משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימת $\text{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\text{Vol}_n\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}_n\left(A_i\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)$.

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $k\in\mathbb{N}$ קיימות $X_1\dots X_k,Y_1\dots Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ וקיימות $\varphi_1\dots\varphi_k$ איזומטריות המקיימות $X=\biguplus_{i=1}^{k}X_i$ וכן $Y=\biguplus_{i=1}^{k}Y_i$ וכן $\forall j\in[k].Y_j=\varphi_j\left(X_j\right)$.

סימון: תהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חופפות בחלקים אזי $X\equiv Y$.

משפט פרדוקס בנך־טרסקי: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1,2\right\}$ ותהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\text{int}\left(X\right)\neq\varnothing$ וכן $\text{int}\left(Y\right)\neq\varnothing$ אזי $X\equiv Y$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1,2\right\}$ אזי לא קיימת $\text{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(A\uplus B\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)+\text{Vol}_n\left(B\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)$.

משפט בנך: יהי $n\in\left\{1,2\right\}$ אזי קיימת $\text{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(A\uplus B\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)+\text{Vol}_n\left(B\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)$.

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהיינה $A,B\in\mathcal{A}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{A}$.

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

σ־אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$ σ־אלגברה אזי $\mathcal{A}$ אלגברה.

σ־אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהיינה $\left\{\mathcal{A}_\alpha\right\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ σ־אלגבראות אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ σ־אלגברה.

σ־אלגברה נוצרת: תהא X קבוצה תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ ותהיינה $\left\{\mathcal{A}_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל X המכילות את A אזי $\sigma\left(A\right)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $\sigma\left(A\right)$ הינה ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את A.

σ־אלגברה בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathcal{B}\left(X\right)=\sigma\left(\left\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}\left(X\right)\mid \text{פתוחה } \mathcal{O}\right\}\right)$.

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על X.
- $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r>0\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_+\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$.
- תהא $Y\subseteq X$ צפופה אזי $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_+\right)\wedge\left(a\in Y\right)\right\}\right)$.

קבוצה G_δ: $X\subseteq A$ עבורה קיימות $\left\{\mathcal{O}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ פתוחות המקיימות $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

קבוצה F_δ: $X \supseteq A$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סגורות המקיימות $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

מסקנה: תהא A קבוצה G_δ ותהא B קבוצה F_δ אזי $A,B\in\mathcal{B}(X)$.

טענה: הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על $\mathbb{R}^n$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{Q}\right\}\right)$.

משפט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $C(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid f \text{ רציפה ב־} x\}$ אזי

- $C(f)\in G_\delta$.
- תהא $X\in G_\delta$ אזי קיימת f עבורה $C(f)=X$.

קבוצה דלילה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ המקיימת $\operatorname{int}\left(\overline{A}\right)=\varnothing$.

קבוצה מקטגוריה ראשונה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ דלילות עבורן $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$.

קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ שאינה מקטגוריה ראשונה.

קבוצה שיורית: יהי X מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $A^{\mathcal{C}}$.

למה: יהי X מרחב מטרי אזי

- תהא $A\subseteq X$ דלילה ותהא $B\subseteq A$ אזי B דלילה.
- תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq X$ דלילות אזי $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ דלילה.
- תהא $A\subseteq X$ דלילה אזי $\overline{A}$ דלילה.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא $A\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $\operatorname{int}(A)=\varnothing$.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות σ־אידיאל.

מסקנה: $\mathbb{Q}\notin G_\delta$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי קיימת $F\subseteq\mathbb{R}$ מקטגוריה ראשונה וקיימת $N\subseteq\mathbb{R}$ זניחה עבורה $A=F\uplus N$.

משפט בנך: במרחב המטרי $C([0,1])$ עם נורמת מקסימום הקבוצה $\{f\in C([0,1])\mid \exists x\in(0,1).f\in\mathcal{D}(x)\}$ היא מקטגוריה ראשונה.

הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבוצה בעלת תכונת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ עבורה קיימת $G\subseteq X$ פתוחה וקיימת $Q\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A=G\triangle Q$.

משפט: תהא $A\subseteq X$ אזי (ל־A יש את תכונת בייר)$\iff$(קיימת $F\subseteq X$ סגורה וקיימת $P\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A=F\triangle P$).

מסקנה: תהא $A\subseteq X$ בעלת תכונת בייר אזי $A^{\mathcal{C}}$ בעלת תכונת בייר.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\{A\subseteq X\mid A \text{ בעלת תכונת בייר}\}=\sigma\left(\{A\subseteq X\mid (A \text{ פתוחה})\vee(A \text{ מקטגוריה ראשונה})\}\right)$.

