

מתמטיקה בדידה 1 (0368-1118)

רון גולדמן

תוכן העניינים

2	מבוא ללוגיקה
2	מושגי יסוד בלוגיקה
3	תורת הקבוצות
3	תורת הקבוצות הנאיבית
4	פעולות על קבוצות
5	פרדוקס ראסל
6	תורת הקבוצות האקסיומטית
6	אקסיומות ZF (Zermelo-Fraenkel)
7	פעולות מוכללות על קבוצות
8	הזוג הסדור והמכפלה הקרטזית
9	יחסים
9	הגדרה ראשונית
10	פונקציות
14	יחסי שקילות
16	יחסי סדר
17	עוצמות
17	מושגי יסוד
18	לכסון
19	סדר של עוצמות
19	פעולות על עוצמות

מבוא ללוגיקה

מושגי יסוד בלוגיקה

הגדרה. יהי φ , נאמר כי φ הוא פסוק אם $\varphi \in \{\text{False}, \text{True}\}$.

הגדרה. נאמר כי פונקציה f היא קשר לוגי אם קיים $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\varphi \in \{\text{False}, \text{True}\}^m \rightarrow \{\text{False}, \text{True}\}^n$.

הגדרה. הקשר האונארי $\neg : \{\text{False}, \text{True}\} \rightarrow \{\text{False}, \text{True}\}$ שמקיים את טבלת האמת:

x	$\neg x$
False	True
True	False

נקרא שלילה.

הגדרה. הקשרים הבינאריים $\vee, \wedge, \rightarrow, :$ $\{\text{False}, \text{True}\}^2 \rightarrow \{\text{False}, \text{True}\}$ שמקיימים את טבלת האמת:

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$
False	False	False	False	True	True
False	True	True	False	True	False
True	False	True	False	False	False
True	True	True	True	True	True

נקראים און, וגם, גורירה ו-אם ורק אם בהתאמה.

הגדרה. יהיו x, y פסוקים. נאמר ש- x שקול לוגית ל- y אם יש להם את אותה טבלת אמת. נסמן $x = y$.

טענה. יהיו x, y, z פסוקים. אז:

$$1. x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$$

$$2. x \rightarrow y = \neg x \vee y$$

$$3. x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$$

$$4. (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

$$5. x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$$

הגדרה. הכמתים לכל ו-קיים מסומנים ב- \forall, \exists בהתאמה. הם מקיימים כי לכל $\varphi(x)$ תבנית פסוק $\forall x. \varphi(x)$ שקול לוגית לכך ש- $\varphi(x)$ מתקיימת תמיד, ו- $\exists x. \varphi(x)$ שקול לוגית לכך שעבור x כלשהו מתקיים $\varphi(x)$.

הגדרה. יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $\varphi : \{\text{False}, \text{True}\}^n \rightarrow \{\text{False}, \text{True}\}$ קשר לוגי.

1. אם לכל x_1, \dots, x_n פסוקים מתקיים $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, נאמר ש- φ טאוטולוגיה.

2. אם לכל x_1, \dots, x_n פסוקים מתקיים $\neg(\varphi(x_1, \dots, x_n))$, נאמר ש- φ סתירה.

משפט (עיקרון האינדוקציה). תהי $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת טענות. אם φ_0 וגם לכל $i \in \mathbb{N}$, $\varphi_i \rightarrow \varphi_{i+1}$ אזי לכל $n \in \mathbb{N}$.

משפט (עיקרון האינדוקציה השלמה). תהי $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת טענות. אם φ_0 וגם לכל $i \in \mathbb{N}$, $(\forall k \geq i. \varphi_k) \rightarrow \varphi_{i+1}$ אזי לכל $n \in \mathbb{N}$.

תורת הקבוצות

תורת הקבוצות הנאיבית

הגדרה (נאיבית ולא פורמלית). קבוצה היא אוסף של עצמים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר.

דוגמה. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ היא קבוצה.

סימון. אם עצם x נמצא בקבוצה A נסמן $x \in A$.

הגדרה (עיקרון האקסטנציונליות). תהינה A, B קבוצות. נאמר כי הקבוצות A ו- B שוות אם $\forall x. (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ ונסמן $A = B$.

הגדרה. תהינה A, B קבוצות. נאמר ש- A תת-קבוצה של B אם $\forall x. (x \in A \rightarrow x \in B)$ ונסמן $A \subseteq B$.
נאמר כי A מוכלת ממש ב- B אם בנוסף $A \neq B$ ונסמן $A \subset B$.

טענה (טרנזיטיביות ההכלה). תהינה A, B, C קבוצות. אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.

הגדרה. הקבוצה \emptyset שמקיימת $\forall x. x \notin \emptyset$ נקראת הקבוצה הריקה.

טענה. לכל קבוצה A מתקיים $\emptyset \subseteq A$.

