פולינום טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על a אזי $P_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(x-a\right)^{k}$.

שארית טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על a אזי $R_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=f\left(x\right)-P_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)$.

טור טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ חלקה על a אזי $P\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(x-a\right)^{k}$.

פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ לכל $x\in\left(a,b\right)$ ומקיימת $F_{+}'\left(a\right)=f\left(a\right)$ וכן $F_{-}'\left(b\right)=f\left(b\right)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\int f=\left\{ F\in\mathbb{R}^{I}\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $\left(G'=f\right)\Longleftrightarrow\left(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c\right)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int\left(f+g\right)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int\left(\alpha f\right)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int\left(\left(f\circ g\right)\cdot g'\right)$.

חלוקה: יהי $\left[a,b\right]$ אזי $\Pi=\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ המקיימות $a=x_{0}<x_{1}\ldots<x_{n-1}<x_{n}=b$.

סימון: תהא $\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\Delta x_{i}=x_{i}-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i=1}^{n}\left|\Delta x_{i}\right|$.

עידון: תהא Π_{1} חלוקה אזי חלוקה Π_{2} המקיימת $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$.

טענה: תהא Π_{1} חלוקה וכן Π_{2} עידון אזי $\lambda\left(\Pi_{2}\right)\le\lambda\left(\Pi_{1}\right)$.

נקודות מתאימות: תהא $\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\left\{ t_{1}\ldots t_{n}\right\}$ המקיימות $t_{i}\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]$. $\forall i\in\left\{ 1\ldots n\right\}$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{ t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\}\right)=\sum f\left(t_{i}\right)\Delta x_{i}$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\left\{ t_{i}\right\}$ מתקיים $\left|S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\}\right)-L\right|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_{a}^{b}f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_{a}^{b}f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f\left(t\right)dt=\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(\varphi\right)d\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R\left(\left[a,b\right]\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid f\text{ אינטגרבילית רימן}\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\}\right)$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{ t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_{a}^{b}c\cdot dt=c\left(b-a\right)$.

טענה: $D\left(x\right)\notin R\left(\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i},x_{i-1}]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i},x_{i-1}]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sup_{\left\{ t_{i}\right\}\text{ נקודות מתאימות}}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\}\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\inf_{\left\{ t_{i}\right\}\text{ נקודות מתאימות}}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\}\right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_{1},Π_{2} חלוקות אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}\left(f\right)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ חסומה אזי $\int_a^b f=\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f,J)=\sup_{x,y\in J}(f(x)-f(y))$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0\in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\iff(\lim_{\delta\to0}\omega(f,[x_0-\delta,x_0+\delta])=0)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\iff(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\mathrm{len}(I).\omega(f,I)<\varepsilon)$.

תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_2=\Pi_1\cup\{p\}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_2=\Pi_1\cup\{p_1\ldots p_m\}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)\ge\overline{I}(f)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$ אזי $f\in R([a,b])$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: $C([a,b])\subseteq R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי $f\in R([a,b])$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורו $f_{\restriction_{[a,b]}}\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורו $(f\in R([a,b]))\wedge(f\in R([b,c]))$ אזי $f\in R([a,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in[a,d]$ עבורם $f\in R([a,d])$ אזי $f\in R([b,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,c])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([b,c])$ אזי $f\in R([a,c])$.

טענה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases}y & x=b\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $g\in R([a,c])$.

מסקנה: נגדיר $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אזי $f\in R([-1,1])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ תהא $H\in C(\mathbb{R})$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $(f+g),(cf)\in R([a,b])$.
- $(f\cdot g),(H\circ f),|f|\in R([a,b])$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\{(a_i,b_i)\}_{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup(a_i,b_i)$ וכן $\sum(b_i-a_i)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $|A|\le\aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.|b-a|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_A}=g_{\restriction_A}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases}y_i & x\in\{b_1\ldots b_m\}\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^c g(x)\,dx$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b\alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,c])$ ויהי $b\in(a,c)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\geq0$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\geq0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\geq\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $m\leq f\leq M$ אזי $m\left(b-a\right)\leq\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\leq M\left(b-a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_{a}^{b}f\right|\leq\int_{a}^{b}\left|f\right|\leq\sup_{\left[a,b\right]}\left(\left|f\right|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ אזי $F\in C\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $0\leq g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(x_{0}\right)\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0\leq g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_{a}^{x_{0}}g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_{0}}^{b}g\left(x\right)dx$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ אזי $F'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ יהיו $x_{1}\ldots x_{n}\in\left[a,b\right]$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]\backslash\left\{ x_{1}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $\left[f\right]|_{a}^{b}=f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f'g=\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}fg'$.

