עבורה Vol $_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
ight)
ightarrow \left[0,\infty
ight]$ עבורה אזי לא קיימת $n\in\mathbb{N}$ יהי

- $.Vol_n([0,1]^n) = 1 \bullet$
- . $\operatorname{Vol}_n\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Vol}_n\left(A_i\right)$ אזי $\left\{A_i
 ight\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
 ight)$ תהיינה
- . $\mathrm{Vol}_n\left(arphi\left(A
 ight)
 ight)=\mathrm{Vol}_n\left(A
 ight)$ אזי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $arphi:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$ תהא

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ קיימות עבורן איזומטריות איזומטריות איזומטריות $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריות איזומטריות איזומטריות $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריות איזומטריות $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$ וכן $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$ איזומטריות המקיימות $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$ וכן $Y,Y_i=\emptyset$ איזומטריות איזומטריים אייים איזומטריים איזומטריות איזומטריות איזומטריים איזומטריי

 $X \equiv Y$ אזי בחלקים חופפות $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$ סימון: תהיינה

 $X \equiv Y$ אזי $(Y) \neq \varnothing$ וכן $(X) \neq \varnothing$ וחסומות עבורן אוינה $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה ווהיינה $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ יהי היי $(Y) \neq \emptyset$ ותהיינה ווהיינה $(Y) \neq \emptyset$ ותהיינה אזי לא קיימת $(Y) \neq \emptyset$ ווהיינה אזי לא קיימת $(Y) \neq \emptyset$ ווהיינה אזי לא קיימת ווהיינה ווהיינה ווהיינה $(Y) \neq \emptyset$ אזי לא קיימת ווהיינה וו

- $.Vol_n([0,1]^n)=1 \bullet$
- . $\mathrm{Vol}_n\left(A \uplus B\right) = \mathrm{Vol}_n\left(A\right) + \mathrm{Vol}_n\left(B\right)$ אזי $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ תהיינה
- . $\mathrm{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathrm{Vol}_n\left(A\right)$ אזי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $\varphi:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$ ההא

עבורה $\operatorname{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
ight) o [0,\infty]$ אזי קיימת $n\in\{1,2\}$ יהי יהי

- $.Vol_n([0,1]^n)=1 \bullet$
- $\operatorname{Vol}_n\left(A \uplus B\right) = \operatorname{Vol}_n\left(A\right) + \operatorname{Vol}_n\left(B\right)$ אזי $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ תהיינה
- $\operatorname{Vol}_n\left(arphi\left(A
 ight)
 ight)=\operatorname{Vol}_n\left(A
 ight)$ אזי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $arphi:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$ תהא

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X \in \mathcal{A} \bullet$
- $\forall E \in \mathcal{A}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A} \bullet$
- . | או סופית מתקיים בכל $E\subseteq\mathcal{A}$

 $A\cap B\in\mathcal{A}$ אזי א $A,B\in\mathcal{A}$ טענה: תהא

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ המקיימת

- $X \notin \mathcal{I} \bullet$
- $. \forall A \in \mathcal{I}. \forall B \subseteq A.B \in \mathcal{I} \bullet$
- $\bigcup E \in \mathcal{A}$ סופית מתקיים $E \subseteq \mathcal{A}$ לכל •

המקיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי קבוצה X המקיימת σ

- $X \in \mathcal{A} \bullet$
- $\forall E \in \mathcal{A}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A} \bullet$
- . $\bigcup E \in \mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $E \subseteq \mathcal{A}$ לכל

מסקנה: תהא $\mathcal A$ אלגברה אזי σ אלגברה.

המקיימת $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי קבוצה X המקיימת σ

- $X \notin \mathcal{I} \bullet$
- $. \forall A \in \mathcal{I}. \forall B \subseteq A.B \in \mathcal{I} \bullet$
- $\bigcup E \in \mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $E \subseteq \mathcal{A}$ לכל

טענה: תהיינה $G \cap_{\alpha \in I} A_{\alpha}$ אזי אזי $\sigma \in A_{\alpha}$ אלגברה $G \cap_{\alpha \in I} G \cap_{\alpha \in I} G$

אזי A אזי מעל X המכילות מעל כל ה σ ־אלגברה נוצרת: תהא אזי $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ ותהיינה ותהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המכילות את $\sigma\left(A\right)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_{\alpha}$

 $\mathcal{B}\left(X
ight)=\sigma\left(\left\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}\left(X
ight)\mid$ פתוחה $\mathcal{O}
ight\}$ פתרי אזי מרחב מטרי אזי יהי מרחב מטרי אזי מרחב מטרי אזי

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות

- .X אלגברה בורל על σ
- $.\sigma\left(\left\{B_{r}\left(a\right)\mid\left(r>0\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)\bullet$
- $.\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_+\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$ •
- $.\sigma\left(\{B_r\left(a
 ight)\mid (r\in\mathbb{Q}_+)\wedge (a\in Y)\}
 ight)$ צפופה אזי $Y\subseteq X$ תהא •

 $A=igcap_{i=1}^\infty \mathcal{O}_i$ עבורה קיימות פתוחות פתוחות איימות קיימות עבורה קיימות $A\subseteq X:G_\delta$

```
A,B\in\mathcal{B}\left(X
ight) אזי אזי F_{\delta} ותהא B קבוצה G_{\delta} ותהא קבוצה מסקנה: תהא
                                                                                                                                         טענה: הקבוצות הבאות שוות
                                                                                                                                       \mathbb{R}^n אלגברה בורל על\sigma
                                                                                                            .\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^n \left[a_i, b_i\right) \mid a_1, b_1 \dots a_n, b_n \in \mathbb{R}\right\}\right) \bullet
                                                                                                            .\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^n \left[a_i, b_i\right) \mid a_1, b_1 \dots a_n, b_n \in \mathbb{Q}\right\}\right) \bullet
                                                                                 אזי C\left(f
ight)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid xרציפה ב־f
ight\} ותהא f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} אזי משפט: תהא
                                                                                                                                                      .C(f) \in G_{\delta} \bullet
                                                                                                      .C\left(f
ight)=X עבורה f אזי קיימת X\in G_{\delta} תהא
                                                                                 \operatorname{Aint}\left(\overline{A}
ight)=\varnothing המקיימת A\subseteq X המרי מטרי מרחב מטרי זלילה: יהי
                       A=igcup_{i=1}^\infty B_i דלילות עבורן דלילות אזי אבורה קיימות A\subseteq X עבורה מטרי אזי איזי אבורן דלילות עבורן דלילות עבורן אוי
                                                                . האשונה מקטגוריה שנייה: יהי א מרחב מטרי אזי אינה מקטגוריה אינה מהטגוריה אינה מרחב מטרי יהי א
                                                                        A^{\mathcal{C}} אזי אזי אונה אזי A \subseteq X מקטגוריה אזי מרחב מטרי אזי איורית: יהי
                                                                                                                                          למה: יהי X מרחב מטרי אזי
                                                                                                     . דלילה B \subseteq A אזיי אזיי A \subseteq X תהא \bullet
                                                                                                . דלילה \bigcup_{i=1}^n A_i אזי דלילות A_1 \dots A_n \subseteq X דלילה •
                                                                                                                         . דלילה אזי \overline{A} דלילה אזי A\subseteq X תהא
                                                                                                                            מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.
                                                        \operatorname{cint}(A)=arnothing משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא A\subseteq X מקטגוריה ראשונה אזי
                                                                                                                        מסקנה: קבוצות דלילות מהוות \sigma־אידיאל.
                                                                                                                                                         \mathbb{Q} \notin G_{\delta} :מסקנה
                                     A=F\uplus N אזי קיימת איי אניחה עבורה ראשונה וקיימת R\subseteq\mathbb{R} משפט: תהא איי קיימת F\subseteq\mathbb{R} אזי קיימת
משפט בנך: במרחב המטרי \{f\in C\left([0,1]\right)\mid \exists x\in (0,1).f\in \mathcal{D}\left(x\}\} משפט בנך: במרחב המטרי עם נורמת מקסימום הקבוצה C\left([0,1]\right)
                                                                                                                                                                      ראשונה.
                                                                                                    הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.
קבוצה מסטגוריה אזי עבורה עבורה Q\subseteq X פתוחה פיימת עבורה אזי אזי אזי אזי מרחב מטרי מימת מכונת מייר: יהי או מרחב מטרי מימת A\subseteq X
                                                                                                                                                                A = G \triangle Q
משפט: תהא A\subseteq X אזי (ל־Aיש את תכונת בייר)\Longleftrightarrow(קיימת F\subseteq X סגורה וקיימת ל־A\subseteq X אזי (ל־Aיש את תכונת בייר)
                                                                                                                                                               .(A = F \triangle P
                                                                                     . בעלת תכונת בייר אזי A^{\mathcal{C}} בעלת תכונת בייר בעלת הכונת בייר. מסקנה:
          \{A\subseteq X\mid בעלת תכונת בייר A\}=\sigma (\{A\subseteq X\mid (משפט: יהי A\}=\sigma בעלת תכונת בייר אזי משפט: יהי A\}=\sigma משפט: יהי אזי מחבר מטרי אזי (\{A\subseteq X\mid \alpha \in A\}
                                            נסמן lpha+1 נסמן, \mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\} נסמן נסמן \mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) נסמן X לכל סודר עוקב X
באשר \sigma\left(\mathcal{T}
ight)=\mathcal{F}_{\omega_{1}} אזי \mathcal{F}_{\lambda}=igcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha} נסמן \lambda נסמן \mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{igcap_{n=1}^{\infty}A_{n}\mid A_{n}\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}
                                                                                                                  הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה. \omega_1
                                                                                                   |\sigma\left(X
ight)|=\aleph אזי און אין עבורה עבורה X קבוצה עבורה טענה: תהא
```

 $A=igcup_{i=1}^\infty \mathcal{O}_i$ סגורות המקיימות סגורות קיימות קיימות עבורה קיימות עבורה קיימות $A\subseteq X:F_\delta$

 $\mu:\Sigma o [0,\infty]$ אזי מרחב מדיד המקיימת (X,Σ) המקיימת פונקציית מידה: יהי

 (X,Σ) אזי מרחב מדיד: תהא $\Sigma\subseteq\mathcal{P}(X)$ מרחב מדיד: תהא

 $.\mu(\varnothing) = 0 \bullet$

 $\mu\left(iguplus_{i=1}^\infty B_i
ight)=\sum_{i=1}^\infty \mu\left(B_i
ight)$ ארות באוגות איי ארות באונה תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ אדטיביות: (X,Σ,μ) מרחב מידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא ותהא מידה: יהי

 $\mu\left(X
ight)<\infty$ מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת

 $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ המקיימים $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ וכן $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ המקיימים אוכן $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ המקיימים מידה $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ המקיימים מידה שנוקציית מידה $X=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$ $\mu\left(X
ight)=1$ מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי

 $\mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right)$ אזי $A\subseteq B$ באשר $A,B\in\Sigma$ יהיו • מונוטוניות: יהיו

```
\mu\left(igcup_{i=1}^{\infty}A_i
ight)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i
ight) אזי \{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma התראדיטיביות: תהיינה \sigma
```

 $\mu\left(igcup_{i=1}^{\infty}A_{i}
ight)=\lim_{n
ightarrow\infty}\mu\left(A_{n}
ight)$ אזי $orall i\in\mathbb{N}_{+}.A_{i}\subseteq A_{i+1}$ באשר באשר $\{A_{i}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ אזי סלעיל: תהיינה $\{A_{i}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$

 $\mu\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i
ight)=\lim_{n o\infty}\mu\left(A_n
ight)$ אזי $\mu\left(A_1
ight)<\infty$ וכן $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ באשר $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ היינה מלרע: תהיינה $\mu\left(A_n
ight)$ באשר $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ וכן $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ מידת בורל: תהא $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ מידת בורל: תהא $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$

 $\mu\left(E
ight)=0$ המקיימת $E\in\Sigma$ זניחה: אפס/זניחה

 $\mathcal{N}=\{E\in\Sigma\mid\mu\left(E
ight)=0\}$ סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי

. אניחה $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ אניחות אזי $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq \Sigma$ אניחה.