משפט: תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ נסמן $\mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha+1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_\alpha\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_\alpha\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\mid A_n\in\mathcal{F}_\alpha\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_\alpha$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא X קבוצה עבורה $|X|=\aleph$ אזי $|\sigma(X)|=\aleph$.

מרחב מדיד: תהא X קבוצה ותהא $\Sigma\subseteq\mathcal{P}(X)$ σ־אלגברה אזי (X,Σ).

פונקציית מידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\mu:\Sigma\to[0,\infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing)=0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)$.

מרחב מידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא μ פונקציית מידה אזי (X,Σ,μ).

מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X)<\infty$.

מידה σ־סופית: פונקציית מידה μ עבורה קיימים $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ המקיימים $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$ וכן $\forall i\in\mathbb{N}_+.\mu(B_i)<\infty$.

מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X)=1$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי

- מונוטוניות: יהיו $A,B\in\Sigma$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.
- σ־תת־אדיטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.
- רציפות מלעיל: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.
- רציפות מלרע: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ וכן $\mu(A_1)<\infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

מידת בורל: תהא X קבוצה אזי מידה μ על $(X,\mathcal{B}(X))$.

קבוצה ממידה אפס/זניחה: $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu(E)=0$.

סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{N}=\{E\in\Sigma\mid\mu(E)=0\}$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זניחות אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ זניחה.

כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי ψ פרדיקט עבורו קיימת $E\in\mathcal{N}$ המקיים כי ψ מתקיים לכל $X\backslash E$ אזי נאמר כי "ψ נכונה μ כמעט בכל מקום".

מידה שלמה: פונקציית מידה μ עבורה לכל $E\in\mathcal{N}$ ולכל $F\subseteq E$ מתקיים $F\in\mathcal{N}$.

השלמה של σ־אלגברה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}=\{E\cup F\mid(E\in\Sigma)\wedge(\exists N\in\mathcal{N}.F\subseteq N)\}$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}$ σ־אלגברה.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי קיימת ויחידה מידה שלמה ν על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\nu_{\restriction\Sigma}=\mu$.

השלמה של מידה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי המידה השלמה $\overline{\mu}$ על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\overline{\mu}_{\restriction\Sigma}=\mu$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\left(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu}\right)$ מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{D}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{D}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $B\backslash A\in\mathcal{D}$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{D}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{D}$.

מערכת π: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A_1\ldots A_n\in\Pi$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\Pi$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ מחלקות דינקין אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$ מחלקת דינקין.

מחלקת דינקין נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות דינקין מעל X המכילות את A אזי $d(A)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $d(A)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

משפט הלמה של דינקין: תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π אזי $\sigma(\Pi)=d(\Pi)$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma(\Pi)$ ותהיינה μ,ν מידות סופיות על Σ עבורן $\mu(X)=\nu(X)$ וכן $\mu_{\restriction\Pi}=\nu_{\restriction\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma(\Pi)$ תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Pi$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ וכן $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=X$ ותהיינה μ,ν מידות על Σ עבורן $\forall n\in\mathbb{N}_+.\mu(A_i)=\nu(A_i)<\infty$ וכן $\mu_{\restriction\Pi}=\nu_{\restriction\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

חוג למחצה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $\varnothing\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $C_1\ldots C_n\in\mathcal{E}$ עבורם $A\backslash B=\biguplus_{i=1}^{n}C_i$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ חוג למחצה ויהיו $A_1\ldots A_n\in\mathcal{E}$ אזי

- יהי $P\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $B_1\ldots B_m\in\mathcal{E}$ עבורם $P\backslash\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}B_i$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in[n])\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in\mathbb{N}_+)\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{\infty}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.

מידה אלמנטרית: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ חוג למחצה אזי $\mu:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing)=0$.
- אדיטיביות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ עבורם $A\uplus B\in\mathcal{E}$ אזי $\mu(A\uplus B)=\mu(A)+\mu(B)$.

- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu\left(A\right)\le\mu\left(B\right)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\left\{ A_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_{i}\right)$.

מידה חיצונית: יהי $X\neq\varnothing$ אזי $\mu^{*}:\mathcal{P}\left(X\right)\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת
- $\mu^{*}\left(\varnothing\right)=0$.
- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu^{*}\left(A\right)\le\mu^{*}\left(B\right)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\left\{ A_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_{i}\right)$.

