קטע/אינטרוול: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי

- $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$.
- $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$.
- $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$.
- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$.
- $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$.
- $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$.
- $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$.
- $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}$.
- $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

שדה סדור: שדה $\mathbb{F}$ ויחס סדר חזק $<$ על $\mathbb{F}$ המקיימים

- טריכוטומיה/לינאריות: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\left(x<y\right)\vee\left(x>y\right)\vee\left(x=y\right)$.
- קומפטביליות עם חיבור: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}.x<y\Longrightarrow x+z<y+z$.
- קומפטביליות עם כפל: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\forall z>0_{\mathbb{F}}.x<y\Longrightarrow x\cdot z<y\cdot z$.

שדה בעל תכונת ארכימדס: שדה $\mathbb{F}$ עבורו $\forall x\in\mathbb{F}.\exists n\in\mathbb{N}.x<\sum_{i=0}^{n}1$.

טענה: $\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ארכימדס.

הערך השלם/ערך שלם תחתון: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lfloor x\rfloor=[x]=\max\left(n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\right)$.

הערך השברי: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\{x\}=x-[x]$.

ערך שלם עליון: $\lceil x\rceil=\min\left(n\in\mathbb{Z}\mid x\le n\right)$.

טענה: $\nexists q\in\mathbb{Q}.q^2=2$.

טענה: $\nexists x\in\mathbb{Q}.\forall a\in\left\{y\in\mathbb{Q}.y^2\le2\right\}.\forall b\in\left\{y\in\mathbb{Q}_+\mid y^2\ge2\right\}.a\le x\le b$.

חסם מלעיל: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

קבוצת החסמים מלעיל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A$ חסם מלעיל של $x\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\overline{B}_A\neq\varnothing$.

חסם מלרע: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

קבוצת החסמים מלרע: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\underline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A$ חסם מלרע של $x\}$.

קבוצה חסומה מלרע: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\underline{B}_A\neq\varnothing$.

קבוצה חסומה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת (חסומה מלעיל)$\wedge$(חסומה מלרע).

מקסימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

סימון: המקסימום של A הוא $\max\left(A\right)$.

מינימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

סימון: המינימום של A הוא $\min\left(A\right)$.

אקסיומת השלמות: יהיו $\varnothing\neq X,Y\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le y\right)\Longrightarrow\left(\exists c\in\mathbb{R}.\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le c\le y\right)$.

טענה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\overline{B}_A\neq\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\min\left(\overline{B}_A\right)$.

מסקנה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\underline{B}_A\neq\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: $\mathbb{R}$ הוא השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את $\mathbb{Q}$.

סופרמום/חסם עליון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\sup\left(A\right)=\min\left(\overline{B}_A\right)$.

אינפימום/חסם תחתון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(A\right)=\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(\exists\max\left(A\right)\Longrightarrow\sup\left(A\right)=\max\left(A\right)\right)\wedge\left(\exists\min\left(A\right)\Longrightarrow\inf\left(A\right)=\min\left(A\right)\right)$.

טענה: יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(a,b\right)=a\wedge\sup\left(a,b\right)=b$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b\in\mathbb{R}$ חסם מלעיל של A התב"ש

- $b=\sup\left(A\right)$.
- $\forall d\in\overline{B}_A.b\le d$.
- $\forall a\in\mathbb{R}.a<b\Longrightarrow a\notin\overline{B}_A$.

מסקנה: תהא $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\sup\left(A\right)-\varepsilon<a\le\sup\left(A\right)$.

מסקנה: תהא $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(\forall x \in A.x \leq b) \wedge (\forall \varepsilon > 0.\exists x \in A.x > b - \varepsilon) \iff b = \sup(A)$.

טענה: תהיינה $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ חסומות אזי

- $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.
- $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- $\sup(-A) = -\inf(A)$.

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+.\exists b \in \mathbb{R}_+.b^2 = c$.

טענה: $\forall c \in \mathbb{R}_+.\forall n \in \mathbb{N}.\exists b \in \mathbb{R}_+.b^n = c$.

קבוצה צפופה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A \subseteq B$ המקיימת $\forall b \in B.\forall \varepsilon > 0.\exists a \in A.\left|b-a\right| < \varepsilon$.

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}$ אזי (S צפופה ב־$\mathbb{R}$) $\iff$ ($\forall a, b \in \mathbb{R}.a < b \Longrightarrow (a,b) \cap S \neq \varnothing$).

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{Q}.a < b \Longrightarrow \left|(a,b) \cap \mathbb{Q}\right| = \aleph_0$.

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{Q}.a < b \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.a < r < b$.

טענה: $\forall x, y \in \mathbb{R}.x < y \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Q}.x < q < y$.

מסקנה: ($\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$)$\wedge$(לכל $a < b$ מתקיים כי $[a,b] \cap \mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$).

עצרת: יהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ (n-1)! \cdot n & else \end{cases}$.

בחר: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

זהות פסקל: יהי $n, k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$.

למה: יהיו $a_1 \ldots a_n \geq 0$ המקיימים $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$ אזי $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n$.

אי־שיוויון הממוצעים: יהיו $a_1 \ldots a_n > 0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$.

טענה: $(a_1 = \ldots = a_n) \iff \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}\right)$.

אי־שיוויון ברנולי: $\forall x > -1.\forall n \in \mathbb{N}.\,(1+x)^n \geq 1 + nx$.

אי־שיוויון ברנולי המוכלל: $\forall n \in \mathbb{N}.\forall x \in \mathbb{R}^n.\,\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|$.

הערך המוחלט: $\left|x\right| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

טענה: $(\left|a\right| \leq b \iff -b \leq a \leq b) \wedge (\left|a\right| \geq b \iff (b \leq a) \vee (a \leq -b))$.

אי־שיוויון המשולש (אש"מ): יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\left|a+b\right| \leq \left|a\right| + \left|b\right|$.

אי־שיוויון המשולש המוכלל: יהיו $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|$.

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\left|a-b\right| \leq \left|a\right| + \left|b\right|$.

מסקנה: יהיו $x, y, z \in \mathbb{R}$ אזי $\left|x-y\right| \leq \left|x-z\right| + \left|z-y\right|$.

