

סדרה ממשית: $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

סימון: $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$, $a_n = a(n)$

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה

• עולה ממש: $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \implies a_n < a_m$

• עולה: $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \implies a_n \leq a_m$

• יורדת ממש: $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \implies a_n > a_m$

• יורדת: $\forall n, m \in \mathbb{N}. n < m \implies a_n \geq a_m$

סדרה חסומה: $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. |a_n| < M$

סדרה חסומה מלמעלה/מלעיל: $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. a_n < M$

סדרה חסומה מלמטה/מלרע: $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. a_n > M$

גבול: $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \right) \equiv (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. |a_n - L| < \varepsilon)$

סימון: $\left(a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L \right) \equiv \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \right)$

יחידות הגבול: $(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2) \implies L_1 = L_2$

טענה: $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$

אריתמטיקה של גבולות: נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = L_1 + L_2$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = L_1 \cdot L_2$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

כלל הסנדוויץ': $(\forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq b_n \leq c_n) \wedge (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L)$

גבול במובן הרחב: תהא a סדרה ממשית

• $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \right) \equiv (\forall m \in \mathbb{R}. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n > m)$

• $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \right) \equiv (\forall m \in \mathbb{R}. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n < m)$

אריתמטיקה של גבולות במובן הרחב: נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L_2$

• $(L_1 = \infty \wedge L_2 \in \mathbb{R}) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty)$

• $(L_1 = -\infty \wedge L_2 \in \mathbb{R}) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = -\infty)$

• $(L_1 = \infty \wedge (L_2 > 0 \vee L_2 = \infty)) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \infty)$

• $(L_1 = \infty \wedge (L_2 < 0 \vee L_2 = -\infty)) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = -\infty)$

כלל הסנדוויץ' במובן הרחב: יהיו a, b סדרות המקיימות $\forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq b_n$

• $\left(a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \right) \implies \left(b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \right)$

• $\left(b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \right) \implies \left(a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \right)$

הערה: תהא a סדרה אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ מתכנסת a מתבדרת

משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה מונוטונית וחסומה אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

מסקנה: יהי $q \in (0, 1)$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \inf \{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

סדרה גאומטרית: סדרה a המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $\exists q \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}$

טענה: תהא a סדרה גאומטרית אזי $a_n = a_0 \cdot q^n$

אי שוויון ברנולי: $\forall n \in \mathbb{N}. \forall x \in (-1, \infty). (1+x)^n \geq 1+nx$

מסקנה: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & q \in (0, 1) \\ \infty & q \in (1, \infty) \end{cases}$

מבחן המנה: תהא a סדרה המקיימת $\forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \\ \infty & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \end{cases}$

מבחן השורש: תהא a סדרה אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \\ \infty & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \end{cases}$

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{R}[x]$

$$\deg(p) < \deg(q) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0$$

$$\deg(p) = \deg(q) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{p}{q} \text{ המקדם המוביל של } p \text{ המקדם המוביל של } q$$

סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרה אזי $\lambda n \in \mathbb{N} \cdot \sum_{k=0}^n a_k$

$$\lambda n \in \mathbb{N} \cdot \begin{cases} b_0 & n = 0 \\ b_n - b_{n-1} & \text{else} \end{cases} \text{ סדרת ההפרשים: תהא } a \text{ סדרה אזי}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \text{ טור:}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ מתכנס} & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R} \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ מתבדר} & \text{else} \end{cases} \text{ הערה: תהא } a \text{ סדרה אזי}$$

$$\forall q \in \mathbb{R} \cdot \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ סכום סדרה הנדסית:}$$

$$\forall q \in (-1, 1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \text{ טענה:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ מתכנס}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ הטור ההרמוני:}$$

משפט: הטור ההרמוני מתבדר.