המידה החיצונית הנוצרת על ידי ρ: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\rho\left(\varnothing\right)=0$ נגדיר $\rho^{*}:\mathcal{P}\left(X\right)\to\left[0,\infty\right]$ כך $\rho^{*}\left(A\right)=\inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(E_{i}\right)\mid\left(\left\{ E_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}\right)\wedge\left(A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}\right)\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\rho\left(\varnothing\right)=0$ אזי ρ^{*} מידה חיצונית.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $m_{\upharpoonright_{\mathcal{M}}}^{*}=m$.

קבוצה λ: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי $E\in\mathcal{A}$ עבורה לכל $F\in\mathcal{A}$ מתקיים $\lambda\left(E\cap F\right)+\lambda\left(E^{\mathcal{C}}\cap F\right)=\lambda\left(E\cap F\right)+\lambda\left(F\backslash E\right)=\lambda\left(F\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי $\Gamma_{0}=\left\{ E\in\mathcal{A}\mid\lambda\text{ קבוצה }E\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי
- Γ_{0} אלגברה.
- λ אדיטיבית על Γ_{0}.
- תהיינה $E_{1}\ldots E_{n}\in\Gamma_{0}$ ויהי $F\in\mathcal{A}$ אזי $\lambda\left(\biguplus_{i=1}^{n}\left(E_{k}\cap F\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(E_{n}\cap F\right)$.

קבוצה מדידה ביחס למידה חיצונית: תהא μ^{*} מידה חיצונית על X אזי $A\subseteq X$ עבורה לכל $E\subseteq X$ מתקיים $\mu^{*}\left(E\right)=\mu^{*}\left(E\cap A\right)+\mu^{*}\left(E\backslash A\right)$.

סימון: תהא μ^{*} מידה חיצונית על X אזי $\Sigma_{\mu^{*}}=\left\{ A\subseteq X\mid\mu^{*}\text{ מדידה }A\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mathcal{M}\subseteq\Sigma_{m^{*}}$.

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא μ^{*} מידה חיצונית על X אזי
- $\Sigma_{\mu^{*}}$ σ־אלגברה.
- $\mu_{\upharpoonright_{\Sigma_{\mu^{*}}}}^{*}$ מידה שלמה.

המשכת קרתיאודורי: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי m^{*} מידה מעל $\Sigma_{m^{*}}$.

משפט: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא $\left(X,\Sigma',\mu\right)$ המשכת קרתיאודורי נוספת של $\left(\mathcal{M},m\right)$ אזי
- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu\left(A\right)\le m^{*}\left(A\right)$.
- נניח כי $m^{*}\left(X\right)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^{*}\left(A\right)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^{*}\left(A\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

משפט קרתיאודורי: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא μ^{*} מידה חיצונית עבורה לכל $A,B\subseteq X$ באשר $d\left(A,B\right)>0$ מתקיים $\mu^{*}\left(A\cup B\right)=\mu^{*}\left(A\right)+\mu^{*}\left(B\right)$ אזי $\mathcal{B}\left(X\right)\subseteq\Sigma_{\mu^{*}}$.

קבוצה רגולרית: קבוצה $A\in\Sigma$ עבורה $\mu\left(A\right)=\sup\left\{ \mu\left(K\right)\mid\left(K\subseteq A\right)\wedge\left(\text{קומפקטית }K\right)\right\}$.

מידה רגולרית: מידה μ עבורה כל $A\in\Sigma$ הינה רגולרית.

משפט אולם: יהי X מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא μ מידת בורל עבורה $\mu\left(X\right)<\infty$ אזי μ רגולרית.

מידת הנפח האלמנטרית: מידה אלמנטרית m מעל $\left\{ \prod_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)\mid a_{1},b_{1}\ldots a_{n},b_{n}\in\mathbb{R}\right\}$ עבורה $m\left(\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_{i}-a_{i}\right)$.

σ־אלגברה לבג: $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\sigma\left(\left\{ A\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\left(\text{פתוחה }A\right)\vee\left(\text{זניחה על פי מידת הנפח האלמנטרית }A\right)\right\} \right)$.

מסקנה: $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right)\subseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$.

טענה: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\Sigma_{m^{*}}$.

מידת לבג: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי המשכת קרתיאודור $\lambda=m^{*}$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\to\left[0,\infty\right]$ מידה אלמנטרית עבורה $\nu\left(\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_{i}-a_{i}\right)$ אזי ν הינה מידת הנפח האלמנטרית.

טענה: תהא λ מידת לבג אזי

- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ אזי $\lambda\left(E\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda\left(E\cap\left[-n,n\right]^{d}\right)$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $E\subseteq\mathcal{O}$ פתוחה עבורה $\lambda\left(\mathcal{O}\backslash E\right)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ סגורה עבורה $\lambda\left(E\backslash F\right)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ עבורה $\mu\left(E\right)<\infty$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ קומפקטית עבורה $\lambda\left(E\backslash F\right)<\varepsilon$.
- תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ אזי $(E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right))\Longleftrightarrow$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\lambda\left(A\right)=\lambda\left(B\right)$).

