

**פעולות בינאריות:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $A \times A \rightarrow A$ .

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה ותהא  $*$  פעולה בינארית על  $A$  אזי  $a * b = *(a, b)$ .

**חבורה:** תהא  $G$  קבוצה אזי  $G \times G \rightarrow G : *$  עבורה קיים  $e \in G$  עבורו

- אסוציאטיביות: לכל  $a, b, c \in G$  מתקיים  $a * (b * c) = (a * b) * c$ .
- איבר יחידה: לכל  $a \in G$  מתקיים  $a * e = e * a = a$ .
- איבר הופכי: לכל  $a \in G$  קיים  $b \in G$  עבורו  $a * b = e = b * a$ .

**הגדרה:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $f : X \rightarrow X$  הפיכה  $f \in S(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ הפיכה}\}$ .

**חבורת התמורות:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $(S(X), \circ)$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $S_n = S([n])$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $|S_n| = n!$ .

**חבורת המטריצות:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$ .

**טענה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.

**החבורות החיבוריות:** יהי  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  אזי  $(\mathbb{F}, +)$ .

**סימון:** תהא  $A \subseteq \mathbb{C}$  אזי  $A^* = A^\times = A \setminus \{0\}$ .

**החבורות הכפליות:** יהי  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*\}$  אזי  $(\mathbb{F}, \cdot)$ .

**החבורה הטריטוראלית:** יהי  $x$  אזי  $(\{x\}, \text{Id})$ .

**הגדרה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\sim_n \subseteq \mathbb{Z}^2$  המוגדרת  $(n \mid (x - y)) \iff (x \sim_n y)$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $C_n = \mathbb{Z}_n$ .

**הגדרה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $C_n \times C_n \rightarrow C_n : +$  המוגדרת  $[x]_{\sim_n} + [y]_{\sim_n} = [x + y]_{\sim_n}$ .

**חבורת שאריות החלוקה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $(C_n, +)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $|C_n| = n$ .

**חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית:** חבורה  $(G, *)$  עבורה לכל  $g, h \in G$  מתקיים  $g * h = h * g$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  אזי  $(S_n, \circ)$  אינה אבלית.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$  אינה אבלית.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $(C_n, +)$  אבלית.

**חבורה סופית:** חבורה  $(G, *)$  עבורה  $|G| \in \mathbb{N}$ .

**חבורה אינסופית:** חבורה  $(G, *)$  עבורה  $|G| \geq \aleph_0$ .

**סדר של חבורה:** תהא  $(G, *)$  חבורה סופית אזי  $\text{ord}(G) = |G|$ .

**סדר של חבורה:** תהא  $G$  חבורה אינסופית אזי  $\text{ord}(G) = \infty$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה אזי  $\text{ord}(G) = o(G)$ .

**תת־חבורה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהא  $H \subseteq G$  אזי  $(H, *_|_{H \times H})$  עבורה

- סגירות לכפל: לכל  $a, b \in H$  מתקיים  $a * b \in H$ .
- סגירות להופכי: לכל  $a \in H$  מתקיים  $a^{-1} \in H$ .
- איבר יחידה: יהי  $e$  איבר היחידה של  $G$  אזי  $e \in H$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהא  $H \subseteq G$  עבורה  $(H, *_|_{H \times H})$  תת־חבורה אזי  $H \leq G$ .

**למה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהא  $H \in \mathcal{P}(G) \setminus \{\emptyset\}$  אזי  $H \leq G \iff (a * b^{-1} \in H \mid a, b \in H)$  מתקיים.

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהינה  $A, B \subseteq G$  אזי  $A * B = \{a * b \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה תהא  $H \subseteq G$  ויהי  $g \in G$  אזי  $g * H = \{g * h \mid h \in H\}$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $(n\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  ויהי  $\mathbb{F}$  שדה אזי  $(SL_n(\mathbb{F}), \cdot) \leq (GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $R_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $(R_n, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה אזי  $G \leq G$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה אזי  $\{e\} \leq G$ .

**איבר פיתול:** תהא  $(G, *)$  חבורה אזי  $g \in G$  עבורו קיים  $n \in \mathbb{N}_+$  המקיים  $g^n = e$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה אזי  $T(G) = \{g \in G \mid g \text{ איבר פיתול}\}$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה אבלית אזי  $T(G) \leq G$ .

**הערה:** מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה אזי קיים ויחיד  $e \in G$  עבורו  $a * e = e * a = a$  לכל  $a \in G$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ויהי  $a \in G$  אזי קיים ויחיד  $b \in G$  עבורו  $a * b = e = b * a$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה יהי  $a \in G$  ויהי  $b \in G$  איבר הופכי ל- $a$  אזי  $a^{-1} = b$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ויהיו  $a, b \in G$  אזי  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ויהי  $a \in G$  אזי  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

**מסקנה כלל צמצום משמאל:** תהא  $(G, *)$  חבורה ויהי  $a, b, c \in G$  עבורם  $a * b = a * c$  אזי  $b = c$ .

**מסקנה כלל צמצום מימין:** תהא  $(G, *)$  חבורה ויהי  $a, b, c \in G$  עבורם  $b * a = c * a$  אזי  $b = c$ .

**סימון:** תהא  $(G, *)$  חבורה ויהי  $g \in G$  אזי  $g^0 = e$ .

**הגדרה:** תהא  $(G, *)$  חבורה יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $g \in G$  אזי  $g^n = g * g^{n-1}$ .

**סימון:** תהא  $G$  חבורה יהי  $n \in \mathbb{N}$  ויהי  $g \in G$  אזי  $g^{-n} = (g^n)^{-1}$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה יהי  $n \in \mathbb{N}$  ויהי  $g \in G$  אזי  $g^{-n} = (g^{-1})^n$ .

**חבורת המכפלה:** תהיינה  $(H, \otimes), (G, *)$  חבורות נגדיר  $(g, h) \cdot (g', h') = (g * g', h \otimes h')$  לכל  $g, g' \in G$  ולכל  $h, h' \in H$  אזי  $(G \times H, \cdot)$ .

