$(a\in\{a_1,\ldots,a_n\})\Longleftrightarrow((a=a_1)\vee\ldots\vee(a=a_n))$ מתקיים $\{a_1,\ldots,a_n\}$ מתקיים $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^\infty\Sigma^i$ אזי $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^\infty\Sigma^i$ מימון: תהא $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^\infty\Sigma^i$

טענה: תהא $S\subseteq \Sigma^*$ אזי קיימת ויחידה $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} o \Sigma^*\mid i\in I\}$ ותהא ווהא $B\subseteq \Sigma^*$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq \Sigma^*$

- $B \subseteq S \bullet$
- .F סגורה להפעלת S
- $S\subseteq A$ אזי F אזי הפעלת סגורה סגורה אוכן אוכן $B\subseteq A$ עבורה $A\subseteq \Sigma^*$

מינימלית סגורה $X_{B,F}\subseteq \Sigma^*$ איז איז $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i}\to \Sigma^*\mid i\in I\}$ ותהא ותהא $B\subseteq \Sigma^*$ מינימלית סגורה בנית: תהא $B\subseteq X_{B,F}\subseteq \Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F

 Σ אזי $F=\{f_i: \left(\Sigma^*
ight)^{n_i} o \Sigma^* \mid i \in I\}$ ותהא $B\subseteq \Sigma^*$ אזי ההא $E=\{f_i: \left(\Sigma^*
ight)^{n_i} o \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי

B אזי אוי $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} o \Sigma^* \mid i \in I\}$ ותהא ותהא $B\subseteq \Sigma^*$ אזי קבוצה תהא באינדוקציה מבנית: תהא

 $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid (B\subseteq Y)\land (F$ סענה: תהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $B\subseteq\Sigma^*$ חתהא $B\subseteq\Sigma^*$ חתהא $B\subseteq Y$ אינווריאנטה אזי A

 $(p\left(0
ight)\wedge(orall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight)\Longrightarrow p\left(n+1
ight)))\Longrightarrow(orall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight))$ אזי אזי ענה על p אזי מסקנה משפט האינדוקציה: תהא

על ידי הפעלת a_i יים ($a_i \in B$) מתקיים $a_i \in [n]$ אזי עבורה $a_i = a$ וכן לכל $a_i = a$ וכן לכל $a_i = a$ אזי אזי $a \in X_{B,F}$ אזי $a \in X_{B,F}$ חלק מ־ $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

.(aימת סדרת יצירה ל־ $(a \in X_{B,F})$ אזי אירה ל־ $a \in \Sigma^*$ יהי

 $X_{B,F} = igcup_{n=1}^\infty \left\{ a \in \Sigma^* \mid n \;$ מסקנה: $a \in \mathbb{R}$ בעלת סדרת יצירה באורך

 $.\Sigma = \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow, (,)\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ צולם תחשיב הפסוקים:

 $a\in \Sigma^*$ יהי תחשיב הפסוקים אזי יהי ביטוי:

אזי $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי הגדרה: יהיו

- $.\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)"$ •
- $.\lor (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \lor \omega_2)"$ •
- $:\Longrightarrow (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \Longrightarrow \omega_2)" \bullet$
 - $\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)" \bullet$

.WFF = $X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$ פסוק: קבוצת המוגדרות היטב/ביטוי היטב/ביטוי המוגדרות המוגדרות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי

 $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ עבורו $p \in \mathrm{WFF}$ יסודי:

(") עם "(") מתחיל עם אוי ($p \in WFF$ אזי אוי $p \in WFF$ אזי (הפסוק אטומי) ונגמר עם "

 $q_1(q_2 \notin \mathsf{WFF}$ אזי $q_1,q_2 \in \mathsf{WFF}$ מסקנה: יהיו

משפט הקריאה היחידה: יהי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה: יהי

- . פסוק אטומי lpha
- $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in WFF$ פיימים ויחידים
- $\alpha = (\beta \lor \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ •
- $\alpha = (\beta \Longrightarrow \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in WFF$ פיימים ויחידים
 - $\alpha = (\neg \beta)$ עבורו $\beta \in \mathsf{WFF}$ •

אזי $lpha \in \Sigma^*$ אזי ויהי אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי יהי תחשיב הפסוקים ויהי

```
function wffValidity (\alpha):

if length(\alpha) \leq 3 then

if \alpha \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} then return True

else return False

if (\alpha_1 \neq "(") \lor (\alpha_{\mathrm{length}}(\alpha) \neq ")") then return False

if \alpha_2 = "\neg" then return wffValidity ((\alpha_3 \dots \alpha_{\mathrm{length}}(\alpha) - 1))

parenthesisCount \leftarrow 0

for i \leftarrow [2, \dots, \mathrm{length}(\alpha) - 1] do

if \alpha_i = "(" then parenthesisCount \leftarrow parenthesisCount + 1

if \alpha_i = ")" then parenthesisCount \leftarrow parenthesisCount - 1

if parenthesisCount = 0 then

| \text{ if } \alpha_{i+1} \in \{\neg, \land, \lor, \Longrightarrow\} \text{ then } | \text{ return (wffValidity}((\alpha_2 \dots \alpha_i))) \land \text{ (wffValidity}((\alpha_{i+2} \dots \alpha_{\mathrm{length}}(\alpha) - 1)))} 

end

return False
```

. (wffValidity (α)) \iff $(\alpha \in \mathsf{WFF})$ אזי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי $\alpha \in \Sigma^*$ חחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי $\alpha \in \Sigma^*$ חחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי $\alpha \in \Sigma^*$ חחשיב הפסוקים ויהי

הערה סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

.¬ .1

.∧,∨ .2

.⇒ .3

סימון אמת: T, true.

.F, false :סימון שקר

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתיותו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

הגדרה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	$\neg q$
true	false
false	true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \lor p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

 $.TT_{\circ}$ אזי טבלת האמת של $\circ \in \{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow\}$ תהא

 $v:\{p_i\} \rightarrow \{F,T\}$ השמה: פונקציה

המוגדרת $\overline{v}: \text{WFF} \rightarrow \{F,T\}$ השמה אזי פונקציה v המוגדרת השמה לפסוק: תהא

- $.\overline{v}\left(p
 ight) =v\left(p
 ight)$ יהי p פסוק אטומי אזי •
- $.\overline{v}\left(\neg\alpha\right)=TT_{\neg}\left(\overline{v}\left(\alpha\right)\right)$ יהי lpha פסוק אזי
- $.\overline{v}\left(\beta\circ\gamma\right)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\beta\right),\overline{v}\left(\gamma\right)\right)$ יהיו אזי פעולה בינארית פעולה בינארית פעולה β,γ

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=T$ עבורה עבורה אזי איי השמה מספקת מסוק: תהא עבורה עבורה מספקת מספקת מספקת מספקת איי

 $v \models \alpha$ אזי v אזי מסופקת על ידי מחור. מימון: תהא $\alpha \in \mathsf{WFF}$ אזי השמה ותהא

 $v \not\models \alpha$ אזי אזי אזי מסופקת על ידי א מסופקת על מהא $\alpha \in \mathsf{WFF}$ השמה ותהא

המוגדרת Var : WFF $ightarrow \mathcal{P}\left(\{p_i\}
ight)$ פונקציה פסוק: פונקציה האטומיים בפסוק:

- . $\operatorname{Var}\left(p\right)=\left\{ p\right\}$ יהי p פסוק אטומי אזי •
- . $\operatorname{Var}(\neg \alpha) = \operatorname{Var}(\alpha)$ אזי פסוק מיהי •
- . $\operatorname{Var}(\beta \circ \gamma) = \operatorname{Var}(\beta) \cup \operatorname{Var}(\gamma)$ יהיו אזי פעולה פעולה פעולה פעולה β, γ יהיו •