טענה: תהא μ מידת לבג ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ התב"ש

- $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$.
- קיימת $G\in G_{\delta}$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=G\backslash E$.
- קיימת $F\in F_{\sigma}$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=F\cup E$.

מסקנה: תהא λ מידת לבג אזי $\left(\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right),\lambda\right)$ השלמה של $\left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right),m\right)$.

משפט: תהא λ מידת לבג תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^{d}$ פתוחה תהא $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{d}$ ליפשיץ ותהא $A\subseteq\mathcal{O}$ אזי

- נניח כי $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ אזי $f\left(A\right)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$.
- נניח כי $\lambda\left(A\right)=0$ אזי $\lambda\left(f\left(A\right)\right)=0$.

משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\lambda\left(A\right)=\lambda\left(A+x\right)$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\to\left[0,\infty\right]$ מידה אינווריאנטית להזזות וכן לכל $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ חבומה מתקיים $\nu\left(E\right)<\infty$ אזי קיים $\kappa\in\left[0,\infty\right)$ עבורו $\lambda=\kappa\nu$.

משפט: תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ ותהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ אזי $\lambda\left(T\left(E\right)\right)=\left|\det\left(T\right)\right|\lambda\left(E\right)$.

קבוצה פשוטה: $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ עבורה קיימים $a_{1},b_{1}\ldots a_{n},b_{n}\in\mathbb{R}$ המקיימים $A=\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)$.

הגדרה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה ותהא λ מידת לבג אזי

- מידת ז'ורדן פנימית: $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\sup\left\{ \lambda\left(A\right)\mid\left(\text{פשוטה }A\right)\wedge\left(A\subseteq E\right)\right\}$.
- מידת ז'ורדן חיצונית: $\lambda_{J}^{*}\left(E\right)=\inf\left\{ \lambda\left(A\right)\mid\left(\text{פשוטה }A\right)\wedge\left(A\supseteq E\right)\right\}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה עבורה $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\lambda_{J}^{*}\left(E\right)$ אזי $\lambda_{J}\left(E\right)=\lambda_{J}^{*}\left(E\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה אזי $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\lambda\left(\mathrm{int}\left(E\right)\right)$ וכן $\lambda_{J}^{*}\left(E\right)=\lambda\left(\overline{E}\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה ותהא λ מידת לבג אזי

- E מדידה ז'ורדן.
- לכל $\varepsilon>0$ אזי קיימות A,B פשוטות עבורן $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\lambda\left(B\backslash A\right)<\varepsilon$.
- $\lambda_{J}^{*}\left(\partial E\right)=0$.
- $\lambda^{*}\left(\partial E\right)=0$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>1$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Z}^{d}\backslash\left\{ 0\right\}$.

משפט מינקובסקי: יהי $V\subseteq\mathbb{R}^{d}$ גוף קמור סימטרי סביב 0 עבורו $\lambda\left(V\right)>2^{d}$ אזי $V\cap\left(\mathbb{Z}^{d}\backslash\left\{ 0\right\}\right)\neq\varnothing$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)\in\left(0,\infty\right)$ ותהא $\theta\in\left(0,1\right)$ אזי קיימת קוביה $Q\subseteq\mathbb{R}^{d}$ עבורה $\lambda\left(E\cap Q\right)>\theta\cdot\lambda\left(Q\right)$.

משפט שטיינהאוס: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>0$ אזי $0\in\mathrm{int}\left(E-E\right)$.

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>0$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Q}\backslash\left\{ 0\right\}$.

למה: תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^{d}$ פתוחה אזי קיימים $\left\{ B_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ כדורים וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורם $\mathcal{O}=\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_{i}\right)\cup E$.

פונקציית התפלגות: $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ מונוטונית עולה ורציפה מימין.

טענה: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ אזי $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $F\left(x\right)=\mu\left(\left(-\infty,x\right]\right)$ הינה פונקציית התפלגות.

קדם־מידה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה אזי $\mu:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת

- $\mu\left(\varnothing\right)=0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\left\{ B_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_{i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B_{i}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $m_{\restriction_{\mathcal{A}}}^{*}=m$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $\mathcal{A}\subseteq\Sigma_{m^{*}}$.

המשכת קרתיאודורי: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי m^{*} מידה מעל $\Sigma_{m^{*}}$.

