טופולוגיה: תהא א קבוצה אזי $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי קבוצה אזי תהא

- $X, \emptyset \in \mathcal{T} \bullet$
- $\cup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ אזי $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ תהיינה •
- $\cap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ איי $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}$ תהיינה \bullet (X,\mathcal{T}) אזי א איי טופולוגיה על טופולוגיה על $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}\left(X
 ight)$ מרחב טופולוגיה על איי תהא
- $U\in\mathcal{T}$ המקיימת $U\subseteq X$ אזי טופולוגי מרחב (X,\mathcal{T}) המקיימת $.X \, \backslash E \in \mathcal{T}$ המקיימת $E \subseteq X$ אזי טופולוגי מרחב ($X,\,\mathcal{T})$ יהי יהי קבוצה קבוצה קבוצה \mathcal{T} טענה: תהא $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}. (\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T})$ וכן $X, \varnothing \in \mathcal{T}$ עבורה $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ אזיי

. $(U \cap V \in \mathcal{T}$ מתקיים $U, V \in \mathcal{T}$ טופולוגיה) $\{X,\varnothing\}$ הטופולוגיה הטריוואלית: תהא איי קבוצה איי

 $\mathcal{P}\left(X
ight)$ איי קבוצה איי תהא תהא איי הבדידה/הדיסקרטית: תהא מטרי מטרי מרחב מטרי. יהי ממרחב מטרי מטרי מטרי מטרי מטרי מטרי אזי הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: $.\mathcal{T}(X,\rho) = \{ U \subseteq X \mid \forall x \in U.\exists r > 0.B_r(x) \subseteq U \}$

טופולוגי מטריז מטריז מטריז מטריז קיים ($X, \,
ho$) עבורו עבור מטריז מרחב מטרי מרחב מטריז מטריזבילית:

 $\{A\subseteq X\mid |X\backslash A|<\aleph_0\}\cup\{\varnothing\}$ אזיי קבוצה תהא תקריסופית: תהא הקויסופית: תהא אזי $\mathcal{C}=\{E\subseteq X\mid Xackslash E\in\mathcal{T}\}$ משפט: יהי (X,\mathcal{T}) אזי משפט: יהי

- $X, \emptyset \in C \bullet$
- $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} E_{\alpha}\in\mathcal{C}$ אזי אזיי אוי $\{E\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{C}$ תהיינה •
- $\bigcup_{i=1}^{ar{n}} E_i \in \mathcal{C}$ אזיי $\{E_i\}_{i=1}^{ar{n}} \subseteq \mathcal{C}$ תהיינה ulletבסיס לטופולוגיה: תהא א $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי קבוצה אזי תהא בסיס לטופולוגיה: המקיימת
 - $\bigcup B = X \bullet$
- אזי $x\in B_1\cap B_2$ ותהא א ותהא $B_1\cap B_2
 eq \varnothing$ עבורן א עבורן של $B_1,B_2\in \mathcal{B}$ תהיינה $B_3\subseteq B_1\cap B_2$ וכן $x\in B_3$ עבורה $B_3\in \mathcal{B}$ קיימת

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P} \left(X
ight)$ הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא $.\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{ U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists B \in \mathcal{B}. (x \in B) \land (B \subseteq U) \}$ X טופולוגיה על $\mathcal{T}\left(\mathcal{B}
ight)$ אזי בסיס אזי בחיה ויהי על אויהי על למה: תהא וכן $\mathcal{B}_{ ext{Sorg}} = \{[a,b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_E = \{(a,b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_E \cup \left\{ (a, b) \setminus \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \mid a < b \right\}$

 \mathbb{R} טענה: \mathcal{B}_E , $\mathcal{B}_{\mathrm{Sorg}}$, \mathcal{B}_K טענה: $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{E}
ight))$:הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית $\mathbb{R}_{Sorg} = (\mathbb{R},\,\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{Sorg}
ight))$ הישר של זורגנפריי:

טופולוגיית $K_K = \left(\mathbb{R},\,\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_K
ight)
ight):K$ טופולוגיית משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי שקול לטופולוגיה בסיס אזי משפט אפיון מקול לטופולוגיה ביהי

 $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{ U \subseteq X \mid \exists A \subseteq \mathcal{B}.U = \bigcup A \}$ $\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_1
ight)$ וכן $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_2
ight)$ בסיסים עבורם $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ יהיו

 $\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{1}\right)=\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{2}\right)$ איי $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על עבורן אופולוגיה: תהא קבוצה ותהיינה עדינה עדינה לטופולוגיה: תהא אופולוגיה עדינה לטופולוגיה: עדינה לטופולוגיה עדינה לטופולוגיה אופולוגיה עדינה לטופולוגיה אופולוגיה עדינה לטופולוגיה עדינה לטופולוגיה עדינה לטופולוגיה אופולוגיה עדינה לטופולוגיה עדינה עדינה עדינה עדינה עדינה עדינה עדינה לטופולוגיה עדינה לטופולוגיה עדינה עד

 $A\in\mathcal{A}$ סענה: יהי $x\in\mathcal{U}$ ולכל $\mathcal{U}\in\mathcal{T}$ עבורה לכל עבורה א מ"ט ותהא מ"ט ותהא עבורה לכל עבורה לכל א \mathcal{T} אזי \mathcal{A} בסיס של ($x\in A$) \wedge ($A\subset U$) המקיימת

סימון: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B}_{\, <} \, = \, \{(a,b) \mid a < b\} \, \cup \, \{[a,b) \mid a \leq X\} \, \cup \, \{(a,b] \mid X \leq b\}$

. בסיס אזי א $\mathcal{B}_{<}$ מענה: תהא אזי קבוצה בעלת הסדר בעלת קבוצה בסיס. $\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{<}
ight)$ טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי . מצוייד בטופולוגיית הסדר זהה ל־ $\mathbb R$ מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית מצוייד בטופולוגיית הסדר מאברי

 $\bigcup \mathcal{S} = X$ עבורה $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי קבוצה אזי תהא $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ אזי תת־בסיס אזי א תת־בסיס: תהא א קבוצה הנוצרת מתת־בסיס: תהא תת־בסיס אזי אוויהי אוויהי מתת־בסיס אזי תהא $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \left\{ U \subseteq X \mid \exists A_1 \dots A_k \subseteq \mathcal{S}.U = \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^k A\right) \right\}$ X למת: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ תת־בסיס אזי $\mathcal{T}\left(\mathcal{S}
ight)$ טופולוגיה על

> טופולוגיית זריצקי: יהי \mathbb{F} שדה ויהי אריצקי: טופולוגיית זריצקי $.\mathcal{T}\left(\left\{\left\{a\in\mathbb{F}^{n}\mid f\left(a\right)\neq0\right\}\mid f\in\mathbb{F}\left[x_{1},\ldots,x_{n}\right]\right\}\right)$