הגדרה (קבוצות מיוחדות). בקורס זה נניח את קיומן של מספר קבוצות:

1. המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} \triangleq \{0, 1, 2, \dots\}$

2. הטבעיים החיוביים: $\mathbb{N}^+ \triangleq \{1, 2, 3, \dots\}$

3. המספרים השלמים: $\mathbb{Z} \triangleq \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

4. המספרים הרציונליים: \mathbb{Q} אם ורק אם קיימים $n \in \mathbb{Z}$ ו- $m \in \mathbb{N}^+$ כך ש- $x = \frac{n}{m}$.

5. המספרים הממשיים: \mathbb{R}

6. המספרים המרוכבים: \mathbb{C} אם ורק אם קיימים $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש- $z = x + iy$ כאשר $i^2 = -1$.

פעולות על קבוצות

הגדרה. תהינה A, B, Ω קבוצות כך ש- $A \subseteq \Omega$. אזי

1. החיתוך של A ו- B מסומן ב- $A \cap B$ כך שמתקיים:

$$\forall x. x \in A \cap B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

2. האיחוד של A ו- B מסומן ב- $A \cup B$ כך שמתקיים:

$$\forall x. x \in A \cup B \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

נאמר כי A ו- B זרות אם $A \cap B = \emptyset$.

3. ההפרש $A \setminus B$ מקיים:

$$\forall x. x \in A \setminus B \leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

4. ההפרש הסימטרי של A ו- B מסומן ב- $A \Delta B$ מוגדר להיות:

$$A \Delta B \triangleq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

5. המשלים של A ביחס ל- Ω היא הקבוצה $A_\Omega^c \triangleq \Omega \setminus A$.

כאשר Ω מובן מההקשר נסמן $A_\Omega^c := \bar{A} = A^c$.

טענה (תכונות של הפעולות הבסיסיות). תהינה A, B, C, Ω קבוצות כך ש- $A, B \subseteq \Omega$. מתקיים

1.

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap A = A \quad A \cup A = A$$

2.

$$A \setminus B \subseteq A$$

$$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$$

3.

$$A \cap B \subseteq A \quad B \subseteq A \cup B$$

אם $A \subseteq B$ אזי

$$A \cap B = A \quad A \cup B = B$$

4. $A \cup B \subseteq C$ אם ורק אם $A \subseteq C$ וגם $B \subseteq C$.
 אם $C \subseteq A \cap B$ אזי $C \subseteq A$ וגם $C \subseteq B$.

5. קומוטטיביות (חילופיות)

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \Delta B = B \Delta A$$

6. אסוציאטיביות (קיבוציות)

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

7. דיסטריבוטיביות (פילוג)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

8. כללי דה-מורגן (De-Morgan) כאשר $A^c = A_\Omega^c$ ו- $B^c = B_\Omega^c$, אזי

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

$$B \setminus A = B \cap A^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A^c)^c = A$$

9.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

פרדוקס ראסל

הגדרה (עיקרון הקומפרהנסייה). תהי $\varphi(x)$ תכונה, הביטוי

$$A = \{x \mid \varphi(x)\}$$

היא קבוצה כך שמתקיים

$$\forall x. x \in A \leftrightarrow \varphi(x)$$

בעיה (פרדוקס ראסל). ניתן להגדיר תכונה $\varphi(X) = X \notin X$.
 אז לפי עיקרון הקומפרהנסיה $R = \{X | X \notin X\}$ זו קבוצה.
 $R \in R \vee R \notin R$ זה סתירה ולכן R אינה קבוצה.

תורת הקבוצות האקסיומטית

אקסיומות (Zermelo-Fraenkel) ZF

אקסיומה (אקסיומת האקסטנציונליות). תהינה X, Y קבוצות.

$$\forall z. (z \in X \leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow (X = Y)$$

אקסיומה (אקסיומת האיחוד). תהינה X, Y קבוצות.
 אז האיחוד $X \cup Y$ הוא קבוצה.

אקסיומה (אקסיומת הקבוצה הריקה). קיימת קבוצה \emptyset שלא מכילה אף איבר.

אקסיומה (אקסיומת הזיווג). תהינה X, Y קבוצות.
 אז $\{X, Y\}$ היא קבוצה.

אקסיומה (אקסיומת הקומפרהנסיה המוגבלת). תהינה X קבוצה ו- $P(x)$ תכונה.
 אז $\{x \in X | P(x)\}$ היא קבוצה.

אקסיומה (אקסיומת ההחלפה). תהי f פונקציה על קבוצה X .
 אז $\{f(x) | x \in X\}$ היא קבוצה.

אקסיומה (אקסיומת האינסוף). תהי f פונקציה כך שמתקיים $f(x) = x \cup \{x\}$.
 קיימת קבוצה X כך ש- $\emptyset \in X$ וגם אם $Y \in X$ אז $f(Y) \in X$.