משפט: תהא $\mathcal{A}$אלגברה תהא m קדם־מידה ותהא $\left(X,\Sigma',\mu\right)$ המשכת קרתיאודורי נוספת של $\left(\mathcal{A},m\right)$ אזי

- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu\left(A\right)\le m^{*}\left(A\right)$.
- נניח כי $m^{*}\left(X\right)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^{*}\left(A\right)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^{*}\left(A\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu\left(\left[a,b\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$ מידה אלמנטרית מעל החוג למחצה $\left\{ \left[a,b\right)\mid a\le b\right\}$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_{i}\right)-F\left(a_{i}\right)\right)$ קדם־מידה מעל האלגברה $\left\{ \biguplus_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\mid\forall i\in\left[n\right].a_{i}\le b_{i}\right\}$.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי קיימת ויחידה מידת בורל μ_{F} עבורה $\mu_{F}\left(\left[a,b\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

טענה: תהיינה $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות התפלגות אזי $\left(\mu_{F}=\mu_{G}\right)\iff\left(\exists c\in\mathbb{R}.F-G=c\right)$.

מידה סופית מקומית: מידת בורל μ מעל $\mathbb{R}$ עבורה $\forall a,b\in\mathbb{R}.\mu\left(\left[a,b\right]\right)<\infty$.

מסקנה: תהא μ מידת בורל סופית מקומית על $\mathbb{R}$ אזי קיימת פונקציית התפלגות $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mu=\mu_{F}$.

מידת לבג־סטילטייס: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\overline{\mu_{F}}$.

סימון: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות נסמן $\mu_{F}=\overline{\mu_{F}}$.

מסקנה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$ אזי $\mu_{F}\left(E\right)=\inf\left\{ \sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_{i}\right)-F\left(a_{i}\right)\right)\mid E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\right\}$.

למה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$ אזי $\mu_{F}\left(E\right)=\inf\left\{ \sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_{i}\right)-F\left(a_{i}\right)\right)\mid E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)\right\}$.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$ אזי $\mu_{F}\left(E\right)=\sup\left\{ \mu_{F}\left(K\right)\mid\left(K\subseteq E\right)\wedge\left(\text{קומפקטית }K\right)\right\}$.

מסקנה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי μ_{F} רגולרית.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$.
- קיימת $G\in G_{\delta}$ וכן $N\in\mathcal{N}$ עבורן $E=G\backslash N$.
- קיימת $F\in F_{\sigma}$ וכן $N\in\mathcal{N}$ עבורן $E=F\uplus N$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(E\in\Sigma_{\mu_{F}}\right)\iff$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\mu_{F}\left(A\right)=\mu_{F}\left(B\right)$).

טענה העיקרון הראשון של ליטלווד: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות תהא $E\in\Sigma_{\mu_{F}}$ עבורה $\mu_{F}\left(E\right)<\infty$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימים $a_{1},b_{1}\ldots a_{n},b_{n}\in\mathbb{R}$ עבורם $\mu_{F}\left(E\triangle\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)\right)\right)<\varepsilon$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C}=\left[0,1\right]\backslash\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^{n}-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$

טענה: תהא λ מידת לבג אזי $\mathcal{C}\in\mathcal{N}$.

טענה: $\mathcal{C}=\left\{ \sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_{i}}{3^{i}}\mid x\in\mathbb{N}^{\left\{ 0,2\right\} }\right\}$.

קבוצה מושלמת: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ בלתי קשירה לחלוטין אשר לא מכילה נקודות מבודדות.

טענה:

- $\left|\mathcal{C}\right|=\aleph$.
- $\mathcal{C}$ קומפקטית.
- $\mathcal{C}$ מושלמת.

קבוצת קנטור מוכללת: תהיינה $\left\{ \delta_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\left(0,1\right)\right)$ נגדיר $C_{0}=\left[0,1\right]$ וכן את C_{n} להיות C_{n-1} לאחר שהוצאנו ממרכזו של כל קטע I ב־C_{n-1} קטע באורך $\delta_{n}\cdot\lambda\left(I\right)$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}C_{i}$.

טענה: קבוצת קנטור הינה קבוצת קנטור מוכללת באשר $\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\delta_{n}=\frac{1}{3}$.

טענה: תהיינה $\left\{ \delta_{n}\right\} _{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\left(0,1\right)\right)$ אזי (קבוצת קנטור המוכללת זניחה על פי מידת לבג)$\iff$($\sum_{i=1}^{\infty}\delta_{i}=\infty$).

הגדרה: נגדיר $\varphi^{\star}:\mathcal{C}\to\left[0,1\right]$ כך שאם $x\in\mathcal{C}$ בעל הצגה $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2a_{i}}{3^{i}}$ עבור $a_{i}\in\left\{ 0,1\right\}$ אזי $\varphi^{\star}\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_{i}}{3^{i}}$.