 μ כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי ψ פרידיקט עבורו קיימת $E\in\mathcal{N}$ המקיים כי ψ אזי נאמר כי ψ אזי נאמר כי ψ נכונה בכל מקום.

 $F\in\mathcal{N}$ מתקיים $F\subseteq E$ ולכל ולכל עבורה מידה מידה מידה מידה מידה עבורה לכל

 $.\overline{\Sigma}=\{E\cup F\mid (E\in\Sigma)\wedge (\exists N\in\mathcal{N}.F\subseteq N)\}$ מרחב מידה אזי מרחב (X,Σ,μ) יהי יהי השלמה של מ-דאלגברה:

. טענה: יהי $\overline{\Sigma}$ יהי מידה מידה (X,Σ,μ) יהי טענה:

 $.
u_{
ho_{\Sigma}}=\mu$ עבורה על $\overline{\Sigma}$ עבורה מידה מידה אזי קיימת ויחידה מידה מידה מידה (X,Σ,μ) יהי

 $.\overline{\mu}_{1\Sigma}=\mu$ עבורה על $\overline{\Sigma}$ על תידה השלמה מידה מידה מידה מידה מרחב (X,Σ,μ) יהי

טענה: יהי $(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu})$ מרחב מידה אזי מרחב מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא $X \neq \varnothing$ אזי $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ מחלקת הינקין

- $X \in \mathcal{D} \bullet$
- $.B \backslash A \in \mathcal{D}$ יהיו $A \subseteq B$ באשר $A, B \in \mathcal{D}$ יהיו •
- $\bigcup_{i=1}^\infty A_i\in\mathcal{D}$ אזי $orall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ באשר $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{D}$ ההיינה ullet

 $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \Pi$ מתקיים $A_1 \dots A_n \in \Pi$ עבורה לכל עבורה $\Pi \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ אזי אזי $X
eq \varnothing$ מערכת π

. מחלקת חלקת $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_{\alpha}$ אזי דינקין מחלקות אחלקת $\left\{\mathcal{D}_{\alpha}\right\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ מחלקת ההיינה

 $d\left(A
ight) = igcap_{lpha \in I} \mathcal{D}_{lpha}$ אזי אזי $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי המכילות את $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ מחלקת דינקין נוצרת: תהא $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$

למה: תהא A אלגברה על X עבורה לכל A עבורה לכל A באשר $A_i \subseteq A_i \subseteq A_i$ מתקיים A אזי A אזי A אזי A למה: תהא A אלגברה על A עבורה לכל A עבורה לכל $A_i = A_i \subseteq A_i$ באשר $A_i = A_i \subseteq A_i$ מתקיים $A_i \in A_i \subseteq A_i$ אזי $A_i \in A_i \subseteq A_i$ מערכת A אלגברה על $A_i = A_i \subseteq A_i$ מערכת $A_i = A_i \subseteq A_i$ מתקיים $A_i = A_i \subseteq A_i$ מערכת $A_i = A_i$ מערכת $A_i = A_i$ מערכת $A_i = A_i$ מערכת $A_i = A_i$ מערכ

עבורן Σ עבורן מידות סופיות על μ, ν מידות ההיינה $\Sigma = \sigma(\Pi)$ מערכת π עבורה $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ מרחב מדיד תהא μ, ν מידות סופיות על μ, ν וכן μ, ν וכן μ, ν אזי $\mu_{\uparrow \Pi} = \nu_{\uparrow \Pi}$ וכן $\mu(X) = \nu(X)$

 $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ באשר $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Pi$ תהיינה $\Sigma=\sigma\left(\Pi\right)$ מסקנה: יהי $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ מרחב מדיד תהא (X,Σ) מרחב $\mu=\nu$ אזי $\mu_{\uparrow\pi}=\nu_{\uparrow\pi}$ וכן $\forall n\in\mathbb{N}_+.\mu\left(A_i\right)=\nu\left(A_i\right)<\infty$ עבורן עבורן Σ עבורן μ,ν מידות על μ,ν מידו

חוג למחצה: תהא $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי קבוצה X המקיימת

- $\mathscr{A} \in \mathcal{E} ullet$
- $A\cap B\in\mathcal{E}$ אזי $A,B\in\mathcal{E}$ יהיו
- $A \backslash B = \biguplus_{i=1}^n C_i$ עבורם $C_1 \dots C_n \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $A, B \in \mathcal{E}$ יהיי

טענה: יהי $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{E}$ חוג למחצה ויהיו $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי

- $P ackslash igcup_{i=1}^n A_i = igoplus_{i=1}^m B_i$ עבורם $B_1 \dots B_m \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $P \in \mathcal{E}$ יהי
- $.\bigcup_{i=1}^nA_i=\biguplus_{i=1}^m\biguplus_{j=1}^mB_{i,j}$ עבורם עבורם $\{B_{i,j}\mid (i\in[n])\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ קיימים •
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \biguplus_{i=1}^\infty \biguplus_{j=1}^m B_{i,j}$ עבורם $\{B_{i,j} \mid (i \in \mathbb{N}_+) \land (j \in [m_i])\} \subseteq \mathcal{E}$ קיימים •

 $\mu:\mathcal{E} o [0,\infty]$ מידה אלמנטרית: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ חוג למחצה אזי

- $.\mu(\varnothing) = 0 \bullet$
- $.\mu\left(A\uplus B
 ight)=\mu\left(A
 ight)+\mu\left(B
 ight)$ אזי אדיטיביות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ עבורם $A,B\in\mathcal{E}$
 - $.\mu\left(A
 ight) \leq \mu\left(B
 ight)$ אזי $A\subseteq B$ באשר $A,B\in\mathcal{E}$ מונוטוניות: תהיינה
 - $.\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)\leq \sum_{i=1}^\infty \mu\left(A_i\right)$ אזי $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{E}$ ההיינה ס־תת־אדטיביות: תהיינה ס

מידה חיצונית: יהי $X
eq \emptyset$ אזי $\mu^*:\mathcal{P}\left(X
ight)
ightarrow\left[0,\infty
ight]$ אזי $X
eq \emptyset$ המקיימת

 $.\mu^*(\varnothing) = 0 \bullet$

```
\mu^*(A) \leq \mu^*(B) אזי A \subseteq B אזי A, B \in \mathcal{P}(X) מרינות: תהיינה A, B \in \mathcal{P}(X) באשר A, B \in \mathcal{P}(X) אזי A \subseteq D אזי A \subseteq D אזי A \in \mathcal{P}(X) אוריה A \in \mathcal{P}(X) אוריה A \in \mathcal{P}(X) אוריה A \in \mathcal{P}(X) שטעה: יהי A \in \mathcal{P}(X) באשר A \in \mathcal{P}(X) שותה A \in \mathcal{P}(X) אוי A \in \mathcal{P}(X) אוי A \in \mathcal{P}(X) שטעה: יהי A \in \mathcal{P}(X) אוי A \in \mathcal{P}(X
```

 $.\mu^*\left(E
ight)=\mu^*\left(E\cap A
ight)+\mu^*\left(Eackslash A
ight)$. $\Sigma_{\mu^*}=\{A\subseteq X\mid \mu^*$ מדידה $A\}$ מדידה חיצונית על A אזי μ^*

 $\mathcal{M} \subseteq \Sigma_{m^*}$ יהי אלמנטרית מידה m מידה ותהא חוג למחצה חוג למחצה יהי

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא μ^* מידה חיצונית על אזי

- . אלגברה σ Σ_{μ^*}
- . מידה שלמה $\mu_{\upharpoonright_{\Sigma_{\mu^*}}}^*$

 Σ_{m^*} מידה מעל m^* מידה אלמנטרית מידה m מידה מעל חוג למחצה חוג למחצה חוג למחצה ותהא

משפט: יהי \mathcal{M} חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא (X,Σ',μ) המשכת קרתיאודורי נוספת של m מידה אלמנטרית יהי

- $.\mu\left(A
 ight) \leq m^{st}\left(A
 ight)$ מתקיים $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^{st}}$ לכל •
- $.\mu\left(A\right)=m^{*}\left(A\right)$ מתקיים $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ לכל אזי $m^{*}\left(X\right)<\infty$ נניח כי פניח נניח לכל
 - $\mu\left(A
 ight)=m^{st}\left(A
 ight)$ מתקיים $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}}$ לכל אזי לכל σ מתקיים •

מסקנה: יהי ${\mathcal M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

משפט קרתיאודורי: יהי (X,d)>0 מרחב מטרי ותהא μ^* מידה חיצונית עבורה לכל באשר (X,d) מתקיים משפט קרתיאודורי: יהי $\mathcal{B}(X)\subseteq \Sigma_{\mu^*}$ אזי $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$

 $.\mu\left(A\right)=\sup\left\{ \mu\left(K\right)\mid\left(K\subseteq A\right)\wedge\left($ קומפקטית העורה $K\right)\right\}$ עבורה עבורה קבוצה הגולרית: מידה אינה בל $A\in\Sigma$ עבורה בל מידה אינה בל מידה אינה בל מידה עבורה בל $A\in\Sigma$ עבורה בל מידה הגולרית: מידה אינה בל עבורה בל הינה בל מידה האולרית: מידה אינה בל עבורה בל מידה אינה בל מידה באולרית: מידה באולרית: מידה בל עבורה בל מידה בל

. תולרית. אזי μ אזי אוי μ אזי μ אזי μ משפט אולם: יהי א מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא ותהא אוי משפט אולם: יהי אוי שלח מטרי שלח וחפירבילי ותהא אוי אוי וחפירבילי ותהא אוי אוי אוי וחפירבילי ותהא אוי אוי אוי אוי וחפירבילי ותהא אוי אוי וחפירבילי ותהא אוי אוי אוי וחפירבילי ותהא אוית וחפירבילית ותהא אוים וחפירבילי ותהא אוים וחפירבילים ותחירבילים ותהא אוים וחפירבילים ותהא או

עבורה $\{\prod_{i=1}^n (a_i,b_i) \mid a_1,b_1\dots a_n,b_n\in\mathbb{R}\}$ עבורה מידה אלמנטרית: מידה אלמנטרית: מידה אלמנטרית

 $.m(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

 $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n
ight)=\sigma\left(\left\{A\subseteq\mathbb{R}^n\mid\left($ מניחה $A
ight)ee\left($ פתוחה $A
ight)ee\left($ זניחה על פי מידת הנפח האלמנטרית המחה אלגברה לבג:

 $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d
ight)\subseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)$:מסקנה

מסקנה: תהא $u\left(\prod_{i=1}^n\left(a_i,b_i\right)\right)=\prod_{i=1}^n\left(b_i-a_i\right)$ מידה אלמנטרית מידה אלמנטרית מידה אלמנטרית עבורה $u:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)\to\left[0,\infty\right]$ אזי אזי $u:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)\to\left[0,\infty\right]$ האלמנטרית.