 $\overline{v_1}\left(lpha
ight)=\overline{v_2}\left(lpha
ight)$ אזי $\forall p\in \mathrm{Var}\left(lpha
ight).v_1\left(p
ight)=v_2\left(p
ight)$ עבורו $lpha\in \mathrm{WFF}$ אזי ניתן לייצג את lpha על ידי T_lpha אזי ניתן לייצג את lpha על ידי T_lpha

```
טענה: יהיו \alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{WFF} אזי
                                                                                                                                                                 (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \bullet
                                                                                                                                                                 (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \bullet
                                                                                                                                                                                             (\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \bullet
                                                                                                                                                                                             (\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha) \bullet
                                                                                                                                                                             (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \bullet
                                                                                                                                                                             (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \bullet
                                                                                                                                                                                                          \neg (\neg \alpha) \equiv \alpha \bullet
                                                                                                                                                                               \neg (\alpha \land \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor (\neg \beta) \bullet
                                                                                                                                                                               \neg (\alpha \lor \beta) \equiv (\neg \alpha) \land (\neg \beta) \bullet
                                                                                                                                                                                     .(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor \beta \bullet
                                                                                                                            .\gamma \models \alpha מתקיים lpha \in \mathrm{WFF} למה: יהי \gamma \in \mathrm{WFF} סתירה אזי לכל
                                                               \Gamma \models \beta אזי \Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta וכן \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta עבורם \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} ויהיו \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} עבורם סענה: תהא
                                                     \Gamma \models (\neg \alpha) אאי \Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta) וכך \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta עבורם \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} איי ויהיי \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} טענה: תהא
                                                                                                                                (\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta)) אזי \alpha, \beta \in WFF טענה: יהיו
                                                                                                                               אזי פסוק אטומי אזי lpha, arphi \in \mathsf{WFF} יהיו בפסוק: יהיו אזי מומי אזי
                                                                                                                                                                               .lpha\left[arphi/p
ight]=arphi אז lpha=p אם •
                                                                                                                                           lpha\left[arphi/p
ight]=lpha אזי lpha
eq p אטומי וכן •
                                                                                                                       lpha\left[arphi/p
ight]=
egeta\left[arphi/p
ight] אזי lpha=
egeta עבורו eta\in\mathsf{WFF} אם קיים
                                            \alpha [\varphi/p]=\beta [\varphi/p]\circ\gamma אס קיימים \beta,\gamma\in WFF אס פעולה בינארית פעולה בינארית \alpha=\beta\circ\gamma אס קיימים \beta,\gamma\in WFF
                                                                                                                               lpha\left[arphi/p
ight]\in\mathrm{WFF} אזי אזי p\in\mathrm{Var}\left(lpha
ight) ויהי ויהי lpha,arphi\in\mathrm{WFF} איזי
                                                                                     lpha\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight]=arphi_{i} אזי i\in\left[n
ight] עבור lpha=p_{i}
                                                                                             lpha \left[arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight] = lpha אזי i\in [n] לכל lpha
eq p_i אטומי וכן
                                                                            lpha\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight]=
egar{eta}\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight] אם קיים eta\in \mathrm{WFF} עבורו eta\in \mathrm{WFF}
                                                                                              אזי \alpha=\beta\circ\gamma אזי אם קיימים פעולה בינארית \beta,\gamma\in \mathrm{WFF} אזי
                                               .\alpha\left[{}^{\varphi_1/p_1}\ldots{}^{\varphi_n/p_n}\right]=\beta\left[{}^{\varphi_1/p_1}\ldots{}^{\varphi_n/p_n}\right]\circ\gamma\left[{}^{\varphi_1/p_1}\ldots{}^{\varphi_n/p_n}\right] . v\left[\overline{v}(\varphi)/p_i\right](p_j)=\left\{ egin{array}{ll} v(p_j) & i\neq j \\ \overline{v}(\varphi) & i=j \end{array} \right. המשמה אזי ההשמה v השמה אומי ותהא v פטוק אטומי ותהא v השמה אזי ההשמה v היי v
                                                                      \overline{v}\left(lpha\left(arphi/p
ight)
ight)=\overline{v}\left[\overline{v}\left(arphi/p
ight]\left(lpha
ight) היהי a,arphi\in\mathsf{WFF} יהי מענה: יהיו a,arphi\in\mathsf{WFF} יהי
v\left[\overline{v}(arphi_1)/p_1,\ldots,\overline{v}(arphi_1)/p_1
ight](p_j)=v השמה אזי ההשמה v השמים ותהא v פסוקים אטומים ותהא a,arphi_1\ldots p_n יהיו a,arphi_1\ldots p_n יהיו
```

 $TT = TT_{\alpha}$ עבורו $\alpha \in \mathsf{WFF}$ קיים שלמה שלמה עבורה $K \subseteq \{\land, \lor, \lnot, \Longrightarrow\}$ עבורה עבורו $\alpha \in \mathsf{WFF}$ קיים שלמה פונקציונלית:

טענה: $\{\land, \lor, \neg, \Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

 $\alpha \in \text{WFF}$ טאוטולוגיה אזי $\alpha \in \text{WFF}$ סימון: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ סתירה: פסוק $\alpha \in \text{WFF}$

 $\alpha \equiv \beta$ שקולים אזי $\alpha, \beta \in WFF$ סימון: יהיו

. טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה עבורה עבורה אזי אזי א שלמה פונקציונלית. מערכת קשרים עבורה אזי אזי א

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=\overline{v}\left(eta
ight)$ מתקיים שקולים: פסוקים $lpha,eta\in\mathsf{WFF}$ עבורם לכל השמה ע

 $.v \models lpha$ מתקיים מביקה: קבוצה $lpha \in \Gamma$ עבורה קיימת השמה עבורה לכל $\Gamma \subseteq \Gamma$ מתקיים עבורה

 $v \models \alpha$ מתקיים $v \models \Gamma$ מתקיים עבורו לכל השמה v המניימת $v \models \alpha$ מתקיים אזי $r \in \mathsf{WFF}$ מתקיים

 $v \models \alpha$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $\alpha \in \mathsf{WFF}$ עבורו פסוק $v \models \alpha$ טאוטולוגיה: פסוק $\alpha \in \mathsf{WFF}$ עבורו לכל השמה $v \models \alpha$

 $v \models \Gamma$ אזי אוי השמה על ידי השמה קבוצה קבוצה ר קבוצה $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$

 $\Gamma \models \alpha$ אזי מ־ Γ אזי סמנטית מבע פסוק נובע אויהי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ אזי ריהי

```
מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: יהיו v השמה v יהיו p_n = p_1 \dots p_n יהיו היו \alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathsf{WFF} השמה אזי
                                                                                                             .\overline{v}\left(\alpha\left[\varphi_{1}/p_{1}\ldots\varphi_{n}/p_{n}\right]\right)=\overline{v\left[\overline{v}(\varphi_{1})/p_{1},\ldots,\overline{v}(\varphi_{1})/p_{1}\right]}\left(\alpha\right)
. טאוטולוגיה \alpha \left[ \varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n 
ight] אטומים אזי p_1 \ldots p_n יהיו יהיו יהיו \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathsf{WFF} טאוטולוגיה יהיו מסקנה:
                                                                                                     .NNF =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}} :NNF הצורה הנורמלית
                                                                                                               lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{NNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF} אזי קיים
                                                                                                                                  .Conj = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}} ימון:
                                                                                                                                    .DNF = X_{\text{Conj},\{\vee\}} :DNF הצורה הנורמלית
                                                                                                               lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{DNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF} אזי קיים
                                                                                                                                   Disj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\lor\}} :סימון
                                                                                                                                     .CNF = X_{\mathrm{Disj},\{\wedge\}} :CNF הצורה הנורמלית
                                                                                                               lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m CNF} משפט: יהי lpha\in {
m WFF} אזי קיים
                      הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.
                                                                                    N מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי מערכת נוסחאות של מערכת הוכחה:
                                                                                    A אזי אוכחה מערכת הוכחה (\Sigma, N, A, F) אקסיומת של מערכת הוכחה אזי
                                                                                  F מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי בללי היסק של מערכת הוכחה:
                                                                                               X_{A,F} אזי המשפטים: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                        \displaystyle \mathop{.}^{\vdash}_{\varsigma} \varphi אזי משפט \varphi \in Nיהי הוכחה מערכת מערכת מערכת S
                                      (\Sigma,N,A,F,\Gamma) איא \Gamma\subseteq N מערכת הוכחה מערכת הנחות: תהא (\Sigma,N,A,F) איז
                                         X_{A\cup\Gamma,F} איז היכיחות היכיחות היכיחות (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הנחות איז קבוצת היכיחות איז
                          arphi מערכת יצירה אזי סדרת ויהי arphi\in N יכיח מערכת הוכחה מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הגדרה הוכחה:
                                                                  \Gamma \vdash_{\rm c} \varphiיכיח אזי \varphi \in N הנחות ויהי הנכחה תהיינה מערכת מערכת מערכת הוכחה הוכחה \Gamma \subseteq N
                                                                                                                            טענה: תהא \varphi \in N מערכת הוכחה מערכת מערכת מענה:
                                        A \subseteq G אויי אוי A \subseteq G אויי אווי סינות: תהא A \subseteq G עבורה A \subseteq G ותהא A \subseteq G אויי איז איי עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G אוי קיימת A \subseteq G אוי עבורה A \subseteq G אוי A \subseteq G אוי עבורה A \subseteq G אוי A \subseteq G אוי A \subseteq G אוי A \subseteq G אויי A \subseteq G מערכת הוכחה ויהי A \subseteq G כלל היסק המקיים A \subseteq G אויי A \subseteq G
                                                            	ext{MP}: \frac{(lpha \Longrightarrow eta), lpha}{eta} מערכת הוכחה אזי (\Sigma, N, A, F): תהא (Ponens Modus): מלל הניתוק
                                                                                                      מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך
                                                                                                                    \Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\} אלפבית: •
                                                                                                                                   N = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\lnot, \Longrightarrow\}} :נוסחאות: •
                                                                                                                                                                          אקסיומות:
                                                                                                                                      A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))
                                                                            A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma))) -
                                                                                                            A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha)) -
                                                                                                                                                     F = \{MP\} כללי היסק:
                                                                                                                                           אזי HPC־טענה: יהיו lpha,eta נוסחאות ב
                                                                                                                                             \begin{array}{c} . \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \alpha) \ \bullet \\ . \vdash_{\mathrm{HPC}} ((\neg \alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta)) \ \bullet \end{array}
                                                                                                                                                        .\{\neg \alpha\} \vdash_{\mathsf{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet
```