פונקציית קנטור: נגדיר $\varphi:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ כך $\varphi\left(x\right)=\sup\left\{ \varphi^{\star}\left(t\right)\mid\left(t\in\mathcal{C}\right)\wedge\left(t\le x\right)\right\}$.

טענה: תהא $\varphi:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ פונקציית קנטור אזי

- φ עולה.
- φ רציפה.
- $\varphi\left(\mathcal{C}\right)=\left[0,1\right]$.
- קיימת $E\subseteq\mathcal{C}$ עבורה $\varphi\left(E\right)\notin\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$.

קוטר קבוצה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ אזי $\text{diam}\left(A\right)=\sup\left\{ d\left(x,y\right)\mid x,y\in A\right\}$.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $\delta>0$ ויהי $E\subseteq X$ אזי
$\mathcal{H}_{s,\delta}(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{diam}(A_i)^s\mid(E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\wedge(\mathrm{diam}(A_i)<\delta)\right\}$.

מידת האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(E)=\lim_{\delta\downarrow0}\mathcal{H}_{s,\delta}(E)$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $\delta>0$ אזי

- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f(\delta)=\mathcal{H}_{s,\delta}(E)$ יורדת.
- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:[0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f(s)=\mathcal{H}_{s,\delta}(E)$ יורדת.
- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f(s)=\mathcal{H}_s(E)$ יורדת.
- $\mathcal{H}_s(\varnothing)=0$.
- $\mathcal{H}_s,\mathcal{H}_{s,\delta}$ מידות חיצוניות.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ יהי $\delta>0$ ותהיינה $A,B\subseteq X$ עבורן $d(A,B)>\delta$ אזי
$\mathcal{H}_{s,\delta}(A\cup B)=\mathcal{H}_{s,\delta}(A)+\mathcal{H}_{s,\delta}(B)$.

מסקנה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ותהיינה $A,B\subseteq X$ עבורן $d(A,B)>0$ אזי $\mathcal{H}_s(A\cup B)=\mathcal{H}_s(A)+\mathcal{H}_s(B)$.

מסקנה: יהי $s\ge0$ ותהא $E\in\mathcal{B}(X)$ אזי E מדידה $\mathcal{H}_s$.

מסקנה: תהא $f:X\to Y$ ליפשיץ L ותהא $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E))\le L^s\cdot\mathcal{H}_s(E)$.

מסקנה: תהא $f:X\to X$ איזומטריה ותהא $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E))=\mathcal{H}_s(E)$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ותהא $E\subseteq X$ אזי

- אם $\mathcal{H}_s(E)<\infty$ אזי לכל $t>s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E)=0$.
- אם $\mathcal{H}_s(E)>0$ אזי לכל $t<s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E)=\infty$.

מסקנה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $s>n$ אזי $\mathcal{H}_s(E)=0$.

מימד האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $E\subseteq X$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(E)=\inf\{s\ge0\mid\mathcal{H}_s(E)=0\}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n)=n$.

משפט: $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})=\log_3(2)$.

משפט: תהא λ מידת לבג מעל $\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{H}_n=\frac{2^n}{\lambda(\{|x|\le1\})}\cdot\lambda$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $0<\mathcal{H}_n([0,1]^n)<\infty$.

העתקה מדידה: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)$ מרחבים מדידים אזי $T:X\to Y$ המקיימת $T^{-1}(\Sigma_Y)\subseteq\Sigma_X$.

סימון: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)$ מרחבים מדידים ותהא $T:X\to Y$ העתקה מדידה אזי $T:(X,\Sigma_X)\to(Y,\Sigma_Y)$.

טענה: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y),(Z,\Sigma_Z)$ מרחבים מדידים תהא $T:X\to Y$ העתקה (Σ_X,Σ_Y)-מדידה ותהא $S:Y\to Z$ העתקה (Σ_Y,Σ_Z)-מדידה אזי $S\circ T$ העתקה (Σ_X,Σ_Z)-מדידה.

טענה: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)$ מרחבים מדידים תהא $T:X\to Y$ ותהא $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(Y)$ עבורה $\Sigma_Y=\sigma(\mathcal{E})$ וכן $T^{-1}(\mathcal{E})\subseteq\Sigma_X$ אזי T העתקה (Σ_X,Σ_Y)-מדידה.

טענה: יהיו X,Y מרחבים מטריים ותהא $T\in C(X,Y)$ אזי T העתקה $(\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(Y))$-מדידה.

הגדרה: $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=[-\infty,\infty]$.

הגדרה: נגדיר $0\cdot(\pm\infty)=0$ והפעולות $\infty-\infty,\frac{\infty}{\infty}$ אינן מוגדרות.