הלמה של בונה: תהא $\substack{f\in C\left(\left[a,b\right]\right)\\ f\in C^{1}\left(\left(a,b\right)\right)}$ עבורה $\left(f'\geq0\right)\vee\left(f'\leq0\right)$ ותהא $g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_{a}^{x_{0}}g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_{0}}^{b}g\left(x\right)dx$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $R_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=\frac{1}{n!}\int_{a}^{x}f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)\left(x-t\right)^{n}dt$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $\substack{\varphi\in\left[a,b\right]^{\left[\alpha,\beta\right]}\\ \varphi\in C^{1}\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)}$ המקיימת $\substack{\varphi\left(\alpha\right)=a\\ \varphi\left(\beta\right)=b}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

למה: תהא $f\in C^{1}\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx=-\int_{0}^{2\pi}f'\left(x\right)\frac{\sin\left(nx\right)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^{1}\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx\right|\leq\frac{2\pi\sup\left(\left|f'\right|\right)}{n}$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor -1}\left(k-2n\right)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x\right)^{m}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x\right)^{m}dx=\begin{cases} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\left(m-1\right)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{\left(m-1\right)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots\left(2n-2\right)\cdot\left(2n-2\right)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots\left(2n-1\right)\cdot\left(2n-1\right)}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=\left[a,\infty\right)$ וכן $\forall b\in\left[a,\infty\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{\infty}f=\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=\left(-\infty,b\right]$ וכן $\forall a\in\left(-\infty,b\right].f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{-\infty}^{b}f=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b}f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.\left(a<b\right)\Longrightarrow\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)$ אזי $\int_{-\infty}^{\infty}f=\int_{-\infty}^{0}f+\int_{0}^{\infty}f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=\left(a,b\right]$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[c,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim_{r\to a^{+}}\int_{r}^{b}f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=\left[a,b\right)$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim_{r\to b^{-}}\int_{a}^{r}f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R\left(I\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{I}\mid\text{קיים וסופי }\int_{I}f\right\}$.

הערה: מכאן כל המשפטים יהיו חד צדדים ימינה אך תקפים לכל סוגי הקטעים עם שינויים קלים.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\left\{ \infty\right\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{\omega}\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\int_{a}^{\omega}f+\beta\int_{a}^{\omega}g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהי $c\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{a}^{c}f+\int_{c}^{\omega}f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_{a}^{\omega}f\geq\int_{a}^{\omega}g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ על $\left[a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\lim_{b\to\omega}F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f'g=\lim_{b\to\omega}\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{\omega}fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $\substack{\varphi\in\left[a,\omega\right)^{\left[c,\eta\right)}\\ \varphi\in C^{1}\left(\left[c,\eta\right)\right)}$ המקיימת $\substack{\varphi\left(c\right)=a\\ \lim_{b\to\eta}\varphi\left(b\right)=\omega}$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{c}^{\eta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in\left(a,\omega\right).\forall b_{1},b_{2}\in\left[B,\omega\right).\left|\int_{b_{1}}^{b_{2}}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow\left(f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $f\in R\left([a,b]\right)$. $\forall b\in(a,\omega)$ עבורה $\int_a^\omega |f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $f\in R\left([a,b]\right)$. $\forall b\in(a,\omega)$ עבורה $\int_a^\omega |f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\le\int_a^\omega |f|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת ${}_{\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])}$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftrightarrow$ ($F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)dt$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $f,g\in R\left([a,b]\right)$. $\forall b\in(a,\omega)$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftarrow\left(\int_a^\omega g<\infty\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $f,g\in R\left([a,b]\right)$. $\forall b\in(a,\omega)$ אזי $\left(\int_a^\omega g=\infty\right)\Longleftarrow\left(\int_a^\omega f=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^\infty f\left(n\right)<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\int_1^\infty f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f\left(n\right)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f\left(n\right)$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta\left(s\right)\left(s-1\right)=1$.