אי־שיוויון המשולש ההפוך: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\left|\left|a\right| - \left|b\right|\right| \leq \left|a-b\right|$.

טענה: $\forall a, b \in \mathbb{R}.\,(\forall \varepsilon > 0.\,\left|a-b\right| < \varepsilon) \Longrightarrow a = b$.

טענה: יהי $r \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

סדרה: $a \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

סימון: תהא a סדרה אזי $a_n = a(n)$, $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$.

הגדרה: תהא a_n סדרה אזי

- סדרה חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n > 0$.
- סדרה אי שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \geq 0$.
- סדרה שלילית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n < 0$.
- סדרה אי חיובית: $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \leq 0$.

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה אזי

- עולה ממש: $\forall n, m \in \mathbb{N}.n < m \Longrightarrow a_n < a_m$.
- עולה: $\forall n, m \in \mathbb{N}.n < m \Longrightarrow a_n \leq a_m$.
- יורדת ממש: $\forall n, m \in \mathbb{N}.n < m \Longrightarrow a_n > a_m$.

- יורדת: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\implies a_n\ge a_m$.

סדרה חסומה מלעיל: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.a_n<M$.

סדרה חסומה מלרע: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.M<a_n$.

סדרה חסומה: (חסומה מלרע)$\wedge$(חסומה מלעיל).

סדרה מתכנסת/גבול סופי: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L)\iff(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\,|a_n-L|<\varepsilon)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $(a_n\to L)\iff\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L\right)$.

טענה: $(\forall r\in\mathbb{R}.\,\lim_{n\to\infty}r=r)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)$.

טענה: $\left(\forall\alpha\in\mathbb{Q}_+.\frac{1}{n^\alpha}\to0\right)\wedge\left(\sqrt[n]{n}\to1\right)\wedge\left(\forall c>0.\,\sqrt[n]{c}\to1\right)\wedge\left(\forall q\in(0,1)\,.q^n\to0\right)$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L_1)\wedge(\lim_{n\to\infty}a_n=L_2)\implies L_1=L_2$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L)\implies(\lim_{n\to\infty}|a_n|=|L|)$.

טענה: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=0)\iff(\lim_{n\to\infty}|a_n|=0)$.

טענה: תהיינה a,b סדרות עבורן $|\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\neq b_n\}|\in\mathbb{N}$ אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L)\iff(\lim_{n\to\infty}b_n=L)$.

טענה: תהא a סדרה נגדיר $b_{n+k}=a_n$ אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L)\iff(\lim_{n\to\infty}b_n=L)$.

סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה אזי

- $(\lim_{n\to\infty}a_n=\infty)\iff(\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.M<a_n)$.
- $(\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty)\iff(\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n<-M)$.

טענה: $(\lim_{n\to\infty}n=\infty)\wedge(\forall a>1.\,\lim_{n\to\infty}a^n=\infty)$.

טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי a חסומה.

מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.

טענה: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L)\iff(\forall\varepsilon>0.\,|\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\notin(L-\varepsilon,L+\varepsilon)\}|\in\mathbb{N})$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $\forall r\in(0,|L|)\,.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\,|a_n|>r$.

סימון: תהא a סדרה מונוטונית אזי

- a יורדת ממש אזי $(a_n\to L)\iff(a_n\downarrow L)$.
- a עולה ממש אזי $(a_n\to L)\iff(a_n\uparrow L)$.
- a יורדת אזי $(a_n\to L)\iff(a_n\searrow L)$.
- a עולה אזי $(a_n\to L)\iff(a_n\nearrow L)$.

טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיימות סדרות $a,b\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ עבורן $(a_n\searrow x)\wedge(b_n\nearrow x)$.

ייצוג עשרוני: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיים $a\in\{0,\ldots,9\}^{\mathbb{Z}}$ המקיים $x=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i\cdot10^{-i}$.

פיתוח מחזורי אינסופי: יהיו $d_1\ldots d_n$ אזי $\overline{d_1\ldots d_n}=d_1\ldots d_nd_1\ldots d_n\ldots$.

טענה: יהי $q\in\mathbb{R}$ אזי $\left(q=a.a_1\ldots a_n\overline{b_1\ldots b_\ell}\right)\iff(q\in\mathbb{Q})$.

משפט אוקלידס: $\mathbb{P}$ חסומה מלרע אך לא מלעיל.

סדרות אוקלידס־מולין: יהי $p_1\in\mathbb{P}$ נגדיר $p_n\in\left\{p\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_i\right)\right\}$.

טענה: עבור $p_1=2$ ועבור p_n מינימלי לא ידוע אם $\mathrm{Im}\,(p)=\mathbb{P}$.

משפט דריכלה: $\forall\theta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\left|\left\{\langle p,q\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\mid\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\right\}\right|\geq\aleph_0$.

מספר מקורב רע: $a\in\mathbb{R}$ המקיים $\forall p\in\mathbb{Q}.\forall q\in\mathbb{N}.\left(\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\right)\implies\left(\exists c\in\mathbb{R}.\frac{c}{q^2}<\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\right)$.

חשבון גבולות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהיינה $(a_n),(b_n)$ סדרות המקיימות $(a_n\to a)\wedge(b_n\to b)$ אזי

- $a_n+b_n\to a+b$.
- $a_n\cdot b_n\to a\cdot b$.
- $(b\neq0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.b_n\neq0)\implies\left(\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}\right)$.

למה: תהא d_n סדרה המקיימת $\forall n\in\mathbb{N}.d_n\geq0$ אזי $(d_n\to d)\implies(d\geq0)$.

טענה: תהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n\to L$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[k]{a_n}\to\sqrt[k]{L}$.

סימון: יהיו a_n,b_n סדרות אזי

- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_n\leq b_n)\implies(a_n\preccurlyeq b_n)$.
- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_n<b_n)\implies(a_n\prec b_n)$.

מונוטוניות גבולות: תהיינה a_n,b_n סדרות מתכנסות אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n)\Longleftarrow(a_n\preccurlyeq b_n)$.

משפט הסנדוויץ': תהיינה a_n,b_n,c_n סדרות המקיימות $a_n\preccurlyeq b_n\preccurlyeq c_n$ אזי $(a_n,c_n\to L)\Longrightarrow(b_n\to L)$.