טענה: תהא m_d מידת לבג אזי

- $.m_{d}\left(E
 ight)=\lim_{n
 ightarrow\infty}m_{d}\left(E\cap\left[-n,n
 ight]^{d}
 ight)$ אזי $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
 ight)$ תהא
- $m_d\left(\mathcal{O}\backslash E
 ight)<arepsilon$ פתוחה עבורה $E\subseteq\mathcal{O}$ אזי קיימת arepsilon>0 ויהי והי $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$
- $.m_d\left(Eackslash F
 ight)<arepsilon$ סגורה עבורה אזי קיימת $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$ תהא \bullet
- $m_d\left(Eackslash F
 ight)<arepsilon$ קומפקטית עבורה $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$ אזי קיימת arepsilon>0 אזי עבורה $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
 ight)$
- $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}
 ight)$ וכן $A\subseteq E\subseteq B$ המקיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}
 ight)$ הימות לקיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}
 ight)$

```
.m_{d}\left(T\left(E
ight)
ight)=\left|\det\left(T
ight)
ight|m_{d}\left(E
ight) אזי E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
ight) ותהא T\in\operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^{d}
ight) משפט: תהא
                                                    m_d\left(T\left(E
ight)
ight)=m_d\left(E
ight) אזי E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight) אורתוגונלית ותהא T\in\operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^d
ight) מסקנה: תהא
                                                    A=\prod_{i=1}^n (a_i,b_i) המקיימים a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R} עבורה קיימים A\subseteq\mathbb{R}^d המקיימים
                                                                                                       מידת לבג אזי m_d חסומה חסומה E \subseteq \mathbb{R}^d מידת לבג אזי
                                                                 .m_{*,J}\left(E
ight)=\sup\left\{m_{d}\left(A
ight)\mid\left( פשוטה A
ight)\wedge\left(A\subseteq E
ight)
ight\} פימית: סידת ז'ורדן פנימית:
                                                                    m_I^*(E) = \inf \left\{ m_d(A) \mid (A \supseteq E) \right\} מידת ז'ורדן חיצונית:
                                           m_{J}\left(E
ight)=m_{J}^{st}\left(E
ight) אזי אm_{st,J}\left(E
ight)=m_{J}^{st}\left(E
ight) חסומה עבורה E\subseteq\mathbb{R}^{d} אזי אזי
                                                             m_J^*\left(E
ight)=m_d\left(\overline{E}
ight) וכן m_{*,J}\left(E
ight)=m_d\left(\mathrm{int}\left(E
ight)
ight) חסומה איי E\subseteq\mathbb{R}^d וכן
                                                                                                         m_d מידת לבג אזי E \subseteq \mathbb{R}^d מידת לבג אזי
                                                                                                                                                    מדידה ז'ורדן. E \bullet
                                                              M_d\left(B\backslash A\right)<arepsilon וכן A\subset E\subset B פשוטות עבורן A,B אזי קיימות arepsilon>0 אלכל •
                                                                                                                                                     .m_{J}^{*}(\partial E) = 0 \bullet
                                                                                                                                                      .m^*\left(\partial E\right) = 0 \bullet
                                               (x-y)\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\} עבורם x,y\in E אזי קיימים אזי עבורה m_d\left(E
ight)>1 עבורה E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)
                                 V\cap (\mathbb{Z}^d\setminus\{0\})
eq \mathcal{Z}^d אזי m_d(V)>2^d אור סימטרי סביב V\subseteq\mathbb{R}^d אור אזי V\subseteq\mathbb{R}^d משפט מינקובסקי: יהי
m_d\left(E\cap Q
ight)>	heta\cdot m_d\left(Q
ight) עבורה Q\subseteq\mathbb{R}^d אזי קיימת קוביה 	heta\in\left(0,1
ight) ותהא m_d\left(E
ight)\in\left(0,\infty
ight) עבורה E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)
                                                                      0 \in \mathrm{int}\left(E-E
ight) אזי איזי m_{d}\left(E
ight)>0 עבורה E \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}
ight) אהיינהאוס: תהא
                                               x,y\in\mathbb{Q}\setminus\{0\} עבורם x,y\in E אזי קיימים אזי עבורה m_{d}\left(E
ight)>0 עבורה E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}
ight)
                    \mathcal{O}=(\biguplus_{i=1}^\infty B_i)\cup E עבורם E\in\mathcal{N} עבורים וקיימת \{B_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d
ight) פתוחה אזי קיימים למה: תהא
                                                                                         פונקציית התפלגות: F:\mathbb{R} 	o \mathbb{R}_{>0} מונוטונית עולה ורציפה מימין.
                      סטענה: תהא \mu מידת בורל סופית על \mathbb{R} אזי F:\mathbb{R} \to \mathbb{R} המוגדרת F:\mathbb{R} \to \mathbb{R} הינה פונקציית התפלגות.
                                                                                   קדם־מימת \mu:\mathcal{A} \to [0,\infty] אלגברה אזי \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right) המקיימת
                                                                                                                                                           .\mu(\varnothing) = 0 \bullet
                                                      .\mu\left(\biguplus_{i=1}^\infty B_i\right)=\sum_{i=1}^\infty\mu\left(B_i\right) אוות אוי \{B_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma ההיינה ההיינה \sigma
                                                                                                .m_{{\mathbb N}_A}^*=m אלגברה ותהא קדם־מידה אזי אלגברה ותהא אלגברה אלגברה אלגברה אלגברה ותהא
                                                                                                 \mathcal{A}\subseteq \Sigma_{m^*} אלגברה ותהא קדם־מידה אזי אלגברה ותהא
                                                                \Sigma_{m^*} מידה מעל m^* מידה המשכת m קדם־מידה אזיm^* מידה מעל
                                  משפט: תהא Aאלגברה תהא m קדם־מידה ותהא (X,\Sigma',\mu) המשכת קרתיאודורי נוספת של
                                                                                                         \mu(A) < m^*(A) מתקיים A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^*} •
                                                                   .\mu\left(A
ight)=m^{st}\left(A
ight) מתקיים A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}} לכל אזי לכל m^{st}\left(X
ight)<\infty .
                                                                       .\mu\left(A
ight)=m^{st}\left(A
ight) מתקיים A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}} לכל היסופית אי נניח כי \sigma
                                                            "מסקנה: תהא Aאלגברה ותהא m קדם־מידה \sigma־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.
 \{[a,b)\mid a\leq b\} פונקציית התפלגות אזי \mu\left([a,b)
ight)=F\left(b
ight)-F\left(a
ight) אזי התפלגות אזי אלמנטרית מעל החוג למחצה אזי התפלגות אזי
```

 $\kappa\in[0,\infty)$ אזי קיים איזי איזי משקנה: תהא $u:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) o[0,\infty]$ אזי קיים משקנה: תהא $u:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) o[0,\infty]$ אזי קיים

. מענה: תהא m_d מידת לבג אזי m_d רגולרית. מענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מענה: תהא m_d מידת לבג ותהא

A=Gackslash E עבורן $E\in\mathcal{N}$ וקיימת וקיימת $G\in G_\delta$ קיימת $A=F\cup E$ עבורן איימת וקיימת וקיימת $F\in F_\sigma$

 $f\left(A
ight)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
ight)$ אזי $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
ight)$ פניח כי $M_{d}\left(f\left(A
ight)
ight)=0$ אזי $M_{d}\left(A
ight)=0$ נניח כי

 $(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d
ight),m)$ מסקנה: תהא m_d מידת לבג אזי m_d אזי ($\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight),m_d$) מסקנה:

משפט: תהא $f:\mathcal{O} o\mathbb{R}^d$ מידת לבג תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה תהא $f:\mathcal{O} o\mathbb{R}^d$ אזי מידת לבג תהא

 $m_n\left(A
ight)=m_n\left(A+x
ight)$ אזי $x\in\mathbb{R}^n$ משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n
ight)$ ויהי