 $x\in U$ עבורה $U\in \mathcal{T}$ אזי אזי ויהי מ"ט ויהי ($X,\mathcal{T})$ יהי יהי סביבה: יהי .int $(A)=\mathring{A}=igcup_{U\subset A}U$ איזי איז $A\subseteq X$ משט ותהא (X,\mathcal{T}) פנים של קבוצה: יהי

.cl $(A)=\overline{A}=\bigcap \ A\subseteq E$ איז $A\subseteq X$ איז ותהא (X,\mathcal{T}) מ"ט והי יהי

 $E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{T}$

 $.\partial A=\overline{A}ackslash \mathrm{int}\,(A)$ אזי א $A\subseteq X$ מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) אזי יהי שפה של קבוצה: יהי $A\subseteq A\subseteq \overline{A}$ אזי $A\subseteq X$ מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) מ"ט ותהא אינה: יהי טענה: יהי $A\subseteq X$ מ"ט ותהא אוי (X,\mathcal{T}) אזי

- .int $(A) = \max_{\subset} \{ \mathcal{U} \in \mathcal{T} \mid \mathcal{U} \subseteq A \}$ •
- $.\overline{A} = \min_{\subset} \{ E \mid (A \subseteq E) \land (E^{C} \in \mathcal{T}) \} \bullet$ $x\in X$ ויהי והי $X\in X$ התב"ש משענה: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט תהא
- $U\cap A
 eq \emptyset$ מתקיים $x\in U$ המקיים $U\in \mathcal{T}$ לכל •
- $B\cap A
 eq\emptyset$ מתקיים $x\in B$ המקיים $B\in\mathcal{B}$ אזי לכל \mathcal{T} אזי לכל \mathcal{T} $\partial A=\overline{A}\cap\left(\overline{Xackslash}A
 ight)$ אזי $A\subseteq X$ מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) יהי טענה: יהי

 $U\in\mathcal{T}$ משקנה: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט תהא $X\in X$ ויהי $A\subseteq X$ אוי (הא (X,\mathcal{T}) מ"ט תהא $U\cap A^{\mathcal{C}}
eq 0$ וכן $X\in U\cap A$ מתקיים $X\in U\cap A$ ו. $X=\overline{A}$ המקיימת $A\subset X$ מ"ט אזי (X,\mathcal{T}) המקיימת קבוצה צפופה: יהי

טופולוגיית הנקודה הייחודית: תהא X קבוצה ותהא $p \in X$ אזי $\mathcal{T}_p = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid p \in \mathcal{U}\} \cup \{\emptyset\}$

x של U סביבה לכל עבורו אזיי א אזי א $X \in X$ אזי ותהא מ"ט ותהא ($X,\mathcal{T})$ יהי יהי נקודת הצטברות: $.U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ מתקיים

y של U סדיבה לכל לכל עבורו עבור אזי $y\in X$ אזי $x\in X^{\mathbb{N}}$ מ"ט ותהא מתכנסת/גבול: יהי יהי $x_n \in U$ החל ממקום מסוים

טענה: יהי $A\subseteq X$ ותהא מ"ט ($X,\,\mathcal{T})$ יהי יהי $A\subseteq\left\{ x\in X\mid x$ המתכנסת אל $a\in A^{\mathbb{N}}$ קיימת $a\in A$

 $A\cup\{x\in X\mid A$ שענה: תהא $A\subseteq X$ אזי א נקודת הצטברות של $x\}=\overline{A}$ אזי אי $\{x\in X\mid A$ מסקנה: תהא $A\subseteq X$ אזי (A סגורה) אזי מסקנה: תהא אוי ($A\subseteq X$ אזי (Af:X o Y אזיי $x\in X$ מ"טים ותהא אויט (X,\mathcal{T}) ((Y,\mathcal{S}) איי היין פונקציה רציפה בנקודה: יהיו $f\left(\mathcal{U}
ight)\subseteq\mathcal{V}$ אבורה לכל $U\subseteq X$ של קיימת סביבה ק $f\left(x
ight)$ של סביבה עכורה לכל עבורה f:X o Y אייטים אזי (X,\mathcal{T}) , (Y,\mathcal{S}) יהיו $\forall U \in \mathcal{S}.f^{-1}\left(U\right) \in \mathcal{T}$

משפט: יהיו f:X o Y מ"טים ותהא (X,\mathcal{T}) , (Y,\mathcal{S}) משפט: יהיו

- פתוחה. $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה מתקיים כי $U\subseteq Y$ פתוחה. סגורה $f^{-1}\left(E\right)$ סגורה מתקיים כי $E\subseteq Y$ סגורה.
 - $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f\left(A\right)}$ מתקיים $A\subseteq X$ xב־מ. רציפה $x \in X$ לכל $x \in X$ הפונקציה $x \in X$

הומיאומורפיזם: יהיו f:X o Y מ"טים אזי $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ רציפה חח"ע ועל עבורה

טענה: יהיו אועל חח"ע ועל התב"ש (X,\mathcal{T}) אח"ע ועל התב"ש טענה: יהיו

- . תהא $f^{-1}\left(U
 ight)$ אזי (U פתוחה) אזי ($U\subseteq Y$ מתוחה) תהא
- . תהא $f^{-1}\left(E\right)$ ל סגורה) איי שאי $E\subseteq Y$ מגורה). •

 $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f\left(A\right)}$ מתקיים $A \subseteq X$ • f:X o Y מ"ט ותהא (Y,\mathcal{S}) מ"ט ותהא קבוצה מפונקציה: תהא מחופולוגיה המושרית על קבוצה מפונקציה: תהא

 $\mathcal{T}_f = \left\{ f^{-1} \left(U \right) \mid U \in \mathcal{S} \right\}$ איי .ט"ט. (X,\mathcal{T}_f) אזי f:X o Y מ"ט ותהא (Y,\mathcal{S}) מ"ט אזי קבוצה אזי תהא מענה: תהא מסקנה: תהא f : $\stackrel{\checkmark}{X}$ \rightarrow Y מ"ט ותהא Y קבוצה יהי (Y,\mathcal{S}) אזי f רציפה על

תת מרחב טופולוגי (ת"מ): יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי

 $\mathcal{T}_A = \{ U \subseteq A \mid \exists V \in \mathcal{T}.U = \mathrm{Id}^{-1}(V) \}$

.טענה: יהי (A,\mathcal{T}_A) איי או $A\subseteq X$ מייט ותהא מייט יהי יהי יהי $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$ אזי $A \subseteq X$ מ"ט ותהא (X,\mathcal{T}) יהי טענה: יהי

טענה: יהי $\mathcal{B}_A = \{A\cap B\mid B\in\mathcal{B}\}$ אוי \mathcal{T} בסיס של מ"ט ויהי מ"ט ויהי יהי יהי יהי