טענה: יהיו a, b סדרות המקיימות $(\forall n \in \mathbb{N} \cdot 0 \leq a_n \leq b_n) \wedge (\exists N \in \mathbb{N} \cdot \forall n \geq N \cdot a_n \leq b_n)$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty) \implies (\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty)$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty) \implies (\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ מתכנס. משפט:}$$

אריתמטיקה של טורים: יהיו a, b סדרות

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

סביבה מנוקבת: יהי $\delta > 0$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $I_x = (x - \delta, x + \delta) \setminus \{x\}$

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L) \equiv (\forall \varepsilon > 0 \cdot \exists \delta > 0 \cdot \forall x \in I_{x_0} \cdot |f(x) - L| < \varepsilon) \text{ גבול נקודתי:}$$

$$(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L) \equiv (\forall \varepsilon > 0 \cdot \exists \delta > 0 \cdot \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cdot |f(x) - L| < \varepsilon) \text{ גבול חד צדדי שמאלי:}$$

$$(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L) \equiv (\forall \varepsilon > 0 \cdot \exists \delta > 0 \cdot \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cdot |f(x) - L| < \varepsilon) \text{ גבול חד צדדי ימני:}$$

$$(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)) \implies (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L) \text{ טענה:}$$

$$(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L) \equiv (\forall \varepsilon > 0 \cdot \exists M \in \mathbb{R} \cdot \forall x \geq M \cdot |f(x) - L| < \varepsilon) \text{ גבול:}$$

גבול במובן הרחב:

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty) \equiv (\forall m \in \mathbb{R} \cdot \exists \delta > 0 \cdot \forall x \in I_{x_0} \cdot f(x) > m)$$

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty) \equiv (\forall m \in \mathbb{R} \cdot \exists \delta > 0 \cdot \forall x \in I_{x_0} \cdot f(x) < m)$$

$$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L) \iff (\forall y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = L)) \text{ קריטריון היינה:}$$

אריתמטיקה של גבולות: נניח כי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$(L_1 = \infty \wedge L_2 \in (-\infty, \infty)) \implies (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = \infty)$$

$$(L_1 = -\infty \wedge L_2 \in (-\infty, \infty)) \implies (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = -\infty)$$

$$(L_1 = \infty \wedge L_2 \in (0, \infty)) \implies (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty)$$

$$(L_1 = -\infty \wedge L_2 \in (0, \infty)) \implies (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty)$$

$$(L_1 = \infty \wedge L_2 \in (-\infty, 0)) \implies (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty)$$

$$(L_1 = -\infty \wedge L_2 \in (-\infty, 0)) \implies (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty)$$

$$(\forall x \in I_{x_0} \cdot h(x) \leq f(x) \leq g(x)) \wedge (\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) \implies (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L) \text{ כלל הסנדוויץ':}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \cdot |\sin(x)| \leq |x| \text{ משפט:}$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)) \wedge (\lim_{x \rightarrow x_0} \cos(x) = \cos(x_0)) \text{ משפט:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ פונקציה רציפה נקודתית: פונקציה } f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ המקיימת}$$

פונקציה רציפה: פונקציה $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $\forall x_0 \in I. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

משפט: סכום, כפל והרכבה של פונקציות רציפות היא פונקציה רציפה.

מסקנה: לכל $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ מתקיים כי f רציפה.

משפט: הפונקציות הטריגונומטריות והפונקציה המעריכית הינן רציפות.

אי רציפות: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

• אי רציפות סליקה: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

• אי רציפות מסוג שני: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

• אי רציפות מסוג שלישי: $(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)) \vee$ לא קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ לא קיים.

משפט: אם f פונקציה מונוטונית אז היא יכולה להיות רק אי רציפה מסוג שני.

משפט ערך הביניים: תהא $I \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה

• ניסוח ראשון: נניח כי $[a, b] \subseteq I$ כך ש- $f(a) < f(b)$ אזי $\exists c \in (a, b). f(c) = t$ $\forall t \in (f(a), f(b))$.

• ניסוח שני: נניח כי $[a, b] \subseteq I$ אזי $f[[a, b]]$ אינטרוול.

מסקנה: פונקציה רציפה וחס"ע היא מונוטונית עולה/יורדת ממש.

מסקנה: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חס"ע ורציפה אז $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow I$ רציפה.

מסקנה: הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות, הפונקציה המעריכית והפונקציה $x^{\frac{1}{k}}$ הינן רציפות.

פונקציית מיקום: יהי חלקיק אזי $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

העתק: יהי חלקיק אזי $x(t)$

משוואת המהירות הבסיסית: זמן · מהירות = דרך.

פונקציה גזירה נקודתית: פונקציה $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת כי $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ קיים.