 $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ •

```
סענה: תהא \mu\left(\biguplus_{i=1}^n\left[a_i,b_i\right)\right)=\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right) איי מעל האלגברה פונקציית התפלגות איי F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}
                                                                                                                                          \{\biguplus_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mid \forall i \in [n] . a_i \leq b_i\}
                    \mu_F\left([a,b)
ight)=F\left(b
ight)-F\left(a
ight) עבורה \mu_F בורל משפט: תהא פונקציית התפלגות אזי קיימת ויחידה מידת בורל F:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
                                                   \exists c \in \mathbb{R}. F - G = c) \Longleftrightarrow (\mu_F = \mu_G) טענה: F,G: \mathbb{R} \to \mathbb{R} טענה: תהיינה
                                                                             \forall a,b \in \mathbb{R}.\mu\left([a,b]
ight) < \infty מידה סופית מקומית: מידת בורל \mu מעל
                               \mu=\mu_F עבורה F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} מסקנה: תהא \mu מידת בורל סופית מקומית על
                                                                                            \overline{\mu_F} אזי התפלגות איזי F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} פונקציית התפלגות אזי
                                                                                                     \mu_F = \overline{\mu_F} פונקציית התפלגות נסמן F: \mathbb{R} 	o \mathbb{R} סימון: תהא
\mu_F\left(E
ight)=\inf\left\{\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i
ight)-F\left(a_i
ight)
ight)\mid E\subseteq igcup_{i=1}^n\left[a_i,b_i
ight)
ight\} אזי E\in \Sigma_{\mu_F} אזי E\in \Sigma_{\mu_F} פונקציית התפלגות ותהא F:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
 \mu_F\left(E
ight)=\inf\left\{\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i
ight)-F\left(a_i
ight)
ight)\mid E\subseteqigcup_{i=1}^n\left(a_i,b_i
ight)
ight\} אזי E\in\Sigma_{\mu_F} אזי התפלגות ותהא F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} פונקציית התפלגות ותהא
        \mu_F\left(E
ight)=\sup\left\{\mu_F\left(K
ight)\mid\left(K\subseteq E
ight)\wedge\left( קומפקטית אזי E\in\Sigma_{\mu_F} אוי התפלגות ותהא F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} פונקציית התפלגות ותהא
                                                                                                   . רגולרית אזי \mu_F רגולרית פונקציית התפלגות רבולרית רגולרית רבולרית רבולרית רבולרית רבולרית רבולרית רבולרית
                                                                                             משפט: תהא E\subseteq\mathbb{R} התב"ש פונקציית התפלגות ותהא F:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
                                                                                                                                                                       .E \in \Sigma_{\mu_F} \bullet
                                                                                                                E=G\backslash N עבורן N\in\mathcal{N} וכן G\in G_\delta קיימת G\in G_\delta
                                                                                                              E=F\uplus N עבורן N\in\mathcal{N} וכן וכן F\in F_{\sigma}
                       .(\mu_F\left(A
ight)=\mu_F\left(B
ight) כן A\subseteq E\subseteq B אזי A,B\in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}
ight)לקיימות האא וכן E\subseteq \mathcal{B} אזי E\subseteq \mathcal{B} אזי אזי E\subseteq \mathcal{B}
טענה העיקרון הראשון של ליטלווד: תהא F:\mathbb{R}	o\mathbb{R} פונקציית התפלגות תהא עבורה \mu_F(E)<\infty עבורה איי אזי E\in\Sigma_{\mu_F} אזי
                                                                                           \mu_F\left(E	riangle \left(igcup_{i=1}^n\left(a_i,b_i
ight)
ight)
ight)<arepsilon עבורם a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R} קיימים
                                                                                                            \mathcal{C}=[0,1]\setminusigcup_{n=0}^\inftyigcup_{k=0}^{3^n-1}ig(rac{3k+1}{3^{n+1}},rac{3k+2}{3^{n+1}}ig) קבוצת קנטור:
                                                                                                                                      \mathcal{C} \in \mathcal{N} טענה: תהא מידת לבג אזי מידת מידת מידת
                                                                                                                                      \mathcal{C}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}rac{x_i}{3^i}\;\middle|\;x\in\mathbb{N}^{\{0,2\}}
ight\} טענה:
                                                              קבוצה מושלמת: קבוצה A \subseteq \mathbb{R} בלתי קשירה לחלוטין אשר לא מכילה נקודות מבודדות.
                                                                                                                                                                                       :טענה
                                                                                                                                                                         |\mathcal{C}| = \aleph \bullet
```

- . קומפקטית \mathcal{C}
 - מושלמת. \mathcal{C}

 $\forall n \in \mathbb{N}_+.\delta_n = rac{1}{3}$ טענה: קבוצת קנטור הינה קבוצת קנטור מוכללת באשר

טענה: תהיינה $\delta_n = \infty$ איי (קבוצת קנטור המוכללת זניחה על פי מידת לבג) איי (קבוצת קנטור המוכללת $\delta_n \}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}\left((0,1)\right)$ איי (קבוצת קנטור המוכללת σ בעל הצגה σ בעל הצגה פונקציית קנטור: נגדיר σ בי σ

טענה: תהא $\varphi:[0,1] o [0,1]$ פונקציית קנטור אזי

- עולה. φ
- .רציפה φ
- $.\varphi\left(\mathcal{C}\right)=\left[0,1\right] \bullet$
- $.arphi\left(E
 ight)
 otin\mathcal{L}\left(\mathbb{R}
 ight)$ עבורה $E\subseteq\mathcal{C}$ קיימת

 $\operatorname{diam}(A) = \sup \{d(x,y) \mid x,y \in A\}$ אזי $A \subseteq X$ מרחב מטרי ותהא (X,d) מרחב מטרי ותהא

אזי $E\subseteq X$ יהי $\delta>0$ יהי יהי מטרי מטרי מרחב מטרי יהי (X,d) יהי

 $\mathcal{H}_{s,\delta}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \operatorname{diam} (A_i)^s \mid (E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i) \wedge (\operatorname{diam} (A_i) < \delta) \right\}$

 $\mathcal{H}_{s}\left(E
ight)=\lim_{\delta\downarrow0}\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E
ight)$ אזי אזי $E\subseteq X$ ויהי האוסדורף: יהי מרחב מטרי יהי מידת האוסדורף: יהי

טענה: יהי $\delta>0$ ויהי $s\geq 0$ אזי מרחב מטרי יהי $s\geq 0$ אזי

- יורדת. $f\left(\delta\right)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$ המוגדרת $f:\left(0,\infty\right)
 ightarrow\left[0,\infty\right]$ יורדת. \bullet
- יורדת. $f\left(s
 ight)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E
 ight)$ המוגדרת $f:\left[0,\infty
 ight)
 ightarrow\left[0,\infty
 ight]$ יורדת. \bullet

```
\mathcal{H}_s(\varnothing) = 0 \bullet
                                                                                                                                                                                                          מידות חיצוניות. \mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s,\delta}
                                                                    טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי s \geq 0 יהי s \geq 0 ותהיינה אי(X,d) איי איי
                                                                                                                                                                                         \mathcal{H}_{s,\delta}(A \cup B) = \mathcal{H}_{s,\delta}(A) + \mathcal{H}_{s,\delta}(B)
           \mathcal{H}_s(A \cup B) = \mathcal{H}_s(A) + \mathcal{H}_s(B) אזי d(A,B) > 0 אזי א ההיינה s \geq 0 ותהיינה s \geq 0 מסקנה: יהי
                                                                                                                                                        \mathcal{H}_s מדידה E\in\mathcal{B}\left(X
ight) אזי ותהא s\geq0 מדידה מסקנה: יהי
                                                                                            \mathcal{H}_{s}\left(f\left(E
ight)
ight)\leq L^{s}\cdot\mathcal{H}_{s}\left(E
ight) אזי E\subseteq X ותהא f:X	o Y ליפשיץ f:X	o Y
                                                                                                    \mathcal{H}_{s}\left(f\left(E
ight)
ight)=\mathcal{H}_{s}\left(E
ight) אזי E\subseteq X איזומטריה ותהא f:X	o X מסקנה: תהא
                                                                                                                                                 אזי E\subseteq X אזי יהי s\geq 0 מרחב מטרי מרחב (X,d) אזי
                                                                                                                                            \mathcal{H}_{t}\left(E\right)=0 מתקיים t>s אזי לכל \mathcal{H}_{s}\left(E\right)<\infty אם
                                                                                                                                            \mathcal{H}_{t}\left(E\right)=\infty מתקיים t< s אזי לכל \mathcal{H}_{s}\left(E\right)>0 אם •
                                                                                                                                                                \mathcal{H}_{s}\left(E
ight)=0 אזי n < s ויהי E \subseteq \mathbb{R}^{n} מסקנה: תהא
                                                         \dim_{\mathcal{H}}(E)=\inf\{s\geq 0\mid \mathcal{H}_s\left(E
ight)=0\} איז E\subseteq X מרחב מטרי ותהא מימד האוסדורף: יהי
                                                                                                                                                                                   \dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n)=n אזי n\in\mathbb{N}_+ מסקנה: יהי
                                                                                                                                                                                                               \dim_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{C}\right) = \log_{3}\left(2\right) משפט:
                                                                                                                                  \mathcal{H}_n = rac{2^n}{m_d(\{|x| \leq 1\})} \cdot m_d אזי אזי משפט: תהא m_d מידת לבג מעל מעל
                                                                                                                                                                          0 < \mathcal{H}_n\left(\left[0,1\right]^n\right) < \infty אזי n \in \mathbb{N}_+ טענה: יהי n \in \mathbb{N}_+
                                                     T^{-1}\left(\Sigma_Y
ight)\subseteq\Sigma_X המקיימת T:X	o Y העתקה מדידים מדידים מרחבים (X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y) העתקה מדידה: יהיו
                                T:(X,\Sigma_X)	o (Y,\Sigma_Y) מרחבים מדידים ותהא T:X	o Y העתקה מדידה אזי (X,\Sigma_X) מרחבים מדידים ותהא
סענה: יהיו מדידה ותהא S:Y	o Z מרחבים מדידים תהא T:X	o Y העתקה מדידים מדידים ותהא מרחבים מדידים מדידים
                                                                                                                                                       מדידה. (\Sigma_X, \Sigma_Z) העתקה S \circ T מדידה (\Sigma_Y, \Sigma_Z)
T^{-1}\left(\mathcal{E}
ight)\subseteq\Sigma_{X} וכן \Sigma_{Y}=\sigma\left(\mathcal{E}
ight) עבורה \mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(Y
ight) ותהא ותהא T:X	o Y מרחבים מדידים מדידים תהא אונה: יהיו
                                                                                                                                                                                                       אזי T העתקה (\Sigma_X, \Sigma_Y) מדידה.
                                                                    ימדידה. T\in C\left(X,Y\right) מטריים מטריים ותהא ותהא T\in C\left(X,Y\right) אזי מרחבים מטריים מטריים ותהא
                                                                                                                                                                                            \overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=[-\infty,\infty] הגדרה:
                                                                                                                                  . הגדרה: נגדיר 0\cdot (\pm \infty)=0 והפעולות \infty-\infty, \frac{\infty}{\infty} אינן מוגדרות מוגדרות
                                                                                                                 .\rho\left(x,y\right)=\left|A\left(x\right)-A\left(y\right)\right| וכן A\left(x\right)=\lim_{t\to x}\arctan\left(t\right) הגדרה: נגדיר
                                                                                                                                                                                                          .טענה: (\overline{\mathbb{R}},
ho) מרחב מטרי שלם
                                                      S\in\mathcal{P}(\{\pm\infty\}) טענה: תהא A\subseteq\mathbb{R} אזי איזי (קיימת A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})קיימת איזי איזי איזי איזי איזי איזי
                                                                                                                                                                                                                   \mathcal{B}\left(\mathbb{R}
ight)=\mathbb{R}\cap\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}
ight) טענה:
                                                                                                                                                      פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי (X,\Sigma) מרחב מדיד אזי
                                                                                                                                                                            - העתקה (\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R})) f: X \to \mathbb{R} מדידה.
                                                                                                                                                                           - מדידה. (\Sigma, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)) f: X \to \overline{\mathbb{R}} מדידה.
                                                                                                                                                   מסקנה: יהי f:X	o\mathbb{R} מרחב מדיד ותהא מסקנה: יהי מסקנה:
                                                                                                                                                                                                                                 . מדידה בורל f \bullet
                                                                                                                                                                                       \{f \geq a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{R} לכל
                                                                                                                                                                                       \{f \geq a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{Q} לכל
                                                                                                                                                                                       \{f>a\}\in\Sigma מתקיים a\in\mathbb{R} לכל
                                                                                                                                                                                       \{f>a\}\in\Sigma מתקיים a\in\mathbb{Q} לכל
                                                                                                                                                                                       \{f < a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{R} לכל
                                                                                                                                                                                       \{f \leq a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{Q} לכל
                                                                                                                                                                                       \{f < a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{R} לכל
                                                                                                                                                                                       \{f < a\} \in \Sigma מתקיים a \in \mathbb{Q} לכל
                                                                                                      מסקנה: יהי f מדידה f מדידה בורל. f \in C(X,\mathbb{R}) מדידה מדידה בורל.
```