- תהא $U\subseteq A$ אזי (U פתוחה ביחס ל־ \mathcal{T}_A כימת V פתוחה ביחס ל־ \mathcal{T} עבורה $U\subseteq A$ $(V \cap A = II)$
- עבורה $E\subseteq A$ אזי ($E\subseteq C$ עבורה ביחס ל־C עבורה פתוחה ביחס ל־C עבורה תהא
 - $\operatorname{cl}_X\left(D\right)\cap A=\operatorname{cl}_A\left(D\right)$ אזי $D\subseteq A$ תהא Φ
 - $\operatorname{int}_{X}\left(D\right)\cap A\subseteq\operatorname{int}_{A}\left(D\right)$ אזי $D\subseteq A$ תהא \bullet טענה: יהי (Y,\mathcal{T}_Y) מ"ט ויהי מ"ט (X,\mathcal{T}_X) מיט יהי
 - Xפתוחה ב־ אזי א פתוחה ב־ א פתוחה ב־ א אזי א פתוחה ב־ א נניח כי Y
 - Xב־גורה בי X אזי א סגורה ב־X, תהא א בי $A\subseteq Y$ סגורה ב־X אזי סגורה בי X

f:X o Z אוי רציפה אוי f:X o Y ת"מ ותהא א ת"מ והי מ"ט יהי מ"ט אוי ענה: יהיו א ת"מ ותהא א ת"מ ותהא א ת"מ ותהא א ת"מ ותהא א מ

 $f_{ \restriction_A}:A o Y$ מ"ט יהי א הי $A\subseteq X$ ח"מ ותהא איז וותהא איז א רביפה איז א מענה: יהיו א מ"ט יהי א ח"מ וותהא א ח"מ וותהא א רביפה איז א מ"ט יהי

טענה: יהיו X,Z מ"ט יהי $Y\subseteq Z$ ת"מ ותהא $Y\to X$ רו"מ ותהא $f:X\to Y$ אזיי איי רציפה. f:X o Z

טענה: יהיו X,Z מ"ט ותהא f:X o Y מ"ט ותהא אזי (f:X o Xוכן $\int_{U_{lpha}}$ וכן $\cup_{lpha\in\Lambda}U_{lpha}=X$ פתוחות עבורן $\{U_{lpha}\}_{lpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$

 $g:Y\to Z$ ותהא $f:X\to Y$ מ"ט תהא מיט תהא א רציפה $f:X\to Y$ מ"ט תהא א יהיו טענה: יהיו

 $X \,=\, A\, \cup\, B$ סגורות עבורן אסגורות משפט למת ההדבקה: יהיו א $X,\, Y$ יהיו יהיו למת משפט למת ההדבקה: יהיו על $A\cap B$ על f=g רציפה עבורן g:B o Y אזי f:A o Y אזי

רציפה. $f \cup g: X o Y$ $\hat{f}:X o f(X)$ מ"ט ותהא Y o f:X o f חח"ע ורציפה נגדיר אנדיר ליטותהא $\hat{f}:X o f$

> . שיכון: יהיו \hat{f} הומיאומורפיזם חח"ע ורציפה עבורה \hat{f} הומיאומורפיזם שיכון: יהיו אזי אזי X,Y מ"ט אזי $f\left(X\right)$ בתור X את מזהה אינ שיכון $f:X\rightarrow Y$ יהיי ויהי מ"ט אינ יהיו הערה: הערה העתקת מנה: יהיו איט אזי אזי f:Y o X מ"ט אזי אזי ל פונקציה על המקיימת

 $\forall U \subseteq X. (U \in T_X) \iff (f^{-1}(U) \in T_Y)$ תערה: הייו X,Y מ"ט ותהא f:Y o X מ"ט ותהא X

 העתקת מנה $g:Y\to Z$ ותהא מנה העתקת הנה $f:X\to Y$ תהא מ"ט מ"ט אייט יהיו יהיו שענה: אייט אייט תהא א מ"ט מ על \mathcal{T}_A על אזי קיימת ויחידה טופולוגיה f:X o A ותהא קבוצה ותהא משפט: יהי על מ"ט תהא איי קבוצה ותהא

.עבורה f העתקת מנה \mathcal{T}_A טופולוגיית המנה המושרית: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא f:X o A על אזי טופולוגייה טופולוגיית המנה המושרית: יהי . על A עבורה f העתקת מנה

לכל $r\left(a
ight)=a$ רביפה עבורה r:X o A אזי $A\subseteq X$ אזי מ"ט ותהא איז מ"ט ותהא אזי רביפה עבורה איז רביפה עבורה איז לכל

משפט התכונה האוניברסילית: תהא g:X o Z העתקת מנה ותהא f:X o Y תהא עבורה עבורה h:Y o Z אוי קיימת $y\in Y$ קבועה לכל $g\!\!\upharpoonright_{f^{-1}(\{y\})}$

- gרציפה) רציפה) היפה) (h)
- .(העתקת מנה) \iff (העתקת מנה) h

 עבורה g:X o Z מסקנה: תהא תהא f:X o Y עבורה מסקנה: תהא לכל $y \in Y$ אזי

- $g \circ f^{-1}$ רציפה). •
- .(העתקת מנה) $g \circ f^{-1}$ העתקת מנה) $g \circ f^{-1}$

 $f:X o \left\{g^{-1}\left(\{z\}
ight)\mid z\in Z
ight\}$ מסקנה: תהא g:X o Z האינה: תהא מסקנה: תהא

. (העתקת מנה $g \circ f^{-1}$) העתקת מנה (העתקת מנה $g \circ f^{-1}$) העתקת מנה אם $y \in Y$ עבורה לכל אזי אוי $A \subseteq X$ אזי אזי f: X o Y אם

 $f^{-1}\left(\{y\}\right)\subseteq A\bowtie A\cap f^{-1}\left(\{y\}\right)\neq\varnothing$ טענה: תהא $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$ אלכל על f) איי מנה) העתקת איי היים איי ולכל רציפה איי ולכל האיי ולכל העתקת $f: X \to Y$

. מתקיים כי $f \, (\mathcal{U})$ מתקיים כי מתקיים לכל עבורה לכל עבורה לכל f : X o Y מתקיים כי . סגורה מתקיים כי $f\left(E\right)$ סגורה מתקיים לכל עבורה לכל לכל $f:X\to Y$ העתקה העתקה אורה: \mathbf{v} טענה: תהא Y אח"ע ועל התב"ש f:X o Y

- . פתוחה $f \bullet$
- .סגורה f
- $_{f}-1$ רציפה.

שענה: תהא א חח"ע ועל התב"ש התב"ש התב"ש ענה: תהא

- . הומיאומורפיזם f
- . רציפה ופתוחה f

. מנה. העתקת f אזי איי $f:X \to Y$ העתקת מנה. מענה: תהא מנה. העתקת fאזי אזי סגורה רציפה ל ו $f:X\to Y$ אזי העתקת מנה.