**טענה:** תהיינה  $(H, \otimes), (G, *)$  חבורות אזי חבורת המכפלה הינה חבורה.

**טענה:** תהיינה  $(H, \otimes), (G, *)$  חבורות אזי  $(H \otimes G) \leq (H, \otimes) \times (G, *)$  (חבורת המכפלה אבלית)  $\iff (H, G)$  אבליות.

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהיינה  $H, K \leq G$  אזי  $(HK = KH) \iff (H * K \leq G)$ .

**טענה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהיינה  $H, K \leq G$  אזי  $(H \cap K \in \{H, K\}) \iff (H \cup K \leq G)$ .

**הגדרה:** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $Y \subseteq X$  אזי  $\text{Stab}(Y) = \{\pi \in S(X) \mid \forall y \in Y. \pi(y) = y\}$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $Y \subseteq X$  אזי  $\text{Stab}(Y) \leq S(X)$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $\{H_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(G)$  באשר  $H_i \leq G$  לכל  $i \in I$  אזי  $\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$ .

**הגדרה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $X \subseteq G$  אזי  $\mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\}$ .

**החבורה שנוצרת על ידי תת-קבוצה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $X \subseteq G$  אזי  $\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H$ .

**למה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $X \subseteq G$  אזי  $\langle X \rangle \leq G$ .

**טענה מינימליות החבורה הנוצרת:** תהא  $G$  חבורה תהא  $X \subseteq G$  ותהא  $H \leq G$  עבורה  $X \subseteq H$  אזי  $\langle X \rangle \subseteq H$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $X \subseteq G$  אזי  $\langle X \rangle = \left\{ \prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (x \in X^k) \wedge (s \in \{\pm 1\}^k) \right\}$ .

**קבוצת יוצרים של חבורה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $X \subseteq G$  עבורה  $\langle X \rangle = G$ .

**חבורה נוצרת סופית (נ"ס):** חבורה  $G$  עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

**חבורה ציקלית:** חבורה  $G$  עבורה קיים  $g \in G$  המקיים  $\langle g \rangle = G$ .

**למה:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $g \in G$  אזי  $\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה יהיו  $n, m \in \mathbb{Z}$  ויהי  $g \in G$  אזי  $g^{n+m} = g^n * g^m$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה יהיו  $n, m \in \mathbb{Z}$  ויהי  $g \in G$  אזי  $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$ .

**למה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\langle G \rangle \iff$  (קיים  $g \in G$  עבורו  $G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ).

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה ציקלית אזי  $G$  אבלית.

**סדר של איבר:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $g \in G$  אזי  $\text{ord}(g) = \text{ord}(\langle g \rangle)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $g \in G$  אזי  $\text{ord}(g) = \min \{n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n = e\}$ .

**הערה:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $g \in G$  עבורו  $\text{ord}(g)$  לא קיים אזי  $\text{ord}(g) = \infty$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $g \in G$  באשר  $\text{ord}(g) < \infty$  אזי  $(\text{ord}(g) \mid n) \iff (g^n = e)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $i \in \mathbb{Z}_n$  אזי  $\langle i \rangle = \mathbb{Z}_n \iff \langle i, n \rangle$  (זרים).

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ציקלית ותהא  $H \leq G$  אזי  $H$  ציקלית.

**טענה:**  $(\mathbb{Q}, +)$  אינה נ"ס.

**קוסט ימני:** תהא  $G$  חבורה תהא  $H \leq G$  ויהי  $g \in G$  אזי  $H * g$ .

**קוסט שמאלי:** תהא  $G$  חבורה תהא  $H \leq G$  ויהי  $g \in G$  אזי  $g * H$ .

**נציג של קוסט ימני:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $Hg$  קוסט ימני אזי  $g$ .

**נציג של קוסט שמאלי:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $gH$  קוסט שמאלי אזי  $g$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה אבלית תהא  $H \leq G$  ויהי  $g \in G$  אזי  $Hg = gH$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $H \leq G$  ויהי  $g \in G$  אזי  $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $H \leq G$  ויהי  $g \in G$  אזי  $(gH = H) \iff (g \in H)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $H \leq G$  ויהי  $g \in G$  אזי  $(Hg = H) \iff (g \in H)$ .

**סימון:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ .

**סימון:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $H \backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$ .

**משפט:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $G/H$  חלוקה של  $G$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $H \leq G$  ויהיו  $g_1, g_2 \in G$  אזי  $(g_1H = g_2H) \iff (g_2^{-1}g_1 \in H)$ .

**הקוסט הטרייטלית:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $eH$ .

**אינדקס של תת-חבורה בחבורה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $[G : H] = |G/H|$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $[G : H] = |H \backslash G|$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה סופית ותהא  $H \leq G$  אזי  $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot [G : H]$ .

**משפט לגראנז':** תהא  $G$  חבורה סופית ותהא  $H \leq G$  אזי  $\text{ord}(H) \mid \text{ord}(G)$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה סופית ויהי  $g \in G$  אזי  $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $H \leq G$  ותהא  $K \leq H$  אזי  $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  תהא  $G$  חבורה סופית באשר  $\text{ord}(G) = p$  אזי לכל  $g \in G \setminus \{e\}$  מתקיים  $G = \langle g \rangle$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  תהא  $G$  חבורה סופית באשר  $\text{ord}(G) = p$  אזי  $G$  ציקלית.

**מסקנה משפט פרמה הקטן:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  באשר  $\gcd(n, p) = 1$  אזי  $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

**למה:** תהא  $G$  חבורה ותהינה  $H, K \leq G$  חבורות סופיות אזי  $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$ .

**טענה:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}$  באשר  $p > q$  ותהא  $G$  חבורה באשר  $|G| = pq$  אזי לכל  $H, K \leq G$  באשר  $\text{ord}(H) = p$  וכן  $\text{ord}(K) = p$  מתקיים  $K = H$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  אזי  $(S_n / \text{Stab}(1)) \cap (\text{Stab}(1) \backslash S_n) = \{\text{Stab}(1)\}$ .

