אלפבית: קבוצה Σ המקיימת $0<|\Sigma|<\aleph_0$.

מילים: יהי Σ אלפבית אזי $\Sigma^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}\Sigma^n$.

אורך של מילה: יהי Σ אלפבית ותהא $w\in\Sigma^n$ מילה אזי $|w|=n$.

המילה הריקה: יהי Σ אלפבית אזי $\varepsilon\in\Sigma^*$ עבורה $|\varepsilon|=0$.

היפוך מילה: תהא $\langle w_1\dots w_n\rangle\in\Sigma^*$ אזי $\langle w_1\dots w_n\rangle^R=\langle w_n\dots w_1\rangle$.

שרשור מילים: תהיינה $\langle w_1\dots w_n\rangle,\langle\omega_1\dots\omega_m\rangle\in\Sigma^*$ אזי $\langle w_1\dots w_n\rangle\langle\omega_1\dots\omega_m\rangle=\langle w_1\dots w_n,\omega_1\dots\omega_m\rangle$.

חזקה של מילה: תהא $\langle w_1\dots w_n\rangle\in\Sigma^*$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\langle w_1\dots w_n\rangle^m=\prod_{i=1}^m\langle w_1\dots w_n\rangle$.

מספר המופעים של אות במילה: תהא $w\in\Sigma^n$ ותהא $\sigma\in\Sigma$ אות אזי $\#_\sigma(w)=|\{i\in[n]\mid w_i=\sigma\}|$.

שפה: יהי Σ אלפבית אזי $L\subseteq\Sigma^*$.

היפוך שפה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $L^R=\left\{w^R\mid w\in L\right\}$.

שרשור שפות: תהיינה $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$ שפות אזי $L_1\parallel L_2=L_1L_2=\{w\omega\mid(w\in L_1)\wedge(\omega\in L_2)\}$.

חזקה של שפה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $L^m=\left\{\prod_{i=1}^k w_i\mid\forall i\in[k].w_i\in L\right\}$.

סגור קליני של שפה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $L^*=\bigcup_{k=0}^{\infty}L^k$.

שפת הרישא: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $\text{prefix}(L)=\{y\in\Sigma^*\mid\exists x\in\Sigma^*.yx\in L\}$.

שפת הסיפא: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי $\text{suffix}(L)=\{y\in\Sigma^*\mid\exists x\in\Sigma^*.xy\in L\}$.

אלגוריתם מכריע שפה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי אלגוריתם $A:\Sigma^*\to\{\text{true},\text{false}\}$ המקיים

- מקבל: לכל $x\in L$ מתקיים $A(x)=\text{true}$.
- דוחה: לכל $x\notin L$ מתקיים $A(x)=\text{false}$.

פונקציה בולאנית: תהיינה $n,m\in\mathbb{N}$ אזי $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}^m$.

בסיס פונקציות בוליאניות: תהיינה $f_1\dots f_n$ פונקציות בוליאניות אזי $\{f_1\dots f_n\}$.

בסיס דה־מורגן: $\mathcal{B}=\{\wedge,\vee,\neg\}$.

הערה: תמיד נוסיף לבסיס את הפונקציות הקבועות.

מעגל בוליאני: יהי $\mathcal{B}$ בסיס פונקציות בוליאניות תהיינה $k_1\dots k_n\in\mathbb{N}_+$ תהיינה $f_1\dots f_n\in\mathcal{B}$ באשר $f_i:\{0,1\}^{k_i}\to\{0,1\}$ לכל $i\in[n]$ ותהיינה $x_1\dots x_m,y_1\dots y_k\in\{0,1\}$ אזי גרף מכוון G מעל $\{f_1\dots f_n,x_1\dots x_m,y_1\dots y_k\}$ המקיים

- G חסר מעגלים מכוונים.
- לכל $i\in[m]$ מתקיים $\deg^-(x_i)=0$.
- לכל $i\in[n]$ מתקיים $\deg^-(f_i)=k_i$.
- לכל $i\in[k]$ מתקיים $\deg^-(y_i)=1$ וכן $\deg^+(y_i)=0$.

שערים במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $f_1\dots f_n$.

קלטים במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $x_1\dots x_m$.

פלטים במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $y_1\dots y_k$.

חוטים במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $E(C)$.

fan-out במעגל בוליאני: יהי C מעגל בולינארי אזי $\max_{v\in V(C)}\deg^+(v)$.

נוחסאות במעגל בוליאני: יהי C מעגל בולינארי אזי $\{G\leq C\mid \text{ה־fan-out של } G \text{ הוא } 1\}$.

שערוך מעגל בולינארי על קלט: יהי C מעגל בולינאני ויהי $v\in\{0,1\}^m$ אזי $v=(x_1\dots x_m)$ וכן y_i הינו הפלט הנוצר מהפעלת הפונקציות הבוליאניות על הקודקודים הנכנסים.

סימון: יהי C מעגל בולינאני ויהי $v\in\{0,1\}^m$ אזי השערוך של C על v הוא $C(v)=(y_1\dots y_k)$.

מעגל מקבל מילה: יהי C מעגל בעל פלט יחיד אזי $w\in\{0,1\}^n$ עבורו $C(w)=1$.

שפה של מעגל: יהי C מעגל בעל פלט יחיד אזי $L(C)=\{x\in\{0,1\}^n\mid C \text{ מקבל את } x\}$.

מעגל מחשב פונקציה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי מעגל בולינאני C עבורו לכל $v\in\{0,1\}^n$ מתקיים $C(v)=f(v)$.

משפט אוניברסליות דה־מורגן: תהא $f:\{0,1\}^m\to\{0,1\}^k$ אזי קיים מעגל בוליאני C מעל בסיס דה־מורגן עבורו לכל $v\in\{0,1\}^m$ מתקיים $C(v)=f(v)$.

הערה: מכאן והלאה כל המעגלים הם בוליאניים ומעל בסיס דה־מורגן.

משפחה של מעגלים: מעגלים $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ עבורם C_i מקבל קלט באורך i.

שפה של משפחת מעגלים: תהא $\mathcal{C}$ משפחה של מעגלים אזי $L(\mathcal{C})=\left\{x\in\{0,1\}^*\mid x\in L\left(\mathcal{C}_{|x|}\right)\right\}$.

משפחה מכריעה שפה: תהא $\mathcal{L}\subseteq\{0,1\}^*$ שפה אזי משפחה של מעגלים $\mathcal{C}$ עבורה $L(\mathcal{C})=\mathcal{L}$.

הערה מודל לא יוניפורמי: משפחה של מעגלים $\mathcal{C}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ יש אלגוריתם שונה.

הערה מודל יוניפורמי: משפחה של מעגלים $\mathcal{C}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ יש אלגוריתם זהה.

גודל מעגל: יהי C מעגל בוליאני אזי $|C|$ מספר השערים ומספר הקלטים ב־C.

חסם עליון לגודל משפחת מעגלים: תהא $\mathcal{C}$ משפחה של מעגלים אזי $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה $|\mathcal{C}_n|\le S(n)$.

טענה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי קיים מעגל C שמחשב את f בגודל $\mathcal{O}(n\cdot2^n)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{L}\subseteq\{0,1\}^n$ אזי קיים מעגל C עבורו $L(C)=\mathcal{L}$ וכן $|C|=\mathcal{O}(n\cdot2^n)$.

טענה: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי קיים מעגל C שמחשב את f בגודל $\mathcal{O}(2^n)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{L}\subseteq\{0,1\}^n$ אזי קיים מעגל C עבורו $L(C)=\mathcal{L}$ וכן $|C|=\mathcal{O}(2^n)$.

משפט לופיאנוב: תהא $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ אזי קיים מעגל C שמחשב את f בגודל $\mathcal{O}\left(\frac{2^n}{n}\right)$.

טענה שאנון: קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו קיימת $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ שאינה ניתנת לחישוב בעזרת מעגל C בגודל קטן מאשר $\frac{2^n}{10n}$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי (אס"ד): תהא $Q\neq\varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית תהא $\delta:Q\times\Sigma\to Q$ יהי $q\in Q$ ותהא $F\subseteq Q$ אזי (Q,Σ,δ,q,F).

מצבים באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי Q.

אלפבית באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי Σ.

פונקציית מעברים באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי δ.

מצב התחלתי באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי q.

מצבים מקבלים באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,q,F) אס"ד אזי F.

פונקציית המעברים המורחבת: יהי (Q,Σ,δ,q_0,F) אס"ד אזי $\hat{\delta}:Q\times\Sigma^*\to Q$ עבורה לכל $q\in Q$ מתקיים $\hat{\delta}(q,\varepsilon)=q$ וכן לכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים $\hat{\delta}(q,x)=\delta\left(\hat{\delta}(q,x_1\ldots x_{n-1}),x_n\right)$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי מקבל מילה: יהי (Q,Σ,δ,q_0,F) אס"ד אזי $x\in\Sigma^*$ המקיים $\hat{\delta}(q_0,x)\in F$.

טענה: יהי A אס"ד ויהי $x\in\Sigma^n$ אזי (A מקבל את x)$\Longleftrightarrow$(קיימים $q_1\ldots q_n\in Q$ עבורם $\delta(q_{i-1},x_i)=q_i$ לכל $i\in[n]$ וכן $q_n\in F$).

שפה של אוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי A אס"ד אזי $L(A)=\{x\in\Sigma^*\mid x \text{ מקבל את } A\}$.

שפה רגולרית: יהי Σ אלפבית אזי שפה $\mathcal{L}\subseteq\Sigma^*$ עבורה קיים אס"ד A המקיים $L(A)=\mathcal{L}$.

טענה: $\varnothing$ רגולרית.

טענה: $\{\varepsilon\}$ רגולרית.

טענה: $\{x\mid\#_1(x)=1\mod 2\}$ רגולרית.

טענה: $\left\{y\,1\,0^{2k}\mid\left(y\in\{0,1\}^*\right)\wedge(k\in\mathbb{N})\right\}$ רגולרית.

טענה: יהיו $L_1,L_2,L_3\subseteq\Sigma^*$ שפות אזי $L_1(L_2L_3)=(L_1L_2)L_3$.

טענה: תהא $L\subseteq\Sigma^*$ שפה באשר $L\neq\varnothing$ וכן $L\neq\{\varepsilon\}$ אזי L^* אינסופית.

משפט: תהיינה $L,\mathcal{L}\subseteq\Sigma^*$ שפות רגולריות אזי

- $L\cup\mathcal{L}$ רגולרית.
- $L\cap\mathcal{L}$ רגולרית.
- $\overline{L}$ רגולרית.
- $L\|\mathcal{L}$ רגולרית.
- לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי L^n רגולרית.
- L^* רגולרית.

