסנן סל"חים: יהי \kappa מונה סדיר באשר \kappa \in \Lambda אזי מונה סל"ח מסנן סל"חים: יהי מונה מדיר באשר
                                                                                                                                                                . הינו מסגן רענה: יהי מסגן מטנה באשר אזי באשר באשר מסגן הינו מסגן הי\kappaיהי יהי מענה: יהי מונה סדיר באשר
                                                                                                                                                 AC אינו על־מסנן. דורש Cub_{\kappa} אזי אונה סדיר באשר הייר באשר אזי מונה מונה סדיר באשר
                                                                                                                   \mathrm{NS}_\kappa = \{B \subseteq \kappa \mid \mathsf{NS}_\kappa = \{B \subseteq \kappa \mid \mathsf{NS}_\kappa \in B\} אזי אידאל לא־שבת: יהי \kappa מונה סדיר באשר
                                                                                                                                                                                              . אידאל NS_{\kappa} יהי א מונה סדיר באשר היר מונה מזיר מונה אידאל.
                                                                                                                          (S \notin \mathrm{NS}_{\kappa}) \Longleftrightarrowאזי (איר אוי S \subseteq \kappa אוי ותהא א0 < \kappa טענה: יהי מונה סדיר באשר
                                                                                                                                   I^{+}=\{Y\subseteq X\mid Y\notin I\} אידאל אזי I\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) הגדרה: תהא
                                                                                                                                                   \mathrm{NS}^+_\kappa = \{S \subseteq \kappa \mid \mathsf{wer} \ S\} אזי איי באשר דיר באשר סדיר מסקנה: יהי מונה מדיר באשר
                                                                                                                        .F^{+}=\{Y\subseteq X\mid X\backslash Y\notin F\} מסנן אזי F\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) הגדרה: תהא תהא
                                                                                                         F^+=I^+ אזי איז איז המסגן הדואלי של F \subset \mathcal{P}\left(X
ight) מסגן ויהי תהא X קבוצה יהי
S^*\subseteq S מסנן נורמלי: יהי \kappa מונה סדיר באשר אזי מסנן אזי מסנן F\subseteq\mathcal{P}\left(\kappa
ight) עבורו לכל S\in\mathcal{F} ולכל היימת אזי מסנן אזי מסנן אזי מסנן נורמלי: יהי
                                                                                                                                                                                                                                                      עבורה f_{\upharpoonright_{S^*}} וכן S^* \in F^+ קבועה.
(A_{lpha<\kappa}A_{lpha}\in F\mid lpha<\kappa) מתקיים אזי (א נורמלי) מטענה: יהי (A_{lpha<\kappa}A_{lpha}\in F\mid lpha<\kappa) מסנן אזי אזי (A_{lpha<\kappa}A_{lpha}\in F\mid lpha<\kappa) מתקיים אויהי
                                                                                                                                                                                . הינו נורמלי. Cub_{\kappa} אזי א_0<\kappa מונה סדיר באשר מונה הינו נורמלי.
                                                                     AC איז היהי F\subseteq G באשר באשר G\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) מסנן איז קיים על־מסגן היהי F\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) בורש
מסנן רבוי: יהי \alpha, \beta < \kappa^+ ולכל \alpha, \beta < \kappa^+ שונים מתקיים אזי מסנן רבוי: יהי \alpha, \beta < \kappa^+ ולכל אזי מסנן \alpha, \beta < \kappa^+ שונים מתקיים מחקיים מחקיים