**קוסט כפול:** תהא  $G$  חבורה תהינה  $H, K \leq G$  ויהי  $g \in G$  אזי  $HgK$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהינה  $H, K \leq G$  אזי  $\{HgK \mid g \in G\}$  חלוקה של  $G$ .

**הומומורפיזם:** תהינה  $G, H$  חבורות אזי  $\varphi : G \rightarrow H$  המקיימת

- שימור איבר יחידה:  $\varphi(e_G) = e_H$ .
- שימור כפל: לכל  $a, b \in G$  מתקיים  $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ .
- שימור הופכי: לכל  $g \in G$  מתקיים  $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ .

**טענה:** תהינה  $G, H$  חבורות ותהא  $\varphi : G \rightarrow H$  אזי  $(\varphi \text{ הומומורפיזם}) \iff$  (לכל  $a, b \in G$  מתקיים  $\varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1}$ ).

**גרעין של הומומורפיזם:** תהינה  $G, H$  חבורות ויהי  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם אזי  $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$ .

**למה:** תהינה  $G, H$  חבורות ויהי  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם אזי

- $\text{Im}(\varphi) \leq H$ .
- $\ker(\varphi) \leq G$ .
- $(\ker(\varphi) = \{e_G\}) \iff (\varphi \text{ חח"ע})$ .

**טענה:** תהינה  $G, H, K$  חבורות יהי  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם ויהי  $\psi : H \rightarrow K$  הומומורפיזם אזי  $\psi \circ \varphi$  הומומורפיזם.

**טענה:** תהינה  $G, H$  חבורות יהי  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם ויהי  $g \in G$  אזי  $\text{ord}(\varphi(g)) \mid \text{ord}(g)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\text{Id}$  הינו הומומורפיזם.

**טענה הומומורפיזם הטרייטלית:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\varphi : G \rightarrow \{e\}$  המוגדרת  $\varphi(g) = e$  לכל  $g \in G$  הינה הומומורפיזם.

**טענה הומומורפיזם ההכלה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $\text{Id} : H \rightarrow G$  הינו הומומורפיזם.

**טענה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $V$  מ"ז מעל  $\mathbb{F}$  אזי  $\det : \text{GL}(V) \rightarrow \mathbb{F}^*$  הינו הומומורפיזם.

**מטריצת תמורה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  המוגדרת  $(\rho(\sigma))_{i,j} = \begin{cases} 1 & j = \sigma(i) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  לכל  $i, j \in [n]$ .

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  תהא  $\sigma \in S_n$  ויהי  $v \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\rho(\sigma) \cdot v = \begin{pmatrix} v_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ v_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\rho : S_n \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  הינה הומומורפיזם.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  ותהא  $\sigma \in S_n$  אזי  $\det(\rho(\sigma)) \in \{\pm 1\}$ .

**סימן של תמורה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\text{sign} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  המוגדרת  $\text{sign} = \det \circ \rho$ .

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\text{sign}$  הינה הומומורפיזם.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  ותהא  $\sigma \in S_n$  אזי  $\text{sign}(\sigma) = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod_{i < j} (i - j)}$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  ותהא  $\sigma \in S_n$  אזי  $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{|\{(i,j) \in [n]^2 \mid (i < j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))\}|}$

**חבורת התמורות הזוגיות:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $A_n = \ker(\text{sign})$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $A_n \leq S_n$ .

**איזומורפיזם:** תהיינה  $G, H$  חבורות אזי הומומורפיזם הפיך  $\varphi : G \rightarrow H$ .

**סימון:** תהיינה  $G, H$  חבורות איזומורפיות אזי  $G \cong H$ .

**למה:** תהיינה  $G, H$  חבורות ויהי  $\varphi : G \rightarrow H$  איזומורפיזם אזי  $\varphi^{-1}$  איזומורפיזם.

**למה:** תהיינה  $G, H, K$  חבורות יהי  $\varphi : G \rightarrow H$  איזומורפיזם ויהי  $\psi : H \rightarrow K$  איזומורפיזם אזי  $\psi \circ \varphi$  איזומורפיזם.

**טענה:** תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה של חבורות אזי  $\cong$  יחס שקילות על  $\mathcal{A}$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $C_n \cong R_n$ .

**טענה:** תהיינה  $G, H$  חבורות תהא  $S \subseteq G$  באשר  $\langle S \rangle = G$  ויהיו  $\varphi, \psi : G \rightarrow H$  הומומורפיזמים באשר  $\varphi|_S = \psi|_S$  אזי  $\varphi = \psi$ .

**מונומורפיזם:** תהיינה  $G, H$  חבורות אזי הומומורפיזם חח"ע  $\varphi : G \rightarrow H$ .

**אפימורפיזם:** תהיינה  $G, H$  חבורות אזי הומומורפיזם על  $\varphi : G \rightarrow H$ .

**אוטומורפיזם:** תהא  $G$  חבורה אזי איזומורפיזם  $\varphi : G \rightarrow G$ .

**סימון:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\{\varphi : G \rightarrow G \mid \varphi \text{ אוטומורפיזם}\} = \text{Aut}(G)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $(\text{Aut}(G), \circ)$  חבורה.

**חבורת קליין:**  $K = C_2 \times C_2$ .

**טענה:** חבורת קליין הינה אבלית.

**טענה:** חבורת קליין אינה ציקלית.

**טענה:** חבורת קליין אינה איזומורפית ל- $C_4$ .

**פונקציית הצמדה:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $g \in G$  אזי  $c_g : G \rightarrow G$  המוגדרת  $c_g(x) = gxg^{-1}$  לכל  $x \in G$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $g \in G$  אזי  $c_g$  אוטומורפיזם.

**אוטומורפיזם פנימי:** תהא  $G$  חבורה אזי אוטומורפיזם  $\varphi : G \rightarrow G$  עבורו קיים  $g \in G$  המקיים  $\varphi = c_g$ .