 $\sim=\left\{(x,y)\in(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})^2\;\middle|\;\exists\lambda\in\mathbb{R}\,(x=\lambda y)
ight\}$ המרחב הפרויקטיבי הממשי: נגדיר $\mathbb{RP}^{n-1} = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \sim n$ אזי

מכפלה של קבוצות: תהיינה $\{X_{lpha}\}_{lpha\in\Lambda}$ קבוצות אזי

 $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_{\alpha} = \left\{ f : \Lambda \to \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_{\alpha} \mid f(\alpha) \in X_{\alpha} \right\}$ $\mathcal{B}_{ ext{box}} = \left\{\prod_{lpha \in \Lambda} \mathcal{U}_lpha \mid \mathcal{U}_lpha \in \mathcal{T}_lpha
ight\}$ מ"טים אזי $\left\{(X_lpha, \mathcal{T}_lpha)\right\}_{lpha \in \Lambda}$ בסיס

 $\mathcal{T}_{
m box}=\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{
m box}
ight)$ אייטים איי איינא מייט איינאר איינה אריבה: יהיו יהיו איינאר אייטים איינאר איינ

 המוגדרת $\pi_{eta}: \prod_{lpha \in \Lambda} X_{lpha} o X_{eta}$ קבוצות אזי קבוצות אזי קבוצות אזי המוגדרת $.\pi_{\beta}\left(f\right) =f\left(\beta\right)$

טענה: יהיו $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha\,)\}_{lpha\in\Lambda}$ טענה: יהיו

 $.\prod_{\alpha\in\Lambda}X_{\alpha}$ את תרבסיס של $\mathcal{S}_{prod}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\left\{\pi_{\alpha}^{-1}\left(\mathcal{U}_{\alpha}\right)\mid\mathcal{U}_{\alpha}\in\mathcal{T}_{\alpha}\right\}$

 $\mathcal{T}_{ ext{prod}} = \mathcal{T}\left(\mathcal{S}_{ ext{prod}}
ight)$ מ"טים אזי $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha)\}_{lpha\in\Lambda}$ טופולוגיית המכפלה: יהיו $\mathcal{T}_{ ext{prod}} = \mathcal{T}_{ ext{box}}$ איי או $|\Lambda| < leph_0$ משקנה: יהיו $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha\,)\}_{lpha \in \Lambda}$ משקנה: יהיו

 $\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}\subseteq\mathcal{T}_{\mathrm{box}}$ אזי $|\Lambda|\geq leph_0$ משקנה: יהיו $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha)\}_{lpha\in\Lambda}$ אזי משקנה: יהיו π_{lpha} מיטים ותהא $\left(\prod_{lpha\in\Lambda}X_{lpha},\mathcal{T}
ight)$ מ"טים ותהא א מיטים ותהא $\{(X_{lpha},\mathcal{T}_{lpha})\}_{lpha\in\Lambda}$ טופולוגיה עבורה מסקנה: יהיו $\mathcal{T}_{\mathrm{prod}} \subseteq \mathcal{T}$ אזיי $\alpha \in \Lambda$ רציפה לכל

מסקנה: יהיו $\{(X_lpha\,,\,\mathcal{T}_lpha\,)\}_{lpha\in\Lambda}$ מסקנה: יהיו $\mathcal{T}_{prod} = \left\{ \prod_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_{\alpha} \mid (\mathcal{U}_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\alpha}) \land (|\{\pi_{\alpha} (\mathcal{U}_{\alpha}) = X_{\alpha}\}| \in \mathbb{N}) \right\}$

. $(lpha \circ f)$ אזי ($f:Y o \left(\prod_{lpha} X_{lpha}, \mathcal{T}_{\mathrm{prod}}
ight)$ משפט: תהא $f:Y o \left(\prod_{lpha} X_{lpha}, \mathcal{T}_{\mathrm{prod}}
ight)$ טענה: תהא $\aleph_0 lpha \mid \Lambda \mid \lambda$ אינה מטריזבילית. $|\Lambda| \geq lpha$ אינה מטריזבילית.

. אינה מטריזבילית. $(\mathbb{R}^\Lambda,\,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ אזי $|\Lambda|\geq leph_0$ אינה מטריזבילית. f:X o Y מ"ט עבורן קיים X,Y של מ"ט באשר לכל P של מ"ט בארן קיים א $(P \ agriculture (P \ agriculture (P$

 $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=arnothing$ וכן $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ באשר מרחב מופולוגי: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט אזי מ"ט מאי באשר \mathcal{U} , $\mathcal{V}
eq \emptyset$ וכן $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$ וכן

מרחב טופולוגי קשיר: מרחב טופולוגי $(X,\,\mathcal{T})$ עבורו לא קיימת הפרדה. מרחב טופולוגי אי־קשיר: מרחב טופולוגי (X,\mathcal{T}) עבורו קיימת הפרדה. .(א קשיר) קשיר) אזי (א קשיר) הומיאומורפיזם f:X o Y

מסקנה: קשירות הינה תכונה טופולוגית.

 $(Y \subset U) \oplus (Y \subset V)$

- $.X = E \cup F$ קיימות לא ריקות ארות ארות סגורות $E, F \subseteq X$ קיימות \bullet

. פתוחה פתוחה סגורה ופתוחה $D \in \mathcal{P}\left(X\right) \setminus \{X,\varnothing\}$ סגורה פתוחה . קשירה אזי $f\left(X\right)$ אזי הי f:X o Y השיר ותהא מ"ט קשיר הי לי מ"ט קשיר ותהא

 $(קיימות) \Longleftrightarrow (אי־קשיר) אזי אזי אזי תת־מרחב אזי איי ויהי א מ"ט ויהי א תרב א תרב אזי אזי אזי ויהי איי ויהי א$ טענה: תהימרחב קשיר אזי $Y \subseteq X$ ויהי של הפרדה (\mathcal{U},\mathcal{V}) תת־מרחב שינר אזי

. אזי Bאזי אזי $A\subseteq B\subseteq \overline{A}$ וכן קשירה באשר $A,B\subseteq X$ אזי אזי אזי סענה: תהיינה

 \overline{A} מטקנה: תהא $\overline{A} \subset X$ קשירה אזי טענה: תהא (א $A \neq \emptyset$ וכן מתקיים כי $A \in A$ מתקיים לכל $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה וכן טענה: אזי X קשיר. $\bigcup \mathcal{A} = X$

מסקנה: תהיינה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)\setminus\{\varnothing\}$ באשר מסקנה: מסקנה . אזי א $n\in\mathbb{N}$ לכל לכל אזי אוי א $n\in\mathbb{N}$ לכל לכל אזי א $n\in\mathbb{N}$

> מסקנה: \mathbb{R} עם הטופולוגיה הסטנדרטית קשיר. . עם הטופולוגיה מי \mathbb{R} סטנדרטי הינו קשיר (-1,1) מסקנה:

עם (a,b) , [a,b] , (a,b] , [a,b] , אזי a < b באשר בא $a,b \in \mathbb{R}$ יהיו יהיו הטופולוגיה המושרית מ־

R סטנדרטי.

