מרוכבים: מרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ עם הפעולות הסטנדרטיות.

סימון: נסמן את המרוכבים בעזרת $\mathbb{C}$.

הערה: נשתמש ב־$\mathbb{C}$ בהתאמה $(1,0)\mapsto 1$ וכן ההגדרה $i=(0,1)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי קיימים ויחידים $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $z=a+ib$.

מטריצה קונפורמית: $0\neq A\in M_2(\mathbb{R})$ המקיימת $\exists a,b\in\mathbb{R}.A=\left(\begin{smallmatrix}a&-b\\b&a\end{smallmatrix}\right)$.

סימון: $O(n)=\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid$ קונפורמית $A\}$.

טענה: ההעתקה $T\in\operatorname{Hom}(\mathbb{C},O(2))$ המוגדרת $T(a+ib)=\left(\begin{smallmatrix}a&-b\\b&a\end{smallmatrix}\right)$ היא איזומורפיזם.

טענה: תהא $A\in M_2(\mathbb{R})$ אזי (A קונפורמית)$\Longleftrightarrow$(A הפיכה ושומרת זווית).

מטריצה אנטי־קונפורמית: $0\neq A\in M_2(\mathbb{R})$ המקיימת $\exists a,b\in\mathbb{R}.A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&-a\end{smallmatrix}\right)$.

טענה: תהא $A\in M_2(\mathbb{R})$ אזי (A אנטי־קונפורמית)$\Longleftrightarrow$(A הפיכה והופכת זווית).

משפט: תהא $A\in M_2(\mathbb{R})$ אזי קיימות ויחידות $B,C\in M_2(\mathbb{R})$ באשר B קונפורמית או 0 וכן C אנטי־קונפורמית או 0 עבורן $A=B+C$.

מכפלת מרוכבים: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ אזי $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$.

טענה: $i^2=-1$.

החלק הממשי: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\operatorname{Re}(a+ib)=a$.

החלק המדומה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\operatorname{Im}(a+ib)=b$.

הצמוד: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{a+ib}=a-ib$.

הערך המוחלט: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$.

מספר מדומה טהור: $z\in\mathbb{C}$ עבורו $\operatorname{Re}(z)=0$.

מספר ממשי טהור: $z\in\mathbb{C}$ עבורו $\operatorname{Im}(z)=0$.

למה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\overline{(\overline{z})}=z$.
- $|\overline{z}|=|z|$.
- $z\overline{z}=|z|^2$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ אזי $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

מסקנה: $\mathbb{C}$ עם הפעולות שהוגדרו מלעיל הינו שדה.

טענה: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ אזי

- $\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$.
- $\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.
- $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.
- נניח כי $w\neq 0$ אזי $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.
- נניח כי $w\neq 0$ אזי $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$.
- $-|z|\leq\operatorname{Re}(z)\leq|z|$.
- $-|z|\leq\operatorname{Im}(z)\leq|z|$.

טענה אי שיוויון המשולש: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ אזי $|z+w|\leq|z|+|w|$.

טענה אי שיוויון קושי שוורץ: יהיו $z_1\ldots z_n,w_1\ldots w_n\in\mathbb{C}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^n z_iw_i\right|=\left(\sum_{i=1}^n|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n|w_i|^2\right)$.

מסקנה: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי

- $|z|-|w|\leq|z-w|$.
- $|a+ib|\leq|a|+|b|$.

הצגה פולרית/הצגה קוטבית: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

הארגומנט: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\arg(z)=\left\{\theta\in\mathbb{R}\mid z=|z|e^{i\theta}\right\}$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ אזי קיים ויחיד $\theta\in(-\pi,\pi]$ עבורו $z=|z|\cdot e^{i\theta}$.

הארגומנט העיקרי: יהי $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ויהי $\theta\in\arg(z)\cap(-\pi,\pi]$ אזי $\operatorname{Arg}(z)=\theta$.

הערה: יהי $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ אזי הארגומנט העיקרי קיים ויחיד.

הערה: $\arg(z)=\{\mathrm{Arg}(z)+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

טענה: יהיו $\theta,\phi\in\mathbb{R}$ ויהיו $r,s\ge 0$ אזי

- $\overline{r\cdot e^{i\theta}}=r\cdot e^{-i\theta}$.
- $\left(r\cdot e^{i\theta}\right)\cdot\left(s\cdot e^{i\phi}\right)=rs\cdot e^{i(\theta+\phi)}$.