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$ איי HPC משפט הדידוקציה: אותהיינה HPC משפט הדידוקציה: תהיינה ווחסאות מעל

 $\{\alpha\} \overset{\vdash}{\models} \beta$ אזי אוי HPC מסקנה: יהיו α, β נוסחאות ב־HPC באשר הוא במערכת הייה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון β הוא במערכת הערה:

 $\vdash ((\neg (\neg \alpha)) \Longrightarrow \alpha)$ אזי HPC טענה: תהא α נוסחה מעל

.Ded $(\Gamma)=\{\alpha\in N\mid \Gamma\vdash\alpha\}$ אזי איי ותהא S ותהא מערכת הוכחה סימון: תהא מערכת הוכחה

```
.\left(\Gamma \mathrel{\mathop{\vdash}\limits_{\mathsf{HPC}}} lpha 
ight) \Longrightarrow (\Gamma \mathrel{\mathop{\models}\limits_{}} lpha) אזי א HPC משפט הנאותות: תהיינה חנחות מעל
                                                                          אזי HPC אזי מעל מוחסאות ותהיינה lpha,eta,\gamma וותהיינה HPC למה: תהיינה \Gamma
                                                                                     .((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))
                                                           אזי HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה \Gamma הנחות מעל HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה
                                                                                                    ((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \land (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)
          \Gamma \not\models \alpha המקיימת S נוסחה מעל עבורה קיימת מעל קבוצת הנחות אזי \Gamma אזי אזי הוכחה מערכת תהא מערכת הנחות מעל אזי S
                   \alpha נוסחה מעל S המקיימת מענה: תהא מערכת הוכחה הנחה הנחה מעל S הנחות מעל S היחות מעל הינה עקבית)
               .(\Gamma \vdash_S (\neg \alpha) \land \Gamma \vdash_S (\neg \alpha)). טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה \Gamma הנחות מעל S אזי (\Gamma \lor_S (\neg \alpha) \Leftrightarrow (לכל \Gamma \lor_S (\neg \alpha) \Leftrightarrow (
קבוצת הנחות עקבית מעל מערכת הנחות עקבית אזי \Gamma קבוצת הנחות עקבית מערכת הנחת מערכת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה אזי \Gamma
                                                                                                                 \Gamma = \Delta מתקיים \Gamma \subset \Delta ממקיים מעל
                          .lpha\in\Gamma אזי HPC אזי אוי HPC איזי מקסימלית מעל מקסימלית מקסימלית עקבית מקסימלית עקבית הנחות עקבית מקסימלית מעל
                          (\alpha \in \Gamma) \lor (\neg \alpha \in \Gamma) אזי (HPC איזי (שענה: תהא קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC טענה: תהא
                                             אזי HPC אוני \alpha,\beta נוסחאות עקבית מעל אור אורר עקבית עקבית עקבית עקבית הנחות עקבית הנחות עקבית אורר אורר של אוי
                                                                                                         (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg \alpha \in \Gamma) \lor (\beta \in \Gamma))
                                                                           אזי \Gamma ספיקה. אזי HPC איזי מקסימלית עקבית הנחות עקבית הנחות סענה: תהא
                           \Gamma\subseteq \Delta טענה: תהא \Gamma קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית \Gamma
                                                                                         טענה: תהא \Gamma אזי HPC אזי קבוצת הנחות עקבית הנחות קבוצת הנחות טענה:
                                                                           \Gamma ספיקה) אזי (\Gamma עקבית) ספיקה הנחות מעל HPC מסקנה: תהא \Gamma קבוצת הנחות מעל
                                      .\Big(\Gamma \mathrel{\mathop{\models}} \alpha\Big) \Longleftarrow (\Gamma \mathrel{\mathop\models} \alpha) אזי אוי HPC משפט השלמות: תהיינה הנחות מעל
                                                   (\Gamma dash lpha) \Longleftrightarrow (\Gamma dash lpha) אזי HPC מסקנה: תהיינה \Gamma הנחות מעל
                                 משפט הקומפקטיות: תהא \Gamma קבוצת הנחות מעל HPC אזי אז (\Gamma ספיקה) שפני תהא \Delta ספיקה ספיקה).
                                                                            .Ass (\Gamma)=\{v\in\{p_i\}	o\{F,T\}\mid v\models\Gamma\} אזי \Gamma\subseteq WFF סימון: תהא
                                              \{p_i\} \to \{F,T\} טענה: הקבוצה \{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\} טענה: הקבוצה
                                                                    . הינה קומפקטית \{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\} הינה הטופולוגיה
                                  קבarphi_G:E	o {	t WFF} אזי אזי (v,u)\in E חח"ע ויהיו f:V	o {	t WFF} אזי אזי v גרף פשוט לא מכוון תהא
                                                                                                                         .\varphi_G((v,u)) = "f(v) \Longrightarrow f(u)"
                    . (ספיקה) \{ \varphi_G(e) \mid e \in E \} \}איני G הינו G חח"ע אזי וותהא עד שוט לא מכוון ותהא ארי וותהא G חח"ע אזי וותהא
                              . (סופי G' סופי G' \leq G סופי אזי (לכל G' \leq G סופי G' \leq G סופי אזי (לכל G' \leq G סופי יהי G' סופי יהי G'
                                .(סטענה: סופי G' סופי G' סופי G' סופי G' הינו G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי G הינו G' הינו G'
                                     K=\mathrm{Ass}\left(\Gamma
ight) המקיימת \Gamma\subseteq\mathrm{WFF} השמות גדירה: קבוצה K\subseteq\{p_i\}	o\{F,T\} המקיימת
                                                                                                                                                  טענה: Ø גדירה.
                                                                                                                               . גדירה \{p_i\} 	o \{F,T\} גדירה
                                                                                                                             . גדירה \{v\} השמה \{v\} גדירה לכל
                                                                                                . טענה: קיימת K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) שאינה גדירה
                                                                                      K_{	ext{finite}} = \left\{v \in \left\{p_i
ight\} 
ightarrow \left\{F,T
ight\} \mid \left|v^{-1}\left(\left\{T
ight\}
ight)
ight| < leph_0
ight\} דימון:
                                                                                                                                      .טענה: K_{
m finite} אינה גדירה
        K=\mathrm{Ass}\left(\Gamma
ight) סופית המקיימת סופי: קבוצה עבורה K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) סופית המקיימת אדירה באופן סופי: קבוצה אוני עבורה קיימת
```

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

(C,R,F) אזי אלפבית תהא $F\subseteq \bigcup_{n=0}^\infty \left(\Sigma^n o\Sigma
ight)$ ותהא ותהא תהא $C\subseteq \Sigma$ אזי אלפבית תהא מילון: יהי C אלפבית תהא מילון אזי C מילון אזי C מילון אזי C

משפט: תהא $K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}
ightarrow\{F,T\}
ight)$ אזי התב"ש