יורדת. $f(s) = \mathcal{H}_s(E)$ המוגדרת $f: (0, \infty) \to [0, \infty]$ יורדת. \bullet

```
(f^{-1}(\pm\infty)\in\Sigma מרחב מדיד ותהא f:X	o\overline{\mathbb{R}} אזי f:X	o\overline{\mathbb{R}} מדידה בורל וכן (X,\Sigma) מרחב מדיד ותהא סענה: יהי
                                                                                                   f^+=-\max\left\{-f,0
ight\} וכן f^+=\max\left\{f,0
ight\} אזי f:X	o\overline{\mathbb{R}} וכן
                                                                                             משפט: תהיינה f^+,f^-,rac{1}{f},f\cdot g,f+g,f^2 אזי מדידות משפט: תהיינה מדידות משפט
                                                                                             \{f < g\}\,, \{f \leq g\}\,, \{f = g\} \in \Sigma מסקנה: תהיינה f,g:X 	o \overline{\mathbb{R}} מסקנה: תהיינה
                     מדידות. \sup\{f_n\} , \inf\{f_n\} , \limsup\{f_n\} , \liminf\{f_n\} , \liminf\{f_n\} סדרת פונקציות מדידות אזי ווויא \{f_n\} סדרת פונקציות מדידות אזי
                                             מסקנה: תהא f:X	o \overline{\mathbb{R}} אזי f סדרת פונקציות מדידות ותהא f:X	o \overline{\mathbb{R}} עבורה f:X	o \overline{\mathbb{R}} סדרת פונקציות מדידות ותהא
                                                                                         מדידות. \min\left\{f,g\right\},\max\left\{f,g\right\},|f| מדידות אזי f,g:X	o\overline{\mathbb{R}} מדידות.
                            עבורם a_1\ldots a_n\in\mathbb{R} וכן E_1\ldots E_n\in\Sigma עבורה קיימים arphi:X	o\mathbb{R} עבורם מדיד אזי אזי מרחב מדיד אזי arphi:X	o\mathbb{R}
                                                                                                                                                                                                              .\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i}
וקיימים E_1\dots E_n\in \Sigma עבורם אזי אזי \varphi:X	o \mathbb{R} אזי אזי אזי אזי היי (X,\Sigma) מרחב מדיד אזי \varphi:X	o \mathbb{R} וקיימים
                                                                                                                                                                    arphi=\sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{E_i} עבורם a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}
egin{aligned} egin{aligned} eta_{i=1}^n E_i &= X \end{aligned} באשר egin{aligned} arphi_{i=1} E_i &= X \end{aligned} באשר באשר באנה סטנדרטית של פונקציה פשוטה: יהי (X,\Sigma) מרחב מדיד ותהא
                                                                                 . טענה: יהי (X,\Sigma) מרחב מדיד ותהא \mathbb{R} בשוטה אזי קיימת הצגה סטנדרטית יהי
                                                        טענה: יהי (X,\Sigma) מרחב מדיד ותהא X \to \mathbb{R} אזי Y : X \to \mathbb{R} טענה: יהי מדיד וכן (X,\Sigma) מרחב מדיד ותהא
                                                    (arphi_n\uparrow f) משפט: תהא f:X	o\overline{\mathbb{R}} מדידה חיובית אזי קיימות משפט: תהא משפט: מדידה מדידה חיובית אזי קיימות
arphi_n\uparrow f עבורה f:X	o\overline{\mathbb{R}} משפט: תהא אוביות חיוביות עבורה f:X	o\overline{\mathbb{R}} משפט: תהא משפט: משפט מדידה חיוביות עבורן אובית תהא
                                                                                                                                                                                                            A על \varphi_n \rightrightarrows f אזי
                                                 |arphi_n|\uparrow|f| וכן |arphi_n
ightarrow f וכן פשוטות עבורן \{arphi_n\}\subseteq X
ightarrow \overline{\mathbb{R}} מסקנה: תהא מסקנה: f:X
ightarrow \overline{\mathbb{R}}
                                     . מדידה g כ.ב.מ. אזי g מדידה g:X \to \mathbb{R} מדידה ותהא g:X \to \mathbb{R} מדידה ל.ב.מ. אזי מדידה שלמה תהא
                  טענה: תהא \mu מיימת f:X	o\mathbb{R} מדידות ותהא f:X	o\mathbb{R} מדידות כ.ב.מ. אזי f מדידה שלמה תהיינה שלמה תהיינה להוע מדידות ותהא
                                                 טענה: תהא \mu מידה ותהא \overline{\mu} f:X	o \overline{\mathbb{R}}־מבידה אזי קיימת g:X	o \overline{\mathbb{R}} מדידה וכן f:X	o \overline{\mathbb{R}}
                                                                                       .Borel (X)=\{f:X	o\mathbb{R}\mid בורל: יהי X מרחב מטרי אזי \{f\} מדידה בורל מחלקת בורל: יהי
                                    .Baire_{i+1}\left(X\right)=\{\lim_{n\to\infty}f_{n}\mid\{f_{n}\}\subseteq\mathrm{Baire}_{i}\left(X\right)\} וכך מטרי אזי אזי (X) שימון: יהי X מרחב מטרי אזי
                                                                                                                   .Baire (X) = \bigcup_{i=0}^{\infty} Baire (X) מחלקת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי
                                                                                             .arphi\left(f,g
ight)\in \mathrm{Baire}\left(X
ight) אזי f,g\in \mathrm{Baire}\left(X
ight) ותהיינה arphi\in C\left(\mathbb{R}^{2},\mathbb{R}
ight) אזי
                                                                                                     f_n 	o \mathbb{1}_F עבורן \{f_n\} \subseteq C(X,\mathbb{R}) עבורה אזי קיימות F \subseteq X למה: תהא
                                                                                                                        מחלקה מונוטונית: יהי X מרחב מטרי אזי R \subseteq \mathcal{P}\left(X\right) המקיימת
                                                                                                            \bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}\in R אזי orall i\in\mathbb{N}.E_{i}\subseteq E_{i+1} עבורן \{E_{i}\}\subseteq R אזי ullet
                                                                                                            igcap_{i=1}^\infty E_i \in R אזי orall i \in \mathbb{N}. E_i \supseteq E_{i+1} עבורן \{E_i\} \subseteq R תהיינה
                       מחלקה מונוטוניות מעל X המכילות את ותהיינה \{\mathcal{R}_{lpha}\}_{lpha\in I} ותהיינה ותחינה ותחינה ותהיינה ותחינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה
                                                                                                                                                                                                        \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{R}_{\alpha}
                                              A את המכילה ביותר המכילה המחלקה המונוטונית העלה האזי \mathcal{M}\left(A
ight) אלגברה אזי אלגברה אזי \mathcal{M}\left(A
ight) הינה המחלקה
                                                                                                                                          \sigma\left(\mathcal{A}\right)=\mathcal{M}\left(\mathcal{A}\right) אלגברה אזי \mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) למה: תהא
                                                                                                                                           .Baire (X)=\operatorname{Borel}(X) משפט: יהי X מרחב מטרי אזי
משפט לוזין/טענה העיקרון השני של ליטלווד: תהא \mu מידת בורל סופית על f:(\mathbb{R},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}
ight))	o(\mathbb{R},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}
ight)) אזי משפט לוזין/טענה העיקרון השני של ליטלווד: תהא
                                                                                                                        f\in C\left(K
ight) וכן \mu\left(\mathbb{R}\backslash K
ight)<arepsilon קיימת אקומפקטית קומפקטית עבורה K\subseteq\mathbb{R}
                                                                                            L^0\left(X,\Sigma
ight)=\left\{f:X
ightarrow\overline{\mathbb{R}}\mid מדידה f
brace מרחב מידה אזי (X,\Sigma,\mu) הגדרה: יהי
                                                                       מתקיים arepsilon>0 עבורה לכל f\in L^0\left(X,\Sigma
ight) ותהא ותהא \{f_n\}\subseteq L^0\left(X,\Sigma
ight) מתקיים
                                                                                                                                       f_n \xrightarrow{\mu} f איי \mu\left(\left\{x \in X \mid |f_n\left(x\right) - f\left(x\right)| > 0\right\}\right) \to 0
\mu\left(X\backslash\left\{x\in X\mid\lim_{n	o\infty}f_{n}\left(x
ight)=f\left(x
ight)
ight\}
ight)=0 עבורה לפנסות כמעט בכל מקום: יהיו \left\{f_{n}
ight\}\subseteq L^{0}\left(X,\Sigma
ight) ותהא ותהא
                                            f_n \xrightarrow{a.s.} f וכן f_n \xrightarrow{a.e.} f אזי וכן f_n \xrightarrow{a.e.} f וכן אזי f \in L^0\left(X,\Sigma\right) וכן ותהא וכן f \in L^0\left(X,\Sigma\right)
                             \mu\left(igcap_{n=1}^{\infty}igcup_{k=n}^{\infty}E_{k}
ight)=0 אזי אזי \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(E_{n}
ight)<\infty מדידות עבורן מדידות עבורל קנטלי: יהיו
                                                                     אזי \sum_{n=1}^\infty \mu\left(\{|f_n>arepsilon|\}
ight)<\infty מסקנה: יהיו \{f_n\}\subseteq L^0\left(X,\Sigma
ight) אזי אויים \{f_n\}\subseteq L^0\left(X,\Sigma
ight)
```

```
f_n \xrightarrow{a.e.} 0
                                                                                                                          .X\backslash Eעל f_n\rightrightarrows 0וכן וכן \mu\left(E\right)<\deltaעבורה עבורה E\subseteq X אזי קיימת \delta>0 אהא \bullet
                                                                                                                                                          f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f אזי קיימת תת"ס עבורה f_n \xrightarrow{\mu} f משפט ריס: תהיינה
                                                       ..ב.מ.. f=g אזי f_n \xrightarrow{\mu} g וכן f_n \xrightarrow{\mu} f עבורן f,g \in L^0\left(X,\Sigma\right) ותהיינה ותהיינה \{f_n\}\subseteq L^0\left(X,\Sigma\right)
עבורה E\subseteq X קיימת arepsilon>0 אזי לכל f_n \xrightarrow{a.e.} f אזי מידה סופית תהא עבורה: תהא של ליטלווד: עבורה עבורה איינה אורוב/טענה העיקרון השלישי של ליטלווד:
                                                                                                                                                                                                                                        X \setminus E על f_n \rightrightarrows f וכן \mu(E) < \varepsilon
עבורן \{A_k\}\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) וקיימות ותהיינה \mu\left(N
ight)=0 אזי קיימת אזי קיימת אזי קיימת ותהיינה \mu\left(N
ight)=0 אזי קיימת אזי קיימת אזי קיימת ותהיינה ותהיינה אזי קיימת ותהיינה ותהיינה אזי קיימת ותהיינה ו
                                                                                                                                                                    A_k על f_n 
ightrightarrows f מתקיים k \in \mathbb{N} וכן לכל X = N \cup igcup_{k=1}^\infty A_k
למה פרשה: יהי (X, \mathcal{P}(X)) 	o (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא \mu מידת בורל סופית על (X, \rho) מרחב מטרי שלם וספרבילי מידת בורל סופית על
                                                                                                                                                                                                                      f_n \xrightarrow{a.e.} f עבורן \{f_n\} \subseteq C(X) קיימות
ותהא f:(X,\mathcal{B}(X))	o (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) ותהא על סופית על מידת בורל וויפרבילי תהא \mu מידת שלם וספרבילי משפט לוזין: יהי
                                                                                                                                   f\in C\left(K
ight) וכן \mu\left(\mathbb{R}\backslash K
ight)<arepsilon אזי קיימת אוכן קומפקטית עבורה K\subseteq\mathbb{R} אזי קיימת arepsilon>0
                                                                                                               \mathcal{S}\left(\Sigma\right)=\left\{arphi\in X
ightarrow\mathbb{R}\mid סימון: יהי (X,\Sigma,\mu) מרחב מידה אזי סימון: יהי מרחב מידה אזי
                                                                                                                                            \mathcal{S}^{+}\left(\Sigma\right)=\left\{ arphi\in\mathcal{S}\left(\Sigma\right)\midarphi\geq0
ight\} מרחב מידה אזי מרחב (X,\Sigma,\mu) יהי
      S^N(Z)=\{\varphi\in\mathcal{C}(Z)\mid \varphi\geq 0\} אור אור ביר אור אור מינה (X,Z,\mu) איי איי איינה f=\sum_{i=1}^N x_i\mu(A_i)=\sum_{i=1}^M y_i\mu(B_i) אינטגרל: תהא f=\sum_{i=1}^N x_i\mathbb{1}_{A_i}=\sum_{i=1}^N x_i\mathbb{1}_{A_i} ותהא f\in\mathcal{S}^+(\Sigma) ותהא f\in\mathcal{S}^+(\Sigma) ותהא f\in\mathcal{S}^+(\Sigma) ותהא f\in\mathcal{S}^+(\Sigma) ותהא f\in\mathcal{S}^+(\Sigma) ותהא אינטגרל: תהא
                                                                                                                                                 \int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \mathrm{d}\mu אזי E \in \Sigma ותהא ותהא f \in \mathcal{S}^+ (\Sigma) אינטגרל: תהא
                                                                                                                                                                             טענה: תהיינה \lambda \geq 0 ויהי A \in \Sigma תהא f,g \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right) טענה:
                                                                                                                                                                                                                                                            .\int_{X} \mathbb{1}_{A} \mathrm{d}\mu = \mu(A) \bullet
                                                                                                                                                                                                      \int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu - הומוגניות חיובית:
                                                                                                                                                                                      \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu חיבוריות: •
                                                                                                                                                                                \int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu אזי אוניטוניות: נניח כי f \leq g
                                                                                                  .\Sigma טענה: תהא \psi\left(E
ight)=\int_{E}f\mathrm{d}\mu המוגדרת \psi:\Sigma	o\mathbb{R} אזי f\in\mathcal{S}^{+}\left(\Sigma\right) הינה מעל
                                                                                        L^{0}\left(X,\Sigma
ight)=\left\{ f\in X
ightarrow\overline{\mathbb{R}}\mid\left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}
ight)
ight) מדידה f
brace מרחב מידה אזי מרחב מידה אזי
                                                                                                                        L^0_+\left(X,\Sigma
ight)=\left\{f\in L^0\left(X,\Sigma
ight)\mid f\geq 0
ight\} מרחב מידה אזי (X,\Sigma,\mu) יהי יהי
                                                                                                             \int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)) \wedge (\varphi \leq f)
ight\} אזי f \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right) למה: תהא
                                                                                           \int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X arphi \mathrm{d}\mu \mid (arphi \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma
ight)) \wedge (arphi \leq f)
ight\} אינטגרל: תהא f \in L^0_+\left(X,\Sigma
ight) אינטגרל: תהא
                                                                                                                                         \int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X 1\!\!1_E f \mathrm{d}\mu איי E \in \Sigma ותהא ותהא f \in L^0_+(X,\Sigma) אינטגרל: תהא
                          \int_X g \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu איי g \leq f איי g \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right) ותהא ותהא f \in \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right) איי עבורן ועבורן א
  \int_X f \mathrm{d}\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu איי אf_n \uparrow f עבורן איי איז ווווונית: תהיינה לf_n \uparrow f \downarrow f עבורן איינה איינה וווווווינית: תהיינה
                                                           \int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n 	o \infty} \int_X arphi_n \mathrm{d}\mu אזי arphi_n \uparrow f עבורה \{arphi_n\} \subseteq \mathcal{S}^+\left(\Sigma\right) ותהא f \in L^0_+\left(X,\Sigma\right) אזי תהא
                                                                                                                                                                    טענה: תהיינה A \in \Sigma תהא f,g \in L^0_+(X,\Sigma) ויהי טענה:
                                                                                                                                                                                                                                                            \int_{X} \mathbb{1}_{A} d\mu = \mu(A) \bullet
                                                                                                                                                                                                      \int_{V} \lambda f d\mu = \lambda \int_{V} f d\mu הומוגניות חיובית: •
```

