נקודה צפה: יהי  $x\in\mathbb{R}$  יהי ויהי  $t\in\mathbb{N}_+$  בסיס יהי  $eta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$  יהי אזי עבורם  $\sigma \in \{\pm 1\}$  וכן  $p \in \mathbb{Z}$  וכן  $a_1 \neq 0$  באשר  $a_1 \ldots a_t \in \mathbb{Z}$  $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p$ 

עבורו  $x \in \mathbb{R}$  ויהי ווהי  $t \in \mathbb{N}_+$  בסיס הי  $\beta \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$  יהי שימן: יהי  $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^t rac{a_i}{eta^i}
ight) \cdot eta^p$ יצוג בנקודה צפה אזי

מנטיסה/ספרות משמעותיות: יהי  $t\in\mathbb{N}_+$  בסיס הי $eta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$  יהי ויהי יצוג בנקודה צפה אזי  $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^t rac{a_i}{eta^i}
ight) \cdot eta^p$  עבורו  $x \in \mathbb{R}$ 

 $t\in\mathbb{N}_{\perp}$  היהי בסיס  $eta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$  יהי צפה: יהי במיס החזקה במיס היהי U צפה נקודה נקודה עבורן עבורן בייצוג עבורן בייצוג עבורן ויהיו $L,U\in\mathbb{Z}$  יהיו  $t\in\mathbb{N}_+$  יהי בסיס  $eta\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$  יהי טענה: יהי הגבלה על החזקה ויהי  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  מספר בעל ייצוג נקודה צפה אזי  $\beta^{L-1} < |x| < \beta^{U}$ 

 $L,U\in\mathbb{Z}$  בסיס יהיו  $eta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$  הגבלה על החזקה ויהי

 $|x| \leq \beta^{\overline{L}-1}$  :underflow ullet

קיצוץ נקודה צפה: יהי  $\{0,1\}$  אויהי בסיס הי+ בסיס הי ויהי  $t\in\mathbb{N}$ אזי  $x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}rac{a_i}{eta^i}
ight)\cdoteta^p$  בבסיס  $x\in\mathbb{R}$  $f(x) = \sigma \cdot \left( \sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p$ 

עיגול נקודה צפה: יהי  $t \in \mathbb{N}_+$  בסיס הי  $eta \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$  יהי יהי עיגול נקודה צפה:  $x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}rac{a_i}{eta^i}
ight)\cdoteta^p$  בבסיס  $x\in\mathbb{R}$  $\sigma \cdot \left( \sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p \qquad 0 \le a_{t+1} < \frac{\beta}{2}$ 

 $\int \sigma \cdot \left( \left( \sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i} \right) + \frac{1}{\beta^t} \right) \cdot \beta^p \frac{\beta}{2} \le a_{t+1} < \beta$  $x\in\mathbb{R}$  ויהי  $t\in\mathbb{N}_+$  אזי  $t\in\mathbb{N}$  בסיס יהי  $t\in\mathbb{N}$  ויהי  $t\in\mathbb{N}$ 

> $.e\left(x
> ight)=x-\mathrm{fl}\left(x
> ight)$ אזי א  $x\in\mathbb{R}$  שגיאה: יהי  $|e\left(x
> ight)|$  אזי  $x\in\mathbb{R}$  איזי מוחלטת: שגיאה מוחלטת:

 $.\delta\left(x
ight)=rac{e\left(x
ight)}{\pi}$  אזי  $x\in\mathbb{R}$  יהי שניאה יחסית: יהי

 $\mathrm{fl}\left(x
ight)=x\left(1-\delta\left(x
ight)
ight)$  אזי  $x\in\mathbb{R}$  יהי מסקנה: יהי טענה: יהי  $x\in\mathbb{R}$  ייהי ויהי  $t\in\mathbb{N}_+$  יהי בסיס בסי $\beta\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1\right\}$  יהי טענה: יהי  $|\delta\left(x
ight)|<eta^{-t+1}$  בקיצוץ נקודה צפה אזי

טענה: יהי  $x\in\mathbb{R}$  ויהי והי  $t\in\mathbb{N}_+$  בסיס הי בעל ייצוג בעל ייצוג אויהי הי בעל ייצוג

 $|\delta\left(x\right)| \leq \frac{1}{2}\beta^{-t+1}$  אזי צפה צפה בעיגול נקודה נקודה אזי  $|e\left(x+y
ight)| \leq |e\left(x
ight)| + |e\left(y
ight)|$ אזי  $|e\left(x+y
ight)| \leq |e\left(x
ight)|$ אזי אזי אזי אזי אזי  $|e\left(x+y
ight)| \leq |e\left(x+y
ight)|$ 

 $|\delta\left(x+y
ight)|\leq|\delta\left(x
ight)|+$ מסקנה: יהיו א בעלי בעלי בעלי א בעלי מימן אויי מחקנה: יהיו

 $|\delta\left(x+y
ight)|~\leq~$ טענה: יהיו  $x,y~\in~\mathbb{R}$  יהיו אזיי טענה: יהיו  $\max \left\{ \left| \delta \left( x \right) \right|, \left| \delta \left( y \right) \right| \right\}$ 

 $|\delta\left(x-y
ight)| \leq \left|rac{e(x)}{x-y}
ight| + \left|rac{e(y)}{x-y}
ight|$ איזי  $x,y \in \mathbb{R}$  טענה: יהיו

 $|\delta\left(xy
ight)| \ \le \ |\delta\left(x
ight)| + |\delta\left(y
ight)| + \pi x, y \ \in \ \mathbb{R}$  טענה: יהיו  $\left|e\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq \frac{|x||e(y)|+|y||e(x)|}{|y|\cdot f(y)|}$  איז  $x,y\in\mathbb{R}$  טענה: יהי

 $\leq$  אזא x,y  $\in$ 

אלגוריתם שיטת החצייה: יהי $\,arepsilon\,$  תהא  $\,arepsilon\,$   $\,$  רציפה ויהיו  $\,$ אזי  $f(a_0) f(b_0) < 0$  עבורם  $a_0 < b_0$ 

function BisectionMethod( $a_0$ ,  $b_0$ ,  $\varepsilon$ ):

while  $\frac{b_0-a_0}{2n+1} \geq \varepsilon$  do

 $m_n \leftarrow \frac{a_n + b_n}{2}$  $\inf_{\mid} f(m_n) = 0 \text{ then } \\ \operatorname{return} m_n$ else if  $f\left(a_{n}\right)f\left(m_{n}\right)<0$  then  $\left(a_{n+1},b_{n+1}\right) \leftarrow \left(a_n,m_n\right)$ else if  $f(m_n) f(b_n) < 0$  then  $(a_{n+1},b_{n+1}) \leftarrow (m_n,b_n)$ 

< b ויהיו f : [a,b] ightarrow  $\mathbb{R}$  תהא arepsilon רציפה ויהיו עבורם  $lpha \ \in \ [a,b]$  אזי קיים שורש  $f\left(a
ight)$  של  $f\left(b
ight) < 0$  עבורם .|BisectionMethod  $(a\,,\,b\,,\,arepsilon)\,-\,q\,|\,<\,arepsilon$ 

 $.e_n = lpha - x_n$  אזי אזי  $x_n o lpha$  עבורה עבורה א $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$  אזי טענה: מאזי אזי אוי פאלגוריתם רציפה  $f:[a,b] \to \mathbb{R}$  אזי טענה: תהא  $|lpha-m_n| \leq rac{b-a}{2n+1}$ וכן ווא  $m_n o lpha$ 

עבורה lpha ightarrow תהא lpha ightarrow עבורה lpha lpha אזי lpha אזי lpha אזי  $|e_{n+1}|$  $\leq$  עבורו  $p\in\mathbb{R}_+$  $\lim \sup_{n \to \infty} \frac{\left|e_{n+1}\right|}{\left|e_{n}\right|p} < \infty$ 

מסקנה: סדר ההתכנסות של שיטת החצייה היא לינארית.

וכן  $\alpha$  פשוט  $\varepsilon_M$  דיוק המכונה ותהא א גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט  $\varepsilon_M$ 

 $\lim_{x \to \alpha} \left| \frac{f(x)}{x f'(x)} \right|$ 

 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 

lpha ויהי מענה: תהא  $f\in C^1\left([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\}
ight)$  טענה: תהא

 $x_0,x_1\in\mathbb{R}$  ויהיו  $f\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0
ight\}
ight)$  שיטת המיתרים: תהא  $x_n - x_{n-1}$  $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{1}{x_n}$  $f(x_n)-f(x_{n-1})$ 

 $f:[a,b] o\mathbb{R}$  רציפה ויהיו רציפה  $f:[a,b] o\mathbb{R}$  רציפה ויהיו אזי  $f\left(a_{0}\right)f\left(b_{0}\right)<0$  עבורם  $a_{0}< b_{0}$ 

timeton negular assist 
$$a_0$$
,  $a_0$ ,  $e$  : 
$$\begin{cases} n \leftarrow 0 \\ p \leftarrow 0 \\ n \leftarrow 0 \end{cases}$$
 while 
$$\begin{cases} \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \geq \varepsilon \text{ do} \\ \frac{2n+1}{2^{n+1}} \geq \varepsilon \text{ do} \end{cases}$$
 if  $f(m_n) = 0$  then 
$$| \text{return } m_n \text{ else if } f(a_n) f(m_n) < 0 \text{ then } \\ | \left( \frac{a_{n+1}, b_{n+1}}{n \leftarrow n + 1} \right) \leftarrow (a_n, m_n) \\ | n \leftarrow n + 1 \text{ else if } f(m_n) f(b_n) < 0 \text{ then } \\ | \left( \frac{a_{n+1}, b_{n+1}}{n \leftarrow n + 1} \right) \leftarrow (m_n, b_n) \\ | n \leftarrow n + 1 \text{ end} \end{cases}$$
 end

 ויהיו lpha יחיד פשוט פורש בעלת אורש  $f\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}
ight)$  ויהיו  $\phi = rac{1+\sqrt{5}}{2}$  אזי שיטת המיתרים בעלת סדר התכנסות  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$  $x_n = x_0 \in \mathbb{R}$  ויהי  $g:I o \mathbb{R}$  אזי  $g:I o \mathbb{R}$  איזי

