```
(a \in \{a_1,\ldots,a_n\}) \Longleftrightarrow ((a=a_1) \lor \ldots \lor (a=a_n)) מתקיים \{a_1,\ldots,a_n\} מתקיים איברים:
                                                                                                       \Sigma^* = igcup_{i=0}^\infty \Sigma^i סימון: תהא \Sigma קבוצה אזי
                טענה: תהא S\subseteq \Sigma^* אזי קיימת ויחידה F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i}	o \Sigma^*\mid i\in I\} ותהא ווחא B\subseteq \Sigma^* אזי קיימת ויחידה \Sigma
                                                                                                                                        .B \subseteq S \bullet
                                                                                                                         .F סגורה להפעלת S
                                                    S\subseteq A אזי F אזי הפעלת סגורה סגורה אוכן אוכן B\subseteq A עבורה A\subseteq \Sigma^*
אינדוקציה מבנית: תהא F=\{f_i: \left(\Sigma^*\right)^{n_i}	o \Sigma^*\mid i\in I\} ותהא ותהא B\subseteq \Sigma^* מינימלית מגנית: תהא
                                                                                                                    .B \subseteq X_{B,F} להפעלת F
                              \Sigma אזי F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} 	o \Sigma^* \mid i \in I\} ותהא B\subseteq \Sigma^* אזי קבוצה תהא באינדוקציה מבנית: תהא
                             B אזי איזי F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} 	o \Sigma^* \mid i \in I\} ותהא ותהא B\subseteq \Sigma^* אזי קבוצה תהא באינדוקציה מבנית: תהא
X_{B,F} = \bigcap \{Y \subseteq \Sigma^* \mid (B \subseteq Y) \land (F \; טענה: תהא F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \to \Sigma^* \mid i \in I\} ותהא B \subseteq \Sigma^* ותהא אזיי
```

 $X_{B,F}\subseteq Y$  אזי איזי איזי עבורה  $B\subseteq Y$  אזי אבינדוקציה מבנית: יהי עולם  $\Sigma$  ותהא  $Y\subseteq \Sigma^*$  סגורה להפעלת

Y אזי אולם  $B\subseteq Y$  אזי הפעלת להפעלת להפעלת סגורה אזי אינווריאנטה: יהי עולם בותהא אינווריאנטה:

 $.(p\left(0\right)\land(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n\right)\Longrightarrow p\left(n+1\right)))\Longrightarrow(\forall n\in\mathbb{N}.p\left(n\right))$  מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על  $\mathbb{N}$  אזי על F אזי ( $a_i \in B$ ) מתקיים ( $a_i \in B$ ) מתקיים ( $a_i \in B$ ) שבורה על ידי הפעלת  $a_i = a$  וכן לכל  $(\{a_1,\ldots,a_{i-1}\}$ תלק מ־

.(aימת סדרת יצירה ל־ $(a \in X_{B,F})$  אזי אירה ל־ $a \in \Sigma^*$  יהי

 $X_{B,F} = igcup_{n=1}^\infty \left\{ a \in \Sigma^* \mid n$  מסקנה:  $a \in \mathbb{Z}$  בעלת סדרת יצירה באורך

 $.\Sigma = \{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow,(,)\} \cup \{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$  :עולם תחשיב הפסוקים:

 $a\in\Sigma^*$  יהי תחשיב הפסוקים אזי יהי ביטוי:

אזי  $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$  אזי

- $.\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)"$  •
- $.\lor (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1\lor\omega_2)"$  •
- $:\Longrightarrow (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \Longrightarrow \omega_2)" \bullet$ 
  - $\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)" \bullet$

 $\mathsf{WFF} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow\}}$  : קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק

 $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  עבורו  $p \in \mathsf{WFF}$  פסוק אטומי/יסודי:

(") ונגמר עם "(") מתחיל עם אזי  $p \in \mathsf{WFF}$  יהי טענה: יהי  $p \in \mathsf{WFF}$  אזי אזי ( $p \in \mathsf{WFF}$ 

 $q_1(q_2 \notin \mathsf{WFF}$  אזי  $q_1,q_2 \in \mathsf{WFF}$  מסקנה: יהיו

משפט הקריאה היחידה: יהי אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה: יהי

- . פסוק אטומיlpha
- $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$  פיימים ויחידים
- $\alpha = (\beta \lor \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$  פיימים ויחידים
- $\alpha = (\beta \Longrightarrow \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$  פיימים ויחידים
  - $\alpha = (\neg \beta)$  עבורו  $\beta \in \text{WFF}$  •

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי  $\Sigma$  תחשיב הפסוקים ויהי  $lpha\in\Sigma^*$  ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת היהי לבדיקה האם  $.\alpha \in \mathsf{WFF}$ 

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .¬ .1
- $.\land,\lor$  .2
- .⇒ .3

T, true :אמת:

.F, false :שקר:

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

 $.TT_{\circ}$  אזי טבלת האמת של  $\circ \in \{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow\}$  סימון: תהא

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	p	$q \lor p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q

true

false

false

true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

$$v:\{p_i\} o \{F,T\}$$
 השמה: פונקציה

המוגדרת  $\overline{v}: \mathsf{WFF} \to \{F,T\}$  השמה אזי פונקציה השמה לפסוק: תהא השמת ערך אמת לפסוק:

 $q \wedge p$ 

true

false

false

p

true

false

true

q

true

true

false

false

- $.\overline{v}\left(p
  ight)=v\left(p
  ight)$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- $.\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$  אזי פסוק אזי
- $.\overline{v}(\beta \circ \gamma) = TT_{\circ}(\overline{v}(\beta), \overline{v}(\gamma))$  יהיו אזי פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה אזי •

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=T$  עבורה עבורה אזי איי השמה מספקת מסוק: תהא עבורה עבורה מספקת מספקת

 $v \models \alpha$  אזי א מסופקת על ידי מסופקת מחותהא  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  השמה מסופקת על ידי

 $v \not\models \alpha$  אזי אזי אזי מסופקת על ידי א אזי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  אזי השמה v השמר סימון:

המוגדרת Var : WFF  $o \mathcal{P}\left(\{p_i\}\right)$  פונקציה פונקציה בפסוק:

- .Var  $(p) = \{p\}$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- . $\operatorname{Var}(\neg \alpha) = \operatorname{Var}(\alpha)$  אזי •
- . $\operatorname{Var}(\beta \circ \gamma) = \operatorname{Var}(\beta) \cup \operatorname{Var}(\gamma)$  אזי פעולה בינארית פעולה פעולה פעולה  $\beta, \gamma$  יהיי •

 $.\overline{v_1}(lpha)=\overline{v_2}(lpha)$  אזי  $orall p\in {
m Var}(lpha).v_1(p)=v_2(p)$  עבורה  $lpha\in {
m WFF}$  אוי  $v_1,v_2$  איז  $v_1,v_2$  איז

 $.TT_{lpha}$  ידי את lpha על ידי מסקנה: יהי  $lpha \in \mathsf{WFF}$  אזי ניתן לייצג את

 $TT=TT_{lpha}$  עבורו קיים  $lpha\in$  WFF מערכת קשרים שלמה עבורה לכל עבורה אמת אבורה לכל עבורה קבוצה קבוצה  $K\subseteq\{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow\}$ .טענה:  $\{\land, \lor, \neg, \Longrightarrow\}$  שלמה פונקציונלית

. טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה עבורה עבורה אזי אזי א שלמה פונקציונלית. מערכת קשרים עבורה אזי אזי א

 $v \models \alpha$  עבורו קיימת השמה v המקיימת  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  עבורו פסוק

 $v \models \alpha$  עבורו לכל השמה v מתקיים  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  טאוטולוגיה: פסוק

 $\models \alpha$  טאוטולוגיה אזי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  טימון: יהי

 $\models (\neg \alpha)$  עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  סתירה: פסוק

 $ar{v}(lpha)=ar{v}(eta)$  מתקיים שקולים: פסוקים  $lpha,eta\in\mathsf{WFF}$  עבורם לכל השמה

 $\alpha \equiv \beta$  שקולים אזי  $\alpha, \beta \in WFF$  סימון: יהיו

 $v \models \alpha$  מתקיים  $\alpha \in \Gamma$  מתקיים עבורה לכל עבורה קיימת השמה עבורה לכל  $\Gamma \subseteq WFF$ 

 $v \models \Gamma$  אזי אוי השמה על ידי השמה קבוצה קבוצה קבוצה  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ 

 $v \models \alpha$  מתקיים  $v \models \Gamma$  מתקיים אוי איי איי איי  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  אוי  $\gamma \models \alpha$  מתקיים עבורו לכל השמה v מתקיים אוי

 $\Gamma \models \alpha$  אזי מ־ $\Gamma$  אזי סמנטית מבע פסוק נובע אויהי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  אזי ריהי