אקסיומה (אקסיומת קבוצת החזקה). תהי X קבוצה.
 אז $\mathcal{P}(X) = \{Y | Y \subseteq X\}$ היא קבוצה שנקראת קבוצת החזקה של X (Power set of X).

טענה. תהינה A, B קבוצות.

$$1. A \subseteq B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$$

$$2. \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \text{ אם ורק אם } A \subseteq B \vee B \subseteq A$$

אקסיומה (אקסיומת הרגולריות). תהי X קבוצה לא ריקה.
 קיים $Y \in X$ כך שלכל $Z \in X$ מתקיים $Z \notin Y$.

הגדרה (כלל β). תהי קבוצה Ω , ותהי $P(x)$ תכונה.
 אם $A = \{x \in \Omega | P(x)\}$, אז $P(y/x)$ אם ורק אם $y \in A$.

פעולות מוכללות על קבוצות

תהי F קבוצה. מאקסיומות ZF , כל איברי F קבוצות בעצמן ולכן הפעולות הבאות מוגדרות היטב.

הגדרה. האיחוד המוכלל של איברי F מוגדר להיות:

$$\bigcup F \triangleq \{x \mid \exists A \in F. x \in A\}$$

סימון. תהי I קבוצה, אם לכל $i \in I$ קבוצה A_i אזי

$$\bigcup_{i \in I} A_i \triangleq \{x \mid \exists i \in I. x \in A_i\}$$

בפרט עבור $I = \mathbb{N}$ נסמן:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \triangleq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

באותו אופן מכלילים את הנוטציה עבור $I = \mathbb{Z}, \mathbb{N}^+, \dots$.

הגדרה. החיתוך המוכלל של איברי F מוגדר להיות:

$$\bigcap F \triangleq \{x \mid \forall A \in F. x \in A\}$$

סימון. תהי I קבוצה, אם לכל $i \in I$ קבוצה A_i אזי

$$\bigcap_{i \in I} A_i \triangleq \{x \mid \forall i \in I. x \in A_i\}$$

בפרט עבור $I = \mathbb{N}$ נסמן:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \triangleq \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

באותו אופן מכלילים את הנוטציה עבור $I = \mathbb{Z}, \mathbb{N}^+, \dots$.

טענה. $\bigcup F$ וגם $\bigcap F$ קבוצות.

טענה. תהי $i \in I$ קבוצה כך שלכל $i \in I$, A_i קבוצה, ותהי B קבוצה. אזי

$$\begin{aligned} B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) &= \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \\ B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) &= \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i) \end{aligned}$$

אם בנוסף, קיימת קבוצה Ω כך שלכל $i \in I$, $A_i \subseteq \Omega$ אזי

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

הזוג הסדור והמכפלה הקרטזית

הגדרה. תהינה x, y קבוצות.

נגדיר את **הזוג הסדור** להיות $\langle x, y \rangle \triangleq \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

טענה (**תכונת הזוג הסדור**). תהינה a, b, c, d קבוצות. אזי

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$$

הגדרה. תהינה A, B קבוצות.

המכפלה הקרטזית $A \times B$ מוגדרת להיות

$$A \times B \triangleq \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

טענה. לכל A, B קבוצות, $A \times B$ קבוצה.

טענה. תהי A קבוצה. אזי

$$\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$$

טענה. תהינה A, B קבוצות. אזי

$$(A \times B = B \times A) \iff (A = B \vee A = \emptyset \vee B = \emptyset)$$

הגדרה. תהינה x, y קבוצות. **ההיטל** של $z = \langle x, y \rangle$ על **הקואורדינטה** הראשונה והשנייה מסומן ב- $\pi_1(z), \pi_2(z)$ ומקיים:

$$\pi_1(z) \triangleq x$$

$$\pi_2(z) \triangleq y$$

כלומר, $z = \langle \pi_1(z), \pi_2(z) \rangle$.

סימון. יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נגדיר

$$[n] = \{i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq n\}$$

הגדרה. תהינה a_1, a_2, \dots, a_n קבוצות. נסמן

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \triangleq \langle a_1, \langle a_2, \langle \dots, \langle a_{n-1}, a_n \rangle \rangle \rangle \rangle$$

אם $b = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ אז לכל $i \in [n]$ נגדיר:

$$\pi_i(b) = a_i$$

טענה. יהי $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$. לכל $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ מתקיים

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \iff \forall i \in [n]. a_i = b_i$$

הגדרה. תהינה A_1, \dots, A_n קבוצות. נגדיר:

$$\begin{aligned} A_1 \times \dots \times A_n &\triangleq A_1 \times (A_2 \times \dots \times A_n) \\ &\triangleq A_1 \times (A_2 \times \dots (A_{n-1} \times A_n)) \end{aligned}$$

כלומר

$$A_1 \times \dots \times A_n \triangleq \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \mid \forall i \in [n]. a_i \in A_i \}$$

אם קיימת קבוצה A כך שלכל $i \in [n]$, $A_i = A$. נסמן

$$A^n \triangleq A_1 \times \dots \times A_n$$

יחסים

הגדרה ראשונית

הגדרה. תהינה A, B קבוצות. יחס בינארי R על A, B מ- A הוא קבוצה של זוגות סדורים $R \subseteq A \times B$. נאמר כי R יחס מ- A ל- B , אם $A = B$ נאמר ש- R יחס מעל A . אם עבור $x \in A, y \in B$ מתקיים $\langle x, y \rangle \in R$, נסמן xRy .