מסקנה: $\{x\mid\#_1(x)=0\mod 2\}$ רגולרית.

אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס (אסלד"ם): תהא $Q\neq\varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית תהא $\delta:Q\times\Sigma\to\mathcal{P}(Q)$ ותהיינה $S,F\subseteq Q$ אזי (Q,Σ,δ,S,F).

מצבים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי Q.

אלפבית באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי Σ.

פונקציית מעברים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי δ.

מצבים התחלתיים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי S.

מצבים מקבלים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי F.

פונקציית המעברים המורחבת: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי $\hat{\delta}:\mathcal{P}(Q)\times\Sigma^*\to\mathcal{P}(Q)$ עבורה לכל $T\subseteq Q$ מתקיים $\hat{\delta}(T,\varepsilon)=T$ וכן לכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים $\hat{\delta}(q,x)=\bigcup_{q\in\hat{\delta}(T,x_1\ldots x_{n-1})}\delta(q,x_n)$.

אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס מקבל מילה: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסלד"ם אזי $x\in\Sigma^*$ המקיים $\hat{\delta}(S,x)\cap F\neq\varnothing$.

טענה: יהי M אסלד"ם ויהי $x\in\Sigma^n$ אזי (M מקבל את x)$\Longleftrightarrow$(קיימים $q_0\ldots q_n\in Q$ עבורם $q_0\in S$ וכן $q_i\in\delta(q_{i-1},x_i)$ לכל $i\in[n]$ וכן $q_n\in F$).

שפה של אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מינוס: יהי M אסלד"ם אזי $L(M)=\{x\in\Sigma^*\mid x \text{ מקבל את } M\}$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי מינוס החזקה: יהי $M=(Q,\Sigma,\delta,S,F)$ אסלד"ם אזי אס"ד $(Q',\Sigma,\delta',q_0,F')$ באשר

- $Q'=\mathcal{P}(Q)$.
- $\delta'(T,x)=\bigcup_{q\in T}\delta(q,x)$.
- $q_0=S$.
- $F'=\{T\subseteq Q\mid T\cap F\neq\varnothing\}$.

למה: יהי M אסלד"ם יהי A אס"ד החזקה של M תהא $T\subseteq Q_N$ ויהי $x\in\Sigma^*$ אזי $\hat{\delta_A}(T,x)=\hat{\delta_M}(T,x)$.

משפט: יהי M אסלד"ם אזי קיים אס"ד A עבורו $L(M)=L(A)$.

סימון: יהי Σ אלפבית אזי $\Sigma_\varepsilon=\Sigma\cup\{\varepsilon\}$.

אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי (אסל"ד): תהא $Q\neq\varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית תהא $\delta:Q\times\Sigma_\varepsilon\to\mathcal{P}(Q)$ ותהיינה $S,F\subseteq Q$ אזי (Q,Σ,δ,S,F).

מצבים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסל"ד אזי Q.

אלפבית באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסל"ד אזי Σ.

פונקציית מעברים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסל"ד אזי δ.

מצבים התחלתיים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסל"ד אזי S.

מצבים מקבלים באוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסל"ד אזי F.

סביבת ε: יהי N אסל"ד ויהי $q\in Q$ אזי $E(q)=\left\{q'\in Q\mid\exists a\in Q^{k+1}.\,(a_0=q)\wedge(\forall i\in[k].a_i\in\delta(a_{i-1},\varepsilon))\wedge(a_k=q')\right\}$.

סביבת ε: יהי N אסל"ד ויהי $T\subseteq Q$ אזי $E(T)=\bigcup_{q\in T}E(q)$.

פונקציית המעברים המורחבת: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסל"ד אזי $\hat{\delta}:\mathcal{P}(Q)\times\Sigma^*\to\mathcal{P}(Q)$ עבורה לכל $T\subseteq Q$ מתקיים $\hat{\delta}(T,\varepsilon)=E(T)$ וכן לכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים $\hat{\delta}(q,x)=E\left(\bigcup_{q\in\hat{\delta}(T,x_1\ldots x_{n-1})}\delta(q,x_n)\right)$.

אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי מקבל מילה: יהי (Q,Σ,δ,S,F) אסל"ד אזי $x\in\Sigma^*$ המקיים $\hat{\delta}(S,x)\cap F\neq\varnothing$.

סימון: יהי $x\in\Sigma^*$ ויהיו $\sigma_1\ldots\sigma_n\in\Sigma\backslash\{\varepsilon\}$ ויהיו $k_0\ldots k_n\in\mathbb{N}$ עבורם $x=\varepsilon^{k_0}\sigma_0\varepsilon^{k_1}\sigma_1\varepsilon^{k_2}\ldots\sigma_n\varepsilon^{k_n}$ אזי $x^{\not\varepsilon}=\sigma_1\ldots\sigma_n$.

טענה: יהי A אסל"ד ויהי $x\in\Sigma^n$ אזי (A מקבל את x)$\Longleftrightarrow$(קיימים $q_0\ldots q_n\in Q$ עבורם $q_0\in S$ וכן $q_i\in\delta\left(q_{i-1},x_i^{\not\varepsilon}\right)$ לכל $i\in[n]$ וכן $q_n\in F$).

שפה של אוטומט סופי לא־דטרמיניסטי: יהי A אסל"ד אזי $L(A)=\{x\in\Sigma^*\mid x \text{ מקבל את } A\}$.

משפט: יהי N אסל"ד אזי קיים אסלד"ם M עבורו $L(N)=L(M)$.

מסקנה: יהי N אסל"ד אזי קיים אס"ד A עבורו $L(A)=L(M)$.

מסקנה: יהי Σ אלפבית ותהא $\mathcal{L}\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי ($\mathcal{L}$ רגולרית)$\Longleftrightarrow$(קיים אסל"ד N המקיים $L(N)=\mathcal{L}$).

ביטוי רגולרי (ב"ר): יהי Σ אלפבית אזי

- $\varnothing$.
- יהי $a\in\Sigma_\varepsilon$ אזי a.
- יהיו R_1,R_2 ביטויים רגולרים אזי $R_1\cup R_2$.
- יהיו R_1,R_2 ביטויים רגולרים אזי R_1R_2.
- יהי R ביטוי רגולרי אזי R^*.

שפה נוצרת מביטוי רגולרי: יהי Σ אלפבית אזי

- $L(\varnothing)=\varnothing$.
- יהי $a\in\Sigma_\varepsilon$ אזי $L(a)=\{a\}$.
- יהיו R_1,R_2 ביטויים רגולרים אזי $L(R_1\cup R_2)=L(R_1)\cup L(R_2)$.
- יהיו R_1,R_2 ביטויים רגולרים אזי $L(R_1R_2)=L(R_1)L(R_2)$.
- יהי R ביטוי רגולרי אזי $L(R^*)=L(R)^*$.

סימון: יהי Σ אלפבית אזי $\{r$ ביטוי רגולרי $\mid r \in \Sigma^*\} = R(\Sigma)$.

הערה: קיים סדר פעולות לביטויים רגולריים

- סגור קליני.
- שרשור.
- איחוד.

משפט: יהי Σ אלפבית ותהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי ($\mathcal{L}$ רגולרית)$\Longleftrightarrow$(קיים $r \in R(\Sigma)$ עבורו $L(r) = \mathcal{L}$).

שפה ניתנת לניפוח: שפה $\mathcal{L}$ וקבוע $\ell > 0$ עבורם לכל $w \in \mathcal{L}$ באשר $\ell \le |w|$ קיימים $x, y, z \in \Sigma^*$ באשר $|y| > 0$ וכן $|xy| \le \ell$ וכן $w = xyz$ וכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $xy^k z \in L$.

טענה למת הניפוח: תהא $\mathcal{L}$ שפה רגולרית אזי קיים $\ell > 0$ עבורו $\mathcal{L}$ ניתנת לניפוח ℓ.

קבוע הניפוח: תהא $\mathcal{L}$ שפה רגולרית אזי $\min\{\ell \in \mathbb{N}_+ \mid \ell$ ניתנת לניפוח $\mathcal{L}\}$.

טענה: $\left\{x \in \{0,1\}^* \mid \#_0(x) = \#_1(x)\right\}$ אינה רגולרית.

טענה: $\left\{0^i 1^j \mid i > j\right\}$ אינה רגולרית.

טענה: $\{a^p \mid a \in \Sigma,$ ראשוני $p\}$ אינה רגולרית.

טענה: השפה $\{b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\} \cup \left\{a^i b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_+\right\}$ ניתנת לניפוח 1 וכן אינה רגולרית.

הגדרה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $\sim_L = \left\{(x,y) \in (\Sigma^*)^2 \;\middle|\; \forall z \in \Sigma^*. (yz \in L) \Longleftrightarrow (xz \in L)\right\}$.

טענה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $\sim_L$ הינו יחס שקילות.

הגדרה: יהי A אס"ד אזי $\sim_A = \left\{(x,y) \in (\Sigma^*)^2 \;\middle|\; \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)\right\}$.

טענה: יהי A אס"ד ויהיו $x, y \in \Sigma^*$ עבורם $x \sim_A y$ אזי $x \sim_{L(A)} y$.

מסקנה: יהי A אס"ד אזי $|Q| \ge |\Sigma^*/\sim_A| \ge |\Sigma^*/\sim_{L(A)}|$.

מסקנה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה רגולרית אזי $\Sigma^*/\sim_L$ סופית.

משפט מייהיל-נרוד: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי (L רגולרית)$\Longleftrightarrow$($\Sigma^*/\sim_L$ סופית).

סימון: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה באשר $\Sigma^*/\sim_L$ סופית תהא $\{x_1 \ldots x_n\}$ קבוצת נציגים של $\Sigma^*/\sim_L$ ויהי $y \in \Sigma^*$ עבורו $x_i \sim_L y$ אזי $\text{Class}(y) = i$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי המחלקות: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה באשר $\Sigma^*/\sim_L$ סופית ותהא $\{x_1 \ldots x_n\}$ קבוצת נציגים של $\Sigma^*/\sim_L$ אזי אס"ד $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ באשר

- $Q = [|\Sigma^*/\sim_L|]$.
- $\delta(i, \sigma) = \text{Class}(x_i \sigma)$.
- $q_0 = \text{Class}(\varepsilon)$.
- $F = \{i \in Q \mid x_i \in L\}$.