משפט אבל: תהא $g\in C\left([a,\omega)\right)\cap R\left([a,\omega)\right)$ ותהא $f\in C^1\left([a,\omega)\right)$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg<\infty$.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C\left([a,\omega)\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1\left([a,\omega)\right)$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $\int_a^\omega fg<\infty$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\forall x\in I.\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=g\left(x\right)\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $\left(f\in C\left(I\right)\right)\not\Leftarrow\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(f\in R\left(I\right)\right)\not\Leftarrow\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R\left(I\right)\right)$.
- גבול האינטגרל: נניח ${}_{\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I)}^{f\in R(I)}$ אזי $\left(\int_I f=L\right)\not\Leftarrow\left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(f'\left(x\right)=L\right)\not\Leftarrow\left(\lim_{n\to\infty}f_n'\left(x\right)=L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=0\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)\right|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(g_n\xrightarrow{\text{u}}g\right)\wedge\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{\text{u}}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C\left(I\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in C\left(I\right)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C\left([a,b]\right)$ עבורן $\underset{\forall n<m.f_m<f_n}{f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f}$ באשר $f\in C\left([a,b]\right)$ אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ באשר $f\in C\left([a,b]\right)$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in R\left([a,b]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R\left([a,\omega)\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi\in R\left([a,\omega)\right)$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.\left|f_n\right|\le\Psi$ אזי $\left(\forall b\in[a,\omega).f\in R\left([a,b]\right)\right)\wedge$ ($\int_a^\omega f$ מתכנסת בהחלט) $\wedge\left(\int_a^\omega f=\lim_{n\to\infty}\int_a^\omega f_n\right)$.

טענה: $\int_0^\infty e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: תהיינה $f_n \in C^1([a,b])$ עבורה $f_n' \xrightarrow{u} g$ ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n \xrightarrow{u} f$ וכן $f' = g$.
סימון: תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n} f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} f_n = f$ במ"ש.
משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty} u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} u_n = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b u_i$.
משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} u_i$.
משפט M בוחן של וירשטראס: תהיינה $u_n \in \mathbb{R}^I$ ותהא $M \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ וכן $\forall x \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.
למה התמרת אבל: תהיינה $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} a_m (b_k - b_{k+1})$.
משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנסת במ"ש.
משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n} f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n \xrightarrow{u} 0$ וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n} f_i g_i$ מתכנסת במ"ש.
פונקציית וירשטראס: יהי $a \in (0,1)$ ויהי $b \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$ עבורם $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$.
הגדרה: נגדיר $\triangle_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_k = \frac{\triangle_0(4^k x)}{4^k}\right) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}. \triangle_0(x+1) = \triangle_0(x)) \wedge \left(\triangle_0(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}\right)$.
טענה: $\triangle_n \xrightarrow{u} \triangle$.
מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.
משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.
משפט וירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $\exists p \in \mathbb{R}[x]. \max_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.
משפט וירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ אזי קיימת $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורה $p_n \xrightarrow{u} f$.
הגדרה: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.
משפט: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n \xrightarrow{u} f$.
משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ ויהי $r < |q|$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|, |r|]$.
משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס} & x \in (-R, R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R, R] \end{cases}$.
רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0, \infty]$ המקיים את משפט אבל.
משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.
הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty\right) \Longrightarrow (R=0)\right) \wedge \left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0\right) \Longrightarrow (R=\infty)\right)$.
טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ הינו R).
מסקנה: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ על $(-R, R)$.
משפט: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k$ על $(-R, R)$.
מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ על $(-R, R)$.
טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0, R)$.
טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R, 0]$.
משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[0, R]$.
משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[-R, 0]$.
מסקנה: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < 0$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ $\lim_{r \to 1^-}$.
טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי ($\sum k a_k x^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_k x^k$ מתכנס ב־R).
טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי ($\sum k a_k x^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_k x^k$ מתכנס ב־$-R$).
סכים לפי אבל: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{r \to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ (A).
התכנסות צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n}$ (C).
סכים לפי צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i$ (C).
סימון: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell\ (C)$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\ (C)$.