טענה: תהא a_n סדרה חסומה ותהא b_n סדרה המקיימת $b_n\to 0$ אזי $a_nb_n\to 0$.

מסקנה: תהא a_n סדרה חסומה אזי $\frac{a_n}{n}\to 0$.

משפט: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\exists b\in B^{\mathbb{N}}.b_n\to\sup(B)$.

מסקנה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי $\exists b\in B^{\mathbb{N}}.b_n\to\inf(B)$.

טענה: תהיינה a_n,b_n סדרות אזי

- $(a_n\to\infty)\wedge(a_n\preccurlyeq b_n)\Longrightarrow(b_n\to\infty)$.
- $(a_n\to-\infty)\wedge(b_n\preccurlyeq a_n)\Longrightarrow(b_n\to-\infty)$.

מבחן השורש: תהא a_n סדרה אי שלילית אזי $(\exists\alpha\in[0,1).a_n\prec\alpha^n)\Longrightarrow(a_n\to 0)$.

מבחן השורש הגבולי: יהי $p\in\mathbb{R}$ ותהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n^{\frac{1}{n}}\to p$ אזי

- $0\le p<1\Longrightarrow a_n\to 0$.
- $p>1\Longrightarrow a_n\to\infty$.

סימון: תהא a_n סדרה חסומה מלעיל אזי $(\sup(a_n)=\sup(\mathrm{Im}(a)))\wedge(\inf(a_n)=\inf(\mathrm{Im}(a)))$.

משפט: תהא a_n סדרה אזי

- אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי $a_n\nearrow\sup(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי $a_n\nearrow\infty$.
- אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי $a_n\searrow\inf(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי $a_n\searrow-\infty$.

מבחן המנה הגבולי: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L$ אזי

- $(L<1)\Longrightarrow(a_n\to 0)$.
- $(L>1)\Longrightarrow(a_n\to\infty)$.

התכנסות צ'זארו: תהא a_n סדרה אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a_n סדרה המקיימת $a_n\to a$ במובן הרחב אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

משפט התכנסות ממוצע הנדסי: תהא a_n סדרה חיובית המקיימת $a_n\to a$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}a_i}\to a$.

משפט ד'אלאמבר: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to c$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{a_n}\to c$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $a\to L$ במובן הרחב ותהא $t\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=1}^{n}t_k\to\infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^{n}t_ka_k}{\sum_{k=1}^{n}t_k}\to L$.

משפט שטולץ: תהא a סדרה ותהא $b\uparrow\infty$ סדרה נניח כי $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\to L$ במובן הרחב אזי $\frac{a_n}{b_n}\to L$.

טענה: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

מסקנה: $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in(2,3]$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $a_n\to\infty$ אזי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\to e$.

תת סדרה/סדרה חלקית (ת"ס): תהא a סדרה ותהא $n\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה אזי $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה אזי

- a חסומה מלעיל $\Longleftarrow$ b חסומה מלעיל.
- a חסומה מלרע $\Longleftarrow$ b חסומה מלרע.
- $a\to L\Longrightarrow b\to L$.
- a מונוטונית $\Longleftarrow$ b מונוטונית.

טענה: תהא a סדרה המקיימת $\nexists\max(a)$ אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

טענה: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מונוטונית.

הלמה של קנטור על קטעים מקוננים: תהיינה a,b סדרות המקיימות $b-a\to 0$ וגם $\forall n\in\mathbb{N}.(a_n\le b_n)\wedge([a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n])$ אזי $\left|\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n]\right|=1$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C}=[0,1]\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

סימון: $\mathbb{R}_\infty=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$.

גבול חלקי: תהא a סדרה אזי $x\in\mathbb{R}_\infty$ עבורו קיימת תת סדרה b עבורה $b\to x$ במובן הרחב.

סימון: תהא a סדרה אזי $\mathcal{P}(a)=\{L\in\mathbb{R}\mid L\text{ גבול חלקי של }a\}$, $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\{L\in\mathbb{R}_\infty\mid L\text{ גבול חלקי של }a\}$.

טענה: תהא a סדרה אזי

- (a אינה חסומה מלעיל)$\Longleftrightarrow$($\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$).
- (a אינה חסומה מלרע)$\Longleftrightarrow$($-\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$).

טענה: תהא a סדרה אזי $\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|>0$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(L\in\mathcal{P})\Longleftrightarrow(\forall\varepsilon>0.\left|\{a_n\mid |a_n-L|<\varepsilon\}\right|=\aleph_0)$.

מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי $\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\subseteq[\inf(a),\sup(a)]$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim(\sup(a))=\overline{\lim}(a)=\sup(\mathcal{P})$, $\lim(\inf(a))=\underline{\lim}(a)=\sup(\mathcal{P})$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת) $\Longleftrightarrow\left(\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|=1\right)\wedge\left(\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\right)$.

משפט: תהא a סדרה חסומה אזי $\exists\min(\mathcal{P}),\max(\mathcal{P})$.

טענה: יהיו $b_1\dots b_m\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זרות בזוגות המקיימות $(\bigcup b_i=\mathbb{N})\wedge(b_i\uparrow\infty)$ ותהא a סדרה אזי $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\bigcup_{i=1}^m\widehat{\mathcal{P}}(a_{b_i})$.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A$.

טענה: תהיינה $A_1,A_2,\ldots$ סדרת קבוצות פתוחות אזי ($\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ פתוחה)$\wedge$($\bigcap_{i=1}^n A_i$ פתוחה).

קבוצה סגורה: $B\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\mathbb{R}\backslash B$ פתוחה.

טענה: תהיינה $B_1,B_2,\ldots$ סדרת קבוצות סגורות אזי ($\bigcup_{i=1}^n B_i$ סגורה)$\wedge$($\bigcap_{i=1}^\infty B_i$ סגורה).

נקודת הצטברות: תהא $S\subseteq\mathbb{R}$ אזי $x\in\mathbb{R}$ המקיימת $\exists a\in(S\backslash\{x\})^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n=x$.

טענה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- B קבוצה סגורה.
- $\forall a\in B^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n\in B$.
- $\{x\in\mathbb{R}\mid x\text{ נקודת הצטברות של }B\}\subseteq B$.

משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים $\mathcal{P}(a)$ קבוצה סגורה.

כמעט תמיד: פרידקט $P(n)$ המקיים $\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.P(n)$.

שכיח: פרידקט $P(n)$ המקיים $|\{n\in\mathbb{N}\mid P(n)\}|=\aleph_0$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow(\limsup a=\liminf a)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in[-\infty,\infty]$ אזי

- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\leq L)\Longrightarrow(\limsup a\leq L)$.
- $(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\geq L)\Longrightarrow(\limsup a\geq L)$.
- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n\geq L)\Longrightarrow(\liminf a\geq L)$.
- $(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_n\leq L)\Longrightarrow(\liminf a\geq L)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in\mathbb{R}$ התב"ש

- $\limsup a=L$.
- $\forall\varepsilon>0.(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_n<L+\varepsilon)\wedge(\forall\varepsilon>0.\forall N\in\mathbb{N}.\exists n\geq N.a_n>L-\varepsilon)$.

משפט: תהיינה a,b סדרות המקיימות $a_n\preccurlyeq b_n$ אזי $(\liminf a\leq\liminf b)\wedge(\limsup a\leq\limsup b)$.

סדרת קושי: סדרה a המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m,n\geq N.|a_m-a_n|<\varepsilon$.

למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow$(a סדרת קושי).

סכום אינסופי: יהי $k\in\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{i=k}^\infty a_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^n a_i$.

טור: תהא a סדרה אזי $\sum_{i=0}^\infty a_i$.

סימון: יהי $\sum_{n=0}^\infty a_n$ טור אזי $\sum a_n=\sum_{n=0}^\infty a_n$.

סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרה אזי $S_n^a=\sum_{i=0}^n a_i$.

טור מתכנס: תהא a סדרה אזי $(S_n^a\to L)\Longrightarrow(\sum_{i=0}^\infty a_i=L)$.

טור גאומטרי: יהי $a\neq0$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^\infty ar^n$.

משפט: יהי $r\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum_{n=0}^\infty ar^n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow(|r|<1)$.

הטור ההרמוני: $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}$.

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty$.

משפט: תהא a סדרה אזי ($\sum_{i=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$($a_n\to 0$).

קריטריון קושי: יהי $\sum a_n$ טור אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$$\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m>N.\forall k\in\mathbb{N}.\left|\sum_{n=m}^{m+k}a_n\right|<\varepsilon\right)$.

חשבון טורים: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ טורים ויהי $\xi\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

- $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס.
- $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\xi a_n$ מתכנס.

הגדרה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור אזי

- טור חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n>0$.
- טור אי שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\geq 0$.
- טור שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n<0$.
- טור אי חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\leq 0$.

טור מתכנס בהחלט: טור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ המקיים $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור מתכנס בהחלט אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס.

סימון: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים חיוביים עבורם ממקום מסויים $a_n\leq b_n$ אזי $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$.

משפט ההשוואה: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים המקיימים $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$ אזי

- ($\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר).

מבחן ההשוואה הגבולי: יהיו a_n,b_n סדרות חיוביות המקיימות $\frac{a_n}{b_n}\to L$ במובן הרחב אזי

- $L\in(0,\infty)\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\Longleftrightarrow\sum a_n<\infty\right)$.
- $L=0\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\Longrightarrow\sum a_n<\infty\right)$.
- $L=\infty\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\Longleftarrow\sum a_n<\infty\right)$.

מבחן השורש: יהי $\sum a_n$ טור אי שלילי (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $a_n^{\frac{1}{n}}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתכנס).

מבחן השורש הגבולי: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow$$\left(\lim\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)<1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longrightarrow$$\left(\lim\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)>1\right)$.

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

- (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתכנס).
- (כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתבדר).

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow$$\left(\lim\sup\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)<1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longrightarrow$$\left(\lim\inf\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)>1\right)$.

משפט העיבוי: תהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$($\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $m\geq 2$ ותהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$($\sum m^n a_{m^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum\frac{1}{n^x}$ מתכנס)$\Longleftrightarrow$$(x>1)$.

משפט לייבניץ: תהא $a_n\searrow 0$ אזי $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס.

טור מתכנס בתנאי: טור $\sum a_n$ מתכנס המקיים $\sum|a_n|$ מתבדר.

טענה: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=m}^{n}a_k\left(b_{k+1}-b_k\right)=\left(a_nb_{n+1}-a_mb_m\right)-\sum_{k=m+1}^{n}b_k\left(a_k-a_{k-1}\right)$.

התמרת אבל: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m\left(b_k-b_{k+1}\right)$.

קריטריון דריכלה: תהא $b\to 0$ סדרה מונוטונית ותהא a סדרה עבורה S_n^a חסומה אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

קריטריון אבל: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

משפט: $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}=\infty$.

משפט: יהי $\sum a_n=L$ טור ותהא $b\underset{b_0=0}{\in}\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}a_k=L$.

למה: תהא a סדרה ותהא $b\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש עבורה $b_0=0$ וכן $(a_i)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1}$ בעלי אותו סימן וגם $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}a_k=L$ אזי $\sum a_n=L$.

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתכנס ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.
סימון: תהא a_n סדרה אזי $\left(a_n^+ = \frac{|a_n|+a_n}{2}\right) \wedge \left(a_n^- = \frac{|a_n|-a_n}{2}\right)$.
משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בהחלט)$\Longleftrightarrow$($\sum a_n^+$ מתכנס)$\wedge$($\sum a_n^-$ מתכנס).
משפט: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.
משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בתנאי)$\Longrightarrow$ $\left(\sum a_n^+ = \infty = \sum a_n^-\right)$.
משפט רימן: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי $\forall S \in [-\infty, \infty] . \exists \sigma \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{N} . \sum a_{\sigma(n)} = S$.
טענה: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי קיים $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג עבורו $\nexists \sum a_{\sigma(n)}$.
משפט קושי: יהיו $p, q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט אזי $\sum \sum a_{p(n)} b_{q(k)} = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.
טור חזקות: תהא a_n סדרה ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k \left(x - x_0\right)^k$.
משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט עבור $x \in (-|q|, |q|)$.
משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס בהחלט} & x \in (-R, R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R, R] \end{cases}$.
רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0, \infty]$ המקיים את משפט אבל.
משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.
הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty \Longrightarrow R = 0\right) \wedge \left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0 \Longrightarrow R = \infty\right)$.
מכפלת קושי: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות אזי $\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$.
טענה: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות המתכנסים עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ מתכנס עבור q.
התכנסות צ'זארו: יהי $\sum a_n$ טור אזי $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n}$.
טענה: יהי $\sum a_n$ טור אזי $\sum_{i=0}^{n-1} a_n \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n}$.
פונקציה מונוטונית: תהא $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי

- עולה ממש: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- עולה: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.
- יורדת ממש: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.
- יורדת: $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי x^n מונוטונית עולה ממש בקטע $[0, \infty)$.
טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left(f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}\right) \Longleftarrow \left(f(x) = x^n\right)$.
טענה: יהיו $n, m, k, \ell \in \mathbb{N}$ המקיימים $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell}$ אזי $\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(x^k\right)^{\frac{1}{\ell}}$.
טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהיינה $a, b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימות $a_n, b_n \searrow b$ אזי $\lim\left(c^{a_n}\right) = \lim\left(c^{b_n}\right)$.
הגדרה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ יהי $b \in \mathbb{R}$ ותהא $b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $b_n \searrow b$ אזי

- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.
- $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}$.
- $a^b = \lim_{n \to \infty} a^{b_n}$.

פונקציית החזקה: יהי $0 < \alpha$ נגדיר $f \in [0, \infty)^{[0, \infty)}$ כך $f(x) = x^\alpha$.
פונקציית החזקה: יהי $0 > \alpha$ נגדיר $f \in (0, \infty)^{(0, \infty)}$ כך $f(x) = x^\alpha$.
הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
משפט: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\left(x^a x^b = x^{a+b}\right) \wedge \left(\left(x^a\right)^b = x^{ab}\right) \wedge \left((yx)^a = y^a x^a\right)$.
טענה: יהי $x > 1$ ויהיו $0 < r < \ell$ אזי $x^r < x^\ell$.
טענה: יהי $0 < x < 1$ ויהיו $0 < r < \ell$ אזי $x^r > x^\ell$.
הפונקציה המעריכית: יהי $0 < \alpha \neq 1$ נגדיר $f \in (0, \infty)^{\mathbb{R}}$ כך $f(x) = a^x$.
סינוס: נגדיר $\sin : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ בתור היחס בין הצלע ממול הזווית ליתר במשולש ישר זווית.
סינוס: $\forall k \in \mathbb{N} . \sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$
קוסינוס: נגדיר $\cos : [0, 2\pi] \to [-1, 1]$ בתור היחס בין הצלע ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית.
קוסינוס: $\forall k \in \mathbb{N} . \cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$
טנגנס: נגדיר $\tan : \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ כך $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

קוטנגנס: נגדיר $\cot:\mathbb{R}\backslash\left\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ כך $\tan\left(x\right)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

טענה: זהויות טריגנומטריות.

הגדרה: $\left(\arcsin=\sin^{-1}\right)\wedge\left(\arccos=\cos^{-1}\right)\wedge\left(\arctan=\tan^{-1}\right)\wedge\left(\text{arccot}=\cot^{-1}\right)$.

לוגריתם: יהי $a>0$ נסמן $f\left(x\right)=a^{x}$ אזי $\left(f\right)^{-1}=\log_{a}$.

סימון (הלוגריתם הטבעי): $\ln=\log_{e}$.

טענה: זהויות לוגרתמיות.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\exists a\in\mathbb{R}_{+}.f\left(x+a\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה זוגית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה אי־זוגית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

קטע מנוקב/סביבה: יהי $\delta>0$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $I_{x}=\left(x-\delta,x+\delta\right)\backslash\left\{x\right\}$.

פונקציה מתכנסת/גבול סופי: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימות $a<x_{0}<b$ תהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי

- בנקודה: $A=I_{x_{0}}$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי מימין: $A=\left(x_{0},b\right)$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(x_{0},\min\left\{x_{0}+\delta,b\right\}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\downarrow x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי משמאל: $A=\left(a,x_{0}\right)$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\uparrow x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- באינסוף: $A=\left(a,\infty\right)$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\geq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to\infty\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to\infty\right)\right)$.
- במינוס אינסוף: $A=\left(-\infty,b\right)$ אזי
  - קושי: $\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\leq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to-\infty\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to-\infty\right)\right)$.

פונקציה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימות $a<x_{0}<b$

- בנקודה: תהא $f:I_{x_{0}}\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.f\left(x\right)<-M\right)$.
- חד צדדי מימין: תהא $f:\left(x_{0},b\right)\to\mathbb{R}$ אזי
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0},\min\left\{x_{0}+\delta,b\right\}\right).f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0},\min\left\{x_{0}+\delta,b\right\}\right).f\left(x\right)<-M\right)$.
- חד צדדי משמאל: תהא $f:\left(a,x_{0}\right)\to\mathbb{R}$ אזי
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).f\left(x\right)<-M\right)$.
- באינסוף: תהא $f:\left(a,\infty\right)\to\mathbb{R}$ אזי
  - $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\geq\delta.f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\geq\delta.f\left(x\right)<-M\right)$.
- במינוס אינסוף: תהא $f:\left(-\infty,b\right)\to\mathbb{R}$ אזי
  - $\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\leq\delta.f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\leq\delta.f\left(x\right)<-M\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A^{\pm}=A\cup\left\{x_{0}^{+}\mid x_{0}\in A\right\}\cup\left\{x_{0}^{-}\mid x_{0}\in A\right\}$.

סימון: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}_{\infty}^{\pm}$ ותהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(f\left(x\right)\xrightarrow[x\to x_{0}]{}L\right)$ במובן הרחב.

משפט: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\left(\lim_{x\to x_0}f(x)=L_1\right)\wedge\left(\lim_{x\to x_0}f(x)=L_2\right)\right)\Longrightarrow(L_1=L_2)$.

טענה: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\lim_{x\to x_0^-}f(x)=L=\lim_{x\to x_0^+}f(x)\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{x\to x_0}f(x)=L\right)$.