טענה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה באשר $\Sigma^*/\sim_L$ סופית תהא $\{x_1 \ldots x_n\}$ קבוצת נציגים של $\Sigma^*/\sim_L$ יהי A אס"ד המחלקות של L ויהי $y \in \Sigma^*$ אזי $\hat{\delta_A}(q_0, y) = \text{Class}(y)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי קיים אסל"ד N מעל $[n]$ באשר $|Q| = n$ עבורו $L(N) = \left\{x \in [n]^* \mid \exists \sigma \in \Sigma. \#_\sigma(x) = 0\right\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי A אס"ד מעל $[n]$ עבורו $L(A) = \left\{x \in [n]^* \mid \exists \sigma \in \Sigma. \#_\sigma(x) = 0\right\}$ אזי $|Q| \ge 2^n$.

מכונת טיורינג (מ"ט): תהא $Q \ne \varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma \subseteq \Gamma$ וכן $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$ יהיו $q_0, q_a, q_r \in Q$ באשר $q_a \ne q_r$ ותהא $\delta : (Q \backslash \{q_a, q_r\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ אזי $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$.

מצבים במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי Q.

אלפבית במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי Σ.

אלפבית סרט במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי Γ.

פונקציית מעברים במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי δ.

מצב התחלתי במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי q_0.

מצב מקבל במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי q_a.

מצב דוחה במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי q_r.

קונפיגורציה: תהא M מ"ט אזי $c \in \Gamma^* Q \Gamma^*$.

קונפיגורציה התחלתית: תהא M מ"ט אזי קונפיגורציה $c \in \Gamma^* Q \Gamma^*$ עבורה קיים $v \in \Sigma^*$ המקיימת $c = q_0 v$.

קונפיגורציה מקבלת: תהא M מ"ט אזי קונפיגורציה $c \in \Gamma^* Q \Gamma^*$ עבורה קיימים $u, v \in \Sigma^*$ המקיימים $c = u q_a v$.

קונפיגורציה דוחה: תהא M מ"ט אזי קונפיגורציה $c\in\Gamma^*Q\Gamma^*$ עבורה קיימים $u,v\in\Sigma^*$ המקיימים $c=uq_rv$.

הערה: תהא M מ"ט ותהא c קונפיגורציה אזי נזהה את $c\sqcup$ עם c.

קונפיגורציה עוברת/צעד: תהא M מ"ט תהא c קונפיגורציה אזי קונפיגורציה c' המקיימת אחד הבאים

- קיימים $a,b,b'\in\Gamma$ וקיימים $u,v\in\Gamma^*$ וקיימים $q,q'\in Q$ עבורם $c=uaqbv$ וכן $\delta(q,b)=(q',b',L)$ וכן $c'=uq'ab'v$.
- קיימים $b,b'\in\Gamma$ וקיימים $u,v\in\Gamma^*$ וקיימים $q,q'\in Q$ עבורם $c=qbv$ וכן $\delta(q,b)=(q',b',L)$ וכן $c'=q'b'v$.
- קיימים $b,b'\in\Gamma$ וקיימים $u,v\in\Gamma^*$ וקיימים $q,q'\in Q$ עבורם $c=uqbv$ וכן $\delta(q,b)=(q',b',R)$ וכן $c'=ub'q'v$.

מכונת טיורינג מקבלת מילה: תהא M מ"ט אזי $x\in\Sigma^*$ עבורו קיימות $c_0\ldots c_n$ קונפיגורציות באשר $c_0=q_0x$ וכן c_{i-1} עוברת ל־c_i לכל $i\in[n]$ וכן c_n קונפיגורציה מקבלת.

מכונת טיורינג דוחה מילה: תהא M מ"ט אזי $x\in\Sigma^*$ עבורו קיימות $c_0\ldots c_n$ קונפיגורציות באשר $c_0=q_0x$ וכן c_{i-1} עוברת ל־c_i לכל $i\in[n]$ וכן c_n קונפיגורציה דוחה.

שפה של מכונת טיורינג: תהא M מ"ט אזי $L(M)=\{x\in\Sigma^*\mid M \text{ מקבל את } x\}$.

מכונת טיורינג לא עוצרת על קלט: תהא M מ"ט אזי $x\in\Sigma^*$ עבורו M לא מקבלת ולא דוחה את x.

מודלים שקולים: מודלים M,M' עבורם לכל A מסוג M וכן לכל B מסוג M' מתקיים

- קיימת A' מסוג M' המקיימת $L(A)=L(A')$.
- קיימת B' מסוג M המקיימת $L(B)=L(B')$.

מסקנה: אס"ד, אסל"ד ואסלד"ם הינם מודלים שקולים.

מכונת טיורינג נחה: תהא $Q\neq\varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma\subseteq\Gamma$ וכן $\sqcup\in\Gamma\backslash\Sigma$ יהיו $q_0,q_a,q_r\in Q$ באשר $q_a\neq q_r$ ותהא $\delta:(Q\backslash\{q_a,q_r\})\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{L,R,S\}$ אזי $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$.

הערה: את כל הפעולות ממכונת טיורינג נכליל בצורה הטבעית עבור מכונת טיורינג נחה.

מסקנה: מכונת טיורינג ומכונת טיורינג נחה הינן מודלים שקולים.

מכונת טיורינג רב־סרטית: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ תהא $Q\neq\varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma\subseteq\Gamma$ וכן $\sqcup\in\Gamma\backslash\Sigma$ יהיו $q_0,q_a,q_r\in Q$ באשר $q_a\neq q_r$ ותהא $\delta:(Q\backslash\{q_a,q_r\})\times\Gamma^k\to Q\times\Gamma^k\times\{L,R\}^k$ אזי $(k,Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$.

הערה: את כל הפעולות ממכונת טיורינג נכליל בצורה הטבעית עבור מכונת טיורינג רב־סרטית.

קונפיגורציה במכונת טיורינג רב־סרטית: תהא M מ"ט רב־סרטית ותהיינה $c_1\ldots c_k\in\Gamma^*Q\Gamma^*$ אזי $c_1\$c_2\$\ldots\$c_k$.

קונפיגורציה התחלתית במכונת טיורינג רב־סרטית: תהא M מ"ט רב־סרטית אזי קונפיגורציה c עבורה קיים $v\in\Sigma^*$ המקיימת $c=q_0v\sqcup\$q_0\sqcup\$\ldots\$q_0\sqcup$.

מסקנה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי מכונת טיורינג ומכונת טיורינג רב־סרטית הינן מודלים שקולים.

מודל RAM: יהי $k\in\mathbb{N}$ ותהיינה $\pi_1\ldots\pi_p$ אזי $(k,(\pi_1\ldots\pi))$.

מספר הרגיסטרים במודל RAM: יהי (k,Π) מודל RAM אזי k.

פקודות במודל RAM: יהי (k,Π) מודל RAM אזי Π.

קונפיגורציה במודל RAM: יהי (k,Π) מודל RAM אזי $\text{PC}\in\mathbb{N}$ וכן $R_0\ldots R_k\in\mathbb{N}$ וכן $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

מונה התוכנית בקונפיגורציה: יהי (k,Π) מודל RAM ותהא (T,R,PC) קונפיגורציה אזי PC.

רגיסטרים בקונפיגורציה: יהי (k,Π) מודל RAM ותהא (T,R,PC) קונפיגורציה אזי R.

זיכרון בקונפיגורציה: יהי (k,Π) מודל RAM ותהא (T,R,PC) קונפיגורציה אזי T.

הערה: ריצת מודל RAM זהה לריצת מעבד MIPS.

טענה: מכונת טיורינג ומודל RAM הם מודלים שקולים.

מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית (מטל"ד): תהא $Q\neq\varnothing$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma\subseteq\Gamma$ וכן $\sqcup\in\Gamma\backslash\Sigma$ יהיו $q_0,q_a,q_r\in Q$ באשר $q_a\neq q_r$ ותהא $\delta:(Q\backslash\{q_a,q_r\})\times\Gamma\to\mathcal{P}(Q\times\Gamma\times\{L,R\})$ אזי $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,q_a,q_r)$.

קונפיגורציה עוברת: תהא N מטל"ד תהא $q\in Q$ ותהא $b\in\Gamma$ ותהיינה $u,v\in\Gamma^*$ באשר $uqbv$ קונפיגורציה אזי קונפיגורציה c' עבורה קיימת $\delta':(Q\backslash\{q_a,q_r\})\times\Gamma\to Q\times\Gamma\times\{L,R\}$ המקיימת $\delta'(q,b)\in\delta(q,b)$ וכן $uqbv$ הינה δ'־עוברת ל־c'.

עץ חישוב: תהא N מטל"ד ויהי $x\in\Sigma^*$ אזי עץ קונפיגורציות $T_{N,x}$ עם שורש $q_0x\sqcup$ עבורו לכל c,c' קונפיגורציות מתקיים (c צאצא של c')$\Longleftrightarrow$(c' עוברת ל־c).

מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית מקבלת מילה: תהא N מטל"ד אזי $x\in\Sigma^*$ עבורו קיים עלה מקבל ב־$T_{N,x}$.

מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית דוחה מילה: תהא N מטל"ד אזי $x\in\Sigma^*$ עבורו $T_{N,x}$ סופי וכן x אינו מתקבל על ידי N.

שפה של מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית: תהא N מטל"ד אזי $L(N)=\{x\in\Sigma^*\mid N \text{ מקבל את } x\}$.

מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית לא עוצרת על קלט: תהא N מטל"ד אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו N לא מקבלת ולא דוחה את x.

טענה: מכונת טיורינג ומכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית הינן מודלים שקולים.

שפות כריעות למחצה/שפות ניתנות למניה רקורסיבית/שפות ניתנות לקבלה: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{RE} = \{\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \mid \mathcal{L} = L(M) \text{ עבורה } M \text{ קיימת מ"ט}\}$.

מכונת טיורינג מכריע שפה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מ"ט M עבורה $\mathcal{L} = L(M)$ וכן לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים כי M עוצרת על x.

שפות כריעות/שפות רקורסיביות: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{R} = \{\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \mid \mathcal{L} \text{ המכריעה את } M \text{ קיימת מ"ט}\}$.

מסקנה: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{RE}$.

מונה עבור שפה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מ"ט E מעל האלפבית $\Sigma \cup \{\$\}$ עבורו

- לכל $q \in Q$ ולכל $\sigma \in \Gamma$ מתקיים $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', R)$.
- הרצת E על הקונפיגורציה ε מקיימת
  - לכל $x \in L$ מתקיים כי $\$x\$$ על הסרט לאחר מספר סופי של צעדים.
  - לכל $x \notin L$ מתקיים כי $\$x\$$ לא על הסרט לעולם.