                                                                                                                                                                                                                                                                                    .\kappaחסומה ב- A_{\alpha} \cap A_{\beta}
                       \mathrm{NS}_\kappa^\lambda = \{S \subseteq \kappa \mid (\forall \alpha \in S.\mathrm{cof}\,(\alpha) = \lambda)\} אזי \lambda \leq \kappa וכן אבת סדירים באשר א מונים סדירים באשר אזי \lambda \leq \kappa אזי \lambda \leq \kappa אזי אינים סדירים באשר א מונים סדירים באשר אזי
                                                                                                                                                                                                                                                      השערה: \mathrm{NS}_{\aleph_2}^{\aleph_1} רבוי. שאלה פתוחה
                                                                                                                                                                                                                                                                                       .טענה: NS_{\alpha}^{\aleph_0} לא רבוי
                                   \sum_{\alpha<\kappa}A_{lpha}=\{eta<\kappa\mid\exists lpha<eta\,(eta\in A_{lpha})\} אזי \langle A_{lpha}\subseteq\kappa\midlpha<\kappa
angle ותהיינה סדיר ותהיינה איסודים אלכסוניים: יהי
                                                                                             \sum_{\alpha<\kappa}A_{\alpha}\in \mathrm{NS}_{\kappa} אזי \langle A_{\alpha}\in \mathrm{NS}_{\kappa}\mid \alpha<\kappa
angle ותהיינה א ותהיינה מונה סדיר באשר איזי מונה מינה מונה סדיר באשר
                                          A,B\subseteq \kappa אידאל ויהיו אידאל ויהיו האידה איהי הא איז האיA,B\subseteq \kappa יהי הי הי האיהי האיהי האיהי יהי האיהי האיהי
טענה: יהי A \sim A^* וכן A \sim A^* וכן A \sim A^* באשר אזי ויהיו A \sim A^* וכן ויהיו A \sim A^* וכן אזי ויהי A \sim A^* וכן אזי ויהי
                                                                                                                                                                                                                                                          .(A \backslash B \in I) \iff (A^* \backslash B^* \in I)
                            ([A]_{\sim}\leq [B]_{\sim})\Longleftrightarrow (A\backslash B\in I) אזי A,B\subseteq \kappa ויהיו אידאל ויהיו הידה איד באשר אידא והי האדרה: הגדרה: יהי מונה סדיר באשר
                                                                                                                                                             \mathcal{P}^{(\kappa)}/_{\mathrm{NS}_\kappa} טענה: יהי \kappa > lpha מונה סדיר באשר אזי \kappa > lpha אזי מונה סדיר באשר
                                                                                                                                    \mathcal{P}^{(\kappa)}/_{\mathrm{NS}_\kappa} טענה: יהי \kappa מונה סדיר באשר \kappa>\aleph_0 אזי איזי מונה סדיר באשר
                                                                                                                                                                                   |\mathcal{P}^{(\kappa)}/_{\mathrm{NS}_\kappa}|=2^\kappa אזי \kappa>leph_0 טענה: יהי \kappa מונה סדיר באשר
```

 $A_i \in F$  מתקיים  $A_i \in F \mid i < \delta 
angle$  ולכל  $\delta < \kappa$  ולכל  $\delta < \kappa$  מחנה ותהא K קבוצה אזי מסנן ול $K \subseteq \mathcal{P}$  עבורו לכל א־שלם: יהי

 $B \in I$  אזי  $B \subseteq A$  באשר  $B \subseteq X$  ותהא  $A \in I$ 

 $\{X \mid A \mid A \in F\}$  מסנן אזי  $F \subset \mathcal{P}\left(X\right)$  אידאל דואלי: תהא

 $\{X \mid A \mid A \in I\}$  מסנן דואלי: תהא X קבוצה ויהי ויהי ויהי ויהי  $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ 

. טענה: F של הדואלי האידאל מסנן אזי מסנן איר ויהי אידאל ויהי קבוצה ויהי אידאל. איר מסנן אזי האידאל קבוצה ויהי

. טענה: תהא I קבוצה ויהי  $I \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$  אידאל אזי המסנן הדואלי של סענה: ענה: תהא