גזירה וכן $K^{\mathcal{C}}$ גדירה. K גזירה באופן א גדירה באופן סופי. K גדירה על ידי פסוק יחיד.

```
מילון יחסי: יהי \Sigma אלפבית אזי מילון \sigma חסר סימני פונקציה.
\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{"(",")"\}, \{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\}, \{\forall, \exists\}, \sigma\} מסדר ראשון: יהי \Sigma אלפבית ויהי לוגיקה מסדר האשון: יהי
                                                                X אזי אזי מסדר ראשון: תהא (X,P,C,A,\sigma) אוגיקה מסדר ראשון: תהא
                                                             P אזי אזי מסדר ראשון אזי (X,P,C,A,\sigma) אוגיקה מסדר ראשון אזי
                                            X קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון: תהא (X,P,C,A,\sigma) לוגיקה מסדר ראשון אזי
                                                                    A אזי אזי מסדר ראשון: תהא (X,P,C,A,\sigma) לוגיקה מסדר ראשון: תהא
                                                          \sigma אזי מסדר ראשון אזי (X,P,C,A,\sigma) אוגיקה מסדר ראשון אזי סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון
                                                                                       X_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i|i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}|i,n\in\mathbb{N}\}} שמות עצם מעל מילון: יהי \sigma מילון אזי
                             משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי \sigma מילון ויהי שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
                                                                                                                                                                                                                        .משתנה t
                                                                                                                                                                                                                .סימן קבוע t
                                                              t=f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight) עבורם t_{1}\dots t_{n} ושמות עצם f_{i,n} שמון פונקציה ullet
                                                                                                                                      אזי \alpha \in \sigma אזי משתנה ותהא \sigma מילוו יהי \sigma מילוו
                                                                                                                                                                                                \forall (\alpha, x) = \forall x \alpha •
                                                                                                                                                                                                \exists (\alpha, x) = "\exists x \alpha" \bullet
                                         \{R_{n.i}\left(t_1\dots t_n
ight)\mid (i,n\in\mathbb{N})\wedge (נוסחאות אטומיות: יהי \sigma מילון אזי ויהי t_1\dots t_n) שמות עצם
                                      X_{\{R_{n,i}(t_1\dots t_n)|(i,n\in\mathbb{N})\land( שמות עצם) איז t_1\dots t_n)\},\{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow,\forall,\exists\}} מילון אזי \sigma מילון: יהי יהי
                                 משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי \sigma מילון ותהא \alpha נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
                                                                                                                                                                                                    . נוסחה אטומית \alpha
                                                                                                                                    \alpha = (\neg \beta) שבורה (קר") • קיימת ויחידה נוסחה \beta
                                                           lpha= " (eta\circ\gamma)" עבורן lpha עבורן פעולה וכן פעולה וכן eta,\gamma וכן פעולה נוסחאות יחידות ויחידות פעולה וכן פעולה וכן פעולה וכן פעולה וויחידות פעולה וויחידות פעולה וכן פעולה וכן פעולה וויחידות פעולה פעולה וויחידות פעולה פעולה וויחידות פעולה וויחידות פעולה וויחידות פעולה פעולה וויחידות פעולה פעולה פעולה וויחידות פעולה פע
                                                                           .\alpha = "Qx\beta"עבורם עבורם וכן משתנה \alphaוכן משתנה ליימת ויחידה נוסחה \beta
                                                     כך FV : \{t \mid \sigma שם עצם במילון שt\} 	o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}
ight) כך כדיר
                                                                                                                                                      . \mathrm{FV} \left( c 
ight) = arnothing יהי c \in \sigma יהי •
                                                                                                                                                       FV(x) = \{x\} משתנה אזי x \in \sigma יהי
                                        \operatorname{FV}(f(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \operatorname{FV}(t_i) אזי פונקציה אזי f \in \sigma יהיו שמות עצם ויהי t_1 \dots t_n
                                                           כך FV : \{arphi \mid \sigma \mid \sigma נוסחה במילון arphi \} 	o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}\right) כך כדיר כגדיר
```

- - $\operatorname{FV}(
 eg arphi) = \operatorname{FV}(arphi)$ תהא arphi נוסחה אזי.

R סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי C סימני פונקציה במילון: יהי C מילון אזי C

. בעל סופי של סימנים בעל מספר אזי מילון אלפבית אזי אלפבית אזי מילון מופי: יהי אלפבית אזי מילון מישנים.

- . FV $(\varphi \circ \psi) = {\sf FV}\,(\varphi) \cup {\sf FV}\,(\psi)$ אזי אוליה בוליאנית ויהי פעולה פעולה נוסחאות ויהי פעולה φ, ψ
 - $\operatorname{FV}(Qx\varphi)=\operatorname{FV}(\varphi)\setminus\{x\}$ אזי משתנה x ויהי משתנה φ יהי משתנה φ

 $\operatorname{FV}(arphi) = arnothing$ עבורה arphi נוסחה סגורה: נוסחה עבורה

הערה סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .∀,∃ .1
 - .¬ .2
- . \wedge, \vee .3
- .⇒ .4

 $\mathcal{R}\left(r
ight)\subseteq D^n$ המקיימת $\mathcal{R}:R o\mathcal{P}\left(D^*
ight)$ תהא $\mathcal{C}:C o D$ תהא קבוצה תהא $\mathcal{D}
eq\mathcal{D}$ קבוצה תהא $\mathcal{C}:C o D$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ לכל $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ לכל $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ לכל $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ לכל $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ לכל $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ לכל $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ לכל $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ לכל $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$ המקיימת $\mathcal{T}:F o\mathcal{D}$

```
f^{M}=\mathcal{F}\left(f
ight) וכן r^{M}=\mathcal{R}\left(r
ight) וכן c^{M}=\mathcal{C}\left(c
ight) אזי \sigma אזי מבנה על \sigma מילון ויהי \sigma מילון ויהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                   v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}	o D^M אזי \sigma מילון ויהי מילון מבנה על מבנה על מילו
                                                                                                                                                                                                                                                                   השמה v יהי ותהא השמה על מבנה על מיהי מילון יהי \sigma מילון יהי מילון יהי מילון יהי מילון יהי מילון יהי מילון יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       .\overline{v}\left(c_{i}
ight)=c_{i}^{M} יהי c_{i}\in\sigma סימן קבוע אזי c_{i}\in\sigma
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      \overline{v}\left(x_{i}\right)=v\left(x_{i}\right) יהי x_{i}\in\sigma משתנה אזי משתנה x_{i}\in\sigma
                                                                                                                            .\overline{v}\left(f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight)
ight)=f^{M}\left(\overline{v}\left(t_{1}
ight)\dots\overline{v}\left(t_{n}
ight)
ight) יהיו שמות עצם ויהי f\in\sigma סימן פונקציה אזי t_{1}\dots t_{n}
\forall x \in \mathsf{FV}(t).v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right) שם עצם עבורו t שם עצם תהיינה v_1,v_2 משפט מבנה על מ
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         .\overline{v_{1}}\left( t
ight) =\overline{v_{2}}\left( t
ight) אזי
                                                                                השמה אזי נגדיר ויהי d\in D^M משתנה ויהי x_j\in\sigma השמה v השמה מבנה על מבנה d\in D^M אזי מחלון יהי מילון יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                     v\left[d/x_{j}
ight](x_{i})=\left\{egin{array}{ll} v(x_{i})&i
eq j\\ d&\mathrm{else} \end{array}
ight. ערך אמת לנוסחה: יהי \sigma מילון יהי M מבנה על \sigma ותהא אי
                                                    (\overline{v}\left(R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight))=T
ight)\Longleftrightarrow\left((\overline{v}\left(t_{1}
ight),\ldots,\overline{v}\left(t_{n}
ight))\in R^{M}
ight) יהיו שמות עצם ויהי R\in\sigma סימן יחס אזי סימן יחס אזי •
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      .\overline{v}\left(\alpha\circ\beta\right)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\alpha\right),\overline{v}\left(\beta\right)\right) אזי בינארי חיהי חיהי מוסחאות ויהי \alpha,\beta מוסחאות היינה \bullet
                                                                                                                                                                                                                                          .(\overline{v}\,(\exists x\varphi)=T)\Longleftrightarrow\left(\exists d\in D^M\left(\overline{v\left[d/x\right]}\,(\varphi)=T\right)\right) \ \text{ for all }\varphi \text{
\forall x \in \mathrm{FV}(t).v_1(x) = v_2(x) משפט התלות הסופית: יהי \sigma מילון יהי M מבנה על \sigma תהיינה v_1,v_2 השמות ותהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   .\overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi) אזי
                                                                                                                                                                            .\overline{v}\left(arphi
ight)=T מבנה על מילון \sigma תהא v השמה אזי נוסחה מבנה: יהי M מבנה מבנה נוסחה ספיקה במבנה:
                                                                                                                                                                                         M,v\models arphi אזי M מבנה על מילון \sigma תהא תהא \sigma ווחהא ספיקה ב־M מבנה על מילון יהי
                                                                                                                     M,v \models \varphi מבנה ותהא v השמה עבורם M,v \models \varphi מילון תהא v \models \sigma מבנה ותהא v השמה עבורם \sigma
.\overline{v}\left(arphi
ight)=T מתקיים מתקיים עבורה לכל \gamma מבנה: יהי M מבנה על מילון \sigma תהא v השמה אזי קבוצת נוסחאות \gamma עבורה לכל
                                                                                                                                          M,v\models\Gamma אאי א מבנה על מילון \sigma תהא \sigma השמה ותהא \sigma קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M
                                                                                                                                                                                           M,v\models arphi מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה מבנה מילון אזי נוסחה מילון אזי נוסחה ספיקה: יהי
(M,v) מתקיים כי מילון תהא T מתקיים כי מילון מוסחאות ותהא \varphi נוסחה עבורה לכל מתקיים כי \sigma מילון יהי \sigma מילון יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            \Gamma \stackrel{\tau}{\models} \varphi אזי \varphi מודל של t
                                                                                                                                                        \{arphi\} \stackrel{t}{\models} \psi וכן \{\psi\} \stackrel{t}{\models} \varphi עבורן \varphi, \psi עבורן ותהא v השמה v מילון ותהא מילון ותהא יהי \sigma מילון ותהא
                                                                             .arphi מבנה על \sigma ולכל m מבנה לוכל m מבנה לוכל m השמה מתקיים (m,v) מדוד של יהי מילון אזי נוסחה \sigma עבורה לכל
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     \stackrel{\iota}{\models} \varphi יהי \sigmaימין: יהי \sigmaיהי נוסחה נוסחה מילון ותהא יהי סימון: יהי
                                                                                                                                               M,v\models arphi מבנה: יהי M מבנה על מילון \sigma אזי נוסחה arphi עבורה לכל v השמה מתקיים מבנה:
                                                                                                                                                                                                                                                                                   M \models \varphi אזי M מבנה על מילון \sigma ותהא \phi נוסחה נכונה ב־M אזי מבנה על
                                                                                                                                                                                                                                                                       M\models arphi עבורו M עבורו אזי מבנה מילון תהא מילון תהא מילון מ
                                                                    M\models arphi מתקיים arphi מתקיים arphi מתחאות נוסחאות arphi מתקיים M מתקיים M מתקיים arphi מרחאות נוסחאות נוסחאות נוסחאות מחורה איז מילון מ
                                                                                                                                                                                                                                   M\models\Gamma אזי M מבנה על מילון \sigma ותהא \Gamma קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי מילון
                                                                                                                                                                                                                                                 M\models arphi מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה M עבורו יהי \sigma מילון מילון אזי נוסחה עבורה קיים מבנה
\overset{v}{\Gamma}\models\varphi אזי \varphi שלי מתקיים כי M מתקיים לכל עבורה לכל נוסחה עבורה לכל נוסחה עבוצת נוסחאות ותהא קבוצת נוסחאות יהי \sigmaיימון: יהי יהי קבוצת נוסחאות ותהא יהי עבורה לכל יהי
                                                                                                                                                                                                                                 .\{\varphi\} \stackrel{v}{\models} \psiוכן \{\psi\} \stackrel{v}{\models} \varphi עבורן \varphi, \psi מילון אזי מילון מילות: יהי יהי \sigmaיהי יהי יהי ישקולות:
                                                                                                                                                                    arphi נוסחה \sigma מתקיים \sigma מתקיים עבורה לכל עבורה לכל אזי נוסחה מילון אזי מילון אזי נוסחה מבנה על מבנה על מילון אזי נוסחה מילון אווי נוסחה מילון אווי נוסחה מילון אוויים מילון אווים מילון אוויים מ
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             vסימון: יהי \sigma מילון ותהא \varphi נוסחה v־תקפה אזי \sigma מילון יהי \sigma מילון יהי \sigma מילון ותהא \sigma נוסחה אזי \sigma מילון יהי \sigma מילון ותהא \sigma נוסחה אזי \sigma
```