 $(-\infty,a)\,,(-\infty,a]\,,(-\infty,\infty)\,,[a,\infty)\,,(a,\infty)$ אוי $a\in\mathbb{R}$ יהי מסקנה: יהי $a\in\mathbb{R}$

. איננה קשירה $\mathbb{R}_{\mathrm{Sorg}}$ איננה

טענה: $(\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{R},\mathcal{T}_{ ext{box}})$ איננה קשירה. מסקנה: יוהי \mathbb{R}^n אזי $n\in\mathbb{N}_+$ קשיר עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

וכן $f\left(0\right)=x$ משילה: יהי $\gamma:\left[0,1\right]\to X$ אזי $x,y\in X$ יהיו מ"ט ויהיו משילה: יהי משילה אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי מ

xמסילה מסילה אקיימת אבורו לכל עבורו אבורו מופולוגי מרחב מחלתית: מרחב מופולוגי איימת מסילה מי $x,\,y\,\in\,X$

. סענה: יהי X מ"ט קשיר מסילתית אזי X קשיר מסילתית אזי

 \mathbb{R}^n איננו הומיאומורפי לי יהי היה אזיn>1יהי יהי מסקנה: . תית. מסילתית קשיר אזי $f:X\to Y$ ותה
א מסילתית האיט מ"ט מ"ט אזי למה: $f:X\to Y$ ותהא

> מסקנה: קשירות מסילתית הינה תכונה טופולוגית. טענה: יהי $p:\mathbb{C}^n o \mathbb{C}$ ויהי ויהי אזי אסטנדרטית הסטופולוגיה עם הטופולוגיה יהי יהי

. מסילתית קשירה $\mathbb{C}^n \setminus \left\{ x \in \mathbb{C}^n \mid p\left(x\right) = 0 \right\}$ תר־מרחב קשיר GL $_n$ ($\mathbb C$) אזי $\mathbb C^{n^2}$ אזי שם הטופולוגיה הטופולוגיה אווי אזי $M_{n imes n}$ ($\mathbb C$) מסקנה: יהי

 קשירה עבורה D $\subseteq X$ קיימת (די היי איי $x,y\in X$ אוי עבורה עבורה אוי היי איי היי איי מיט ויהיו $(x, y \in D)$

 $.X/{\sim}$ רכיבי קשירות: יהי X מ"ט אזי קשיר (y^-) אזי מסילה מ"ע ($x\sim_{\mathsf{qwir}} x$ אזי אזי אזי אזי אזי אזי מסילתית מסילה מ"ג ל"ע). סימון: יהי א X טענה: יחס שקילות מעל מסילתית מסילתית מיט אזי מיט אזי מסילתית מסילתית מ

 X/\sim רכיבי קשירות מסילתית: יהי א מ"ט אזי קשיר מסילתית רכיבי

.X טענה: יהי X מ"ט אזי קשיר יחס שקילות מעל אזי טענה: יהי

- אזי אזי אזי רכיבי הקשירות של אX אזי רכיבי רכיבי רכיבי אזי יהיו יהיו משפט: יהיו . לכל Ω_{α} מתקיים כי $\alpha \in \Lambda$ קשירה סלכל
- $D_{\alpha}\cap D_{\beta}=\emptyset$ יהיו $\alpha\neq\beta$ באשר $\alpha,\beta\in\Lambda$ יהיו •
- $.X = \bigcup_{lpha \in \Lambda} D_lpha$ מתקיים $Y\subseteq D_{lpha}$ עבורו $lpha\in\Lambda$ עבורו קשיר קשיר תת־מרחב לכל $Y\subseteq X$
 - אזי אזי של אזי רכיבי הקשירות אזי אזי אזי $\{D_{lpha}\}_{lpha\in\Lambda}$ אזי יהיו
 - לכל $\alpha \in \Lambda$ מתקיים כי $\alpha \in \Lambda$ קשירה. $.D_{\alpha}\cap D_{\beta}=\varnothing$ אזי $\alpha\neq\beta$ באשר $\alpha,\beta\in\Lambda$ יהיי •
- $.X = \bigcup_{lpha \in \Lambda} D_lpha$ מתקיים $Y\subseteq D_{\alpha}$ עבורו $\alpha\in\Lambda$ ויחיד קשיר קשיר תת־מרחב א לכל לכל לכל יים איר עדי תת־מרחב א לכל יים א לכל יים א

מסקנה: יהי D רכיב קשירות של X אזי D סגור. מרחב טופולוגי קשיר מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x \in X$ המקיים לכל סביבה מרחב של $x \in \mathcal{V}$ קיימת עבורה עבורה ע $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ קיימת קיימת מ

מרחב טופולוגי קשיר מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ מתקיים כי X קשיר מקומית

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x\in X$ המקיים לכל סביבה $x \in \mathcal{V}$ של x קיימת סביבה $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ קשירה מסילתית עבורה $\mathcal{U} \subseteq X$ מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ מתקיים כי X קשיר

טענה: קשירות מקומית מסילתית הינה תכונה טופולוגית. . איננו קשיר מקומית $\mathbb{R}_{\mathrm{Sorg}}$ איננו

 $\mathcal U$ של של רכיב חיכו לכל ולכל אזי (לכל קשיר מקומית) אזי מ"ט אזי מ"ט אזי (לכל קשיר מקומית) אזי מיט אזי מיט אזי מקומית $D \in T$ \mathcal{D} ולכל $\mathcal{U}\in\mathcal{T}$ לכל לכל מקומית) מקומית מקומית אזי ולכל אזי מ"ט מ"ט אזי מ"ט מענה: יהי מקומית מקומית מקומית מקומית מקומית מקומית מ

> $D \in \mathcal{T}$ מסילתית של של מתקיים X סענה: יהי אזי מ"ט קשיר וקשיר מסילתית מקומית אזי משיר מסילתית מסילתית מסילתית מסילתית מסילתית מסילתית מסילתית

בסיס סביבות בן מנייה בנקודה: יהי X מ"ט אזי $x\in X$ עבורו קיימות מנייה בנקודה: יהי על מ $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{V}$ עבורן לכל סביבה x של של ע עבורן לכל עבורן עבורן xמרחב טופולוגי את אקסיומת המניה המניה מרחב מרחב אבורו לכל א אקסיומת אקסיומת מרחב מופולוגי את אקסיומת המניה מרחב מרחב את אקסיומת המניה הראשונה:

. I מסקנה: יהי אזי מושרה ממרחב מטרי אזי מיט מושרה מסקנה: יהי אזי מיט מושרה ממרחב מסקנה: יהי אזי מיט מושרה ממרחב מסקנה: יהי או

.I מניה $\mathbb{R}_{\mathrm{Sorg}}$.I טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה מניה .I אינו מניה \mathbb{R} המצוייד עם הטופולוגיה הקו־בת־מניה אינו

משפט: יהי Xמ"ט מניה ו ותהא אזי הי $A\subseteq X$ ותהא מניה מ"ט מיהי יהי משפט: $\overline{A} = \{x \in X \mid x$ המתכנסת אל $a \in A^{\mathbb{N}}$

 \iff אזי f:X o Y אזי (f רציפה) משפט: יהיו X,Y מ"טים באשר X מניה X מניה וותהא .($f\left(a\right)$ ל) מתכנסת ל־ $\{f\left(x_{n}\right)\}$ מתקיים כי $\{f\left(x_{n}\right)\}$ מתכנסת ל־ $\{x_{n}\}\subseteq X$