**סימון:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\text{Inn}(G) = \{c_g \mid g \in G\}$ .

**תת־חבורה נורמלית:** תהא  $G$  חבורה אזי  $H \leq G$  עבורה לכל  $g \in G$  מתקיים  $c_g(H) = H$ .

**סימון:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  נורמלית אזי  $H \trianglelefteq G$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  התב"ש

$$H \trianglelefteq G \bullet$$

$$\bullet \text{ לכל } g \in G \text{ מתקיים } g^{-1}Hg = H$$

$$\bullet \text{ לכל } g \in G \text{ מתקיים } gHg^{-1} = H$$

$$\bullet \text{ לכל } g \in G \text{ מתקיים } gH = Hg$$

$$\bullet \text{ לכל } g \in G \text{ מתקיים } g^{-1}Hg \subseteq H$$

$$\bullet \text{ לכל } g \in G \text{ מתקיים } H \subseteq g^{-1}Hg$$

$$\bullet G/H = H \backslash G$$

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  באשר  $[G : H] = 2$  אזי  $H \trianglelefteq G$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$ .

**תת־חבורה אופיינית:** תהא  $G$  חבורה אזי  $K \leq G$  עבורה לכל  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  מתקיים  $\varphi(K) = K$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $K \leq G$  אופיינית אזי  $K \trianglelefteq G$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $H \trianglelefteq G$  ותהא  $K \leq H$  אופיינית ב- $H$  אזי  $K \trianglelefteq G$ .

**מרכז של חבורה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G. gh = hg\}$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\mathcal{Z}(G) \trianglelefteq G$ .

**חבורת הייזנברג:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה סופי אזי  $\mathcal{H}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$ .

**טענה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה סופי אזי  $\mathcal{H}(\mathbb{F})$  חבורה.

**טענה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה סופי אזי  $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathbb{F})) \cong (\mathbb{F}, +)$ .

**למה:** תהיינה  $G, H$  חבורות ויהי  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם אזי  $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $A_n \trianglelefteq S_n$ .

**חבורה פשוטה:** חבורה  $G$  עבורה לכל  $H \trianglelefteq G$  מתקיים  $H \in \{\{e\}, G\}$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $C_p$  פשוטה.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  אזי  $\text{SL}_n(\mathbb{R})$  פשוטה.

**הגדרה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהא  $N \trianglelefteq G$  נגדיר  $* : G/N \times G/N \rightarrow G/N$  כך  $(gN) * (hN) = (g * h)N$ .

**חבורת המנה:** תהא  $(G, *)$  חבורה ותהא  $N \trianglelefteq G$  אזי  $(G/N, *)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $N \trianglelefteq G$  אזי חבורת המנה הינה חבורה.

**העתקת המנה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $N \trianglelefteq G$  אזי  $q : G \rightarrow G/N$  המוגדרת  $q(g) = gN$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $N \trianglelefteq G$  ותהא  $q$  העתקת המנה אזי

•  $q$  הינה הומומורפיזם.

•  $\ker(q) = N$ .

•  $q$  על.

**משפט:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $H \trianglelefteq G \iff (H = \ker(\varphi))$  עבור  $\varphi : G \rightarrow G$  אוטומורפיזם.

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ .

**משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נתר:** תהיינה  $G, H$  חבורות ויהי  $\varphi : G \rightarrow H$  הומומורפיזם אזי  $G/\ker(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

•  $G \cong \mathbb{Z}$ .

• קיים  $n \in \mathbb{N}$  עבורו  $G \cong \mathbb{Z}_n$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\mathbb{P} \nsubseteq |G/\mathcal{Z}(G)|$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ויהיו  $H, K \trianglelefteq G$  באשר  $HK = G$  וכן  $H \cap K = \{e\}$  אזי  $G \cong H \times K$ .

**מסקנה משפט השאריות הסיני:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  זרים אזי  $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  תהא  $G$  חבורה סופית תהא  $H \leq G$  מאינדקס  $p$  ותהא  $N \trianglelefteq G$  מאינדקס  $p$  באשר  $H \neq N$  אזי  $G = HN$  וכן  $p^2 \mid \text{ord}(G)$ .

**חבורת המכפלה החצי ישרה:** תהיינה  $H, K$  חבורות ויהי  $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  הומומורפיזם נגדיר

$(h, k) \cdot (h', k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')$  לכל  $h, h' \in H$  ולכל  $k, k' \in K$  אזי  $(H \times K, \cdot)$ .

**סימון:** תהיינה  $H, K$  חבורות ויהי  $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה  $H \rtimes_{\varphi} K$ .

**טענה:** תהיינה  $H, K$  חבורות ויהי  $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  אזי  $H \rtimes_{\varphi} K$  הינה חבורה.

**טענה:** תהיינה  $H, K$  חבורות נגדיר  $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  כך  $\varphi(k) = \text{Id}_H$  לכל  $k \in K$  אזי  $H \rtimes_{\varphi} K \cong H \times K$ .

**סימון:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה אזי  $\text{Aff}(\mathbb{F}) = \{f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \mid \exists a \in \mathbb{F}^{\times} (\exists b \in \mathbb{F} (\forall x \in \mathbb{F} (f(x) = ax + b)))\}$ .

**טענה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה אזי  $(\text{Aff}(\mathbb{F}), \circ)$  חבורה.

**טענה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה נגדיר  $\varphi : \mathbb{F}^{\times} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F})$  כך  $\varphi(a)(b) = ab$  לכל  $a \in \mathbb{F}^{\times}$  ולכל  $b \in \mathbb{F}$  אזי  $\text{Aff}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F} \rtimes_{\varphi} \mathbb{F}^{\times}$ .

**סימון:** יהי  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  מצולע משוכלל אזי  $\{\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid (\varphi \wedge (\varphi(P) = P))\}$  איזומטריה).

**החבורה הדיהדרלית:** יהי  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  מצולע משוכלל בעל  $n$  קודקודים אזי  $D_n = \text{Iso}(P)$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  אזי  $(D_n, \circ)$  חבורה.

**סימון:** תהא  $X$  קבוצה ויהיו  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  פרידיקטים על  $X$  אזי  $\langle X \mid \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle = \{x \in \langle X \rangle \mid \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(x)\}$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  אזי  $D_n \cong \langle r, s \mid s^2 = e, r^n = e, srs = r^{-1} \rangle$ .

