

**מטריקה אוקלידית:** תהייה  $x, y \in \mathbb{R}^n$  אזי  $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

**הגדרה:** תהייה  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $d_2(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} d_2(x, y)$

**נקודה קרובה ביותר לנקודה:** תהא  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ויהי  $a \in \mathbb{R}^n \setminus X$  אזי  $x \in X$  עבורו לכל  $y \in X$  מתקיים  $d_2(x, a) \leq d_2(y, a)$

**טענה:** תהא  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  יהי  $a \in \mathbb{R}^n \setminus X$  ותהא  $x \in X$  אזי  $(x \text{ הנקודה הקרובה ביותר ל-} a \text{ ב-} X) \iff (d_2(a, x) = d_2(a, X))$

**משפט הנקודה הקרובה ביותר:** תהא  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ויהי  $a \in \mathbb{R}^n \setminus X$  אזי קיימת נקודה קרובה ביותר ל- $a$  ב- $X$ .

**טענה:** תהא  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  קמורה ויהי  $a \in \mathbb{R}^n \setminus X$  אזי קיימת נקודה קרובה ביותר ל- $a$  ב- $X$ .

**היפר-משטח/על-מישור:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $\beta \in \mathbb{R}$  אזי  $H(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha, x \rangle = \beta\}$

**חצי מרחב נוצר על ידי היפר-משטח:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $\beta \in \mathbb{R}$  אזי

• עליון:  $H^+(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha, x \rangle \geq \beta\}$

• תחתון:  $H^-(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \alpha, x \rangle \leq \beta\}$

**טענה:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $\beta \in \mathbb{R}$  אזי  $H^+(\alpha, \beta) = H^-(\alpha, -\beta)$

**טענה:** יהי  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $\beta \in \mathbb{R}$  אזי  $H^+(\alpha, \beta) \cap H^-(\alpha, \beta) = H(\alpha, \beta)$

**היפר-משטח מפריד:** תהא  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  ויהי  $x \in \mathbb{R}^n$  אזי היפר-משטח  $H(\alpha, \beta)$  המקיים אחד מהבאים

•  $S \subseteq H^-(\alpha, \beta)$  וכן  $x \in H^+(\alpha, \beta)$

•  $S \subseteq H^+(\alpha, \beta)$  וכן  $x \in H^-(\alpha, \beta)$

**היפר-משטח מפריד ממש:** תהא  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  ויהי  $x \in \mathbb{R}^n$  אזי היפר-משטח מפריד  $H(\alpha, \beta)$  המקיים אחד מהבאים

•  $S \subseteq H^-(\alpha, \beta) \setminus H(\alpha, \beta)$  וכן  $x \in H^+(\alpha, \beta) \setminus H(\alpha, \beta)$

•  $S \subseteq H^+(\alpha, \beta) \setminus H(\alpha, \beta)$  וכן  $x \in H^-(\alpha, \beta) \setminus H(\alpha, \beta)$

**משפט ההפרדה על ידי היפר-משטח:** תהא  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  סגורה וקמורה יהי  $a \in \mathbb{R}^n \setminus S$  ותהא  $x \in \mathbb{R}^n$  הנקודה הקרובה ביותר ל- $a$  ב- $S$

אזי  $H(a - x, \langle a - x, x \rangle)$  היפר-משטח מפריד בין  $S$  ל- $a$ .

**טענה:** תהא  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  סגורה וקמורה ויהי  $a \in \mathbb{R}^n \setminus S$  אזי קיים  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  וקיים  $\beta \in \mathbb{R}$  עבורם  $H(\alpha, \beta)$  היפר-משטח מפריד ממש

בין  $S$  ל- $a$ .

**משפט:** תהא  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  קמורה וקומפקטית ותהא  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  קמורה וסגורה עבורה  $S \cap T = \emptyset$  אזי קיים  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  וקיים  $\beta \in \mathbb{R}$

עבורם  $H(\alpha, \beta)$  היפר-משטח מפריד ממש בין  $S$  ל- $T$ .

**משפט:** תהייה  $X, Y$  קבוצות ותהא  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y)$

**פונקציה בילינארית:** יהיו  $X, Y$  מ"ו מעל  $\mathbb{R}$  אזי  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת

• לכל  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$  לכל  $x \in X$  ולכל  $y, z \in Y$  מתקיים  $f(x, \lambda y + \mu z) = \lambda f(x, y) + \mu f(x, z)$

• לכל  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$  לכל  $x, w \in X$  ולכל  $y \in Y$  מתקיים  $f(\lambda x + \mu w, y) = \lambda f(x, y) + \mu f(w, y)$

**סימפלקס:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\Delta_n = \left\{x \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\right\}$

**נקודות קיצון של סימפלקס:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$

**מטריצה מייצגת:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  ותהא  $f : \Delta_n \times \Delta_m \rightarrow \mathbb{R}$  בילינארית אזי  $[f] \in M_{(n+1) \times (m+1)}(\mathbb{R})$  המוגדרת  $([f])_{i,j} = f(e_i, e_j)$

**טענה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  תהא  $f : \Delta_n \times \Delta_m \rightarrow \mathbb{R}$  בילינארית יהי  $x \in \Delta_n$  ויהי  $y \in \Delta_m$  אזי  $f(x, y) = x^T \cdot [f] \cdot y$

**משפט המינימקס:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  ותהא  $f : \Delta_n \times \Delta_m \rightarrow \mathbb{R}$  בילינארית אזי

$$\max_{x \in \Delta_n} \min_{y \in \Delta_m} f(x, y) = \min_{y \in \Delta_m} \max_{x \in \Delta_n} f(x, y)$$

**מסקנה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  ותהא  $A \in M_{(n+1) \times (m+1)}(\mathbb{R})$  אזי  $\max_{x \in \Delta_n} \min_{y \in \Delta_m} x^Y A y = \min_{y \in \Delta_m} \max_{x \in \Delta_n} x^Y A y$

**סימון:**  $\Delta_\infty = \left\{\mu : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(n) = 1\right\}$

**מטריצה חסומה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  אזי  $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$  עבורה קיים  $M > 0$  עבורו לכל  $i \in [n]$  ולכל  $j \in [m]$  מתקיים

$$\left| (A)_{i,j} \right| < M$$

**מסקנה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  ותהא  $A \in M_{\infty \times (m+1)}(\mathbb{R})$  חסומה אזי  $\max_{x \in \Delta_\infty} \min_{y \in \Delta_m} x^Y A y = \min_{y \in \Delta_m} \max_{x \in \Delta_\infty} x^Y A y$

**משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס:** תהייה  $A_1, A_2$  קבוצות סופיות ותהא  $u : A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $(A_1, A_2, u)$

**פעולות/אסטרטגיות של שחקן 1:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי  $A_1$

**פעולות/אסטרטגיות של שחקן 2:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי  $A_2$

**פונקציית תשלומים:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי  $u$

**פעולה/אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי התפלגות על  $A_1$

**פעולה/אסטרטגיה מעורבת של שחקן 2:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי התפלגות על  $A_2$

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה סופית אזי  $\Delta(A) = \{\mu : A \rightarrow [0, 1] \mid \sum_{a \in A} \mu(a) = 1\}$ .

**סימון:** יהי  $(A, B, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס תהא  $\mu \in \Delta(A)$  ותהא  $\lambda \in \Delta(B)$  אזי

$$u(\mu, \lambda) = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} \mu(a) \cdot \lambda(b) \cdot u(a, b)$$

**ערך המקסמין של משחק:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי

$$\underline{v} = \max_{x \in \Delta(A_1)} \min_{y \in \Delta(A_2)} u(x, y)$$

**ערך המינימקס של משחק:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי

$$\bar{v} = \min_{y \in \Delta(A_2)} \max_{x \in \Delta(A_1)} u(x, y)$$

**מסקנה:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי  $\bar{v} = \underline{v}$ .

**ערך של משחק:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי  $v = \bar{v} = \underline{v}$ .

**אסטרטגיה מעורבת אופטימלית עבור שחקן 1:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי  $x \in \Delta(A_1)$

$$\text{עבורה } \min_{y \in \Delta(A_2)} u(x, y) = v$$

**אסטרטגיה מעורבת אופטימלית עבור שחקן 2:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס אזי  $y \in \Delta(A_2)$

$$\text{עבורה } \min_{x \in \Delta(A_1)} u(x, y) = v$$

**פעולה שולטת חזק על פעולה עבור שחקן 1:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא  $a \in A_1$  אזי

$$b \in A_1 \text{ עבורה } u(b, c) < u(a, c) \text{ לכל } c \in A_2$$

**פעולה שולטת חזק על פעולה עבור שחקן 2:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא  $a \in A_2$  אזי

$$b \in A_2 \text{ עבורה } u(c, a) < u(c, b) \text{ לכל } c \in A_1$$

**פעולה שולטת חלש על פעולה עבור שחקן 1:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא  $a \in A_1$  אזי

$$b \in A_1 \text{ עבורה}$$

$$\bullet \text{ לכל } c \in A_2 \text{ מתקיים } u(b, c) \leq u(a, c)$$

$$\bullet \text{ קיים } c \in A_2 \text{ עבורו } u(b, c) < u(a, c)$$

**פעולה שולטת חלש על פעולה עבור שחקן 2:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא  $a \in A_2$  אזי

$$b \in A_2 \text{ עבורה}$$

$$\bullet \text{ לכל } c \in A_1 \text{ מתקיים } u(c, a) \leq u(c, b)$$

$$\bullet \text{ קיים } c \in A_1 \text{ עבורו } u(c, a) < u(c, b)$$

**משפט:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס תהא  $a \in A_1$  פעולה נשלטת חזק עבור שחקן 1 ותהא  $x$

$$\text{אסטרטגיה מעורבת אופטימלית עבור שחקן 1 אזי } x(a) = 0$$

**משפט:** יהי  $(A_1, A_2, u)$  משחק בצורה אסטרטגית שני-שחקנים סכום-אפס ותהא  $a \in A_1$  פעולה נשלטת חלש עבור שחקן 1 אזי

$$\bullet v((A_1, A_2, u)) = v((A_1 \setminus \{a\}, A_2, u))$$

$$\bullet \text{ תהא } x \in \Delta(A_1) \text{ אזי } (x \text{ אופטימלית במשחק } (A_1, A_2, u)) \iff (u|_{A_1 \setminus \{a\}} \text{ אופטימלית במשחק } ((A_1 \setminus \{a\}, A_2, u)))$$