טענה: יהיו  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$  אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \bullet$
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \bullet$ 
  - $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \bullet$
  - $.(\alpha \lor \beta) \equiv (\beta \lor \alpha) \bullet$
  - $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \bullet$
  - $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \bullet$ 
    - $\neg (\neg \alpha) \equiv \alpha \bullet$
  - $\neg (\alpha \land \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor (\neg \beta) \bullet$
  - $\neg (\alpha \lor \beta) \equiv (\neg \alpha) \land (\neg \beta) \bullet$

```
lpha\left[arphi/p
ight]\in\mathsf{WFF} אזי p\in\mathsf{Var}\left(lpha
ight) ויהי lpha,arphi\in\mathsf{WFF} אזי היו
                                                                הצבת פסוקים בפסוק: יהיו p_1\dots p_n ויהיו lpha, arphi_1\dots arphi_n\in \mathsf{WFF} היהיו יהיו
                                                                                               lpha\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight]=arphi_{i} אזי i\in\left[n
ight] עבור lpha=p_{i}
                                                                      lpha \left[arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n
ight] = lpha אזי i\in [n] לכל lpha
eq p_i אטומי וכן lpha
                                                         lpha\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight]=
egar{eta}\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight] אם קיים eta\in \mathrm{WFF} עבורו eta\in \mathrm{WFF}
                                                                        אזי \alpha=\beta\circ\gamma אזי אם קיימים פעולה פעולה וקיימת פעולה \beta,\gamma\in \mathrm{WFF}
                                                                                     \alpha \left[ \varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n \right] = \beta \left[ \varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n \right] \circ \gamma \left[ \varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n \right]
                                   v\left[\overline{v}(arphi)/p_i
ight](p_j) = \left\{egin{array}{ll} v(p_j) & i 
eq j \\ \overline{v}(arphi) & i = j \end{array}
ight. הימון: יהיו a, arphi \in \mathbb{R}^n יהי מומי אטומי ותהא v השמה אזי ההשמה a, arphi \in \mathbb{R}^n יהי מימון: יהיו
                                                     .\overline{v}\left(lpha\left(arphi/p
ight)
ight)=v\left[\overline{v}(arphi)/p
ight]\left(lpha
ight)טענה: יהיו lpha,arphi\in\mathsf{WFF} יהי מומי חטומי ותהא v השמה אזי lpha,arphi\in\mathsf{WFF} טענה:
v יהיו v פסוקים אטומים ותהא v השמה אזי v יהיו v פסוקים אטומים ותהא v השמה אזי v השמה אזי v הערכוני שמות: יהיו v השמה אזי v יהיו v השמה אזי
                                                                                                       \overline{v}\left(\alpha\left[\varphi_{1}/p_{1}\ldots\varphi_{n}/p_{n}\right]\right)=\overline{v\left[\overline{v}(\varphi_{1})/p_{1},\ldots,\overline{v}(\varphi_{1})/p_{1}\right]}\left(\alpha\right)
        מסקנה: יהי שאוטולוגיה יהיו \varphi_1\ldots \varphi_n\in WF יהיו \varphi_1\ldots \varphi_n\in WF טאוטולוגיה יהיו מסקנה: יהי מסקנה: יהי מסקנה: יהי
                                                                                                .NNF = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}} :NNF הצורה הנורמלית
                                                                                                         lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{NNF} אזי קיים אזי משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF}
                                                                                                                         .Conj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}} יימון:
                                                                                                                           .DNF = X_{\text{Conj},\{\vee\}} :DNF הצורה הנורמלית
                                                                                                         lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m DNF} אזי קיים אזי משפט: יהי lpha\in {
m WFF}
                                                                                                                          Disj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\lor\}} יימון:
                                                                                                                            \mathsf{CNF} = X_{\mathsf{Disj},\{\wedge\}} :CNF הצורה הנורמלית
                                                                                                         lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{CNF} אזי קיים lpha\in \mathrm{WFF} יהי
                           A\subseteq N אזי אזי F\subseteq igcup_{n=1}^\infty(N^n	o N) ותהא ותהא A\subseteq N תהא והא אלפבית תהא אלפבית הוכחה: יהי \Sigma אלפבית תהא
                                                                       הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.
                                                                                  N מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                  A אזי אוכחה מערכת הוכחה (\Sigma, N, A, F) אקסיומת של מערכת הוכחה אזי
                                                                                F מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F)
                                                                                           X_{A,F} מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                   \vdash \varphi משפט אזי \varphi \in Nיימון: תהא מערכת מערכת מערכת S
                                          (\Sigma,N,A,F,\Gamma) אזי \Gamma\subseteq N מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת מערכת הוכחה בעלת אזי
                                            X_{A\cup\Gamma,F} מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הנחות אזי
                                         arphi מערכת אזי סדרת יצירה אל ויהי arphi\in N יכיח מערכת הנכחה מערכת מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת
                                                                  \Gamma \vdash_{\sigma} \varphiיכיח אזי \varphi \in N הנחות ויהי הנחה תהיינה תהיינה מערכת מערכת מערכת הוכחה \Gamma \subseteq N
                                                                                                                    טענה: תהא \varphi \in N מערכת הוכחה מערכת מערכת מענה:
                                                                               .\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi אזי \Delta \subseteq \Gamma ותהא ותהא \Delta \underset{S}{\vdash} \varphi עבורה \Delta \subseteq N אזי מונוטוניות: •
```

 $(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor \beta \bullet$ 

 $lpha\left[arphi/p
ight]=arphi$  אזי lpha=p אם •

 $.\gamma \models \alpha$  מתקיים  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  למה: יהי  $\gamma \in \mathsf{WFF}$  סתירה אזי לכל

 $.(\alpha \models \beta) \Longleftrightarrow (\models (\alpha \Longrightarrow \beta))$  אזי  $\alpha, \beta \in \text{WFF}$  טענה: יהיו מענה: יהיו  $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$  אזי אזי  $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$  אטומי אזי

 $lpha\left[arphi/p
ight]=lpha$  אזי lpha
eq p אומי וכן lpha פסוק אטומי וכן •

 $lpha\left[arphi/p
ight]=\lnoteta\left[arphi/p
ight]$  אזי  $lpha=\lnoteta$  עבורו  $eta\in\mathsf{WFF}$  אם קיים

 $\Gamma \models \beta$  אזי  $\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta$  וכן  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$  עבורם  $\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}$  ויהיו  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  אזי  $\Gamma \models (\neg \alpha)$  אזי  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta)$  וכן  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$  אזי  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta)$  וכן  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta)$  אזי  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta)$  אזי  $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta)$ 

 $lpha\left[arphi/p
ight]=eta\left[arphi/p
ight]\circ\gamma\left[arphi/p
ight]$  אם קיימים  $eta=eta\circ\gamma$  אם בינארית פעולה בינארית פעולה בינארית • eta

 $\Delta \vdash \varphi$  אזי קיימת  $\Delta \subseteq \Gamma$  סופית עבורה  $\Gamma \vdash \varphi$  עבורה  $\Gamma \subseteq N$  אזי קיימת  $\Gamma \subseteq N$  אזי קיימת פומפקטיות: תהאינה  $\Gamma \vdash \varphi$  אזי  $\Gamma \vdash \varphi$  מתקיים  $\Gamma \vdash \varphi$  מתקיים  $\Gamma \vdash \varphi$  אזי  $\Gamma \vdash \varphi$  אזי  $\Gamma \vdash \varphi$  אזי  $\Gamma \vdash \varphi$  מערכת הוכחה ויהי  $\Gamma \vdash \varphi$  כלל היסק המקיים ע $\Gamma \vdash \varphi$  אזי  $\Gamma \vdash \varphi$  אזי  $\Gamma \vdash \varphi$  סימון: תהא  $\Gamma \vdash \varphi$  מערכת הוכחה ויהי  $\Gamma \vdash \varphi$  כלל היסק המקיים ע .MP :  $\frac{(\alpha\Longrightarrow\beta),\alpha}{\beta}$  אזי ( $\Sigma,N,A,F$ ) מערכת הוכחה אזי (Ponens Modus).

מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כד

$$\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$$
 אלפבית: •

$$N=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\lnot,\Longrightarrow\}}$$
 נוסחאות: •

:אקסיומות

$$A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$
 -

$$A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$$

$$A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$
 -

 $.F = \{MP\}$  כללי היסק:

אזי HPC־טענה: יהיו lpha,eta נוסחאות ב

$$\vdash (\alpha \Longrightarrow \alpha)$$

$$\begin{array}{c}
. \vdash_{HPC} (\alpha \Longrightarrow \alpha) \bullet \\
. \vdash_{HPC} ((\neg \alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta)) \bullet
\end{array}$$

$$\{\neg \alpha\} \vdash_{\mathsf{LPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet$$

 $.\{\neg\alpha\} \mathrel{\mathop{\vdash}_{\rm HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet$   $\alpha \mathrel{\mathop{\vdash}_{\rm HPC}} (\neg\alpha) \mathrel{\mathop{\vdash}_{\rm HPC}} (\neg\alpha)$  מסקנה: יהיו  $\alpha,\beta$  נוסחאות ב־HPC באשר מסקנה:

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון ⊢ הוא במערכת HPC.