נגזרת: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

הגדרה: $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(0)} = f$

סימון הנקודה של ניוטון: $\ddot{x} = x''$, $\dot{x} = x'$

סימון לייבניץ: $\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}$

נוסחת ניוטון: $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$

מהירות: $\dot{x} = v$

סימון: "פונקציות רציפות ב- I " $C^0(I)$, "פונקציות גזירות n פעמים ב- I " $C^n(I)$

טענה: $\forall n \in \mathbb{N}. C^{n+1}(I) \subseteq C^n(I)$

פונקציית סימן: $\text{sign}(x) = \text{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$

טענה: $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign}(x)$ לא מוגדר.

פונקציית דריכלה: $D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

טענה: $D(x)$ לא גזירה באף נקודה.

אריתמטיקה של נגזרות: יהיו $f, g \in C^1(I)$

• $(x^c)' = cx^{c-1}$

• $(c \cdot f)' = c \cdot f'$

• $(g + f)' = g' + f'$

• $(g \cdot f)' = g' \cdot f + f' \cdot g$

• $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$

• $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$

טענה: $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sin'(x) = \cos(x)$

טענה: $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$

טענה: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

משפט: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ קיים וסופי.

קבוע אויילר: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71$

מסקנה: $\forall x \in \mathbb{R}. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

משפט: $(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty) \implies \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = e \right)$

לוגריתם טבעי: $\ln = \log_e$

טענה: $\log_a(x)' = \frac{1}{x \ln(a)}$

טענה: $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

מסקנה: $(e^x)' = e^x, (a^x)' = a^x \ln(a)$

משפט: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ חח"ע וגזירה אזי $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow I$ גזירה ומקיימת $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

טענה: $\forall x \in \mathbb{R}. 1 + x \leq e^x$

פונקציות היפרבוליות: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

טענה: $\cosh' = \sinh, \sinh' = \cosh$

טענה: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$ נקודת גזירות ב- f

• $(f'(x_0) > 0) \iff$ (קיימת סביבה של x_0 כך ש- f עולה).

• $(f'(x_0) < 0) \iff$ (קיימת סביבה של x_0 כך ש- f יורדת).

מינימום מקומי/לוקאלי: $\exists \varepsilon > 0. \forall x \in I_{x_0}. f(x_0) \leq f(x)$ שמקיים $x_0 \in \text{Dom}(f)$

מינימום גלובלי: $\forall x \in \text{Dom}(f). f(x_0) \leq f(x)$ שמקיים $x_0 \in \text{Dom}(f)$

מקסימום מקומי/לוקאלי: $\exists \varepsilon > 0. \forall x \in I_{x_0}. f(x) \leq f(x_0)$ שמקיים $x_0 \in \text{Dom}(f)$

מקסימום גלובלי: $\forall x \in \text{Dom}(f). f(x) \leq f(x_0)$ שמקיים $x_0 \in \text{Dom}(f)$

נקודת קיצון: (מינימום מקומי) \vee (מקסימום מקומי).

משפט: אם x נקודת קיצון של f אז $f'(x) = 0$

משפט רול: תהא f גזירה ב- $[a, b]$ ונניח כי $f(a) = f(b)$ אזי $f'(c) = 0$ $\exists c \in [a, b]$

משפט לגראנז': תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה אזי $f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$ $\exists c \in (a, b)$

מסקנה: תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה אזי $|f(a) - f(b)| \leq |a - b| \cdot \sup_{c \in (a, b)} |f'(c)|$

עקום בזייה: יהיו $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^m$ נקודות אזי $B(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i P_i$

פונקציה קעורה בקטע: $\forall x, y \in I. \forall t \in [0, 1]. (1-t)f(x) + tf(y) \leq f((1-t)x + ty)$

פונקציה קמורה בקטע: $\forall x, y \in I. \forall t \in [0, 1]. (1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty)$

טענה: תהא $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$ נקודת גזירות ב- f

• $(f''(x_0) > 0) \iff$ (קיימת סביבה של x_0 כך ש- f קעורה).

• $(f''(x_0) < 0) \iff$ (קיימת סביבה של x_0 כך ש- f קמורה).