טענה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(\mathcal{L} \in \mathcal{RE}) \Longleftrightarrow$(קיים ל־$\mathcal{L}$ מונה).

מונה לקסיקוגרפי: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מונה E עבור $\mathcal{L}$ עבורו לכל $x, y \in \mathcal{L}$ באשר $x \leq_{\text{lex}} y$ מתקיים כי $\$x\$$ רשום על הסרט לפני $\$y\$$.

טענה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(\mathcal{L} \in \mathcal{R}) \Longleftrightarrow$(קיים ל־$\mathcal{L}$ מונה לקסיקוגרפי).

שפה $\text{co}\mathcal{RE}$: יהי Σ אלפבית אזי $\text{co}\mathcal{RE} = \left\{\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \mid \overline{\mathcal{L}} \in \mathcal{RE}\right\}$.

טענה: $\mathcal{R} = \mathcal{RE} \cap \text{co}\mathcal{RE}$.

קידוד בינארי של מכונת טיורינג: פונקציה $f : \{M \mid \text{מ"ט } M\} \to \{0,1\}^*$ חח"ע עד כדי שינוי שמות.

סימון: תהא M מ"ט אזי $\langle M \rangle$ הינו הקידוד הבינארי של M.

הערה: נשתמש בסימון $\langle \cdot \rangle$ על מנת לקודד כל אובייקט לקידוד בינארי.

הערה: נניח כי קידוד ופענוח הן פעולות פשוטות ובדיקת נכונות קידוד היא $\mathcal{R}$.

סימון: תהא M מ"ט ותהא x מילה אזי $\langle M, x \rangle$ הינו הקידוד הבינארי של M מאותחל עם x.

משפט מכונת טיורינג אוניברסלית: קיימת מ"ט U מעל $\{0,1\}$ עבורה

- לכל מ"ט M ולכל קלט x של M מתקיים (U מקבלת את $\langle M, x \rangle$)$\Longleftrightarrow$(M מקבלת את x).
- לכל מ"ט M ולכל קלט x של M מתקיים (U דוחה את $\langle M, x \rangle$)$\Longleftrightarrow$(M דוחה את x).
- לכל מ"ט M ולכל קלט x של M מתקיים (U לא עוצרת עבור $\langle M, x \rangle$)$\Longleftrightarrow$(M לא עוצרת עבור x).
- לכל $x \in \{0,1\}^*$ באשר $x \notin \text{Im}(f)$ מתקיים כי U דוחה את x.

טענה: קיימת $L \subseteq \{0,1\}^*$ שפה עבורה $L \notin \mathcal{RE} \cup \text{co}\mathcal{RE}$.

הגדרה: $\text{ACC} = \{\langle M, x \rangle \mid (\text{מ"ט } M) \wedge (\text{מילה } x) \wedge (x \text{ מקבלת את } M)\}$.

טענה: $\text{ACC} \in \mathcal{RE}$.

למה: לא קיימת מ"ט M מעל $\{0,1\}$ עבורה $L(M) = \{\langle N \rangle \mid \langle N \rangle \notin L(N)\}$.

למה: תהא M מ"ט המכריעה את ACC אזי קיימת מ"ט N המכריעה את $\{\langle N \rangle \mid \langle N \rangle \notin L(N)\}$.

טענה: $\text{ACC} \notin \mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{HALT} = \{\langle M, x \rangle \mid (\text{מ"ט } M) \wedge (\text{מילה } x) \wedge (x \text{ עוצרת על } M)\}$.

טענה: $\text{HALT} \in \mathcal{RE} \backslash \mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{EMPTY} = \{\langle M \rangle \mid (\text{מ"ט } M) \wedge (L(M) = \varnothing)\}$.

טענה: $\text{EMPTY} \notin \mathcal{R}$.

מכונת טיורינג מחשבת פונקציה: תהא M מ"ט ותהא $D \subseteq \Sigma$ אזי $f : D \to (\Gamma \backslash \{\sqcup\})^*$ עבורה לכל $x \in D$ מתקיים כי M עוצרת על x וכן הסרט בסוף הריצה הינו $f(x) \sqcup^*$.

פונקציה חשיבה: תהא $D \subseteq \Sigma$ אזי $f : D \to (\Gamma \backslash \{\sqcup\})^*$ עבורה קיימת מ"ט M המחשבת את f.

רדוקציית מיפוי: יהיו Σ, Δ אלפבייתים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה אזי $f : \Sigma^* \to \Delta^*$ חשיבה עבורה לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים $(x \in A) \iff (f(x) \in B)$.

סימון: יהיו Σ, Δ אלפבייתים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה ו־$f : \Sigma^* \to \Delta^*$ רדוקציית מיפוי אזי $A \leq_m B$.

טענה: $\text{EMPTY}\in\text{co}\mathcal{RE}$.

טענה: תהיינה A,B שפות באשר $B\in\mathcal{R}$ וכן $A\le_m B$ אזי $A\in\mathcal{R}$.

מסקנה: תהיינה A,B שפות באשר $A\notin\mathcal{R}$ וכן $A\le_m B$ אזי $B\notin\mathcal{R}$.

הערה: יש דבר כזה רדוקציה כללית שמכלילה את רדוקציית המיפוי, לא עברנו על זה פורמלית, מסומן $\le$.

מסקנה: $\{\langle M\rangle\mid\langle M\rangle\notin L(M)\}\le\text{ACC}$.

מסקנה: $\text{ACC}\le_m\text{HALT}$.

מסקנה: $\text{ACC}\le\text{EMPTY}$.

הגדרה: $\text{REG}=\{\langle M\rangle\mid$ רגולרית $L(M)\}$.

טענה: $\text{REG}\notin\mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{EQ}=\{\langle M_1,M_2\rangle\mid L(M_1)=L(M_2)\}$.

טענה: $\text{EQ}\notin\mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{HALT}_\varepsilon=\{\langle M\rangle\mid$ עוצר על ε $M\}$.

טענה: $\text{HALT}\le_m\text{HALT}_\varepsilon$.

טענה: תהא $A\in\mathcal{R}$ ותהא $B\in\mathcal{P}(\Sigma^*)\backslash\{\Sigma^*,\varnothing\}$ אזי $A\le_m B$.

למה: תהיינה A,B שפות ותהא f רדוקציית מיפוי מ־A ל־B אזי f רדוקציית מיפוי מ־$\overline{A}$ ל־$\overline{B}$.

טענה: תהיינה A,B שפות באשר $A\le_m B$ אזי

- אם $B\in\mathcal{RE}$ אזי $A\in\mathcal{RE}$.
- אם $B\in\text{co}\mathcal{RE}$ אזי $A\in\text{co}\mathcal{RE}$.

טענה: $\text{ACC}\le_m\text{EQ}$ וכן $\overline{\text{ACC}}\le_m\text{EQ}$.

מסקנה: $\text{EQ}\notin\mathcal{RE}\cup\text{co}\mathcal{RE}$.

תכונה סמנטית: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

הגדרה: תהא $\mathcal{C}$ תכונה סמנטית אזי $L_{\mathcal{C}}=\{\langle M\rangle\mid L(M)\in\mathcal{C}\}$

משפט רייס: תהא $\mathcal{C}\in\mathcal{P}(\mathcal{RE})\backslash\{\mathcal{RE},\varnothing\}$ תכונה סמנטית אזי $L_{\mathcal{C}}\notin\mathcal{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{C}\in\{\mathcal{RE},\varnothing\}$ אזי $L_{\mathcal{C}}\in\mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{PRIME}=\{(p)_2\mid p\in\mathbb{P}\}$.

הערה: קידוד מספרים תמיד יעשה בבסיס 2.

הגדרה: $\text{EQPRIME}=\{\langle M\rangle\mid L(M)=\text{PRIME}\}$.

טענה: $\text{EQPRIME}\notin\mathcal{R}$.

טענה משפט רייס הרחבה ראשונה: תהא $\mathcal{C}\in\mathcal{P}(\mathcal{RE}\backslash\{\varnothing\})\backslash\{\varnothing\}$ אזי $L_{\mathcal{C}}\notin\text{co}\mathcal{RE}$.

טענה משפט רייס הרחבה שנייה: תהא $\mathcal{C}\in\mathcal{P}(\mathcal{RE})\backslash\{\mathcal{RE}\}$ באשר $\varnothing\in\mathcal{C}$ אזי $L_{\mathcal{C}}\notin\mathcal{RE}$.

מסקנה: $\text{REG}\notin\mathcal{RE}$.

הגדרה: $\text{ALL}=\{\langle M\rangle\mid L(M)=\Sigma^*\}$.

למה: $\overline{\text{HALT}}\le_m\text{ALL}$.

טענה: $\text{ALL}\notin\mathcal{RE}\cup\text{co}\mathcal{RE}$.

חסם עליון לזמן ריצה של מכונת טיורינג: תהא M מ"ט אזי $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים כי M על הקלט x מבצעת לכל היותר $T(n)$ צעדים.

הגדרה: תהא $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{DTime}(T(n))=\{L(M)\mid \mathcal{O}(T(n))$ מ"ט שרצה בזמן $M\}$.

טענה: $\{0^k1^k\mid k\ge0\}\in\text{DTime}(n^2)$.

מסקנה: $\{0^k1^k\mid k\ge0\}\in\text{DTime}(n\log(n))$.

משפט: תהא $t(n)=o(n\log(n))$ ותהא $L\in\text{DTime}(t(n))$ אזי L רגולרית.

מסקנה: תהא $t(n)=o(n\log(n))$ אזי $\{0^k1^k\mid k\ge0\}\notin\text{DTime}(t(n))$.

פונקציה חשיבה בזמן: פונקציה $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה קיימת מ"ט M המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי M על הקלט 1^n מחשבת את $(T(n))_2$ בזמן $\mathcal{O}(T(n))$.

טענה: תהא $T:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חשיבה בזמן שאינה קבועה אזי $T(n)=\Omega(n)$.

משפט מכונת טיורינג אוניברסלית עם טיימר: קיימת מ"ט אוניברסלית U וקיים $C \in \mathbb{R}$ עבורם לכל מ"ט M ולכל קלט x באשר M עוצרת על הקלט x לאחר t צעדים מתקיים כי U עוצרת על הקלט $\langle M, x\rangle$ תוך $C \cdot t$ צעדים.