הגדרה. תהי A קבוצה. יחס הזהות על A מסומן I_A ומוגדר על ידי:

$$I_A \triangleq \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \}$$

הגדרה. יהי $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n$. יחס n מקומי על קבוצות A_1, \dots, A_n הוא תת קבוצה $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$.

טענה. תהינה A, B קבוצות. קבוצת כל היחסים מ- A ל- B היא הקבוצה $\mathcal{P}(A \times B)$.

הגדרה. תהינה A, B קבוצות, ויהי $S \subseteq A \times B$ יחס מ- A ל- B .

היחס ההפוך ל- S הוא היחס:

$$S^{-1} \triangleq \{ \langle b, a \rangle \in B \times A \mid \langle a, b \rangle \in S \}$$

הגדרה. תהינה A, B, C קבוצות, ויהיו $S \subseteq A \times B, R \subseteq B \times C$ יחסים מ- A ל- B ומ- B ל- C בהתאמה. ההרכבה $R \circ S$ (מורכב על S) היא יחס מ- A ל- C שמוגדר כך:

$$R \circ S \triangleq \{ \langle a, c \rangle \in A \times C \mid \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in S \wedge \langle b, c \rangle \in R \}$$

טענה. יהיו R ו- S יחסים מעל קבוצה A . אזי

$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$$

טענה. יהי R יחס מעל קבוצה A .

אזי $R \circ I_A = I_A \circ R = R$.

הגדרה. תהי A קבוצה, ויהי $R \subseteq A^2$ יחס מעל A .

ההרכבה של R עם עצמו $n \in \mathbb{N}^+$ פעמים מוגדרת להיות:

$$R^{(n)} = \begin{cases} R^{(n-1)} \circ R & n > 1 \\ R & n = 1 \end{cases}$$

טענה. יהי R יחס מעל קבוצה A ויהיו $m, n \in \mathbb{N}^+$. אזי

$$R^{(m)} \circ R^{(n)} = R^{(m+n)}$$

הגדרה. תהינה A, B קבוצות, ויהי $R \subseteq A \times B$

1. R הוא מלא ב- A אם

$$\forall a \in A. \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in R$$

2. R הוא חד ערכי אם

$$\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (\langle a, b_1 \rangle \in R \wedge \langle a, b_2 \rangle \in R) \rightarrow b_1 = b_2$$

טענה. תהינה A, B, C קבוצות, ויהיו $S \subseteq A \times B, R \subseteq B \times C$

1. אם R, S מלאים ב- B , בהתאמה, אז $R \circ S$ מלא ב- A .

2. אם R, S חד ערכיים, אז $R \circ S$ חד ערכי.

פונקציות

הגדרה. יחס $f \subseteq A \times B$ מקבוצה A לקבוצה B הוא **פונקציה** אם הוא מלא ב- A וחד ערכי.

מתמטית: יחס $f \subseteq A \times B$ הוא פונקציה אם ורק אם

$$(\forall a \in A. \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in f) \wedge (\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (\langle a, b_1 \rangle \in f \wedge \langle a, b_2 \rangle \in f) \rightarrow b_1 = b_2)$$

או באופן שקול אם ורק אם

$$\forall a \in A. \exists! b \in B. \langle a, b \rangle \in f$$

הגדרה. יחס R מקבוצה A לקבוצה B נקרא **פונקציה חלקית** אם הוא חד ערכי.

סימון.

1. אם f פונקציה מקבוצה A לקבוצה B ומתקיים $\langle a, b \rangle \in f$ נהוג לכתוב $f(a) = b$, ונאמר ש- b הוא **התמונה של a** , וש- a הוא

המקור של b .

2. את קבוצת הפונקציות מ- A ל- B נסמן ב- $A \rightarrow B$ או B^A .

טענה. תהינה A, B קבוצות. $A \rightarrow B \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$.

הגדרה. תהי f פונקציה.

1. התחום (domain) של $f \in A \rightarrow B$ הוא A .

סימון.

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f) &\triangleq \{a \in A \mid \exists b \in B. \langle a, b \rangle \in f\} \\ &\triangleq \{\pi_1(z) \mid z \in f\}\end{aligned}$$

2. קבוצה B נקראת טווח (range) של f אם

$$\forall x \in \text{Dom}(f). f(x) \in B$$

3. התמונה של $f \in A \rightarrow B$ מוגדרת באופן הבא

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &\triangleq \{y \in B \mid \exists x \in \text{Dom}(f). y = f(x)\} \\ &\triangleq \{f(x) \mid x \in \text{Dom}(f)\}\end{aligned}$$

טענה. קבוצה B היא טווח של פונקציה f אם ורק אם $\text{Im}(f) \subseteq B$.