- $\int_X \left(f+g\right) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$ חיבוריות: •
- $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$ אזי אזי נניח כי מונוטוניות: נניח הי

 $.\int_E f\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^\infty\int_E f_n\mathrm{d}\mu$ איי $E\in\Sigma$ ותהא ותהא $\{f_n\}\subseteq L^0_+(X,\Sigma)$ מסקנה: תהא $f\in L^0_+(X,\Sigma)$ איי $f\in L^0_+(X,\Sigma)$ כ.ב.מ.).

טענה: תהא $f\in L^{0}\left(X,\Sigma
ight)$ התב"ש

 $f \in L^1(\mu) \bullet$

```
. סענה: תהא f\in L^{1}\left( \mu
ight) אזי f\in L^{1}\left( \mu
ight) קבוצה
                                                                           .(ב.ב.מ.). f=0אזי (לכל E\in\Sigma מתקיים f=0) אזי אזי (לכל f\in L^1(\mu) אזי מענה: תהא
                                                                                 \int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu אזי או\mu\left(\{f 
eq g\}\right) = 0 עבורן f,g \in L^1\left(\mu
ight) אזי מסקנה: תהיינה
                                                                                                       f \sim g אזי \mu\left(\{f 
eq g\}\right) = 0 עבורן f,g \in L^1\left(\mu
ight) אזי הגדרה: תהיינה
                                                                                L^{1}\left(\mu
ight) \equiv L^{1}(\mu)/_{\sim} מכאן והלאה נתייחס לפונקציות שקולות כזהות, כלומר מכאן והלאה נתייחס
                                                                                                                                              .L^{1}\left( \mu 
ight) \equiv L^{1}\left( \overline{\mu} 
ight) טענה: תהא \mu מידה אזי
משפט ההתכנסות הנשלטת/לבג: תהא |f_n| \leq L^1\left(\mu
ight) עבורה f \in L^1\left(\mu
ight) אזיי עבורה f \in L^1\left(\mu
ight) אזיי אייימת משפט ההתכנסות הנשלטת/לבג: תהא
                                                                                                                                                                  \int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu
                                        טענה: תהא |f_n|\leq g אזי f\in L^1\left(\mu
ight) אזי אזי אזי אזי פענה: תהא
                                                                                                                                                                  \int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu
                                                                                           הערה: מהגדרת האינטגרל ניתן להפוך את כל המגבלות לכמעט בכל מקום.
                                                                  ...מסקנה: תהא \sum f_n אזי אזי \sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty עבורה עבורה אזי \{f_n\}\subseteq L^1\left(\mu\right)
     \int_X \left(\sum_{n=1}^\infty f_n
ight)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n\mathrm{d}\mu וכן וכן \sum_n f_n \in L^1(\mu) אזי איז \sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty עבורה \{f_n\} \subseteq L^1(\mu) אזי
                                                                                    אזי f_{m} \xrightarrow{\mu-a.e.} f עבורן f \in L^{1}\left(\mu
ight) ותהא ותהא ותהא \left\{f_{n}
ight\} \subseteq L^{1}\left(\mu
ight) אזי
                                                                                                                       \left( \int_X |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0 \right) \Longleftrightarrow \left( \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu \to \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu \right) 
                                                                    (R)\int_a^b f\mathrm{d}x אינטגרבילית רימן אזי אינטגרל רימן אינטגרf:[a,b]	o\mathbb{R} אינטגרבילית אינטגרל אינטגרל פימון:
וכן g\in L^1(\lambda) מדידה עבורה g:[a,b]	o\mathbb{R} מיימת g:[a,b]	o\mathbb{R} אינטגרבילית רימן אזי קיימת f:[a,b]	o\mathbb{R} מידת לבג ותהא
                                                                                                                        .(R)\int_a^bf\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}g\mathrm{d}m_dהמקיימת המקיימת f=g
                                                        L^{p}\left(\mu
ight)=\left\{ f:X
ightarrow\mathbb{R}\mid\left(f\in L^{0}\left(X,\Sigma
ight)
ight) \wedge\left(\int_{X}\left|f
ight|^{p}\mathrm{d}\mu<\infty
ight)
ight\} אזי p\in\left[1,\infty
ight) יהי יהי עוני יהי
                                                                       L^{\infty}\left(\mu
ight)=\left\{ f:X
ightarrow\mathbb{R}\mid\left(f\in L^{0}\left(X,\Sigma
ight)
ight)\wedge\left(\exists c>0.\mu\left(\left\{\left|f
ight|\geq0
ight\}
ight)=0
ight)
ight\} סימון:
                                                                                                               \|f\|=\left(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu
ight)^{rac{1}{p}} כך \|\cdot\|_p:L^p\left(\mu
ight)	o\mathbb{R} הגדרה: נגדיר

ho_{\infty}\left(f,g
ight)=\inf\left\{c>0\mid\mu\left(\left\{|f|\geq c
ight\}
ight)=0
ight\} כך \left\|\cdot
ight\|_{\infty}:L^{\infty}\left(\mu
ight)
ightarrow\mathbb{R} הגדרה: נגדיר
טענה אי־שיוויון הולדר: יהיו g\in L^{1}(\mu) עבורם \frac{1}{p}+rac{1}{q}=1 תהא f\in L^{p}(\mu) ותהא g\in L^{q}(\mu) אזי g\in L^{q}(\mu) וכן
                                                                                                                                                                          \int_{X} |fg| \, \mathrm{d}\mu \le \|f\|_p \, \|g\|_q
g\in L^q(\mu) אזי \|g\|_q 
eq 0 עבורה g\in L^q(\mu) אזי \|f\|_p \neq 0 עבורה \|f\|_p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 כ.ב.מ.). (\int_X |fg| \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_p \, \|g\|_q) מטריקה מעל \|L^p(\mu)\|_p = 1
```