**משפט:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  אזי

• אם  $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$  אזי  $\{D_n, \langle sr, r^2 \rangle, \langle s, r^2 \rangle\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\}$  הן כל תתי החבורות הנורמליות של  $D_n$ .

• אם  $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$  אזי  $\{D_n\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\}$  הן כל תתי החבורות הנורמליות של  $D_n$ .

**טענה:**  $\mathcal{H}(\mathbb{F}_2) \cong D_4$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה יהי  $K \trianglelefteq G$  ויהי  $H \trianglelefteq G$  באשר  $HK = G$  וכן  $H \cap K = \{e\}$  ונגדיר  $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  כך  $\varphi(k) = c_k$  לכל  $k \in K$  אזי  $G \cong H \rtimes_{\varphi} K$ .

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  ונגדיר  $\varphi : C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_n)$  כך  $\varphi(k) = c_k$  לכל  $k \in K$  אזי  $D_n \cong C_n \rtimes_{\varphi} C_2$ .

**טענה:**  $K \trianglelefteq A_4$ .

**חבורה פתירה:** חבורה  $G$  עברה קיים  $n \in \mathbb{N}_+$  וקיימות  $G_0 \dots G_n \leq G$  המקיימות

•  $G_n = G$  וכן  $G_0 = \{e\}$ .

•  $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$  לכל  $i \in [n]$ .

•  $G_i/G_{i-1}$  אבלית לכל  $i \in [n]$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אבלית אזי  $G$  פתירה.

**טענה:** תהא  $G$  חבורה פשוטה באשר  $G$  אינה אבלית אזי  $G$  אינה פתירה.

**משפט:** יהי  $n \in [4]$  אזי  $S_n$  פתירה.

**חבורה נילפוטנטית:** חבורה  $G$  עברה קיים  $n \in \mathbb{N}_+$  וקיימות  $G_0 \dots G_n \leq G$  המקיימות

•  $G_n = G$  וכן  $G_0 = \{e\}$ .

•  $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$  לכל  $i \in [n]$ .

•  $G_i/G_{i-1} \leq \mathcal{Z}(G/G_{i-1})$  לכל  $i \in [n]$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה נילפוטנטית אזי  $G$  פתירה.

**משפט האיזומורפיזם השני:** תהא  $G$  חבורה תהא  $H \leq G$  ותהא  $N \trianglelefteq G$  אזי  $H/(H \cap N) \cong (HN)/N$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהיינה  $N, K \trianglelefteq G$  באשר  $K \leq N$  אזי  $N/K \trianglelefteq G/N$ .

**משפט האיזומורפיזם השלישי:** תהא  $G$  חבורה ותהיינה  $N, K \trianglelefteq G$  באשר  $K \leq N$  אזי  $G/N \cong (G/K)/(N/K)$ .

**משפט ההתאמה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $N \trianglelefteq G$  אזי קיימת  $\Phi : \{H \leq G \mid N \leq H\} \rightarrow \{H \mid H \leq G/N\}$  חח"ע ועל המקיימת

• לכל  $K \trianglelefteq G$  המקיימת  $N \leq K$  מתקיים  $\Phi(K) \trianglelefteq G/N$ .

• משמרת מנות: לכל  $K \trianglelefteq G$  המקיימת  $N \leq K$  מתקיים  $G/K \cong \Phi(G)/\Phi(K)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $N \trianglelefteq G$  אזי  $(N \text{ נורמלית מקסימלית}) \iff (G/N \text{ פשוטה})$ .

**פעולה שמאלית של חבורה על קבוצה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $X$  קבוצה אזי פונקציה  $f : G \times X \rightarrow X$  המקיימת

• לכל  $x \in X$  מתקיים  $f(e, x) = x$ .

• לכל  $g, h \in G$  ולכל  $x \in X$  מתקיים  $f(g \cdot h, x) = f(g, f(h, x))$ .

**הערה:** מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.

**סימון:** תהא  $G$  חבורה תהא  $X$  קבוצה ותהא  $f : G \times X \rightarrow X$  פעולה על  $G$  אזי  $f(g, x) = g.x$ .

**סימון:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $X$  קבוצה אזי  $\{f : G \times X \rightarrow X \mid f \text{ פעולה}\}$  קבוצה אזי  $G \curvearrowright X$ .

**הפעולה השמאלית:** תהא  $G$  חבורה נגדיר  $f \in G \curvearrowright G$  כך  $f(g, x) = gx$  אזי  $f$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.

**הפעולה הימנית:** תהא  $G$  חבורה נגדיר  $f \in G \curvearrowright G$  כך  $f(g, x) = xg^{-1}$  אזי  $f$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.

**הערה:** מכאן והלאה נאמר כי  $G$  פועלת על  $X$  ונסמן  $g.x$  את הפעולה.

**מסלולים:** תהא  $X$  קבוצה תהא  $G$  חבורה תהא  $\alpha \in G \curvearrowright X$  ויהי  $x \in X$  אזי  $\text{orb}_{\alpha}(x) = \{g.x \mid g \in G\}$ .

**סימון:** תהא  $X$  קבוצה תהא  $G$  חבורה הפועלת על  $X$  ויהי  $x \in X$  אזי  $\text{orb}(x) = \text{orb}_x(x)$ .

**פעולה טרנזיטיבית:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $X$  קבוצה אזי  $f \in G \curvearrowright X$  עברה קיים  $x \in X$  המקיים  $\text{orb}_f(x) = X$ .

**מייצב:** תהא  $X$  קבוצה תהא  $G$  חבורה הפועלת על  $X$  ויהי  $x \in X$  אזי  $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה תהא  $G$  חבורה הפועלת על  $X$  ויהי  $x \in X$  אזי  $\text{Stab}_G(x) \leq G$ .

**פעולה חופשית:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $X$  קבוצה אזי  $f \in G \curvearrowright X$  עברה לכל  $x \in X$  מתקיים  $\text{Stab}_G(x) = \{e\}$ .