אזי  $\langle [A_lpha] \in \mathcal{P}^{(\kappa)}/_{\mathrm{NS}_\kappa} \mid lpha < \kappa 
angle$  ותהיינה  $\kappa > lpha$  ותהיינה מונה סדיר באשר אזי  $\kappa > lpha$ 

```
\sup_{\alpha} \{ [A_{\alpha}] \mid \alpha < \kappa \} = \left[ \sum_{\alpha < \kappa} A_{\alpha} \right] \bullet
```

 $\inf \{ [A_{\alpha}] \mid \alpha < \kappa \} = [\triangle_{\alpha < \kappa} A_{\alpha}] \bullet$ 

 $\{C_{lpha}\mid lpha<\kappa\}=\{D_{lpha}\mid lpha<\kappa\}$  באשר באשר לחביני יהי  $\{C_{lpha}\subseteq\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}\subseteq\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}\subseteq\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}\subseteq\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}\subseteq\kappa\mid lpha<\kappa\}$  באשר לחביר תהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  באשר ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  אזי לחביר תהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  באשר לחביר תהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ות היינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ות היינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ות היינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ותהיינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ות היינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\}$  ות היינה ל $\{C_{lpha}=\kappa\mid lpha<\kappa\}$  ות היינה ל $\{C_{l$ 

 $X=B_{lpha}\cap B_{eta}$  מתקיים  $lpha
eq \beta$  באשר  $lpha
eq \beta$  באשר  $lpha
eq \beta$  מתקיים lpha מתרכת דלתא: תהא lpha קבוצה אזי lpha קבוצה אזי lpha שורכת lpha אזי lpha אזי lpha התרכת דלתא: תהא lpha קבוצת סודרים תהא lpha קבוצה ותהא lpha קבוצה ותהא lpha קבוצה ותהא lpha קבוצה של מערכת דלתא: מרכת דלתא: מרכת דלתא: מרכת דלתא: מרכת דלתא של מערכת דלתא: מרכת דלתא של מערכת דלתא: מרכת דלתא של מערכת דלתא של מערכת דלתא: מרכת דלתא של מערכת דלת מערכת דלת מערכת דלתא של מערכת דלתא של מערכת דלת מערכת דלת

 $|J|>leph_0$  עבורה  $J\subseteq I$  אזי קיימת I=I לכל לכל  $|a_i|<leph_0$  באשר באשר ותהא או ותהא  $|I|>leph_0$  ותהא באשר  $|I|>leph_0$  משפט:  $|I|>leph_0$  מערכת  $|I|>leph_0$  מערכת  $|I|>leph_0$  מערכת  $|I|>leph_0$  מערכת באשר סודרים באשר אזי קיימת ותהא למשפט: משפט: משפט: מיימת אזי קיימת וותהא למשפט: משפט: משפט: מיימת אזי קיימת וותהא למשפט: משפט: משפט: מיימת אזי קיימת וותהא למשפט: משפט: מיימת וותהא למשפט: מיימת וותהא למות וותה מותה מותה מות

עבורה I עבורה I לכל קבוצת סודרים I באשר I לכל I לכל קבוצת סודרים I באשר I לכל קבוצת כורה (CH) (CH) (כל קבוצת סודרים I מערכת I מערכת I מערכת I (I באשר I מערכת I מערכת I (I באשר I באשר I וכן I באשר I מערכת I מערכת I (I באשר I באשר I באשר I אורכת I (I באשר I בא

 $.\kappa_lpha = igcup_{eta < lpha}$  גבולי מתקיים אזי גבולי לכל עבורה לכל עבורה מונים אזי סדרת מונים ל $\kappa_i \mid i < \delta$ 

המקיימות  $f \neq g$  באשר באשר  $f,g:\delta o \mathcal{O}_n$  אידאל אזי ויהי  $I \subseteq \mathcal{P}\left(\delta\right)$  מונה ויהי מוד אידאל: יהי אידאל

 $\{\alpha < \delta \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in I$ 

 $\bigcup_{i<\delta}\lambda_i=\delta$  משפחה של פונקציות שונות מוד אידאל: יהי  $\delta$  מונה יהי ווה  $I\subseteq\mathcal{P}\left(\delta\right)$  אידאל ותהא מונים עולה באשר אידאל: יהי  $\delta$  מונה יהי ווהי מונים עולה  $f,g\in\mathcal{F}$  באשר  $f,g\in\mathcal{F}$  באשר  $f,g\in\mathcal{F}$  מבורה לכל

משפחה של פונקציות כמעט זרות: יהי  $\delta$  מונה ותהא  $\langle \lambda_i \mid i < \delta \rangle$  סדרת מונים עולה באשר אזי משפחה של פונקציות כמעט זרות: יהי  $\delta$  מונה ותהא  $\delta$  טדרת מונים עולה באשר  $\delta$  שונות מוד חסומות ב־ $\delta$ .

טענה: יהי  $\delta$  מונה תהא  $\beta \subseteq \prod_{i<\delta} \lambda_i$  משפחה של פונקציות מוד כמעט  $\lambda_i \mid i<\delta$  סענה: יהי  $\delta$  מונה תהא  $\delta$  סדרת מונים עולה באשר  $\delta$  סדרת מונים עולה באשר  $\delta$  משפחה של פונקציות שונות מוד סל"חים.