 $g(x_{n-1})$ 

 $x_n o lpha$  עבורה  $g:I o \mathbb{R}$  איטרציה: שיטת איטרציה עבורה  $g\left(a
ight)=a$  עבורה  $a\in\mathbb{R}$  אזי  $g:I o\mathbb{R}$  עהא מקנית שבת: תהא

אזי  $x_n o lpha$  אזי מתכנסת שיטת איטרציה  $g \in C\left(I, \mathbb{R}\right)$  תהא

שיטת איטרציה  $g\in C\left(I,\mathbb{R}
ight)$  ותהא  $f:I o\mathbb{R}$  שיטת איטרציה  $(f\left( lpha 
ight) = 0) \Longleftarrow (g\left( lpha 
ight) = lpha )$ מתכנסת אזי

עבורה  $\alpha \in [a,b]$  אזי קיימת  $g \in C\left(\left[a,b\right],\left[a,b\right]\right)$  תהא משפט: תהא  $g(\alpha) = \alpha$ 

K לישפיץ g בורם 1>K>0וכן  $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לישפיץ פונקציה ביווץ: עבורם g עבורם  $g' \mid \geq K > 1$  וכן  $g \in C^1 \left( \mathbb{R} \right)$  עבורם g לישפיץ

K ליפשיץ g עבורו אבור ויהי  $g\in C\left(X\right)$  תהא סגור יהי יהי מסקנה: יהי אנור תהא . מתכנסת לנקודת האיטרציה gהאיטרציה שיטת אזי K עבורו g ליפשיץ א עבורו  $G \in C\left(X
ight)$  עבורו ליפשיץ א מסקנה: יהי X יהי ליפשיץ

 $|e_n| \le \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$ אא

 $\dot{g}$  מתקיים כי מתקיים מ $x\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$  אזי עבורו כל אזי איי איי עבורה lpha שבת אזיי נקודת אזיי פורה  $g \in C^1\left(I,\mathbb{R}
ight)$  עבורה מושכת:  $|g'(\alpha)| < 1$ 

 $0 \quad < \quad \liminf_{n \to \infty} \frac{|{}^{-n}\top^{\perp}|}{|e_n|^p}$ 

 $f\left(x_{n}
ight)=f\left(lpha
ight)+$ וכן מענה: תהא א גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט בעלת גזירה גזירה ליגזירה בעלת אורש  $.e_{n}=rac{f(x_{n})}{f'(\zeta_{n})}$  אור טיילור שלה איי  $f'\left(\zeta_{n}
ight)e_{n}$ 

 $|f\left(x_{n}\right)|\leq g$ טור טיילור שלה וכן  $f\left(x_{n}\right)=f\left(\alpha\right)+f'\left(\zeta_{n}\right)e_{n}$  $|e_n| \le \left| \frac{2\varepsilon_M}{f'(\zeta_n)} \right|$  איז  $\varepsilon_M$ 

אזי  $x_{0}\in\mathbb{R}$  ויהי  $f\in C^{1}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0
ight\}
ight)$  אזי  $f\in C^{1}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0
ight\}
ight)$ 

. אזי שיטת ניוטון בעלת סדר התכנסות ריבועי אזי  $x_0 \in \mathbb{R}$ 

function RegulaFalsi( $a_0$ ,  $b_0$ ,  $\varepsilon$ ):

 $x_n$  אזי אזי  $x_0 \in \mathbb{R}$  ויהי  $g:I o \mathbb{R}$  אזי איטרציה: תהא

 $\left|g'
ight| \leq K$  עבורו א עבורו K < 1 ויהי  $g \in C^1\left(\left[a,b
ight],\left[a,b
ight]
ight)$  משפט: תהא  $g\left( lpha 
ight) =lpha$  עבורה  $lpha \in \left[ a,b
ight]$  אזי קיימת ויחידה

 $\leq$  עבורו K < 1 ויהי  $g \in C^1\left(\left[a,b\right],\left[a,b\right]
ight)$  עבורו  $g \in C^1\left(\left[a,b\right],\left[a,b\right]
ight)$ השבת. מתכנסת לנקודת השבת. g אזי שיטת איט אזי K

 $\left|g'\right|\,\leq\,$ עבורו א א בורו  $G\,\in\,C^{\,1}\left(\left[a,\,b\right],\left[a,\,b\right]\right)$  מסקנה: תהא עבורו א עבורו ווהי עבורו א מסקנה: תהא

עבורם K > 0 וכן  $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  עבורם K > 0 וכן אנקציה

 $|g(x) - g(y)| \le K|x - y|$ 

טענה: יהי X סגור תהא  $G \in C (X)$  טענה: יהי א סגור תהא עבורו  $G \in C (X)$  אזי  $g\left( lpha 
ight) =lpha$  עבורה  $lpha \in \left[ a,b
ight]$  קיימת ויחידה

 $\left|g'\left(lpha
ight)
ight|<1$  משפט: תהא שבת עבורה  $g\in C^{1}\left(I,\mathbb{R}
ight)$  משפט: תהא

 $=\left|\left|g'\left(lpha
ight)
ight|>$  בורה עבורה שבת אזי נקודת אזי  $g\in C^{1}\left(I,\mathbb{R}
ight)$  נקודה דוחה: תהא עבורה קיימים עבורה עבורה אזי נקודת אזי עבורה קיימים עבורה עבורה עבורה  $g \in C^1 \left(I, \mathbb{R}\right)$ וכן  $\left|g'\left(\mathcal{U}
ight)
ight|<1$ וכן  $lpha\in\partial\mathcal{U},\partial\mathcal{V}$  תחומים באשר  $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}$ 

 $|g'(\mathcal{V})| > 1$ מטקנה: תהא  $\zeta \in [a,b]$  ויהי  $f \in C^1\left([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\}
ight)$  שורש פשוט  $.(\zeta-\varepsilon,\zeta+\varepsilon)$ אזי בקטע מתכנסת ניוטון שיטת עבורו  $\varepsilon>0$ אזי אזי קיים  $0<\alpha$  נקודת שבת עבורה  $g\in C^1\left(I,\mathbb{R}
ight)$  משפט: תהא  $x\in(lpha-arepsilon,lpha+arepsilon)$  עבורו לכל arepsilon<lpha אזי קיים arepsilon>0 עבורו לכל arepsilon'מתקיים כי a מתכנסת ל־ $\alpha$  בקצב התכנסות לינארי. משפט: יהי a נקודת שבת עבורה  $g\in C^p\left(I,\mathbb{R}
ight)$  תהא p>1 יהי

 אזי קיים  $n \, \in \, [p-1]$ לכל  $g^{\, \left( n \right)} \left( \alpha \right) \, = \, 0$ וכן  $g^{\, \left( p \right)} \left( \alpha \right) \, \neq \, 0$  $\alpha$ ל־סת כנסת g כי מתקיים  $x\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ לכל לכל עבורו כי  $\varepsilon>0$ 

שורש פשוט  $\zeta\in\left[a,b
ight]$  ויהי  $f\in C^{2}\left(\left[a,b
ight],\mathbb{R}\backslash\left\{0
ight\}
ight)$  שורש פשוט

עבורו עבורו  $\zeta\in[a,b]$  ויהי ווא  $f\in C^{2}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0
ight\}
ight)$  שורש עבורו עבורו שיטת ניוטון arepsilon>0 אזי קיים  $f''(\zeta)\neq 0$  וכן  $f'(\zeta)=0$  $(\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$  מתכנסת בקצב לינארי בקטע

 $m\in\mathbb{N}_{+}$  יהי  $f\in C^{1}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\backslash\left\{0
ight\}
ight)$  יהי המתוקנת: תהא  $g(x) = x - m \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}$  אא

שורש  $\zeta\in[a,b]$  ויהי  $f\in C^{\eta}\left([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\}
ight)$  שורש מתכנסת מסדר מסדר המתוקנת עבורו שיטת עבורו  $\varepsilon \,>\, 0$  מיים אזי אזי מדרגה מדרגה

 $(\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$  בקצב ריבועי בקטע  $g\left(x
ight) \ = \ x \ -$ איז  $f \ \in \ C^1\left(\mathbb{R}
ight)$  תהא תהא

 $lpha \in I$  נקודת מיטרטיבית ותהא  $g:I o\mathbb{R}$  נקודת נחום ההתכנסות: תהא שיטת  $x \in J$  לכל הכן מכך עבורו עבורו עבורו איי מקסימלי לכל איי קטע שבת איי שבת שבת איי איי קטע מקסימלי

 $\alpha$ האיטרציה  $\alpha$  המתחילה ב־ $\alpha$  מתכנסת ל־  $lpha\in I$  נקודת שיטה  $lpha\in C^1$  ( $I,\mathbb{R}$ ) מיטר  $lpha\in C^1$  נקודת  $\left|g'\left(x
ight)
ight|\leq1$  מתקיים  $x\in K$  לכל

 $g\left(x
ight) = x-g\left(x
ight) \in C^{1}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n}
ight)$  אזי $f\in C^{1}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n}
ight)$  שיטת ניוטון־רפסון: תהא  $D_f(x)^{-1} \cdot f(x)$ 

טענה: תהא  $\zeta \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $f \in C^1\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n
ight)$  שורש פשוט אזי קיימת . סביבה של  $\zeta$  בה שיטת ניוטון־רפסון מתכנסת בקצב ריבועי  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  $f \in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}
ight)$  סענה: תהא  $f \in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}
ight)$ 

בעלת סדר לינארי. regula falsi אזי f(a) f(b) < 0 $\Pi_n = \{f \in \mathbb{R} \, [x] \mid \deg (f) \leq n \}$  אזי  $n \in \mathbb{N}$  סימון: יהי יהי תו

אזי  $a_0 \dots a_n$  ,  $b_0 \dots b_n \in \mathbb{R}$  ויהיו  $n \in \mathbb{N}$  אזי מטרי: יהי  $f(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ פולינום אקספוננטי: יהי  $n\in\mathbb{N}$  ויהיו איז אויהיו אקספוננטי: יהי  $a_0\ldots a_n$  איז איזי  $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^b k^x$ 

 $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f: \mathbb{R} o \mathbb{R}$  ותהיינה (פ"א): תהא  $i \in \{0 \dots n\}$  לכל  $p\left(x_i\right) = f\left(x_i\right)$  עבורו עבורו  $p \in \Pi_n$  אזי משפט: תהא  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f: \mathbb{R} o \mathbb{R}$  נקודות שונות אזי