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$  אזי HPC משפט הדידוקציה: תהיינה חנחות מעל HPC משפט הדידוקציה: תהיינה

.Ded  $(\Gamma)=\{\alpha\in N\mid \Gamma\vdash\alpha\}$  אזי  $\Gamma\subseteq N$  ותהא ותהא מערכת הוכחה S

 $\bot$  ((¬(¬ $\alpha$ ))  $\Longrightarrow \alpha$ ) אזי HPC טענה: תהא  $\alpha$  נוסחה מעל

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

 $\left(\Gamma \vdash_{\mathsf{HPC}} \alpha\right) \Longrightarrow (\Gamma \models \alpha)$  אזי איר HPC משפט הנאותות: תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל

אזי HPC אזי מעל  $lpha,eta,\gamma$  נוחסאות מעל HPC למה: תהיינה הנחות מעל

$$.((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$$

אזי HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה lpha,eta ותהיינה HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה

$$((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \land (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$$

 $\Gamma \not\models \alpha$  המקיימת S נוסחה מעל עבורה קיימת מעל קבוצת הנחות אזי  $\Gamma$  אזי הוכחה מערכת תהא מערכת הנחות הנחות מעל אזי  $\Gamma$ סענה: תהא מערכת הוכחה  $\alpha$  ותהיינה  $\beta$  הנחות מעל  $\beta$  אזי ווהיינה  $\beta$  הנחות מעל  $\beta$  המקיימת  $\beta$  המקיימת מערכת הוכחה מערכת הוכחה מעל  $\beta$ 

 $\mathcal{A}\left(\Gamma \vdash_{S} (\neg \alpha)\right) \wedge \left(\Gamma \vdash_{S} \alpha\right)$ 

 $\Delta\subseteq \Gamma$  סופית מתקיים כי  $\Delta$  עקבית) אזי ( $\Gamma$  עקבית) הוכחה S חופית מתקיים כי  $\Delta$  עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מעל עבורה לכל  $\Delta$  קבוצת הנחות עקבית אזי  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מערכת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S $\Gamma = \Delta$  מתקיים  $\Gamma \subset \Delta$  ממקיים מעל

 $lpha\in\Gamma$  אזי אוי HPC אזי אוי HPC אזי אוים מעל מעל מעל מקסימלית מעל מקסימלית עקבית אזי קבוצת הנחות אזי  $\Gamma\vdash\alpha$ 

 $(\alpha \in \Gamma) \lor (\neg \alpha \in \Gamma)$  אזי HPC אוי הנחות עקבית מעל מעל מעל מעל מעל אזי אזי הנחות עקבית מקסימלית מעל

אזי HPC אונה  $\alpha,\beta$  קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל אורריינה  $\alpha$ 

$$(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg \alpha \in \Gamma) \lor (\beta \in \Gamma))$$

אזי  $\Gamma$  ספיקה. אזי HPC איזי מקסימלית עקבית הנחות עקבוצת הנחות סענה: תהא

 $\Gamma\subseteq \Delta$  טענה: תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית  $\Gamma$ 

. ספיקה  $\Gamma$  אזי HPC טענה: תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות עקבית מעל

 $\Gamma$ ספיקה) אזי ( $\Gamma$ עקבית) ספיקה). מסקנה: תהא  $\Gamma$  קבוצת הנחות מעל

 $.\Big(\Gamma \mathrel{\mathop{\models}} \alpha\Big) \Longleftarrow (\Gamma \mathrel{\mathop{\models}} \alpha)$  אזי HPC משפט השלמות: תהיינה הנחות מעל HPC משפט השלמות: תהיינה מעל  $(\Gamma dashlpha) \Longleftrightarrow (\Gamma dashlpha)$  אזי אוי HPC מסקנה: תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל

 $\Delta$  ספיקה) ספיקה (לכל  $\Delta$  סופית  $\Delta$  ספיקה) משפט הקומפקטיות: תהא  $\Delta$  קבוצת הנחות מעל HPC אזי

.Ass  $(\Gamma)=\{v\in\{p_i\} o\{F,T\}\mid v\models\Gamma\}$  אזי  $\Gamma\subseteq \mathsf{WFF}$  תהא רבא הא

```
. (סענה: יהי G) אינ \{\varphi_G(e)\mid e\in E\}ישני אינ G) אינ איזי G חח"ע איזי G ספיקה פשוט איזי מכוון ותהא
                     .(סופי G' סופי G' סופי G' סופי G' הינו G הינו G'2-צביע) אזי (G הינו G2-צביע).
                      G' סטנה: יהי G' גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי G' הינו G'־צביע) איז סופי G' סופי G'
                            K=\operatorname{Ass}\left(\Gamma\right) המקיימת \Gamma\subseteq\operatorname{WFF} המקיימת א עבורה K\subseteq\left\{ p_{i}
ight\} 
ightarrow\left\{ F,T
ight\} המקיימת אדירה:
                                                                                                                                      טענה: ∅ גדירה.
                                                                                                                    . גדירה \{p_i\} \rightarrow \{F,T\} גדירה טענה
                                                                                                                  . גדירה \{v\} השמה \{v\} גדירה לכל
                                                                                      .טענה: קיימת K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) שאינה גדירה
                                                                             K_{\text{finite}} = \{v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid |v^{-1}(\{T\})| < \aleph_0\} סימון:
                                                                                                                           .טענה: אינה גדירה K_{
m finite}
K=\mathrm{Ass}\,(\Gamma) סופית המקיימת \Gamma\subseteq \mathrm{WFF} עבורה קיימת עבורה עבורה קפוצה קבוצה קבוצה קבוצה אזירה באופן סופי:
                                                                                               משפט: תהא K \subseteq \mathcal{P}\left(\{p_i\} \to \{F,T\}\right) התב"ש
                                                                                                                    . גזירה וכן K^{\mathcal{C}} גדירה K
                                                                                                                        . גדירה באופן סופיK ullet
                                                                                                                . גדירה על ידי פסוק יחיד. K
                       \{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i,n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n \to \Sigma \mid i,n \in \mathbb{N}\}\} מילון: יהי \Sigma אלפבית אזי
                                                                                               C מילון אזי (C,R,F) מילון: יהי
                                                                                                R מילון אזי (C,R,F) סימני יחס במילון: יהי
                                                                                           F מילון אזי (C,R,F) סימני פונקציה במילון: יהי
                                                                      מילון סופי של סימנים. \Sigma אלפבית אזי מילון \sigma בעל מספר סופי של סימנים.
                                                                                מילון יחסי: יהי \Sigma אלפבית אזי מילון \sigma חסר סימני פונקציה.
                \{\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}, \{\text{"(",")"}\}, \{\neg,\lor,\land,\Longrightarrow\}, \{\forall,\exists\},\sigma\} מילון אזי \sigma מילון אוי \sigma אלפבית ויהי אלפבית ויהי לוגיקה מסדר ראשון: יהי
                                                                                                  \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} משתנים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                                  סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: {"(",")"}
                                                                                    \neg, \lor, \land, \Longrightarrowן: קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון
                                                                                                    \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} כמתים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                    בה. \sigma בה מסדר ראשון אזי המילון לוגיקה מסדר ראשון: תהא בה סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: בה
                                                                X_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i|i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}|i,n\in\mathbb{N}\}} איי מילון: יהי \sigma מילון אזי מילון: שמות עצם מעל מילון
                                משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי \sigma מילון ויהי t שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
                                                                                                                                       .משתנה t
                                                                                                                                  .סימן קבוע t
                                                  t=f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight) עבורם t_{1}\dots t_{n} ושמות עצם f_{i,n} שמון פונקציה ullet
                                                                                          אזי \alpha \in \sigma אזי משתנה ותהא \sigma מילון יהי משתנה מיהי הגדרה:
                                                                                                                          \forall (\alpha, x) = \forall x \alpha •
                                                                                                                          \exists (\alpha, x) = "\exists x \alpha" \bullet
                                       \{R_{n,i}\left(t_1\dots t_n
ight)\mid (i,n\in\mathbb{N})\land (נוסחאות אטומיות: יהי \sigma מילון אזי ויהי t_1\dots t_n) שמות עצם
                                     X_{\{R_{n,i}(t_1...t_n)|(i,n\in\mathbb{N})\land (נוסחאות מעל מילון: יהי \sigma מילון אזי t_1...t_n)\},\{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow,orall,\exists\} נוסחאות מעל מילון: יהי
```