 $.f^{\pm} \in L^{1}(\mu) \bullet$ $.|f| \in L^{1}(\mu) \bullet$

 $|f| \leq g$ עבורה $g \in L^1(\mu)$ קיימת $\lambda \in \mathbb{R}$ ויהי $f,g \in L^1(\mu)$ אזי

 $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in L^{1}(\mu) \bullet$

 $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$ אזי איזי הניח כי פונוטוניות: נניח כי

 $\int_{E}f\mathrm{d}\mu=\int_{X}\mathbb{1}_{E}f\mathrm{d}\mu$ איי אינטגרל: תהא $f\in L^{1}\left(\mu
ight)$ אינטגרל: תהא

. (מדידות) Im (f), Re (f)) \Longleftrightarrow מדידה $f:X\to\mathbb{C}$ מדידות).

. הערה: נשתמש בסימון $L^{1}\left(\mu
ight)$ גם עבור פונקציות מרוכבות אינטגרביליות.

fאי מידה μ הינה $f\in L^0_+(X,\Sigma)$ איז מידה עם צפיפות f ביחס למידה μ הינה

 $\left|\int_X f \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X \left|f\right| \mathrm{d}\mu$ אי־שיוויון המשולש: •

 $.\Sigma$ אזי מעל f הינה מידה מעל $f \in L^0_+(X,\Sigma)$ הינה מידה מעל

 $\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X \left|f\right|\mathrm{d}\mu$ אזי $f\in L^1\left(\mu
ight)$ טענה: תהא

 $\int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu$ ובפרט ובפרט $\lambda f \in L^1\left(\mu
ight)$ הומוגניות: מתקיים

 $\int_{X}\left(f+g\right)\mathrm{d}\mu=\int_{X}f\mathrm{d}\mu+\int_{X}g\mathrm{d}\mu$ ובפרט ובפרט $f+g\in L^{1}\left(\mu\right)$ מתקיים •

 $.\psi\left(E
ight)=\int_{E}f\mathrm{d}\mu$ המוגדרת עם צפיפות ביחס למידה: תהא $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma
ight)$ אזי איי למידה: תהא

. מדידה בורל/מדידה: יהי $(\Sigma,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{2}
ight))$ $f:X o\mathbb{C}$ העתקה מדיד אזי מרחב מדיד היהי ויהי

 $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X \mathrm{Re}\left(f
ight) \mathrm{d}\mu + i \int_X \mathrm{Im}\left(f
ight) \mathrm{d}\mu$ אזי אי $\int_X \mathrm{Re}\left(f
ight) \mathrm{d}\mu, \int_X \mathrm{Im}\left(f
ight) \mathrm{d}\mu < \infty$ אינטגרל: תהא $f:X o \mathbb{C}$ מדידה עבורה

```
g_{\lceil f \neq 0 
ceil} = \|g\|_{\infty}כב.מ.). מסקנה: תהא f \in L^1(\mu) ותהא f \in L^1(\mu) אזי וg \in L^\infty(\mu) מסקנה: תהא
                                                             \int_X |fg|\,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_2\,\|g\|_2 אזי f,g\in L^2\left(\mu
ight) מסקנה אי־שיוויון קושי־שוורץ: תהיינה
          \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p וכן \|f+g \in L^p(\mu) אזי \|f,g \in L^p(\mu) ותהיינה \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p וכן מסקנה אי־שיוויון מינקובסקי: יהי
                              . \mu\left(\{x\in X\mid \varphi\geq t\}
ight)\leq rac{1}{t}\int_{X}arphiמענה אי־שיוויון צ'בישב: תהא arphi\in L^{0}_{+}\left(X,\Sigma
ight) אזי לכל t>0 אזי לכל
                                    .f_{n} \xrightarrow{L^{p}} f אזי \lim_{n 	o \infty} \|f_{n} - f\|_{p} = 0 עבורן f \in L^{p}\left(\mu\right) אזי \{f_{n}\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right) התכנסות :L^{p}
           \|f_n-f_m\|_n<arepsilon מתקיים n,m\geq N מתקיים N\in\mathbb{N} סדרת קושי במרחב \{f_n\}\subseteq L^p עבורה לכל
                                                                                               L^{p}\left(\mu
ight) בפופה במרחב אזי \mathcal{S}\left(\Sigma
ight) אזי p\in\left[1,\infty
ight) איזי יהי
                                                      .\|\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\|_{p}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|f_{n}\|_{p} אזי אוי חיוביות \{f_{n}\}\subseteq L^{p}\left(\mu\right) ותהא ותהא למה: יהי יהי
.\left(f_{n}\overset{L^{p}}{\longrightarrow}f
ight)\Longleftrightarrow\left(\left\Vert f_{n}\right\Vert _{p}
ightarrow\left\Vert f\right\Vert _{p}
ight) אזי f_{n}\overset{\mu-a.e.}{\longrightarrow}f עבורה f עבורה f עבורה f עבורה עבורה f עבורה אזי f\in L^{p}\left(\mu
ight) ותהא
                                                                                               משפט ריס־פיסצ'ר: יהי p\in [1,\infty] אזי מרחב שלם.
  f_{n_k} \xrightarrow{\mu-a.e.} f עבורה f_n \xrightarrow{L^p} f אזי קיימת תת"ס אזי קיימת f_n \xrightarrow{L^p} f ותהא ותהא f_n \xrightarrow{L^p} f עבורה ותהא ותהא ותהא f_n \xrightarrow{\mu-a.e.} f
טענה רציפות של אינטגרל: תהא \mu(E) < \delta אזי לכל \delta > 0 קיים \delta > 0 קיים \epsilon > 0 אזי לכל f \in L^1(\mu) מתקיים
מתקיים \mu\left(E
ight)<\delta המקיימת E\in\Sigma כך שלכל כך \delta>0 כך עבורה לכל \{f_n\}\subseteq L^1(\mu) המקיימת אינטגרבילית במידה שווה:
                                                                                                                                            \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{E}|f_{n}|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon
f\in L^1\left(\mu
ight) אינטגרביליות במ"ש\wedge(קיימת \{f_n\}))\Longleftrightarrow(f_n\stackrel{L^1}{\longrightarrow}f עבורה עבורה f\in L^1\left(\mu
ight) אינטגרביליות במ"ש\wedge(קיימת \{f_n\}\subseteq L^1\left(\mu
ight)
                                          \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\setminus E}|f_n|\,\mathrm{d}\mu<arepsilon וכן \mu\left(E
ight)<\infty עבורה E\in\Sigma קיימת arepsilon>0 קיימת לכל לכל
                                                      מסקנה: יהי f = f תהא f = f ותהא f \in L^p(\mu) ותהא f \in L^p(\mu) עבורה f \in f התב"ש
                                                                                                                                                      f_n \xrightarrow{L^p} f \bullet
               \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\setminus E}\left|f_{n}\right|^{p}\mathrm{d}\mu<arepsilonוכן \mu\left(E
ight)<\infty אינטגרביליות במ"ש וכן לכל arepsilon>0 קיימת arepsilon>0 עבורה אינטגרביליות במ"ש וכן לכל
                                                                                                                                      .\|f_n\|_p \to \|f\|_p < \infty \bullet
                                                                        X \in \mathcal{E} עבורו \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}\left(X\right) אלגברה למחצה: תהא X קבוצה אזי חוג למחצה
                                                   X 	imes Y מרחבים למחצה למחצה אזי \Sigma_X 	imes \Sigma_Y אלגברה מדידים מדידים מדידים מדידים למתב יהיו
                                               .\Sigma_X\otimes\Sigma_Y=\sigma\left(\Sigma_X	imes\Sigma_Y
ight) איז מדידים מדידים (X,\Sigma_X)\,,(Y,\Sigma_Y) הייו \sigma
                                                               (X 	imes Y, \Sigma_X \otimes \Sigma_Y) אזי מרחב מכפלה: יהיו (X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y) מרחב מכפלה: יהיו
למה: תהא A\subseteq \Sigma עבורה \sigma(B)=\Sigma_Y וכן קיימת A_n\uparrow X עבורה עבורה \{A_n\}\subseteq A וכן קיימת \sigma(A)=\Sigma_X עבורה אבורה למה:
                                                                                               \sigma(A \times B) = \Sigma_X \otimes \Sigma_Y אזי B_n \uparrow X עבורה \{B_n\} \subseteq B
\sigma\left(A	imes B
ight)=\Sigma_X\otimes\Sigma_Y אזי Y\in B וכן \sigma\left(B
ight)=\Sigma_Y אחות אותהא אונה. A\subseteq\Sigma אחור אוכן A\subseteq\Sigma איזי אונה. A\subseteq\Sigma אבורה מסקנה: תהא
                                                                                                                                אזי אזי תהיינה X,Y קבוצות אזי
                                                                                                        .\pi_X(x,y)=x כך \pi_X:X\times Y\to X נגדיר •
                                                                                                        .\pi_{Y}\left(x,y\right)=y כך כך \pi_{Y}:X\times Y\to X נגדיר
\sigma\left(T
ight)=\sigma\left(\left\{T^{-1}\left[A
ight]\mid A\in\Sigma_{Y}
ight\}
ight) העתקה מדידה אזי T:(X,\Sigma_{X})	o(Y,\Sigma_{Y}) האלגברה נוצרת על ידי העתקה מדידה: תהא
                                                                  .\Sigma_X\otimes\Sigma_Y=\sigma\left(\pi_X,\pi_Y
ight) איי משפט: משפט: מרחבים מרחבים \left(X,\Sigma_X
ight),\left(Y,\Sigma_Y
ight) משפט: יהיו
                                                                      .(ענה: תהא T:Z \to X \times Y מדידות) טענה: תהא T:Z \to X \times Y מדידות).
      סענה: תהא T(x,\cdot):Y	o Z היא מדידה העתקה מדידה ויהי T:(X	imes Y,\Sigma_X\otimes \Sigma_Y)	o T היא T:(X	imes Y,\Sigma_X\otimes \Sigma_Y) היא
    מסקנה: תהא T:(X 	imes Y, \Sigma_Z) היא העתקה מדידה ווהי Y 	o Y: (X 	imes Y, \Sigma_X \otimes \Sigma_Y) 	o (Z, \Sigma_Z) מסקנה: תהא
B\subseteq \Sigma משפט: תהא A\subseteq \Sigma וכן A_n\uparrow X וכן קיימת אבורה A_n\uparrow X וותהא \sigma(A)=\Sigma_X ותהא עבורה A\subseteq \Sigma
מידה 
ho מידה אזי קיימת \mu_Y(B_n)<\infty וכן B_n\uparrow X עבורה אוי קיימת \{B_n\}\subseteq B מערכת \sigma(B)=\Sigma_Y מערכת \pi
                                                        .F\in Bוכן E\in A לכל 
ho\left(E	imes F\right)=\mu_{X}\left(E\right)\mu_{Y}\left(F\right) המקיימת \left(X	imes Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}\right)

ho מידה 
ho מידה 
ho מידת 
ho מידת משפט: יהיו
                                                                                                                                                              אלמנטרית.
מידת המכפלה: יהיו \mu_X,\mu_Y מידות \sigma־סופיות ותהא [0,\infty] \times \Sigma_X \times \Sigma_Y \to [0,\infty] אזי המשכת מידת מידות \mu_X,\mu_Y מידות מידות מידת מידות מידות מידת המטפלה: יהיו
```