למה: יהי  $\kappa$  מונה חריג באשר  $\kappa_i=\kappa$  וכן  $\kappa_i=\kappa$  ותהא ל $\kappa_i=\kappa$  סדרת מונים עולה ורציפה באשר סוכן  $\kappa_i=\kappa$  ותהא למה: יהי  $\kappa_i=\kappa$  משפחת פונקציות  $\kappa_i=\kappa$  שונות מוד חסומות המקיימת  $\kappa_i=\kappa$ 

ותהא  $\bigcup_{i<\delta}\kappa_i=\kappa$  ובאשר באשר מונים עולה ורציפה מהא למה: יהי מונה חריג באשר כוכן  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  תהא א  $\delta>\aleph_0$  וכן כוכן  $(\kappa_i)=\delta$  משפחת פונקציות שונות מוד סל"חים אזי  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  משפחת פונקציות שונות מוד סל"חים אזי  $(\kappa_i\mid i<\delta)$ 

מסקנה: יהי  $\alpha$  מונים עולה ורציפה באשר  $S\subseteq \delta$  תהא  $\delta>\aleph_0$  וכן  $\cot(\kappa)=\delta$  סדרת מונים עולה ורציפה באשר  $S\subseteq \delta$  תהא  $\delta>\aleph_0$  וכן  $\cot(\kappa)=\delta$  משפחת מונים עולה ורציפה באשר  $\mathcal{F}\subseteq\prod_{i\in S}\kappa_i$  ותהא  $\bigcup_{i<\delta}\kappa_i=\kappa$ 

למה: יהי  $\alpha$  מונה חריג באשר  $\alpha = \kappa$  וכן  $\alpha < \kappa_i \mid i < \delta$  תהא  $\alpha < \kappa_i \mid i < \delta$  סדרת מונים עולה ורציפה באשר הי cof  $\alpha < \kappa_i \mid i < \delta$  חריג עולה וכן  $\alpha < \kappa_i \mid i < \delta$  חריג שבת לכל  $\alpha < \kappa_i \mid i < \delta$  שבת לכל  $\alpha < \delta \mid f(\alpha) \leq g(\alpha)$  ותהא  $\alpha < \delta \mid f(\alpha) \leq g(\alpha)$  שבת שונות מוד סל"חים באשר  $\alpha < \delta \mid f(\alpha) \leq g(\alpha)$  שבת לכל  $\alpha < \delta \mid f(\alpha) \leq g(\alpha)$  ותהא  $\alpha < \delta \mid f(\alpha) \leq g(\alpha)$  שבת שונות מוד סל"חים באשר  $\alpha < \delta \mid f(\alpha) \leq g(\alpha)$  שבת לכל  $\alpha < \delta \mid f(\alpha) \leq g(\alpha)$ 

ותהא  $\bigcup_{i<\delta}\kappa_i=\kappa$  מונה חריג באשר באשר מונים וכן  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  תהא א וכן כוכן  $(\kappa_i)=\delta$  וכן הרא מונים עולה ורציפה באשר אוני הריג באשר  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  ותהא אזי  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  משפחת פונקציות שונות מוד סל"חים אזי  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  משפחת פונקציות שונות מוד סל"חים אזי וער היא אוני באשר אוני באוני באוני באשר אוני בא בא

 $lpha<\delta$  משפט סילבר: יהי lpha מונה חריג באשר  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  וכן ותהא  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  ותהא ותהא כל כל כל  $(\kappa_i)=\delta$  מתקיים  $(\kappa_i)=\delta$  אז  $(\kappa_i)=\delta$  מתקיים  $(\kappa_i)=\delta$  אז  $(\kappa_i)=\delta$  אז  $(\kappa_i)=\delta$  ותהא כל לל משפט סילבר: יהי  $(\kappa_i)=\delta$  אז  $(\kappa_i)=\delta$  ותהא כל לל ליים מתקיים  $(\kappa_i)=\delta$  אז  $(\kappa_i)=\delta$  אז  $(\kappa_i)=\delta$  ותהא כל לל ליים מונה חריג באשר לכל ליים ותהא כל ותהא כל ליים ותהא כל ליי

 $2^\kappa=\kappa^+$  אז  $2^lpha=lpha^+$  מסקנה: יהי מונה חריג באשר  $\cos{(\kappa)}>lpha_0$  אזי אם לכל מסקנה: יהי מונה חריג באשר

 $2^{\aleph_\omega}<\min\left(\aleph_{(2^\omega)^+},\aleph_{\omega_4}
ight)$  אז  $\aleph_\omega>2^{\aleph_n}$  משפט שלח: אם לכל  $n<\omega$  משפט שלח:

השערה: אם לכל  $n<\omega$  מתקיים  $n<\omega$  אז אז  $n<\omega$  מתקיים השערה

 $\kappa^{+(n+1)}=\left(\kappa^{+n}
ight)^+$  מתקיים  $n\in\mathbb{N}$  וכן לכל  $\kappa^{+0}=\kappa$  וכן מונה אזי מונה אזי הגדרה: יהי