מסקנה: יהיו $w,z\in\mathbb{C}$ אזי $\arg(zw)=\arg(z)+\arg(w)$.

טענה: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ ויהי $r>0$ אזי $\left(r\cdot e^{i\theta}\right)^{-1}=\frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta}$.

טענה: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ יהי $r\ge 0$ ויהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\left(r\cdot e^{i\theta}\right)^{n}=r^n\cdot e^{in\theta}$.

מסקנה נוסחת דה מואבר: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

טענה: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ יהי $r\ge 0$ ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[n]{re^{i\theta}}=\left\{\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \mid k\in\{0,\ldots,n-1\}\right\}$.

מסקנה שורשי יחידה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[n]{1}=\left\{e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mid k\in\{0,\ldots,n-1\}\right\}$.

המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p\in\mathbb{C}_{\ge 1}[x]$ אזי קיים $x\in\mathbb{C}$ עבורו $p(x)=0$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{C}_{\ge 1}[x]$ אזי קיימים $a_0\ldots a_n\in\mathbb{C}$ עבורם $p(x)=a_0\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$.

הקוטב הצפוני: נסמן ב-$\mathbb{R}^3$ את $N=(0,0,1)$.

ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{S}^n=\left\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|=1\right\}$.

ההמיספרה העליונה: כל הנקודות $(x,y,z)\in\mathbb{S}^2$ המקיימות $z>0$.

ההמיספרה התחתונה: כל הנקודות $(x,y,z)\in\mathbb{S}^2$ המקיימות $z<0$.

הטלה סטריאוגרפית: נגדיר $f:\mathbb{C}\to\mathbb{S}^2\backslash\{N\}$ כך $f(x+iy)=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},1-\frac{2}{x^2+y^2+1}\right)$.

הערה: במרחב $\mathbb{R}^3$ נגדיר את $\mathbb{C}$ להיות שני הצירים הראשונים, אז ההטלה הסטריאוגרפית היא מבחינה מעשית $f(p)=\mathrm{line}_{p,N}\cap\mathbb{S}^1$.

טענה: f רציפה.

טענה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\left(z\in\mathbb{S}^1\right)\iff(f(z)=z)$.
- ($f(z)$ בהמיספרה העליונה)$\iff$(z מחוץ ל-$\mathbb{S}^1$).
- ($f(z)$ בהמיספרה התחתונה)$\iff$(z בתוך $\mathbb{S}^1$).

טענה: f הפיכה ומתקיים $f^{-1}:\mathbb{S}^2\backslash\{N\}\to\mathbb{C}$ כך $f^{-1}(x,y,z)=\frac{x}{1-z}+i\frac{y}{1-z}$.

סימון: $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

הספירה של רימן: f ניתנת להרחבה רציפה $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\mathbb{S}^2$ וכן $f(\infty)=N$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{S}^2\backslash\{N\}$ אזי (A מעגל)$\iff$($f^{-1}[A]$ מעגל או ישר).

מסקנה: יהי $C\subseteq\mathbb{S}^2\backslash\{N\}$ מעגל ויהי P מישור עבורו $C=P\cap\mathbb{S}^2$ אזי ($f^{-1}[C]$ ישר)$\iff$($N\in P$).

גבול: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z\in\mathbb{C}$ עבורם $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N.\left|a_n-a\right|<\varepsilon$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=z$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $(a_n\to z)\iff(|a_n-z|\to 0)$.

גבול אינסופי: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\forall M\in\mathbb{R}.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\ge N.M<|a_n|$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $(a_n\to\infty)\iff(|a_n|\to\infty)$.

טענה: תהיינה $a,b\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהיו $z,w\in\widehat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_n\to z$ וכן $b_n\to w$ אזי

- $a_n+b_n\to z+w$.
- $a_n\cdot b_n\to z\cdot w$.
- נניח כי $w\neq 0$ אזי $\frac{a_n}{b_n}\to\frac{z}{w}$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z\in\widehat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_n\to z$ אזי

- $\overline{a_n}\to\overline{z}$.
- $|a_n|\to|z|$.
- $\mathrm{Re}(a_n)\to\mathrm{Re}(z)$.
- $\mathrm{Im}(a_n)\to\mathrm{Im}(z)$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff$($\mathrm{Re}(a),\mathrm{Im}(a)$ מתכנסות).

