משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה
- $\mathrm{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\mathrm{Vol}_n\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Vol}_n\left(A_i\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathrm{Vol}_n\left(A\right)$.

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $k\in\mathbb{N}$ קיימות $X_1\ldots X_k,Y_1\ldots Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ וקיימות $\varphi_1\ldots\varphi_k$ איזומטריות המקיימות $X=\biguplus_{i=1}^{k}X_i$ וכן $Y=\biguplus_{i=1}^{k}Y_i$ וכן $\forall j\in[k].Y_j=\varphi_j\left(X_j\right)$.

סימון: תהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חופפות בחלקים אזי $X\equiv Y$.

משפט פרדוקס בנך־טרסקי: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1,2\right\}$ ותהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\mathrm{int}\left(X\right)\neq\varnothing$ וכן $\mathrm{int}\left(Y\right)\neq\varnothing$ אזי $X\equiv Y$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1,2\right\}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה
- $\mathrm{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n\left(A\uplus B\right)=\mathrm{Vol}_n\left(A\right)+\mathrm{Vol}_n\left(B\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathrm{Vol}_n\left(A\right)$.

משפט בנך: יהי $n\in\left\{1,2\right\}$ אזי קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה
- $\mathrm{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n\left(A\uplus B\right)=\mathrm{Vol}_n\left(A\right)+\mathrm{Vol}_n\left(B\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathrm{Vol}_n\left(A\right)$.

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת
- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהיינה $A,B\in\mathcal{A}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{A}$.

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת
- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

σ־אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת
- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$ σ־אלגברה אזי $\mathcal{A}$ אלגברה.

σ־אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת
- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהיינה $\left\{\mathcal{A}_\alpha\right\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ σ־אלגבראות אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ σ־אלגברה.

σ־אלגברה נוצרת: תהא X קבוצה תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ ותהיינה $\left\{\mathcal{A}_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל X המכילות את A אזי $\sigma\left(A\right)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $\sigma\left(A\right)$ הינה ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את A.

σ־אלגברה בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathcal{B}\left(X\right)=\sigma\left(\left\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}\left(X\right)\mid\text{פתוחה }\mathcal{O}\right\}\right)$.

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות
- σ־אלגברה בורל על X.
- $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r>0\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_+\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$.
- תהא $Y\subseteq X$ צפופה אזי $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_+\right)\wedge\left(a\in Y\right)\right\}\right)$.

קבוצה G_δ: $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\left\{\mathcal{O}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ פתוחות המקיימות $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

קבוצה F_δ: $A \subseteq X$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סגורות המקיימות $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

מסקנה: תהא A קבוצה G_δ ותהא B קבוצה F_δ אזי $A,B\in\mathcal{B}(X)$.

טענה: הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על $\mathbb{R}^n$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i) \mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i) \mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{Q}\right\}\right)$.

משפט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $C(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid \text{רציפה ב־} x \ f\}$ אזי

- $C(f)\in G_\delta$.
- תהא $X\in G_\delta$ אזי קיימת f עבורה $C(f)=X$.

קבוצה דלילה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ המקיימת $\operatorname{int}\left(\overline{A}\right)=\varnothing$.

קבוצה מקטגוריה ראשונה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ דלילות עבורן $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$.

קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ שאינה מקטגוריה ראשונה.

קבוצה שיורית: יהי X מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $A^{\mathcal{C}}$.

למה: יהי X מרחב מטרי אזי

- תהא $A\subseteq X$ דלילה ותהא $B\subseteq A$ אזי B דלילה.
- תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq X$ דלילות אזי $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ דלילה.
- תהא $A\subseteq X$ דלילה אזי $\overline{A}$ דלילה.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא $A\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $\operatorname{int}(A)=\varnothing$.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות σ־אידיאל.

מסקנה: $\mathbb{Q}\notin G_\delta$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי קיימת $F\subseteq\mathbb{R}$ מקטגוריה ראשונה וקיימת $N\subseteq\mathbb{R}$ זניחה עבורה $A=F\uplus N$.

משפט בנך: במרחב המטרי $C([0,1])$ עם נורמת מקסימום הקבוצה $\{f\in C([0,1]) \mid \exists x\in(0,1).f\in\mathcal{D}(x)\}$ היא מקטגוריה ראשונה.

הערה: ”רוב“ הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבוצה בעלת תכונת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ עבורה קיימת $G\subseteq X$ פתוחה וקיימת $Q\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A=G\triangle Q$.