למה: יהי  $\alpha$  מונה חריג באשר  $\delta>lephi_0$  וכן  $\delta>lpha>0$  תהא הא ל $\delta>lpha$  שבת תהא ל $\delta>lpha$  סדרת מונים עולה ורציפה באשר  $\beta=\alpha$  ותהא  $\beta=\alpha$  משפחת פונקציות שונות מוד סל"חים אזי  $\beta=\alpha$  ותהא  $\beta=\alpha$  משפחת פונקציות שונות מוד סל  $\beta=\alpha$  משפחת פונקציות שונות מוד סל מוד שונות מ

 $lpha<\delta$  משפט סילבר: יהי lpha מונים עולה ורציפה אזי מוכן  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  ותהא ותהא משפט סילבר: יהי lpha מתקיים  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  אז מונה חריג באשר באשר  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  ותהא  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מתקיים  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  אז מתקיים  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  אז מונים עולה ורציפה אזי אם לכל  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מתקיים  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  אז  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מתקיים  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  אז  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  אז  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מתקיים  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  אז  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מתקיים  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  אז  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מתקיים  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מונים עולה ורציפה אזי אם לכל  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מתקיים  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  אז  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מונים עולה ורציפה אזי אם לכל  $(\kappa_i\mid i<\delta)$  מונים עולה ורציפה אזי אורצים עולה ורציפה אזי אורצים עולה ורציפה אזי אורצים עולה ורציפה אזי אורצים עולה ורצים עולה ורצי

 $X\cap (\mathbb{R}\backslash A)
eq \emptyset$  וכן  $X\cap A
eq \emptyset$  מתקיים  $|X|>\aleph_0$  מגורה באשר מגורה לכל  $X\subseteq \mathbb{R}$  עבורה לכל  $X\subseteq \mathbb{R}$  טענה: (AC) (AC) (אריימת קבוצת ברנשטיין).

 $.m^*\left(A
ight)=\inf\left\{\sum_{i<\omega}\left(b_i-a_i
ight)\mid B\subseteqigcup_{i=1}^\infty\left(a_i,b_i
ight)
ight\}$  אזי  $A\subseteq\mathbb{R}$  מידת לבג חיצונית: תהא

 $.m^{st}\left(A
ight)=0$  אזי  $|A|\leqleph_{0}$  טענה: תהא  $A\subseteq\mathbb{R}$  אזי

קבוצה מדידה לבג: קבוצה  $A\subseteq\mathbb{R}$  עבורה אחד מהבאים מתקיים

- A=(a,b) עבורם  $a,b\in\mathbb{R}$  פיימים
  - $.m^*(A) = 0 \bullet$
- $A=\mathbb{R}ackslash B$  קיימת B מדידה לבג עבורה
- $A = igcup_{i < \omega} B_i$  קיימות לבג עבורן מדידות ל $\langle B_i \mid i < \omega 
  angle$  קיימות •

 $.m^*\left(igcup_{i<\omega}A_i
ight)=\sum_{i<\omega}m^*\left(A_i
ight)$  איז מדידות לבג וזרות מדידות לבג  $\langle A_i\mid i<\omega
angle$  מדידות לבג וזרות בזוגות אזי

 $.\mu\left(A
ight)=m^{st}\left(A
ight)$  אזי לבג: תהא  $A\subseteq\mathbb{R}$  מידת לבג: תהא

 $\mu\left(B
ight)>0$  סענה: תהא  $B\subseteq A$  סענה: תהא אזי קיימת  $A\subseteq\mathbb{R}$  באשר  $A\subseteq\mathbb{R}$  באשר טענה: תהא שידת לבג ותהא

טענה: תהא  $B\subseteq\mathbb{R}$  אינה מדידה לבג. ברנשטיין אזי

. טענה: תהא  $\mu$  מידת לבג אזי  $\{A\subseteq [0,1]\mid \mu\left(A\right)=1\}$  הינו מסנן  $\mu$  מידת לבג אזי  $\mu$ 

מידה: יהי  $\mu:\mathcal{P}\left(\kappa
ight)
ightarrow\left[0,1
ight]$  המקיימת מונה אזי

- $.\mu\left(\kappa\right)=1$  •
- $.\mu\left(\{\alpha\}\right)=0$ מתקיים  $\alpha<\kappa$ לכל •
- $\mu\left(igcup_{n<\omega}A_n
  ight)=\sum_{n=0}^\infty\mu\left(A_n
  ight)$  זרות מתקיים ארות לכל לכל לכל לכל לכל ל $A_n\subseteq\kappa\mid n<\omega$