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות:  $\sigma$  מילון ותהא  $\sigma$  מילון מהיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה לנוסחאות:

 $\alpha = (\beta \circ \gamma)$  עבורן  $\beta, \gamma$  וכן פעולה בולינארית  $\beta, \gamma$  וכן פעולה פיימות ויחידות נוסחאות  $\beta, \gamma$ 

 $\{p_i\} \to \{F,T\}$  טענה: הקבוצה  $\{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$  טענה: הקבוצה

קב $arphi_G:E o \mathsf{WFF}$  אזי אוי  $(v,u)\in E$  חח"ע ויהיו  $f:V o \mathsf{WFF}$  תהא מכוון תהא

. הינה קומפקטית.  $\{(\{p_i\} o \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$  הינה סענה:

 $.\varphi_G((v,u)) = "f(v) \Longrightarrow f(u)"$ 

. נוסחה אטומית lpha

 $\alpha = (\neg \beta)$  עבורה (יחידה נוסחה  $\beta$  עבורה •

```
\alpha = "Qx\beta" עבורם Q עבורם \alpha וכן משתנה \alpha וכן משתנה \beta וכן היימת ויחידה נוסחה
כך FV : \{t \mid \sigma שם עצם במילון שם עצם באירור (\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}) כדיר כדיר
                                                    . \mathrm{FV} \left( c \right) = \varnothing יהי c \in \sigma יהי •
                                                    FV(x) = \{x\} משתנה אזי x \in \sigma יהי
```

 $\operatorname{FV}(f(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \operatorname{FV}(t_i)$  אזי פונקציה אזי  $f \in \sigma$  יהיו שמות עצם ויהי •

כך FV :  $\{arphi \mid \sigma \mid \sigma$  נוסחה במילון  $\{arphi \mid \sigma \mid \sigma \in \mathbb{N}\}$  כך כך כגדיר נגדיר נגדיר

- $\mathrm{FV}(R(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \mathrm{FV}(t_i)$  אזי יחס אזי אינ ויהי  $R \in \sigma$  שמות עצם ויהי שמות ע
  - $\mathsf{FV}(\neg \varphi) = \mathsf{FV}(\varphi)$  נוסחה אזי •
- $\operatorname{FV}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{FV}(\varphi) \cup \operatorname{FV}(\psi)$  אזי אזי פעולה פעולה פעולה יהי פעולה פעולה  $\varphi, \psi$  נוסחאות יהי
  - $. \mathrm{FV} \left( Qx\varphi \right) = \mathrm{FV} \left( \varphi \right) \backslash \left\{ x \right\}$  עבורם Q ויהי משתנה x יהי משתנה  $\varphi$  יהי נוסחה •

 $\mathrm{FV}\left(arphi
ight)=arphi$  עבורה עבורה: נוסחה סגורה:

סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשוו: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .¬ .2
- $.\wedge, \vee .3$
- .⇒ .4

 $F:\{f_{n,i}\} o (D^n o D)$  וכן  $n\in\mathbb{N}$  לכל  $R:\{R_{n,i}\} o D^n$  וכן  $C:\{c_i\} o D$  ותהא ותהא  $D
eq\varnothing$  מבנה עבור מילון: יהי  $\sigma$  מילון יהי  $(D, C(c_0), \dots, R(R_{1,0}), \dots, f(f_{0,0}), \dots)$  אזי

D אזי  $\sigma$  מבנה על  $\sigma$  מבנה מהינה  $\sigma$  מילון ויהי

 $D^M=D$  אזי אזי מבנה על  $\sigma$  בעל תחום M מילון ויהי  $\sigma$  מילון יהי יהי סימון: יהי

 $(C\left(c_{0}
ight),\ldots,R\left(R_{2.0}
ight),\ldots,f\left(f_{0.0}
ight))$  אזי מבנה על  $\sigma$  מילון ויהי  $\sigma$  מילון ויהי  $\sigma$  מילון ויהי מבנה: יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $f_{n,i}^M=F\left(f_{n,i}
ight)$  וכן  $R_{n,i}^M=R\left(R_{n,i}
ight)$  וכן אזי  $c_i^M=C\left(c_i
ight)$  אזי  $\sigma$  אזי מבנה על  $\sigma$  אזי מילון ויהי  $\sigma$  מילון ויהי  $v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\} o D^M$  אזי מבנה על מבנה M מילון ויהי מילון יהי

השמה v החותהא היהי מבנה על מבנה מילון יהי  $\sigma$  מילון יהי  $\sigma$  מילון יהי מילון יהי מילון יהי

- $\overline{v}\left(c_{i}
  ight)=c_{i}^{M}$  יהי  $c_{i}\in\sigma$  סימן קבוע אזי  $c_{i}\in\sigma$
- $\overline{v}(x_i) = v(x_i)$  יהי  $x_i \in \sigma$  משתנה אזי יהי
- $\overline{v}\left(f\left(t_{1}\dots t_{n}
  ight)
  ight)=f^{M}\left(\overline{v}\left(t_{1}
  ight)\dots\overline{v}\left(t_{n}
  ight)
  ight)$  יהיו שמות עצם ויהי  $f\in\sigma$  סימן פונקציה אזי  $t_{1}\dots t_{n}$

 $orall x \in ext{FV}\left(t
ight).v_{1}\left(x
ight)=v_{2}\left(x
ight)$  שם עצם עבורו t שם עצם תהלות הסופית: יהי  $\sigma$  משפט משפט התלות משפט התלות הסופית: יהי  $\sigma$  מילון יהי  $\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t)$  אזי

> השמה אזי נגדיר ויהי  $d\in D^M$  יהי משתנה יהי השמה v השמה על מבנה על מבנה מהיהי מתוקנת: היהי מיהי מיהי מבנה על מבנה אזי מבנה על מבנה על מ  $v\left[d/x_j
> ight](x_i)=\left\{egin{array}{ll} v(x_i) & i
> eq j \\ d & \mathrm{else} \end{array}
> ight.$ ערך אמת לנוסחה: יהי  $\sigma$  מילון יהי M מבנה על  $\sigma$  ותהא אי

- $(\overline{v}(R(t_1\dots t_n))=T)\Longleftrightarrow ((\overline{v}(t_1),\dots,\overline{v}(t_n))\in R^M)$  יהיו אזי  $R\in\sigma$  סימן יחס אזי פימן יחס אזי
  - $.\overline{v}\left(\neg\alpha\right)=TT_{\neg}\left(\overline{v}\left(\alpha\right)\right)$  נוסחה אזי ( מרא lpha
  - $.\overline{v}\left(lpha\circeta
    ight)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(lpha
    ight),\overline{v}\left(eta
    ight)
    ight)$  אזי קשר בינארי אזי פשר מוסחאות ויהי lpha,eta
    - $(\overline{v}\left(\exists xarphi
      ight)=T)\Longleftrightarrow\left(\exists d\in D^{M}\left(\overline{v\left[d/x
      ight]}\left(arphi
      ight)=T
      ight)
      ight)$  תהא arphi נוסחה אזי
    - $(\overline{v}\,(\forall xarphi)=T)\Longleftrightarrow \left(orall d\in D^M\left(\overline{v\,[d/x]}\,(arphi)=T
      ight)
      ight)$  תהא arphi נוסחה אזי arphi

 $orall x \in \mathsf{FV}(t)$ . $v_1(x) = v_2(x)$  משפט התלות הסופית: יהי  $\sigma$  מילון יהי  $\sigma$  מבנה על  $\sigma$  תהיינה  $v_1, v_2$  השמות ותהא  $.\overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi)$  אזי

 $.\overline{v}\left(arphi
ight)=T$  נוסחה שפיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון  $\sigma$  תהא v השמה אזי נוסחה שביקה מבנה: יהי

 $M,v\models arphi$  אזי M מבנה על מילון  $\sigma$  תהא תהא ותהא  $\sigma$  נוסחה ספיקה ב־M מבנה על מילון

 $M,v\models \varphi$  מילון תהא  $M,v\models \varphi$  מבנה ותהא v השמה עבורם M אזי מילון תהא  $M,v\models \varphi$  מילון של נוסחה: יהי