קיים ויחיד  $p \in \Pi_n$  פולינום אינטרפולציה.  $\ell_i\left(x
ight) = n$  פולינום לגראנז': תהיינה  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  נקודות שונות אזי

 $\prod_{k \in \{0...n\} \setminus \{i\}} (x - x_k)$  $\Pi_{k \in \{0...n\} \setminus \{i\}} (x_i - x_k)$ 

 $\ell_i\left(x_i
ight)=\delta_{i,j}$  טענה: תהיינה  $x_0\ldots x_n\in\mathbb{R}$  נקודות שונות אזי טענה בסיס לגראנז': תהיינה  $\mathbb{R}$  נקודות שונות אזי  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  $\Pi_n$  בסיס של  $\{\ell_0 \ldots \ell_n\}$ מסקנה צורת לגראנז': תהא  $f:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  ותהיינה לגראנז': תהא מסקנה צורת לגראנז': תהא

שונות אזי  $\sum_{i=0}^{n}f\left(x_{i}
ight)\ell_{i}\left(x
ight)$  פולינום אינטרפולציה. טענה בסיס ניוטון: תהיינה  $x_0 \dots x_{n-1} \in \mathbb{R}$  אזי  $\Pi_n$  בסיס של  $\left\{\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_i
ight)
ight\}_{j=-1}^{n-1}$ 

 $x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$  טענה:  $f: \mathbb{R} o \mathbb{R}$  אם סענה: תהא f פולינום אינטרפולציה של  $\sum_{i=-1}^{n}A_{j+1}\prod_{i=0}^{j}(x-x_i)$  ויהי

 $\sum_{j=-1}^{n-1} A_{j+1} \prod_{i=0}^j (x-x_i)$  אי  $x_0 \dots x_{n+1}$  בנקודות  $\{x_0,\dots,x_n\}$ בי f בי אינטרפולציה של פולינום אינטרפולציה של  $x_0 \ldots x_{n+1} \; \in \; \mathbb{R}$  תהיינה  $f \; : \; \mathbb{R} \; o \; \mathbb{R}$  תהא

f פולינום אינטרפולציה של  $\sum_{i=-1}^n A_{j+1} \prod_{i=0}^j (x-x_i)$  ויהי  $\sum_{j=-1}^{k-1} A_{j+1} \prod_{i=0}^{j} (x-x_i)$  איי  $x_0 \dots x_{n+1}$  בנקודות  $\{x_0,\ldots,x_k\}$ בי f של אינטרפולציה של פולינום

יהי  $x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$  תהיינה  $f: \mathbb{R} o \mathbb{R}$  יהי f פולינום אינטרפולציה של  $\sum_{i=-1}^{n}A_{j+1}\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_{i}
ight)$  $\sum_{j=-1}^{n-1} B_{j+1} \prod_{i=0}^{j} \left(x-x_i
ight)$  יההי  $x_0 \ldots x_{n+1}$  בנקודות  $\{x_0,\ldots,x_n\}$ פולינום אינטרפולציה של  $\{x_0,\ldots,x_n\}$  איי

 $\sum_{j=-1}^{n} A_{j+1} \prod_{i=0}^{j} (x - x_i)$  $\left(\sum_{j=-1}^{n-1} B_{j+1} \prod_{i=0}^{j} (x - x_i)\right)$ 

 $A_{n+1} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$  $x_0 \dots x_k \; \in \; \mathbb{R}$  תהיינה  $f \; : \; \mathbb{R} \; o \; \mathbb{R}$  תהא f פולינום אינטרפולציה של  $\sum_{j=-1}^{k-1} A_{j+1} \prod_{i=0}^{j} (x-x_i)$  ויהי  $f[x_0 \dots x_k] = A_k$  איי  $\{x_0 \dots x_k\}$ ב־

 $\sigma \in {\mathbb R}$  שונות ותהא  $x_0 \ldots x_k \in {\mathbb R}$  מסקנה: תהא  $f: {\mathbb R} o {\mathbb R}$  שונות ותהא  $f\left[x_0\ldots x_k
ight]=f\left[x_{\sigma(0)}\ldots x_{\sigma(k)}
ight]$  תמורה אזי  $S_{k+1}$  $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  ותהיינה פולינום  $\sum_{j=-1}^{n-1} f\left[x_0\dots x_{j+1}
ight]\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_i
ight)$  איי  $\mathbb R$ 

 $\{x_0 \dots x_n\}$ ביf שינטרפולציה של אזי  $x_0 
eq x_k$  באשר  $x_0 \dots x_k \in \mathbb{R}$ 

 $f\left[x_{0}\ldots x_{k}\right] = \frac{f\left[x_{1}\ldots x_{k}\right] - f\left[x_{0}\ldots x_{k-1}\right]}{f\left[x_{0}\ldots x_{k-1}\right]}$  $x_k - x_0$ 

יהיי  $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$  תהיינה  $f: \mathbb{R} o \mathbb{R}$  ויהי שגיאה באינטרפולציה:  $.e\left(x\right)=f\left(x\right)-p\left(x\right)$  פ"א איז  $p\in\Pi_{n}$ 

משפט ביטוי לשגיאה באינטרפולציה: תהא  $f:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  תהיינה פ"א אזי  $p \in \Pi_n$  ויהי  $x_0 \dots x_n, x \in \mathbb{R}$ 

 $e(x) = f[x_0 ... x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$  $f \ \in \ C^k\left((a,b)
ight)$  באשר  $f \ \in \ C\left([a,b]
ight)$  מענה: תהא עבורה  $c \ \in \ (a,b)$  אזיי קיימת  $x_0 \dots x_k \ \in \ [a,b]$ ותהיינה

 $f\left[x_0\dots x_k\right] = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$  $f \in C([a,b])$  מסקנה נוסחת השגיאה בפולינום האינטרפולציה: תהא  $x_0 \dots x_n, x \in \mathbb{R}$  תהיינה  $f \in C^{n+1}\left((a,b)\right)$  באשר

 $e\left(x
ight) \;=\; c\;\in\; \left(a,b
ight)$  עבורה ע פ"א אזי קיימת  $p\;\in\; \Pi_n$ ייהי ויהי  $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ 

תהיינה  $f \in C^{n+1}\left((a,b)
ight)$  באשר באשר  $f \in C\left([a,b]
ight)$  תהיינה עבורה  $c \in (a,b)$  פ״א אזי קיימת  $p \in \Pi_n$  ויהי  $x_0 \ldots x_n$  ,  $x \in \mathbb{R}$  $|e(x)| = \left| \frac{f(n+1)(c)}{(n+1)!} \right| (b-a)^{n+1}$ 

 תהא  $f\in C^{n+1}\left((a,b)
ight)$  באשר באשר  $f\in C\left([a,b]
ight)$  תהא  $x_0 \ldots x_n$  ,  $x \in \mathbb{R}$  תהיינה  $\sup \left| f^{(n+1)} 
ight| \leq M$  עבורה  $M \in \mathbb{R}$ 

 $|e\left(x
ight)|\leq rac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$  פ"א אזי  $p\in\Pi_n$  ויהי ווהי  $p\in\Pi_n$ [a,b] אלוקה של  $\{x_0\dots x_n\}$  תהא  $a,b\in\mathbb{R}$  חלוקה של  $\in$  באשר  $f\in C^m\left([a,b]
ight)$  אזי  $k,m\in\mathbb{N}$  ויהיו

 $i \in \{1 \dots n\}$  לכל  $\Pi_k$ הערה: יהיו  $a,b\in\mathbb{R}$  תהא  $\{x_0\ldots x_n\}$  חלוקה של  $a,b\in\mathbb{R}$  אזי פונקציית k-1 חלקות וסדר וסדר ממעלה k וסדר הינה פונקציית ספליין ממעלה ו אינטרפולנט ליניארי למקוטעין: יהיו  $a,b\in\mathbb{R}$  תהא  $\{x_0\ldots x_n\}$  חלוקה

$$\begin{array}{lll} f &: & \text{NDIN} & a,b & \in & \mathbb{R} & \text{NDIN} \\ f & \left[\left\{a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right\}_{i=0}^{n}\right] & = & \text{NN} & \left[a,b\right] & \to & \mathbb{R} \\ & \cdot \frac{1}{n!\left(\frac{b-a}{n}\right)^{n}}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{k}\binom{n}{k}f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot k\right)\right) \end{array}$$

 $f\left[x,x
ight]=f'\left(x
ight)$  אזי  $f\in C^{1}\left(\mathbb{R}
ight)$  הפרש מחולק עם חזרה: תהא  $f\left[x,x
ight]=\lim_{h
ightarrow0}f\left[x,x+h
ight]$ איי איז  $f\in C^{1}\left(\mathbb{R}
ight)$  טענה: תהא ותהיינה  $f\in C^{n}\left(\mathbb{R}
ight)$  תהא חזרות: חזרות מחולק אחולק  $f\left[x_0\dots x_n
ight] \;\;=\;\;$  אוי בסדר עולה  $x_0\dots x_n \;\;\in\;\; \mathbb{R}$  $\int f[x_1 \dots x_n] - f[x_0 \dots x_{n-1}]$ 

 $f^{(n)}(x_0)$  $x_0 \dots x_m \in \mathbb{R}$  פולינום אינטרפולציית הרמיט: תהא  $f: \mathbb{R} o \mathbb{R}$  פולינום אינטרפולציית הרמיט  $\sum_{i=0}^{m}g\left(x_{i}
ight)=n+1$  באשר  $g:\left\{x_{0}\ldots x_{m}
ight\}
ightarrow\mathbb{N}_{+}$  ותהא  $i \in \{0 \dots m\}$  לכל לכל  $p^{\left(j\right)}\left(x_{i}
ight) = f^{\left(j\right)}\left(x_{i}
ight)$  אזי עבורו עבורו ל  $j \in \{0 \dots g\left(x_i
ight) - 1\}$  ולכל

g : ותהא  $x_0 \ldots x_m \in \mathbb{R}$  תהיינה f :  $\mathbb{R} o \mathbb{R}$  ותהא איי קיים  $\sum_{i=0}^m g\left(x_i\right) = n+1$  באשר  $\left\{x_0 \ldots x_m\right\} \, o \, \mathbb{N}_+$ ויחיד  $p \in \Pi_n$  פולינום אינטרפולציית הרמיט.