טענה: יהי  $A_{i+1}\subseteq A_i$  באשר לכל  $A_{i+1}\subseteq A_i$  באשר לכל ותהיינה ותהיינה ותהיינה איי מונה תהא מידה על מידה על א

 $.\mu\left(\bigcap_{n<\omega}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_n\right)$ 

טענה: יהי  $\alpha$  מונה תהא  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ותהא  $\alpha$  ותהא  $\alpha$  באשר  $\alpha$  באשר  $\alpha$  וכן  $\alpha$  וכן  $\alpha$  לכל  $\alpha$  אזי קיימות  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ותהא  $\alpha$  ותהא  $\alpha$  באשר  $\alpha$  באשר  $\alpha$  באשר  $\alpha$  המקיימות  $\alpha$   $\alpha$  באשר  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  וכן  $\alpha$  באשר  $\alpha$  באשר  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  וכן  $\alpha$  באשר  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  וכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מונה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מונה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מונה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מונה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מונה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מונה על  $\alpha$  ווכן  $\alpha$  מידה על  $\alpha$  מידה על

זרות מתקיים אזי ( $A_lpha\subseteq\kappa\mid lpha<\delta$  ולכל לכל אדטיבית: יהיו אזי מידה אזי מידה איז מידה לאדטיבית: יהיו

 $.\mu\left(\bigcup_{\alpha<\delta}A_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha<\delta}\mu\left(A_{\alpha}\right)$ 

.(אדטיבית) הינה  $\mu$  הינה  $\mu$  הינה  $\mu$  אזי  $\mu$  אזי  $\mu$  אזי  $\mu$  אזי  $\mu$  הינה  $\mu$  הינה  $\mu$  הינה  $\mu$  אזי הערה: יהי  $\mu$ 

לכל  $\mu\left(A_{lpha}\right)$  באשר  $\lambda, \kappa$  וולכל  $\delta < \lambda$  וולכל  $\delta < \lambda$  אזי ( $\mu$  הינה  $\kappa$  אזי ( $\mu$  הינה  $\kappa$ -אדטיבית) אזי (וותה  $\lambda, \kappa$  וולכל  $\lambda, \kappa$  מתקיים  $\lambda, \kappa$  מתקיים ( $\mu\left(\bigcup_{\alpha < \delta} A_{\alpha}\right) = 0$  מתקיים  $\lambda, \kappa$  מתקיים ( $\mu\left(\bigcup_{\alpha < \delta} A_{\alpha}\right) = 0$ 

. אדטיבית הינה  $\mu$  כי מתקיים ה $\kappa$ על מידה לכל מידה עליו בעל מידה המונה המונה המונה האי אזי אם המונה הא מונה האי מונה האי מונה האי המונה הראשון אזי אם המונה הראשון העל מידה האי מונה האי המונה הראשון בעל מידה הראשון המונה הראשון בעל מידה איזי אם המונה הראשון בעל מידה הראשון בעל מידה הראשון בעל מידה הראשון בעל מידה איזי אם המונה הראשון בעל מידה הראשון בעל מידה

. הינה הינה הינה  $\mu$  באשר <br/>  $\mu$ על על קיימת מידה עבורו עבורו מונה מדיד ממשי: מונה הינה א<br/> עבורו קיימת מידה א

 $\mu\left(A
ight)=0$  אזי  $|A|<\kappa$  באשר באשר  $A\subseteq\kappa$  ותהא A באשר הינה  $\kappa$  באשר באשר מידה על אזי מונה מדיד ממשי תהא מידה על באשר א

אזי  $\langle A_lpha \subseteq \kappa \mid lpha < \kappa 
angle$  ותהיינה ותהיינה הינה  $\mu$  מידה על מידה ממשי תהא מונה מדיד ממשי מענה: יהי  $\mu$ 

 $.\mu\left(\triangle_{\alpha<\kappa}A_{\alpha}\right) \leq \inf\left\{\mu\left(A_{\alpha}\right) \mid \alpha<\kappa\right\}$ 

 $\kappa > \aleph_0$  טענה: יהי  $\kappa$  מונה מדיד ממשי אזי מונה סדיר וכן

למה: יהי  $\lambda$  מונה אזי קיימת  $\{A^{\xi}_{lpha}\subseteq\lambda^{+}\mid (lpha<\lambda^{+})\wedge (\xi<\lambda)\}$  המקיימת

 $A^\xi_lpha\cap A^\xi_eta=arnothing$  מתקיים lpha
eq eta באשר באשר  $lpha,eta<\lambda^+$  ולכל

 $\lambda^+$ מתקיים  $\lambda^+\setminus \left(\bigcup_{\xi<\lambda}A^\xi_lpha
ight)$  מתקיים  $lpha<\lambda^+$  חסומה ב-

משפט אולם: יהי  $\kappa$  מונה מדיד ממשי אזי אי־נשיג חלש.