טענה (עקרון האקסטנציונליות עבור פונקציות). תהינה f, g פונקציות. אזי

$$f = g \iff ((\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)) \wedge \forall x \in \text{Dom}(f). f(x) = g(x))$$

סימון. במקום לכתוב $f \in A \rightarrow B$ לעיתים נכתוב $f : A \rightarrow B$.

הגדרה. בהינתן $f : A \rightarrow B$, נסמן

$$f(a) = b \in B. \langle a, b \rangle \in f$$

איוטא - היחיד שמקיים.

סימון (דרכים לרישום פונקציות). תהינה A, B קבוצות. כל פונקציה $f \in A \rightarrow B$ ניתנת לרישום באופנים הבאים:

1. כיחס (קבוצת זוגות סדורים)

$$f = \{\langle x, y \rangle \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

2. בכתוב "סטנדרטי"; אם t הוא ביטוי אז לכל $x \in A$ מתקיים

$$f(x) = t$$

3. כתיב למדא (lambda)

אם t הוא ביטוי אז $\lambda x \in A. t$ מתאר את הפונקציה (אולי פונקציה חלקית) כך שמתקיים:

(א) תחומה הוא A

(ב) מחזירה לכל $s \in A$ את ערך הביטוי t שמציבים בו במקום כל מופע של x את s (בקיצור $t(s/x)$)

הגדרה. תהי קבוצה A וביטוי t , אזי:

1. כלל α לפונקציות:

$$\lambda y \in A. t = \lambda x \in A. t(x/y)$$

2. כלל β לפונקציות:

$$(\lambda x \in A. t)(s) = t(s/x)$$

3. כלל η לפונקציות:

$$\lambda x \in \text{Dom}(f). t(x) = t$$

הגדרה. בהינתן פונקציה $f : A \rightarrow B$ וקבוצה $X \subseteq A$, התמונה של X תחת f מסומנת על ידי $f[X]$ ומוגדרת על ידי

$$f[X] \triangleq \{f(a) \mid a \in X\}$$

הגדרה. בהינתן פונקציה $f : A \rightarrow B$ וקבוצה $Y \subseteq B$, קבוצת המקורות של Y תחת f מסומנת על ידי $f^{-1}[Y]$ ומוגדרת על ידי

$$f^{-1}[Y] \triangleq \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

הגדרה (הרכבת פונקציות). אם $f : A \rightarrow B$ ו- $g : B \rightarrow C$ אז $g \circ f$ היא הפונקציה

$$g \circ f \triangleq \lambda a \in A. g(f(a))$$

טענה (הרכבה היא אסוציאטיבית). תהינה $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$. אז

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

הגדרה. תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. $g : B \rightarrow A$ נקראת הפונקציה ההופכית של f אם מתקיים

$$g \circ f = I_A$$

וגם

$$f \circ g = I_B$$

מסמנים $g \triangleq f^{-1}$.

משפט (יחידות הפונקציה ההופכית). תהינה A, B קבוצות ותהי $f : A \rightarrow B$. אם ל- f קיימת פונקציה הופכית g אז היא יחידה.

הגדרה. תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה.

1. f תיקרא **חד חד ערכית** (חח"ע) אם מתקיים

$$\forall x_1, x_2 \in A. f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

ניסוח שקול (קונטרפוזיציה)

$$\forall x_1, x_2 \in A. x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

2. f תיקרא **על** B אם מתקיים

$$\forall y \in B. \exists x \in A. f(x) = y$$

ניסוח שקול

$$B \subseteq \text{Im}(f)$$

הערה. תהי פונקציה $f : A \rightarrow B$, ויהי $f^{-1} \subseteq B \times A$ היחס ההפוך ל- f .

1. f חח"ע אם ורק אם f^{-1} **חד ערכי**.

2. f על B אם ורק אם f^{-1} **מלא ב- B** .

טענה. תהינה A, B, C קבוצות ותהינה $f : A \rightarrow B$ ו- $g : B \rightarrow C$.

1. אם f ו- g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע.

2. אם f על B ו- g על C אז $g \circ f$ על C .

הגדרה. $f : A \rightarrow B$ היא **זיווג מ- A ל- B** אם f חח"ע ועל B .

משפט. תהינה A, B קבוצות.

$f : A \rightarrow B$ היא זיווג מ- A ל- B אם ורק אם קיימת ל- f פונקציה הופכית $g : B \rightarrow A$.

הערה. לכן קוראים לזיווג גם **פונקציה הפיכה**.