[a,b] אלוקה אלוקה מפליין הרמיט: יהיו  $a,b\in\mathbb{R}$  תהא חלוקה של .1 אזי פונקציית ספליין ממעלה  $k\in\mathbb{N}$  וסדר חלקות אזי ויהי  $x_0 \dots x_n \in \mathcal{F}$  ותהיינה  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  טענה: תהא פולינום  $\sum_{j=-1}^{n-1} f\left[x_0\dots x_{j+1}
ight]\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_i
ight)$  איי  $\mathbb R$ 

 $B_n^k:[0,1] o$ אזי  $k\in\{0\dots n\}$  ויהי ויהי  $n\in\mathbb{N}$  אזי אזי ריהי  $B_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  המוגדר  $\mathbb{R}$ 

 $\Pi_n$  טענה: יהי $\left\{B_n^k
ight\}_{k=0}^n$  אזי $n\in\mathbb{N}$  בסיס של

המוגדרת  $P_n^B:([0,1] o \mathbb{R}) imes [0,1] o \mathbb{R}$  אזי אוי  $n \in \mathbb{N}$  המוגדרת: יהי  $P_n^B(f, x) = \sum_{k=0}^n B_n^k(x) \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$ 

אזי  $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$  ויהיו  $f,g:[0,1] o\mathbb{R}$  אזי  $\bullet$  $P_n^B\left(\lambda f + \mu g, x\right) = \lambda P_n^B\left(f, x\right) + \mu P_n^B\left(g, x\right)$ 

 $B_n^k \geq 0$  מתקיים  $k \in \{0 \dots n\}$  •

 $.P_{n}^{B}\left(c,x
ight)=c$  אזי  $c\in\mathbb{R}$  ויהי  $f:\left[0,1
ight]
ightarrow\mathbb{R}$  תהא  $P_n^B(x,x) = x \bullet$ 

 $P_n^B(x^2,x) = x^2 + \frac{1}{n}(x-x^2)$  •

 $\sum_{k=0}^{n} B_n^k(x) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n} \bullet$ 

 $.B_n^k\left(x
ight)=xB_{n-1}^{k-1}\left(x
ight)+\left(1-x
ight)B_{n-1}^k\left(x
ight)$  סענה: תהא  $x\in\left[0,1
ight]$  תהא  $f:\left[0,1
ight] o\mathbb{R}$  אוי  $.{\lim}_{n\to\infty}\,P_{n}^{B}\left(f,x\right)$ אזיי  $x \in [0,1]$  ותהא  $f:[0,1] 
ightarrow \mathbb{R}$  אזי  $\sup \left| f(x) - P_n^B(x) \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 

המקיימת  $H:V^2 o \mathbb{C}$  אזי נ"ס מ"ז היי א המקיימת המכפלה מנימית: היי א מ"ז היי אזי חצר־מכפלה היימית

 $\forall a, b \in V.H(a, b) = \overline{H(b, a)}$  הרמיטיות:

orall a,b,c  $\in$  V.orall lpha,eta  $\in$  נינאריות: ullet $\mathbb{R}.H(\alpha a + \beta b, c) = \alpha H(a, c) + \beta H(b, c)$ 

 $\forall a \in V.H (a,a) \in \mathbb{R}_+$  חיוביות: • אזי V אזי אוי אוי מושרית: יהי א מ"ו נ"ס ותהא חצי־מכפלה פנימית H על

קירוב ריבועים מינימליים: יהי V מ"ז נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל  $\{v_0 \dots v_n\} \subseteq V$  תהא V מעל H $\in L$  ויהי  $\mathrm{span}\left\{v_0\ldots v_n
ight\}$  ויהי מכפלה מכפלה מכפלה

 $.{\rm arg\,min}_{v\in {\rm span}\{v_0\dots v_n\}}\;({\rm dist}\,(u,v))$ יהי  $c_0 \ldots c_n \in \mathbb{R}$  ויהיו  $u \in L$  יהי  $\mathrm{span} \left\{ v_0 \ldots v_n \right\}$  $k \in \Sigma_{i=0}^n$  הינו קירוב ריבועים מינימליים של הינו  $\sum_{i=0}^n c_i v_i$  $A \subseteq \sum_{i=0}^{n} c_i (v_i, v_k) = (u, v_k)$  מתקיים  $\{0 \dots n\}$ עתהא על מעל א מעל פנימית חצי־מכפלה מיס מיט מ"ט מ"ט ענה: יהי על מ"ט מ"ט מ"ט מ"ט מ"ט מ"ט מענה: יהי ע בת"ל מכפלה פנימית מעל באשר א בת"ל בת"ל בעמית מעל  $\{v_0 \ldots v_n\}$ 

 $v \in \, \mathrm{span} \, \{ v_0 \ldots v_n \}$ יהי  $u \in \, L \, \, \text{יהי} \, \, \mathrm{span} \, \{ v_0 \ldots v_n \}$  $(v-u) \perp \mathrm{span} \left\{ v_0 \ldots v_n 
ight\}$  קירוב ריבועים מינימליים אזי מכפלה פנימית מעל באשר  $\{v_0 \dots v_n\} \subseteq V$  תהא Vאזי  $c_0 \dots c_n \; \in \; \mathbb{R}$  ויהיו  $u \; \in \; L$  יהי  $\mathrm{span} \, \{ v_0 \dots v_n \}$ 

 $\sum_{i=0}^{n} c_i (v_i, v_k) = (u, v_k)$ מסקנה: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל על תהא מסקנה: ויהי אזי הקירוב ריבועים מינימליים הוא או $u \in L$ יהי  $\mathrm{span}\,\{v_0 \ldots v_n\}$ 

מכפלה פנימית ממש עד מחשקלת: תהא  $w \in C^1\left([a,b]
ight)$  תהא חיובית ממש עד כדי קבוצה זניחה אזי $H:C^1\left([a,b]
ight)^2 o\mathbb{R}$  כך

 $.H(f,g) = \int_{a}^{b} (f \cdot g \cdot w)$ 

טענה: תהא ([a,b]) אזי מכפלה חיובית ממש עד כדי קבוצה אזי מכפלה  $w\in C^1$  $.C^{1}\left([a,b]
ight)$  פנימית ממושקלת w הינה מכפלה פנימית מעל סדרה אורתוגונלית של פולינומים: תהא H מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}\left[x
ight]$  אזי מתקיים i 
eq j וכן לכל  $q_n \in \Pi_n$  באשר  $q_n \}_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{R}[x]$ 

 $.H\left(q_{i},q_{j}\right)=0$  $P_{n+1}\left(x
ight)=P_{1}\left(x
ight)=x$  וכן  $P_{0}\left(x
ight)=1$  פולינומי לג'נדר:  $P_{0}\left(x
ight)=P_{0}\left(x
ight)$  $\frac{2n+1}{n+1}xP_{n}(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$ 

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת 1 בקטע [-1,1] אזי פולינומי לג'נדר מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.  $P_{n+1}\left(x
ight) = x\cdot P_{n}\left(x
ight)$  איזי  $n \in \mathbb{N}\backslash\left\{0,1
ight\}$  יהי

 $\frac{(P_n, P_n)}{P_{n-1}} P_{n-1}(x)$  $(P_{n-1},P_{n-1})$  $T_n\left(x
ight) = \cos\left(n \cdot \arccos\left(x
ight)
ight)$  פולינומי צ'בישב:

(-1,1] אוי פולינומי ביבישבו (-1,1] אוי פולינומי ממושקלת  $\frac{1}{\sqrt{1\!-\!x^2}}$  בקטע בקטע וויינומי פולינומי צ'בישב מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.  $T_{n+1}\left(x
ight)\;=\;T_{1}\left(x
ight)\;=\;x$  וכן  $T_{0}\left(x
ight)\;=\;1$ 

 $.2xT_{n}(x) - T_{n-1}(x)$  $L_{n+1}\left(x
ight)=$  בולינומי לגר:  $L_{1}\left(x
ight)=1-x$  וכן בו $L_{0}\left(x
ight)=1$  $\left(\frac{2n+1}{n+1} - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x)$ 

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת  $e^{\,-\,x}$  בקטע מופלה פנימית ממפלה ענה: אזי פולינומי מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.  $H_{n+1}\left(x
ight)=$  וכן  $H_{1}\left(x
ight)=2$ ו וכן וכן או וכן וכן וכן פולינומי הרמיט: 1  $.2xH_{n}\left( x\right) -2nH_{n-1}\left( x\right)$ 

הרמיט מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

 $Q_{n+1}\left(x
ight) = xQ_{n}\left(x
ight) +$ ותהא  $f:\,\mathbb{N}^{2}\,
ightarrow\,\mathbb{R}$  אטענה: תהא סדרה אורתוגונלית של פולינומים אזי  $\sum_{i=0}^{n} f\left(n+1,i
ight)\cdot Q_{i}\left(x
ight)$ 

 $f(n+1,i) = -\frac{\left(xQ_n,Q_i\right)}{T}$ 

למרחב b למרחב מינימליים מינימליים ל $b' \in \mathbb{R}^m$  ויהי ו $b \in \mathbb{R}^m$  יהי  $A^TAx = A^Tb$  איי קיים ויחיד פתרון למערכת  $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$  $x_0 \dots x_n \in \mathcal{P}'(x) = p'(x) + \mathcal{P}'(x) = \mathcal{P}'(x)$  תהיינה  $\mathcal{R}$  תהיינה פ"א של  $\mathcal{R}$  ויהי  $\mathcal{R}$  פ"א של  $\mathcal{R}$  $\frac{d}{dx} \left( f \left[ x_0 \dots x_n, x \right] \prod_{i=0}^n \left( x - x_i \right) \right)$ 

ייהי  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  תהיינה  $f \in C^1 \left( \mathbb{R} \right)$  ויהי ע פ"א שגיאה בנגזרת: תהא  $e_{f'}(x) = e'_{f}(x)$  של f איי

אזי  $x_i = x_j$  אם עבורן אם אם א עבורן אז נקודות אזיי. נקודות אזיי אזיי אזיי אזיי אזיי  $.\left\{x_i\ldots x_j\right\} = \left\{x_i\right\}$ טענה: תהא  $\hat{f}:\mathbb{R} o \hat{\mathbb{R}}$  בסדר חוקי ותהא טענה: תהא להיינה  $\hat{f}:\mathbb{R} o \hat{\mathbb{R}}$ 