 $\mathrm{Null}_{\kappa}=\{X\subseteq\kappa\mid\mu\left(X
ight)=0\}$  אידאל הקבוצות הזניחות: יהי  $\kappa$  מונה ותהא  $\mu$  מידה על איזי

. אידאל  $\lambda$  אידאל Null $_\kappa$  יהיו אזי אדטיבית א מידה מידה  $\mu$  מונים ותהא א מונים היו היו  $\kappa,\lambda$ 

טענה משפט אולם על איזאלים: יהי  $\alpha<\kappa$  מונה עוקב ויהי ויהי  $I\subseteq\mathcal{P}\left(\kappa\right)$  אידאל זייה מונה עוקב ייהי מונה משפט אולם על איזאלים: יהי  $X_{\alpha}\notin I$  איז איז קיימות  $X_{\alpha}\subseteq\kappa\mid\alpha<\kappa$  זרות באשר אור לכל זרות באשר אור לכל זרות באשר אור מער לכל איזאלים:

אטום אל מידה: יהי  $A\subseteq \kappa$  מונה על מידה על מידה מונה ותהא מונה ותהא אטום של מידה: אטום א

- $.\mu(A) > 0 \bullet$
- $\mu(B) \in \{\mu(A), 0\}$  מתקיים  $B \subseteq A$  לכל

משפט אולם: יהי  $\mu$  מונה מדיד ממשי ותהא  $\mu$  מידה על  $\lambda$  באשר באשר הינה  $\kappa$ יאדטיבית וכן חסרת אטומים אזי

 $.2^{\aleph_0} \ge \kappa \bullet$ 

. מסנן עדין מסנן אזיי אזי מסנן א־שלם אינו על־מסנן אר־מסנן אר אל־מסנן דיהי היהי מונה היהי אר $F\subseteq\mathcal{P}\left(\kappa\right)$  מסנן אזיי יהי טענה: יהי  $\mu$  על  $\kappa$  באשר  $\kappa$  אוי ( $\kappa$  מונה מדיד) $(\kappa)$  מונה מדיד ממשי) אוי (קיימת מידה  $\kappa$  אאי הינה  $\kappa$  אוי הינה  $\kappa$  $\mu$  וכן  $\mu$  בעלת אטום). משפט אולם־טרסקי: יהי  $\kappa$  מונה מדיד אזי אי־נשיג חזק.  $(f<^*q)\Longleftrightarrow (\exists N\in\mathbb{N}. \forall n\geq N. f\left(n
ight)\leq g\left(n
ight))$  אזי  $f,g:\omega
ightarrow\omega$ . תהיינה בכל מקום: תהיינה המקיימת  $\langle f_lpha:\omega o\omega\midlpha<\kappa
angle$  המקיימת היה היה היה מונה אזי  $f_{\alpha} \leq^* f_{\beta}$  מתקיים  $\alpha < \beta$  באשר  $\alpha, \beta < \kappa$  לכל  $g \leq^* f_{\alpha}$  עבורו  $\alpha < \kappa$  קיים  $g: \omega \to \omega$  לכל . טענה: יהי  $\kappa$  מונה אזי אם קיים  $\kappa$ ־סולם אז א אינו מדיד ממשי  $\{lpha<\kappa\mid$  מונה  $lpha\}\in\mathcal{U}$  מונה lpha מונה lpha ויהי lpha ויהי lpha על־מסגן נורמלי lpha-שלם ואינו ראשי אזי lpha $\alpha<\kappa$  ן ויהי ( $lpha<\kappa$  ן ויהי היי שלם ואינו ראשי אזי  $lpha>\in\mathcal{U}$  מונה א־נשיג חזק  $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{P}$  על־מסגן נורמלי lphaישלם ואינו ראשי אזי lpha>lpha>lpha מונה א־נשיג חזק  $\{lpha<\kappa\mid$  מונה גבולי  $lpha\}\in\mathcal{U}$  מונה מדיד באשר על־מסנן נורמלי על־מסנן נורמלי על־מסנה מדיד באשר איז lphaומיה אויהי על־מסנן על־מסנן נורמלי  $\{lpha<\kappa\mid$  על־מסגן נורמלי lpha־שלם ואינו ראשי אזי  $lpha\}\in\mathcal{U}$  מונה סדיר ויהי lpha על־מסגן נורמלי lpha-שלם ואינו ראשי אזי lphalphaמשפט: יהי lpha מונה מדיד באשר lpha>lpha אזי lpha>lpha אינה חסומה ב־lphaאזי  $f,g:\kappa o \mathcal{O}_n$  ויהיו א שאינו