 $\overline{v}\left(arphi
ight)=T$  מתקיים מתקיים עבורה לכל T עבורה לכל עבורה לכל  $\sigma$  מתקיים תהא v מתקיים תהא  $\sigma$  מתקיים מתקיים עבורה לכל מתקיים ת  $M,v\models\Gamma$  אזי M מבנה על מילון  $\sigma$  תהא  $\sigma$  השמה ותהא  $\sigma$  קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M $M,v\models arphi$  מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה M והשמה מילון אזי נוסחה מילון אזי נוסחה ספיקה: יהי

```
\{arphi\} \stackrel{t}{\models} \psi וכן \{\psi\} \stackrel{t}{\models} arphi עבורן arphi, \psi וכן v השמה v השמה v מילון ותהא \sigma מילון ותהא v
                                .arphi מבנה על \sigma ולכל \sigma השמה מתקיים עבורה לכל \sigma עבורה לכל \sigma עבורה לכל \sigma עבורה לכל מבנה על \sigma ולכל יהי \sigma מילון אזי נוסחה \sigma
                                                                                                                                                               \stackrel{\iota}{\models} \varphi אזי \sigmaיתקפה היהי נוסחה \varphi מילון ותהא \sigmaיהי יהי סימון: יהי
                                                            M,v\models arphi השמה מתקיים עבורה לכל אזי נוסחה arphi עבורה לכל מילון מבנה מבנה: יהי מבנה מלון מילון אזי נוסחה מחוד מבונה מבנה: יהי
                                                                                                                     M \models \varphi אזי M מבנה על מילון \sigma ותהא \sigma נוסחה נכונה ב־M אזי \sigma
                                                                                                                M\models arphi עבורו M עבורו \sigma מילון תהא \sigma נוסחה אזי מבנה \sigma
                             M\models arphi מתקיים arphi\in \Gamma עבורה לכל עבורה לכל מילון אזי קבוצת מילון מילון מבנה מבנה: יהי מבנה מבנה מילון מילון
                                                                                                 M\models\Gamma אזי M מבנה על מילון \sigma ותהא ותהא \Gamma קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי מבנה על
                                                                                                       M\models arphi עבורו קיים מבנה M עבורו מילון אזי נוסחה arphi עבור קיים מבנה M
\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi אזי \varphi אזי \sigma מילון תהא \Gamma מתקיים כי \sigma מילון תהא \sigma נוסחה עבורה לכל עוסחה עבורה לכל \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma מילון תהא \sigma נוסחה עבורה לכל
                                                                                                \{arphi\}\stackrel{v}{\models}\psi וכן \{\psi\}\stackrel{v}{\models}arphi עבורן arphi,\psi עבורן אזי נוסחאות \sigma מילון מילון אזי נוסחאות מישקולות: יהי
                                                                      .arphi מתקיים M מתקיים מבנה על מבנה על עבורה לכל אזי נוסחה \sigma מילון אזי מילון אזי נוסחה מבנה על מבנה על מילון אזי נוסחה מילון אוויים 
                                                                             .FV (arphi)=arphi עבורה arphi מילון אזי נוסחה arphi עבורה מילון
                                                                                .\Big(\Gamma \stackrel{t}{\models} arphi\Big) \Longleftarrow \Big(\Gamma \stackrel{v}{\models} arphi\Big) אזי נוסחה אזי קבוצת פסוקים ותהא קבוצת פסוקים ותהא פסוקים ותהא
                                                   \Gamma = \Gamma מילון תהא \Gamma = \Gamma קבוצת נוסחאות ותהא \varphi נוסחה אזי וועהא \Gamma = \Gamma הינה \Gamma מילון תהא \Gamma סענה: יהי \sigma מילון תהא יהי
                                                                               . (\varphi\Longleftrightarrow\psi))\Longleftrightarrow(סענה: יהי \sigma מילון ותהיינה \varphi,\psi נוסחאות אזי (\varphi,\psi הון היינה \sigma יהי מילון ותהיינה מילון ותהיינה אזי (\varphi,\psi
                                               .arphi^orall=orall x_1orall x_2\dotsorall x_narphi אזי איזי הי א הסגור האוניברסלי: יהי \sigma מילון ותהא מילון ותהא עבורה עבורה אוניברסלי: יהי מילון ותהא
                                                           .arphi^\exists=\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_narphi אזי איזי היישי: יהי \sigma מילון ותהא arphi נוסחה עבורה arphi
                                                                                                                           .\Gamma^{orall}=\left\{arphi^{orall}\midarphi\in\Gamma
ight\} יהי \sigma מילון ותהא \Gamma קבוצת נוסחאות אזי מילון יהי \sigma
                                                                                              (M\models\varphi)לשנה: יהי \sigma מילון תהא \varphi נוסחה ויהי M מבנה אזי (\varphi^{\forall} ספיק ב־\sigma
                                                           .igg(\Gamma\stackrel{v}{\models}arphiigg) \Longleftrightarrow igg(\Gamma^orall\stackrel{v}{\models}arphi^orall איי נוסחא ותהא arphi נוסחאות ותהא arphi מילון תהא \sigma מילון ויהיו G:D^M \to D^N מבנים מעל \sigma איי מילון ויהיו \sigma מילון ויהיו \sigma מילון ויהיו מורפיזם בין מבנים: יהי
                                                                                                                                                               G\left(c^{M}
ight)=c^{N} מתקיים c\in\sigma לכל סימן קבוע
                                   G\left(f^{M}\left(a_{1}\ldots a_{n}
ight)
ight)=f^{N}\left(G\left(a_{1}
ight)\ldots G\left(a_{n}
ight)
ight) מתקיים a_{1}\ldots a_{n}\in D^{M} ולכל f\in\sigma ולכל סימן פונקציה f\in\sigma
                        .((a_1\dots a_n)\in R^M)\Longleftrightarrow ((G(a_1)\dots G(a_n))\in R^N) מתקיים a_1\dots a_n\in D^M ולכל R\in\sigma ולכל סימן יחס
                                                                   Mל מ־M מילון איז מבנים איזומורפיים: יהי \sigma מילון איז מבנים M,N מעל מעל מילון איז מילון איז מבנים איזומורפיים: יהי
                                                           M,N מבנים איזומורפיים מעל \sigma ויהי \sigma פסוק אזי מבנים M,N מבנים מבנים מעל מילון יהי
                                   .= עזרת ונסמן את ונסמן ול\mathrm{Id}^M=\mathrm{Id}_M נגדיר ולכל מבנה מילון בעל אחס שיוויון ולכל דו־מקומי אזי לכל מבנה ולכל מבנה מילון בעל אחס שיוויון ו
                                                                                                                                          אזי משתנה x משתנה אזי r.s יהיו ריהיו משתנה אזי
                                                                                                                                                                                            s\left[r/x
ight]=s אם s סימן קבוע אזי s •
```

(M,v) כי מתקיים מתה  $\Gamma$  מתקיים מילון תהא  $\sigma$  מיסחות ותהא  $\varphi$  נוסחה עבורה לכל  $\sigma$  מילון תהא  $\sigma$  השמה תהא  $\sigma$  מתקיים כי

 $\Gamma \models \varphi$  אזי  $\varphi$  מודל של t

הצבת אם עצם בנוסחה: תהא  $\varphi$  נוסחה יהי r שמות עצם ויהי x משתנה אזי הצבת שם עצם בנוסחה: תהא  $\varphi$ 

 $arphi\left[r/x
ight]=R\left(t_{1}\left[r/x
ight]\ldots t_{n}\left[r/x
ight]
ight)$  אם  $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight)$  אזי  $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight)$ 

 $s[r/x] = f(t_1[r/x]...t_n[r/x])$  אם  $s = f(t_1...t_n)$  אם •

s[r/x] = r אז s = x אם s = x

s[r/x]=s משתנה אזי  $s \neq x$  סשתנה  $s \neq s$ 

```
arphi\left[r/x
ight]=\lnot\left(lpha\left[r/x
ight]
ight) אזי arphi=\lnotlpha שס arphi
```

$$.arphi\left[r/x
ight]=lpha\left[r/x
ight]\circeta\left[r/x
ight]$$
 אם  $arphi=lpha\circeta$  אזי  $arphi=lpha\circeta$ 

$$.arphi\left[r/x
ight]=orall xlpha$$
 אזי  $arphi=orall xlpha$  •

$$\varphi[r/x] = \exists x \alpha$$
 אזי  $\varphi = \exists x \alpha$  אם •

$$.arphi\left[r/x
ight]=orall y\left(lpha\left[r/x
ight]
ight)$$
 אם  $arphi=orall y lpha$  באשר  $arphi=\gamma$  באשר

$$.arphi\left[r/x
ight]=\exists y\left(lpha\left[r/x
ight]
ight)$$
 אם  $arphi=\exists ylpha$  באשר  $arphi\neq y$ 

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא arphi נוסחה ויהי x משתנה אזי

$$.r$$
 אזי שם עצם  $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight)$  אזי ש