הגדרה: נגדיר $A(x)=\lim_{t\to x}\arctan(t)$ וכן $\rho(x,y)=|A(x)-A(y)|$.

טענה: $(\overline{\mathbb{R}},\rho)$ מרחב מטרי שלם.

טענה: תהא $A\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ אזי $(A\in\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))\Longleftrightarrow$(קיימת $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ וכן $S\in\mathcal{P}(\{\pm\infty\})$ עבורן $A=B\cup S$).

טענה: $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathbb{R}\cap\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי

- העתקה $f:X\to\mathbb{R}$ $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-מדידה.
- העתקה $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $(\Sigma,\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-מדידה.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ התב"ש

- f מדידה בורל.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f\ge a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f\ge a\}\in\Sigma$.

- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f>a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f>a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f\le a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f\le a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f<a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f<a\}\in\Sigma$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f\in C(X,\mathbb{R})$ רציפה אזי f מדידה בורל.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ אזי (f מדידה בורל)$\iff$($f_{\restriction_{f^{-1}(\mathbb{R})}}$ מדידה בורל וכן $f^{-1}(\pm\infty)\in\Sigma$).

משפט: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\frac{1}{f},f\cdot g,f+g,f^2$ מדידות.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\{f<g\},\{f\le g\},\{f=g\}\in\Sigma$.

משפט: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות אזי $\sup\{f_n\},\inf\{f_n\},\limsup\{f_n\},\liminf\{f_n\}$ מדידות.

מסקנה: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ עבורה $f_n\to f$ אזי f מדידה.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\min\{f,g\},\max\{f,g\},|f|$ מדידות.

פונקציה פשוטה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\ldots E_n\in\Sigma$ וכן $a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

פונקציה סטנדרטית: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\ldots E_n\in\Sigma$ עבורם $\biguplus_{i=1}^n E_i=X$ וקיימים $a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

הצגה סטנדרטית של פונקציה פשוטה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ פשוטה אזי $\varphi=\sum_{i=1}^n a_i\mathbb{1}_{E_i}$ באשר $\biguplus_{i=1}^n E_i=X$.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ פשוטה אזי קיימת הצגה סטנדרטית.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ אזי (φ פשוטה)$\iff$(φ מדידה וכן $\varphi(X)$ סופית).

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$.

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית תהא $A\subseteq X$ עבורה f חסומה ותהיינה $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$ אזי $\varphi_n\rightrightarrows f$ על A.

מסקנה: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות עבורן $\varphi_n\to f$ וכן $|\varphi_n|\uparrow|f|$.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה ותהא $g:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f=g$ כמעט בכל מקום אזי g מדידה.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהיינה $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f_n\to f$ כמעט בכל מקום אזי f מדידה.

טענה: תהא μ מידה ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mu}$־מדידה אזי קיימת $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ μ־מדידה וכן $f=g$ $\overline{\mu}$־כ.ב.מ.

מחלקת בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Borel}(X)=\{f:X\to\mathbb{R}\mid f\text{ מדידה בורל}\}$.

סימון: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}_0(X)=C(X)$ וכן $\text{Baire}_{i+1}(X)=\{\lim_{n\to\infty}f_n\mid\{f_n\}\subseteq\text{Baire}_i(X)\}$.

מחלקת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}(X)=\bigcup_{i=0}^\infty\text{Baire}_i(X)$.

למה: תהא $\varphi\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ ותהיינה $f,g\in\text{Baire}(X)$ אזי $\varphi(f,g)\in\text{Baire}(X)$.

למה: תהא $F\subseteq X$ סגורה אזי קיימות $\{f_n\}\subseteq C(X,\mathbb{R})$ עבורן $f_n\to\mathbb{1}_F$.

מחלקה מונוטונית: יהי X מרחב מטרי אזי $R\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\subseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^\infty E_i\in R$.
- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\supseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcap_{i=1}^\infty E_i\in R$.

מחלקה מונוטונית נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות המונוטוניות מעל X המכילות את A אזי $\mathcal{M}(\mathcal{A})=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{R}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\mathcal{M}(A)$ הינה המחלקה המונוטונית הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}(X)=\text{Borel}(X)$.

משפט לוזין/טענה העיקרון השני של ליטלווד: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ תהא $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימת $K\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R}\backslash K)<\varepsilon$ וכן $f\in C(K)$.

הגדרה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $L^0(X,\Sigma)=\left\{f:X\to\overline{\mathbb{R}}\mid f\text{ מדידה}\right\}$.