 ρ קרתאודורי של

 $\mu_X imes \mu_Y$ מידות מידת מידת מידת מידת מידות מידות מידות μ_X, μ_Y יהיו

אזי $E \subseteq X imes Y$ אזי

- $.E_x = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\}$ יהי $x \in X$ יהי •
- $.E_y = \{x \in X \mid (x,y) \in E\}$ יהי $y \in Y$ יהי •

 $f_{y}\left(x
ight)=f\left(x,y
ight)$ וכן $f_{x}\left(y
ight)=f\left(x,y
ight)$ אזי $f:X imes Y
ightarrow\overline{\mathbb{R}}$ וכן

אזי $E\in \Sigma_X\otimes \Sigma_Y$ אזי מידה σ ־סופיים מידה ((X,Σ_X,μ_X) , (Y,Σ_Y,μ_Y) אזי למה: יהיו

- $E_x \in \Sigma_Y$ מתקיים $x \in X$ לכל
- $.E_y \in \Sigma_X$ מתקיים $y \in Y$ לכל •
- . היא Σ_X היא Σ_X היא הפונקציה $f(x)=\mu_Y(E_x)$ המוגדרת $f:X o \overline{\mathbb{R}}$ היא
- . מדידה Σ_Y היא $f\left(y
 ight)=\mu_X\left(E_u
 ight)$ המוגדרת $f:Y o\overline{\mathbb{R}}$ היא

 $\int f\left(x,y
ight)\mathrm{d}\mu\left(x
ight)$ ברור מהו המשתנה באינטגרל מסמנים כך

אזי $E\in \Sigma_X\otimes \Sigma_Y$ אזי מידה σ ־סופיים מידה (X,Σ_X,μ_X), (Y,Σ_Y,μ_Y) אזי טענה: יהיו

 $(\mu_X \times \mu_Y)(E) = \int_X \mu_Y(E_x) \, \mathrm{d}\mu_X = \int_Y \mu_X(E_y) \, \mathrm{d}\mu_Y$

 $(\mu_X imes \mu_Y) imes \mu_Z = \mu_X imes (\mu_Y imes \mu_Z)$ וכן וכן $\mu_X imes \mu_Y = \mu_Y imes \mu_X$ מסקנה: תהיינה μ_X, μ_Y, μ_Z מידות σ ־סופיים אזי

 $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}
ight)=igotimes_{i=1}^{d}\mathcal{B}\left(\mathbb{R}
ight)$ טענה:

 $.\int_{\mathbb{R}^d}|f-\sum_{i=1}^nc_i\mathbb{1}_{A_i}|\,\mathrm{d}m_d<arepsilon$ עבורן A_i תיבות A_i אזי קיימות $f\in L^1\left(m_d
ight)$ ויהי $f\in L^1\left(m_d
ight)$ עבורה $g_{\restriction_{\mathbb{R}^d\setminus A}}=0$ אזי קיימת G עבורה חסומה וכן $g\in C\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}
ight)$ ויהי $g\in C\left(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d\right)$ אזי קיימת G אזי קיימת G אזי קיימת G עבורה G עבורה G עבורה G עבורה G אזי קיימת G אזי קיימת G אזי קיימת G עבורה G עבור G עבורה G עבורה G עבורה G עבורה G עבור G עב

מדידה אזי $f:X imes Y o [0,\infty]$ פונקציה מידה מרחבי מרחבי מרחבי מרחבי מרחבי פונקציה $(X,\Sigma_X,\mu_X)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)$ משפט טונלי: יהיו

- . היא Σ_{Y} היא הפונקציה $f_{x}\left(y\right)$ הפונקציה $x\in X$
- . מדידה Σ_X היא $f_y\left(x
 ight)$ הפונקציה $y\in Y$
- . מדידה Σ_X היא $arphi\left(x
 ight)=\int_Y f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_Y\left(y
 ight)$ המוגדרת $arphi:X o\overline{\mathbb{R}}$ הפונקציה •
- הפונקציה $arphi\left(y
 ight)=\int_{X}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)$ המוגדרת $arphi:Y o\overline{\mathbb{R}}$ היא
- $\int_{X imes Y}f\mathrm{d}\left(\mu_{X} imes\mu_{Y}
 ight)=\int_{X}\int_{Y}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)=\int_{Y}\int_{X}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)$ מתקיים

מסקנה משפט פוביני: יהיו $f:X imes Y o \overline{\mathbb{R}}$ מרחבי מידה σ ־סופיים ותהא מרחבי מידה $(X,\Sigma_X,\mu_X)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)$ פונקציה $(X,\Sigma_X,\mu_X)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,$ מסקנה משפט פוביני: יהיו $(X,\Sigma_X,\mu_X)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_X)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,,(Y,\Sigma_Y,\mu_Y)\,$

- $\int_{Y}\int_{X}\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right),\int_{X}\int_{Y}\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right),\int_{X\times Y}\left|f\right|\mathrm{d}\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)<\infty\text{ }\bullet\text{ }$
 - $f \in L^1(\mu_X \times \mu_Y) \bullet$
 - $L^{1}\left(\mu_{X}\right)$ היא H_{Y} ־כ.ב.מ. שייכת ל־ $f_{y}\left(x
 ight)$
 - $L^{1}\left(\mu_{Y}
 ight)$ היא $f_{x}\left(y
 ight)$ כ.ב.מ. שייכת ל־ $f_{x}\left(y
 ight)$
 - $.arphi\in L^{1}\left(\mu_{X}
 ight)$ מקיימת $arphi\left(x
 ight)=\int_{Y}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)$ המוגדרת $arphi:X
 ightarrow\overline{\mathbb{R}}$
 - $.arphi\in L^{1}\left(\mu_{Y}
 ight)$ מקיימת $arphi\left(y
 ight)=\int_{X}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)$ המוגדרת $arphi:Y
 ightarrow\overline{\mathbb{R}}$ הפונקציה $oldsymbol{arphi}$
- $\int_{X imes Y}f\mathrm{d}\left(\mu_{X} imes\mu_{Y}
 ight)=\int_{X}\int_{Y}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)=\int_{Y}\int_{X}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)$ מתקיים

טענה: יהיו $(X \times Y, \Sigma, \rho)$ האלמים שלמים מידה מידה מידה (X, Σ_X, μ_X), (Y, Σ_Y, μ_Y) יהיו טענה: יהיו

חיובית אזי $f\in L^0\left(X\times Y,\Sigma\right)$ ותהא ותהא $\left(X\times Y,\Sigma_X\otimes\Sigma_Y,\mu_X\times\mu_Y\right)$

- $.(\Sigma_{X},\mathbb{R})$ היא $f_{y}(x)$ היא $f_{y}(x)$
- (Σ_Y,\mathbb{R}) היא $f_x(y)$ היא $f_x(y)$
- . היא מדידה $arphi\left(x
 ight)=\int_{Y}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)$ המוגדרת $arphi:X o\overline{\mathbb{R}}$ היא מדידה •
- . היא מדידה $arphi\left(y
 ight)=\int_{X}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)$ המוגדרת $arphi:Y
 ightarrow\overline{\mathbb{R}}$ היא מדידה.
- $\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)=\int_{X}\int_{Y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)=\int_{Y}\int_{X}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)$ מתקיים \bullet

טענה: יהיו $(X\times Y,\Sigma,\rho)$ מרחבי מידה שלמים מרחבי מרחבי מרחבי מרחבי ($X,\Sigma_X,\mu_X)$, (Y,Σ_Y,μ_Y) שענה: יהיו $(X\times Y,\Sigma_X\otimes\Sigma_Y,\mu_X\times\mu_Y)$ ותהא $f\in L^1$ (ρ) ותהא

- $L^{1}\left(\mu_{X}
 ight)$ היא $f_{y}\left(x
 ight)$ -כ.ב.מ. שייכת ל־ $f_{y}\left(x
 ight)$
- $L^{1}\left(\mu_{Y}\right)$ ־כ.ב.מ. שייכת ל־ $f_{x}\left(y\right)$
- $.arphi\in L^{1}\left(\mu_{X}
 ight)$ מקיימת $arphi\left(x
 ight)=\int_{Y}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)$ המוגדרת $arphi:X
 ightarrow\overline{\mathbb{R}}$

- $.arphi\in L^{1}\left(\mu_{Y}
 ight)$ מקיימת $arphi\left(y
 ight)=\int_{X}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)$ הפונקציה $arphi:Y o\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $.\int_{X imes Y}f\mathrm{d}\left(\mu_{X} imes\mu_{Y}
 ight)=\int_{X}\int_{Y}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)=\int_{Y}\int_{X}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)$ מתקיים $.\int_{X imes Y}f\mathrm{d}\left(\mu_{X} imes\mu_{Y}
 ight)=\int_{X}\int_{Y}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)=\int_{Y}\int_{X}f\left(x,y
 ight)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x
 ight)$