משפט: קיימת מ"ט אוניברסלית U וקיים $C \in \mathbb{R}$ עבורם לכל מ"ט M לכל קלט x ולכל $t \in \mathbb{N}$ מתקיים

- אם M עוצרת על הקלט x לאחר לכל היותר t צעדים אזי U מקבלת את $\langle M, x, t\rangle$.
- אם M דוחה את x או לא עוצרת לאחר t צעדים אזי U דוחה את $\langle M, x, t\rangle$.
- U עוצרת לאחר $C \cdot t \log(t)$ צעדים.

משפט היררכיית הזמן: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חשיבה בזמן ותהא $t(n) = o\left(\frac{T(n)}{\log(T(n))}\right)$ אזי $\text{DTime}(t(n)) \subsetneq \text{DTime}(T(n))$.

מסקנה: יהיו $1 \le c < d$ אזי $\text{DTime}(n^c) \subsetneq \text{DTime}(n^d)$.

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ באשר $T(n) \ge n$ ותהא M מ"ט רב־סרטית שרצה בזמן $T(n)$ אזי קיימת מ"ט M' שרצה בזמן $\mathcal{O}(T^2(n))$ עבורה $L(M) = L(M')$.

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ באשר $T(n) \ge n$ ותהא M מודל RAM שרצה בזמן $T(n)$ אזי קיימת מ"ט M' שרצה בזמן $\mathcal{O}(T^3(n))$ עבורה $L(M) = L(M')$.

חסם עליון לזמן ריצה של מכונת טיורינג לא־דטרמיניסטית: תהא N מטל"ד אזי $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \Sigma^n$ מתקיים כי $T_{N,x}$ בעומק לכל היותר $T(n)$.

הגדרה: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אזי $\text{NTime}(T(n)) = \{L(N) \mid \mathcal{O}(T(n))\ \text{מטל"ד שרצה בזמן}\ N\}$.

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ באשר $T(n) \ge n$ ותהא N מטל"ד שרצה בזמן $T(n)$ אזי קיימת מ"ט M שרצה בזמן $2^{\mathcal{O}(T(n))}$ עבורה $L(N) = L(M)$.

שפה $\mathcal{P}$: $\mathcal{P} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DTime}(n^c)$.

הגדרה: $\text{PATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid t\text{-ל}\ s\text{ גרף מכוון עם מסלול מ־}\ G\}$.

טענה: $\text{PATH} \in \mathcal{P}$.

משפט: $\text{PRIME} \in \mathcal{P}$.

שפה $\mathcal{NP}$: $\mathcal{NP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NTime}(n^c)$.

מסקנה: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.

הגדרה: $\text{HAMPATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid t\text{-ל}\ s\text{ גרף מכוון עם מסלול המילטוני מ־}\ G\}$.

טענה: $\text{HAMPATH} \in \mathcal{NP}$.

השערה: $\text{HAMPATH} \notin \mathcal{P}$. השערה פתוחה

שפה $\mathcal{EXP}$: $\mathcal{EXP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{DTime}\left(2^{n^k}\right)$.

שפה $\mathcal{NEXP}$: $\mathcal{NEXP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{NTime}\left(2^{n^k}\right)$.

טענה: $\mathcal{EXP} \subseteq \mathcal{NEXP}$.

מסקנה: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP} \subseteq \mathcal{NEXP}$.

טענה: $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{EXP}$.

טענה: $\mathcal{NP} \subsetneq \mathcal{NEXP}$.

טענה: $(\mathcal{P} = \mathcal{NP}) \Longrightarrow (\mathcal{EXP} = \mathcal{NEXP})$.

סימון: תהא M מ"ט ויהי $x \in \Sigma^*$ אזי $M(x)$ הינו ריצת M על x.

מוודא לשפה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מ"ט V מעל אלפבית $\Sigma \cup \{","\}$ המקיים

- שלמות: יהי $x \in \mathcal{L}$ אזי קיים $w \in \Sigma^*$ עבורו $V(x, w)$ מקבלת.
- נאותות: יהי $x \notin \mathcal{L}$ אזי לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים כי $V(x, w)$ דוחה.

טענה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(\mathcal{L} \in \mathcal{RE})\Longleftrightarrow$(קיים מוודא ל־$\mathcal{L}$).

מוודא פולינומי לשפה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מוודא V ל־$\mathcal{L}$ עבורו קיים $p \in \mathbb{N}[x]$ המקיים כי לכל $x, w \in \Sigma^*$ מתקיים כי $V(x, w)$ עוצרת לכל היותר אחרי $p(|x|)$ צעדים.

הגדרה: $\text{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid k\ \text{גרף לא מכוון בעל קליקה מגודל}\ G\}$.

טענה: קיים מוודא פולינומי ל־CLIQUE.

קבוצת צמתים בלתי תלויה (ב"ת): יהי G גרף אזי $I \subseteq V$ עבורה לכל $u, v \in I$ מתקיים $(u, v) \notin E$.

הגדרה: $\text{IS} = \{\langle G, k\rangle \mid k\ \text{גרף לא מכוון בעל קבוצה ב"ת מגודל}\ G\}$.

טענה: קיים מוודא פולינומי ל־IS.

הגדרה: $\text{FACTOR}=\{\langle N,k\rangle \mid \exists d\in[k]\,.\,(d|N)\}$.

טענה: קיים מוודא פולינומי ל־FACTOR.

הגדרה: $\text{SUBSETSUM}=\left\{\langle S,t\rangle \mid (S\subseteq\mathbb{N})\wedge\left(\exists T\subseteq S.\sum_{i\in T}i=t\right)\right\}$.

טענה: קיים מוודא פולינומי ל־SUBSETSUM.

משפט: תהא $\Sigma^*\supseteq\mathcal{L}$ שפה אזי $(\mathcal{L}\in\mathcal{NP})\Longleftrightarrow$(קיים מוודא פולינומי ל־$\mathcal{L}$).

מסקנה: $\text{CLIQUE},\text{IS},\text{FACTOR},\text{SUBSETSUM}\in\mathcal{NP}$.

השערה: $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$. השערה פתוחה

פונקציה חשיבה פולינומית: תהא $D\subseteq\Sigma$ אזי $f:D\to(\Gamma\backslash\{\sqcup\})^*$ עבורה קיימת מ"ט M המחשבת את f וכן קיים $p\in\mathbb{N}[x]$ המקיים כי לכל $x\in\Sigma^*$ מתקיים כי $M(x)$ עוצרת לכל היותר אחרי $p(|x|)$ צעדים.

רדוקציית מיפוי פולינומית: יהיו Σ,Δ אלפבייתים באשר $\Sigma\subseteq\Delta$ תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה ותהא $B\subseteq\Delta^*$ שפה אזי רדוקציית מיפוי f מ־A ל־B חשיבה פולינומית.

סימון: יהיו Σ,Δ אלפבייתים באשר $\Sigma\subseteq\Delta$ תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה תהא $B\subseteq\Delta^*$ שפה ותהא $f:\Sigma^*\to\Delta^*$ רדוקציית מיפוי פולינומית אזי $A\leq_p B$.

טענה: $\text{CLIQUE}\leq_p\text{IS}$.

טענה: תהיינה A,B שפות באשר $B\in\mathcal{P}$ וכן $A\leq_p B$ אזי $A\in\mathcal{P}$.

שפה $\mathcal{NP}$־קשה: $\mathcal{NPH}=\{\mathcal{L}\mid\forall L\in\mathcal{NP}\,(L\leq_p\mathcal{L})\}$.

שפה $\mathcal{NP}$־שלמה: $\mathcal{NPC}=\mathcal{NP}\cap\mathcal{NPH}$.

טענה: תהא $\mathcal{L}\in\mathcal{NPC}$ אזי $(\mathcal{L}\in\mathcal{P})\Longleftrightarrow(\mathcal{P}=\mathcal{NP})$.

הגדרה: $\text{ACC}_{\mathcal{NP}}=\{\langle M,x,1^t\rangle\mid$ קיים w עבורו $M(x,w)$ מקבלת לכל היותר אחרי t צעדים$\}$.

טענה: $\text{ACC}_{\mathcal{NP}}\in\mathcal{NPC}$.

טענה: תהיינה $A,B\in\mathcal{NP}$ שפות באשר $A\in\mathcal{NPC}$ וכן $A\leq_p B$ אזי $B\in\mathcal{NPC}$.

מעגל ספיק: מעגל C עבורו קיים $x\in\{0,1\}^n$ המקיים $C(x)=1$.

פסוק kCNF: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי פסוק $\varphi\in\text{CNF}$ עבורו קיים $m\in\mathbb{N}$ וקיימת $A\in M_{m\times k}(\{p_i\}\cup\{\neg p_i\})$ המקיימת $\varphi=\bigwedge_{i=1}^m\bigvee_{j=1}^k(A)_{i,k}$.

הגדרה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k\text{SAT}=\{\langle\varphi\rangle\mid(\varphi\in k\text{CNF})\wedge($ספיקה $\varphi)\}$.

טענה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k\text{SAT}\in\mathcal{NP}$.

טענה: $2\text{SAT}\in\mathcal{P}$.

משפט קוק־לוין: $3\text{SAT}\in\mathcal{NPC}$.

טענה: יהיו $k,\ell\in\mathbb{N}_+$ באשר $k\leq\ell$ אזי $k\text{SAT}\leq_p\ell\text{SAT}$.

מסקנה: יהי $k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ אזי $k\text{SAT}\in\mathcal{NPC}$.

משפט: $3\text{SAT}\leq_p\text{CLIQUE}$.

מסקנה: $\text{CLIQUE},\text{IS}\in\mathcal{NPC}$.

מספר הפסוקיות המסופקות: יהיו $k,m\in\mathbb{N}_+$ תהא $A\in M_{m\times k}(\{p_i\}\cup\{\neg p_i\})$ ותהא v השמה אזי $\text{Cl}\left(\bigwedge_{i=1}^m\bigvee_{j=1}^k(A)_{i,k},v\right)=\left|\left\{i\in[m]\;\middle|\;\overline{v}\left(\bigvee_{j=1}^k(A)_{i,k}\right)=\text{True}\right\}\right|$.

הגדרה: $C-\text{CNF}=\{\langle\varphi,k\rangle\mid(\varphi\in\text{CNF})\wedge(\exists v\,(\text{Cl}(\varphi,v)=k))\}$.

טענה: $C-\text{CNF}\in\mathcal{NPC}$.

הגדרה: $\text{DNFSAT}=\{\langle\varphi\rangle\mid(\varphi\in\text{DNF})\wedge($ספיקה $\varphi)\}$.

טענה: $\text{DNFSAT}\in\mathcal{P}$.