 $\exists x \varphi$ נוסחה תקפה אזי $\exists x \varphi$ תקפה וכן φ תקפה תקפה מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x \varphi$ תקפה אזי φ תקפה.

 $(\mathcal{C}\left(C
ight),\mathcal{R}\left(R
ight),\mathcal{F}\left(F
ight))$ מבנה אזי $(D,\mathcal{C}\left(C
ight),\mathcal{R}\left(R
ight),\mathcal{F}\left(F
ight))$ מירוש של סימנים במילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי

 $. \Big(\Gamma \stackrel{t}{\models} \varphi \Big) \Longrightarrow \Big(\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi \Big)$ אזי נוסחה (וותהא ק קבוצת קבוצת קבוצת מילון מילו יהי σ יהי מילון מילון מילון מילון אזי נוסחאות וותהא יהי מילון מיל $\operatorname{FV}\left(arphi
ight)=arphi$ עבורה arphi מילון אזי נוסחה arphi $\left(\Gamma \stackrel{t}{\models} \varphi\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi\right)$ מענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת פסוקים ותהא φ נוסחה אזי $\Gamma = \Gamma$ טענה: יהי σ מילון תהא $\Gamma = \Gamma$ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי וועהא $\Gamma = \Gamma$ הינה Γ סענה: יהי σ מילון תהא Γ . ($\varphi \Longleftrightarrow \psi$)) \Longleftrightarrow (סענה: יהי σ מילון ותהיינה φ, ψ נוסחאות אזי (φ, ψ הן היינה σ מילון ותהיינה סענה: $.arphi^ee = orall x_1 orall x_2 \ldots orall x_n arphi$ אזי איז איז היי σ מילון ותהא arphi נוסחה עבורה $arphi^ee = \{x_1 \ldots x_n\}$ איזי מילון ותהא $.arphi^\exists=\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_narphi$ אזי איזי FV $(arphi)=\{x_1\ldots x_n\}$ נוסחה עבורה עבורה σ מילון ותהא $.\Gamma^{orall}=\left\{ arphi^{orall}\midarphi\in\Gamma
ight\}$ יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת נוסחאות אזי מילון ותהא

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה ויהי M מבנה אזי ($^{\forall}$ ספיק ב־ $(M \models \varphi)$). $(\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi) \iff (\Gamma^{\forall} \stackrel{v}{\models} \varphi^{\forall}) \iff (\Gamma^{\forall} \stackrel{v}{\models} \varphi^{\forall}) \iff (\Gamma^{\forall} \stackrel{v}{\models} \varphi^{\forall}) \iff (\Gamma^{\forall} \stackrel{v}{\models} \varphi^{\forall}) \iff (\Gamma^{\forall} \stackrel{v}{\models} \varphi^{\forall})$ טענה: יהי σ מילון תהא $(G:D^M \to D^N)$ מבנים מעל $(G:D^M \to D^N)$ איזומורפיזם בין מבנים: יהי $(G:D^M \to D^N)$ מבנים מעל $(G:D^M \to D^N)$ איזומורפיזם בין מבנים: יהי $(G:D^M \to D^N)$ מבנים מעל $(G:D^M \to D^N)$

- $G\left(c^{M}
 ight)=c^{N}$ מתקיים $c\in\sigma$ לכל סימן קבוע
- $G\left(f^{M}\left(a_{1}\ldots a_{n}
 ight)
 ight)=f^{N}\left(G\left(a_{1}
 ight)\ldots G\left(a_{n}
 ight)
 ight)$ מתקיים $a_{1}\ldots a_{n}\in D^{M}$ ולכל $f\in\sigma$ ולכל סימן פונקציה
- $.ig((a_1\dots a_n)\in R^Mig)\Longleftrightarrowig((G\left(a_1
 ight)\dots G\left(a_n
 ight))\in R^Nig)$ מתקיים $a_1\dots a_n\in D^M$ ולכל $R\in\sigma$ לכל סימן יחס פ Mל מ־M מילון איז מבנים איזומורפיים: יהי σ מילון איז מבנים M,N מעל מעל מילון איז מילון איז מבנים איזומורפיים: יהי

 $M\cong N$ אזי σ אזי מבנים איזומורפיים מעל M,N מבנים אזי יהי σ

 $(M\models\varphi)\Longleftrightarrow (N\models\varphi)$ מילון יהיו σ מענה: איזומורפיים מעל מבנים איזומורפיים מעל מור מיזו מבנים M,N

.= עזרת את ונסמן את ונסמן $\mathrm{Id}^M=\mathrm{Id}_M$ נגדיר ונדיר אזי לכל דו־מקומי אוי דו־מקומי אוי מילון בעל יחס שיוויון אוי לכל מבנה וויל מבנה לכל מבנה שיוויון דו־מקומי אוי לכל מבנה וויס מילון בעל יחס שיוויון אויס בעזרת

הערה: אלא אם כן נאמר אחרת מכאן והלאה כל המילונים הם חסרי שיוויון.