אזי חוקי חוקי  $\sigma \in S_{n+1}$  $f[x_0 \dots x_n] = f \left| x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(n)} \right|$ 

רציפה.  $f\left[x_{0}\ldots x_{n},x
ight]$ טענה: תהא $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f: \mathbb{R} o \mathbb{R}$  אזי  $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left[x_{0}\ldots x_{n},x\right]\right)(x)=f\left[x_{0}\ldots x_{n},x,x\right]$ 

מסקנה: תהא  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f \in C^1\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי  $e_{f'}(x) = f[x_0 \dots x_n, x, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) +$  $f[x_0 \dots x_n, x] \stackrel{d}{\underset{dx}{=}} \left(\prod_{i=0}^n (x - x_i)\right)$ 

p ויהי  $x_0 \ldots x_n \in [a,b]$  תהיינה  $f \in C^1\left([a,b]\right)$  ויהי עבורס  $\zeta,\,\xi\in(a\,,b)$  פיימיס אזי f של פ"א פ"א פ"א  $f'(x) = p'(x) + \frac{f(n+2)(\zeta)}{(n+2)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) +$ 

 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right)$ 

מסקנה: תהא  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f:[a,b] o \mathbb{R}$  אזי 

 $e_{f'}(a) = n$  איז  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right)(a) = 0$  אוז •  $\mathcal{O}\left((b-a)^{n+1}\right)$ 

 $p\in\mathbb{N}$  אוי א $x_0\ldots x_n\in\mathbb{R}$  ותהיינה ותהיינה ותהא הקירוב: תהא וקיים  $C \in \mathbb{R}$  וקיים

המקיימים  $h \in \left[\min_{i \neq j} \left| x_i - x_j \right|, \max \left| x_i - x_j \right| \right]$  $|e_{f'}(a)| \leq Ch^p$ 

בין מקסימלי מרחק מרחק עם  $x_1 \dots x_n$  בין מעל הנקודות שיטת שיטת הא מינימלי עבורו  $p \in \mathbb{N}$  הנקודות ועם שגיאה  $e\left(x
ight)$  סדר הקירוב של השיטה הוא

טענה: תהא  $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$  תהיינה  $f \in C^1(\mathbb{R})$  ותהא עבורה  $\{x_0 \ldots x_n\}$  סימטריות סביב  $a \in \mathbb{R} ackslash \{x_0 \ldots x_n\}$ 

 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right) (a) = 0$ סדר דיוק אלגברי: תהא  $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  ותהא  $e:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  ותהא ווסחת

 $.e_{\,p}\,=\,0$  מתקיים  $p\,\in\,\Pi_{\,n}$ לכל עבורו מקסימלי מקסים  $n\,\in\,\mathbb{N}$  אזי f טענה: תהא  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  תהיינה  $f \in C^m$  ויהי ענה: תהא

 $f[x_0 \dots x_n, x, x, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$  $2f\left[x_0 \ldots x_n, x, x\right] \stackrel{d}{=} \left(\prod_{i=0}^n \left(x - x_i\right)\right)$  $f[x_0 \dots x_n, x] \stackrel{d^2}{=} (\prod_{i=0}^n (x - x_i))$ 

p יהי  $x_0 \ldots x_n \in [a,b]$  תהיינה  $f \in C^2\left([a,b]
ight)$  ויהי תהא עבורם  $\zeta,\,\xi,\,\chi\in(a\,,b)$  עבורם אזי קיימים f של של פ"א פ"א

 $f''(x) = p''(x) + \frac{f^{(n+3)}(\zeta)}{(n+3)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) +$ 

 $\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \frac{d}{dx} \left( \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \right) + \frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!}$  $\frac{d^2}{dx^2} \left( \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right)$ 

h>0 יהי  $a\in\mathbb{R}$  יהי  $f\in C^2\left(\mathbb{R}
ight)$  ההי מנזרת: תהא לקירוב נגזרת: תהא

a של u של בה באשר קיימת סביבה u של בה  $a\in\mathbb{R}$  ויהי  $f\in C^2\left(\mathbb{R}
ight)$  $\mathcal{O}\left(h
ight)$  חסומה אזי סדר קירוב הפרש קדמי אזי חסומה ל h>0 ויהי  $a\in\mathbb{R}$  יהי  $f\in C^2\left(\mathbb{R}
ight)$  תהא מרכזי לקירוב נגזרת: תהא

f ניא של p יהי h>0 יהי  $a\in\mathbb{R}$  יהי  $f\in C^{2}\left(\mathbb{R}
ight)$  ויהי מסקנה: תהא  $p'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$  אא  $\{a+h, a-h\}$  בנקודות בה aשל  $\mathcal{U}$  סביבה קיימת באשר  $a\in\mathbb{R}$ ויהי והי  $f\in C^{3}\left(\mathbb{R}\right)$  תהא  $^{2}$  $\mathcal{O}\left(h^2
ight)$  חסומה אזי סדר קירוב הפרש מרכזי הינו f''''

טענה: תהא  $\mathcal{U}$  של  $a\in\mathbb{R}$  ויהי ויהי  $a\in\mathbb{R}$  באשר קיימת סביבה  $f\in C^3$  של .2 חסומה אזי הפרש מרכזי בעל סדר דיוק אלגברי  $f^{\prime\prime\prime\prime}$ 

D יהי  $a\in\mathbb{R}$  יהי  $f\in C^1\left(\mathbb{R}
ight)$  תהא תהא משפט ריצ'רזטון: תהא  $h\geqslant 0$  יהי  $a\in\mathbb{R}$  יהי  $\sum_{k=1}^{M-1} \inf_{k=1}^{\infty} k^x 2i$  שיטת קירוב ל־f'(a) מסדר f'(a) בעלת קירוב ל- $.f'\left(a\right) = D\left(h\right) + \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} C_{i}h^{2k+2i}$ 

h>0 יהי  $a\in\mathbb{R}$  יהי  $f\in C^1\left(\mathbb{R}
ight)$  תהא יהי  $a\in\mathbb{R}$  יהי בין הפרש h שיטת שיטת  $\mathcal{O}\left(h^{2k}\right)$ מסדר  $f'\left(a\right)$ ל שיטת שיטת  $D\left(h\right)$ ותהא ותהא  $4^{k} \stackrel{\smile}{D(h)} - D(2h) + \mathcal{O}\left(h^{2k+2}
ight)$  נקודותיה אזי

f טענה: תהא p ויהי p ויהי  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  תהיינה  $f \in R$  ויהי p ויהי של  $\int_a^b f = \int_a^b p + \int_a^b f \left[x_0 \dots x_n, x
ight] \prod_{i=0}^n \left(x - x_i
ight)$  איי אזי  $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f \in R\left([a,b]\right)$  אזי אזינטגרל: תהא  $.E\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b e_f(x) dx$ 

טענה: תהא  $x_0 \ldots x_n$  ,  $k \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f \in C^{n+1}\left([a,b]
ight)$  באשר איי  $\max_{i \in [n]} \max_{x \in [a,b]} |x - x_i| \le k (b-a)$ 

 $\left| \frac{f\left[ x_{0} \ldots x_{n} \right] - f\left[ x_{\sigma(0)} \ldots x_{\sigma(n)} \right]}{\left[ f\left( n+1 \right) \left( x \right) \right]} \left( b-a \right) \left( k \left( b-a \right) \right) \left( k \left$  $x_0 \dots x_n, k \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f \in C^{n+1}\left([a,b]
ight)$  מסקנה: תהא איי  $\max_{i \in [n]} \max_{x \in [a,b]} |x-x_i| \leq k \, (b-a)$  באשר  $|E(\int_a^b f)| = \mathcal{O}((b-a)^{n+2})$ 

טענה: תהא  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f \in C^{n+1}\left([a,b]
ight)$  באשר  $\xi \in (a,b)$  אזי קיים (a,b) בעלת סימן בקטע בעלת  $\prod_{i=0}^{n} \left(x-x_i\right)$  $\left|E\left(\int_a^bf\right)\right|=rac{f^{\left(n+1
ight)}\left(\xi
ight)}{\left(n+1
ight)!}\int_a^b\prod_{i=0}^n\left(x-x_i
ight)\mathrm{d}x$  עבורו מסקנה: תהא  $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f \in C^{n+1}\left([a,b]
ight)$  באשר

אזי [a,b] בעלת סימן בקטע בעלת  $\prod_{i=0}^{n} \left(x-x_i\right)$  $|E(\int_a^b f)| = \mathcal{O}((b-a)^{n+2})$ 

 $(b-a)\,f\,(a)$  אזי  $f\in C^1\,([a,b])$  תהא המלבן לקירוב אינטגרל: תהא מסקנה: תהא  $\xi \in (a,b)$  אזי קיים  $f \in C^1\left([a,b]
ight)$  עבורו שגיאת כלל

 $E\left(\int_a^b f\right) = \frac{(b-a)^2}{2} f'\left(\xi\right)$  המלבן הינה אזי  $f \in C^2\left([a,b]
ight)$  אזי אינטגרל: תהא לקירוב אינטגרל:

 $\frac{b-a}{2} \left( f\left(a\right) + f\left(b\right) \right)$  אניאת שגיאת עבורו אניאם  $\xi\in(a,b)$  איי קיים  $f\in C^{2}\left([a,b]\right)$  תהא מסקנה: תהא  $E\left(\int_a^b f\right) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$  הטרפז הינה

 $x_0 \ldots x_{n+1} \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f \in C^{n+2}\left([a,b]
ight)$  טענה: תהא בעלת  $\prod_{i=0}^{n+1}\left(x-x_{i}\right)$  וכן  $\int_{a}^{b}\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_{i}\right)\mathrm{d}x=0$  באשר  $E\left(\int_a^b f\right) =$  עבורו  $\xi \in (a,b)$  אזי קיים [a,b] אזי קיים סימן קבוע בקטע

 $\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n+1} (x - x_i) \, \mathrm{d}x$ 