הגדרה: $C-\text{DNF}=\{\langle\varphi,k\rangle\mid(\varphi\in\text{DNF})\wedge(\exists v\,(\text{Cl}(\varphi,v)=k))\}$.

טענה: $C-\text{CNF}\leq_p C-\text{DNF}$.

מסקנה: $C-\text{DNF}\in\mathcal{NPC}$.

הגדרה: $\text{PARTITION}=\left\{S\subseteq\mathbb{N}\mid(\text{מולטי קבוצה }S)\wedge\left(\exists T\subseteq S\left(\sum_{i\in T}i=\sum_{i\in S\backslash T}i\right)\right)\right\}$.

טענה: $\text{PARTITION}\in\mathcal{NPC}$.

כיסוי קודקודים: יהי G גרף לא מכוון אזי $C\subseteq V$ עבורה לכל $\{u,v\}\in E$ מתקיים $(u\in C)\vee(v\in C)$.

הגדרה: $\text{VC}=\{\langle G,k\rangle\mid$ גרף לא מכוון בעל כיסוי קודקודים מגודל k $G\}$.

טענה: $\text{VC} \in \mathcal{NPC}$.

בסיס פונקציות: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\Sigma^n \to \Sigma\right)$.

מעגל: יהי Σ אלפבית יהי $\mathcal{B}$ בסיס פונקציות מעל Σ תהיינה $k_1 \ldots k_n \in \mathbb{N}_+$ תהיינה $f_1 \ldots f_n \in \mathcal{B}$ באשר $f_i : \Sigma^{k_i} \to \Sigma$ לכל $i \in [n]$ ותהיינה $x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_k \in \Sigma$ אזי גרף מכוון G מעל $\{f_1 \ldots f_n, x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_k\}$ המקיים

- G חסר מעגלים מכוונים.
- לכל $i \in [m]$ מתקיים $\deg^- (x_i) = 0$.
- לכל $i \in [n]$ מתקיים $\deg^- (f_i) = k_i$.
- לכל $i \in [k]$ מתקיים $\deg^- (y_i) = 1$ וכן $\deg^+ (y_i) = 0$.

הערה: נשמור על הטרמינולוגיה ממעגל בוליאני כהכללה טבעית.

מטריצת הקונפיגורציות/טאבלו: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \le T(n)$ תהא M מ״ט שרצה בזמן $T(n)$ יהי $z \in \{0,1\}^n$ ותהיינה $c_1 \ldots c_i$ קונפיגורציות הריצה של $M(z)$ אזי $\tau_{M,z} \in M_{T(n)+1}(\Sigma \uplus \Gamma)$ המקיימת $R_i(\tau_{M,z}) = c_i$.

הערה: במטריצת הקונפיגורציות נניח כי $\delta(q_a, \sigma) = (q_a, \sigma, R)$ וכן $\delta(q_r, \sigma) = (q_r, \sigma, R)$.

הגדרה: $\text{CIRSAT} = \left\{\langle C, x\rangle \mid (\text{מעגל בוליאני } C) \wedge \left(\exists w \in \{0,1\}^* \left(C(x,w) = 1\right)\right)\right\}$.

הגדרה: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \le T(n)$ ותהא M מ״ט רצה בזמן $T(n)$ נגדיר מעגלים מעל $\Sigma \uplus \Gamma$ כך

- יהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ אזי $C_{\text{inp}}(z) = R_0(\tau_{M,z})$.
- יהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ ויהי $i \in \{0, \ldots, T(n) - 1\}$ אזי $C_{\text{next}}(R_i(\tau_{M,z})) = R_{i+1}(\tau_{M,z})$.
- יהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ אזי $C_{\text{out}}\left(R_{T(n)}(\tau_{M,z})\right) = M(z)$.
- יהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ אזי $C_{M,n}^{\Sigma \uplus \Gamma}(z) = (C_{\text{out}} \circ C_{\text{next}} \circ \ldots \circ C_{\text{next}} \circ C_{\text{inp}})(z)$.

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \le T(n)$ ותהא M מ״ט רצה בזמן $T(n)$ אזי $\left|C_{M,n}^{\Sigma \uplus \Gamma}\right| = \mathcal{O}\left(T^2(n)\right)$ וכן קיימת פונקציה f חשיבה בזמן $\text{poly}(T(n))$ עבורה $f(1^n) = \left\langle C_{M,n}^{\Sigma \uplus \Gamma}\right\rangle$.

מסקנה: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \le T(n)$ תהא M מ״ט רצה בזמן $T(n)$ ויהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ אזי $C_{M,n}^{\Sigma \uplus \Gamma}(z) = M(z)$.

טענה: יהי Π אלפבית אזי קיימת פונקציה חשיבה פולינומית f עבורה לכל מעגל בוליאני C מתקיים כי $f(C)$ מעגל בוליאני מעל בסיס דה־מורגן באשר $C(z) = f(C)(z)$ לכל $z \in \{0,1\}^n$ וכן $|f(C)| = \mathcal{O}(|C|)$.

למה: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \le T(n)$ ותהא M מ״ט רצה בזמן $T(n)$ אזי קיימת פונקציה חשיבה f בזמן $\text{poly}(T(n))$ עבורה $f(1^n) = \langle C_{M,n}\rangle$ באשר $C_{M,n}$ מעגל עבורו $|C_{M,n}| = \mathcal{O}\left(T^2(n)\right)$ וכן לכל $z \in \{0,1\}^n$ מתקיים $(M(z)$ מקבלת$)\Longleftrightarrow(C_{M,n}(z) = 1)$.

טענה: $\text{CIRSAT} \in \mathcal{NPC}$.

מסקנה: תהא $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \le T(n)$ ותהא $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ לא ניתנת לחישוב על ידי משפחת מעגלים מגודל $\mathcal{O}(T(n))$ אזי f לא ניתנת לחישוב על ידי מ״ט בזמן $\sqrt{T(n)}$.

טענה: $\text{CIRSAT} \le_p \text{3SAT}$.

טענה: $\text{3SAT} \le_p \text{SUBSETSUM}$.

מסקנה: $\text{SUBSETSUM} \in \mathcal{NPC}$.

טענה: $\text{3SAT} \le_p \text{HAMPATH}$.

מסקנה: $\text{HAMPATH} \in \mathcal{NPC}$.

שפה $\text{co}\mathcal{NP}$: $\text{co}\mathcal{NP} = \left\{L \mid \overline{L} \in \mathcal{NP}\right\}$.

השערה: $\text{co}\mathcal{NP} \ne \mathcal{NP}$. השערה פתוחה

טענה: תהיינה A, B שפות באשר $A \le_p B$ אזי

- אם $B \in \mathcal{NP}$ אזי $A \in \mathcal{NP}$.
- אם $B \in \text{co}\mathcal{NP}$ אזי $A \in \text{co}\mathcal{NP}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{L} \in \mathcal{NPC}$ אזי $(\mathcal{L} \in \text{co}\mathcal{NP}) \Longleftrightarrow (\text{co}\mathcal{NP} = \mathcal{NP})$.

טענה: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \cap \text{co}\mathcal{NP}$.

טענה: $\text{FACTOR} \in \mathcal{NP} \cap \text{co}\mathcal{NP}$.

השערה: $\mathcal{P} \ne \mathcal{NP} \cap \text{co}\mathcal{NP}$. השערה פתוחה

הגדרה: $\text{MATMULT} = \{\langle A, B, C\rangle \mid (A, B, C \in M_n(\mathbb{Z})) \wedge (A \cdot B = C)\}$.

טענה: תהא $D \in M_n(\mathbb{Z})$ באשר $D \ne 0$ אזי $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^n}(D \cdot r = 0) \le 0.5$.

מסקנה: קיימת מ"ט M אשר רצה בזמן $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ עבורה
- לכל $x \in \{0,1\}^*$ אשר אינו קידוד של שלשת מטריצות $M(x)$ דוחה.
- לכל $x \in \{0,1\}^*$ עבורו קיימות $A,B,C \in M_n(\mathbb{Z})$ המקיימות $A \cdot B = C$ וכן $x = \langle A,B,C \rangle$ מתקיים $M(x)$ מקבלת.
- לכל $x \in \{0,1\}^*$ עבורו קיימות $A,B,C \in M_n(\mathbb{Z})$ המקיימות $A \cdot B \neq C$ וכן $x = \langle A,B,C \rangle$ מתקיים $\mathbb{P}(\text{מקבלת } M(x)) \leq 2^{-100}$.

נוסחה אריתמטית: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי C מעגל מעל $\mathbb{F}$ עם הבסיס $\{+,\times\}$ אזי נוסחה ב־C.

סימון: תהא φ נוסחה אריתמטית מעל $\mathbb{F}$ עבורה לכל $x_1 \dots x_n \in \mathbb{F}$ מתקיים $\varphi(x_1 \dots x_n) = 0$ אזי $\varphi \equiv 0$.

הגדרה: $\mathrm{ZE}_{\mathbb{F}} = \{\langle \varphi \rangle \mid \varphi \equiv 0 \text{ עבורה } \mathbb{F} \text{ נוסחה אריתמטית מעל } \varphi\}$.

טענה: $\overline{\mathrm{ZE}_{\mathbb{Z}_2}} \in \mathcal{NPC}$.

טענה: תהא φ נוסחה אריתמטית בעומק h מעל $\mathbb{F}$ אזי φ מחשבת פולינום מדרגה לכל היותר 2^h.

טענה: תהא φ נוסחה אריתמטית מעל $\mathbb{F}$ המחשבת $f \in \mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ באשר $\deg(f) < |\mathbb{F}|$ אזי $(f=0) \iff (\varphi \equiv 0)$.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אינסופי אזי $\mathrm{ZE}_{\mathbb{F}} \in \mathcal{R}$.

דרגה טוטאלית של מונום: יהיו $d_1 \dots d_n \in \mathbb{N}$ אזי $\deg\left(\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}\right) = \sum_{i=1}^n d_i$.

דרגה טוטאלית של פולינום: תהא $d \in M_{k \times n}(\mathbb{N})$ אזי $\deg\left(\sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^n x_j^{d_{i,j}}\right) = \max\left\{\deg\left(\prod_{j=1}^n x_j^{d_{i,j}}\right) \;\middle|\; i \in [k]\right\}$.

למה שוורץ־זיפל: יהי $f \in \mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ באשר $f \neq 0$ ותהא $S \subseteq \mathbb{F}$ סופית אזי $\mathbb{P}_{a_1,\dots,a_n \leftarrow S}(f(a_1 \dots a_n) = 0) \leq \frac{\deg(f)}{|S|}$.