משפט: תהא $A\subseteq X$ אזי (ל־A יש את תכונת בייר)$\iff$(קיימת $F\subseteq X$ סגורה וקיימת $P\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A=F\triangle P$).

מסקנה: תהא $A\subseteq X$ בעלת תכונת בייר אזי $A^{\mathcal{C}}$ בעלת תכונת בייר.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\{A\subseteq X \mid \text{בעלת תכונת בייר } A\}=\sigma\left(\{A\subseteq X \mid (\text{פתוחה } A)\vee(\text{מקטגוריה ראשונה } A)\}\right)$.

משפט: תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ נסמן $\mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha+1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_\alpha\cup\left\{A^{\mathcal{C}} \mid A\in\mathcal{F}_\alpha\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n \mid A_n\in\mathcal{F}_\alpha\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_\alpha$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\mathcal{F}_{\omega_1}$ כאשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא X קבוצה עבורה $|X|=\aleph$ אזי $|\sigma(X)|=\aleph$.

מרחב מדיד: תהא X קבוצה ותהא $\Sigma\subseteq\mathcal{P}(X)$ σ־אלגברה אזי (X,Σ).

פונקציית מידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\mu:\Sigma\to[0,\infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing)=0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)$.

מרחב מידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא μ פונקציית מידה אזי (X,Σ,μ).

מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X)<\infty$.

מידה σ־סופית: פונקציית מידה μ עבורה קיימים $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ המקיימים $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$ וכן $\forall i\in\mathbb{N}_+.\mu(B_i)<\infty$.

מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X)=1$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי

- מונוטוניות: יהיו $A,B\in\Sigma$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.
- σ־תת־אדיטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.
- רציפות מלעיל: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.
- רציפות מלרע: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ וכן $\mu(A_1)<\infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

מידת בורל: תהא X קבוצה אזי מידה μ על $(X,\mathcal{B}(X))$.

קבוצה ממידה אפס/זניחה: $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu(E)=0$.

סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{N}=\{E\in\Sigma\mid\mu(E)=0\}$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זניחות אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ זניחה.

כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי ψ פרידיקט עבורו קיימת $E\in\mathcal{N}$ המקיים כי ψ מתקיים לכל $X\backslash E$ אזי נאמר כי "ψ נכונה μ כמעט בכל מקום".

מידה שלמה: פונקציית מידה μ עבורה לכל $E\in\mathcal{N}$ ולכל $F\subseteq E$ מתקיים $F\in\mathcal{N}$.

השלמה של σ־אלגברה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}=\{E\cup F\mid(E\in\Sigma)\wedge(\exists N\in\mathcal{N}.F\subseteq N)\}$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}$ σ־אלגברה.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי קיימת ויחידה מידה שלמה ν על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\mu=\nu_{\restriction\Sigma}$.

השלמה של מידה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי המידה השלמה $\overline{\mu}$ על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\mu=\overline{\mu}_{\restriction\Sigma}$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\left(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu}\right)$ מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{D}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{D}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $B\backslash A\in\mathcal{D}$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{D}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{D}$.

מערכת π: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A_1\ldots A_n\in\Pi$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\Pi$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ מחלקות דינקין אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$ מחלקת דינקין.

מחלקת דינקין נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות דינקין מעל X המכילות את A אזי $d(A)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $d(A)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

משפט הלמה של דינקין: תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π אזי $\sigma(\Pi)=d(\Pi)$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma(\Pi)$ ותהיינה μ,ν מידות סופיות על Σ עבורן $\mu(X)=\nu(X)$ וכן $\mu_{\restriction\Pi}=\nu_{\restriction\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma(\Pi)$ תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Pi$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ וכן $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=X$ ותהיינה μ,ν מידות על Σ עבורן $\forall n\in\mathbb{N}_+.\mu(A_i)=\nu(A_i)<\infty$ וכן $\mu_{\restriction\Pi}=\nu_{\restriction\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

חוג למחצה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $\varnothing\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $C_1\ldots C_n\in\mathcal{E}$ עבורם $A\backslash B=\biguplus_{i=1}^{n}C_i$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ חוג למחצה ויהיו $A_1\ldots A_n\in\mathcal{E}$ אזי

- יהי $P\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $B_1\ldots B_m\in\mathcal{E}$ עבורם $P\backslash\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}B_i$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in[n])\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in\mathbb{N}_+)\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{\infty}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.

מידה אלמנטרית: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ חוג למחצה אזי $\mu:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing)=0$.
- אדיטיביות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ עבורם $A\uplus B\in\mathcal{E}$ אזי $\mu(A\uplus B)=\mu(A)+\mu(B)$.

- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu\left(A\right)\le\mu\left(B\right)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עולה ורציפה משמאל אזי $\mu_F\left([a,b)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$ מידה אלמנטרית מעל החוג למחצה $\left\{[a,b)\mid a\le b\right\}$.

מידה חיצונית: יהי $X\neq\varnothing$ אזי $\mu^*:\mathcal{P}\left(X\right)\to[0,\infty]$ המקיימת

- $\mu^*\left(\varnothing\right)=0$.
- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu^*\left(A\right)\le\mu^*\left(B\right)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$.

המידה החיצונית הנוצרת על ידי ρ: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ עבורה $\rho\left(\varnothing\right)=0$ נגדיר $\rho^*:\mathcal{P}\left(X\right)\to[0,\infty]$ כך $\rho^*\left(A\right)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(E_i\right)\mid\left(\left\{E_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}\right)\wedge\left(A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ עבורה $\rho\left(\varnothing\right)=0$ אזי ρ^* מידה חיצונית.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $m^*_{\restriction_{\mathcal{M}}}=m$.

קבוצה λ: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי $E\in\mathcal{A}$ עבורה לכל $F\in\mathcal{A}$ מתקיים $\lambda\left(E\cap F\right)+\lambda\left(E^{\mathcal{C}}\cap F\right)=\lambda\left(E\cap F\right)+\lambda\left(F\backslash E\right)=\lambda\left(F\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי $\Gamma_0=\left\{E\in\mathcal{A}\mid \text{קבוצה } \lambda\ E\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי

- Γ_0 אלגברה.
- λ אדיטיבית על Γ_0.
- תהיינה $E_1\ldots E_n\in\Gamma_0$ ויהי $F\in\mathcal{A}$ אזי $\lambda\left(\biguplus_{i=1}^{n}\left(E_k\cap F\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(E_n\cap F\right)$.

קבוצה מדידה ביחס למידה חיצונית: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $A\subseteq X$ עבורה לכל $E\subseteq X$ מתקיים $\mu^*\left(E\right)=\mu^*\left(E\cap A\right)+\mu^*\left(E\backslash A\right)$.

סימון: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $\Sigma_{\mu^*}=\left\{A\subseteq X\mid \text{מדידה } \mu^*\ A\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mathcal{M}\subseteq\Sigma_{m^*}$.

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי

- Σ_{μ^*} σ־אלגברה.
- $\mu^*_{\restriction_{\Sigma_{\mu^*}}}$ מידה שלמה.

המשכת קרתיאודורי: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mu=m^*$ מידה מעל Σ_{m^*}.

משפט: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא $\left(X,\Sigma',\mu'\right)$ המשכת קרתיאודורי נוספת של $\left(\mathcal{M},m\right)$ אזי

- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu'\left(A\right)\le\mu\left(A\right)$.
- נניח כי $\mu\left(X\right)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu'\left(A\right)=\mu\left(A\right)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu'\left(A\right)=\mu\left(A\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

משפט קרתיאודורי: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא μ^* מידה חיצונית עבורה לכל $A,B\subseteq X$ באשר $d\left(A,B\right)>0$ מתקיים $\mu^*\left(A\cup B\right)=\mu^*\left(A\right)+\mu^*\left(B\right)$ אזי $\mathcal{B}\left(X\right)\subseteq\Sigma_{\mu^*}$.

קבוצה רגולרית: קבוצה $A\in\Sigma$ עבורה $\mu\left(A\right)=\sup\left\{\mu\left(K\right)\mid\left(K\subseteq A\right)\wedge\left(\text{קומפקטית } K\right)\right\}$.

מידה רגולרית: מידה μ עבורה כל $A\in\Sigma$ הינה רגולרית.

משפט אולם: יהי X מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא μ מידת בורל עבורה $\mu\left(X\right)<\infty$ אזי μ רגולרית.

מידת הנפח האלמנטרית: מידה אלמנטרית m מעל $\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(a_i,b_i\right)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}\right\}$ עבורה $m\left(\prod_{i=1}^{n}\left(a_i,b_i\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)$.

σ־אלגברה לבג: $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)=\sigma\left(\left\{A\subseteq\mathbb{R}^n\mid\left(\text{פתוחה } A\right)\vee\left(\text{זניחה על פי מידת הנפח האלמנטרית } A\right)\right\}\right)$.

מסקנה: $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\subseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

טענה: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)=\Sigma_{m^*}$.