ראשי של־מסנן  $\kappa$  על־מסנן על על־מסנן אזי מונה הגדרה: יהי  $(f \equiv_W g) \iff (\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in W)$  $[f]_W=\{g\mid g\equiv_W f\}$  אזי  $f:\kappa o\mathcal{O}_n$  ויהי הגדרה: הגדרה שאינו על־מסנן  $\kappa$ שלם שאינו ראשי אינו האינו האינו האינו האינו אינו אינו האינו אינו האינו האינ  $\kappa \to \mathcal{O}_n/W = \{[f]_W \mid f: \kappa \to \mathcal{O}_n\}$  איי על איינו איינו על שאינו על על־מסגן על־מסגן על־מסגן יהי מונה ויהי על על־מסגן איישלם שאינו איינו אי אזי  $f,g:\kappa o \mathcal{O}_n$  ויהיו א שאינו שאינו על־מסגן על־מסגן W אזי מונה הגדרה: יהי הגדרה  $([f]_W <_W [g]_W) \iff (\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in W)$  $\kappa \to \mathcal{O}_n/W$  טענה: יהי אחס סדר טוב אזי אזי על־מסנן שאינו ראשי על א על־מסנן W על־מסנן יהי מונה  $\kappa$  אזי על אזי על־מסנן הגדרה סדר רודין־קייסלר: יהי  $\kappa$  מונה מדיד ויהיו W,V מסנים א אזי אזי יהי יהי הגדרה הדר רודין־קייסלר  $(V \leq_{\mathsf{RK}} W) \iff (\exists f : \kappa \to \kappa. \forall X \subseteq \kappa. (X \in V \iff f^{-1}[X] \in W))$  $\cot (\kappa o \kappa/V, <_V) \le \cot (\kappa o \kappa/W, <_W)$  אזי  $V \le_{\mathtt{RK}} W$  מסנים  $\kappa$ ־שלמים על מסנים א־שלמים על מונה מדיד ויהיו אזי מונה מדיד ויהיו  $V \leq_{\mathsf{RK}} W$  עבורו ער עבורו מסגן נורמלי מים מסגן עבורו אזי קיים מסגן על־מסגן על־מסגן עבורו אזי איזי קיים מסגן נורמלי עבורו איזי על־מסגן עבורו טענה: יהי M על־מסנן  $\alpha<\kappa$  סודר עבורו  $f:\kappa o\mathcal{O}_n$  תהא על תהשי על שאינו ראשי על שאינו ראשי על א פונה יהי  $\kappa$  סודר עבורו שאינו ראשי על איי קיים  $\beta = [\beta]_W$  עבורו  $\beta \leq \alpha$  סודר  $\operatorname{otp}\left(\kappa o \kappa/W\left[\left[\operatorname{Id}\right]_{W}\right], <_{W}
ight) = \kappa$  אזי א מונה מדיד ויהי W על־מסנן נורמלי שלם ואינו ראשי על  $\kappa$  מונה מדיד ויהי  $h\left(lpha
ight)=\left|lpha
ight|^{+}$  כך  $h:\kappa o\kappa$  כך אזי  $h:\kappa$  איי אונה מדיד יהי k על־מסנן נורמלי  $\kappa$ ־שלם ואינו ראשי על  $.otp\left(\kappa \to \kappa/W\left[\left[h\right]_{W}\right], <_{W}\right) = \kappa^{+}$ . נורמלי.  $\sup_{\le W} \{[lpha]_W \mid lpha < \kappa\} = [\mathrm{Id}]_W$  עבורו איי שאינו איי שאינו שאינו איי על על־מסגן על־מסגן איי מונה ויהי על על־מסגן איישלם איינו איי  $\kappa$  אוי משפט סולווויי: יהי  $\kappa$  מונה מדיד באשר אוי האי אי קיים על־מסגן נורמלי היהי  $\kappa$  מונה מדיד באשר אוי האי אי קיים על־מסגן נורמלי

 $A(A)=m^*(A)$  מתקיים  $A\subset\mathbb{R}$  מרידה לבל קבוצה מדידה לכל עבורה לכל  $\lambda:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right) o [0,\infty)$  מתקיים  $A\subset\mathbb{R}$ 

. מונה  $\kappa$  שילם ואינו מסגן ראשי. F באשר באשר אינו מסגן ראשי. מונה  $\kappa$