הגדרה. תהי E קבוצה ותהי $A \subseteq E$ תת"ק של E . נגדיר את **הפונקציה האופיינית של A בקבוצה E**

$$\chi_A^{(E)} \triangleq \lambda x \in E. \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

טענה. לכל קבוצה E קיים זיווג מ- $\mathcal{P}(E)$ ל- $\{0, 1\}$.

הגדרה. **צמצום** של פונקציה $f : A \rightarrow B$ לקבוצה $C \subseteq A$ מסומן $f|_C$ ומוגדר על ידי

$$f|_C \triangleq \lambda x \in C. f(x)$$

טענה. אם $f : A \rightarrow B$ זיווג ו- $C \subseteq A$ אז $f|_C$ זיווג מ- C ל- $f[C]$.

הגדרה. תהינה A, B, C קבוצות לא ריקות. הפונקציה

$$G = \lambda f \in A \rightarrow (B \rightarrow C). \lambda \langle a, b \rangle \in A \times B. (f(a))(b)$$

נקראת פונקציית Curry וההופכית שלה נקראת UnCurry.

יחסי שקילות

הגדרה. יחס S בקבוצה A (או מעל קבוצה A) נקרא **סימטרי** אם

$$\forall a, b. aSb \rightarrow bSa$$

טענה. יחס S הוא סימטרי אם ורק אם $S^{-1} = S$.

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **טרנזיטיבי** אם

$$\forall a, b, c. aSb \wedge bSc \rightarrow aSc$$

טענה. יחס S הוא טרנזיטיבי אם ורק אם $S \circ S \subseteq S$.

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **רפלקסיבי** אם

$$\forall a \in A. aSa$$

טענה. יחס S בקבוצה A הוא רפלקסיבי אם ורק אם $I_A \subseteq S$.

הגדרה. יחס E נקרא **יחס שקילות** אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

טענה. יהיו R, S יחסי שקילות בקבוצה A .

אם $R \circ S = S \circ R$ אז $R \circ S$ יחס שקילות.

הגדרה. יהי E יחס שקילות בקבוצה A .

מחלקת השקילות של איבר $a \in A$ מסומנת ב- $[a]_E$ ומוגדרת על ידי

$$[a]_E = \{b \in A \mid aEb\} \subseteq A$$

טענה. יהי E יחס שקילות בקבוצה A . התנאים הבאים שקולים:

$$1. aEb$$

$$2. [a]_E = [b]_E$$

$$3. [a]_E \cap [b]_E \neq \emptyset$$

הגדרה. יהי יחס שקילות E בקבוצה A .

קבוצת המנה של A לפי E מסומנת ב- A/E ומוגדרת על ידי

$$A/E \triangleq \{[a]_E \mid a \in A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$$

הגדרה. תהי A קבוצה. חלוקה של A (partition) היא קבוצה $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$ שמקיימת את התנאים הבאים:

1. אין חלקים ריקים:

$$\emptyset \notin \Pi$$

2. Π מכסה את כל A :

$$\forall a \in A. \exists M \in \Pi. a \in M$$

ניסוח שקול:

$$A \subseteq \bigcup \Pi$$

3. החלקים זרים:

$$\forall M_1, M_2 \in \Pi. M_1 \neq M_2 \rightarrow M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

או באופן שקול (קונטרפוזיציה):

$$\forall M_1, M_2 \in \Pi. M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \rightarrow M_1 = M_2$$

משפט. תהי קבוצה A .

1. לכל יחס שקילות E בקבוצה A , A/E היא חלוקה של A .

2. תהא Π חלוקה של A .

היחס S_Π שמוגדר על ידי

$$S_\Pi = \{ \langle a, b \rangle \in A \times A \mid \exists M \in \Pi. a \in M \wedge b \in M \}$$

הוא יחס שקילות.

טענה. לכל חלוקה Π של קבוצה A אם

$$S_\Pi = \{ \langle a, b \rangle \in A \times A \mid \exists M \in \Pi. a \in M \wedge b \in M \}$$

אז מתקיים $A/S_\Pi = \Pi$.

משפט. תהא קבוצה A .

בין קבוצות יחסי השקילות ב- A לקבוצת החלוקות של A קיים זיווג.

הגדרה. קבוצה $X \subseteq A$ נקראת מערכת נציגים של יחס שקילות S אם לכל $a \in A$ קיים ויחיד $x \in X$ כך ש- $\langle a, x \rangle \in S$.

הגדרה. תהינא A, B קבוצות ויחס שקילות $S \subseteq A^2$. פונקציה $f \in A \rightarrow B$ תיקרא לא תלויה בנציג ביחס S -ל אם

$$\forall x, y \in A. xSy \rightarrow f(x) = f(y)$$

יחסי סדר

סימון. מקובל לסמן:

1. יחס סדר חלש ב- \leq .

2. יחס סדר חזק ב- $<$.

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **אנטי-סימטרי** אם

$$\forall a, b. aSb \wedge bSa \rightarrow a = b$$

טענה. אם יחס S בקבוצה A הוא סימטרי וגם אנטי-סימטרי אז

$$S \subseteq I_A$$

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **יחס סדר חלש** אם הוא טרנזיטיבי, רפלקסיבי ואנטי-סימטרי.