- lphaאזי שם עצם r באשר אונשי להצבה ב־arphi אוי שם עצם arphi אוי שם עצם •
- $.\beta$ ב וכן  $\alpha$  באשר חופשי להצבה ב־ $\alpha$  אזי שם עצם ר אזי שם אזי שם יאזי  $\varphi = \alpha \circ \beta$  ה
- .rעצם שם אזי ב־ $\varphi$  אזי חופשי או אינו מופיע אינו xוכן  $\varphi=\forall y\alpha$  אם •
- .rעצם שם אזי ב־ $\varphi$  אזי חופשי או אינו מופיע או עכו  $\varphi=\exists y\alpha$  אם •
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$  וכן  $\alpha$ וכן הצבה ב־ חופשי להצבה אזי שם עצם אזי שם אזי אזי א  $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$  וכן  $\varphi = \forall y \alpha$
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$  וכן  $\alpha$ וכן הצבה בישר r חופשי שם עצם אזי שם עצם אזי אי  $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$  וכן  $\varphi = \exists y \alpha$

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר  $f:\{$ ווסחאות $\} o \mathcal{P}\left(\{x_i\}
ight)$  כך

$$.f\left(arphi
ight)=arphi$$
 אזי  $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight)$  •

$$f\left( \varphi 
ight) =f\left( lpha 
ight)$$
 אזי  $\varphi =\lnot lpha$  •

$$f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$$
 אזי  $\varphi = \alpha \circ \beta$  אם •

$$f\left( \varphi 
ight) = f\left( lpha 
ight) \cup \left\{ x 
ight\}$$
 אזי  $\varphi = orall x lpha$  .

$$f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$$
 אזי  $\varphi = \exists y \alpha$  אם •

עבור חדש עבור אז  $y\in \mathrm{FV}(r)$  לכל (לכל  $(\varphi^-)$  שם עצם אזי אזי (r) שם עצם אזי (r) שם עצם אזי אזי (r) שם עבור חדש עבור  $(\varphi^-)$  ב־ $(\varphi^-)$ .

 $v\left[\overline{v}(r)/x
ight](y)=\left\{egin{array}{ll} v(y) & x
eq y \\ \overline{v}(r) & ext{else} \end{array}
ight.$  השמה אזי נגדיר השמה s שם עצם אזי נגדיר השמה s שם עצם יהי s שם עצם אזי נגדיר השמה אזי נגדיר השמה אויהי

 $\overline{v}\left(s\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(s
ight)$  אזי שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי r

 $.\overline{v}\left(arphi\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(arphi
ight)$  אזי arphi אזי משתנה ויהי r משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־arphi אזי arphi

 $\overline{v}\left(arphi
ight)=\overline{v\left[v(x)/y
ight]}\left(arphi\left[y/x
ight]
ight)$  אזי היא arphi מסקנה: תהא arphi נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה ב־arphi

טענה שינוי שם משתנה: תהא  $\varphi$  נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־ $\varphi$  אזי

$$.(\exists x\varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi [y/x])) \bullet$$

$$.(\forall x\varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi [y/x])) \bullet$$

 $X_{\{arphi|}$  נוסחה חסרת כמתים :PNF הצורה הנורמלית

מסקנה: תהא  $\varphi$  נוסחה אזי (Q בצורת PNF) (קיימת נוסחה  $\alpha$  חסרת כמתים וכן  $\alpha$  משתנים וכן בצורת (PNF) (בצורת  $\alpha$  בצורת  $\alpha$ ). ( $\varphi=Q_1x_1\dots Q_nx_n\alpha$ ).

טענה: תהיינה  $arphi,\psi$  טענה:

$$(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)) \bullet$$

$$(\exists x (\varphi \lor \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \lor (\exists x \psi)) \bullet$$

$$((\forall x\varphi) \lor \psi) \equiv^t (\forall x (\varphi \lor \psi))$$
 אזי  $x \notin FV(\psi)$  תהא

$$((\exists x\varphi) \land \psi) \equiv^t (\exists x (\varphi \land \psi))$$
 אזי  $x \notin FV(\psi)$  תהא

$$(\neg (\forall x\varphi)) \equiv^t (\exists x (\neg \varphi)) \bullet$$

$$(\neg (\exists x\varphi)) \equiv^t (\forall x (\neg \varphi)) \bullet$$

 $.arphi\equiv^tlpha$  עבורה PNF בצורת נוסחה אזי קיימת נוסחה אזי קיימת נוסחה משפט: תהא arphi

 $arphi=orall x_1\ldotsorall x_n$  המקיימת עבורו קיימת נוסחה lpha חסרת כמתים באשר השר אוניברסלי: פסוק arphi עבורו קיימת נוסחה הסרת כמתים באשר

 $arphi=\exists x_1\ldots\exists x_n$ מ המקיימת FV  $(lpha)=\{x_1\ldots x_n\}$  המשרי מחסרת מחלים פישר lpha המקיימת נוסחה lpha

 $(\sigma \cup \{c\})$  ספיקה מעל  $\varphi$  ( $\sigma \cup \{c\}$  ספיקה מעל  $\sigma$  ויהי סימן קבוע  $\sigma$  אזי ( $\sigma \cup \{c\}$  ספיקה מעל  $\sigma$  ויהי סימן קבוע  $\sigma$  אזי ( $\sigma \cup \{c\}$ 

 $\sigma \cup \{f\}$  ספיק מעל המילון  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \left( \varphi \left[ f(y_1 \ldots y_n)/x \right] \right) \right) ($  ספיק מעל  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x \varphi )$  ספיק מעל המילון פונקציה g נוסחה מעל מילון  $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x \varphi \in \forall x \varphi \in \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x \varphi \in \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x \varphi \in \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x \varphi \in \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x \varphi \in \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x \varphi \in \forall y_1 \ldots \forall y_n \forall y$ 

 $\operatorname{sk}(\varphi)$ ) (ספיק) עבורו  $\sigma'$  עבורו משפט סקולם: קיים אלגוריתם אוניברסלי מעל מילון מעל מילון  $\sigma$  מעל מילון מעל מילון מעל מילון  $\sigma$ 

 $\operatorname{sk}(\varphi)$  מילון מוגדר מינימלי המילון המינימלי מוגדר פקולמיזציה מילון יהי  $\sigma$  מילון מילון מוגדר

המקיים WFF מעל פסוק המקבל ומחזיר משתנים וכמתים מעל מילון ללא שיוויון ומחזיר משתנים הסרת הסרת המקבל נוסחה המקבל המקנים ענה: קיים אלגוריתם

- .(ספיק) ספיק) ספיק) •
- .(טאוטולוגיה) מקפה)  $(\alpha)$  תקפה) •

 $v\left(p_i
ight)=$  כך WFF כך WFF נוסחה מדיר השמה מוסחת המורכבת מהנוסחאות המורכבת מהנוסחאות משתנים וכמתים כך  $lpha_i\ldotslpha_k$  אזי  $(M\models\varphi)\Longleftrightarrow (\overline{v}\left( ext{FOLWFF}\left(arphi
ight))=T
ight)$  אזי מיזי אזי  $(M\models\alpha_i)$ 

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

- $lpha^M=a$  לכל lpha=a קיים שם עצם סגור  $lpha=a\in D^M$ 
  - $lpha^M 
    eq eta^M$  יהיו lpha, eta שמות עצם שונים אזי •

בן־מנייה.  $D^M$ יהי של  $\sigma$  של מבנה הרברנד ויהי ויהי  $D^M$ יהי יהי מסקנה: מסקנה מילון בן־מנייה ויהי

 $D^M = \{ \varphi \mid \sigma$ ם משתנים ב־ס חסר שם עצם לכתוב לכתוב כי ניתן לכתוב כי ניתן לכתוב הרברנד נובע כי ניתן לכתוב שם חסר משתנים ב-

 $.\sigma$ על M מסקנה: יהי קיים קבוע אזי סימן בעל מילון מילון יהי  $\sigma$ יהי יהי מסקנה:

 $v\left(x_{i}
ight)=t_{i}$  אזי היהי M מבנה הרברנד מעל  $\sigma$  ותהא ותהא  $v\left(x_{i}
ight)$ 

- $.\overline{v}\left(r
  ight)=r\left[{}^{t_{1}}\!/x_{1},\ldots,{}^{t_{n}}\!/x_{n}
  ight]$  אזי  $\mathrm{FV}\left(r
  ight)=\left\{x_{1}\ldots x_{n}
  ight\}$  שם עצם באשר  $\cdot$
- $(M,v\models\varphi)\Longleftrightarrow (M\models\varphi\left[t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n
  ight])$  אזי FV  $(\varphi)=\{x_1\ldots x_n\}$  נוסחה באשר
  - . עבורו  $\varphi\left[s/x
    ight]$  ספיקה) שם עצם סגור s עבורו  $\varphi\left(s/x
    ight)$  ספיקה). תהא  $\varphi$  נוסחה אזי
- . תפאה)  $\varphi$  [s/x] מתפה) איי (קיים שם עצם סגור s עבורו (קיים שה  $\#\varphi$  מוך  $\#\varphi$  תקפה).
  - . (לכל שם עצם סגור s מתקיים כי  $\forall x \varphi$ ) ספיקה) ספיקה) פיקה) ספיקה) פיקה) מתקיים כי  $\forall x \varphi$
- . תקפה)  $\varphi$  (s/x מתקיים כי s/x מתקיים שם עצם חסר שם עצם (לכל שם עצ $\phi/x$  תקפה) אזי ( $\phi/x$  מתקיים כי  $\phi/x$