מסקנה: קיימת מ"ט M עבורה לכל $x \in \{0,1\}^*$ מתקיים
- אם x אינו קידוד של נוסחה אריתמטית מעל $\mathbb{R}$ מתקיים $M(x)$ דוחה.
- אם קיימת φ נוסחה אריתמטית מעל $\mathbb{R}$ המקיימת $\varphi \equiv 0$ וכן $x = \langle \varphi \rangle$ מתקיים $M(x)$ מקבלת בזמן $\mathrm{poly}(|\varphi|)$.
- אם קיימת φ נוסחה אריתמטית מעל $\mathbb{R}$ המקיימת $\varphi \not\equiv 0$ וכן $x = \langle \varphi \rangle$ מתקיים $\mathbb{P}(\text{מקבלת } M(x)) \leq 0.01$ בזמן $\mathrm{poly}(|\varphi|)$.

מכונת טיורינג אקראית: תהא $T(n)$ חשיבה בזמן אזי מ"ט דו־סרטית M בעלת זמן ריצה T עם קונפיגורציה התחלתית $x\$r$ באשר $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$.

חסם עליון לזמן ריצה של מכונת טיורינג אקראית: תהא $T(n)$ חשיבה בזמן ותהא M מכונת טיורינג אקראית אזי T.

סימון: תהא M מ"ט אקראית עם זמן ריצה $T(n)$ יהי $x \in \{0,1\}^*$ ויהי $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$ אזי $M(x;r) = M(x\$r)$.

קלט של מכונת טיורינג אקראית: תהא M מ"ט אקראית עם זמן ריצה $T(n)$ יהי $x \in \{0,1\}^*$ ויהי $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$ אזי x.

אקראיות של מכונת טיורינג אקראית: תהא M מ"ט אקראית עם זמן ריצה $T(n)$ יהי $x \in \{0,1\}^*$ ויהי $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$ אזי r.

סימון: תהא M מ"ט אקראית עם זמן ריצה $T(n)$ יהי x קלט אזי $M(x)$ משתנה מקרי לקבלת $M(x;r)$ עבור $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$ אקראית.

הגדרה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \to [0,1]$ ותהא שפה $\mathcal{L}$ עבורה קיימת מ"ט אקראית M עם זמן ריצה פולינומי $T(n)$ המקיימת כי החל ממקום מסויים $n \in \mathbb{N}$ מתקיים
- לכל $x \in \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}}(\text{מקבלת } M(x;r)) \geq \alpha(n)$.
- לכל $x \notin \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}}(\text{מקבלת } M(x;r)) = 0$.

אזי $\mathcal{L} \in \mathcal{RP}(\alpha)$.

טענה: תהיינה $\alpha,\beta : \mathbb{N} \to [0,1]$ באשר $\alpha \leq \beta$ החל ממקום מסויים אזי $\mathcal{RP}(\beta) \subseteq \mathcal{RP}(\alpha)$.

טענה: $\mathcal{RP}(1) = \mathcal{P}$.

טענה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \to [0,1]$ באשר $0 < \alpha$ החל ממקום מסויים אזי $\mathcal{RP}(\alpha) \subseteq \mathcal{NP}$.

הגדרה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \to [0,1]$ אזי $\mathrm{co}\mathcal{RP}(\alpha) = \left\{\overline{L} \mid L \in \mathcal{RP}(\alpha)\right\}$.

טענה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \to [0,1]$ ותהא שפה $\mathcal{L}$ אזי $\mathcal{L} \in \mathrm{co}\mathcal{RP}(\alpha)$ אם"ם קיימת מ"ט אקראית M עם זמן ריצה פולינומי $T(n)$ המקיימת כי החל ממקום מסויים $n \in \mathbb{N}$ מתקיים
- לכל $x \in \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}}(\text{מקבלת } M(x;r)) = 1$.
- לכל $x \notin \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}}(\text{מקבלת } M(x;r)) \leq 1 - \alpha(n)$.

טענה: $\mathrm{ZE}_{\mathbb{R}} \in \mathrm{co}\mathcal{RP}(0.99)$.

טענה: יהיו $c,d \in \mathbb{N}$ אזי $\mathcal{RP}(n^{-c}) = \mathcal{RP}\left(1 - 2^{-n^d}\right)$.

שפה $\mathcal{RP}$: $\mathcal{RP} = \mathcal{RP}(0.5)$.

שפה $\mathrm{co}\mathcal{RP}$: $\mathrm{co}\mathcal{RP} = \mathrm{co}\mathcal{RP}(0.5)$.

הגדרה: תהיינה $\alpha,\beta:\mathbb{N}\to[0,1]$ ותהא שפה $\mathcal{L}$ עבורה קיימת מ"ט אקראית M עם זמן ריצה פולינומי $T(n)$ המקיימת כי החל ממקום מסויים $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

- לכל $x\in\mathcal{L}\cap\Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r\leftarrow\{0,1\}^{T(n)}}(M(x;r)\text{ מקבלת})\geq\beta(n)$.
- לכל $x\notin\mathcal{L}\cap\Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r\leftarrow\{0,1\}^{T(n)}}(M(x;r)\text{ מקבלת})\leq\alpha(n)$.

אזי $\mathcal{L}\in\mathcal{BPP}(\alpha,\beta)$.

שפה $\mathcal{BPP}$: $\mathcal{BPP}=\mathcal{BPP}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

טענה: תהא $\alpha:\mathbb{N}\to[0,1]$ אזי $\mathcal{RP}(\alpha)=\mathcal{BPP}(0,\alpha)$.

טענה: תהא $\alpha:\mathbb{N}\to[0,1]$ אזי $\text{co}\mathcal{RP}(\alpha)=\mathcal{BPP}(1-\alpha,1)$.

טענה: תהיינה $\alpha,\beta,\gamma,\delta:\mathbb{N}\to[0,1]$ עבורן $\alpha\leq\beta\leq\gamma\leq\delta$ החל ממקום מסויים אזי $\mathcal{BPP}(\alpha,\delta)\subseteq\mathcal{BPP}(\beta,\gamma)$.

משפט צ'רנוף־הופדינג: יהי $\delta>0$ יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $A_1,\ldots,A_n\sim\text{Ber}(p)$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|p-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}A_i\right|\geq\delta\right)\leq2^{-\Theta(\delta^2 n)}$.

טענה: יהיו $c,d\in\mathbb{N}$ ותהא $\alpha:\mathbb{N}\to[0,1]$ חשיבה בזמן פולינומי באשר $n^{-c}\leq\alpha(n)\leq1-n^{-c}$ החל ממקום מסויים אזי $\mathcal{BPP}(\alpha(n)-n^{-c},\alpha(n)+n^{-c})\subseteq\mathcal{BPP}\left(2^{-n^d},1-2^{-n^d}\right)$.

סימון: תהא M מ"ט k־סרטית ותהא $c_1\$c_2\$\ldots\$c_k$ קונפיגורציה אזי $(c_1\$c_2\$\ldots\$c_k)^i=c_i$.

סימון: תהא $x\in\Sigma^*$ ותהא $A\subseteq\Sigma^*$ אזי $x\backslash A$ הינה המחרוזת x ללא אברי A.

מכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי מ"ט תלת־סרטית M עבורה לכל קונפיגורציות $c_0\ldots c_n$ באשר $c_0=q_0x$ וכן c_{i-1} עוברת ל־c_i לכל $i\in[n]$ מתקיים

- סרט לקריאה בלבד: לכל $i\in[n]$ מתקיים $c_i^1=x\backslash Q$.
- סרט חסום במקום: לכל $i\in[n]$ מתקיים $\left|c_{i-1}^2\right|\leq S(n)+1$.
- סרט לכתיבה חד־פעמית: לכל $i\in[n]$ ולכל $j\in\left[\left|c_{i-1}^3\right|\right]$ מתקיים $\left(c_{i-1}^3\backslash Q\right)_j=\left(c_i^3\backslash Q\right)_j$.

חסם עליון למקום ריצה של מכונת טיורינג: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ותהא M מ"ט בעלת סיבוכיות מקום S אזי S.

הערה: נקרא למכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום מכונת טיורינג.

הגדרה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{DSpace}(S(n))=\{L(M)\mid \mathcal{O}(S(n))\text{ מ"ט שרצה במקום } M\}$.

שפה PSPACE: $\text{PSPACE}=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{DSpace}(n^c)$.

שפה LOGSPACE: $\text{LOGSPACE}=\text{DSpace}(\log(n))$.

סימון: $\text{LOGSPACE}=\text{LSPACE}=\mathcal{L}$.

טענה: $\text{DSpace}(1)=\text{DSpace}(\log(\log(n)))=\{L\mid L\text{ רגולרית}\}$.

טענה: תהא T חשיבה בזמן אזי $\text{DTime}(T(n))\subseteq\text{DSpace}(T(n))$.

טענה: $\mathcal{NP}\subseteq\text{PSPACE}$.

טענה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ באשר $S\geq\log$ אזי $\text{DSpace}(S(n))\subseteq\text{DTime}\left(2^{\mathcal{O}(S(n))}\right)$.

מסקנה: $\text{LSPACE}\subseteq\mathcal{P}$.

מסקנה: $\text{PSPACE}\subseteq\mathcal{EXP}$.

פונקציה חשיבה במקום: פונקציה $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה קיימת מ"ט M המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי M על הקלט 1^n מחשבת את $(S(n))_2$ במקום $\mathcal{O}(S(n))$.

משפט היררכיית המקום: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חשיבה במקום ותהא $t(n)=o(S(n))$ אזי $\text{DSpace}(t(n))\subsetneq\text{DSpace}(T(n))$.

מסקנה: $\text{LSPACE}\subsetneq\text{PSPACE}$.

מסקנה: לפחות אחד מהבאים נכון

- $\text{LSPACE}\subsetneq\mathcal{P}$.
- $\mathcal{P}\subsetneq\text{PSPACE}$.

השערה: $\text{LSPACE}\subsetneq\mathcal{P}$. השערה פתוחה

השערה: $\mathcal{P}\subsetneq\text{PSPACE}$. השערה פתוחה

פונקציה חשיבה במקום S: תהא $D\subseteq\Sigma$ אזי $f:D\to(\Gamma\backslash\{\sqcup\})^*$ עבורה קיימת מ"ט M בעלת סיבוכיות מקום $S(n)$ המחשבת את f.

רדוקציית מיפוי במקום לוגריתמי: יהיו Σ,Δ אלפבייתים באשר $\Sigma\subseteq\Delta$ תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה ותהא $B\subseteq\Delta^*$ שפה אזי רדוקציית מיפוי f מ־A ל־B חשיבה במקום לוגריתמי.