מרחב טופולוגי X עבורו היים בסיס לכל היותר ממרחב מחב טופולוגי את אקסיומת המניה השנייה: . מטקנת: יהי X מ"ט מניה אזי X מניה וו .II טענה: \mathbb{R}^n מניה $\mathbb{R}^{\aleph_0} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$ סימון: .II מניה $\left(\mathbb{R}^{lepho}_{}\right)$, $\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}$: . I אינו מניה $\left(\mathbb{R}^{\aleph}0\,,\,\mathcal{T}_{\mathrm{box}}
ight)$: .II אינו מניה R_{Sorg} :טענה: .(א $_0 \geq |X|$) \Longleftrightarrow (II מניה אזי איי איי עם הטופולוגיה הבדידה אזי איי מניה עם המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי X מענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית מניה טענה: נגדיר $d_u:\mathbb{R}^{\aleph 0} imes \mathbb{R}^{\aleph 0} o \mathbb{R}$ כך . מטריקה d_u אזי א $d_u\left(\left(a_k\right),\left(b_k\right)\right)=\min\left\{\sup\left|a_k-b_k\right|,1\right\}$.II הינו מניה ו וכן אינו מניה $\left(\mathbb{R}^{\aleph 0}\,,\,\mathcal{T}\left(d_{oldsymbol{u}}
ight)
ight)$ הינו מניה ו .I מניה A מניה A תת־מרחב אזי A מניה A מניה A. II מניה אזי א מת־מרחב אזי א מניה וו ויהי א
 $A\subset X$ ויהי וו מ"ט מניה אזי א מניה וו טענה: יהי א . I מניה אזי מ"ט מניה ותהא f:X o Y ותהא וותהא מי"ט מניה וfותהא אזי וותהא מייט מניה וותהא אזי וותהא מייט מניה וותהא אזי וותהא אזי וותהא מניה וותהא אזי וותהא מניה וותהא מניה וותהא אזי וותהא מניה וותה מניה מותה מניה וותה מותה מותה מניה מותה מניה וותה מות מסקנה: מניה I הינה תכונה טופולוגית. . II מניה $f\left(X\right)$ אזי ופתוחה אזי f:X o Y מניה וו ותהא מ"ט מניה אזי וו מיט מניה אזי וו מיט מניה וו וותהא מרחב טופולוגי ספרבילי: מרחב טופולוגי X עבורו קיימת $A\subset X$ צפופה בת מנייה. המקיימים אמקיימים עבורו לינדלוף: מרחב טופולוגי עבורו לכל עבורו לכל אינדלוף: מרחב מרחב מופולוגי לינדלוף: מרחב טופולוגי אינדלוף $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{U}_{f(i)} = X$ עבורה $f: \mathbb{N} o \Lambda$ קיימת $\mathcal{U}_{lpha} = X$ $(\aleph_0 > |X|)$ מענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X ספרבילי) X ספרבילי. אזי א המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית אזי א ספרבילי. **טענה:** R המצוייד בטופולוגיה הקו־בת־מנייה אינו ספרבילי.

טענה: יהי X מ"ט מניה Π אזי X לינדלוף וספרבילי. ענה: ℝ המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית אינו מניה I

למה: יהי \mathcal{B} בסיס של (X,\mathcal{T}) אזי (X לינדלוף) \iff (לכל \mathcal{B} בסיס של המקיימים $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}_{f(i)} = X$ עבורה $f: \mathbb{N} \to \Lambda$ קיימת $\bigcup \mathcal{B}_{\alpha} = X$

.טענה: \mathbb{R}_{Sorg} לינדולף . סענה: יהי X מ"ט ספרבילי ותהא f:X o Y ותהא ספרבילי מייט מפרבילי מ"ט ספרבילי ותהא

A ספרבילי. מ"ט ספרבילי ותהא $A \subset X$ ותהא ספרבילי. מ"ט ספרבילי

. סענה: יהי E מ"ט לינדלוף ותהא $E \subset X$ ותהא לינדלוף מ"ט מ"ט מענה: יהי אזי

.I מניה $(\prod X_lpha\,,\,\mathcal{T}_{
m prod})$ אזי $|\Lambda|\leq lpha_0$ מניה משקנה: יהיו $\{X_lpha\,\}_{lpha\in\Lambda}$.II מניה $(\prod X_lpha, \mathcal{T}_{
m prod})$ איי $|\Lambda| \leq lpha$ מניה $\{X_lpha, \mathcal{T}_{
m prod}\}$ מניה Λ $\left(\prod X_lpha$, $\mathcal{T}_{ ext{prod}}
ight)$ אוי $|\Lambda| \leq lpha_0$ משקנה: יהיו $\{X_lpha\}_{lpha \in \Lambda}$ מישים ספרבילים באשר

שעום: יהי X מרחר מכורי החר"ע

- .II. מניה $X \bullet$

מרחב אונים קיימת סביבה \mathcal{U} של של עבורה אונים קיימת אונים x, עבורו לכל עבורו עבורו מרחב מופולוגי T_0 : $x
otin \mathcal{V}$ או קיימת סביבה \mathcal{V} של עבורה $y
otin \mathcal{U}$

מרחב אונים קיימת סביבה \mathcal{U} של של עבורה אונים קיימת שונים אונים עבורה אוני עבורה אוני מרחב טופולוגי \mathcal{U} של אינים אונים $x \notin \mathcal{V}$ וגם קיימת סביבה \mathcal{V} של $y \notin \mathcal{U}$

 $\mathcal U$ מרחב טופים אונים $x,y\in X$ שונים עבורו מרחב טופולוגי מרחב מופולוגי מרחב מופולוגי מרחב מופולוגי $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ עבורו u של \mathcal{V} טביבה טוכו u

מסקנה: T_0 , T_1 , T_2 הינן תכונות טופולוגיות.

 T_0 אזי X מרחב טופולוגי T_1 אזי X מרחב טופולוגי מסקנת: יהי

 $.T_2$ מרחב מטרי אזי א מרחב משרה מיט מושרה מיט איזי א מיט מושרה מענה: יהי א

 (X,\mathcal{S}) אזי T_i מרחב (X,\mathcal{T}) וכן \mathcal{T} מדינה על X באשר X טופולוגיות על \mathcal{T} , טופולוגיות על אזינה מ־

.מסקנת: \mathbb{R}_{Sorg} האוסדורף

 T_2 טענה: \mathbb{Q} המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית הינו T_1 וכן אינו

 T_2 וכן אינו וכן הינו הינו הינו הקו־בת־מניה הטופולוגיה בטופולוגיה תמצוייד בטופולוגיה הקו T_2 אינו $(X,\mathcal{T}(d))$ הינו מטרי מיר מטרי הינו (X,d) אינו

 $.T_i$ הינה (Y,S) אזי אזי (Y,S) מ"ט באשר מ"ט מענה: תהא תהא מ"ט מ"ט מ"ט מ"ט ותהא מ"ט מ"ט מיט הינה מ"ט מ