משפט הרברנד: יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $\varphi$  פסוק אוניברסלי אזי ( $\varphi$  ספיק) ספיק במבנה הרברנד: יהי  $\sigma$  מילון ויהי

אזי FV  $(arphi)=\{x_1\dots x_n\}$  אזי בסיס: תהא arphi נוסחה חסרת כמתים באשר

.GroundInstance  $(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi) = \{ \varphi \left[ s_1/x_1, \dots, s_n/x_n \right] \mid GroundInstance \left( \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi \right) = s_1 \dots s_n \}$ 

. GroundInstance  $(\Gamma)=\bigcup_{\varphi\in\Gamma}$  GroundInstance  $(\varphi)$  אזי אוניברסליים אוניברסליים האזי קבוצת פסוקים אוניברסליים האזי

סענה: תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים סגורים חסרי כמתים אזי  $\Gamma$  ספיקה) כמבנה הרברנד).

משפט: תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- . ספיקה  $\Gamma$
- ספיקה במבנה הרברנד.  $\Gamma$
- ספיקה. GroundInstance  $(\Gamma)$
- ספיקה במבנה הרברנד. GroundInstance  $(\Gamma)$

משפט הקומפקטיות: יהי  $\sigma$  מילון ללא שיוויון תהא  $\Gamma$  קבוצת נוחסאות יהי יהי  $\sigma$  יהי יהי

- . ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה)  $\Delta \subseteq \Gamma$
- .( $\Delta \stackrel{t}{\models} \varphi$  סופית עבורה  $\Delta \subseteq \Gamma$  קיימת סופית עבורה ( $\Gamma \stackrel{t}{\models} \varphi$ ).
- $\Delta \subseteq \varphi$  סופית עבורה  $\Delta \subseteq \Gamma$ ). ( $\Gamma \models \varphi$ ).

 $(y^-)$  מיש מסלול ב $M^-$ (יש מסלול ב $M^-$ (קיימים שמות עצם סגורים בעל קבור  $M^-$ (קיימים שמות עצם סגורים בעל קבור  $M^-$ (קיימים שמות עצם סגורים בעל קבור  $M^-$ ( $M^-$ ) בורם בעל קבוע תהא  $M^-$ ( $M^-$ ) בורם מעל  $M^-$ ( $M^-$ ) איי (קיימים שמות עצם סגורים בעל קבוע תהא בער ( $M^-$ ) בעבורם בעל קבוע תקפה).

 $|M| = |D^M|$  אזי  $\sigma$  אזי ויהי  $\sigma$  מילון ויהי  $\sigma$  מילון יהי

 $\varphi$  בו M משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  אזי ( $\varphi$  ספיקה) $\iff$ (קיים מבנה לכל היותר בן־מנייה  $\sigma$  מילון ותהא  $\sigma$  טופיקה).

משפט לוונהיים־סקולם העולה: יהי  $\sigma$  מילון יהי M מבנה בן־מנייה ותהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  באשר  $\sigma$  ספיקה ב־M מינסופית  $\sigma$  מעוצמה  $\sigma$  מעוצמה  $\sigma$  עבורו  $\sigma$  ספיקה ב־M.

 $(|M|=\kappa) \Longleftrightarrow (M\models \Gamma)$  משקנה: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\kappa$  עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  מעל  $\kappa$ הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

.VALID =  $\{\langle \sigma, \varphi \rangle \mid (\sigma$  מוסחה מעל  $\varphi ) \wedge (\sigma$  תקפה  $\varphi ) \}$ 

 $ext{.VALID} \in \mathcal{RE}$  משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי  $\sigma$  מילון אזי

.HALT  $\leq_m$  VALID משפט צ'רץ'־טיורינג:

.VALID  $\notin \mathcal{R}$  מסקנה:

בעזרת  $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$  את ניתן לרצף אזי האם ניתן צבועה בעבע אזי האם בעלי צלע מאורך 1 וכן כל צלע שלהם צבועה בצבע אזי האם ניתן לרצף את הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

עבורה  $f:\mathbb{N}^2 o [n]$  אזי  $R:[n]^2 imes \{ ext{left, right, above, below}\} o \{ ext{yes, no}\}$  עבורה  $n\in\mathbb{N}_+$  יהי

- $R\left(f\left(rac{n}{m}
  ight),f\left(rac{n-1}{m}
  ight),\operatorname{left}
  ight)=\operatorname{yes}$  מתקיים  $n\in\mathbb{N}_{+}$  ולכל  $m\in\mathbb{N}$ 
  - $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n+1\\m\end{smallmatrix}\right),\mathrm{right}\right)=\mathrm{yes}$  מתקיים  $m,n\in\mathbb{N}$  לכל
- $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m+1\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n\\m+1\end{smallmatrix}\right),\mathsf{above}\right)=\mathsf{yes}$  מתקיים  $n\in\mathbb{N}_{+}$  ולכל  $m,n\in\mathbb{N}$ 
  - $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m-1\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n\\m-1\end{smallmatrix}\right),$  below)= yes מתקיים  $n\in\mathbb{N}$  ולכל  $m\in\mathbb{N}_{+}$  לכל

.TILING =  $\{(n,R,f) \mid R$  סימון:  $f\}$  פתרון לבעיית הריצוף עבור

.VALID  $\leq_m$  TILING :משפט

.TILING  $otin \mathcal{R}$  :מסקנה

יחס דו־מקומי המקיים  $E \in \sigma$  מילון אזי  $\sigma$  יהי דו־מקומי יחס דו־מקומי יחס יחס

- $\forall x (E(x,x))$  רפלקסיבי
- $\forall x \forall y (E(x,y) \Longrightarrow E(y,x))$  סימטרי:
- $\forall x \forall y \forall z ((E(x,y) \land E(y,z)) \Longrightarrow E(x,z)) :$  טרנזיטיבי:
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
  ight)
  ight) \Longrightarrow E\left(f\left(x_1 \ldots x_n
  ight), f\left(y_1 \ldots y_n
  ight)
  ight)
  ight)$  פימן פונקציה מתקיים  $f \in \sigma$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
  ight)\right) \Longrightarrow \left(R\left(x_1 \ldots x_n\right) \Longleftrightarrow R\left(y_1 \ldots y_n\right)\right)\right)$  סימן יחס מתקיים שליים לכל ס

הערה: במקום קונגרואנציה קונגרואנציה פחור את  $\sigma_E$  מיתן מילון עם השיוויון בתור השיוויון בתור השיוויון בתור קונגרואנציה במקום היינתן מילון עם שיוויון  $\sigma$ שיוויון.

מעל  $\sigma_E$  מעל מחלקות מחלקות מילון ויהי שיוויון ויהי מילון מחלקות מילון מחלקות מילון יהי הי מילון מחלקות מילון מחלקות מילון מחלקות מילון מחלקות מילון מחלקות מילון מחלקות מילון מילון מחלקות מילון מילון מחלקות מילון מ

- $.D^{M'}=D^{M}/E$  •
- $.f^{M'}\left([a_1]_E\,,\ldots,[a_n]_E
  ight)=\left[f^M\,(a_1\ldots a_n)
  ight]_E$  מתקיים של פונקציה לכל סימן פונקציה ס $f\in\sigma$ 
  - $R^{M'}\left([a_1]_E,\ldots,[a_n]_E
    ight) \Longleftrightarrow R^M\left(a_1\ldots a_n
    ight)$  מתקיים  $R\in\sigma$  לכל סימן יחס  $R\in\sigma$

arphi סימני היחס היחס היחס היחס מעל מילון עם שיוויון  $\sigma$  באשר החלפת היחס היחס היחס היחס מעל מילון עם שיוויון  $\sigma$  באשר שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא  $.arphi_E=arphi\left[E/=
ight]\wedge\left(n$ יחס שקילות יחס קונגרואנציה ביחס ליEיחס קונגרואנציה ביחס ליEיחס קונגרואנציה ביחס ליEיחס קונגרואנציה ביחס לי

 $v_E:\{x_i\} o D^{M_E}$  נוסחה מעל מילון  $\sigma$  עם שיוויון יהי M מבנה מעל  $\sigma$  ותהא  $\sigma$  ותהא עוסחה מעל מילון עם שיוויון יהי  $(M_E, v_E \models \varphi_E) \Longleftrightarrow (M, v \models \varphi)$  אזי  $v_E(x_i) = [v(x_i)]_E$ 

 $\sigma'$  משפט:  $\psi$  מעל מילון שבאשר  $\psi$  באשר שיוויון מחזיר נוסחה מחסרת מילון עם שיוויון מעל מילון באשר  $\varphi$  מעל מילון משפט: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה באשר שי מעל מילון עם שיוויון  $\psi$  ספיק) ספיק) עבורו  $\psi$  ספיק).