מידת לבג: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי המשכת קרתיאודור $\lambda=m^*$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ מידה אלמנטרית עבורה $\nu\left(\prod_{i=1}^{n}\left(a_i,b_i\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)$ אזי ν הינה מידת הנפח האלמנטרית.

טענה: תהא λ מידת לבג אזי

- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ אזי $\lambda\left(E\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda\left(E\cap\left[-n,n\right]^{d}\right)$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $E\subseteq\mathcal{O}$ פתוחה עבורה $\lambda\left(\mathcal{O}\backslash E\right)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ סגורה עבורה $\lambda\left(E\backslash F\right)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ עבורה $\mu\left(E\right)<\infty$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ קומפקטית עבורה $\lambda\left(E\backslash F\right)<\varepsilon$.
- תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ אזי $(E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right))\Longleftrightarrow$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\lambda\left(A\right)=\lambda\left(B\right)$).

טענה: תהא μ מידת לבג ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ התב"ש

- $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$.
- קיימת $G\in G_{\delta}$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=G\backslash E$.
- קיימת $F\in F_{\sigma}$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=F\cup E$.

מסקנה: תהא λ מידת לבג אזי $\left(\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right),\lambda\right)$ השלמה של $\left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right),m\right)$.

משפט: תהא λ מידת לבג תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^{d}$ פתוחה תהא $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{d}$ ליפשיץ ותהא $A\subseteq\mathcal{O}$ אזי

- נניח כי $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ אזי $f\left(A\right)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$.
- נניח כי $\lambda\left(A\right)=0$ אזי $\lambda\left(f\left(A\right)\right)=0$.

משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\lambda\left(A\right)=\lambda\left(A+x\right)$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\to\left[0,\infty\right]$ מידה אינווריאנטית להזזות וכן לכל $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ חבומה מתקיים $\nu\left(E\right)<\infty$ אזי קיים $\kappa\in\left[0,\infty\right)$ עבורו $\lambda=\kappa\nu$.

משפט: תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ ותהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ אזי $\lambda\left(T\left(E\right)\right)=\left|\det\left(T\right)\right|\lambda\left(E\right)$.

קבוצה פשוטה: $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ עבורה קיימים $a_{1},b_{1}\ldots a_{n},b_{n}\in\mathbb{R}$ המקיימים $A=\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)$.

הגדרה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה ותהא λ מידת לבג אזי

- מידת ז'ורדן פנימית: $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\sup\left\{ \lambda\left(A\right)\mid\left(\text{פשוטה } A\right)\wedge\left(A\subseteq E\right)\right\}$.
- מידת ז'ורדן חיצונית: $\lambda_{J}^{*}\left(E\right)=\inf\left\{ \lambda\left(A\right)\mid\left(\text{פשוטה } A\right)\wedge\left(A\supseteq E\right)\right\}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה עבורה $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\lambda_{J}^{*}\left(E\right)$ אזי $\lambda_{J}\left(E\right)=\lambda_{J}^{*}\left(E\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה אזי $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\lambda\left(\mathrm{int}\left(E\right)\right)$ וכן $\lambda_{J}^{*}\left(E\right)=\lambda\left(\overline{E}\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה ותהא λ מידת לבג אזי

- E מדידה ז'ורדן.
- לכל $\varepsilon>0$ אזי קיימות A,B פשוטות עבורן $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\lambda\left(B\backslash A\right)<\varepsilon$.
- $\lambda_{J}^{*}\left(\partial E\right)=0$.
- $\lambda^{*}\left(\partial E\right)=0$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>1$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Z}^{d}\backslash\left\{ 0\right\}$.

משפט מינקובסקי: יהי $V\subseteq\mathbb{R}^{d}$ גוף קמור סימטרי סביב 0 עבורו $\lambda\left(V\right)>2^{d}$ אזי $V\cap\left(\mathbb{Z}^{d}\backslash\left\{ 0\right\} \right)\neq\varnothing$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)\in\left(0,\infty\right)$ ותהא $\theta\in\left(0,1\right)$ אזי קיימת קוביה $Q\subseteq\mathbb{R}^{d}$ עבורה $\lambda\left(E\cap Q\right)>\theta\cdot\lambda\left(Q\right)$.

משפט שטיינהאוס: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>0$ אזי $0\in\mathrm{int}\left(E-E\right)$.

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>0$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Q}\backslash\left\{ 0\right\}$.

למה: תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^{d}$ פתוחה אזי קיימים $\left\{ B_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ כדורים וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורם $\mathcal{O}=\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_{i}\right)\cup E$.

פונקציית התפלגות: