```
uגרף מכוון קשיר: גרף מכוון G עבורו לכל u,v \in V לכל u,v \in V איים מסלול מu
                                                               uים מסלול מ־u ל־u מכוון קשיר חזק: גרף מכוון u עבורו לכל
                                                                                                            אזי s\in V\left(G
ight) אזי ויהי :BFS אלגוריתם
function BFS (G, s):
     d \in V(G) \to \mathbb{N}; \quad \pi \in V(G) \to V(G) \cup \{\text{Null}\}; \quad \text{color} \in V(G) \to \{\text{Black}, \text{White}, \text{Grey}\}
     for u \in V(G) \setminus \{s\} do
      [u] (d, \pi, \text{color}) [u] \leftarrow (\infty, \text{Null}, \text{White})
     (d, \pi, \operatorname{color})[s] \leftarrow (0, \operatorname{Null}, \operatorname{Grey})
     Q \in \text{Queue}(V(G))
     while \neg (Q.\text{IsEmptv}) do
          u \leftarrow Q.Head
          for v \in N(u) do
               if color[v] = White then
                     \operatorname{color}\left[v\right] \leftarrow \operatorname{Grey}
                     d[v] \leftarrow d[u] + 1
                     \pi[v] \leftarrow u
                     Q.Enqueue (v)
          end
          Q. Dequeue
          \operatorname{color}\left[u\right] \leftarrow \operatorname{Black}
     end
```

return (d, π, color)

 $\mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight)$ הינה $\mathrm{BFS}\left(G,s
ight)$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $s\in V\left(G
ight)$ הינה הינה יהי

 $\{v \in V \mid \mathrm{BFS}\,(G,s)\,.\mathrm{color}\,[v] = \mathrm{Black}\} = [s]$ איזי $s \in V$ איזי גרף ויהי G גרף יהי

 $\delta(v,u) = \min(\{ \ln(\sigma) \mid v,u \mid v \in \sigma \})$ אזי $u,v \in V$ אזי ההי G גרף ויהיו שימון: יהי

 $\delta\left(v,u
ight) \leq \delta\left(v,w
ight) + 1$ אזי אזי $\left(w,u
ight) \in E$ באשר באשר $v,u,w \in V$ אזי היי היי G גרף ויהיו

 $S.d\left[v
ight] \geq \delta\left(v
ight)$ מתקיים מהני אזי בכל מצב S בהרצת $S.d\left[v
ight] = \delta\left(v
ight)$ אזי בכל מצב אזי ברצת ויהיו

 $S.d\left[v_i
ight] \leq S.d\left[v_{i+1}
ight]$ אזי מתקיים $S.Q=(v_1\dots v_n)$ באשר מצב בהרצת $S.d\left[v_i
ight] \leq S.d\left[v_{i+1}
ight]$ אזי מתקיים $S.d\left[v_i
ight] \leq S.d\left[v_i
ight] + 1$ לכל $S.d\left[v_i
ight] \leq S.d\left[v_i
ight] + 1$ וכן $S.d\left[v_i
ight] \leq S.d\left[v_i
ight]$

. BFS (G,s) .d $[v] = \delta$ (v,s) אזי $s,v \in V$ ויהיו רף גרף יהי יהי מרחקים: יהי

 $E_{\pi} = \{(\pi\left[v
ight], v) \mid v \in V_{\pi} \setminus \{s\}\}$ וכן $V_{\pi} = \{v \in V \mid \mathrm{BFS}\left(G, s\right). \pi\left[v
ight] \neq \mathrm{Null}\} \cup \{s\}$ נגדיר $s \in V$ והי $S \in V$ יהי הי $S \in V$ יהי הי $S \in V$ אזי $S \in V$ אזי $S \in V$ וכן אזי $S \in V$ וכן איזי $S \in V$

טענה: יהי $S \in V$ אזי גרף איר $s \in V$

- $\deg_{G_{\pi}}^{-}(s)=0$ מתקיים
- $\deg_{G_{\pi}}^{-}\left(v
 ight)=1$ מתקיים $v\in V\left(G_{\pi}
 ight)$ •
- s,v בין ב־ G_{π} בין מסלול בי $v\in V\left(G_{\pi}
 ight)$
 - .הינו עץ G_{π}
- s,v בין ביותר בין המסלול הקצר ביותר בין s,v בין בין מסלול ב־ σ ויהי $v\in V\left(G_{\pi}\right)$ יהי יהי

מסלול אוילר: מסלול העובר על כל הקשתות בגרף.

מעגל אוילר: מסלול אוילר שהינו מעגל.

 $(\deg(v) \in \mathbb{N}_{\mathrm{even}}$ מתקיים מנון אזי (ש מעגל אוילר בG'לכל אוילר איז גרף איר ולא מכוון אזי (ש מעגל אוילר ב

```
אזי \deg\left(u
ight)\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}} מתקיים מעגל אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל אוילר: יהי אלגוריתם למציאת אוילר: יהי
function EulerCircle(G, v):
    \sigma \in \text{List}(E(G))
     u \leftarrow N(v)
     while u \neq v do
         \sigma.Append(\{v, u\})
         G \leftarrow G - \{\{v, u\}\}
         u \leftarrow N(u)
     end
    if len(\sigma) = |E(G)| then return \sigma
         w \leftarrow \{x \in V(G) \mid (\exists y \in V(G).(x,y) \in \sigma) \land (\deg(x) > 0)\}
         \sigma[w] \leftarrow \texttt{EulerCircle}(G, w)
טענה: ויהי עבורו איי סיבוכיות איי מון הריצה של מתקיים איי מת וויהי עבורו לכל עבורו לכל u \in V איי סיבוכיות מת הריצה של ענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל
                                                                                                                    \mathcal{O}(|E|) הינה EulerCircle (G, v)
באשר EulerCircle (G,v) איז היי \log (u) \in \mathbb{N}_{\mathrm{even}} מתקיים של לכל u \in V באון עבורו לכל G יהי G יהי
                                                                                                                          |N(S.u)| \neq \emptyset אזי S.u \neq v
             . הינו מעגל אוילר. Euler Circle (G) אזי \deg(v) \in \mathbb{N}_{\mathrm{even}} מתקיים v \in V מתקיים שברו ולא מכוון עבורו לכל
             |\{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}\}| = 2\}טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מסלול אוילר שאינו מעגל ב־
                        אזי\{v\in V\left(G
ight)\mid \deg\left(v
ight)\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}\}|=2 אלגוריתם למציאת מסלול אוילר: יהיG גרף קשיר ולא מכוון באשר
function EulerPath(G):
    v \leftarrow \{t \in V\left(G\right) \mid \deg\left(t\right) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}; \qquad u \leftarrow \{t \in V\left(G\right) \mid \deg\left(t\right) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\} \setminus \{v\}
    G \leftarrow G + \{\{v,u\}\}
    \sigma \leftarrow \text{EulerCircle}(G, v)
    return \sigma \setminus \{v, u\}
                                                      .(לא קיים ב־G מעגל באורך אי־זוגיי) (דו־צדדיG איר מכוון אזי מכוון אזי G יהי G גרף אי
                                                                               אלגוריתם זיהוי גרפים דו־צדדיים: יהי G גרף אלגוריתם זיהוי גרפים או
function IsBipartite(G):
     (d, \pi, \operatorname{color}) \leftarrow \operatorname{BFS}(G)
     for (v,u) \in V(G) do
         if d(v) = d(u) then return False
    end
    return True
                                                        .(IsBipartite (G) = \text{True}) אזי (G דו־צדדי) אוי (פשוט אזי G גרף לא מכוון ופשוט אזי (G
|\sigma|=\min\{|	au|\ t^{-1} מסלול קצר ביותר בין קודקודים (מק"ב): יהי G גרף ויהיו s,t\in V אוי מסלול קצר ביותר בין קודקודים (מק"ב): יהי
```

```
גדיר s \in V גרף ויהי G גרף מקודקוד: יהי ביותר המסלולים הקצרים ביותר
E'=\{e\in E\mid sאזי איזי E'=\{e\in E\mid sאזי אזי פיותר היוצא מסלול קצר ביותר היוצא
```

אזי ארף ויהי $S \in V$ אזי ארף למציאת ארף מקלולים הקצרים ביותר מקודקוד: יהי אלגוריתם למציאת ארף המסלולים הקצרים ביותר

```
G_{\pi} \leftarrow \text{BFS-Forest}(G); \qquad E' \leftarrow E(G_{\pi})
(d, \pi, \operatorname{color}) \leftarrow \operatorname{BFS}(G);
for (u,v) \in E(G) do
      if |\operatorname{height}_{G_{\pi}}(u) - \operatorname{height}_{G_{\pi}}(v)| = 1 then
```

 $E' \leftarrow E' \cup \{(u,v)\}$ end return (V(G), E')

function ShortestPathGraph(G, s):

.(במק"ב) קשת e)אזי איזי ($e \in E$ אזי עוקבות ביער פון רמות עוקבות במק"ב).

```
sב מסקנה: יהי S גרף ויהי s \in V אזי s \in V מסקנה: יהי S גרף ויהי
                                                                          גרף המסלולים הקצרים ביותר בין קודקודים: יהיG גרף ויהיו s,t\in V נגדיר
                                                                              E' = \{e \in E \mid tאזי איז E' = \{e \in E \mid tאזי איז מיסלול קצר ביותר היוצא מ־e
טענה: יהי G גרף מכוון ויהיו t בסיבוכיות אלגוריתם לחישוב גרף המסלולים הקצרים ביותר מ־s לt בסיבוכיות אמן ריצה t
                                                                                                                                                            \mathcal{O}(|V| + |E|)
                                                                                                                       אזי s \in V אזי גרף ויהי :DFS אלגוריתם
function DFS (G, s):
     (k,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
     color \leftarrow dict(E)
     k[s] \leftarrow 1
     \pi[s] \leftarrow \text{Null}
     for u \in V \setminus \{s\} do
         k[u] \leftarrow 0
          \pi[u] \leftarrow \text{Null}
     end
     for e \in E do
      |\operatorname{color}[e] \leftarrow \operatorname{White}
     end
     i \leftarrow 2
     v \leftarrow s
     while (\exists u \in Adj(v).\operatorname{color}[(v,u)] = \operatorname{White}) \vee (\pi[v] \neq \operatorname{Null}) do
          if \{u \in Adj(v) \mid \operatorname{color}[(v,u)] = \operatorname{White}\} \neq \emptyset then
               w \leftarrow \{u \in Adj(v) \mid \operatorname{color}[(v, u)] = \operatorname{White}\}\
                \operatorname{color}[(v, w)] \leftarrow \operatorname{Black}
               if k[w] = 0 then
                     k[w] \leftarrow i
                      \pi[w] \leftarrow v
```

 $\mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight)$ הינה DFS (G,s) טענה: יהי G אזי סיבוכיות אמן הריצה אזי אזי סיבוכיות אזי סיבוכיות און

.DFS (G,s) אזי k בהרצת $s\in V\left(G
ight)$ אוי גרף ויהי

 $.k\left[v
ight]>0$ מתקיים DFS (G,s) אזי בהרצת $v\in\left[s
ight]_{_}$ באשר באשר $s,v\in V$ טענה: יהי

else

return (k,π)

end

 $v \leftarrow \pi[v]$

טענה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי עץ הינו עץ.

אזי DFS יהי G_π אויהי יהי יהי יהי יער יהי יער אזי יער

- $.e\in E\left(G_{\pi}
 ight)$ עבורה $e\in E\left(G
 ight)$ קשתות עץ: קשת •
- $.G_{\pi}$ ביער של של הינו אב וכן $(u,v) \notin E\left(G_{\pi}
 ight)$ עבורה עבורה $(u,v) \in E\left(G\right)$ הינו אב של קשתות קדמיות:
- C_{π} עבורה u של וכן u וכן v וכן עבורה u עבורה עבורה u עבורה u של ביער u של הינו אב של u ביער u
 - . שאינה קשת עץ או קדמית או אחורית $e \in E\left(G
 ight)$ שאינה קשת שו ullet

 G_{π} טענה: יהי G או v או א בגרף עץ אזי u צאצא של איזי u אוזי א בארף או בגרף u או בגרף u אוזי של בגרף u

מסקנה: יהי G גרף לא מכוון אזי לא קיימות קשתות חוצות.

אלגוריתם DFS בעל זמני נסיגה: יהי אזר DFS אלגוריתם

```
\begin{array}{l} \text{function DFS}\,(G) \colon \\ & (k,f,\pi,\operatorname{color},\operatorname{low}) \leftarrow \operatorname{dict}(V) \\ & \text{for } u \in V \text{ do} \\ & k[u] \leftarrow 0 \\ & \pi[u] \leftarrow \operatorname{Null} \\ & \operatorname{color} \leftarrow \operatorname{White} \\ & \operatorname{low} \leftarrow \infty \\ & \text{end} \\ & i \leftarrow 0 \\ & \text{for } s \in V \text{ do} \\ & \mid \operatorname{DFS-VISIT}(s,k,f,\pi,i) \\ & \text{end} \\ & \operatorname{return}\,(k,f,\pi,\operatorname{low}) \end{array}
```

```
\begin{array}{l} \textbf{function DFS-VISIT}(u,k,f,\pi,\operatorname{color},\operatorname{low},i) \colon \\ & \operatorname{color}[u] \leftarrow \operatorname{Gray} \\ & i \leftarrow i+1 \\ & k[u] \leftarrow i \\ & \textbf{for } v \in Adj(u) \textbf{ do} \\ & & | \operatorname{if} \left(\operatorname{color}[v] = \operatorname{Gray}\right) \wedge \left(v \neq \pi[u]\right) \textbf{ then} \\ & | \operatorname{low}[u] \leftarrow \min(\operatorname{low}[u],k[v]) \\ & \textbf{else if } \operatorname{color}[v] = \operatorname{White } \textbf{ then} \\ & | \pi[v] \leftarrow u \\ & | \operatorname{DFS-VISIT}(v,k,f,\pi,\operatorname{color},\operatorname{low},i) \\ & | \operatorname{low}[u] \leftarrow \min(\operatorname{low}[u],\operatorname{low}[v]) \\ & \textbf{end} \\ & \operatorname{color}[u] \leftarrow \operatorname{Black} \\ & i \leftarrow i+1 \\ & f[u] \leftarrow i \end{array}
```

```
.DFS (G) אזי f בהרצת s \in V(G) אוי גרף ויהי
                                 (k[u] < k[v] < f[u])אזי ((g_\pi) צאצא של u ביער (g_\pi) יהיר יהיר v,u \in V יהיר: 'Gray Path Lemma' טענה
                                                                      (f[v] < k[u])אזי ((u,v)) איי (v,u \in V טענה: יהיו
                                                         משפט הסוגריים: יהי G גרף ויהיו אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הסוגריים: יהי
                                              (G_{\pi} מתקיים צאצא־אב ביער [k(u),f(u)]\cap [k(v),f(v)]=\varnothing מתקיים •
                                                          G_{\pi} ביער v של ע צאצא u וכן [k(u), f(u)] \subset [k(v), f(v)] • מתקיים
                                                          G_{\pi} וכן v צאצא של v וכן [k\left(u
ight),f\left(u
ight)]\supset [k\left(v
ight),f\left(v
ight)] מתקיים •
יש מסלול לבן DFS (G) באלגוריתם ביער המסלול הלבן: יהי G גרף ויהיו ע. v אזי v אזי v אזי אזי v אזי ע. v אזי הלבן: יהי v גרף ויהיו
                                                                                                                                (v^{-}) מ־ש
                                                                                     גרף מכוון אציקלי: גרף מכוון G בו לא קיים מעגל.
                          u \prec v אזי אזי אם E אם u,v \in V המקיים לכל V המס סדר אזי אחס סדר אזי אזי אזי אזי מיון טופולוגי: יהי
                                                              (G) אציקלי)\iff(קיים מיון טופולוגי על G). משפט: יהי G גרף מכוון אזי
      \mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) אי קיים אלגוריתם לבדיקת קיום מיון טופולוגי בסיבוכיות או גרף מכוון אי קיים אלגוריתם לבדיקת קיום מיון טופולוגי בסיבוכיות G
                                                             (G^-משפט: יהי G גרף מכוון אזי G אציקלי) אציקלי) אציקלי אזי (משפט: יהי G גרף מכוון אזי (משפט
                                       G טענה: יהי G משרה מיון טופולוגי על המתקבלת מהרצת f משרה מיון טופולוגי על טענה: יהי G גרף מכוון אציקלי אזי
                                                 \left. \left| G/_{\overrightarrow{G}} \right| < \left| G-\{v\}/_{\overrightarrow{G-\{v\}}} \right| עבורו v \in V\left(G\right) אז גרף מכוון אזי G אז מנתק: יהי G גרף מכוון ויהי v \in V אזי v \in V אזי v \in V קשת אחורית.
                                                            .DFS (G) בהרצת low גרף אזי G בהרצת ביותר: יהי
                                                              אלגוריתם למציאת כל הקודקודים המנתקים: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי
function DetachableVertices (G):
    (k, f, \pi, \text{low}) \leftarrow \text{DFS}(G, s)
    if |Adj_{G_{\pi}}(s)| \neq 1 then
        if \forall v \in children(u).low[v] \geq k[u] then
                            \mathcal{O}(|V|+|E|) הינה Detachable Vertices (G) טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות זמן הריצה של
                                    סענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי Detachable Vertices (G) טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי
רכיב קשיר היטב (רק"ה): יהי G גרף מכוון אזי קבוצה C\subseteq V מקסימלית בגודלה עבורה לכל u,v\in C קיים מסלול מ־u
                                                                                                                                 u^-ט ל־v
                                        G^T=(V,E') אזי אזי E'=\{(v,u)\mid (u,v)\in E\} אזי גרף מכוון נגדיר אזי G אזי איזי אזי
                                                  (G^T) אזי (G רק"ה של איי (G רק"ה של רק"ה של מכוון ותהא איי (G רק"ה של מכוון ותהא
```

אלגוריתם קוסראג'ו־שריר למציאת רכיבים קשירים היטב: יהי G גרף מכוון אזי

אלגוריתם למציאת גרף הרכיבים: יהיG גרף מכוון אזי

 $.G^{*}=\left(\operatorname{SCC}\left(G
ight),E^{*}
ight)$ אזי $E^{*}=\left\{ \left(A,B
ight)\in\operatorname{SCC}\left(G
ight)^{2}\mid\exists u\in A.\exists v\in B.\left(u,v
ight)\in E
ight\}$ אזי אזי $G^{*}=\left(\operatorname{SCC}\left(G^{*}\right),E^{*}\right)$ אזי איזי איזי איזי איזי הרכיבים: יהי

 $s \leftarrow V$

end return A

 $A \leftarrow \operatorname{set}(V)$

A.append(s)for $u \in V \setminus \{s\}$ do

 $\mid A.append(u)$

```
function SCC(G):
     (k, f, \pi) \leftarrow \mathrm{DFS}(G)
     /* In the next line, in the main loop of DFS we go through the vertices in decreasing order of f[u]
                                                                                                                                                                  */
     (k', f', \pi') \leftarrow \text{DFS}(G^T)
     A \leftarrow \operatorname{set}(\operatorname{set}(V))
     for v \in V do
          A.append\left([v]_{\overbrace{(G^T)_{\pi}}}\right)
     end
     return A
function KosarajuSharir(G):
     V^* \leftarrow \operatorname{SCC}(G)
     E^* \leftarrow \operatorname{set}((V^*)^2)
     for (u,v) \in E do

\begin{array}{c}
(u, v) \in E \\
\text{if } [v] \xrightarrow{G_{\pi}^{T}} \neq [u] \xrightarrow{G_{\pi}^{T}} \text{ then} \\
E^*.\text{append} \left( \left( [v] \xrightarrow{G_{\pi}^{T}}, [u] \xrightarrow{G_{\pi}^{T}} \right) \right)
\end{array}

     end
     return (V^*, E^*)
                                                                                                                       למה: יהי G גרף מכוון אזי G^* אציקלי.
                                                                                                                          אזי U\subseteq V אזי גרף ותהא G יהי
                                                                                                                  .k\left( U\right) =\min_{u\in U}\left( k\left[ u\right] \right) זמן גילוי: •
                                                                                                                f(U) = \max_{u \in U} (f[u]) : זמן נסיגה
                                           f\left(C_{2}
ight) < f\left(C_{1}
ight) אזי אזי \left(C_{1},C_{2}
ight) \in E\left(G^{st}
ight) באשר רק"ה באשר רק"ה מכוון יהיו יהיו G
                                f\left(C_{2}
ight)>f\left(C_{1}
ight) אזי אזי \left(C_{1},C_{2}
ight)\in E\left(\left(G^{T}
ight)^{st}
ight) באשר באשר רק"ה באשר כוון יהיו היי G גרף מכוון יהיו
                                                                            (C\in \operatorname{SCC}(G))אזי (C\cap G)הא(C\cap G)אזי ויהי (C\cap G)אזי משפט: יהי (C\cap G)אזי ויהי
                                                                                                 G^* = 	ext{KosarajuSharir}(G) מסקנה: יהי G גרף מכוון אזי
                                                                     . \forall v \in V. \exists s \in S.s 
ightarrow v המקיימת S \subseteq V הגרף מכוון אזי הי
                                                                                        אלגוריתם למציאת קבוצת מוצא מינימלית: יהיG גרף מכוון אזי
function MinimalOriginSet(G):
     A \leftarrow \operatorname{set}(V(G))
     G^* \leftarrow \text{ComponentGraph}(G)
     for C \in V(G^*) do
          v \leftarrow \{u \in C \mid \nexists w \in V(G) \backslash C.(w, u) \in E(G)\}
          A.append(v)
     end
     return A
                                                                          . קבוצת מוצא מינימלית MinimalOriginSet (G) אזי מינימלית גרף מכוון אזי
                                    \mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) הינה MinimalOriginSet (G) טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות זמן הריצה של
\mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) אזי קיים אלגוריתם הבודק האם קיים הילוך \sigma העובר על S \subset V איזי קיים אלגוריתם הבודק האם קיים הילוך
                                                                                                 (G,w) אזי w:E	o\mathbb{R} גרף ממושקל: יהי
                                                  V\left(T
ight)=V\left(G
ight) עץ וכן עץ באשר איז באשר דG באשר איז מכוון איז מכוון איז תת־גרף פורש: יהי
                                            .w\left(T\right)=\sum_{e\in E\left(T\right)}w\left(e\right) אזי פורש עץ פורש ויהי משקל מכוון קשיר איז קשיר גרף אזי יהי Gיהי יהי
       w\left(T
ight)=\min\left\{ w\left(S
ight)\mid G עץ פורש מינימלי (עפ"מ): יהי G גרף קשיר לא מכוון אזי עץ פורש T\leq G עבורו אזי עץ פורש זהי G יהי
```

 $A,B \subseteq V(G)$ אזי $A \uplus B = V(G)$ עבורם $A,B \subseteq V(G)$ אזי אזי $A \uplus B = V(G)$

 $E\left(A,B
ight)=\left\{ \left(u,v
ight)\in E\left(G
ight)\mid\left(u\in A
ight)\wedge\left(v\in B
ight)
ight\}$ חתך אזי $\left(A,B
ight)$ חתך החתך החתך החתך יהי G

. בעל מעגל יחיד בעל אזי $T+\{e\}$ אזי $e\in E\left(G\right)\backslash E\left(T\right)$ ותהא ותהא עץ על יחיד יהי יהי יהי עץ על פורש

עץ $T+\{e_1\}-\{e_2\}$ עץ פורש הינה חלק ממעגל אזי $e_2\in E$ $(T+\{e_1\})$ ותהא ותהא $e_1\in E$ $(G)\setminus E$ עץ פורש תהא עץ פורש.

טענה: יהי ער בעל שני ער הינו אזי $T-\{e\}$ אזי ער פורש ותהא ותהא ער פורש אזי די יהי ער פורש ותהא ותהא

 $[v]_{\longrightarrow T-\{e\}}$ עץ פורש תהא $[v]_{\longrightarrow T-\{e\}}$ אזי $v\in V\left(G
ight)$ ויהי ויהי $e\in E\left(T
ight)$ חתך של $T\leq G$ מסקנה: יהי

אזי w אזי אלגוריתם גנרי למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל

```
function MST(G, w):
       color \leftarrow dict(E)
       color \leftarrow White
       Blueless \leftarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V))
       Redless \leftarrow \mathcal{P}(\{v \rightarrow v \mid v \in V(G)\})
       while \exists e \in E.color[e] = White do
             Blueless \leftarrow \{(A,B) חתך \forall e \in E(A,B).\operatorname{color}[e] \neq \operatorname{Blue}\}
             Redless \leftarrow \{ \sigma \text{ circle in } G \mid \forall i \in [\text{len}(\sigma)].\text{color}[(\sigma[i], \sigma[i+1])] \neq \text{Red} \}
             if Blueless \neq \emptyset then
                    A \leftarrow \text{Blueless}
                    f \leftarrow \operatorname{argmin}_{e \in A^2 \cap E}(w(e))
                    color[f] = Blue
             if Redless \neq \emptyset then
                    \sigma \leftarrow \text{Redless}
                     f \leftarrow \operatorname{argmax}_{e \in \sigma}(w(e))
                    color[f] = Red
       end
      return (V, \{e \in E \mid \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue}\})
```

 $e\in E$ אזי קיימת MST (G) באיטרציה של color [a]= White עבורה ותהא $a\in E$ אזי קיימת w ותהא און קשיר לא מכוון וממושקל אור מענה: אשר ניתנת לצביעה.

תות. אוי אוי אובעת |E| אויע אוי אוי אוי וממושקל קשרות אויר קשיר אוי קשרות אוי אורף קשיר אויג מסקנה: יהי G

עפ"מ עבורו עפ"מ איטרציה של MST (G) עפ"מ אזי בכל איטרציה אזי מכוון וממושקל א עפ"מ עבורו אזי יהי

- $.e\in E\left(T
 ight)$ מתקיים color $\left[e
 ight] =$ Blue המקיימת $e\in E$ לכל
- $.e
 otin E\left(T
 ight)$ מתקיים מהקיימת color $[e]=\mathrm{Red}$ המקיימת $e \in E$

G עפ"מ של MST G עפ"מ אזי w אזי מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל

אזי w אזי מכוון וממושקל אזי אלגוריתם פרים למציאת עץ פורש מינימלי: יהי

```
function Prim's Algorithm (G, w):
      color \leftarrow dict(E)
      U \leftarrow \operatorname{set}(V)
      color \leftarrow White
     r \leftarrow V
      U.append(r)
      while U \neq V do
            (u, v) \leftarrow \operatorname{argmin}_{e \in U \times (V \setminus U)}(w(e))
           color[(u, v)] = Blue
           U.append(v)
           for w \in U do
                 if (w,v) \in E then
                  |\operatorname{color}[(w,v)] = \operatorname{Red}
           end
      end
      return (V, \{e \in E \mid \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue}\})
```

נעשית כמו באלגוריתם הגנרי. Prim'sAlgorithm (G) טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי כל צביעת קשת באלגוריתם G עפ"מ של Prim'sAlgorithm (G) עפ"מ של G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי G אזי G אזי G אזי G אזי פסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל G

ריצה ערימת מינימום בסיבוכיות או Prim'sAlgorithm (G) אזי ניתן לממש אזי ניתן ניתן ממושקל אזי ערימת מינימום אזי יהי G יהי G יהי G יהי G יהי G יהי לא מכוון וממושקל אזי ניתן לממש אודי נ

 $\mathcal{O}\left(|E|+|V|\log|V|\right)$ בסיבוכיות זמן ריצה Prim'sAlgorithm (G) אזי ניתן לממש אזי ניתן לממש אזי ניתן לממש אזי פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל אזי W אלגוריתם קרוסקל למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל

```
\begin{array}{l|l} \textbf{function Kruskal'sAlgorithm}(G,w) : \\ & \operatorname{color} \leftarrow \operatorname{dict}(E) \\ & L \leftarrow \operatorname{sort}(E) \text{ // Sort is done by } w \text{ from small to big.} \\ & \textbf{for } (u,v) \in L \text{ do} \\ & | & \textbf{if } \exists \sigma \in \{u \rightarrow v\}. \forall i \in [n]. \operatorname{color}(\sigma(i)) = \operatorname{Blue \ then} \\ & | & \operatorname{color}[e] = \operatorname{Red} \\ & | & \operatorname{else} \\ & | & \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue} \\ & \textbf{end} \\ & \textbf{return } (V, \{e \in E \mid \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue}\}) \end{array}
```

. נעשית כמו באלגוריתם הגנרי. אזי כל צביעת קשת באלגוריתם אזי כל צביעת פשר באלגוריתם נשית כמו באלגוריתם באלגוריתם הגנרי. אזי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי G אזי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי G אזי אזי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי G

עם Union-Find עם Kruskal'sAlgorithm (G) עם אזי ניתן לממש א אזי ניתן לממש אזי ניתן עם אזי ניתן עם אזי ניתן לא אזי ניתן לממש אזי ניתן לממש אוי ניתן לU ($|E| \log |V|$) וכן סיבוכיות זמן סיבוכיות אמן $\mathcal{O}\left(|E|\log |V|\right)$

אלגוריתם w באשר באשר אזי אוי גרף היי G אריי מינימלי: יהי באשר אין פורש מינימלי: אלגוריתם מונימלי אזי Borůvska אלגוריתם

function Borůvska's Algorithm (G, w):

```
\begin{array}{l} \operatorname{Trees} \leftarrow \operatorname{set}(\operatorname{set}(G)) \\ \text{for } v \in V \text{ do} \\ | \operatorname{Trees.append}(\{v\}) \\ \text{end} \\ \text{while } |Trees| \neq 1 \text{ do} \\ | \operatorname{for } T \in Tree \text{ do} \\ | (u,v) \leftarrow \operatorname{argmin}_{(u,v) \in V(T) \times V(G)}(w((u,v))) \\ | S \leftarrow \{S \in Tree \mid u \in V(S)\} \\ | S \leftarrow S + T + \{(u,v)\} \\ | \operatorname{Trees.Remove}(T) \\ | \text{end} \\ \text{end} \\ A \leftarrow \operatorname{Trees} \\ \text{return } A \end{array}
```

G עפ"מ של Borůvska'sAlgorithm Gי איז w באשר באשר ש Borůvska משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל

 $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n$ עפ"מ בעלי משקליי קשתות כולל כפילויות יהי $i \leq G$ עפ"מ בעלי משקליי קשתות כולל כפילויות $i \in [n]$ אזי $i \in [n]$ אזי $i \in [n]$ לכל $i \in [n]$

w אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי המכיל מספר מקסימלי של קשתות מקבוצה מסוימת: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל ותהא $F\subseteq E$ אזי

```
function PrioritizeMST(G, w, F):
    \omega \leftarrow (V(G) \rightarrow \mathbb{R})
    m \leftarrow \min(\{|w(e_1) - w(e_2)| \mid (e_1, e_2 \in E) \land (w(e_1) \neq w(e_2))\}
    for e \in E do
        if e \in F then
         \omega(e) \leftarrow w(e)
        else
         | \omega(e) \leftarrow w(e) + \varepsilon
    end
    return Kruskal'sAlgorithm(G, \omega)
                                      w^-טענה: תהא T ויהי T עפ"מ ביחס ל\omega באלגוריתם באלגוריתם T עפ"מ ביחס לT עפ"מ ביחס ל
                                                                 wעפ"מ ב־G ביחס ל־PrioritizeMST (G,w) אזי F\subseteq E מסקנה: תהא
                                                 אזי i \in [n] לכל אזי בעיית שיבוץ המשימות: יהיו יהיו היו s_i < f_i באשר בעיית שיבוץ המשימות: יהיו
                                                                         \max\{|A|\mid (A\subseteq\{[s_1,f_i]\}_{i=1}^n)\land (\forall I,J\in A.I\cap J=\varnothing)\}
                              אזי i \in [n] אזי אינוריתם חמדן לבעיית שיבוץ המשימות: יהיו יהיו s_i < f_i באשר באשר אלגוריתם אזי
function ActivitySelectionProblem(s_1, \ldots, s_n, f_1, \ldots, f_n):
    F \leftarrow \operatorname{list}([s_1, f_1], \dots, [s_n, f_n])
    /* In the next line, we put all the parameters in F and sort it based on f_i
                                                                                                                                       */
    F \leftarrow \operatorname{sort}(\{f_1, \dots, f_n\})
    X \leftarrow \operatorname{list}([s_1, f_1], \dots, [s_n, f_n])
    X \leftarrow \varnothing
    for k \in [1, \ldots, n] do
        if X = \emptyset then
         X.append(L[k])
        else if L[k] \cap X.last = \emptyset then
         X.append(L[k])
    end
    return X
     \mathcal{O}(n\log(n)) הינה ActivitySelectionProblem אי סיבוכיות זמן הריצה של s_i < f_i באשר הינה s_1 \ldots s_n, f_1 \ldots f_n \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                עבורו X^* עבורו לבעיה איים פתרון לבעיה X^* עבורו לכלי פאיטרציה לכל לכל באיטרציה היX
                                                                                                     ([s_i, f_i] \in X^*) \iff ([s_i, f_i] \in X)
                   . פתרון לבעיית שיבוץ המשימות ActivitySelectionProblem אזי s_i < f_i באשר באשר אזי s_1 \dots s_n, f_1 \dots f_n \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
           .\ell=1 הכוונה היא "אורך הקשת" ובכך אנו "מכלילים" גרף ללא משקל בתור היא "אורך הקשת" הערה: כאשר משקל הגרף הוא \ell
                                                                     \ell(\sigma) = \min\{\ell(\tau) \mid \tau \in \{s \to t\}\} מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ממושקל \ell ויהיו s,t \in V אזי מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי
למה: יהיו t קשת השייכת למעגל שלילי אזי קיים מסלול לt וכן כל מסלול מ־t לא עובר דרך קשת השייכת למעגל שלילי אזי קיים מסלול למה:
                                                                                                               t-ל s פשוט קצר ביותר בין
למה: יהיו sעבורם קיים מסלול מיsלי לוכן קיים מסלול מיsלי למה: יהיו אזי לא קיים מסלול מיsלי למה: יהיו
                                                                                                               tל ל ל ליט קצר ביותר בין s
                                                         .\delta_{\ell}\left(s,t
ight)=\inf_{\sigma\in\left\{ s	o t
ight\} }\ell\left(\sigma
ight) אזי s,t\in V אינון: יהי G גרף ממושקל
                                           . ממושקל ביחס ביחס במרחק ברור שמדובר למשקל. \delta=\delta_\ell אזי נסמן אזי גרף הערה: הערה: הערה למשקל אזי נסמן
sבעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא (SSSP): יהי S גרף מכוון ממושקל s\in V אזי איי T\leq G עץ פורש בו כל מסלול מ
                                                                                                         Gל־ט הינו מסלול קצר ביותר ב־v
                            \delta_\ell\left(u,v
ight) \leq \delta_\ell\left(u,w
ight) + \delta_\ell\left(w,v
ight) אזי u,v,w \in V למה אי־שיוויון המשולש: יהי
                  רביותר. יהי \sigma מסלול קצר ביותר ויהי i \in \text{len}(\sigma) אזי \sigma מסלול קצר ביותר מסלול קצר ביותר ויהי \sigma
                   אזי l אויי שמושקל \ell ויהי וממושקל אלגוריתם בלמן-פורד למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא: יהי
```

```
function BellmanFord(G, \ell, s):
     (d,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
     d[s] \leftarrow 0
     for u \in V do
          d[u] \leftarrow \infty
          \pi[u] \leftarrow \text{None}
     end
     (c,i) \leftarrow 1
     while (i \leq |V|) \wedge (c > 0) do
          for (u,v) \in E do
           c \leftarrow c + \text{Relax}(\ell, d, u, v)
          end
         i \leftarrow i + 1
     end
     if c > 0 then c \leftarrow 1
     return c
function Relax (\ell, d, u, v):
     if d[v] > d[u] + \ell(u, v) then
          d[v] \leftarrow d[u] + \ell(u, v)
          \pi[v] \leftarrow u
          return 1
     return 0
```

 $.\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[u
ight] + \ell\left((u,v)
ight)$ אזי מסקנה: יהיו $\delta\left(s,u
ight) \leq d\left[u
ight]$ בריצת BellmanFord מתקיים ($u,v
ight) \in E$ אזי לאחר הרצת ($u,v
ight) \in E$ באשר $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ וכן בריצת הרצת ($u,v
ight) \in E$ מסקנה: יהיו $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ וכן בריצת $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ מתקיים ($\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ מתקיים ($\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$

Relax נקבל כי למה: אזי אחר כל רצף מתקיים BellmanFord מתקיים אזי פעולות אזי אזי איי אזי אזי פעולות אזי פריצת אזי אזי למה: יהי $\delta\left(s,v\right)\leq d\left[v\right]$ מתקיים $\delta\left(s,v\right)\leq d\left[v\right]$ מתקיים $v\in V$

 $d\left[v
ight]=\infty$ מסקנה: יהיו $s,v\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים מחקנים אזי לאחר כל רצף פעולות אזי לפבל כי $s,v\in V$ מסקנה: יהיו $s,v\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים מחקנים מחקנה: יהיו $d\left[v
ight]=\delta\left(s,v
ight)$ מתקיים $d\left[s
ight]=\delta\left(s,v
ight)$ אזי לאחר כל רצף פעולות BellmanFord מתקיים $s,v\in V$ למה: יהיו $s,t\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים $d\left[s
ight]=0$ ויהי $d\left[s
ight]=0$ מסלול אזי לאחר הפעלת הרצף $d\left[s
ight]=0$ נקבל כי $d\left[s
ight]=0$ מחקנים מחקנ

וכן i<|V| אשר כאשר באשית הראשית שלילי איז מהלולאה מיז אליו איז אליו מיז אליו אשר ניתן אלילי אשר ניתן אליו מיז אליו מיז אליו מיז אליו מאלי אשר ניתן אלילי אשר ניתן אלילי אשר ניתן אליו מחזיר $s\in V$ מחזיר $v\in V$ מתקיים מעגל מהלולאה אליו מיז מחזיר מחזיר מחזיר מוקיים מעגל שלילי אשר ניתן אליו מיז אליו מיז מחזיר מחזיר מוקיים מעגל שלילי אשר ניתן אליו מיז אליו מיז מעקיים מעגל שלילי אשר ניתן אליו מיז אליו מיז מעקיים מעגל שלילי אשר ניתן אליו מיז אליו מיז מעקיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מיז מענים מעגל שלילי און מיז מעגל שלילים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מיז מענים מעגל שלילי מעגל מענים מעגל שלילי אור מענים מעגל שלילי מעגל שלילי אינו מיז מענים מעגל שלילי אינו מיז מעגל שלילי אינו מיז מענים מעגל שלילי אור מענים מעגל שלילי אור מענים מעגל שלילי אור מענים מעגל שלילי אור מענים מענים מענים מענים מענים מעגל שלילים מעגל שלילי אור מענים מענים

מסקנה: יהי $s \in V$ אזי

- (sיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־(s) החזיר (קיים מעגל שלילי אשר ניתן BellmanFord) •
- .($d\left[v
 ight]=\delta\left(s,v
 ight)$ מתקיים (כל לכל מרכל) אפר ניתן להגיע אליו מ־s וכן לכל ששר ניתן (לא קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s וכן לכל S מתקיים (אביר בינון אפר נעץ בינות אפר בינון אפר בינון אפר בינות בינות אפר בינות אפר בינות בינות אפר בינות אפר בינות בינות אפר בינות בינות בינות אפר בינות ב

. אזי BellmanFord אזי BellmanFord באיזשהו שלב של בעץ מעגל בעץ אזי מעגל בעץ אזי אזי ויהי $s \in V$ ויהי אזי מעגל שלילי.

מכיל מעגל שלילי. BellmanFord אזי עץ אליו מיז מעגל שלילי שלילי שלילי מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מיז $s\in V$

.SSSP מסקנה: יהי אוי BellmanFord אזי $s \in V$ מסקנה: יהי

 $\mathcal{O}\left(|E|\cdot|V|
ight)$ אזי בעל סיבוכיות בעל BellmanFord משפט: יהי אזי אזי משפט בעל משפט

ריצה זמן בסיבוכיות SSSP אזי קיים אלגוריתם אזי קיים וכן $\ell:E\to\mathbb{Z}$ בסיבוכיות הערה: נניח כי $\ell:E\to\mathbb{Z}$

 $\mathcal{O}(|E|\log^2(|V|)\log(|V|\cdot W)\log\log(|V|))$

```
function IsZeroCircle (G,\ell):  \begin{array}{c|c} V \leftarrow V \uplus \{s\} \\ \text{for } v \in V \backslash \{s\} \text{ do} \\ & E \leftarrow E \cup \{(s,v)\} \\ & \ell((s,v)) \leftarrow 0 \\ \text{end} \\ & (c,d,\pi) \leftarrow \text{BellmanFord}(G,\ell,s) \\ \text{for } e \in E \text{ do} \\ & \text{if } d(v) \neq d(u) + \delta(u,v) \text{ then} \\ & | E \leftarrow E \backslash \{(s,v)\} \\ \text{end} \\ & \text{if } \exists \text{ circle } C \in G \text{ then return True return False} \\ \end{array}
```

טענה: בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה נקבל את גרף מק"ב מS לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה קיים מעגל S אזי S IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה קיים מעגל S אזי בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה נקבל כי S בגרף. עענה: יהי S מעגל עבורו S מחזיר שליליים אזי S בעל מעגל ממשקל S בעל מעגל מחילר IsZeroCircle מחזיר S מחזיר S עענה: יהי S גרף מכוון חסר מעגלים שליליים אזי סיבוכיות זמן הריצה של IsZeroCircle הינה S הינה S אזי שלגוריתם למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף מכוון אציקלי: יהי S מכוון אציקלי ויהי S אזי

```
function SSSP-DAG(G, \ell, s):
    (d,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
    d[s] \leftarrow 0
    for u \in V do
         d[u] \leftarrow \infty
      \pi[u] \leftarrow \text{None}
    end
    /* Knuth'sAlgorithm is an algorithm to compute a topological sorting.
                                                                                                                                                      */
    f \leftarrow \text{Knuth'sAlgorithm}(G)
    for i \in [1, \dots, |V|] do
         for v \in Adj(f(i)) do
          Relax((f(i), v))
         end
    end
    return (d,\pi)
```

טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s\in V$ אזי SSSP-DAG (G) פתרון לבעיית SSSP-DAG (G) אזי $s\in V$ טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s\in V$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של SSSP-DAG (G) הינה (|E|+|V|) אזי סיבוכיות זמן הריצה של $s\in V$ אזי מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף ללא משקלים שליליים: יהי S גרף מכוון עבורו $s\in V$ ויהי $s\in V$

```
Q \leftarrow \text{heap}((V, \text{int}))
    (d,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
    d[s] \leftarrow 0
    for u \in V do
        d[u] \leftarrow \infty
        \pi[u] \leftarrow \text{None}
    end
    Q.insert((s, d[s]))
    while Q \neq \varnothing do
        u \leftarrow Q.\min
         for v \in Adj(u) do
             if d[v] = \infty then
                  \pi[v] \leftarrow u
                  d[v] \leftarrow d[u] + \ell(u, v)
                  Q.insert((v, d[v]))
             else if d[u] + \ell(u, v) < d[v] then
                 \pi[v] \leftarrow u
                  d[v] \leftarrow d[u] + \ell(u, v)
                  Q.decrease-key((v, d[v]))
         end
    end
    return (d,\pi)
                                                 d\left[u
ight]=\delta\left(s,u
ight) אזי Q אזי Dijkstra למה: יהיו s,u\in V אזי למה:
                                                                           \ell \geq 0 כאשר SSSP משפט: יהי היי אוי Dijkstra אזי אזי משפט: יהי
                  \mathcal{O}\left(|E|+|V|\cdot\log\left(|V|
ight)
ight) איז ניתן לממש את Dijkstra אי ניתן לממש את אי בסיבוכיות בסיבוכיות אמן אי משפט: יהי s\in V
D_{u,v}=\delta\left(u,v
ight) מתקיים u,v\in V מתקיים לכל אזי D\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) אזי גרף מכוון וממושקל יהי G יהי יהי (APSP): יהי
                                  \Pi_{u,v}(v)\in\sigma מ־u ל־v המקיים u,v\in V וכן וכן \Pi\in M_{|V|}(V) וכן
                                                                                              p:V	o\mathbb{R} אזי גרף אזי G יהי פוטנציאל: יהי
מתקיים משקל מותאמת: תהא p פונקציית פוטנציאל אזי פונקציית משקל עבורה לכל u,v \in E מתקיים מוקציית משקל מותאמת: תהא
                                                                                                     \ell_p((u,v)) = \ell((u,v)) + p(u) - p(v)
                         \ell_{p}\left(\sigma
ight)=\ell\left(\sigma
ight)+p\left(s
ight)-p\left(t
ight) אזי ל־ל משפט: תהא t פונקציית פוטנציאל יהיו s,t\in V ויהי ויהי פוטנציאל משפט:
(מסלול קצר ביותר ביחס ל־t מסלול מיs ויהי s,t\in V ויהי פוטנציאל פונקציית פוטנציאל היו היי אזי s,t\in V ויהי
                                                                                                                               ביותר ביחס ל־(\ell_p).
                                                                      \ell_p\left(\sigma
ight)=\ell\left(\sigma
ight) מסקנה: תהא מסקנה פונקציית פוטנציאל ויהי מסקנה פונקציית פו
                                           \delta_{\ell}\left(s,t
ight)=\delta_{\ell_{n}}\left(s,t
ight)-p\left(s
ight)+p\left(t
ight) אזי s,t\in V מסקנה: תהא p פונקציית פוטנציאל ויהיו
                                   \ell_p \geq 0 עבורה עבורה פוטנציאל פונקציית פוטנציאל פונקציית מכוון וממושקל גרף מכוון והי Gיהי פוטנציאל פיזבילית: יהי
          משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל \emptyset אזי (קיימת פונקציית פוטנציאל פיזבילית)(G) מצוייד עם \emptyset חסר מעגלים שליליים).
                                                         אלגוריתם למציאת פונקציית פוטנאציל פיזבילית: יהי G גרף מכוון וממושקל אזי
```

function Dijkstra(G, ℓ, s):

```
function FeasiblePotential(G, \ell):
         G' \leftarrow G \uplus \{s\}
         for v \in V(G) do
                 E(G') \leftarrow E(G') \cup \{(s,v)\}
                \ell((s,v)) \leftarrow 0
         end
         c \leftarrow \text{BelmanFord}(G', \ell, s)
         if c=1 then return None
         p \leftarrow (V(G) \rightarrow \mathbb{R})
         for v \in V(G) do
          p(v) \leftarrow \delta(s, v)
         end
        return p
                                                                                                                                                                                                    טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל
                                                                                                       .(None מחזיר FeasiblePotential (G,\ell))\iff(מעגל שלילי בעל מעגל \ell מצוייד עם \ell מצוייד עם \ell
                  פחזיר פונקציית פוטנציאל פיזבילית). FeasiblePotential (G,\ell) פיזבילית פוטנציאל פיזבילית פוטנציאל פיזבילית). \ell
                                                                                                           אלגוריתם ג'ונסון לבעיית כל המסלולים הקצרים: יהי G גרף מכוון וממושקל אזי
function Johnson (G, \ell):
         p \leftarrow \text{FeasiblePotential}(G, \ell)
         if p = None then return None
         \ell_p \leftarrow (E \to \mathbb{R})
         for (u,v) \in E do
          \ell_p((u,v)) = \ell((u,v)) + p(u) - p(v)
         end
         (D_{\ell_p}, D_{\ell}) \leftarrow M_{|V|}(\mathbb{R})
         \Pi \leftarrow M_{|V|}(E)
         for v \in V do
                 (d,\pi) \leftarrow \text{Dijkstra}(G,\ell_p,v)
                 /* Here D and \Pi will be simplified, to get a solution to APSP as needed we can modify a bit Dijkstra's
                        algorithm to calculate D and \Pi on the way to get constant time for this assignment.
                 D_v \leftarrow d
               \Pi_v \leftarrow \pi
         for (u,v) \in E do
                  D_{\ell}((u,v)) = D_{\ell_n}((u,v)) - p(u) + p(v)
         end
         return (D,\Pi)
                                                                                                                     .APSP משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל אזי אזי \ell אזי וממושקל מכוון גרף מכוון יהי
                            \mathcal{O}\left(|E|\,|V|+|V|^2\log\left(|V|
ight)
ight) הינה Johnson (G,\ell) שענה: יהי אזי סיבוכיות אזי סיבוכיות אזי סיבוכיות אזי הריצה של
                                                                         A 	imes B \in M_{m 	imes k}\left(\mathbb{F}
ight) איזי B \in M_{n 	imes k}\left(\mathbb{F}
ight) ותהא ותהא A \in M_{m 	imes n}\left(\mathbb{F}
ight) באשר :Min Plus מכפלת
                                                                                                                                                                                                      (A * B)_{i,j} = \min_{k=1}^{n} (A_{i,k} + B_{k,j})
                                                                                                        \mathcal{O}\left(n^3
ight) אינ סיבוכיות אמן הריצה של A*B\in M_n\left(\mathbb{F}
ight) טענה: תהיינה
                                                                                                                                   A*B*C=(A*B)*C אזי A,B,C\in M_{n}\left( \mathbb{F}
ight) טענה: תהיינה
                                                                                                        \delta_k(s,v) = \min\{\ell(\sigma) \mid (\sigma \in \{s \to v\}) \land (|\sigma| \le k)\} אזי s,v \in V סימון: יהיו
                                                                                                                              .\delta_{k}\left(s,v\right)=\min_{u\in V}\left(\delta_{k-1}\left(s,v\right)+\ell\left(u,v\right)\right) אזי s,v\in V טענה: יהיו
                                                                                               s \in V לכל (\delta_k(s)), \delta_k(s,v) באשר \delta_k(s) \in M_{1 \times |V|}(\mathbb{R}) לכל s \in V סימון: יהי
L_{u,v} = \left\{ egin{align*} N \ 	ext{ull } \ell((u,v)) & u=v \ 	ext{output} \leq L \ 	ext{output} \end{pmatrix} \ u,v \in V \ 	ext{and } u \in M_{|V|} \ 	ext{output} \right\} באשר לכל באשר לכל עוביט u,v \in V מתקיים באשר לכל עוביט באשר לכל עוביט באשר לכל עוביט באשר לכל עוביט בא מתקיים וממושקל איזי וממושקל איזי באשר לכל עוביט באשר לביט בא באשר לביט ב
                                                                                               .\delta_{k}\left(s
ight)=\delta_{k-1}\left(s
ight)st L יהי אמטקנה: מסקנה מטריצת מטריצת בL\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) ותהא
```

 $D_{u,v}^{(k)}=\delta_k\left(u,v
ight)$ מתקיים $u,v\in V$ באשר לכל באשר $D^{(k)}\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי $k\in\mathbb{N}$ סימון: יהי

```
D^{(k)}=L^k אזי מטריצת מטריצת L\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) טענה: תהא
                                                             D^{(k)}=D^{(m)} אזי אזי k,m\geq |V|-1 וחסר מעגלים שליליים מעגלים ווחסר מכוון וממושקל טענה: יהי
                                 D_{n,v}^{(|V|)} < 0 אזי שלילי אזי במעגל שלילי ויהי עv \in V המופיע במעגל שלילי אזי \ell בעל מעגל שלילי אזי
                                                                 .APSP מסקנה: תהא L \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) מטריצת המשקל אזי וL \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight)
                                          אזי m\in\mathbb{N}_+ איי ויהי אסוציאטיבית אלגוריתם \star פעולה A\in M_n\left(\mathbb{R}\right) אזי תהא
function RepeatedSquaring (A, \star, m):
     (a_k \dots a_0) \leftarrow (m)_2 // (m)_2 denotes m in base 2.
         if a_i = 1 then
          B = B \star A
                                        .APSP פתרון לבעיית RepeatedSquaring (L,*,n) אזי מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת המשקל מיי
  \mathcal{O}\left(\left|V
ight|^{3}\log\left(\left|V
ight|
ight)
ight) הינה RepeatedSquaring (L,*,n) שענה: תהא מטריצת המשקל אזי סיבוכיות זמן הריצה של L\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}
ight)
                                             מתקיים u,v\in V באשר לכל באשר F^{(k)}\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight) אזי און ויהי ויהי און גרף מכוון ויהי k\in\mathbb{N} אזי ([n]
                                           F_{u,v}^{(k)} = \min \left\{ \ell\left(\sigma\right) \mid \left(\sigma \in \left\{u 
ightarrow v
ight\}
ight) \wedge \left(עוברת דרך הצמתים עוברת למעט בהתחלה ובסוף \left[k\right]
F_{u,v}^{(0)}=L מתקיים u,v\in V באשר לכל באשר F^{(0)}\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת המשקל אזי
                                          F_{u,v}^{(k)}=\min\left\{F_{u,v}^{(k-1)},F_{u,k}^{(k-1)}+F_{k,v}^{(k-1)}
ight\} אזי u,v\in[n] גרף מכוון ויהיו ([n] , E) איזי איזי
                                                 אלגוריתם פלויד־וורשאל: יהי ([n]\,,E) גרף מכוון ותהא אלגוריתם פלויד־וורשאל: יהי
function FloydWarshall (n, L):
          for v \in [n] do
              if (u \neq v) \wedge (L_{u,v} < \infty) then
                | \Pi_{u,v} \leftarrow u
                | \Pi_{u,v} \leftarrow \text{None}
         for u \in [n] do
              for v \in [n] do
                   \begin{array}{c|c} \text{if } F_{u,k} + F_{k,v} < F_{u,v} \text{ then} \\ F_{u,v} \leftarrow F_{u,k} + F_{k,v} \end{array}
                        \Pi_{u,v} \leftarrow \Pi_{k,v}
```

 $B \leftarrow M_n(\mathbb{R})$ for $i \in [k]$ do

 $\Pi \leftarrow M_n([n])$ for $u \in [n]$ do

else

end

end

return (F,Π)

end

end end $F \leftarrow L$ for $k \in [n]$ do

end $\mathbf{return}\ B$

 $A = A \star A$

 $D^{(k)} = D^{(k-1)} * L$ אזי המשקל מטריצת מטריצת $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מסקנה: תהא

```
.APSP פתרון לבעיית FloydWarshall (n,L) איי מטריצת המשקל אזי L\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) פתרון לבעיית L\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) מטריצת היי
\mathcal{O}\left(n^3
ight) הינה FloydWarshall (n,L) מטריצת המשקל אזי סיבוכיות זמן הריצה של בL\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) הינה הינה L\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)
                                                                                               (u,v) 
otin E מתקיים u,v \in I עבורה לכל עבורה אזי I \subseteq V ארף אזי יהי G מתקיים
                                        \min\left(i
ight)=\max\left\{w\left(I
ight)\mid\left(I\subseteq\left[i
ight]
ight)\wedge\left( בלתי תלויה w:\left[n
ight]
ightarrow\mathbb{R}_{>0} אזי w:\left[n
ight]
ightarrow\mathbb{R}_{>0} גרף שרוך ויהי
                                                                              וכן \min (1) = w \, (1) וכן \min (0) = 0 אזי w : [n] \to \mathbb{R}_{\geq 0} וכן יהי גרף שרוך ויהי ויהי
                                                                                                                                                                     mis(i) = max\{w(i) + mis(i-2), mis(i-1)\}\
                                                                      \mathcal{O}\left(n
ight) אזי \min\left(n
ight) אזי w:[n]	o\mathbb{R}_{\geq0} אזי ויהי אמן ריצה ([n]\,,E) מסקנה: יהי
A_{f(i)}=B_i עבורה ממש וחח"ע המקיימת f:[|B|]	o [|A|] עבורה קיימת אזי B\in \Sigma^* אזי אלפבית ותהא אלפבית ותהא
                                                                                                                                                                                                                                                  i \in [|B|] לכל
                                                                                                                  B \lhd A ותהא B \in \Sigma^* ותהא ותהא A \in \Sigma^* אלפבית תהא אזי
\max\{|C|\mid (C\in\Sigma^*)\land (C\lhd A)\land (C\lhd B)\} איי A,B\in\Sigma^* אלפבית ותהיינה \Sigma אלפבית ארוכה ביותר (LCS): יהי
      \text{Jcs} \ (k,\ell) = \max \left\{ |C| \mid (C \lhd (A_1,\ldots,A_k)) \land (C \lhd (B_1,\ldots,B_\ell)) \right\} \ \text{ איז } \ \ell \leq |B| \ \text{ ann } \ k \leq |A| \ \text{ ann } \ A,B \in \Sigma^* \ \text{ or otherwise} \ \text{or otherwise}
\max\left\{|C|\mid (C\lhd A)\land (orall i.C_{i-1}\prec C_i)
ight\} אזי אוי A\in \Sigma^* אאי אלפבית בעל סדר היינ\Sigma אלפבית היי\Sigma אלפבית בעל סדר אותהא
                                                                                                               A, sort A) של LCS טענה: תהא A \in \Sigma^* אזי בעיית אזי בעיית A \in \Sigma^*
                                               .lenlis (k)=\max\left\{|X|\mid ((A_1,\ldots,A_k)\, של של ווא X)\wedge (A_k מסתיים עם X)
ight\} אזי אזי A\in\Sigma^* אווי תהא
                                                                               .lenlis (k)=\max_{i\in[k-1]}\left\{ \mathrm{lenlis}\left(i\right)\mid A_{i}\prec A_{k}
ight\} וכך וכוווs (1)=1 אזי A\in\Sigma^{*} איזי A\in\Sigma^{*}
                                                                                   \pilis (k)=rg\max{\{\mathrm{lenlis}\,(i)\mid A_i\prec A_k\}} וכן \pilis (1)=\mathrm{None} אזי A\in\Sigma^* סימון: תהא
LIS מסקנה: תהא A \in \Sigma^* ויהי (x_{\pi \mathrm{lis}(\ell)(k)}, \dots, x_{\pi \mathrm{lis}(2)(k)}, x_{\pi \mathrm{lis}(k)}, x_k) איי אי k = rg \max \{ \mathrm{lenlis}(1), \dots, \mathrm{lenlis}(|A|) \} פתרון של
                                                                                                                                                                                                      \mathcal{O}\left(\left|A
ight|^{2}
ight) בעל סיבוכיות זמן ריצה
                                                                                                                                .min lis (m)=\min\left\{x_k\mid 	ext{lenlis}\left(k
ight)=m
ight\} אזי A\in\Sigma^* אינון: תהא
                                                                                                                                                                                   . עולה ממש \min lis אזי A \in \Sigma^* עולה ממש
                               \mathcal{O}\left(|A|\cdot\log\left(|A|
ight)
ight) אזי אמן ריצה (\min\operatorname{lis}\left(1
ight),\ldots,\min\operatorname{lis}\left(\ell
ight) אזי אזי (\min\operatorname{lis}\left(1
ight),\ldots,\min\operatorname{lis}\left(\ell
ight) אזי אזי (\min\operatorname{lis}\left(1
ight)
                               \operatorname{costp}(T) = \sum_{i=1}^n \left( p_i \cdot \operatorname{depth}_T(x_i) \right) אזי \{x_1 \dots x_n\} איי עץ חיפוש בינארי עץ T ויהי ויהי p_1 \dots p_n \in (0,1] איי
                                   מינימלי. Costp\left(T\right) עבורו בינארי אופטימלי: יהיו p_1\dots p_n\in(0,1] אזי עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו
                           \operatorname{costp}(T) = (\sum_{i=1}^n p_i) + \operatorname{costp}(T.\operatorname{left}) + \operatorname{costp}(T.\operatorname{right}) אינה: יהיו עץ חיפוש בינארי אזי p_1 \dots p_n \in (0,1] ויהי
מסקנה: יהיו T.left, T.right מסקנה: יהיו בינארי סטטי אופטימלי פתרון לבעיית עץ ויהי T פתרון לבעיית עץ ויהי
                                                                                                                                                                                                                חיפוש בינארי סטטי אופטימלי.
                                                                                                                                                          .pp (i,j)=\sum_{k=i}^{j}p_{k} אזי p_{1}\dots p_{n}\in(0,1] סימון: יהיו
                         \operatorname{cp}(i,j) = \min\left\{\operatorname{costp}(T) \mid \{x_i \dots x_j\} סימון: יהיו p_1 \dots p_n \in (0,1] ויהיו אזי x_1 \dots x_n אזי ויהיו
                                                                                      וכן \operatorname{cp}\left(i,i\right)=p_{i} וכך \operatorname{cp}\left(i,i-1\right)=0 אזי x_{1}\ldots x_{n} ויהיו p_{1}\ldots p_{n}\in\left(0,1\right] וכך
                                                                                                                                        .cp(i, j) = pp(i, j) + \min_{i \le k \le j} (cp(i, k - 1) + cp(k + 1, j))
                                                                          אלגוריתם לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו p_1 \dots p_n \in (0,1] ויהיו אלגוריתם לבעיית אויהיו
```

```
function OSBST(pp):
     K, C \leftarrow \text{List}([n]^2)
     for i \leftarrow [n+1] do
      C(i,i-1) \leftarrow 0
     end
     for d \leftarrow \{0, \ldots, n-1\} do
         for i \leftarrow [n-d] do
              C(i, i+d) \leftarrow \infty
               for k \leftarrow \{i, \dots, i+d\} do
                    t \leftarrow \operatorname{pp}(i,j) + C(i,k-1) + C(k+1,j)
                    if t < C(i, j) then
                         C(i,j) \leftarrow t
                        K(i,j) \leftarrow k
              end
          end
     end
```

מסקנה: יהיו $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1)$ משרה פתרון לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי. $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$ אזי מסקנה: יהיו $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$ אזי OSBST (pp) אזי $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$ אזי סטטי אופטימלי בסיבוכיות זמן ריצה $p_n\in(0,1]$ הערה: קיים אלגוריתם קנות' לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי בסיבוכיות זמן ריצה $p_n\in(0,1]$ בעיית 100 תרמיל הגב: יהיו $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_n\in(0,1]$ באשר $p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_n\in(0,1]$ מקסימלית וכן $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$ משר תרמיל הגב: יהיו $p_n\in(0,1]$ ויהיו $p_n\in(0,1]$ ויהיו $p_n\in(0,1]$ אזי $p_n\in(0,1]$

 $0 \quad \text{for } m > 0 \quad \text{for }$

```
function Fractional Knapsack (W, w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n):
      f \leftarrow ([n] \rightarrow [0,1])
      P \leftarrow \text{List}([n] \times \mathbb{R})
      for i \leftarrow [n] do
           P(i) \leftarrow (i, \frac{v_i}{w_i})
           f(i) \leftarrow 0
      end
      P \leftarrow \operatorname{sort}(P) // Sort from high to low based on second coordinate.
     t \leftarrow 0
     i \leftarrow 1
      while (t < W) \land (i \le n) do
           j \leftarrow P(i)[0]
           if t + w_i \leq W then
                f(j) \leftarrow 1
               t \leftarrow t + w_i
                f(j) \leftarrow \frac{W - t}{w_j}t \leftarrow W
     end
     return f
```

.bknap $(k,W)=\max\left\{\sum_{i\in S}v_i\mid (S\subseteq[k])\wedge\left(\sum_{i\in S}w_i\leq W\right)\right\}$ אזי $W,w_1\ldots w_n,v_1\ldots v_n\geq 0$ טענה: יהיו $w_1\ldots w_n,v_1\ldots v_n\geq 0$ אזי $w_1\ldots w_n,v_1\ldots v_n\geq 0$.bknap (0,m)=0 אזי 0 .bknap 0 אזי חישוב 0 אזי 0 אווי 0 אזי 0 אווי 0 אווי 0 אזי 0 אווי 0

```
function ZeroOneKnapsack(W, w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n):
     k \leftarrow n
     w \leftarrow W
     S \leftarrow \operatorname{Set}([n])
     S \leftarrow \varnothing
     while (k>0) \wedge (w>0) do
          if bknap(k, w) \neq bknap(k-1, w) then
              S \leftarrow S \cup \{k\}
              k \leftarrow k - 1
              w \leftarrow w - w_k
           else k \leftarrow k-1
          מסקנה: יהיו פתרון לבעיית 0/1 אזי W,w_1\ldots w_n,v_1\ldots v_n פתרון לבעיית אזי W,w_1\ldots w_n,v_1\ldots v_n\geq 0 מסקנה: יהיו
                                                            (V,E,c,s,t) אזי s,t\in V ותהיינה c\geq 0 וממושקל מכוון וממושקל יהי G אזי יהי
                                                                                              c אזי זרימה איי רשת (V,E,c,s,t) תהא פונקציית קיבולת:
                                                                                                  s אזי ארימה אזי (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי
                                                                                                    t אזי ארימה אזי (V, E, c, s, t) הימה אזי קודקוד בור: תהא
                                             עודף \chi_f:V	o\mathbb{R} אזי f:E	o\mathbb{R}_{\geq 0} רשת ותהא רשת (V,E,c,s,t) אזי (V,E,c,s,t) המוגדרת
                                                                                              .\chi_{f}\left(v\right)=\sum_{\substack{u\in V\\\left(u,v\right)\in E}}f\left(\left(u,v\right)\right)-\sum_{\substack{u\in V\\\left(v,u\right)\in E}}f\left(\left(v,u\right)\right)
                                                                     עבורה f:E	o \mathbb{R}_{\geq 0} עבורה אזי (V,E,c,s,t) עבורה f:E	o \mathbb{R}_{\geq 0}
                                                                                                                                  f \leq c חסם קיבולת: •
                                                                                          \chi_f(v)=0 מתקיים v\in V\setminus\{s,t\} שימור זרם: לכל
                           . מקסימלית: תהא \chi_f\left(t\right) עבורה f אוי פונקציית ארימה אי רימה (V,E,c,s,t) מקסימלית: בעיית הזרימה המקסימלית:
                                                            t \in T וכן s \in S עבורו (S,T) עבורו אזי חתך (V,E,c,s,t) וכן s-t מתך ירעה אזי וכן
                         E\left(S,T
ight)=\left\{(u,v)\in E\mid (u\in S)\wedge (v\in T)
ight\} אזי \left(S,T
ight) חתך והי Sרשת והי Tרשת ארימה ויהי והי וחדי ארימה א
                      E\left(T,S
ight)=\left\{ \left(u,v
ight)\in E\mid\left(u\in T
ight)\wedge\left(v\in S
ight)
ight\} אזי \left(S,T
ight) חתך הימה היהי \left(S,T
ight) חתך הא \left(S,T
ight)
                                                                           .c\left(S,T
ight)=\sum_{e\in E\left(S,T
ight)}c\left(e
ight) אזי s-t חתך ואי הי הי יהי
                                            f\left(S,T
ight)=\sum_{e\in E\left(S,T
ight)}f\left(e
ight)-\sum_{e\in E\left(T,S
ight)}f\left(e
ight) אזי s-t חתך אזי (S,T) אזי מני חתך: יהי
                                                                                    |f|=f\left(V\backslash\left\{t\right\},\left\{t\right\}\right) אוימה: תהא ל זרימה: תהא אזי ארימה: תהא
                                                                                       |f| = f(S,T) אזי s-t חתך אזי ויהי f ארימה ויהי זרימה ויהי
                                                                                                    |f|=f\left(\left\{ s\right\} ,V\backslash\left\{ s\right\} 
ight) איימה אזי f ארימה מסקנה: תהא
                                                                                 f(S,T) \leq c(S,T) אזי s-t חתך אויהי f ארימה ויהי f ארימה ויהי
                                                                     אזי f\left(S,T\right)=c\left(S,T\right) עבורו s-t אזי (S,T) אזי ארימה אזי זרימה אזי ארימה ויהי
                                                                                                                                   . זרימה מקסימלית f
                                                                                       c((S,T)) \le c((A,B)) מתקיים (A,B) s-t לכל חתך
                                                 e \in P לכל f\left(e
ight) < c\left(e
ight) באשר P \in \{s 
ightarrow t\} זרימה אזי זרימה אזי יארימה פסלול ניתן להגדלה
g_{\restriction_{E \setminus P}} = f_{\restriction_{E \setminus P}} איי ארימה g עבורה איי איי איי איי פונקציית מסלול: תהא ארימה ויהי ויהי ארימה פולל ניתן להגדלה פונקציית ארימה ויהי ויהי ויהי ארימה ויהי
                                                                                                                                                    |f| < |g| וכן
                                                                       .s-t ארימה חוסמת: פונקציית ארימה f עבורה לא קיים מסלול ניתן להגדלה
                                                                   e^{-1} אזי e^{-1} \in E עבורה עבורה אנטי־מקבילה: יהי G גרף מכוון ותהא אנטי־מקבילה
      באשר (V, E_f, c_f, s, t) אזיימה אזי f ארימה אנטי־מקבילות הסרת הסרת רשת רעת אני (V, E_f, c_f, s, t) באשר רשת ארימה שיורית:
                                                     .E_f = \{e \in E \mid c\left(e\right) > f\left(e\right)\} \cup E^{-1} \bullet .c_f\left(e\right) = \left\{\text{Null} \begin{subarray}{l} c(e) - f(e) & e \in E \\ f(e^{-1}) & e \in E^{-1} \end{subarray} \right. אזי e \in E_f אזי אינית שיוריות הקיבולת: תהא e \in E_f אזי הקיבולת: \bullet
       באשר (V, E_f, c_f, s, t) רשת זרימה שנורית: תהא f זרימה איז (V, E_f, c_f, s, t) רשת זרימה שנורית: תהא
```

 $.E_f = \{e \in E \mid c_f(e) > 0\} \bullet$

 $c_f(e)=c(e)-f(e)+f(e^{-1})$ אזי $e\in E$ אהיבולת: תהא

 $c\left((u,v)\right)=0$ אזי $(u,v)\notin E$ עבורם $u,v\in V$ אינה הערה: יהיו $u,v\in V$ סימון: תהא G רשת זרימה ותהא G זרימה אזי G_f הינה רשת הזרימה השיורית. G בגרף G בגרף G בארף G בארץ בארף G בארף G

- Gזרימה מקסימלית ב-f
- .s-t מתקיים מסלול ניתן מסלול מחלול בגרף מתקיים מתקיים $P \in \{s o t\}$ לכל מסלול
 - G- מינימלי ל-s-t חתך (S,T) מינימלי ל-

 $\max\{|f|\mid$ ארימה $f\}=\min\{c\left(S,T\right)\mid$ s-t חתך ואזי אזי רימה אזי רשת ההא G רשת ארימה אזי הימה אזי $\{f\}=\min\{c\left(S,T\right)\mid$ s-t חתך אלגוריתם פורד־פלקרסון: תהא $\{f\}=\min\{c\left(S,T\right)\mid$ רשת ארימה אזי רימה אזי

הערה: האלגוריתם שיטה גנרית למציאת של EdmondsKarp ובאלגוריתם במניחים שיטה גנרית למציאת מסלול ניתן לשיפור.

```
.FF = FordFulkerson (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי (V, E, c, s, t) ההא
```

 $f\left(E
ight)\subseteq\mathbb{N}$ באשר באשר אזי קיימת ארימה מקסימלית אזי קיימת זרימה באשר ער אזיי רעת ארימה באשר ואיי פווער אזיי קיימת אויימה באשר ער אויימה באשר אזיי קיימת אויימה באשר אזיימה באשר אזיימה באשר פווער אזיימה באשר אודי באשר אזיימה באשר אזיימה באשר אזיימה באשר אודי באשר אודימה ביימה באשר אודימה באשר אודימימה באשר אודימה באימימי ביימי באודימה באימי באימי באודימה באימ

מתקיים FF מתקיים אזי בכל איטרציה או $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ רשת זרימה רשת אוי ענה: תהא איטרציה על איטרציה על איטרציה אוי אוי

- .G זרימה של f
 - $f(E) \subseteq \mathbb{N} \bullet$
 - $.c_{f}(P) > 1 \bullet$

משפט: תהא $f(E)\subseteq\mathbb{N}$ רשת ארימה באשר $f(E)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא אוי רימה באשר (V,E,c,s,t) אזי משפט: תהא

- . פתרון לבעיית הזרימה המקסימלית לכל בחירת מסלולים באלגוריתם. FF
 - עושה לכל היותר |f| שיפורי מסלול. FF
 - .FF $(E) \subseteq \mathbb{N}$ •

מסקנה: תהא $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות מקסימלית הריצה $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא רימה באשר אזי סיבוכיות אזי סיבוכיות הריצה (V,E,c,s,t) הינה פסקנה: דימה אזי סיבוכיות הריצה של FF של הינה ($E|\left|f\right|$)

טענה: תהא $f(E)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות אמן זרימה אוי סיבוכיות אזי סיבוכיות מקסימלית אוי סיבוכיות אזי סיבוכיות מענה: תהא $c(E)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות מענה: על פענה: תהא $c(E)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות מענה: $c(E)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבונים מענה: $c(E)\subseteq\mathbb{N}$

 $|e_1\cap e_2|
eq 1$ מתקיים $e_1,e_2\in M$ עבורה לכל $M\subseteq E(G)$ אזי מכווֹן אזי G זיווג: יהי

 $rg \max \{|M| \mid G$ בעיית זיווג מקסימלי: יהיG גרף לא מכוון אזי M זיווג של

 $A \subseteq V(G)$ עבורו $M \subseteq E(G)$ איווג מושלם: יהי G גרף לא מכוון אזי זיווג

וכן $G_L=A$ אזי א $|e\cap A|=|e\cap B|=1$ מתקיים $e\in E\left(G\right)$ חתך עבורו לכל (A,B) אזי איז אזי דו־צדדי לא מכוון ויהי מימון: יהי $G_R=B$

 $V^{\perp}=V\left(G
ight)\cup\left\{ s,t
ight\}$ אזי אזי אזי לא מכוון ויהיו אזי לא מכוון ויהיו היי Gיימון: יהי

```
E^{	o}=\{\langle v,u
angle \mid (\{v,u\}\in E(G))\land (v\in G_L)\land (u\in G_R)\} סימון: יהיG גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
                                   .E^{\perp}=\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup E^{
ightarrow}\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight) אזי s,t
otin V\left(G
ight) ויהיו לא מכוון ויהיו מיחון אזי מיחון: יהי
.c_{
ho_{E}	o}^{\perp}=\infty וכן .c_{
ho_{\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight)}}^{\perp}=1 המוגדרת .c_{\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight)}^{\perp}=1 וכן .c_{\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight)}^{\perp}=1 המוגדרת .c_{\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight)}^{\perp}=1 וכן .c_{\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight)}^{\perp}=1
                                                       G^{\perp}=\left(V^{\perp},E^{\perp},c^{\perp},s,t
ight) אזי s,t\notin V\left(G
ight) ויהיו לא מכוון ויהיו מימון: יהי
                                                                   אלגוריתם לבעיית זיווג מקסימלי בגרף דו־צדדי: יהיG גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
function BMMF (G):
     (s,t) \not\leftarrow V(G)
    G^{\perp} \leftarrow (V^{\perp}, E^{\perp}, c^{\perp}, s, t)
     f \leftarrow \text{FordFulkerson}(G^{\perp})
    return \{e \in E(G) \mid f(e) = 1\}
                                                                               . איווג אינו זיווג אינו איווג מקסימלי. ארף דו־צדדי לא מכוון איז G הינו איווג מקסימלי.
                                                    \mathcal{O}\left(|E|\cdot|V|
ight) אמן ריצה אמר סיבוכיות בעל אוזי מכוון אזי אזי לא מכוון אזי מכוון אזי מענה: יהיG גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
        \max{\{|M|\mid G } איווג של M\}=\max{\{|f|\mid G^\perp\}} זרימה של s,t
otin V(G) איווג של s,t
otin V(G) איווג של
                                                   e \cap C 
eq \emptyset מתקיים e \in E עבורה לכל עבורה אמכוון אזי מכוון אזי ממים: יהי G גרף לא מכוון אזי
                                                 rg \min \{|C| \mid G בעיית כיסוי צמתים מינימלי: יהי G גרף לא מכוון אזי C כיסוי צמתים של
                              \max\{|M|\mid G איווג של M\}\leq \min\{|C|\mid G למה: יהי M גרף דו־צדדי לא מכוון אזיC כיסוי צמתים של
                                                         אלגוריתם לבעיית כיסוי צמתים מינימלי בגרף דו־צדדי: יהי G גרף אלגוריתם מינימלי מינימלי מינימלי אלגוריתם לבעיית ביסוי א
function BMVC(G):
     (M, s, t, G^{\perp}, f) \leftarrow \text{BMMF}(G)
     C \leftarrow V(G)
     for \{u,v\}\in M\cap (G_L\times G_R) do
         \inf\left\{\tau:s\to v\;\middle|\; G_f^\perp \right. \text{ (Althous)} \tau\left\}\neq\varnothing \text{ then } \left. C\leftarrow C\cup\{v\}\right.
           \mid \ C \leftarrow C \cup \{u\}
     end
     return C
                                                                                . אינו כיסוי צמתים BMVC (G) טענה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
                                                              |\mathrm{BMVC}\,(G)|=|M| איווג מקסימלי איזי איווג מכוון ויהי M איווג מכוון דו־צדדי א גרף או־צדדי איווג מכוון ויהי
                                                                   . מסקנה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי אוי מסקנה: יהי G גרף דו־צדדי אוי מכוון אזי
                            \max\{|M|\mid G איווג של M\}=\min\{|C|\mid G משפט: יהי M גרף דו־צדדי לא מכוון אזי כיסוי צמתים של
                         \mathrm{DP}_{s,t} = \max \left\{ n \in \mathbb{N} \mid t^{-t} \right\} גרף מכוון ויהיו s,t \in V אזי לקיימים n מסלולים זרים בקשתות מs
          \mathrm{DE}_{s,t} = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid tא גרף מכוון ויהיו s,t \in V איז לקיימות שאם נסירן לא יהיה מסלול מ־s,t \in V איז איז לקיימות איז G
                                                                                            (V,E,1,s,t) אזי s,t\in V רשת G יהי יהי G יהי
```

 $\mathrm{DP}_{s,t} = \max\left\{|f| \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{DP}_{s,t} = s, t \in V \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{DP}_{s,t} = \mathsf{DP}_{s,t} \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{DP}_{s,t} \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{DP}_{s,t} \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{O/$

 $\mathtt{DP}_{s,t} = \mathtt{DE}_{s,t}$ אזי $s,t \in V$ מסקנה משפט מנגר: יהי

אלגוריתם לבדיקת k־קשירות בקשתות: יהי ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ גרף מכוון אזי

 $|A| \leq |N(A)|$

 $\mathsf{DE}_{s,t} = \min \left\{ c\left(S,T\right) \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{DR}_{s,t} = \mathsf{S-t} \mid \mathsf{DR}_{s,t} \in V \mid \mathsf{DR}_{s,t} \in V \mid \mathsf{DR}_{s,t} \in \mathcal{S}_{s,t} \mid \mathsf{DR}_{s,t} \in \mathcal{S}_{s,t} \mid \mathsf{DR}_{s,t} \in \mathcal{S}_{s,t} \mid \mathsf{DR}_{s,t} \mid \mathsf{$

 $N\left(A
ight)=\{y\in G_R\mid (A imes\{y\})\cap E
eqarnothing\}$ אזי $A\subseteq G_L$ אזי לא מכוון ותהא G יהי G יהי G יהי

מתקיים $A\subseteq G_L$ מתקיים איווג מושלם ב־ (G_L) אזי (קיים איווג מושלם ב- (G_L) (לכל אזי ברף דו־צדדי לא מכוון באשר

vגרף uימים u מסלולים זרים בקשתות מ־u עבורו לכל u עבורו לכל u אזי גרף מכוון u אזי גרף מכוון u עבורו לכל

```
function kConnected(k, G):
    for u \in V \setminus \{v\} do
        /st The following FordFulkerson calls will return True if the flow size is bigger then k after k augmenting
           paths else False
        b_1 \leftarrow \text{FordFulkerson}(V, E, 1, v, u)
        b_2 \leftarrow \text{FordFulkerson}(V, E, 1, u, v)
       if (\neg b_1) \lor (\neg b_2) then return False
    return True
                                 .(kConnected (G)= True)\Longleftrightarrowויהי k\in\mathbb{N}_+ איי היי k\in\mathbb{N}_+קשיר בקשתות) איי ויהי k\in\mathbb{N}_+
                          \mathcal{O}\left(|V|\cdot k|E|
ight) הינה או kConnected (G) טענה: יהי הי גרף מכוון אזי סיבוכיות זמן הריצה של
                                       עבורה f:E	o\mathbb{R}_{\geq 0} רשת זרימה אזי (V,E,c,s,t) עבורה ארימה: תהא
                                                                                                           f \leq c חסם קיבולת: •
                                                                                      .\chi_{f}\left(v
ight)\geq0 מתקיים v\in V\backslash\left\{ s,t
ight\} •
\chi_f(v)>0 עבורה v\in V\setminus\{s,t\} איי אזי קדם ארימה אזי פונקציית ארימה (V,E,c,s,t) עבורה עודף ארימה: תהא
E_f = \{e \in E \mid c\left(e\right) > f\left(e\right)\} \cup E^{-1} איי ארימה איי מקבילות אנטי־מקבילות אנטי־מקבילות ותהא ענטי־מקבילות ותהא (V, E, c, s, t) רשת ארימה חסרת קשתות אנטי־מקבילות ותהא
E_f=E_f=\{e\in E\mid c_f\left(e
ight)>0\} רשת זרימה בעלת קשתות אנטי־מקבילות ותהא f קדם זרימה אזי (V,E,c,s,t) רשת זרימה בעלת קשתות אנטי־מקבילות ותהא
                    המוגדרת הקיבולת: תהא c_f:E_f	o\mathbb{R}_+ אזי קדם ותהא היימה ותהא רעם ועל. תהא הקיבולת: תהא פונקציית שיוריות הקיבולת:
               אזי u,v\in V אזי זרימה היים ארימה הא איר ארימה (V,E,c,s,t) אאי אלגוריתם אלגוריתם אלגוריתם אלגוריתם אלגוריתם אויי
function Push((V, E, c, s, t), f, u, v):
   f^* \leftarrow f
    if (u,v) \in E then
      f^*((u,v)) \leftarrow f((u,v)) + \Delta_{u,v}
   if (v,u) \in E then
    f^*((v,u)) \leftarrow f((v,u)) - \Delta_{u,v}
    return f^*
    .Push (f,u,v)= Push ((V,E,c,s,t),f,u,v) איז u,v\in V איז קדם זרימה תהא t קדם זרימה תהא t
                          פדם זרימה. Push (f,u,v) אזי u,v\in V אזי זרימה תהא f קדם זרימה תהא (V,E,c,s,t) אזי יטענה: תהא
                 \chi_{\mathrm{Push}(f,u,v)}\left(u
ight)=\chi_{f}\left(u
ight)-\Delta_{u,v} אזי איזי u,v\in V טענה: תהא t קדם זרימה תהא t רשת זרימה ענה: תהא
 .Push (f,u,v) אזי \Delta_{u,v}=c_f\left((u,v)
ight) עבורם u,v\in V אזי ארימה תהא t קדם ארימה t אזי t איזי t
                                        עבורה h:V	o\mathbb{N} אזי h:V	o\mathbb{N} רשת זרימה ותהא f קדם זרימה אזי (V,E,c,s,t) עבורה
                                                                                                                   .h(s) = |V| \bullet
                                                                                                                      .h(t) = 0 \bullet
                                                                                      h(u) \le h(v) + 1 אזי (u,v) \in E_f יהי
   \lambda(u)=h\left(v
ight)+1 וכן \chi_{f}\left(u
ight)>0 עבורה על קבילה: תהא \chi_{f}\left(u
ight)=0 רשת זרימה ותהא לקדם זרימה אזי\chi_{f}\left(u
ight)>0 עבורה על וערימה אוי
                 אזי u \in V אאזי אוני שם: תהא h פונקציית אובה תהא t רשת ארימה תהא אלגוריתם שינוי שם: ער אוני אוני שה (V,E,c,s,t) אאזי
function Relabel ((V, E, c, s, t), f, h, u):
    h^*(u) \leftarrow \min\{h(v) \mid (u, v) \in E_f\} + 1
    return h^*
```

Relabel (f, h, u) = Relabel ((V, E, c, s, t), f, h, u)טענה: תהא $u \in V$ רשת זרימה תהא h פונקציית גובה ותהא $u \in V$ רשת זרימה תהא h פונקציית גובה ותהא

סימון: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה תהא f קדם זרימה תהא (V,E,c,s,t) אזי רימה (V,E,c,s,t)

```
.Relabel (f, h, u) (u) \leq \text{Relabel} (f, h, u) (v) + 1 אזי (u, v) \in E_f יהי
```

. Relabel (f,h,u) $(w) \leq$ Relabel (f,h,u) (u)+1 אזי $(w,u) \in E_f$ יהי •

Relabel (f,h,u) אזי $u\in V\setminus\{s,t\}$ תהא גובה ותהא פונקציית גובה f קדם זרימה תהא t קדם זרימה ותהא t פונקציית גובה.

 $(u,v)\in E_f$ אזי קיימת $u\in V\setminus \{s,t\}$ אוי פונקציית גובה ותהא פונקציית איז קיימת t אזי קיימת t אזי קיימת t אזי קיימת t אוי קיימת t אוי קיימת t (t). Relabel t

 $(u,u) \leq h\left(v
ight) + \delta_{G_f}\left(u,v
ight)$ אאי $u,v \in V$ אינתה הוא h פונקציית גובה ותהיינה $u,v \in V$ אינתה תהא h קדם זרימה תהא h קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ויהי $u \in V$ עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב־u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u עבורו איי $u \in V$ ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u איי $u \in V$ ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-u ב-u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-

 G_f ב ל־ל ב־ל מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת ארימה תהא f קדם ארימה ותהא f פונקציית גובה אזי לא קיים מסלול מ־f למה: תהא f קדם ארימה תהא f קדם ארימה ותהא f קדם ארימה ותהא f קדם ארימה תהא f קדם ארימה תהא f קדם ארימה ותהא f פונק באשר f איי קיים מסלול f מ־f למה: f לכל f

 G_f מסקנה: תהא $\chi_f\left(u
ight)>0$ אזי קיים מסלול T מ"ע ל"כ ב"ב מסקנה: תהא אזי קיים מסלול V רשת ארימה תהא א קדם ארימה ותהא U באשר U באשר אזי U רשת ארימה תהא א קדם ארימה ותהא ע באשר ע באשר אזי U רשת ארימה תהא א ע באוריתם אוינה שים: תהא U רשת ארימה אזי רימה אזי ע באשר ע באשר שים: תהא U רשת ארימה אזי רימה אזי

```
function GoldbergTarjan((V, E, c, s, t)):
     f \leftarrow (E \rightarrow \mathbb{R}_+)
      f \leftarrow 0
     for (s,v) \in E do
      f((s,v)) \leftarrow c((s,v))
     h \leftarrow (V \rightarrow \mathbb{N})
     h \leftarrow 0
      h(s) \leftarrow |V|
     while \{u \in V \setminus \{s,t\} \mid \chi_f(u) > 0\} \neq \emptyset do
          u \leftarrow \{u \in V \setminus \{s, t\} \mid \chi_f(u) > 0\}
           if \{(u,v) \in E_f \mid h(u) = h(v) + 1\} \neq \emptyset then
                f(u,v) \leftarrow \{(u,v) \in E_f \mid h(u) = h(v) + 1\}
                f \leftarrow \text{Push}(f, u, v)
            h \leftarrow \text{Relabel}(f, h, u)
     end
     return f
```

 $f_s\left((u,v)
ight)=\left\{\mathrm{Null}\,_0^{c((u,v))}\stackrel{u=s}{\underset{\mathrm{else}}{}}$ המוגדרת $f_s:E o\mathbb{R}_+$ רשת זרימה אזי (V,E,c,s,t) המוגדרת $1_s\left(u
ight)=\left\{\mathrm{Null}\,_0^1\stackrel{u=s}{\underset{\mathrm{else}}{}}$ המוגדרת $1_s:V o\mathbb{N}$ רשת זרימה אזי V,E,c,s,t פונקציית גובה וכן לא קיים מסלול מ־s ל־s ב־s רשת זרימה אזי לאחר כל איטרציה של GoldbergTarjan מתקיים V,E,c,s,t רשת זרימה אזי לאחר כל איטרציה של V,E,c,s,t

- . הינה קדם זרימה $f \bullet$
 - פונקציית גובה. h ullet
- $.G_f$ ב ל־ל מ־s לא קיים מסלול מ-s

. פעמים. פעמים אזי הרימה אזי GoldbergTarjan קוראת לפונקציה אוי הרימה (V,E,c,s,t) רשת אזי הרימה אזי GoldbergTarjan קוראת לפה: תהא (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי הרימה אזי החלפה מרווה לכל היותר (V,E,c,s,t) פעמים. (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי GoldbergTarjan מבצעת דחיפה לא מרווה לכל היותר (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי GoldbergTarjan הינה ארימה מקסימלית.

 $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\cdot\left|V\right|^{2}
ight)$ רשת זמן ריצה בסיבוכיות עם GoldbergTarjan טענה: תהא עם זרימה אזי ניתן לממש את ריצה (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי ניתן לממש

עם Dynamic Trees עם GoldbergTarjan בסיבוכיות אמע זרימה אזי ניתן ריצה (V, E, c, s, t) עם ריצה (V, E, c, s, t) עם הערה: תהא $\mathcal{O}\left(|E||V|\log\left(|V|\right)\right)$

 $x \leq y$ אזי $i \in [n]$ לכל $x_i \leq y_i$ עבורן $x,y \in \mathbb{R}^n$ אזי $x,y \in \mathbb{R}^n$

 $x\geq y$ אזי $i\in [n]$ איזי $x,y\in \mathbb{R}^n$ איזי $x,y\in \mathbb{R}^n$ סימון: תהיינה

תהא $q\in\mathbb{R}^k$ יהי $Q\in M_{k imes n}(\mathbb{R})$ תהא יהי $P\in M_{m imes n}(\mathbb{R})$ תהא יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$

תחת ההנחות קיצון של איז מציאת נקודת ההנחות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות לינארי מציאת נקודת איז תהא ($Px \leq p,Qx=q,Rx \geq r$).

בעיית תכנות לינארי מקסימום של c, P, p, Q, q, R, r תחת ההנחות מקסימום של בעיית תכנות לינארי מקסימלית: תהא (c, P, p, Q, q, R, r) תחת ההנחות $Px \leq p, Qx = q, Rx \geq r$

בעיית תכנות לינארי מינימום של c, P, p, Q, q, R, r תחת ההנחות מינימום של c, P, Q, q, R, r תחת ההנחות $c^T x$ מינימלית: תהא $c^T x$ מינימלית: תהא $c^T x$ החת ההנחות $c^T x$ מינימלית: c, P, Q, q, R, r תחת ההנחות $c^T x$ החת ההנחות $c^T x$ מינימלית: c, P, Q, q, R, r ההנחות ההנחות מינימלית: תהא $c^T x$ מינימלית: תהא $c^T x$ החת ההנחות מינימלית: c, P, Q, q, R, r מינימלית: תהא $c^T x$ החת ההנחות מינימלית: c, P, Q, q, R, r מינימלית: תהא מינ

הערה: מכאן והלאה נשתמש במונח תוכנה לינארית גם עבור בעיית תכנות לינארי.

סימון: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) בעיית עכנות לינארית מקסימלית אזי

$$\begin{aligned} & \max & c^T x \\ & \text{s.t.} & Px \leq p \\ & Qx = q \\ & Rx \geq r \end{aligned}$$

סימון: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) בעיית עכנות לינארית מינימלית אזי

 $Rx \geq r$ וכן $Px \leq p$ וכן $Px \leq p$ עבורו $x \in \mathbb{R}^n$ עבורו לינארית: תהא (c, P, p, Q, q, R, r) תוכנה לינארית: תהא $Rx \geq r$ תוכנה לינארית: תהא LP תוכנה לינארית: תהא LP תוכנה לינארית: תהא $Rx \in \mathbb{R}^n$ בעיית התכנות הלינארי.

תוכנה לינארית פיזבילית: תוכנה לינארית LP עבורה קיים פתרון אופטימלי.

 $x\in\mathbb{R}^n$ עבורה המקיים כי לכל פתרון פיזבילי עבורה קיים $B\in\mathbb{R}$ עבורה קיים עבורה לינארית תוכנה לינארית תוכנה לינארית (c,P,p,Q,q,R,r) עבורה מקסימלית מקסימלית חסומה: תוכנה לינארית מקסימלית חסומה:

 LP משפט: תהא LP תוכנה לינארית מקסימלית אזי (LP בעלת פתרון אופטימלי) חסומה ופיזבילית).

 $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ יהי המקסימלית התוכנה הלינארית ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ ויהי ויהי $A\in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$ תהא ויהי $c\in\mathbb{R}^n$ יהי הינה הינה

$$\begin{aligned} & \max \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

.LP אשר שקולה ל-LP אענה: תהא תוכנה לינארית אזי קיימת תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית LP ענה: תהא $Px \leq p, Qx = q, Rx \geq r$ תוכנה לינארית אזי (c, P, p, Q, q, R, r) תוכנה לינארית אזי

 $\alpha x+(1-lpha)\ y\in K$ מתקיים $lpha\in[0,1]$ מתקיים $x,y\in K$ עבורה לכל עבורה לכל $x,y\in K$ אזי $x,y\in K$ מתקיים אזיים $x\in K$ מתקיים $x\in K$ נקודה קיצונית בקבוצה: תהא $x\in K$ אזי $x\in K$ אזי $x\in K$ עבורה לכל $x\in K$ ולכל קידון: יהי $x\in K$ פאון אזי נקודה קיצונית $x\in K$

תוכנה הלינארית המקסימלית אזי התוכנה הלינארית המקסימלית אזי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ תהא המקסימלית יהי $n,m\in\mathbb{N}$ יהי יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ יהי המקסימלית בצורה משוואתית: יהיו $(c,0,0,A,b,I_n,0)$

 $(c,0,0,A,b,I_n,0)$ יהי המקסימלית התוכנה הלינארית ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ ויהי ויהי $A\in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$ תהא הינה $c\in\mathbb{R}^n$ יהי הינה הינה

$$\begin{aligned} & \max \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad Ax = b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

צורת סלאק/צורה רפויה של תוכנה לינארית סטנדרטית: תהא תוכנה ($c,A,b,0,0,I_n,0$) תוכנה לינארית סטנדרטית אזי התוכנה ($(\mathrm{Null}\,{}^c_0)\,,0,0,(A|I_m)\,,b,I_{n+m},0)$ הלינארית המקסימלית

הערה המקסימלית אזי התוכנה הלינארית חוכנה לינארית חוכנה לינארית חוכנה לינארית חוכנה לינארית חוכנה לינארית חוכנה לינארית ($(\mathrm{Null}\,_0^c),0,0,(A|I_m),b,I_{n+m},0)$

$$\max \quad c^T x$$
s.t.
$$Ax + s = b$$

$$(\text{Null }_s^x) \ge 0$$

משתנים בסיסיים בצורה רפויה: תהא SF צורה רפויה אזי $\{x_{n+1},\dots,x_{n+m}\}$ בבעיית התכנות הלינארי. משתנים לא בסיסיים בצורה רפויה: תהא SF צורה רפויה אזי $\{x_1,\dots,x_n\}$ בבעיית התכנות הלינארי. סענה צורה רפויה: תהא SLP תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית ויהי $x\in\mathbb{R}^n$ אזי (קיים $y\in\mathbb{R}^m$ עבורו $y\in\mathbb{R}^n$ פתרון פיזבילי של SLP). הצורה הרפויה) (x_n)

אלגוריתם סימפלקס: ... טענה: בעיית הזרימה המקסימלית הינה בעיית תכנות לינארי מקסימלית.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי בעיית הזרימה (V,E,c,s,t) מסקנה:

$$\begin{aligned} & \max & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,t)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,t)\right) \\ & \text{s.t.} & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,u)\right) = 0 & , \forall v \in V \backslash \{s,t\} \\ & & f\left((u,v)\right) \leq c\left((u,v)\right) & , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & & f\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

(V,E,c,s,t,a) אזי $a:E o\mathbb{R}$ אחי הרימה ותהא עלות: תהא אוי (V,E,c,s,t) רשת הרא הרימה בעלת עלות: תהא (V,E,c,s,t) רשת הרימה ותהא (V,E,c,s,t) רשת אוי רימה אוי עלות ארימה: תהא הרימה עלות הרימה ותהא אוי רימה אוי רי

וכן $\chi_f\left(t
ight)=d$ עבורה f אזי פונקציית איי פונקציית עלות ויהי עלת ארימה עלת (V,E,c,s,t,a) וכן בעיית העלות המינימלית: תהא המינימלית: $\sum_{e\in E}a\left(e\right)\cdot f\left(e\right)$

טענה: בעיית העלות המינימלית הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t,a) רשת זרימה בעלת עלות ויהי $d\in\mathbb{N}_+$ אזי בעיית העלות המינימלית הינה

$$\begin{aligned} & \min \quad \sum_{(u,v) \in E} a\left((a,v)\right) \cdot f\left((a,v)\right) \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,t)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,t)\right) = d \\ & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,u)\right) = 0 \qquad , \forall v \in V \backslash \left\{s,t\right\} \\ & f\left((u,v)\right) \leq c\left((u,v)\right) \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & f\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה בעלת עלות יהי $d\in\mathbb{N}_+$ ותהא זרימה מקסימלית של (V,E,c,s,t,a) אזי (בעיית העלות המינימלית פיזבילית). $(|f|\geq d)$

טענה: תהא (V,E,c,s,t,a) השת בעית העלות ויהי עלות ויהי עלות ויהי אזי בעיית העלות המינימלית פיזבילית אזי בעיית העלות המינימלית בעיית פתרון אופטימלי.

 $f:E o\mathbb{R}_+$ אזי פונקציה אזי פונקציה עלות ותהא עלות איימה בעלת (V,E,c,s,t,a) אזי פונקציה בעיית העלות המינימלית המינימלית עם היצע וביקוש: תהא $\chi_f=d$ וכן $\chi_f=d$ וכן $\chi_f=d$ וכן $\chi_f=d$ וכן לפר בורה בעיית העלות מינימלית.

טענה: בעיית העלות המינימלית עם היצע וביקוש הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: תהא עם המינימלית עם היצע וביקוש הינה $d:V o \mathbb{Z}$ אזי בעלת עלות ותהא אוי בעלת עם היצע וביקוש הינה (V,E,c,s,t,a) מסקנה:

$$\begin{aligned} & \min & & \sum_{(u,v) \in E} a\left((a,v)\right) \cdot f\left((a,v)\right) \\ & \text{s.t.} & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,u)\right) = d\left(v\right) & , \forall v \in V \\ & & f\left((u,v)\right) \leq c\left((u,v)\right) & , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & & f\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

טענה: תהא המינימלית עם היצע וביקוש פיזבילית עבורה בעיית העלות ותהא איז פיזבילית על זרימה בעלת עלות ותהא איז רימה בעלת אוו ותהא בעלת עלות ותהא בעלת עלות ותהא וביקוש פיזבילית וביקוש פיזבילית בערית העלות המינימלית עם היצע וביקוש פיזבילית בעלת וביקוש פיזבילית וביקוש פיזבילית וביקוש פיזבילית בעלת עלות ותהא בעלת ותהא ב

s.t.
$$\sum_{u \in V} f\left(\left(u,t_{i}\right),i\right) - \sum_{u \in V} f\left(\left(t_{i},u\right),i\right) = \alpha \cdot d\left(i\right) \qquad , \forall i \in [k]$$

$$\sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left(\left(u,v\right),i\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left(\left(v,u\right),i\right) = 0 \qquad , \forall i \in [k] . \forall v \in V \backslash \left\{s_{i},t_{i}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{k} f\left(\left(u,v\right),i\right) \leq c\left(\left(u,v\right)\right) \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E$$

$$f\left(\left(u,v\right),i\right) \geq 0 \qquad , \forall i \in [k] . \forall \left(u,v\right) \in E$$

 $y:V o\mathbb{R}$ אזי $s\in V$ אזי δ גרף מכוון ממושקל אוזי δ אזי אזי $s\in V$ אזיים ויהי שליליים אזי משקל: יהי δ גרף מכוון ממושקל חסר מעגלים שליליים $s\in V$ אזי אזי g לכל g לכל g לכל g לכל g לכל אוזי g לכל אוזי מעבורה g

תר־משקל $y:V\to\mathbb{R}$ ותהא $v\in V$ לכל $\delta\left(s,v\right)<\infty$ עבורו יהי $s\in V$ יהי שליליים און ממושקל חסר עבורן ממושקל $v:V\to\mathbb{R}$ ותהא עבורו $v\in V$ למה: יהי עבורו מעגלים שליליים שליליים יהי יהי עבורו מעגלים און מווע מווע לכל עבורו עבורו איזי עבורו איזי עבורו און מווע מעגלים שליליים יהי עבורו איזי עבורו און מעגלים שליליים יהי עבורו און מעגלים שליליים יהי עבורו איזי עבורו און מעגלים שליליים יהי עבורו עבורו עבורו און מעגלים שליליים שליליים יהי עבורו און מעגלים שליליים שליליים יהי עבורו עבור

 $y:V o\mathbb{R}$ אותהא $v\in V$ לכל לכל לכל און עבורו $s\in V$ יהי שליליים שליליים שליליים ממושקל חסר מעגלים ממושקל אוי אוי קשת $s\in V$ עבורה $y\left(e_{2}
ight)=y\left(e_{1}
ight)+\ell\left(e\right)$ עבורה בורה עבורה עבורה לפען אוי קשת

 $y:V o\mathbb{R}$ תהא $v\in V$ לכל לכל לכל $\delta\left(s,v
ight)<\infty$ עבורו יהי שליליים שליליים שליליים עבורו חסר מעגלים עבורו ממושקל א תהא $v\in V$ חסר מעגלים שליליים יהי עבורו $s\in V$ המכיל רק קשתות הדוקות אזי עבורו קיים מסלול $u\in V$ המכיל רק קשתות הדוקות אזי עבורו קיים מסלול

 $y:V o\mathbb{R}$ ותהא $v\in V$ לכל לכל לכל לכל עבורו אור מטקנה: יהי אורף מכוון ממושקל חסר מעגלים שליליים יהי שליליים אור אזי עבורו אורף מכוון ממושקל פיזבילית.

טענה: בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: יהי S גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי ויהי $s\in V$ אזי בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה

$$\max \quad \sum_{u \in V} y(u)$$
 s.t.
$$y(v) - y(u) \le \ell(u,v) \qquad , \forall (u,v) \in E$$

$$y(s) = 0$$

מאני $\delta\left(s,v
ight)<\infty$ עבורו אזי $\delta\left(s,v
ight)<\delta\left(s,v
ight)$ לכל לינים שליליים ייהי אזי ממושקל ממושקל חסר מעגלים שליליים אזי משפט: איזי

- בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא בעלת פתאון אופטימלי.
- $u\in V$ לכל $y\left(u
 ight)=\delta_{\ell}\left(s,u
 ight)$ איזי שופטימלי של בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא איזי $y\left(u
 ight)$

טענה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ בעל מעגל שלילי ויהי $s\in V$ אזי בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא אי פיזבילית. טענה: יהי δ גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי $s\in V$ עבורו קיים $t\in V$ המקיים המסלולים הקצרים מנקודת מוצא לא חסומה.

תחת ההנחות c^Tx מוכנה לינארי אזי מציאת תכנות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות בעיית תכנות לינארי בשלמים: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות בעיית תכנות לינארי בשלמים: תחת ההנחות המוחד בעיית הבעיית המוחד בעיית הבעיית המוחד בעיית המוחד בעוד בעיית המוחד בעודת המוחד בעודת המוחד בעודת המוחד בעיית המוחד בעודת המוחדת המוחד בעודת המוחדת בעודת המוחד בעודת המוחדת המוחד בעודת המוחד בעודת המוחדת המוחד ב

תוכנה הלינארית אזי התוכנה הלינארית חוכנה ($c,A,b,0,0,I_n,0$) תוכנה הלינארית אזי התוכנה הלינארית המינימלית ($\left(b,0,0,0,0,\left(\mathrm{Null}\,_{I_m}^{A^T}\right),\left(\mathrm{Null}\,_{0}^{c}\right)\right)$

 $\left(b,0,0,0,0,\left(\mathrm{Null}\,_{I_m}^{A^T}
ight),\left(\mathrm{Null}\,_0^c
ight)
ight)$ המינימלית המינימלית אזי התוכנה לינארית סטנדרטית אזי התוכנה לינארית המינימלית ($c,A,b,0,0,I_n,0$) הינה

$$\begin{aligned} & \min & b^T x \\ & \text{s.t.} & A^T x \geq c \\ & & x > 0 \end{aligned}$$

y ויהי $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ של פתרון פיזבילי פתרון משפט חוכנה לינארית סטנדרטית ווכנה $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ ויהי $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ של התוכנה הלינארית הדואלית אזי $c^Tx \leq b^Ty$ משפט דואליו של התוכנה הלינארית הדואלית אזי

משפט הפרדת היפר־משטח: תהא $\beta\in\mathbb{R}$ עבורם $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי קיים $x\in\mathbb{R}^n$ וקיים א עבורם $K\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן $x\in X^T$ וכן $x\in X^T$ אוכן $x\in X^T$ לכל $x\in X^T$

למה מהבאים מהבאים אזי בדיוק אויהי $h\in\mathbb{R}^m$ ויהי $A\in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$ מתקיים למה מארקאס: תהא

- Ax=b וכן $x\geq 0$ עבורו $x\in\mathbb{R}^n$ פיים
- $A^Ty \geq 0$ וכן $b^Ty < 0$ עבורו $y \in \mathbb{R}^m$ פיים •

משפט דואליות חזקה: תהא SLP תוכנה לינארית סטנדרטית ותהא DLP התוכנה הלינארית הדואלית אזי

- .x=y אזי DLP אופטימלי אופטימלי פתרון ויהי או SLP ויהי x פתרון פתרון יהי יהי
 - (SLP) פיזבילית וחסומה \Longrightarrow (חסומה) פיזבילית וחסומה).
 - \bullet (א פיזבילית) לא DLP) לא חסומה SLP) \bullet
 - \bullet (SLP) לא פיזבילית) לא SLP) אומה).

תוכנה לינארית פרימאלית: תהא SLP תוכנה לינארית סטנדרטית תהא DLP התוכנה הלינארית הדואלית ותהא SDLP הצורה הסטנדרטית של DLP אזי התוכנה הלינארית הדואלית של SDLP.

שקולה ל-SDLP שקולה ל-SDLP תוכנה לינארית סטנדרטית ותהא SDLP התוכנה הלינארית הפרימאלית אזי

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה המקסימלית הינה

$$\begin{split} & \min \quad \sum_{(u,v) \in E} c\left((u,v)\right) \cdot z\left((u,v)\right) \\ & \text{s.t.} \quad y\left(v\right) - y\left(u\right) + z\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall u,v \in V \backslash \left\{s,t\right\}.\left(u,v\right) \in E \\ & \quad y\left(v\right) + z\left((s,v)\right) \geq 1 \qquad , \forall \left(s,v\right) \in E \\ & \quad -y\left(u\right) + z\left((u,t)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,t\right) \in E \\ & \quad z\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \end{split}$$

יטענה: תהא אקולה לתוכנה הדואלית של בעיית הזרימה אזי הבעיה הדואלית שקולה לתוכנה הלינארית (V,E,e,s,t) רשת ארימה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה אזי הבעיה הדואלית שקולה לתוכנה הלינארית

$$\begin{aligned} & \min & & \sum_{(u,v) \in E} c\left((u,v)\right) \cdot z\left((u,v)\right) \\ & \text{s.t.} & & y\left(v\right) - y\left(u\right) + z\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & & y\left(s\right) = 1 \\ & & y\left(t\right) = 0 \\ & & z\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

עבורו (Null_y^z) אופטימלי פתרון אופטימלית בעית הזרימה של בעיית אזי הבעיה הדואלית אזי הבעיה אזי הבעיה אזי הבעיה אזי הבעיה עבורו ((V,E,c,s,t) אווי אופטימלי בעיית אזי הבעיה אזי אזי הבעיה אווי בעוד אווי בעים אווי הבעיה אזי הבעיה אווי הבע

מנה מנקודת מוצא מכוון ממושקל $s \in V$ ויהי ויהי מנח גרף מכוון ממושקל ויהי איי הבעיה הדואלית של מענה: יהי מכוון ממושקל ויהי ויהי איי הבעיה הדואלית של מענה: יהי

$$\begin{aligned} & \min & & \sum_{(u,v) \in E} \ell\left((u,v)\right) \cdot x\left((u,v)\right) \\ & \text{s.t.} & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} x\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} x\left((v,u)\right) = 1 & , \forall v \in V \backslash \left\{s\right\} \\ & & x\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

מסקנה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ יהי יהי $s\in V$ יהי ויהי $s\in V$ יהי מכוון ממושקל יהי מכוון אופטימלי של הבעיה הדואלית או מסקנה: יהי אזי $s\in V$ יהי מכוון ממושקל אזי $s\in V$ יהי מכוון ממושקל יהי מכוון ממושקל אזי $s\in V$ יהי מכוון ממושקל יהי מכוון ממושקל יהי מכוון אופטימלי מכוון ממושקל יהי מכוון ממושקל יהי מכוון מוחשקל יהי מכוון מוחשקל יהי מכוון ממושקל יהי מכוון מכוון ממושקל יהי מכוון ממושקל יהי מכוון ממושקל יהי מכוון מכוון ממושקל יהי מכוון ממושקל יהי מכוון מכוו