אזי משתנה x משתנה אזי אמות עצם ויהי הצבת המשתנה: יהיו

- $s\left[r/x
 ight]=s$ אם s סימן קבוע אזי s
 - s[r/x] = r אז s = x אם s = x
- s[r/x] = s משתנה אזי $s \neq x$ סשתנה $s \neq x$
- $s[r/x] = f(t_1[r/x]...t_n[r/x])$ אם $s = f(t_1...t_n)$ אם •

משתנה אזי x שמות עצם ויהי x משתנה אזי הצבת שם עצם בנוסחה: תהא φ נוסחה יהי

- $.arphi\left[r/x
 ight]=R\left(t_{1}\left[r/x
 ight]\ldots t_{n}\left[r/x
 ight]
 ight)$ אם $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
 ight)$ אם arphi
 - $.\varphi\left[r/x
 ight] = \neg\left(\alpha\left[r/x
 ight]
 ight)$ אז $\varphi = \neg\alpha$ שמ •
 - $.arphi\left[r/x
 ight]=lpha\left[r/x
 ight]\circeta\left[r/x
 ight]$ אם $arphi=lpha\circeta$ אם arphi
 - $\varphi[r/x] = \forall x \alpha$ אזי $\varphi = \forall x \alpha$ •
 - $\varphi\left[r/x
 ight]=\exists xlpha$ אזי $\varphi=\exists xlpha$ •
 - $.\varphi\left[r/x
 ight]=orall y\left(lpha\left[r/x
 ight]
 ight)$ אז x
 eq y באשר arphi=orall ylpha אם arphi=arphi
 - $.arphi\left[r/x
 ight]=\exists y\left(lpha\left[r/x
 ight]
 ight)$ אזי x
 eq y באשר $arphi=\exists ylpha$ שם $arphi=\exists ylpha$

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא φ נוסחה ויהי x משתנה אזי

- .r אזי שם עצם $arphi=R\left(t_{1}\dots t_{n}
 ight)$ אזי שם עצם •
- lphaאזי שם עצם r באשר אונעם אזי שם אזי arphi=
 eglpha
- etaוכן ב־lpha וכן הצבה להצבה מוכן lpha אזי שם עצם r באשר או arphi אם arphi
- x אינו מופיע או אינו חופשי ב־ φ אזי שם עצם $\sigma=\forall y$
- x אזי שם עצם אוי חופשי ב־arphi אזי אינו מופיע או אינו מופיע א arphi וכן $arphi=\exists y lpha$
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$ וכן α וכן הצבה ב־ α אזי שם עצם r באשר אזי שם עצם אזי אזי $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$ וכן $\varphi = \forall y \alpha$
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$ וכן lphaוכן הצבה בי חופשי להצבה r אזי שם עצם א אזי אזי אי $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$ וכן $\varphi = \exists y \alpha$

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f:\{$ ווסחאות $\} o \mathcal{P}\left(\{x_i\}
ight)$ כך

- $f(\varphi) = \emptyset$ אזי $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$
 - $f(\varphi) = f(\alpha)$ אז $\varphi = \neg \alpha$ אם •

- $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$ אזי $\varphi = \alpha \circ \beta$ אם
 - $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$ אזי $\varphi = \forall x \alpha$ אם φ
 - $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$ אזי $\varphi = \exists y \alpha$ אם •

עבור חדש עבור $y\in \mathrm{FV}(r)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור r שם עצם אזי (r חופשי להצבה ב־ φ (לכל $y\in \mathrm{FV}(r)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור $y\in \mathrm{FV}(r)$ ב- $(\varphi^{\lceil r/x \rceil})$.

 $v\left[\overline{v}(r)/x
ight](y)=\left\{egin{array}{ccc} v(y) & x
eq y \ \overline{v}(r) & ext{else} \end{array}
ight.$ היי s שם עצם אזי נגדיר השמה s יהי s שם עצם יהי s משתנה ויהי r שם עצם אזי נגדיר השמה

 $.\overline{v}\left(s\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(s
ight)$ איז שם עצם איז משתנה ויהי x משתנה מסקנה: יהי s שם עצם יהי

 $.\overline{v}\left(arphi\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(arphi
ight)$ אזי arphi אזי משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־arphi אזי arphi נוסחה יהי x משתנה ויהי

 $\overline{v}\left(arphi
ight)=\overline{v\left[v(x)/y
ight]}\left(arphi\left[y/x
ight]
ight)$ אזי arphi מסקנה: תהא arphi נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה בarphi

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־ φ אזי

- $(\exists x\varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi [y/x])) \bullet$
- $.(\forall x\varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi [y/x])) \bullet$

 $X_{\{arphi|}$ נוסחה חסרת כמתים יוסחה וארב בצורה בצורה בצורה בצורה בצורה וארב יוסחה וארב בצורה בצורה

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי (φ בצורת PNF) (קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן α משתנים וכן בצורת φ בצורת (קיימת נוסחה α הסרת כמתים וכן φ בצורת ($\varphi=Q_1x_1\dots Q_nx_n\alpha$

טענה: תהיינה φ,ψ נוסחאות אזי

- $.(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)) \bullet$
- $(\exists x (\varphi \lor \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \lor (\exists x \psi)) \bullet$
- $((\forall x\varphi)\lor\psi)\equiv^t(\forall x\,(\varphi\lor\psi))$ אזי $x\notin\mathrm{FV}\,(\psi)$ תהא
- $((\exists x\varphi) \land \psi) \equiv^t (\exists x (\varphi \land \psi))$ אזי $x \notin FV(\psi)$ תהא
 - $.(\neg(\forall x\varphi)) \equiv^t (\exists x (\neg\varphi)) \bullet$
 - $.(\neg(\exists x\varphi)) \equiv^t (\forall x(\neg\varphi)) \bullet$

 $.arphi\equiv^tlpha$ עבורה PNF משפט: תהא arphi נוסחה אזי קיימת נוסחה lpha בצורת

 $arphi = orall x_1 \ldots orall x_n lpha$ המקיימת האניברסלי: פסוק arphi עבורו קיימת נוסחה lpha חסרת כמתים באשר המער אוניברסלי: פסוק arphi עבורו קיימת נוסחה

 $arphi=\exists x_1\ldots\exists x_n$ המקיימת FV $(lpha)=\{x_1\ldots x_n\}$ חסרת כמתים באשר חסרת המקיימת arphi המקיימת arphi

 $(\sigma \cup \{c\}$ טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל σ ויהי סימן קבוע $\sigma \notin \sigma$ אזי ו $\sigma \in \sigma$ טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל

 $\sigma\cup\{f\}$ טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ אזי $(y_n\exists x\varphi)$ ספיק מעל ספיק מעל (σ) ישנה: תהא (σ) נוסחה מעל מילון (σ) אזי (ψ) ספיק מעל (σ) ספיק מעל (σ) ספיק מעל המילון (σ) ספיק מעל המילון (σ) ספיק מעל המילון (σ)

 $\operatorname{sk}(\varphi)$ א (ספיק) עבורו σ' עבורו משפט סקולם: קיים אלגוריתם אוניברסלי מעל מילון מילון מילון מילון σ משפט מילון אוניברסלי מעל מילון מילון המקבל נוסחה אוניברסלי מעל מילון ספיק).

 $\operatorname{sk}(arphi)$ מילון מוגדר מילון המינימלי מעליו ותהא arphi נוסחה אזי המילון מעליו מוגדר σ מילון יהי

אלגוריתם לוגיקה מסדר ראשון לתחשיב הפסוקים: יהי σ מילון תהא $\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ הותהא הפיכה ותהא הפיכה לוגיקה מסדר ראשון לתחשיב הפסוקים: יהי σ מילון עובר על φ ולכל שם עצם ב' f בו מחליפו ב' f נוסחה סגורה חסרת כמתים אזי g

טענה: יהי φ מילון תהא $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ טענה: יהי $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ מילון תהא מילון מינה אוות טענה: יהי סיינה מילון תהא

- ספיק). FOLWFF (φ) ספיק). •
- טאוטולוגיה). FOLWFF (φ) (סאוטולוגיה) •

 $v\left(p_i
ight)=(M\modelslpha_i)$ כך WFF למה: תהא $lpha_1\ldotslpha_k$ נגדיר השמה של המורכבת מהנוסחאות האטומיות $(M\modelsarphi)\Longleftrightarrow(\overline{v}\left(ext{FOLWFF}\left(arphi
ight))=T
ight)$ אזי ($M\modelsarphi
ight)$

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה M מילון אזי מבנה σ המקיים

- $a \cdot \alpha^M = a$ עבורו α עבורו שם עצם שם $a \in D^M$ לכל
 - $\alpha^M \neq \beta^M$ יהיו אזי שמות עצם שונים אזי α, β

. בן־מנייה מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ויהי ויהי M מבנה הרברנד של מסקנה: יהי מילון בן־מנייה ויהי

 $D^M = \{arphi \mid \sigma$ ם משתנים חסר ששם לכתוב לכתוב כי ניתן לכתוב כי מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב ש

 σ על M על מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד

 $v\left(x_{i}
ight)=t_{i}$ אזי השמה עבורה σ ותהא מבנה הרברנד מעל מענה: יהי M מבנה הרברנד מעל

- $.\overline{v}\left(r
 ight)=r\left[{}^{t_{1}}\!/x_{1},\ldots,{}^{t_{n}}\!/x_{n}
 ight]$ אזי $\mathrm{FV}\left(r
 ight)=\left\{x_{1}\ldots x_{n}
 ight\}$ שם עצם באשר r יהי \bullet
- $(M,v\models\varphi)\Longleftrightarrow (M\modelsarphi\left[t_{1}/x_{1},\ldots,t_{n}/x_{n}
 ight])$ אזי FV $(arphi)=\{x_{1}\ldots x_{n}\}$ נוסחה באשר
 - . תהא φ נוסחה אזי (g ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה) מור g עבורו
- . תקפה) $\varphi[s/x]$ עבורו s עבור g עבור g תקפה) עבור g עבור g עבורו g תקפה).
 - . תהא φ נוסחה אזי ($\varphi(s/x)$ ספיקה) שם עצם סגור s מתקיים כי (לכל שם ספיקה).
- $\varphi[s/x]$ מתקיים כי g מתקיים כי $\varphi(s/x)$ תקפה) פוסחה עבורה עבורה $\varphi(s/x)$ מתקיים כי $\varphi(s/x)$