 $x_0 \ldots x_{n+1} \in \mathbb{R}$  ותהיינה  $f \in C^{n+2}\left([a,b]
ight)$  מסקנה: תהא בעלת  $\prod_{i=0}^{n+1} \left(x-x_i
ight)$  וכן וכן  $\int_a^b \prod_{i=0}^n \left(x-x_i
ight) \mathrm{d}x = 0$  באשר  $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+3}\right)$  איז [a,b] איז קבוע בקטע

אזי  $f \in C^2\left([a,b]
ight)$  אזי אינטגרל: אינטגרל לקירוב אינטגרל

מסקנה: תהא  $\xi \in (a,b)$  אזי קיים  $f \in C^2([a,b])$  עבורו שגיאת כלל  $.E\left(\int_a^bf
ight)=rac{(b-a)^3}{24}f^{\prime\prime}\left(\xi
ight)$ נקודת האמצע הינה

 תהיינה  $A_0 \ldots A_n \in \mathbb{R}$  תהיינה  $f \in R\left([a,b]\right)$  תהיינה  $\sum_{i=0}^{n}A_{i}f\left(x_{i}\right)$  איי והכלל פ"א של p ויהי  $x_{0}$  . . .  $x_{n}$   $\in$  [a,b] $\int_a^b p(x) dx = \iff (n אלגברי של לפחות אינטגרל בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות$  $\lim_{i=0}^{n} A_{i} p(x_{i})$ 

מסקנה: תהיינה w > 0 באשר  $f, w \in R([a,b])$  מסקנה: אוי  $x_0 \dots x_n \in [a,b]$  ותהיינה  $A_0 \dots A_n \in \mathbb{R}$ נהכלל  $\int_{a}^{b}f\left(x\right)w\left(x\right)\mathrm{d}x$  לקירוב לקירוב בעל סדר דיוק  $\sum_{i=0}^{n}A_{i}f\left(x_{i}\right)$  $A_i = \alpha$ מתקיים  $i \in \{0 \dots n\}$ לכל (לכל לפחות אלגברי של לפחות אלגברי אל  $(\int_a^b \ell_i(x) w(x) dx)$ 

אזי  $f \in C\left([a,b]
ight)$  תהא אינטגרל: אינטגרל לקירוב אינטגרל:  $\frac{b-a}{6} \left( f\left(a\right) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(b\right) \right)$ 

.3 טענה: תהא  $f \in C\left([a,b]
ight)$  אזי כלל סימפסון בעל סדר דיוק אלגברי עבורו שגיאת כלל  $\xi \in (a,b)$  אזי קיים  $f \in C^4\left([a,b]\right)$  עבורו שגיאת כלל

 $E\left(\int_a^b f\right) = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{90}$  סימפסון הינה ותהא  $f \in C^2([a,b])$  תהא אינטגרל: לקירוב אינטגרל: מורכב לקירוב אינטגרל:

אזי h אזי קבוע הפרש חלוקה אזי  $x_0 \ldots x_n$  $T_h(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))^n$ 

אזי קיים  $\xi \in (a,b)$  אזי קיים  $f \in C^2\left([a,b]
ight)$  עבורו שגיאת כלל  $E\left(\int_{a}^{b}f\right)=-rac{(b-a)h^{2}}{12}f''(\xi)$  הטרפז המורכב הינה מטקנה: תהא  $\left|f^{(2)}
ight| \leq M$  גזירה פעמיים באשר  $f \in C\left([a,b]
ight)$  אזי מטקנה: תהא  $\left|E\left(\int_a^bf
ight)
ight|\leq rac{(b-a)h^2}{12}\,M$  שגיאת כלל הטרפז המורכב הינה ותהא  $f \in C\left([a,b]
ight)$  תהא אינטגרל: לקירוב אינטגרל

 $S_h(f) = \frac{h}{3} \left( f(x_0) + f(x_{2M}) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f(x_{2i}) + \frac{h}{2} \right)$ מסקנה: תהא  $\xi \in (a,b)$  אזי קיים  $f \in C^4\left([a,b]\right)$  עבורו שגיאת כלל  $E\left(\int_{a}^{b}f
ight)=-rac{(b-a)h^{4}}{180}f^{(4)}\left(\xi
ight)$  סימפסון המורכב הינה טענה: תהא חלוקה בעלת הפרש חבוע ותהא ותהא ותהא ותהא ותהא ל $f\in C\left([a,b]\right)$ 

 $.S_{h}(f) = \frac{4T_{h}(f) - T_{2h}(f)}{2} \approx h$ 

 $f \in C^2\left([a,b]
ight)$  מלל הטרפז המורכב עם שגיאה לקירוב אינטגרל: תהא אזי  $arepsilon \in \mathbb{R}^n$  ותהא  $x_0 \ldots x_n$  אזי הפרש בעלת הפרש אוותהא  $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \left( f\left(x_{i}\right) + \varepsilon_{i} + f\left(x_{i+1}\right) + \varepsilon_{i+1} \right)$ 

מסקנה: תהא  $x_0 \dots x_n$  תהא  $f \in C^2\left([a,b]\right)$  חלוקה בעלת הפרש קבוע h ותהא  $arepsilon \in \mathbb{R}^n$  אזי שגיאת כלל הטרפז המורכב עם  $\left|E\left(\int_a^bf
ight)
ight|\,\leq\,rac{(b-a)h^2}{12}\left|f^{\prime\prime}\left(\xi
ight)
ight|+(b-a)$  אניאה הינה

 $2^{n-1}$  טענה: יהי  $T_n\left(x
ight)$  אזי המקדם הראשי של  $n\in\mathbb{N}$  הינו  $\left\{\cos\left(\frac{2k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\mid k\in\{0,\ldots,n-1\}\right\}$ n ב $\{T_n=0\}$  איז  $n\in\mathbb{N}$  איז  $n\in\mathbb{N}$ 

 $-1 < T_n < 1$  אזי  $n \in \mathbb{N}$  טענה: יהי  $n \in \mathbb{N}$ טענה: יהי (-1,1) אזי נקודות הקיצון של  $T_n$  בקטע אזי נקודות הינן  $n\in\mathbb{N}$  יהינן  $\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mid k\in\{0,\ldots,n\}\right\}$ 

באשר  $f, w \in R([a,b])$  באשר  $f, w \in R([a,b])$ תהא אורתוגונלית  $\{q_i\}_{i=0}^\infty$  תהא תה אורתוגונלית  $w~\geq~0$ אזי  $\operatorname{sols}\left(q_{n+1}\right) = \{x_0 \ldots x_n\}$  אזי  $\operatorname{sols}\left(q_{n+1}\right)$  $\sum_{i=0}^{n} \left( \left( \int_{a}^{b} \ell_{i}(x) w(x) dx \right) \cdot f(x_{i}) \right)$ 

 $\geq 0$  באשר  $w \in R([a,b])$  באשר  $w \in R([a,b])$ עבורו  $\xi \in (a,b)$  אזי קיים  $f \in C^{2n+2}([a,b])$  $E\left(\int_a^b f
ight) = rac{f(2n+2)(\xi)}{(2n+2)!}$  אניאת כלל גאוס הינה - הינה

 $\int_{a}^{b} \left(\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\right)^2 w(x) dx$  $f \in \mathcal{R}$  ותהא  $w \geq 0$  באשר  $w \in \mathcal{R}([a,b])$  מסקנה: תהא

2n+1 אזי כלל גאוס בעל סדר דיוק אלגברי  $C^{2n+2}\left([a,b]
ight)$  $c\in(a,b)$  טענה: יהי  $f\in C^{n+1}\left([a,b]
ight)$  ויהי  $f\in C^{n+1}$ .  $\|e\left(x\right)\|_{\infty} = \left|\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\right| \cdot \left\|\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_{i}\right)\right\|_{\infty}$  עבורו

 $\widehat{T}_n\left(x
ight)=rac{1}{2n-1}T_n\left(x
ight)$  אזי  $n\in\mathbb{N}$  יהי  $n\in\mathbb{N}$  פולינום צ'בישב מתוקן: יהי מתוקן עבורו לכל מחוקן מחוק  $p \in \Pi_n$  אזי  $f \in C\left([a,b]\right)$ תהא מינימקס: פולינום המינימקס  $\|f\left(x
ight)-p\left(x
ight)\|_{\infty}\leq\|f\left(x
ight)-q\left(x
ight)\|_{\infty}$  מתקיים  $q\in\Pi_{n}$ משפט המינימקס לפולינומים: יהי  $p \ \in \ \Pi_n$  אזי (ב-1, 1) אזי  $\|\hat{T}_n\|_{\infty} \le \|p\|_{\infty}$ 

מסקנה: פולינום המינימקס ממעלה n של  $x^{n+1}$  בקטע  $x^{n+1}$  הינו  $x^{n+1} - \widehat{T}_{n+1}(x)$  $p \in \Pi_n$  ויהי n+1 מסקנה: יהי  $f \in R\left([-1,1]\right)$  ויהי

 $\widehat{T}_{n+1}$  פולינום המינימקס של f אזי p איזי p פולינום המינימקס פול אזי  $p \in \Pi_n$  ויהי ויהי  $f \in C\left([a,b]
ight)$  תהא משפט איפיון כללי לפולינום המינימקס: תהא  $t_0 \dots t_{n+1} \in (f)$ מתוקן אזי (p) מתוקן אזי (p) מתוקן אזי (p) מתוקן אזי  $f\left(t_{i}\right)-p\left(t_{i}\right) = \operatorname{sign}\left(e\left(t_{0}\right)\right)\cdot\left(-1\right)^{i}\cdot\left[a,b\right]$  עבורם  $\left[a,b\right]$ 

נורמה מושרית על מרחב המטריצות: תהא 🏗

 $\nu_{M}(A) = \max_{x \in \mathbb{R}^{n} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} \right\}$ 

 $(i \in \{0, \dots, n+1\})$  לכל  $\|f - p\|_{\infty}$ 

 $u = 
u_{ ext{M}}$  נורמה אזי נסמן  $u : \mathbb{R}^n o \mathbb{R}$  נורמה האי נסמן.