**למה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $X$  קבוצה תהא  $\alpha \in G \curvearrowright X$  ויהי  $g \in G$  אזי  $\alpha(g) \in S(X)$ .

**הגדרה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $X$  קבוצה ותהא  $\alpha \in G \curvearrowright X$  אזי  $\varphi_{\alpha} : G \rightarrow S(X)$  המוגדרת  $\varphi_{\alpha}(g)(x) = \alpha(g, x)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $X$  קבוצה ותהא  $\alpha \in G \curvearrowright X$  אזי  $\varphi_{\alpha}$  הומומורפיזם.

**הגדרה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $X$  קבוצה ויהי  $\varphi : G \rightarrow S(X)$  הומומורפיזם אזי  $\alpha_{\varphi} : G \times X \rightarrow X$  המוגדרת  $\alpha_{\varphi}(g, x) = \varphi(g)(x)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה תהא  $X$  קבוצה ויהי  $\varphi : G \rightarrow S(X)$  הומומורפיזם אזי  $\alpha_\varphi$  פעולה.

**למה מסלול מייצב:** תהא  $X$  קבוצה תהא  $G$  חבורה הפועלת על  $X$  ויהי  $x \in X$  אזי  $|o(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$ .

**למה של ברנסייד:** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $G$  חבורה סופית הפועלת על  $X$  אזי  $|\{o(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{x \in X \mid g \cdot x = x\}|$ .  
**הפעולה על הקוסטים השמאליים:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $\alpha \in G \curvearrowright^{G/H}$  המוגדרת  $\alpha(g, g'H) = gg'H$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.

**פעולות אקווריאנטיות/שקולות:** תהיינה  $X, Y$  קבוצות ותהא  $G$  חבורה אזי  $(\alpha, \beta) \in (G \curvearrowright X) \times (G \curvearrowright Y)$  עבורן קיימת

$F : X \rightarrow Y$  חח"ע ועל המקיימת  $F(\alpha(g, x)) = \beta(g, F(x))$  לכל  $g \in G$  ולכל  $x \in X$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה תהא  $G$  חבורה תהא  $\alpha \in G \curvearrowright X$  טרנזיטיבית ויהי  $x \in X$  עבורו  $o(x) = X$  אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים של  $G/\text{Stab}_G(x)$  אקווריאנטית ל- $\alpha$ .

**מסקנה:** תהא  $X$  קבוצה תהא  $G$  חבורה ותהא  $\alpha \in G \curvearrowright X$  טרנזיטיבית אזי קיימת  $H \leq G$  עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים אקווריאנטית ל- $\alpha$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $G$  חבורה הפועלת על  $X$  אזי  $\{o(x) \mid x \in X\}$  חלוקה של  $X$ .

**מסקנה:** תהא  $X$  קבוצה תהא  $G$  חבורה ותהא  $\alpha \in G \curvearrowright X$  טרנזיטיבית אזי לכל  $x \in X$  מתקיים  $o(x) = X$ .

**סימון:** יהי  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  מצולע משוכלל יהיו  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  איזומטריות של  $\mathbb{R}^3$  ותהא  $p \in \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$  ותהא  $\text{Poly}(p) = |\{\varphi_i(P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i(P \times \{0\})\}|$ .

**גוף אפלטוני:** קבוצה קמורה לא זניחה  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  עבורה קיים מצולע משוכלל  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  וקיימות איזומטריות  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  של  $\mathbb{R}^3$  עבורן

- פאות איזומטריות:  $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ .
- קודקוד משותף זהה כמות: לכל קודקודים  $v_1, v_2 \in K$  מתקיים  $\text{Poly}(v_1) = \text{Poly}(v_2)$ .

**מספר פאות של גוף אפלטוני:** יהי  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  גוף אפלטוני אזי  $n \in \mathbb{N}$  מינימלי עבורו קיימות איזומטריות  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  של  $\mathbb{R}^3$  עבורן  $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$  באשר  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  מצולע משוכלל.

**סימון:** יהי  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  גוף אפלטוני אזי  $\text{Iso}(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \text{ איזומטריה} \wedge (\varphi(K) = K)\}$ .

**סימון:** יהי  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  גוף אפלטוני אזי  $\text{Iso}_+(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \text{ איזומטריה משמרת אוריינטציה} \wedge (\varphi(K) = K)\}$ .

**הגדרה סימון שלפלי:** יהי  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  גוף אפלטוני בעל  $n \in \mathbb{N}$  פאות ויהי  $v \in K$  קודקוד אזי  $\{n, \text{Poly}(k)\}$ .

**הערה:** סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.

**דודקהדרון:** גוף אפלטוני  $K \subseteq \mathbb{R}^3$  בעל סימון שלפלי  $\{5, 3\}$ .

**טענה:** יהי  $D$  דודקהדרון אזי  $\text{Iso}_+(D) \cong A_5$ .

**מסקנה:** יהי  $D$  דודקהדרון אזי  $\text{ord}(\text{Iso}_+(D)) = 60$ .

**משפט קיילי:** תהא  $G$  חבורה אזי קיימת קבוצה  $X$  וקיימת  $H \leq S(X)$  עבורה  $G \cong H$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה באשר  $\text{ord}(G) = \aleph_0$  אזי קיימת  $H \leq S(\mathbb{N})$  עבורה  $G \cong H$ .

**משפט קושי:** תהא  $G$  חבורה סופית ויהי  $p \in \mathbb{P}$  עבורו  $p \mid \text{ord}(G)$  אזי קיים  $g \in G$  עבורו  $\text{ord}(g) = p$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה סופית ויהי  $p \in \mathbb{P}$  עבורו  $p \mid \text{ord}(G)$  אזי קיימת  $H \leq G$  ציקלית עבורה  $\text{ord}(H) = p$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה באשר  $\text{ord}(G) = 6$  אזי  $G \cong \mathbb{Z}_6$  או  $G \cong S_3$ .

**פעולת ההצמדה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\alpha \in G \curvearrowright G$  המוגדרת  $\alpha(g, h) = c_g(h)$ .