 T_i מרחב אזי A מרחב A ויהי $A \subset X$ ויהי מיט מענה: יהי $A \subset X$ ויהי

 $(\prod X_lpha,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ לשענה: יהיו $(\alpha\in\Lambda)$ לכל מרחב X_lpha מיטים איי $\{X_lpha\}_{lpha\in\Lambda}$

ישר עם הראשית הכפולה: תהא $\mathbb{R} imes \{0,1\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ \mathbb{R}^2 הסטנדרטית ויהי עם $\mathbb{R} \times \{0,1\}/\sim$ אזי $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ אזי $\sim = \mathrm{Id} \cup \{(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}) \mid a \neq 0\}$

 $(x\in X)$ טענה: יהי (X,\mathcal{T}) מ"ט אזי (X הוא (X,\mathcal{T}) קבוצה סגורה לכל . ג $A=\bigcap_{A\subset\mathcal{U}}\mathcal{U}$ מתקיים א $A\subseteq X$ לכל הוא (T) הוא אזי מ"ט אזי (X, \mathcal{T}) מענה: יהי

 $y \in X$ טענה: יהי X מ"ט האוסדורף ותהא $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה מתכנסת אזי קיים ויחיד $y \in X$ עבורו

 T_i מרחב טופולוגי T_i מקומית: מ"ט X עבורו לכל $x \in X$ קיימת סביבה u של u עבורה u הינה u. T_0 טענה: יהי X מ"ט T_0 מקומית אזי אינו מינו

> $.T_1$ טענה: יהי X מינו T_1 מקומית אזי א הינו מענה: T_2 אינו וכן מקומית הישר הינו T_2 מקומית וכן אינו

קבוצה מסוג G_{δ} : יהי X מ"ט אזי $X\subseteq A$ עבורה קיימת $\mathcal{T}\subseteq \mathcal{T}$ המקיימת קבוצה מסוג היי X $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$

 $.G_{\delta}$ איי איי איי איי מייט דו מניה וויהי איי מענה: יהי א מ"ט מענה: ד T_1 מייט מענה: יהי א

טענה: יהי X מ"ט T_1 תהא $A\subseteq X$ ויהי $A\subseteq X$ אזי (x נקודת הצטברות של A) $|A \cap \mathcal{U}| \geq leph_0$ מתקיים x מתקיים \mathcal{U}

. (מורה) קבוצה $\{(a,a)\mid a\in X\}$ קבוצה סגורה) קבוצה סגורה) קבוצה סגורה) סענה: יהי x
otin E סגורה באשר $E \subseteq X$ מרחב טופולוגי X עבורו לכל $X \in X$ ולכל סגורה באשר

 $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\mathcal{Q}$ וכן $E\subset\mathcal{V}$ וכן $x\in\mathcal{U}$ עבורן עבורן $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ קיימות $E\cap F=arnothing$ סגורות באשר איינור לכל עבורו לכל עבורו איינור מרחב טופולוגי מרחב טופולוגי מרחב טופולוגי מרחב טופולוגי מרחב איינור איינו עבורו לכל $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\emptyset$ וכן $F\subset\mathcal{V}$ וכן $E\subset\mathcal{U}$ עבורן עבורן $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ קיימות

 T_1 מרחב טופולוגי X רגולרי וכן: T_2 מרחב טופולוגי T_1 מרחב טופולוגי X נורמלי וכן: T_4 מרחב טופולוגי

מסקנה: T_3 , T_4 הינן תכונות טופולוגיות.

 T_2 אזי א מרחב טופולוגי T_3 אזי א מרחב טופולוגי מסקנה: יהי א מרחב טופולוגי T_3 אזי א מרחב טופולוגי T_4 אזי א מרחב טופולוגי מסקנה: יהי

. וכן אינו רגולרי. \mathbb{R}_K הינו T_2 הינו האנו רגולרי.

טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף: נגדיר $\{(a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}\,\cup\,\{\varnothing,\mathbb{R}\}$ אזי טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף: נגדיר

טענה: \mathbb{R} המצוייד עם טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף הינו T_0 וכן אינו רגולרי וכן אינו רגולרי וכן

 $.T_4$ טענה: $\mathbb{R}_{\mathrm{Sorg}}$ הינו

 $.\mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$ אזי אזי $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{U}$ וכן $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ אזי עבורן עבורן $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq X$ אזי סימון: תהיינה סענה: יהי X מ"ט אזי (X רגולרי) \Longleftrightarrow (לכל $X \in X$ ולכל $X \in X$ סביבה של X קיימת סביבה טענה: $(\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \text{ and } x \text{ by } \mathcal{V})$

 $\mathcal{U}\subset X$ מ"ט אזי (X נורמלי) \Longleftrightarrow (לכל $E\subset X$ סגורה ולכל X פתוחה באשר $E\subset\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ פתוחה עבורה $\mathcal{V}\subset X$ קיימת $E\subset\mathcal{U}$

משפט הלמה של אוריסון: יהי X מ"ט אזי (לכל גורמלי) אזי (לכל מ"ט אזי היהי משפט מי"ט אזי משפט הלמה אזי אזי (אזי משפט הלמה של אוריסון: יהי $(f_{{\restriction}B} = a \ {
m pr}(a,b] = a$ וכן א קיימת f:X o [a,b] וכן היימת $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$

. רגולרי אזי א אזי א רגולרי ויהי א $A\subseteq X$ יהי רגולרי מ"ט מענה: יהי אזי א מ"ט רגולרי ויהי

. טענה: יהי אזי E מורמלי ויהי ויהי מ"ט מורמלי יהי אזי $E\subseteq X$ $ig(\prod X_lpha,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}ig)$ לשענה: יהיו $(lpha\in\Lambda$ מ"טים אוי (X_lpha) מ"טים אוי (X_lpha) מ"טים אוי (מ

 $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ \iff $(\alpha \in \Lambda$ לכל T_3 מסקנה: יהיו $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ מיטים אזי $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$

. משקנה: $\mathbb{R}^2_{\mathrm{Sorg}}$ הינו רגולרי וכן אינו נורמלי

. יחס סדר טוב אזי X המצוייד עם טופולוגיית הסדר נורמלי. (X, \prec) יהי יהי (X, \prec) מרחב טופולוגי נורמלי לחלוטין: מ"ט X עבורו לכל $A\subset X$ מתקיים כי A נורמלי.

