

**פעולות בינאריות:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $A \times A \rightarrow A$ .

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה ותהא  $*$  פעולה בינארית על  $A$  אזי  $a * b = *(a, b)$ .

**חבורה:** תהא  $G$  קבוצה אזי  $G \times G \rightarrow G : *$  עבורה קיים  $e \in G$  עבורו

- אסוציאטיביות: לכל  $a, b, c \in G$  מתקיים  $a * (b * c) = (a * b) * c$ .
- איבר יחידה: לכל  $a \in G$  מתקיים  $a * e = e * a = a$ .
- איבר הופכי: לכל  $a \in G$  קיים  $b \in G$  עבורו  $a * b = e = b * a$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה אזי קיים יחיד  $e \in G$  עבורו  $a * e = e * a = a$  לכל  $a \in G$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ויהי  $a \in G$  אזי קיים יחיד  $b \in G$  עבורו  $a * b = e = b * a$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה יהי  $a \in G$  ויהי  $b \in G$  איבר הופכי ל- $a$  אזי  $a^{-1} = b$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ויהיו  $a, b \in G$  אזי  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ויהי  $a \in G$  אזי  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

**הגדרה:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $\{f : X \rightarrow X \mid f \text{ הפיכה}\} = S(X)$ .

**חבורת התמורות:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $(S(X), \circ)$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $S_n = S([n])$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $|S_n| = n!$ .

**חבורת המטריצות:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$ .

**טענה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.

**החבורות החיבוריות:** יהי  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  אזי  $(\mathbb{F}, +)$ .

**סימון:** תהא  $A \subseteq \mathbb{C}$  אזי  $A^* = A \setminus \{0\}$ .

**החבורות הכפליות:** יהי  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*\}$  אזי  $(\mathbb{F}, \cdot)$ .

**החבורה הטריטוראלית:** יהי  $x$  אזי  $(\{x\}, \text{Id})$ .

**הגדרה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\sim_n \subseteq \mathbb{Z}^2$  המוגדרת  $(x \sim_n y) \iff (n \mid (x - y))$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $C_n = \mathbb{Z} / \sim_n$ .

**הגדרה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $C_n \times C_n \rightarrow C_n : +$  המוגדרת  $[x]_{\sim_n} + [y]_{\sim_n} = [x + y]_{\sim_n}$ .

**חבורת שאריות החלוקה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $(C_n, +)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $|C_n| = n$ .

**חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית:** חבורה  $(G, *)$  עבורה לכל  $g, h \in G$  מתקיים  $g * h = h * g$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  אזי  $(S_n, \circ)$  אינה אבלית.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$  אינה אבלית.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(C_n, +)$  אבלית.

**חבורה סופית:** חבורה  $(G, *)$  עבורה  $|G| \in \mathbb{N}$ .

**חבורה אינסופית:** חבורה  $(G, *)$  עבורה  $|G| \geq \aleph_0$ .

**סדר של חבורה:** תהא  $(G, *)$  חבורה סופית אזי  $\text{ord}(G) = |G|$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה סופית אזי  $\text{ord}(G) = \text{ord}(G)$ .

**תת-חבורה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהא  $H \subseteq G$  אזי  $(H, *|_{H \times H})$  עבורה

- סגירות לכפל: לכל  $a, b \in H$  מתקיים  $a * b \in H$ .
- סגירות להופכי: לכל  $a \in H$  מתקיים  $a^{-1} \in H$ .
- איבר יחידה: יהי  $e$  איבר היחידה של  $G$  אזי  $e \in H$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהא  $H \subseteq G$  עבורה  $(H, *|_{H \times H})$  תת-חבורה אזי  $H \leq G$ .

**למה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהא  $H \in \mathcal{P}(G) \setminus \{\emptyset\}$  אזי  $H \leq G \iff (a * b^{-1} \in H \mid a, b \in H)$  מתקיים.

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהינה  $A, B \subseteq G$  אזי  $A * B = \{a * b \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה תהא  $H \subseteq G$  ויהי  $g \in G$  אזי  $g * H = \{g * h \mid h \in H\}$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $(n\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  ויהי  $\mathbb{F}$  שדה אזי  $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}), \cdot) \leq (\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}), \cdot)$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $R_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $(R_n, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה אזי  $G \leq G$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה אזי  $\{e\} \leq G$ .

**חבורת המכפלה:** תהיינה  $(H, \otimes), (G, *)$  חבורות נגדיר  $(g, h) \cdot (g', h') = (g * g', h \otimes h')$  לכל  $g, g' \in G$  ולכל  $h, h' \in H$  אזי  $(G \times H, \cdot)$ .

**טענה:** תהיינה  $(H, \otimes), (G, *)$  חבורות אזי חבורת המכפלה הינה חבורה.

**טענה:** תהיינה  $(H, \otimes), (G, *)$  חבורות אזי  $(H, \otimes) \leq (H, G) \iff (H, G)$  אבליות.

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהיינה  $H, K \leq G$  אזי  $(H * K \leq G) \iff (HK = KH)$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהיינה  $H, K \leq G$  אזי  $(H \cup K \leq G) \iff (H \cap K \in \{H, K\})$ .

**הערה:** מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.