 $M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  טענה: תהא  $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$  נורמה מעל יי נורמה  $u:\mathbb{R}^n$ טענה: תהא  $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  נורמה ותהא נורמה :  $\mathbb{R}^n 
ightarrow \mathbb{R}$  אזי  $.\nu\left(A\right) = \max_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \left\{\nu\left(Av\right)\right\}$ 

 $x\in\mathbb{R}^n$  ותהא  $A\in M_n$  ( $\mathbb{R}$ ) נורמה תהא טיי :  $\bar{\mathbb{R}}^n o \mathbb{R}$  ותהא מסקנה: תהא  $u(Ax) \leq \nu(A) \cdot \nu(x)$  אזי

טענה: תהא  $A,B \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  נורמה ותהיינה  $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$  אזי טענה: תהא  $\nu(A \cdot B) \leq \nu(A) \cdot \nu(B)$  $\in M_{n}\left( \mathbb{R}
ight)$  טענה: תהא

 $.\max_{i \in [n]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ = אוי A  $\in$   $M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  אוי  $\in$ 

 $\max_{j\in[n]}\sum_{i=1}^n\left|a_{i,j}
ight|$ מטקעה: תהיינה m,M>0 עבורם n,M>0 עבורם n,M>0 עבורם  $m \cdot \eta(A) \le \nu(A) \le M \cdot \eta(A)$ 

 $\operatorname{spec}\left(A
ight) \;\;=\;\; n$ אזי $A\;\;\in\;\; M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי מטריצה: תהא  $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid A$ ע"ע של  $\lambda\}$  $ho\left(A
ight) \;\;=\;\;$  אזי $A\;\;\in\;\;M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי $A\;\;\in\;\;M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$ 

 $\max_{\lambda \in \operatorname{spec}(A)} |\lambda|$  אזי  $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי  $u : \mathbb{R}^n 
ightarrow \mathbb{R}$  אזי משפט: תהא  $\rho(A) \leq \nu(A)$ 

 $.
u\left(I
ight)=1$  טענה: תהא  $u:\mathbb{R}^{n}
ightarrow\mathbb{R}$  אזי וורמה איזי  $u:\mathbb{R}^{n}
ightarrow\mathbb{R}$  $f\left(A
ight) \;=\; n$  המוגדרת  $f\;:\; M_{n}\left(\mathbb{R}
ight) \;
ightarrow\; \mathbb{R}$  מסקנה:

. אינה נורמה מושרית  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| a_{i,j} \right|$  $u:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}$  אזי קיימת נורמה  $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  ותהא arepsilon>0 אזי קיימת נורמה  $u(A) < \rho(A) + \varepsilon$  עבורה  $b,\,r,\,x,\, ilde{x}\in$  ותהיינה א ותהיינה א ותהיינה אגיאה של מערכת משוואות: תהא א ותהיינה א

Ax=a באשר איז  $A ilde{x}=b+r$  וכן Ax=b באשר  $\mathbb{R}^n$  $b,r,x, ilde{x}\in\mathbb{R}^n$  ותהיינה  $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  באשר

אזי  $A ilde{x} = b + r$  וכן Ax = b באשר באשר אזי  $b, r, x, ilde{x} \in \mathbb{R}^n$ 

- $\|b\| \le \|A\| \|x\|$  •
- $\|x\| \le \|A^{-1}\| \|b\|$   $||r|| \le ||A|| ||e|| \bullet$
- $||e|| \le ||A^{-1}|| ||r|| \bullet$

 $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  טענה: תהא  $\|\cdot\|$  נורמה מושרית תהא אזי  $A ilde{x} = b + r$  וכן Ax = b באשר בא  $b, r, x, ilde{x} \in \mathbb{R}^n$ 

 $\left\| \frac{1}{\|A\|} \le \frac{\|e\|}{\|r\|} \le \|A^{-1}\| \bullet \|$ 

 $\left\| \frac{1}{\|A^{-1}\|} \le \frac{\|b\|}{\|x\|} \le \|A\|$ 

מסקנה: תהא  $\|\cdot\|$  נורמה מושרית תהא  $A\in M_n$  ( $\mathbb R$ ) מסקנה: תהא נורמה מושרית מושרית תהא אזי  $A ilde{x} \ = \ b + r$  וכן  $Ax \ = \ b$  באשר  $b, r, x, ilde{x} \ \in \ \mathbb{R}^n$ 

 $A\in M_n\;(\mathbb{R})$  אזי וורמה מושרית ותהא $\|\cdot\|$  אזי וורמה אוי .cond  $(A) = ||A|| ||A^{-1}||$ 

- אזי  $A\tilde{x} = b + r$  $.\delta\left(x\right) = \frac{\|e\|}{\|x\|} \bullet$
- $.\delta(b) = \frac{\|r\|}{\|b\|} \bullet$

טענה: תהא  $\|\cdot\|$  נורמה מושרית תהא  $A \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$  הפיכה ותהיינה אזיי  $A ilde{x} = b + r$  וכן Ax = b באשר  $b, r, x, ilde{x} \in \mathbb{R}^n$  $.\delta(x) \in \left[\frac{\delta(b)}{\operatorname{cond}(A)}, \operatorname{cond}(A) \delta(b)\right]$ 

 $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  הפיכה אזי וורמה מושרית ותהא וורמה  $\|\cdot\|$  $.cond(A) \ge \left| \frac{\max spec(A)}{\min spec(A)} \right|$ 

.cond  $(A) \geq 1$  אזי  $A \in M_n$  ( $\mathbb R$ ) נורמה מושרית נורמה מושרית נורמה אזי  $\|\cdot\|$  אזי וורמה טענה: תהא  $\|\cdot\|$  נורמה מושרית ותהיינה  $A,B\in M_n$  ( $\mathbb R$ ) טענה: תהא וורמה מושרית ותהיינה .cond  $(A) \geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|}$  אזי אזי A 
eq B הפיכה וכן

 $\operatorname{cond}\left(A
ight)=$ איי $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$  איי וורמה מושרית ותהא וותהא וורמה איי $\|\cdot\|$ 

 $\max \left\{ \frac{\|A\|}{\|A-B\|} \mid \det(B) = 0 \right\}$  $\operatorname{cond}\left(A
ight)=$  אזי $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$  נורמה מושרית ותהא ותהא ותהא וורמה מסקנה: תהא

 $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  אפיכה ותהיינה  $\|\cdot\|$  נורמה מושרית תהא

וכן  $A ilde{x} \; = \; b \; + \; r$ וכן  $Ax \; = \; b$  באשר באשר  $b, \, r, \, x, \, ilde{x} \; \in \; \mathbb{R}^n$  $\delta\left(x
ight) = \delta\left(x
ight)$  אזי r וכן r ו"ע של t max spec t

 $A,B \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  טענה: תהא  $\|\cdot\|$  נורמה מושרית ותהיינה

 $Ae = -R\tilde{x}$  אוי אוי A = b וכן A = bA באשר  $A,R\in M_{n}\left( \mathbb{R}
ight)$  באשר מסקנה: תהא  $\left\Vert \cdot \right\Vert$  נורמה מושרית תהיינה  $(A+R)\, ilde{x} = b$  וכן Ax=b באשר וכן  $b,x, ilde{x} \in \mathbb{R}^n$  הפיכה ותהיינה

 $\|e\| \le \|A^{-1}\| \|R\| \|\tilde{x}\|$ אזי אוי A באשר  $A,R\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  באשר  $A,R\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  באשר מסקנה: תהא  $(A+R)\, ilde{x} = b$  וכן Ax=b באשר  $b,x, ilde{x} \in \mathbb{R}^n$  הפיכה ותהיינה  $\|e\|$  איי  $\|A\|$   $\leq \operatorname{cond}(A)$  איי

שגיאה של מערכת משוואות: תהיינה  $A,R~\in~M_{n}\left( \mathbb{R}
ight)$  ותהיינה  $(A+R)\, ilde x \;=\; b\, +\, r$ וכן  $Ax\; =\; b$  באשר באשר  $b,\, r,\, x,\, ilde x \;\in\; \mathbb{R}^n$ משפט: תהא  $\|\cdot\|$  נורמה מושרית תהיינה A,  $R\in M_n$  ( $\mathbb R$ ) הפיכה מושרית נורמה מושרית האינה

וכן Ax=b באשר באשר  $b,r,x, ilde{x}\in\mathbb{R}^n$  וכן

 $\frac{\|e\|}{\|x\|} \le$ אזי  $\|B\| \le \frac{1}{\|A-1\|}$ וכן (A+R)  $\tilde{x} = b+r$  $\frac{1-\operatorname{cond}(A)\left(\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)}{1-\operatorname{cond}(A)\left(\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)}$ 

טענה: תהא אזי אלגוריתם עליונה הפיכה אזי אלגוריתם אול  $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  $\mathcal{O}\left(n^2\right)$  מן לדירוג בעל סיבוכיות זמן טענה: תהא  $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  הפיכה אזי אלגוריתם גאוס לדירוג בעל סיבוכיות  $\mathcal{O}\left(n^3\right)$  זמן

 $L,U\in\mathcal{M}$  הפיכה אזי קיימות  $A\in\mathcal{M}_n$  ( $\mathbb{R}$ ) משפט פירוק בערוק באשר על משולשית עליונה וכן משולשית תחתונה עם 1 על האלכסון  $M_n$ 

 $U_A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  המטריצה  $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  המטריצה מימון: תהא המשולשית העליונה הראשונה המתקבלת באלגוריתם גאוס.