(ספיק) במבנה הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ

אזי FV $(arphi)=\{x_1\dots x_n\}$ אזי בסיס: תהא arphi נוסחה חסרת כמתים באשר

.GroundInstance $(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi) = \{ \varphi \left[s_1/x_1, \dots, s_n/x_n \right] \mid GroundInstance \left(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \right) = \{ s_1 \dots s_n \}$

. GroundInstance (Γ) = $\bigcup_{\varphi \in \Gamma}$ GroundInstance (φ) אזי אוניברסליים אוניברסליים האזי קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי

 Γ טענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים חסרי כמתים אזי (Γ ספיקה) ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- . ספיקה Γ
- ספיקה במבנה הרברנד. Γ
- ספיקה. GroundInstance (Γ)
- ספיקה במבנה הרברנד. GroundInstance (Γ)

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון תהא נוחסאות לבוצת משפט מילון יהי יהי מילון משפט הקומפקטיות: יהי

- . (מ ספיקה) לכל $\Delta \subseteq \Delta$ סופית Δ ספיקה). $\Delta = \Delta \Leftrightarrow (C \cap \Delta) \iff (C \not\models \varphi) \Leftrightarrow (C \not\models \varphi).$

(x,y) משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\{E(\cdot,\cdot)\}$ המקיימת המיול ב־ $M\models \Gamma$ מיימת קבוצת נוסחאות מעל מיימת אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות מענה: יהיו עבורם $t_1 \dots t_n$ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי (π תקפה) אזי (קיימים שמות עצם סגורים φ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי (משפט: יהי σ מילון בעל קבוע תהא ... φ [t_1/x] $\vee \ldots \vee \varphi$ [t_n/x]

 $a \in D^H$ עבורו עבורו t עבורו לכל שם עצם שם עצם א קיים מעל מעל σ עבורו מעל σ עבורו לכל מבנה הנקין: יהי σ מילון אזי מבנה σ

עבורו $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$ אזי מבנה $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$ עבורו יהי מילון עם שיוויון

- $c_1^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=1$ וכן $c_0^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=0$ וכן $D^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=\mathbb{N}$

 - $.f_{+}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\left(a,b\right) = a+b \bullet \\ .f_{\times}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\left(a,b\right) = a\times b \bullet \\ .\left(\left(a,b\right) \in R_{>}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\right) \Longleftrightarrow \left(a>b\right) \bullet$

 $\mathsf{AT} = \{lpha \mid (\mathcal{M}_\mathbb{N} \models lpha) \land (\mathsf{FV}(lpha) = arnothing)\}$ אזי $\{c_0, c_1, f_+, f_ imes, R_>\}$ מסוקים נכונים אריתמטית: יהי מילון

 $M_{\mathbb{N}}$ וכן $M \models$ אינו איזומורפי ל־ $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$ וכן אינו איזומורפי ל $M \models$ אינו איזומורפי ל־

 $|D^M|>leph_0$ טענה: יהי M מודל לא סטדנרטי של הטבעיים אזי מודל

 $|M| = |D^M|$ אזי σ אזי מילון ויהי M מבנה מעל σ אזי יהי עוצמה של עוצמה של

arphi בו M משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי σ מילון ותהא arphi נוסחה מעל σ אזי (arphi ספיקה) משפט לוונהיים מבנה לכל היותר בן־מנייה ספיקה).

משפט לוונהיים־סקולם העולה: יהי σ מילון יהי M מבנה בן־מנייה ותהא φ נוסחה מעל באשר σ ספיקה ב־M מילון יהי מילון יהי M'מעוצמה φ עבורו α ספיקה ב־ M' אינסופית אינסופית אינסופית מבנה

 $(|M|=\kappa)\Longleftrightarrow (M\models\Gamma)$ המקיימת מטקנה: יהי σ מילון ותהא א עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות מטקנה: יהי מילון ותהא

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

.VALID = $\{\langle \sigma, \varphi \rangle \mid (\sigma \text{ tionn } \varphi) \land ($ תקפה $\varphi)\}$ שימון:

 $ext{.VALID} \in \mathcal{RE}$ מילון אזי σ מילון בדיקת תקפות: משפט אלגוריתם בדיקת

 $\mathsf{HALT} <_m \mathsf{VALID}$ משפט צ'רץ'־טיורינג:

.VALID $otin \mathcal{R}$ מסקנה:

בעזרת $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ את ניתן לרצף אזי האם ניתן צבועה צבועה וכן 1 וכן כל צלע מאורך $R_1 \dots R_n$ יהיו יהיו הריבועים מוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

עבורה $f:\mathbb{N}^2 o [n]$ אזי $R:[n]^2 imes \{ ext{left, right, above, below}\} o \{ ext{yes, no}\}$ ותהא $n\in\mathbb{N}_+$ יהי יהיצוף: יהי

- $.R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n-1\\m\end{smallmatrix}\right),\mathrm{left}\right)=\mathrm{yes}$ מתקיים $n\in\mathbb{N}_{+}$ ולכל ולכל הכל לכל לכל
 - $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n+1\\m\end{smallmatrix}\right),\mathrm{right}
 ight)=\mathrm{yes}$ מתקיים $m,n\in\mathbb{N}$ לכל
- $R\left(f\left(egin{array}{c}n\\m+1\end{array}
 ight),f\left(egin{array}{c}n\\m+1\end{array}
 ight),$ above) = yes מתקיים מתקיים $n\in\mathbb{N}_{+}$ ולכל
 - $R\left(f\left(rac{n}{m}
 ight),f\left(rac{n}{m-1}
 ight), ext{below}
 ight)= ext{yes}$ מתקיים $n\in\mathbb{N}_{+}$ לכל

.TILING = $\{(n,R,f)\mid R$ סימון: $\{f\}$ פתרון לבעיית הריצוף עבור

.VALID \leq_m TILING :משפט

.TILING $otin \mathcal{R}$:מסקנה

יחס קונגרואנציה: יהי σ מילון אזי $E \in \sigma$ סימן יחס דו־מקומי המקיים

- $\forall x (E(x,x))$ רפלקסיבי:
- $\forall x \forall y (E(x,y) \Longrightarrow E(y,x))$ סימטרי: •
- $\forall x \forall y \forall z ((E(x,y) \land E(y,z)) \Longrightarrow E(x,z)) :$ טרנזיטיבי:
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
 ight)
 ight) \Longrightarrow E\left(f\left(x_1 \ldots x_n
 ight), f\left(y_1 \ldots y_n
 ight)
 ight)
 ight)$ סימן פונקציה מתקיים $f \in \sigma$ לכל
- $. \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
 ight)
 ight) \Longrightarrow \left(R\left(x_1 \ldots x_n
 ight) \Longleftrightarrow R\left(y_1 \ldots y_n
 ight)
 ight)
 ight)$ לכל σ

הערה: במקום את המילון עם שיוויון σ ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן σ_E את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

מעל σ_E מעל מחלקות קונגרואנציה: יהי מילון σ עם שיוויון ויהי מבנה על אזי מבנה M_E מעל מחלקות מילון מחלקות מילון מחלקות מילון יהי מילון מחלקות מילון מחלקות קונגרואנציה:

- $.D^{M'}=D^M/E \bullet$
- $.f^{M'}\left([a_1]_E\,,\ldots,[a_n]_E
 ight)=\left[f^M\,(a_1\ldots a_n)
 ight]_E$ מתקיים של פונקציה לכל סימן פונקציה סימן פונקציה יש
 - $R^{M'}\left([a_1]_E,\ldots,[a_n]_E
 ight) \Longleftrightarrow R^{M}\left(a_1\ldots a_n
 ight)$ מתקיים $R\in\sigma$ לכל סימן יחס $R\in\sigma$

arphi סימני היחס ביarphi וכן $R_1 \dots R_m$ סימני הפונקציות ביס קונגרואנציה: תהא arphi נוסחה מעל מילון עם שיוויון arphi באשר באשר $f_1 \dots f_n$ סימני היחס ביarphi מימני היחס פונגרואנציה: תהא arphi נוסחה מעל מילון עם שיוויון arphi באזי $(\varphi_E = arphi \left[E/=
ight] \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n \left(f_i^{-i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n \left(f_i^{-i} \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n \left(F_i^{-i} \right) \wedge \left(f_i^{-i} \right) \wedge \left(f_i^{-i} \right) \right) \rangle$ אזי $(\varphi_E = arphi \left[E/=
ight] \wedge (\varphi_E = a$

 σ' משפט: ϕ מעל מילון ϕ מעל מילון עם שיוויון σ ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון ϕ באשר ϕ מעל מילון באשר ϕ מעל מילון שנורו (ϕ ספיק).