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m\ge N.\left|a_n-a_m\right|<\varepsilon\right)$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $|a_n|\to 0$ אזי $a_n\to 0$.

מסקנה: תהיינה $a,b\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ באשר a חסומה וכן $b_n\to 0$ אזי $a_nb_n\to 0$.

הערה: מכאן והלאה הסימון $\mathbb{F}$ יתאר שדה מבין $\mathbb{R},\mathbb{C}$ וכאשר נאמר כי $\mathcal{U}$ פתוחה הכוונה היא ביחס לשדה.

גבול: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה תהא $a\in\mathbb{F}_1$ תהא $A\in\mathbb{F}_2$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{F}_2$ עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall z\in\mathcal{U}\backslash\{a\}.\|z-a\|<\delta\Longrightarrow\|f(z)-A\|<\varepsilon$ אזי $\lim_{z\to a}f(z)=A$.

משפט היינה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה אזי $(\lim_{z\to a}f(z)=A)\iff\left(\forall b\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}.(b_n\to a)\Longrightarrow(f(b_n)\to A)\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה ותהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{F}_2$ באשר $\lim_{z\to a}f(z)=A$ וכן $\lim_{z\to a}g(z)=B$ אזי

- $\lim_{z\to a}(f+g)(z)=A+B$.
- $\lim_{z\to a}(fg)(z)=AB$.
- נניח $B\neq 0$ אזי $\lim_{z\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(z)=\frac{A}{B}$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}$ פתוחה ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ באשר $\lim_{z\to a}f(z)=A$ אזי

- $\lim_{z\to a}\overline{f(z)}=\overline{A}$.
- $\lim_{z\to a}|f(z)|=|A|$.
- $\lim_{z\to a}\text{Re}(f(z))=\text{Re}(A)$.
- $\lim_{z\to a}\text{Im}(f(z))=\text{Im}(A)$.

גבול אינסופי: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ויהי $a\in\mathbb{C}$ אזי

- שאיפה לאינסוף בנקודה: אם $\forall M>0.\exists\delta>0.\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{a\}.|z-a|<\delta\Longrightarrow M<|f(z)|$ אזי $\lim_{z\to a}f(z)=\infty$.
- שאיפה לנקודה באינסוף: אם $\forall\varepsilon>0.\exists R>0.\forall z\in\mathbb{C}.R<|z|\Longrightarrow|f(z)-a|<\varepsilon$ אזי $\lim_{z\to\infty}f(z)=a$.
- שאיפה לאינסוף באינסוף: אם $\forall M>0.\exists R>0.\forall z\in\mathbb{C}.R<|z|\Longrightarrow M<|f(z)|$ אזי $\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

פונקציה רציפה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה יהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{F}_2$ המקיימת $\lim_{z\to a}f(z)=f(a)$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א 1 מתקיימות.

נגזרת: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{F}_2$ אזי $f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$.

פונקציה הולומורפית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ גזירה על כל $\mathcal{U}$.

מסקנה: כל מניפולציות הנגזרת של פונקציה מחדו"א 1 מתקיימות.

הערה: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ נסמן $f=u+iv$ עבור $u,v:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ אזי (f גזירה)$\Longleftrightarrow$(u,v גזירות).

למה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ גזירה אזי $(f'=0)\iff(\exists c\in\mathbb{C}.f=c)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ גזירה ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)=\frac{\partial v}{\partial y}(a)-i\frac{\partial u}{\partial y}(a)$.

מסקנה משוואות קושי־רימן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ גזירה אזי $\left(\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\right)\wedge\left(\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

טענה: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ אזי (f גזירה)$\Longleftrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.f=c)$.

משפט: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ אזי (f גזירה)$\Longleftrightarrow\left((u,v\in C^1(\mathcal{U}))\wedge\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\right)\wedge\left(\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\right)$.

לפלסיאן: תהא $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים אזי $\Delta g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

פונקציה הרמונית: $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים המקיימת $\Delta g=0$.

טענה: תהא $f\in C^2(\mathbb{C},\mathbb{C})$ אזי u,v הרמוניות.

פונקציה צמודה הרמונית: תהא $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אזי $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ עבורה $u+iv$ הולומורפית.

טענה: תהא $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ותהא $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ צמודה הרמונית ל־u אזי u צמודה הרמונית ל־$(-v)$.