פונקציית דריכלה: $D(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

חשבון גבולות: יהי $x_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ויהיו $f,g:I_{x_0}\to\mathbb{R}$ אזי

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)$.
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}g(x)$.

למה: יהי $x_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ אזי $\lim_{x\to x_0}x=x_0$.

מסקנה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^\pm$ ויהי $p\in\mathbb{R}[x]$ אזי $\lim_{x\to x_0}p(x)=p(x_0)$.

משפט: יהיו $x_0,y_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $g\in\mathbb{R}^{I_{y_0}}$ וכן $f\in I_{y_0}^{I_{x_0}}$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$ אזי $\lim\limits_{x\to y_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))$.

טענה: יהיו $x_0,y_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $g,f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=g\left(\lim\limits_{x\to y_0}f(x)\right)$.

פונקציה אלמנטרית: הרכבה/סכום/כפל/הופכית של $\left(\bigcup\{\{\log_a(x),a^x\}\mid a>0\}\right)\cup\mathbb{R}[x]\cup\{\sin,\cos\}\cup\{x^a\mid a\in\mathbb{R}\}$.

טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי $\forall a\in\mathrm{Dom}(f).\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

משפט: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $|\sin(x)|\le|x|$.

למה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^\pm$ אזי $\lim_{x\to x_0}\cos(x)=\cos(x_0)$.

מסקנה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^\pm$ אזי $\lim_{x\to x_0}\sin(x)=\sin(x_0)$.

סימון: יהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ המקיימות $\forall x\in I.f(x)\le g(x)$ אזי $f(x)\preccurlyeq g(x)$.

מונוטוניות גבולות: יהי $x_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $f,g:\mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x)\preccurlyeq g(x)$ אזי $\lim_{x\to x_0}f(x)\le\lim_{x\to x_0}g(x)$.

כלל הסנדוויץ': יהי $x_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $f,g,h:\mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x)\preccurlyeq g(x)\preccurlyeq h(x)$ אזי $\left(f(x),h(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L\right)\Longrightarrow\left(g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L\right)$ במובן הרחב.

למה: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי

- רציפות בנקודה: $x_0\in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית מימין בנקודה: $x_0\in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית משמאל בנקודה: $x_0\in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

פונקציה רציפה: $f:I\to\mathbb{R}$ המקיימת אזי

- קושי: $\forall x_0\in I.\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.
- היינה: $\forall x_0\in I.\forall y\in I^\mathbb{N}.(y_n\to x_0)\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f(y_n)=f(x_0)\right)$.

פתוחה יחסית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $B\subseteq A$ המקיימת $\forall x\in B.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A\subseteq B$.

משפט: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על I)$\Longleftrightarrow$(לכל $B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה $f^{-1}[B]$ פתוחה יחסית אל I).

טענה: תהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ותהא $c\in(a,b)$ אזי (f רציפה על a)$\Longleftrightarrow$($f_{\restriction_{(a,c]}}$ רציפה על c)$\wedge$($f_{\restriction_{[c,b)}}$ רציפה על c).

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $C(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\mid f\text{ רציפה על } I\right\}$.

טענה: תהא $f\in C((a,b))$ רציפה מונוטונית עולה

- ($f[(a,b)]$ חסומה מלעיל)$\Longrightarrow\left(\lim_{x\to b^-}f(x)=\sup f[(a,b)]\right)$.
- ($f[(a,b)]$ אינה חסומה מלעיל)$\Longrightarrow\left(\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty\right)$.
- ($f[(a,b)]$ חסומה מלרע)$\Longrightarrow\left(\lim_{x\to b^-}f(x)=\inf f[(a,b)]\right)$.
- ($f[(a,b)]$ חסומה אינה מלרע)$\Longrightarrow\left(\lim_{x\to b^-}f(x)=-\infty\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ רציפה על x_0 המקיימת $f(x_0)>0$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $\forall x\in I.f(x)>0$.

מסקנה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ רציפות על x_0 המקיימות $f(x_0)>g(x_0)$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $\forall x\in I.f(x)>g(x)$.

טענה: יהיו $f,g\in C(\mathbb{R})$ אזי $(\forall q\in\mathbb{Q}.f(q)=g(q))\Longrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}.f(x)=g(x))$.

נקודת אי־רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $x_0\in I$ המקיימת

- סליקה: $\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.
- סוג ראשון/קפיצה: $\lim_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim_{x\to x_0^+}f(x)$.

- סוג שני: $\left(\nexists\lim_{x\to x_0^-}f(x)\right)\vee\left(\nexists\lim_{x\to x_0^+}f(x)\right)$.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על x_0)$\iff\left(\forall y\in\mathbb{N}^I.\left(y_n\to x_0\right)\implies\left(\lim f(y_n)\in\mathbb{R}\right)\right)$.

פונקציית רימן: $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \exists p,q\in\mathbb{Z}.\left(\gcd(p,q)=1\right)\wedge\left(x=\frac{p}{q}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

טענה: $\left(\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}R(x)=0\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.R(x)=R(x+1)\right)$.

חשבון רציפות: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}$ ויהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ רציפות על x_0 אזי $f+g,f\cdot g,f^g$ רציפות על x_0.

טענה: תהא $f:A\to B$ רציפה על x_0 וכן $g:B\to C$ רציפה על $f(x_0)$ אזי $g\circ f$ רציפה על x_0.

מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה וכן $g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\lim_{x\to x_0}f(g(x))=f\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\right)$.

פונקציה רציונאלית: יהיו $p,q\in\mathbb{R}[x]$ אזי $\frac{p}{q}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f(x)\in\mathbb{R}$ אזי כמות נקודות האי־רציפות לכל היותר בת מנייה.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f(x)\in\mathbb{R}\right)\implies\left(\exists x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\right)$.

משפט וויירשטראס הראשון: תהא $f\in C([a,b])$ אזי f חסומה.

משפט וויירשטראס השני: תהא $f\in C([a,b])$ אזי $\exists\max\left(f([a,b])\right),\min\left(f([a,b])\right)$.