 המוגדרת הא הא האי הא הפיכה אזי ו $A \in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$  המוגדרת הא  $A \in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ i>j באשר  $(L_A)_{i,j}$  $\overline{(U_A)}_{j,j}$ 

A של LU פירוק  $L_A$  ,  $U_A$  אזי אוי הפיכה  $A\in M_n$  ( $\mathbb R$ ) של  $b \in \mathbb{R}^n$  יהי הפיכה  $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  האלגוריתם גאוס עם הצרה חלקית: תהא

function GaussPartialPivoting(A, b):  $B \leftarrow (A|b)$ 

for  $i \leftarrow [1, \ldots, n]$  do  $m \leftarrow \arg\max\{(A)_{i,j} \mid j \in [n]\}$  $[R_1(B), R_m(B)] \leftarrow [R_m(B), R_1(B)]$ for  $j \leftarrow [i+1,\ldots,n]$  do  $R_{j}(B) \leftarrow R_{i}(B) - \frac{(A)_{i,j}}{(A)_{i,i}} \cdot R_{i}(B)$  $R_i(B) \leftarrow \frac{1}{(A)_{i,i}} \cdot R_i(B)$ 

return  $C_1(B) \dots C_n(B)$ ,  $C_{n+1}(B)$  $b \in \mathbb{R}^n$  סענה: תהא  $A \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$  באשר e (GaussPartialPivoting (A,b)) < אזי צפה אזי בעזרת נקודה צפה A,bAx=b במציאת פתרון במציאת e (GaussElimination (A,b))  $Q,R\in \mathcal{A}$  פשפט פירוק QR משפט מירוק  $A\in M_{n}\left( \mathbb{R}
ight)$  תהא וער פירוק A=QR באשר עבורן משולשית משולית וכן אורתוגונלית אורתוגונלית באשר  $M_{n}\left( \mathbb{R}
ight)$ 

 $v_1 \dots v_n \ \in \$ הפיכה ותהא  $A \ \in \ M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  הימון: תהא  $Q_{A} = \mathrm{Min} \ C_{1}\left(A
ight), \ldots, C_{n}\left(A
ight)$  אזי אזי  $\mathbb{R}^{n}$ המוגדרת  $R_A \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$  אזי א הפיכה הפיכה  $A \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$  המוגדרת

 $i \leq j$  באשר באשר  $\left(R_A\right)_{i,\,j} = \left\langle C_j\left(A
ight), C_i\left(Q_A
ight) 
ight
angle$ A של QR פירוק  $Q_A$  ,  $R_A$  אינA הפיכה A  $\in M_n$  ( $\mathbb R$ ) של QR טענה: תהא בנורמה cond (Q) = 1 אורתוגונלית אזי אורתוגוע  $Q \in M_n\left(\mathbb{R}\right)$  אורמה

 $r_i$  = אוי i  $\in$  [n] ויהי A  $\in$   $M_n$   $(\mathbb{R})$  אוי  $\in$   $M_n$  $\sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} |(A)_{i,j}|$  $\lambda\in\operatorname{spec}\left(A
ight)$  אזי לכל אזי  $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$  תהא אוי לכל משפט העיגולים של גרשגורין: תהא

 $\left|\lambda-(A)_{i,i}
ight|\leq r_{i}$  עבורו  $i\in[n]$  קיים אזי  $\lambda\in\operatorname{spec}\left(A
ight)$  ויהי  $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי  $\lambda\in\operatorname{spec}\left(A
ight)$  $\min_{i \in [n]} (|(A)_{i,i} - r_i|) \le |\lambda| \le \rho(A) \le$ 

 $\max_{i \in [n]} (|(A)_{i,i} - r_i|) = ||A||_{\infty}$ 

 $.ig|(A)_{i,i}ig|>r_i$  מתקיים  $i\in[n]$ . הפיכה A אזי אזי בשורות אזי  $A\in M_n$  ( $\mathbb{R}$ ) הפיכה מסקנה: תהא  $c\in\mathbb{R}ackslash\{0\}$  ויהי  $ho\left(A
ight)<1$  באשר  $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי מענה: תהא

מנת רליי: תהא  $\sigma:\mathbb{R}^n\setminus\{0\} o\mathbb{R}$  אזי  $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  המוגדרת מנת רליי: טענה: תהא  $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$  יהי  $\lambda\in\mathrm{spec}\,(A)$  יהי  $A\in M_n$  ( $\mathbb{R}$ ) טענה: תהא

 $.\sigma (v) = \lambda$  אזי א  $\sigma\left(v
ight)=v^{T}Av$  אזי  $v\in\mathbb{S}^{n-1}$  ויהי  $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$  סענה: תהא משפט שיטת החזקה: יהיו  $|\lambda_i| \geq |\lambda_j|$  באשר אב $|\lambda_i| \geq |\lambda_i|$  לכל  $v_1 \ldots v_m \in \mathbb{R}^n$  יהיו  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  באשר  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  יהי i < jעבורה  $A\in M_n$  ( $\mathbb R$ ) ותהא  $C_1
eq 0$  באשר באשר ר1 באשר מהיי  $i \in [m]$  לכל אכל ו"ע של ו"ע פר $v_i$ וכן מקסימלית בת"ל בת"ל לכל יע קבוצת אכל  $v_1 \dots v_m$ 

 $\lim_{k \to \infty} \sigma \left( A^k \cdot \left( \sum_{i=1}^m C_i v_i \right) \right) = \lambda_1 \bullet$ לכל  $\left|\sigma\left(A^k\cdot\left(\sum_{i=1}^mC_iv_i\right)\right)-\lambda_1\right|\leq \alpha\cdot\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ 

$$\lim_{k \to \infty} \frac{A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i\right)}{\lambda_1^k} = C_1 v_1$$

עבורה  $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  ותהא ותהא  $C_1 
eq 0$  באשר באשר  $C_1 \dots C_m \in \mathbb{R}$  $\lim_{k \to \infty} \frac{\left\|A^{k+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i\right)\right\|_2}{\left\|A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i\right)\right\|_2}$ 

 $\mu \in \mathbb{R} \backslash \operatorname{spec}\left(A
ight)$  יהי  $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  תהא משפט שיטת החזקה ההפוכה: תהא עם ו"ע  $\{0\}$  אוי  $v\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$  אוי  $\lambda\in\mathrm{spec}\,(A)$  אוי  $v\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$  ויהי  $(A-\mu I)^{-1}$   $v=\frac{1}{\lambda-\mu}v$ 

 $A^TA$  באשר הימניים של A הם ו"ע של  $A \in M_{n imes m}$  הימניים של  $A \in M_{n imes m}$  באשר אזי $A \in M_{n imes m}$ 

אורתוגונלית וכן  $U \in M_m\left(\mathbb{R}
ight)$  אורתוגונלית וכן אורתוגונלית וכן  $V \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$  $(\Sigma)_{i,i} \leq (\Sigma)_{j,j}$  אלכסונית אי־שלילית עבורה  $\Sigma \in M_{m \times n} (\mathbb{R})$ ערכים  $A = U \Sigma V^T$ יהיי  $A \in M_{n \times m} \left( \mathbb{R} \right)$  תהא ערכים סינגולריים: תהא

.Sing  $(A) = \left\{ (\Sigma)_{i,i} \mid i \in [\min{\{n,m\}}] \right\}$  איז SVD  $A = U \Sigma V^T$  ויהי  $A \in M_{n imes m} \left( \mathbb{R} 
ight)$  ויהי וקטורים סינגולריים ימניים: תהא  $.\{C_{i}\left(V
ight)\mid i\in\left[n
ight]\}$  אזי SVD פירוק

 $A = \mathsf{ini} \ A \in M_{n imes m} (\mathbb{R})$  ויהי שמאליים: תהא ויהי  $.\left\{ C_{i}\left(U\right)\mid i\in\left[m\right]\right\}$ אזי SVD פירוק  $U\Sigma V^{T}$ 

 $\operatorname{spec}\left(AA^{T}\right)\,\cup\,\left\{0
ight\}$  אוי  $A\in\,M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$  סענה: תהא .spec  $\left(A^TA\right)\cup\{0\}$ 

 $\operatorname{SPEC}\left(A^TA
ight)$  אזי $\operatorname{SVD}$  אזי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$  $.\{0\} = \left\{\sigma^2 \mid \sigma \in \operatorname{Sing}(A)\right\} \cup \{0\}$ טענה: תהא אזי הוקטורים הסינגולריים אזי בעלת פירוק אזי הוקטורים הסינגולריים  $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ 

טענה: תהא אזי הוקטורים הסינגולריים בעלת פירוק אזי בעלת אזי החקטורים הסינגולריים  $A\in M_{n imes m}$  $AA^T$  השמאליים של A הם ו"ע של

יהי SVD פירוק  $A = U\Sigma V^T$  יהי  $A \in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}\right)$  ויהי מימון: תהא שווה  $A^TA$  שווה בתור ו"ע של  $i \in [\min\{n,m\}]$  $C_{i}\left(V\right)\sim C_{i}\left(U\right)$  אזי  $AA^{T}$  בתור ו"ע של  $C_{i}\left(U\right)$  אזי  $C_{i}\left(U\right)$ 

טענה: תהא SVD פירוק  $A = U\Sigma V^T$  ויהי  $A \in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי אי  $\left\{A\cdot C_{i}\left(V
ight)\mid\left(i\in\left[\min\left\{n,m
ight\}
ight)
ight)\wedge\left(C_{i}\left(V
ight)\sim C_{i}\left(U
ight)
ight)$ אורתוגונלים וכן הינם ו"ע של -AA $^{T}$ עש אורתוגונלים וכן הינם ו"ע של

 $\frac{1}{\operatorname{rank}(A)} A \cdot C_{\operatorname{rank}(A)}(V)$ ותהא  $m \geq n$  באשר באשר  $m, n \in \mathbb{N}_{\perp}$  יהיו וותהא פירוק למציאת פירוק

.SVD משפט: תהא  $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$  בעלת פירוק  $A = U \Sigma V^T$  ויהי  $A \in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ : תהא משפט יחידות פירוק פירוק: פירוק פירוק אזי איי איי איי פירוק אזי לכל  $(\Sigma)_{i,i} 
eq (\Sigma)_{j,j}$  באשר SVD פירוק עד כדי סימן הוקטורים הסנגולריים. SVD

function SVD(A):

 $S \leftarrow \sqrt{D}$ 

 $\Sigma \leftarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$ 

for  $j \in [n]$  do

 $(\Sigma)_{i,j} \leftarrow (S)_{i,j}$ 

for  $i \in [m]$  do

 $U \leftarrow M_m(\mathbb{R})$ 

 $(V, D) \leftarrow \text{OrthogonalDiagonalization}(A^T A) // \text{such}$ 

that  $\forall i \leq j \in [n].(D)_{i,i} \geq (D)_{j,j}$ 

$$A=U\Sigma V^T$$
 ויהי  $A\in M_{n\times m}$  (C) אויהי SVD משפט יחידות פירוק פירוק (C) אוי האוי פירוק מצורק פירוק (S) אוי קיים ויחיד פירוק עצ עד בדי הכפלת הוקטורים הסעולריים בי  $A=(1,-1,i,-i)$  SVD מסטרית אוי  $A\in M_n$  (R) מסטרית אוי  $A\in M_n$  (R) מסטרית אוי  $A\in M_n$  (R)  $\{|\lambda|\mid \lambda\in\operatorname{spec}(A)\}$