התכנסות במידה: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\mu(\{x\in X\mid|f_n(x)-f(x)|>0\})\to0$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

התכנסות כמעט בכל מקום: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f \in L^0(X,\Sigma)$ עבורה $\mu(X\backslash\{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}) = 0$ אזי $f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$.

סימון: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f \in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ אזי $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ וכן $f_n \xrightarrow{a.s.} f$.

משפט לבג: תהא μ מידה סופית יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f \in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f$ אזי $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

למה בורל קנטלי: יהיו $\{E_n\} \subseteq \Sigma$ מדידות עבורן $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X,\Sigma)$ עבורן לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f_n > \varepsilon|\}) < \infty$ אזי

- $f_n f_n \xrightarrow{a.e.} f0$.
- תהא $\delta > 0$ אזי קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \delta$ וכן $f_n \rightrightarrows 0$ על $X\backslash E$.

משפט ריס: תהיינה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ אזי קיימת תת"ס עבורה $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהיינה $f,g \in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu} f$ וכן $f_n \xrightarrow{\mu} g$ אזי $f = g$ כמעט בכל מקום.

משפט אגורוב/טענה העיקרון השלישי של ליטלווד: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \varepsilon$ וכן $f_n \rightrightarrows f$ על $X\backslash E$.

מסקנה לוזין: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי קיימת $N \subseteq X$ עבורה $\mu(N) = 0$ וקיימות $\{A_k\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורן $X = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ וכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n \rightrightarrows f$ על A_k.

למה פרשה: יהי (X,ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X ותהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ אזי קיימות $\{f_n\} \subseteq C(X)$ עבורן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

משפט לוזין: יהי (X,ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X תהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R}\backslash K) < \varepsilon$ וכן $f \in C(K)$.

סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{S}(\Sigma) = \{\varphi \in X \to \mathbb{R} \mid \text{פונקציה פשוטה } \varphi\}$.

סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{S}^+(\Sigma) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\Sigma) \mid \varphi \geq 0\}$.

למה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהיינה $f = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{M} y_i \mathbb{1}_{B_i}$ הצגות סטנדרטיות אזי $\sum_{i=1}^{N} x_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{M} y_i \mu(B_i)$.

אינטגרל: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהא $f = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}_{A_i}$ הצגה סטנדרטית אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu(A_i)$.

אינטגרל: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f,g \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ תהא $A \in \Sigma$ ויהי $\lambda \geq 0$ אזי

- $\int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A)$.
- הומוגניות חיובית: $\int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: $\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$.
- מונוטוניות: נניח כי $f \leq g$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ אזי $\psi : \Sigma \to \mathbb{R}$ המוגדרת $\psi(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$ הינה מידה מעל Σ.

סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $L^0(X,\Sigma) = \left\{f \in X \to \overline{\mathbb{R}} \mid \text{מדידה-} \left(\Sigma, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right) \ f\right\}$.

סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $L^0_+(X,\Sigma) = \left\{f \in L^0(X,\Sigma) \mid f \geq 0\right\}$.

למה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+(\Sigma)) \wedge (\varphi \leq f)\right\}$.

אינטגרל: תהא $f \in L^0_+(X,\Sigma)$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+(\Sigma)) \wedge (\varphi \leq f)\right\}$.

אינטגרל: תהא $f \in L^0_+(X,\Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L^0_+(X,\Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ ותהא $g \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ באשר $g \leq f$ אזי $\int_X g \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

משפט התכנסות מונוטונית: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L^0_+(X,\Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא $f \in L^0_+(X,\Sigma)$ ותהא $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{S}^+(\Sigma)$ עבורה $\varphi_n \uparrow f$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f,g \in L^0_+(X,\Sigma)$ תהא $A \in \Sigma$ ויהי $\lambda \geq 0$ אזי

- $\int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A)$.
- הומוגניות חיובית: $\int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: $\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$.
- מונוטוניות: נניח כי $f \leq g$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא $\{f_n\} \subseteq L^0_+(X,\Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f \in L^0_+(X,\Sigma)$ אזי $\left(\int_X f \mathrm{d}\mu = 0\right) \Longleftrightarrow \left(f = 0 \text{ כמעט בכל מקום}\right)$.

טענה התכנסות מונוטונית: תהיינה $f,\{f_n\}\subseteq L_+^0\left(X,\Sigma\right)$ עבורן $f_n\uparrow f$ כמעט בכל מקום אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

משפט הלמה של פטו: תהא $\{f_n\}\subseteq L_+^0\left(X,\Sigma\right)$ אזי $\int_X\left(\liminf_{n\to\infty}f_n\right)\mathrm{d}\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהיינה $f,\{f_n\}\subseteq L_+^0\left(X,\Sigma\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.