. (ספיקה) ביקה) אזי  $(\Gamma_E)$  ספיקה) משפט: תהא  $(\Gamma_E)$  ספיקה מעל  $(\Gamma_E)$  ספיקה) משפט: תהא

 $\Delta$  משפט הקומפקטיות: יהי  $\sigma$  מילון עם שיוויון תהא  $\Gamma$  קבוצת נוחסאות ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי ( $\Gamma$  ספיקה) שיוויון תהא  $\sigma$  סופית משפט הקומפקטיות: ספיקה).

עבורו  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  אזי מבנה  $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$  עבורו יהי מילון

- $c_1^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=1$  וכן  $c_0^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=0$  וכן  $D^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=\mathbb{N}$ 

  - $$\begin{split} .f_{+}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\left(a,b\right) &= a+b & \bullet \\ .f_{+}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\left(a,b\right) &= a\times b & \bullet \\ .\left((a,b) \in R_{>}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\right) & \Longleftrightarrow (a>b) & \bullet \end{split}$$

 $AT = \{lpha \mid (\mathcal{M}_\mathbb{N} \models lpha) \land ( ext{FV}(lpha) = arnothing)\}$  אזי  $\{c_0, c_1, f_+, f_ imes, R_>\}$  פסוקים נכונים אריתמטית: יהי מילון

 $M_\mathbb{N}$ וכן  $M \models$  אינו איזומורפי ל־ $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$  וכן אינו איזומורפי ל־ $M \models$  איזי מבנה מודל לא סטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון

 $|D^M|>leph_0$  יהי אזי של סטדנרטי אס מודל א מודל מודל M

. Gen :  $\frac{\alpha}{\forall x \alpha}$  אזי נוסחה מילון ותהא מילון יהי  $\sigma$  מילון יהי

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי  $\sigma$  מילון מיוויון אזי

- $\Sigma = \sigma$  :אלפבית
- $N = X_{\{t \mid$ שם עצם  $t\}, \{\neg, \Longrightarrow, \forall\}}$  : נוסחאות:
  - אקסיומות:
  - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$  -

$$A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma))) -$$

$$A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$

- $A_4 = ((\forall x \alpha) \Longrightarrow \alpha \, [t/x])$  יהי אזי שם עצם חופשי להצבה במקום x ב־מ
  - $A_5 = ((\forall x (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow (\forall x \beta)))$  אזי  $x \notin FV(\alpha)$  יהי -
    - $.F = \{ MP, Gen \}$  כללי היסק:

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

 $(\Gamma \ \vdash \ \alpha) \Longrightarrow \left(\Gamma \ \vdash \ \alpha\right)$  אזי אי HC ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל אי HC ותהא  $\alpha$  נוסחה מעל אין תהיינה  $\alpha$  מילון ללא שיוויון תהיינה  $\alpha$  הנחות מעל ענה: יהי  $\alpha$  פסוק באשר  $\alpha$  וכן  $\alpha$  וכן  $\alpha$  וכן  $\alpha$  ויהיו  $\alpha$  (פו ויהיו  $\alpha$  נוסחאות אזי ווער  $\alpha$  פסוק באשר  $\alpha$  באשר  $\alpha$  וכן  $\alpha$  ונחסאות מעל אור ווער עבורן  $\alpha$  ובן בהוכחה לא הופעל כלל  $\alpha$  ווער משפט הדידוקציה: תהיינה  $\alpha$  הנחות מעל  $\alpha$  ווער וותהיינה  $\alpha$  ווער משתנה חופשי ב $\alpha$  אזי ווער  $\alpha$  אזי ווער משתנה חופשי ב $\alpha$  אזי ווער משתנה חופשי ב $\alpha$  אזי ווער משתנה חופשי ב $\alpha$  אזי ווער משתנה חופשי בי

על משתנה חופשי ב־ $\alpha$  אזי ( $\alpha\Longrightarrow\beta$ ) אזי ( $\alpha\Longrightarrow\alpha$  אזי על משתנה חופשי ב- $\alpha$  אזי ( $\alpha\Longrightarrow\beta$ ) אזי ( $\alpha\Longrightarrow\beta$  וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה: תהיינה  $\alpha$  הנחות מעל HC ותהיינה ותהיינה ( $\alpha$ ) וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה:  $\alpha$  הנחות מעל  $\alpha$ 0 וכן בהוכחות מעל  $\alpha$ 1 וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה:  $\alpha$ 3 אזי  $\alpha$ 4 אזי  $\alpha$ 5 אזי  $\alpha$ 6 הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב- $\alpha$ 3 אזי  $\alpha$ 4 אזי  $\alpha$ 5 אזי  $\alpha$ 6 הופעל כלל

 $\sigma$  מעל  $\varphi$  מעל  $\sigma$  עבורה לכל פסוק מעל  $\sigma$  מעל  $\sigma$  מעל  $\sigma$  מילונים באשר  $\sigma$  מילונים באשר  $\sigma$  אזי קבוצת נוסחאות  $\sigma$  מעל  $\sigma$  מילונים באשר  $\sigma$ 

 $egthin \neg \forall x arphi \in \Gamma$  פסוק וכן  $egthin \neg \forall x arphi$  באשר  $egthin \varphi$  באשר בעלת תכונת הנקין: יהי  $egthin \sigma$  מילון אזי קבוצת נוסחאות  $egthin \Gamma$  עבורה לכל נוסחה  $egthin \varphi (c \neq x) = \neg \varphi (c \neq$ 

 $\Gamma\subseteq\Delta$  המקיימת  $\Sigma$  המלון עקבית עקבית וקיים מילון היים מילון מילון אזי קיים מילון עקבית יהי מילון יהי מילון עקבית מילון יהי  $\sigma\subseteq\Sigma$ 

 $\Gamma \cup \{ \neg \varphi \, [c/x] \}$  אזי קבוע אזי  $c \notin \sigma$  ויהי  $\neg \forall x \varphi \in \Gamma$  פסוק וכן  $\neg \forall x \varphi$  פסוק נוסחה באשר  $\sigma \neq \sigma$  טימן קבוע אזי  $\sigma \in \sigma$  עקבית מעל  $\sigma \in \sigma$ 

 $\Gamma\subseteq \Delta$  משפט הנקין: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית אזי קיים מילון  $\sigma\subseteq \Sigma$  וקיימת א עקבית מעל  $\sigma$  מעל  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית אזי קיים מילון עבורה אזי קיים מילון  $\sigma\subseteq \Sigma$  וקיימת  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית  $\sigma$ -שלמה המקיימת את תכונת הנקין עבורה  $\sigma$  מילון ותהא  $\sigma$  עקבית אזי קיים מילון  $\sigma$  וקיימת  $\sigma$  וקיימת  $\sigma$  מעל  $\sigma$ 

עבורו מעל  $\sigma$  עבורו מגנה ההרברנד מעל חלות המקיימת את את את מסענה: יהי מילון תהא עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין יהי ש

נוסחה אזי  $t_1\dots t_n$  ולכל שמות עצם ואזי רכל סימן לכל ( $(t_1\dots t_n)\in R^M$ ) וותהא  $(R(t_1\dots t_n)\in \Gamma)$  ותהא  $(\varphi\in \Gamma)\Longleftrightarrow (M\models\varphi)$ 

 $M\models\Gamma$ עבורו עבורו אזי קיים הנקין אזי תכונת את עבורו שלמה שלמה עקבית עקבית מילון יהי  $\sigma$ יהי יהי מסקנה: יהי שלמה שלמה שלמה אלמה מסקנה

 $\left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$  אזי ( $\Gamma \overset{v}{\models} \alpha$ ) משפט השלמות: תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל HC ותהא ותהא  $\Gamma \hookrightarrow \Omega$  ותהא  $\Gamma \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega$  הנחה של מבנה: יהי  $\Gamma \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega$  מבנה מעל מילון  $\Gamma \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega$  אזי ( $\Gamma \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega$  מסקנה: Th  $\Gamma \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega \hookrightarrow \Omega$ 

טענה: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  קבוצת מילון יהי  $\sigma$ 

- . Th  $(M)={
  m Th}\,(N)$  מתקיים מתקיים M,N המספקים לכל •
  - $(\Gamma \vdash \varphi) \lor (\Gamma \vdash (\neg \varphi))$  מתקיים  $\varphi$  מתקיים •