משפט ערך הביניים: תהא $f\in C([a,b])$ אזי $\forall y\in\left(\min\left(f(a),f(b)\right),\max\left(f(a),f(b)\right)\right).\exists c\in(a,b).f(c)=y$.

למה: תהא $f\in C([a,b])$ המקיימת $f(a)f(b)<0$ אזי $\exists\zeta\in[a,b].f(\zeta)=0$.

מסקנה: תהא $f\in C([a,b])$ אזי $f([a,b])=\left[\min\left(f([a,b])\right),\max\left(f([a,b])\right)\right]$.

קטע מוכלל: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x,y\in A.\forall\lambda\in[0,1].\lambda x+(1-\lambda)y\in A$.

למה: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C(I)$ חח"ע אזי f מונוטונית ממש.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C(I)$ מונוטונית ממש אזי ($f(I)$ קטע מוכלל)$\wedge\left(f^{-1}\in C\left(f(I)\right)\right)$.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ מונוטונית ממש אזי ($f(I)$ קטע מוכלל)$\iff\left(f\in C(I)\right)$.

מסקנה: יהי $a>0$ אזי $x^a,a^x\in C(\mathbb{R})$.

מסקנה: תהא $a_n\to a>0$ סדרה חיובית וכן $b_n\to b$ סדרה אזי $a_n^{b_n}\to a^b$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{odd}$ ויהי $p\in\mathbb{R}_n[x]\backslash\mathbb{R}_{n-1}[x]$ אזי $\exists\zeta\in\mathbb{R}.p(\zeta)=0$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

פונקציה רציפה במידה שווה (במ"ש): $f\in\mathbb{R}^A$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A.\forall y\in(x-\delta,x+\delta).\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ רציפה במ"ש אזי f רציפה.

תנאי ליפשיץ: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ עבורה $\exists M>0.\forall x,y\in A.\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<M$ אזי f רציפה במ"ש.

משפט קנטור: תהא $f\in C([a,b])$ אזי f רציפה במ"ש על $[a,b]$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ רציפה במ"ש על $(a,b],[c,d)$ אזי f רציפה במ"ש על (a,d).

פרה־קומפקטיות: תהא $D\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^D$ רציפה במ"ש אזי $\forall x\in D^{\mathbb{N}}.\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in\mathbb{R}\right)\implies\left(\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\in\mathbb{R}\right)$.

טענה: תהא $f\in C((a,b])$ אזי (f רציפה במ"ש)$\iff\left(\lim_{x\to a^+}f(x)\in\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C((a,b))$ אזי (f רציפה במ"ש)$\iff\left(\lim_{x\to a^+}f(x),\lim_{x\to b^-}f(x)\in\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in C([a,\infty))$ המקיימת $\lim_{x\to\infty}f(x)\in\mathbb{R}$ אזי f רציפה במ"ש על $[a,\infty)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ רציפה במ"ש אזי f חסומה.

מודולוס הרציפות: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\omega_f(\delta)=\sup\left\{\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\mid\left(x_1,x_2\in I\right)\wedge\left(\left|x_1-x_2\right|<\delta\right)\right\}$.

גזירות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי

- נגזרת בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית מימין בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית משמאל בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$ אזי $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

נגזרת: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $f':I\to\mathbb{R}$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\frac{df}{dx}(x)=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$.

טענה: יהי חלקיק ותהיינה $x,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי $x'(t)=v(t)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_0\in I^{\pm}$ אזי (f גזירה בנקודה x_0)$\Longleftarrow$(f רציפה בנקודה x_0).

קירוב בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_0\in I$ אזי $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]\backslash\mathbb{R}_{n-1}[x]$ המקיימת $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

סדר הקירוב: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $p(x)$ קירוב בנקודה x_0 אזי $\deg(p)$.

דיפרנציאבילית בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $x_0\in I$ עבורה (f רציפה על x_0)$\wedge$(קיים קירוב מסדר ראשון של f בנקודה x_0).

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_0\in I$ אזי (f דיפרנציאבילית בנקודה x_0)$\Longleftrightarrow$(f גזירה בנקודה x_0).

חשבון גזירות: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות בנקודה x_0 אזי

- $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.
- $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
- $(g(x_0)\neq0)\Longrightarrow\left(\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right)$.

משפט: תהא $x_0\in I$ ותהא $f\in C(I)$ מונוטונית חזק גזירה על $f^{-1}(y_0)$ אזי $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

מסקנה: $\tan'=\frac{1}{\cos^2}$, $(e^x)'=e^x$, $(x^r)'=rx^{r-1}$, $\arctan'=\frac{1}{1+x^2}$.

כלל השרשרת: תהא $x_0\in I$ תהא $f\in C(I)$ גזירה על x_0 וכן $g\in C(f(I))$ גזירה על $f(x_0)$ אזי $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

נגזרת מסדר גבוה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה אזי $\left(f^{(0)}=f\right)\wedge\left(f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'\right)$.

הפרש דיסקרטי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $(\Delta f)(x)=f(x+1)-f(x)$.

הגדרה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\Delta^{(0)}f=\Delta f\right)\wedge\left(\Delta^{(k+1)}f=\Delta\left(\Delta^{(k)}f\right)\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה עבורה f' רציפה.

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(C^0(I)=C(I)\right)\wedge\left(C^n(I)=\left\{f\in C^{n-1}(I)\mid f\text{ גזירה ברציפות}\right\}\right)$.

פונקציה חלקה: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $f\in C^{\infty}(I)=\bigcap_{n=0}^{\infty}C^n(I)$.

כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$.

נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי

- מקסימום: $x_0\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f(x)\le f(x_0)$.
- מינימום: $x_0\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f(x_0)\le f(x)$.

משפט פרמה: תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) ותהא $x_0\in(a,b)$ נקודת קיצון אזי $f'(x_0)=0$.

משפט רול: תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) המקיימת $f(a)=f(b)$ אזי $\exists c\in(a,b).f'(c)=0$.

משפט לגרנז': תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) אזי $\exists c\in(a,b).f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה אזי (f' חסומה)$\Longleftarrow$(f רציפה במ"ש).

טענה: $\forall x>0.e^x>1+x$.