**סימון:** תהא  $G$  חבורה ויהיו  $h, g \in G$  אזי  $h^g = g^{-1}hg$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ויהיו  $g, h, k \in G$  אזי  $h^{g \cdot k} = (h^g)^k$ .

**מחלקת הצמידות:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $h \in G$  אזי  $[h] = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה מצוידת עם פעולת ההצמדה ויהי  $h \in G$  אזי  $[h] = o(h)$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\{[h] \mid h \in G\}$  חלוקה של  $G$ .

**הממרכז של איבר:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $h \in G$  אזי  $C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה מצוידת עם פעולת ההצמדה ויהי  $h \in G$  אזי  $C_G(h) = \text{Stab}_G(h)$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה ויהי  $h \in G$  אזי  $C_G(h) \leq G$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\mathcal{Z}(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $\mathcal{Z}(G)$  אופיינית.

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אזי  $G/\mathcal{Z}(G) \cong \text{Inn}(G)$ .

**מסקנה:** תהא  $G$  חבורה סופית ויהי  $g \in G$  אזי  $||[g]|| = [G : C_G(g)]$ .



**טענה:** תהא  $G$  חבורה ויהיו  $g, h, k$  באשר  $k = ghg^{-1}$ . אזי  $|C_G(k)| = |C_G(h)|$ .

**משפט משוואת מחלקות הצמידות:** תהא  $G$  חבורה סופית ותהא  $C \subseteq G$  קבוצת נציגים של  $\{[h] \mid h \in G\}$  אזי  $\sum_{g \in C} \frac{1}{|C_G(g)|} = 1$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה סופית אזי  $\mathcal{Z}(G) = \bigcup \{[g] \mid (g \in G) \wedge (|[g]| = 1)\}$ .

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  תהיינה  $\alpha, \beta \in S_n$  באשר  $\beta = (m_{1,1} \dots m_{1,\ell_1}) \circ \dots \circ (m_{b,1} \dots m_{b,\ell_b})$  אזי  $\alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(m_{1,1}) \dots \alpha(m_{1,\ell_1})) \circ \dots \circ (\alpha(m_{b,1}) \dots \alpha(m_{b,\ell_b}))$ .

**למה:**  $A_5$  פשוטה.

**למה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$  ותהא  $H \trianglelefteq A_n$  עבודה קיים מעגל  $\pi$  בגודל שלוש המקיים  $\pi \in H$  אזי  $H = A_n$ .

**למה:**  $A_6$  פשוטה.

**משפט:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$  אזי  $A_n$  פשוטה ואינה אבלית.

**הישר הפרויקטיבי:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ונגדיר  $R = \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \setminus \{0\} \mid \exists \lambda \in \mathbb{F}^\times (x = \lambda y)\}$  אזי  $\mathbb{FP} = (\mathbb{F}^2 \setminus \{0\})/R$ .

**טענה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  אזי  $\mathcal{Z}(\text{GL}_n(\mathbb{F})) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\}$ .

**סימון:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  אזי  $\text{PGL}_n(\mathbb{F}) = \text{GL}_n(\mathbb{F})/\mathcal{Z}(\text{GL}_n(\mathbb{F}))$ .

**חבורת- $p$ :** יהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי חבורה  $G$  עבודה קיים  $n \in \mathbb{N}$  המקיים  $|G| = p^n$ .

**משפט:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורת- $p$  אזי  $\mathcal{Z}(G) \neq \{e\}$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה מסדר  $p^2$  אזי  $G$  אבלית.

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורת- $p$  אזי  $G$  נילפוטנטית.

**תת-חבורת- $p$  סילו:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהיו  $m, k \in \mathbb{N}$  באשר  $\gcd(p, m) = 1$  ותהא  $G$  חבורה באשר  $|G| = p^k \cdot m$  אזי  $H \leq G$  באשר  $|H| = p^k$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית ותהא  $H \leq G$  אזי  $(H \text{ תת-חבורה-} p \text{ סילו}) \iff (H \text{ חבורת-} p \text{ וכן לכל } K \leq G \text{ חבורה-} p \text{ מתקיים } |K| \leq |H|)$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית ותהא  $H \leq G$  אזי  $(H \text{ תת-חבורה-} p \text{ סילו}) \iff (H \text{ חבורת-} p \text{ וכן } p \nmid [G : H])$ .

**סימון:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית אזי  $\text{Syl}_p(G) = \{H \leq G \mid H \text{ תת-חבורה-} p \text{ סילו של } G\}$ .

**סימון:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית אזי  $n_p = |\text{Syl}_p(G)|$ .

**למה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ויהיו  $n, m \in \mathbb{N}_+$  באשר  $\gcd(p, m) = 1$  אזי  $p \nmid \binom{p^n \cdot m}{p^n}$ .

**משפט סילו הראשון:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית אזי קיימת  $H \leq G$  באשר  $H$  תת-חבורה- $p$  סילו של  $G$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית אזי  $n_p \geq 1$ .

**המנרמל של חבורה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  אזי  $N_G(H) \leq G$  וכן  $H \trianglelefteq N_G(H)$ .

**למה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהיו  $m, k \in \mathbb{N}$  באשר  $\gcd(p, m) = 1$  ותהא  $G$  חבורה באשר  $|G| = p^k \cdot m$  ותהיינה  $H, K \leq G$  חבורות- $p$  סילו באשר  $H \neq K$  אזי  $H \not\subseteq N_G(K)$ .

**משפט סילו השני:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית ותהיינה  $H, K$  תת-חבורות- $p$  סילו של  $G$  אזי קיים  $g \in G$  עבורו  $gHg^{-1} = K$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית ותהא  $H$  תת-חבורה- $p$  סילו של  $G$  אזי  $(H \trianglelefteq G) \iff (n_p = 1)$ .

**קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה:** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $G$  חבורה הפועלת על  $X$  אזי  $Y \subseteq X$  עבודה לכל  $g \in G$  ולכל  $y \in Y$  מתקיים  $g \cdot y \in Y$ .