הגדרה. יהי S יחס סדר חלש בקבוצה A .

1. איבר $b \in A$ יקרא **מינימלי ביחס ל- S** אם

$$\forall a \in A. a \neq b \rightarrow \neg aSb$$

2. איבר $b \in A$ יקרא **מקסימלי ביחס ל- S** אם

$$\forall a \in A. a \neq b \rightarrow \neg bSa$$

3. איבר $b \in A$ יקרא **איבר גדול ביותר ביחס ל- S** אם

$$\forall a \in A. aRb$$

4. איבר $b \in A$ יקרא **איבר קטן ביותר ביחס ל- S** אם

$$\forall a \in A. bRa$$

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **אנטי-סימטרי חזק** אם

$$\forall a, b. aSb \rightarrow \neg bSa$$

הגדרה. יחס S בקבוצה A נקרא **יחס סדר חזק** אם הוא טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי חזק.

הגדרה.

1. יחס סדר (חלש) S בקבוצה A נקרא **יחס סדר מלא** אם

$$\forall a, b \in A. aSb \vee bSa$$

2. יחס סדר חזק S בקבוצה A נקרא **יחס סדר חזק מלא** אם מתקיים

$$\forall a, b \in A. aSb \vee bSa \vee a = b$$

הערה.

1. לעיתים במקום **מלא** אומרים **לינארי/קווי** או **יחס סדר טוטאלי (total)**.

2. יחס סדר מלא זה **לא** שקול ליחס סדר שהוא יחס מלא.

עוצמות

מושגי יסוד

הגדרה. שתי קבוצות A, B נקראות **שוות עוצמה** אם קיים זיווג $f : A \rightarrow B$.

סימון. $A \sim B$

הגדרה. קבוצה A נקראת **סופית** אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים

$$A \sim \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$$

הגדרה. קבוצה שאינה סופית נקראת **אינסופית**.

הערה. \emptyset סופית כי עבור $n = 0$

$$\{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \leq 0\} = \emptyset$$

ולכן זיווג הוא $\emptyset : \emptyset \rightarrow \emptyset$.

טענה. תהינא A, B קבוצות.

אם A סופית ו- $B \subset A$ אז $\neg A \sim B$.

טענה. היחס \sim הוא יחס שקילות.

* - צריך להגדיר פורמלית את הקבוצה שבה הוא יחס.

הגדרה. **עוצמה** היא מחלקת שקילות \sim של \sim .

סימון. $|A|$ זו **העוצמה של A** .

כלומר $A \sim B$ אם ורק אם $|A| = |B|$.

הגדרה (המספרים הטבעיים). לכל $n \in \mathbb{N}^+$ נגדיר

$$0 \triangleq |\emptyset|$$

$$n \triangleq |\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}|$$

טענה. תהינא A, B, A', B' קבוצות. אם A, B זרות ו- A', B' זרות כך שמתקיים $A \sim A'$ ו- $B \sim B'$ אזי

$$A \cup B \sim A' \cup B'$$

לכסון

הגדרה. העוצמה של הקבוצה \mathbb{N} תסומן $\aleph_0 \triangleq |\mathbb{N}|$ ותיקרא **אלף אפס**.

הגדרה. קבוצה A תיקרא **בת-מניה** אם $|A| = \aleph_0$.

טענה. לכל קבוצה בת מניה B קיימת תת קבוצה B' בת מניה כך ש- $B' \subset B$.
טענה. מתקיים:

$$1. \forall k \in \mathbb{N}^+. |\mathbb{N}^k| = \aleph_0$$

$$2. |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$$

הגדרה. העוצמה של הקבוצה \mathbb{R} תסומן $\aleph = |\mathbb{R}|$ ותיקרא **עוצמת הרצף**.

טענה. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $a < b$, אזי:

$$|[a, b]| = |[a, b)| = |(a, b]| = |(a, b)|$$

אקסיומה (אקסיומת הבחירה). תהא B קבוצה לא ריקה של קבוצות לא ריקות, אז קיימת פונקציה $f: B \rightarrow \bigcup B$ כך שלכל $A \in B$ מתקיים $f(A) \in A$.

משפט. נניח כי מערכת האקסיומות ZF קונסיסטנטית. אזי:

1. **(גזל)** $ZFC = ZF \cup AC$ מערכת אקסיומות קונסיסטנטית.

2. **(כהן)** $ZF \cup \neg AC$ מערכת אקסיומות קונסיסטנטית.

משפט. תהי קבוצה A , אז הבאים שקולים:

1. קיימת $B \subseteq A$ בת מניה.

2. קיימת $A' \subset A$ כך ש- $A' \sim A$.