סימון: יהיו Σ,Δ אלפבייתים באשר $\Sigma\subseteq\Delta$ תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה ותהא $B\subseteq\Delta^*$ שפה ותהא $f:\Sigma^*\to\Delta^*$ רדוקציית מיפוי במקום לוגריתמי אזי $A\le_L B$.

טענה: תהיינה A,B שפות עבורן $A\le_L B$ אזי $A\le_p B$.

שפה $\mathcal{P}$־קשה: $\mathcal{PH}=\{\mathcal{L}\mid\forall L\in\mathcal{P}\,(L\le_L\mathcal{L})\}$.

שפה $\mathcal{P}$־שלמה: $\mathcal{PC}=\mathcal{P}\cap\mathcal{PH}$.

טענה: תהא f חשיבה במקום $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ תהא g חשיבה במקום $R:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ותהא $m:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורה לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in\Sigma^n$ מתקיים $|f(x)|\le m(n)$ אזי $g\circ f$ חשיבה במקום $\mathcal{O}\left(S(n)+\log(m(n))+R(m(n))\right)$.

טענה: תהיינה A,B שפות באשר $B\in\text{LSPACE}$ וכן $A\le_L B$ אזי $A\in\text{LSPACE}$.

מסקנה: תהיינה A,B,C שפות באשר $A\le_L B$ וכן $B\le_L C$ אזי $A\le_L C$.

טענה: תהא $A\in\mathcal{PC}\cap L$ אזי $\mathcal{P}=\text{LSPACE}$.

הגדרה: $\text{CVAL}=\{\langle C,x\rangle\mid(\text{מעגל בוליאני } C)\wedge(C(x)=1)\}$.

למה קוק־לוין: תהא M מ"ט רצה בזמן פולינומי אזי קיימת פונקציה חשיבה f במקום לוגריתמי עבורה $f(1^n)=\langle C_{M,n}\rangle$ באשר $C_{M,n}$ מעגל עבורו לכל $z\in\{0,1\}^n$ מתקיים ($M(z)$ מקבלת)$\Longleftrightarrow$($C_{M,n}(z)=1$).

טענה: $\text{CVAL}\in\mathcal{PC}$.

סימון: תהא M מטל"ד k־סרטית ותהא $c_1\$c_2\$\ldots\$c_k$ קונפיגורציה אזי $(c_1\$c_2\$\ldots\$c_k)^i=c_i$.

מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית בעלת סיבוכיות מקום: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי מטל"ד תלת־סרטית M עבורה לכל קונפיגורציות $c_0\ldots c_n$ באשר $c_0=q_0x$ וכן c_{i-1} עוברת ל־c_i לכל $i\in[n]$ מתקיים

- סרט לקריאה בלבד: לכל $i\in[n]$ מתקיים $c_i^1=x\backslash Q$.
- סרט חסום במקום: לכל $i\in[n]$ מתקיים $\left|c_{i-1}^2\right|\le S(n)+1$.
- סרט לכתיבה חד־פעמית: לכל $i\in[n]$ ולכל $j\in\left[\left|c_{i-1}^3\right|\right]$ מתקיים $\left(c_{i-1}^3\backslash Q\right)_j=\left(c_i^3\backslash Q\right)_j$.

חסם עליון למקום ריצה של מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ותהא M מטל"ד בעלת סיבוכיות מקום S אזי S.

הערה: נקרא למכונת טיורינג לא דטרמיניסטית בעלת סיבוכיות מקום מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

הגדרה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אזי $\text{NSpace}(S(n))=\{L(M)\mid\mathcal{O}(S(n))\text{ מטל"ד הרצה במקום } M\}$.

שפה NPSPACE: $\text{NPSPACE}=\bigcup_{c\in\mathbb{N}}\text{NSpace}(n^c)$.

שפה $\mathcal{NL}$: $\mathcal{NL}=\text{NSpace}(\log(n))$.

השערה: $\text{LSPACE}=\mathcal{NL}$. השערה פתוחה

סימון: תהא M מ"ט יהיו $x,y\in\Gamma^*$ ויהי $q\in Q$ אזי $\text{find}_Q(xqy)=|x|+1$.

מוודא במקום לוגריתמי: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי מ"ט תלת־סרטית V עבורה לכל קונפיגורציות $c_0\ldots c_n$ באשר $c_0=q_0x$ וכן c_{i-1} עוברת ל־c_i לכל $i\in[n]$ מתקיים

- סרט לקריאה בלבד: לכל $i\in[n]$ מתקיים $c_i^1=x\backslash Q$.
- סרט עד: לכל $i\in[n]$ מתקיים $\text{find}_Q\left(c_{i-1}^2\right)\le\text{find}_Q\left(c_i^2\right)$.
- סרט עבודה: לכל $i\in[n]$ מתקיים $\left|c_{i-1}^3\right|\le S(n)+1$.

וכן לכל $x\in\Sigma^*$ מתקיים ($x\in A$)$\Longleftrightarrow$(קיים $w\in\Sigma^*$ עבורו $V(x\$w)$ מקבלת).

סימון: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה יהי V מוודא בזמן לוגריתמי ויהיו $x,w\in\Sigma^*$ אזי $V(x,w)=V(x\$w)$.

טענה: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ שפה אזי ($A\in\mathcal{NL}$)$\Longleftrightarrow$(קיים ל־A מוודא לוגריתמי).

הגדרה: $\text{STCON}=\{\langle G,s,t\rangle\mid(\text{גרף מכוון } G)\wedge(\text{קיים מסלול מ־} s \text{ ל־} t)\}$.

טענה: $\text{STCON}\in\mathcal{NL}$.

שפה $\mathcal{NL}$־קשה: $\mathcal{NLH}=\{\mathcal{L}\mid\forall L\in\mathcal{NL}\,(L\le_L\mathcal{L})\}$.

שפה $\mathcal{NL}$־שלמה: $\mathcal{NLC}=\mathcal{NL}\cap\mathcal{NLH}$.

טענה: $\text{STCON}\in\mathcal{NLC}$.

מסקנה: $\mathcal{NL}\subseteq\mathcal{P}$.

אלגוריתם לקיום מסלול עם חסם לאורכו בגרף מכוון: יהי G גרף מכוון יהיו $s,t\in V$ ויהי $\ell\in\mathbb{N}_+$ אזי

```
function Reach(G, s, t, ℓ):
    if ℓ = 1 then
        if (s, t) ∈ E then return True
        return False
    for v ∈ V do
        b1 ← Reach(G, s, v, ⌈ℓ/2⌉)
        b2 ← Reach(G, v, t, ⌊ℓ/2⌋)
        if b1 ∧ b2 then return True
    end
    return False
```

טענה: יהי G גרף מכוון יהיו $s,t\in V$ ויהי $\ell\in\mathbb{N}_+$ אזי $\left(\text{Reach}\left(G,s,t,\ell\right)=\text{True}\right)\Longleftrightarrow$(קיים מסלול מ־$s$ ל־t באורך לכל היותר ℓ).

משפט סאביץ': $\text{STCON}\in\text{DSpace}\left(\log\left(n\right)^{2}\right)$.

מסקנה: $\mathcal{NL}\subseteq\text{DSpace}\left(\log\left(n\right)^{2}\right)$.

מסקנה: תהא $S:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חשיבה במקום באשר $S\ge\log$ אזי $\text{NSpace}\left(S\left(n\right)\right)\subseteq\text{DSpace}\left(S^{2}\left(n\right)\right)$.

מסקנה: $\text{PSPACE}=\text{NPSPACE}$.

הגדרה: $\text{co}\mathcal{NL}=\left\{ L\mid\overline{L}\in\mathcal{NL}\right\}$.

משפט אימרמן־סלפצ'ני: $\overline{\text{STCON}}\in\mathcal{NL}$.

מסקנה: $\mathcal{NL}=\text{co}\mathcal{NL}$.

פסוק EkCNF: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי פסוק $\varphi\in\text{CNF}$ עבורו קיים $m\in\mathbb{N}$ וקיימת $A\in M_{m\times k}\left(\left\{ p_{i}\right\} \cup\left\{ \neg p_{i}\right\} \right)$ המקיימת $\varphi=\bigwedge_{i=1}^{m}\bigvee_{j=1}^{k}\left(A\right)_{i,k}$ וכן $\left|\text{FV}\left(\bigvee_{j=1}^{k}\left(A\right)_{i,k}\right)\right|=k$ לכל $i\in\left[m\right]$.

הגדרה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{E}k\text{SAT}=\left\{ \left\langle \varphi\right\rangle \mid\left(\varphi\in\text{E}k\text{CNF}\right)\wedge\left(\varphi\text{ ספיקה}\right)\right\}$.

טענה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{E}k\text{SAT}\in\mathcal{NPH}$.

טענה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ תהא $\varphi\in\text{E}k\text{SAT}$ אזי $\mathbb{P}_{v:\left\{ p_{i}\right\} \to\left\{ \text{True},\text{False}\right\} }\left(\overline{v}\left(\varphi\right)=\text{True}\right)=\frac{k}{8}$.

יחס הפסוקיות המסופקות: יהיו $k,m\in\mathbb{N}_+$ תהא $A\in M_{m\times k}\left(\left\{ p_{i}\right\} \cup\left\{ \neg p_{i}\right\} \right)$ ותהא v השמה אזי $\text{RCl}\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\bigvee_{j=1}^{k}\left(A\right)_{i,k},v\right)=\frac{1}{m}\cdot\text{Cl}\left(\bigwedge_{i=1}^{m}\bigvee_{j=1}^{k}\left(A\right)_{i,k},v\right)$.

משפט PCP: קיימת רדוקציה פולינומית f מ־3CNF ל־E3CNF המקיימת
- תהא $\varphi\in\text{3CNF}$ ספיקה אזי $f\left(\varphi\right)$ ספיקה.
- תהא $\varphi\in\text{3CNF}$ לא ספיקה ותהא v השמה אזי $\text{RCl}\left(f\left(\varphi\right),v\right)\le\frac{7.01}{8}$.

מסקנה: תהא f רדוקציה פולינומית מ־3CNF ל־E3CNF עבורה $f\left(\varphi\right)$ ספיקה לכל $\varphi\in\text{3CNF}$ ספיקה וכן קיימת $\varphi\in\text{3CNF}$ לא ספיקה וקיימת השמה v עבורן $\text{RCl}\left(f\left(\varphi\right),v\right)>\frac{7.01}{8}$ אזי $\mathcal{P}=\mathcal{NP}$.