נקודת פיתול: נקודת קיצון של f'

משפט: אם x נקודת פיתול של f אז $f''(x) = 0$

תאוצה: $a = \dot{v} = \ddot{x}$

משוואת ניוטון: $F = ma$

אסימפטוטה משופעת חיובית: תהא פונקציה f אזי $mx + n$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - (mx + n) = 0$

אסימפטוטה משופעת שלילית: תהא פונקציה f אזי $mx + n$ המקיימת $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (mx + n) = 0$

אסימפטוטה אנכית: תהא פונקציה f אזי $x = x_0$ המקיימת $(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty) \vee (\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty)$

הערה: אם קיימת אסימפטוטה משופעת אזי $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx), m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

פונקציה סתומה: תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ תהא $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $c \in \mathbb{R}$ אזי $g(x, f(x)) = c$

גזירה סתומה: $\frac{d}{dx} g(x, f(x)) = 0$

כלל לופיטל: יהי $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ונניח כי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \{0, \pm\infty\}$ אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

הגדרה: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $o(f) = \left\{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \right\}$

פונקציית שגיאה: יהיו f, g פונקציות אזי $E = f - g$

טענה: $\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}. f = g + E$

קירוב מסדר n : תהא f פונקציה אזי $p \in \mathbb{R}_n[x]$ המקיימת $(E \in o((x - x_0)^n)) \wedge (E(x_0) = 0)$

משפט: f גזירה n פעמים ב- x_0 \iff (קיים קירוב מסדר n ל- f ב- x_0)

משווק לגרף: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

משפט: $f - g \in o((x - x_0)^n) \iff \forall k \in [n] \cup \{0\}. f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$
טור טיילור/פולינום מקלורן: $p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
משפט: p_n הוא הפולינום היחיד בקירוב מסדר n .

הגדרה: $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$
הערכת השגיאה על פי לגראנז': $\exists c \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0)). R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

מסקנה: $|R_n(x)| \leq \max_{c' \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0))} \left(\frac{|f^{(n+1)}(c')|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \right)$
מסקנה: $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
שיטת ניוטון רפסון: תהא $a_0 \in \mathbb{R}$ נגדיר $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$

טענה: בעבור פונקציה f ותנאי התחלה מספיק קיימת האפשרות שיתקיים $f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = 0$
פונקציה קדומה: תהא f פונקציה אזי פונקציה F המקיימת $F' = f$

טענה: יהי F_1, F_2 פונקציות קדומות של f אזי $F_1 = F_2 + c$ $\exists c \in \mathbb{R}$.

אינטגרל לא מסוים: תהא f פונקציה אזי קבוצת הפונקציות הקדומות של f .

סימון: האינטגרל הלא מסוים של f הוא $\int f(x) dx$

אריתמטיקה של אינטגרלים: יהיו $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bullet \int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + c$$

$$\bullet \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\bullet \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

$$\bullet \int (g(x) + f(x)) dx = \int g(x) dx + \int f(x) dx$$

$$\bullet \int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx + c$$

$$\bullet g(f(x)) = \int f'(x) \cdot g'(f(x)) dx$$

סכום דרבו תחתון: תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $D_n^- = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \min \left\{ f(x) \mid x \in \left[\frac{(n-i+1)a + (i-1)b}{n}, \frac{(n-i)a + ib}{n} \right] \right\}$

סכום דרבו עליון: תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $D_n^+ = \sum_{i=1}^n \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \max \left\{ f(x) \mid x \in \left[\frac{(n-i+1)a + (i-1)b}{n}, \frac{(n-i)a + ib}{n} \right] \right\}$

אינטגרל מסוים: תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ונניח כי $D_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^-$ אזי $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^-$

הערה: אריתמטיקת האינטגרל המסוים זהה לאריתמטיקת האינטגרל הלא מסוים.

טענה: $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

טענה: $(\forall x \in [a, b]. f(x) \leq g(x)) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

פונקציה צוברת שטח: תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

המשפט היסודי של החזו"א: תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ נניח כי F פונקציה צוברת שטח

$\bullet F$ רציפה.

$\bullet (F'(x_0) = f(x_0)) \iff (x \text{ רציפה ב-} x_0)$

מסקנה: תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אזי הפונקציה הצוברת שטח שלה היא פונקציה קדומה ל- f .

הצבה: $f(x)|_a^b = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ופונקציה קדומה F אזי $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

אורך עקומה: תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

נפח גוף סיבוב סביב ציר x : תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\pi \int_a^b f^2(x) dx$

נפח גוף סיבוב סביב ציר y : תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$