.(ספיקה) ספיקה) אזי (Γ_E) ספיקה) משפט: תהא Γ ספיקה מעל מעל מעל מעל מעל משפט: תהא

 Δ סופית G סופית (לכל G ספיקה) משפט הקומפקטיות: יהי G מילון עם שיוויון תהא קבוצת נוחסאות ותהא קבוצת נוסחה אזי (G ספיקה).

הגדרה: יהי $\sigma = \{R(\cdot,\cdot)\}$ מילון עם שיוויון אזי

- $.\xi_1 = \forall x \left(\neg \left(R \left(x, x \right) \right) \right) \bullet$
- $.\xi_2 = \forall x \forall y \forall z \left(\left(R\left(x, y \right) \land R\left(y, z \right) \right) \Longrightarrow R\left(x, z \right) \right) \bullet$
 - $.\xi_3 = \forall x \forall y ((x \neq y) \Longrightarrow (R(x,y) \lor R(y,x))) \bullet$
 - $.\xi_4 = (\forall x \exists y (R(x,y))) \land (\forall x \exists y (R(y,x))) \bullet$
- $.\xi_{5} = \forall x \forall y ((R(x,y)) \Longrightarrow (\exists z (R(x,z) \land (R(z,y))))) \bullet$
 - $\xi = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \bullet$

 $M\cong N$ אאי אאי א מבנים המספקים את א מילון עם שיוויון ויהיו או $\sigma=\{R\left(\cdot,\cdot
ight)\}$ משפט קנטור: יהי

. Gen : $\frac{\alpha}{\forall x\alpha}$ אזי נוסחה מילון ותהא σ יהי
י σ יהי כלל ג'ן: יהי כלל

מערכת ההוכחה של הילברט (HC) מילון אזי

- $.\Sigma=\sigma$:אלפבית
- $N=X_{\{t\mid$ שם עצם $t\},\{\lnot,\Longrightarrow,orall \}}$ נוסחאות:
 - אקסיומות:
 - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$ -

```
A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))
```

$$A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$

$$A_4 = ((orall x lpha) \Longrightarrow lpha \, [t/x])$$
 יהי שם עצם חופשי להצבה במקום x ב־מ

$$A_5 = ((\forall x \, (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow (\forall x \beta)))$$
 אזי $x \notin \mathrm{FV}(\alpha)$ יהי

 $.F = \{ MP, Gen \}$ כללי היסק:

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

 $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \Longrightarrow \beta)$ על משתנה חופשי ב־ α אזי אזי ($\alpha \Longrightarrow \beta$) על משתנה חופשי ב- α אזי ריכוח אזי ($\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \vdash_{\mathrm{HC}} \beta$ וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α, β נוחסאות מעל משפט הדיכוטומיה:

 $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} \beta$ על משתנה חופשי ב- α אזי אי α בורה לכל Gen לא הופעל כלל לא הופעל כלל σ מעל σ מילונים באשר σ מילונים באשר σ אזי קבוצת נוסחאות σ שלמה: יהיו σ , מילונים באשר σ מאזי קבוצת נוסחאות ס"שלמה: $(\varphi \in \Gamma) \vee (\neg \varphi \in \Gamma)$

 $.
egarphi\left[c/x
ight]\in\Gamma$ מתקיים שקיים סימן קבוע קבוע מתקיים שקיים

 $\Gamma\subseteq \Delta$ המקיימת בית מעל σ עקבית עקבית היים מילון קיים מילון מיים מילון אזי קיים מילון עקבית מילון אזי קיים מילון $\sigma\subseteq \Sigma$ $\Gamma \cup \{ \neg \varphi \ [c/x] \}$ עקבית תהא γ עוסחה באשר $\gamma \neq \sigma$ פסוק וכן $\gamma \neq \sigma$ ויהי $\gamma \neq \sigma$ סימן קבוע אזי עוסחה באשר ייס מילון תהא $\gamma \neq \sigma$ $\sigma \cup \{c\}$ עקבית מעל

 $\Gamma\subseteq \Delta$ משפט הנקין: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\sigma\subseteq \Sigma$ וקיימת של עקבית אזי עקבית את תכונת הנקין עבורה σ עבורה את תכונת המקיימת את תכונת הנקין עבורה Σ עקבית ביים מילון עקבית איז קיים מילון $\sigma\subset\Sigma$ וקיימת מעל σ

> עבורו מעל σ עקבית ההרברנד מילון יהי הנקין את את שלמה המקיימת שלמה עקבית מילון ההא Γ מילון יהי σ יהי יהי יהי טענה: נוסחה אזי $t_1 \dots t_n$ ולכל שמות עצם ואל לכל סימן לכל לכל ($(t_1 \dots t_n) \in R^M$) לכל $(R(t_1 \dots t_n) \in \Gamma)$ $(\varphi \in \Gamma) \iff (M \models \varphi)$

 $M\models\Gamma$ מסקנה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין אזי קיים מבנה M עבורו M עבורו G משפט השלמות: תהיינה G הנחות מעל HC ותהא G נוסחה מעל HC ותהא G הנחות מעל G הנחות מעל G הנחות מעל G הנחות מעל G אזי G מבנה: יהי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G אזי מבנה: יהי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G אזי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G אזי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G אזי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G אזי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G אזי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G אזי G אזי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G אזי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G אזי G מילון G אזי G אזי G אזי G מילון G אזי G מילון G אזי G אזי G מילון G אזי G מילון G אזי G מילון G אזי G אזי G מילון G אזי G מילון G אזי G מילון G אזי G אזי G מילון G אזי G מילון G אזי G מילון G אזי G אזי G מבנה מעל מילון G אזי G אזי G מילון G מילון G אזי G מילון G

.Th $(\mathcal{M}_{\mathbb{N}})=$ AT מסקנה:

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת מילון יהי σ

- .Th $(M)={
 m Th}\,(N)$ מתקיים Γ מתספקים את M,N המספקים
 - $(\Gamma \vdash \varphi) \lor (\Gamma \vdash (\neg \varphi))$ מתקיים ($(\neg \varphi) \lor (\neg \varphi)$).

 ψ מערכת הפסוק פסוק עבורה קיים פסוק מסדר המקיים מערכת הוכחה בלוגיקה מערכת הוכחה בלוגיקה מערכת הוכחה של מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון

 $(\vdash \varphi) \lor (\vdash (\lnot \varphi))$ מערכת הוכחה שלמה: מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון S עבורה לכל פסוק מערכת הוכחה מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון

 φ נוסחה

אקסיומות אריתמטיקת פיאנו: יהי $\{c_0, \mathrm{succ}, *, +, <\}$ מילון עם שיוויון אזי

- $\forall y (\operatorname{succ}(y) \neq c_0) \bullet$
- $\forall x \forall y ((\operatorname{succ}(x) = \operatorname{succ}(y)) \Longrightarrow (x = y)) \bullet$
- $.\forall y_1\ldots\forall y_n\left(\left(\varphi\left(c_0,y_1\ldots y_n\right)\wedge\left(\forall x\left(\varphi\left(x,y_1\ldots y_n\right)\right)\right)\right)\Rightarrow\left(\forall x\varphi\left(x,x,y_1\ldots y_n\right)\right)\right)$ תהא φ נוסחה אזי φ נוסחה אזי φ (succ (x)
 - $\forall x (x + c_0 = x) \bullet$
 - $\forall x \forall y (x + \operatorname{succ}(y) = \operatorname{succ}(x + y)) \bullet$
 - $\forall x (x * c_0 = c_0) \bullet$
 - $\forall x \forall y (x * \operatorname{succ}(y) = x + (x * y)) \bullet$

 $\forall x \forall y ((x < y) \iff (\exists z ((z \neq c_0) \land (x + z = y)))) \bullet$

.PA = אקסיומות אריתמטיקת מיאנו עם שיוויון עס פיאנו $\{c_0, \mathrm{succ}, *, +, <\}$ יהי יהי

.PA $\subseteq A$ עבורה אריתמטית: מערכת מסדר בלוגיקה מסדר הוכחה מערכת מערכת מערכת מערכת מערכת מערכת מערכת מערכת הוכחה אריתמטית:

. משפט אי השלמות של גדל: תהא מערכת הוכחה עקבית אפקטיבית ואריתמטית בלוגיקה מסדר ראשון אזי אינה שלמה. משפט אי השלמות של גדל: תהא בארכת הוכחה עקבית אפקטיבית ואריתמטית בלוגיקה מסדר השון אזי