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\ (C)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\ (A)$.

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho\ (A)$ וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R\left([a,b]\right)$ אזי $u+iv\in R\left([a,b]\right)$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}\left([a,b]\right)$ אזי $\int_a^b\left(u+iv\right)=\int_a^b u+i\int_a^b v$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי

- $\int_a^b\left(f+g\right)=\int_a^b f+\int_a^b g$.
- $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.
- $\int_a^b cf=c\int_a^b f$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^b f}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}\left([a,b]\right)$ אזי $\frac{d}{dx}\left(u+iv\right)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי $\|f\|\in R\left([a,b]\right)$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^x f\left(t\right)dt\right)'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי $\int_a^b f'g=\left[f\cdot g\right]|_a^b-\int_a^b fg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי $\left\|\int_a^b f\right\|\le\int_a^b\|f\|$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R\left(\mathbb{T}\right)=\left\{f\in R\left([0,2\pi]\right)\mid\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)\right\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n\left(t\right)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n\left(t\right)\in R\left(\mathbb{T}\right)$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{c_n\right\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $\left(c_m\ne0\right)\vee\left(c_{-m}\ne0\right)$ אזי m.

טענה: $R\left(\mathbb{T}\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

טענה: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על $R\left(\mathbb{T}\right)$.

טענה: $\langle e_n,e_m\rangle=\begin{cases}0 & n\ne m\\ 1 & n=m\end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\langle f,e_m\rangle$.

סימון: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(m\right)=\langle f,e_m\rangle$.

טענה: יהי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(k\right)=c_k$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_n\left(t\right)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\langle f,g\rangle=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)\overline{\hat{g}\left(n\right)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\|f\|^2=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^2$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(m\right)=\langle f,e_m\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\left(S_mf\right)\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_n\left(t\right)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(-n\right)=\overline{\hat{f}\left(n\right)}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$(S_mf ממשית).

טענה: תהא $f\in R\left([0,2\pi]\right)$ ויהי $|k|\le m$ אזי $\left(f-S_mf\right)\perp e_k$.

מסקנה: תהא $f\in R\left([0,2\pi]\right)$ אזי $\left(f-S_mf\right)\perp S_mf$.

מסקנה: תהא $f\in R\left([0,2\pi]\right)$ אזי $\|f\|^2=\|S_mf\|^2+\|f-S_mf\|^2$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}\le\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_{2}: תהיינה $f_{n},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\left\Vert f_{n}-g\right\Vert =0\right)\Longleftrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}g\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_{2} איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\Vert g\right\Vert \le\sup\left|g\right|$.

מסקנה: תהיינה $f_{n}\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}f\right)\Longleftarrow\left(f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_{n}\in\mathbb{C}\left[x\right]$ עבורה $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t\in\left[0,2\pi\right]}\left|p\left(t\right)-f\left(t\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\left\Vert p-f\right\Vert <\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי קיימיים p_{n} פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\Vert f-\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\right\Vert ^{2}\ge\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{m\to\infty}\left\Vert S_{m}f-f\right\Vert =0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}=\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[-\pi,\pi\right)}$ המוגדרת $f\left(t\right)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\hat{f}\left(0\right)=0\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}i}{n}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}\sin\left(nt\right)}{n}$.
- יהי $r\in\left[0,\pi\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[-r,r\right]$.
- $f\xrightarrow{\text{p.w.}}S_{m}f$ על $\left(-\pi,\pi\right)$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[0,2\pi\right]}$ המוגדרת $f\left(t\right)=\frac{\left(\pi-t\right)^{2}}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\hat{f}\left(0\right)=\frac{\pi^{2}}{12}\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{1}{2n^{2}}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\frac{\pi^{2}}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos\left(nt\right)}{n^{2}}$.
- $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[0,2\pi\right]$.

מסקנה: $\frac{\pi^{4}}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k^{2}}$.

למה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f'}\left(n\right)=in\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}\left(f'\right)=\left(S_{m}f\right)'$.

למה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f^{\left(k\right)}}\left(n\right)=i^{k}n^{k}\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$ אזי $f\in C^{k-2}\left(\mathbb{T}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$.