**טענה:** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $G$  חבורה הפועלת על  $X$  ותהא  $Y \subseteq X$  אזי  $(Y \text{ הינה } G\text{-שמורה}) \iff (Y \text{ קיימת } \mathcal{O} \subseteq X \text{ עבודה } Y = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{O}(x))$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית ונגדיר  $\alpha \in G \curvearrowright \text{Syl}_p(G)$  כך  $\alpha(g, H) = gHg^{-1}$  אזי  $\alpha$  טרנזיטיבית.

**למה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה ותהא  $H \leq G$  תת-חבורת- $p$  סילו ותהא  $R \subseteq \text{Syl}_p(G)$  באשר  $H \in R$  וכן  $R$  הינה  $H$ -שמורה אזי  $|R| \equiv 1 \pmod p$ .

**משפט סילו השלישי:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית אזי  $n_p \equiv 1 \pmod p$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  יהיו  $m, k \in \mathbb{N}$  באשר  $\gcd(p, m) = 1$  ותהא  $G$  חבורה באשר  $|G| = p^k \cdot m$  אזי  $n_p \mid m$ .

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית אזי  $n_p \mid \text{ord}(G)$ .

**מסקנה משפטי סילו:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $G$  חבורה סופית אזי

1. קיימת  $H \leq G$  באשר  $H$  תת-חבורה- $p$  סילו של  $G$ .

2. תהיינה  $H, K$  תת-חבורות- $p$  סילו של  $G$  אזי קיים  $g \in G$  עבורו  $gHg^{-1} = K$ .



$$3. n_p \equiv 1 \pmod{p}.$$

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $H \leq S_p$  באשר  $|H| = p$  אזי קיים  $p$ -מעגל  $\pi \in S_p$  עבורו  $H = \langle \pi \rangle$ .

**מסקנה משפט ווילסון:** יהי  $p \in \mathbb{P}$  אזי  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

**טענה:** יהיו  $p, q \in \mathbb{P}$  באשר  $p < q$  וכן  $q \not\equiv 1 \pmod{p}$  ותהא  $G$  חבורה מסדר  $pq$  אזי  $G$  ציקלית.

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{P}_{>2}$  ותהא  $G$  חבורה מסדר  $2p$  אזי  $G \cong C_{2p}$  או  $G \cong D_p$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה סופית יהי  $p \in \mathbb{P}$  ותהא  $P \leq G$  תת־חבורת־ $p$  אזי  $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$ .

**סימון:** תהא  $(G, +)$  חבורה אזי  $e_G = 0$  וכן  $-x = x^{-1}$  לכל  $x \in G$  וכן  $g^n = ng$  לכל  $n \in \mathbb{Z}$  ולכל  $g \in G$ .

**חבורת המכפלה:** תהא  $I$  קבוצה ותהיינה  $\{G_i \mid i \in I\}$  חבורות נגדיר  $(g \cdot h)_i = g_i \cdot h_i$  לכל  $g, h \in \prod_{i \in I} G_i$  ולכל  $i \in I$  אזי  $(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$ .

**טענה:** תהא  $I$  קבוצה ותהיינה  $\{G_i \mid i \in I\}$  חבורות אזי  $\prod_{i \in I} G_i$  חבורה.

**חבורת הסכום הישר:** תהא  $I$  קבוצה ותהיינה  $\{G_i \mid i \in I\}$  חבורות אזי  $\bigoplus_{i \in I} G_i = \{g \in \prod_{i \in I} G_i \mid |\{i \in I \mid g_i \neq e_{G_i}\}| \in \mathbb{N}\}$ .

**טענה:** תהא  $I$  קבוצה ותהיינה  $\{G_i \mid i \in I\}$  חבורות אזי  $\bigoplus_{i \in I} G_i \leq \prod_{i \in I} G_i$ .

**חבורת פיתול:** חבורה  $G$  עבורה  $T(G) = G$ .

**חבורה חסרת פיתול:** חבורה  $G$  עבורה לכל  $T(G) = \{e\}$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אבלית אזי  $G/T(G)$  חסרת פיתול.

**טענה:** תהא  $G$  חבורה נ"ס ותהא  $H \trianglelefteq G$  אזי  $G/H$  נ"ס.

**מסקנה:** תהיינה  $G, H, K$  חבורות באשר  $G \cong H \times K$  אזי  $G \cong H \times K \iff (G, K) \iff (H, K)$  נ"ס.

**חבורה אבלית חופשית:** תהא  $X$  קבוצה אזי  $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ .

**בסיס של חבורה אבלית חופשית:** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $\bigoplus_X \mathbb{Z}$  חבורה אבלית חופשית אזי  $X$ .

**הערה:** תהא  $X$  קבוצה אזי נשכן בצורה טבעית את  $X$  בתוך החבורה האבלית החופשית עם בסיס  $X$  כך  $x \mapsto e_x$ .

**משפט התכונה האוניברסלית:** תהא  $X$  קבוצה ותהא  $G$  חבורה ותהא  $f : X \rightarrow G$  אזי קיים ויחיד הומומורפיזם  $\varphi : \bigoplus_X \mathbb{Z} \rightarrow G$  עבורו  $\varphi(x) = f(x)$  לכל  $x \in X$ .

**משפט תכונת ההרמה:** תהא  $F$  חבורה אבלית חופשית תהיינה  $A, B$  חבורות אבליות יהי  $\varphi : A \rightarrow B$  אפימורפיזם ויהי  $\psi : F \rightarrow B$  הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם  $\hat{\psi} : F \rightarrow A$  עבורו  $\psi \circ \hat{\psi} = \varphi$ .

**טענה:** תהא  $G$  חבורה אבלית ותהא  $H \leq G$  באשר  $G/H$  אבלית חופשית אזי  $G \cong H \oplus G/H$ .

**משפט:** תהא  $G$  אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי  $G$  אבלית חופשית עם בסיס סופי.

**מסקנה:** תהא  $G$  אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי קיים  $k \in \mathbb{N}$  עבורו  $G \cong \mathbb{Z}^k$ .