3. A אינסופית.

אלגוריתם (לכסון). נניח שנתונה לנו קבוצה A שאנו מעוניינים להוכיח שהיא אינה מעוצמה של קבוצה B .

1. נניח בשלילה כי A מעוצמה $|B|$, ולכן קיים זיווג $f: B \rightarrow A$.

2. נגדיר $h \in A$ שתלויה ב- f באופן שתהיה שונה מכל איבר בתמונה של f .

3. נראה ש- f לא על A בכך שנראה סתירה לכך שקיים $x \in B$ כך ש- $h = f(x)$.

משפט (קנטור). $\aleph \neq \aleph_0$.

ובאופן כללי יותר לכל קבוצה A מתקיים $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.

סדר של עוצמות

הגדרה. תהינה A, B קבוצות. נאמר כי $|A| \leq |B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע $f: A \rightarrow B$.

טענה. ההגדרה לעיל טובה (לא תלויה בנציג).

כלומר, לכל קבוצות A, B מתקיים כי אם קיימת $f: A \rightarrow B$ חח"ע אז לכל $A' \in |A|, B' \in |B|$ קיימת פונקציה $f': A' \rightarrow B'$ חח"ע.

טענה. תהינה A, B קבוצות, אז הבאים שקולים:

$$1. |A| \leq |B|.$$

$$2. \text{קיימת } B' \subseteq B \text{ כך ש-} B' \sim A.$$

$$3. A = \emptyset \text{ או שקיימת פונקציה } g: B \rightarrow A \text{ על } A.$$

הגדרה. תהינה A, B קבוצות. נסמן $|A| < |B|$ אם מתקיים $|A| \leq |B|$ וגם $|A| \neq |B|$.

טענה. היחס \leq בין עוצמות הוא יחס סדר מלא.

טענה. תהינה A, B קבוצות. אם $A \subseteq B$ אז $|A| \leq |B|$.

משפט (קנטור-שרדר-ברנשטיין). תהינה A, B קבוצות.

$$|A| = |B| \iff |A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A|$$

משפט (סנדוויץ'). תהינה A, B, C קבוצות. אם $A \subseteq B \subseteq C$ ו- $A \sim C$ אז $A \sim B \sim C$.

טענה. תהי קבוצה A ויהי $T \in \mathcal{P}(A \times A)$ יחס שקילות. אז $|A/T| \leq |A|$.

משפט. לכל קבוצה A מתקיים $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. בנוסף, מתקיים $2^{|A|} > |A|$.

פעולות על עוצמות

הגדרה. תהינה A, B קבוצות. נגדיר:

$$1. |A| + |B| \triangleq |A \cup B| \text{ עבור } A \text{ ו-} B \text{ זרות. עבור קבוצות לא בהכרח זרות, ניתן להגדיר } |A| + |B| = |(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})|.$$

$$2. |A| \cdot |B| \triangleq |A \times B|.$$

$$3. |A|^{|B|} \triangleq |B \rightarrow A|.$$

טענה. ההגדרה לעיל טובה (לא תלויה בנציגים).

טענה (זהויות שימושיות).

$$1. \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

$$2. \aleph + \aleph_0 = \aleph.$$

$$3. \aleph + \aleph = \aleph.$$

$$4. \aleph_0 = \aleph$$

טענה (חשבון עוצמות). תהינא a, b, c עוצמות. אזי:

1. קומוטיביות:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

2. אסוציאטיביות:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. דיסטריבוטיביות:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4. קיום עוצמה אדישה לחיבור:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

5. קיום עוצמה אדישה לכפל:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

6. תכונות נוספות:

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$1^a = 1$$

7. אם $a \neq 0$ אז:

$$0^a = 0$$

בנוסף:

$$0^0 = 1$$

8. חוקי חזקות:

$$a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c$$

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

9. מונוטוניות: אם $a \leq c$ ו- $b \leq d$ אז

$$a + b \leq c + d$$

$$a \cdot b \leq c \cdot d$$

$$a^b \leq c^d$$

טענה. לכל $k \in \mathbb{N}^+$ ולכל קבוצה A מתקיים: $|A^k| = |A|^k$.

טענה. תהינא a, b עוצמות. אם a אינסופית ו- b סופית או בת מניה אזי

$$a + b = a$$

משפט. תהא I קבוצה, ותהי A_i קבוצה לכל $i \in I$. אם $|I| \leq \aleph_0$ וגם $|A_i| \leq \aleph_0$ לכל $i \in I$ אז $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \aleph_0$.

טענה. קבוצת תתי הקבוצות הסופיות של \mathbb{N} היא בת מניה. פורמלית:

$$|\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$$

טענה. קבוצת תתי הקבוצות האינסופיות של \mathbb{N} היא מעוצמת הרצף. פורמלית:

$$|\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| \notin \mathbb{N}\}| = \aleph$$

טענה. יהי Σ א"ב סופי. אז קיימת $f \in \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ כך שאף תוכנית מחשב מעל Σ לא יכולה לחשב.