טענה: $\forall x,y\in\mathbb{R}.\ |\sin(x)-\sin(y)|\le|x-y|$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f'(x)=0$ אזי $\exists a\in\mathbb{R}.f(x)=a$.

מסקנה: תהיינה $g,h\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימות $g'=h'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.g=h+c$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $f=f'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.f(x)=e^x$.

משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה $f,g\in C([a,b])$ גזירות על (a,b) אזי $\exists x_0\in(a,b).\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה אזי

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'(x)>0$ אזי f עולה ממש.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'(x)<0$ אזי f יורדת ממש.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה פעמיים על $x_0\in I$ ומתקיים $f'(x_0)=0$ אזי

- אם $f''(x_0)>0$ אזי x_0 מינימום מקומי של f.
- אם $f''(x_0)<0$ אזי x_0 מקסימום מקומי של f.

משפט: תהא $f\in C([a,b))$ גזירה על (a,b) המקיימת $\lim_{x\to a^+}f'(x)\in\mathbb{R}$ אזי $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}f'(x)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה ברציפות אזי $f'(x_0)>0\Longrightarrow\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f'(x)>0$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה אזי ($f'_+(a)<0$ גורר a לא מינימום מקומי)$\wedge$($f'_-(b)>0$ גורר b לא מקסימום מקומי).

משפט דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה אזי $\forall y\in(\min(f'(a),f'(b)),\max(f'(a),f'(b))).\exists c\in(a,b).f'(c)=y$.

כלל לופיטל: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות ותהא $x\in I_{\infty}^{\pm}$ נניח כי $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מתכנס במובן הרחב אזי

- $\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)\implies(\lim_{x\to x_0}f(x)=0=\lim_{x\to x_0}g(x))$.
- $\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)\implies(\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty)$.

אי־שיוויון יאנג: יהיו $x,y>0$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ מתקיים $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\ge xy$.

אי־שיוויון הולדר: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי $\sum_{i=1}^n|x_iy_i|\le\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

אי־שיוויון מינקובסקי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי
$\left(\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא $f,g\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I^\pm$ אזי
- $f\in O(g)\iff(\exists c>0.\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).|f(x)|\le c|g(x)|)$. אינטואיטיבית $f\le g$
- $f\in\Omega(g)\iff(g\in O(f))$. אינטואיטיבית $f\ge g$
- $f\in o(g)\iff\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0\right)$. אינטואיטיבית $f<g$
- $f\in\omega(g)\iff(g\in o(f))$. אינטואיטיבית $f>g$
- $f\in\Theta(g)\iff(f\in O(g)\wedge f\in\Omega(g))$. אינטואיטיבית $f=g$
- $f\sim g\iff\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1\right)$. אינטואיטיבית $f=g$ בדיוק של קבועים

למה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I$ אזי $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to x_0]{}c\ne0\right)\implies f\in\Theta(g)$.

מזדהה עד סדר: $f,g\in\mathbb{R}^I$ גזירות n פעמים על x_0 המקיימות $\forall k\in\{0\dots n\}.f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ מזדהות עד סדר n על x_0 אזי $f-g\in o((x-x_0)^n)$.

מסקנה: תהא $h\in\mathbb{R}^I$ רציפה על x_0 וכן $h\in o((x-x_0)^n)$ אזי (h גזירה n פעמים על x_0)$\wedge$($h^{(k)}(x_0)=0$).

פולינום טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $p\in\mathbb{R}_n[x]\backslash\mathbb{R}_{n-1}[x]$ שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\left((x-x_0)^k\right)^{(j)}(x_0)=\begin{cases}j! & j=k\\ 0 & else\end{cases}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי פולינום הטיילור הוא $P_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

שארית: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$.

משפט פאנו: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x)\in o(|x-x_0|^n)$.

למה: תהא $g\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים המקיימת $g^{(k)}(x_0)=0$. $\forall k\in\{0\dots n\}$ אזי
$\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).g(x)=\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

משפט השארית של לגרנז': תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי
$\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ אזי $\left(R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)\implies(\exists M\in\mathbb{R}.\forall k\in\mathbb{N}.\left|f^{(k)}(x)\right|<M).\forall x\in(a,b)$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ עבורה $R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. $\forall x\in(a,b)$ אזי $f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ ותהא a סדרה המקיימת $\left|f^{(m)}(x)\right|<a_m$. $\forall x\in(a,b)$ אזי
$\forall c\in\mathbb{R}.\left(\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m!}c^m=0\right)\implies\left(\forall x\in[x_0-c,x_0+c].f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$.

מסקנה: $\left(e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}\right)\wedge\left(\sin(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\wedge\left(\cos(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$.

מסקנה: $e\notin\mathbb{Q}$.

משפט השארית של קושי: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי
$\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$.

מסקנה: יהי $|x|<1$ אזי $\arctan(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}((a,b))$ המקיימת $f^{(k)}(x_0)=0$. $\forall k\in\{0\dots n\}$ וכן $f^{(n+1)}(x_0)\ne0$ אזי
- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי x_0 אינה נקודת קיצון של f.
- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי
  - אם $f^{(n+1)}(x_0)>0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.
  - אם $f^{(n+1)}(x_0)<0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.

פונקציה קמורה: $f\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in\left[0,1\right].f\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right)\le\alpha f\left(x\right)+\left(1-\alpha\right)f\left(y\right)$.

פונקציה קעורה: $f\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in\left[0,1\right].f\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right)\ge\alpha f\left(x\right)+\left(1-\alpha\right)f\left(y\right)$.

נקודת פיתול: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי x_{0} המקיימת (f קעורה מאחד מצדדיה)$\wedge$(f קמורה מאחד מצדדיה).

משפט שלושת המיתרים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ קמורה אזי לכל $x_{1}<x_{2}<x_{3}$ מתקיים $\frac{f(x_{2})-f(x_{1})}{x_{2}-x_{1}}\le\frac{f(x_{3})-f(x_{1})}{x_{3}-x_{1}}\le\frac{f(x_{3})-f(x_{2})}{x_{3}-x_{2}}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה פעמיים אזי

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''\left(x\right)>0$ אזי f קמורה.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''\left(x\right)<0$ אזי f קעורה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ קמורה אזי $f\in C\left(\left(a,b\right)\right)$.