 $\overline{A}\cap B=\varnothing$ וכן אורן חוכן $A\cap \overline{B}=\varnothing$ עבורן אזיי אזי מ"ט אזיX יהי יהי קבוצות קבוצות אורן אזיי אזיי $\mathcal{U},\,\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ מופרדות קיימות $A,\,B\subseteq X$ לכלל לחלוטין)

 $A \subseteq \mathcal{V}$ 101 $A \subseteq \mathcal{U}$ 101 $A \subseteq \mathcal{U}$ $\mathcal{B}_{\mathrm{moore}}^{1} = \left\{ B_{r}\left(p\right) \mid \left(p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\right) \wedge \left(p_{2} > r > 0\right) \right\}$ שימון:

 $\mathcal{B}^2_{\mathrm{moore}} = \left\{ B_{p_2}\left(p\right) \cup \left\{ \left(p_1,0\right) \right\} \mid \left(p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}\right) \right\}$ שימון: $\mathcal{T}\left(\mathcal{B}_{ ext{moore}}^1\cup\mathcal{B}_{ ext{moore}}^2
ight)$ המישור של מור: $\mathbb{R} imes\mathbb{R}_{>0}$ מצוייד עם הטופולוגיה

> טענה: המישור של מור הינו קשיר האוסדורף רנולרי וכו אינו נורמלי. טענה: יהי X מ"נו רגולרי ומניה II אזי X נורמלי.

> > מסקנה: יהי X מ"ט רגולרי לינדלוף אזי X נורמלי.

 $d' \leq 1$ עבורה X של d' מיימת מטריקה אזי קיימת מהמטריקה מושרית באשר \mathcal{T}_X מושרית מהמטריקה למה: יהי \mathcal{T}_X וכן d' משרה את

 $ig(\prod X_n,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}ig)$ למה: יהיו $(n\in\mathbb{N})$ מ"טים אזי (X_n) מ"טים אזי (X_n) מ"טים אזי למה: . מטקנה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0},\,\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}\right)$ מטריזבילי.

משפט המטריזציה של אוריסון: יהי X מ"ט מ"ט T_0 רגולרי ומניה T_0 מטריזבילי. $\mathcal U$ עבורה x של x של x סיימת סביבה על $x \in X$ עבורו לכל $x \in \mathcal X$ עבורה של x עבורה של מטריזבילי מקומית: מ"ט x עבורה על עבורה על מיימת סביבה של מטריזבילי מקומית:

טענה: יהי X מ"ט T_0 רגולרי לינדלוף ומטריזבילי מקומית אזי T מטריזבילי. מרחב טופולוגי קומפקטי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $\{\mathcal{U}_{lpha}\}_{lpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{T}$ המקיימים $\bigcup_{i=0}^n {\mathcal U}_{f(i)} = X$ עבורה $f:[n] o \Lambda$ וקיים וקיים $n \in \mathbb{N}$ קיים $\cup {\mathcal U}_{lpha} = X$ טענה: יהי \mathcal{B} בסיס של (X,\mathcal{T}) אזי (X,\mathcal{T}) אזי המקיימים (X,\mathcal{T}) המקיימים . $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{B}_{f(i)} = X$ עבורה $f:[n] o \Lambda$ וקיימת $n \in \mathbb{N}$ קיים $\mathcal{B}_{lpha} = X$ טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית קופקטי.

> Xסופי), המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X קומפקטי) המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (Xטענה: תהא X קבוצה סגורה ותהא \mathcal{T} טופולוגיה על X אזי (X, \mathcal{T}) קומפקטי. טענה: R המצוייד עם הטופולוגיה הקו־סופית קומפקטי.

טענה: R המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי.

. מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי (a,b) אזי המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי . טענה: יהיו הסטנדרטית המצוייד עם המצוייד (a,b) אזי מענה: יהיו טענה: יהיו מ $a,b\in\mathbb{R}$ סענה: יהי X מ"ט ויהי $Y\subseteq X$ אזי (לכל קומפקטי) אזי (לכל אזי $Y\subseteq X$ המקיימים מ"ט ויהי אזי מ"ט ויהי

. ($Y\subseteq\bigcup_{i=0}^n\mathcal{U}_{f(i)}$ עבורה $f:[n]\to\Lambda$ וקיימת
 $n\in\mathbb{N}$ קיים $Y\subseteq\bigcup\mathcal{U}_\alpha$ Y סענה: יהי X מ"ט קומפקטי ותהא $Y\subseteq X$ סגורה אזי Y קומפקטי.

 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ 131 $Y \subseteq \mathcal{V}$ 131 $x \in \mathcal{U}$ Y סגורה אזי Y סגורה אויי $Y \subset X$ סגורה אויי Y סגורה אזי Y סגורה.

. רגולרי. אזי X האוסדורף קומפקטי אזי X רגולרי.

X נורמלי. אזי אורף האוסדורף האוסדורף אזי אור נורמלי.

סענה: יהי X קומפקטי יהי Y האוסדורף ותהא Y o Y האוסדורף ותהא Y הומיאומורפיזם. . שיכון. f אזי א חח"ע אזי f:X o Y ותהא אוסדורף ותהא אוסדור האיכון. f:X o Yתכונת החיתוך הסופי: יהי X מ"ט אזי $\{A_{lpha}\}_{lpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$ המקיימת לכל X יהי תכונת החיתוך הסופי: יהי

 $\bigcap_{i=1}^n A_{f(i)} \neq \emptyset$ מתקיים $f:[n] \to \Lambda$ $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ טענה: יהי X משפחה של קבוצות סגורות המקיימת שענה: יהי X משפחה של קבוצות סגורות המקיימת $A=\varnothing$ את תכונת החיתוך הסופי מתקיים

. מטריזבילי מקומית אזי א מטריזבילי מטריזבילי מטריזבילי מטריזבילי. אוסדורף קומקפטי מטריזבילי מקומית אזי א

 $(X) \Leftrightarrow (X) \Leftrightarrow (טענה: יהי X)$ מניה מורף קומפקטי אזי (X מטריזבילי)

Y מטריזבילי. f:X o Y מטריזבילי מטריזבילי אזי Y מטריזבילי מיהי Y מטריזבילי $\Gamma_f)$ לשענה: f:X o Y אזי (f:X o Y האוסדורף קומפקטי ותהא אזי (f:X o Y אזי לייט יהי אזי האוסדורף קומפקטי ותהא

ללא X imes Y פיסוי פתוח של $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\left(X imes Y
ight)$ ויהי מ"ט ויהי X imes Y ללא תת־כיסוי סופי אזי קיימת $X \in X$ עבורה לכל סביבה של אינה עבורה עבורה עבורה עבורה עבורה אינה עבורה עבורה לכל עבורה אינה עבורה עבורה

למת: יהיו $A\subseteq \mathcal{P}\left(X imes Y imes Z
ight)$ יהי קומפקטי יהי קומפקטי יהי א מ"טים יהי למת: יהיו א מ"טים יהי למת: יהיו מתקיים מיים של סביבה לכל עבורה לכל עבורה עבור חופי ותהא א ללא ללא תת־כיסוי מופי ותהא עבורה לכל ל $X \times Y \times Z$ סביבה לכל עבורה עבורה אינה $y \in Y$ איי אזי איר אברי על סופי לכיסוי ניתנת עבורה עבורה עבורה על אינה $\mathcal{U} \times Y \times Z$. של $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times Z$ מתקיים של y מתנת לכיסוי מופי. $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times Z$ אינה מתנת לכיסוי סופי.

 $ig(\prod_{i=1}^\infty X_i,\mathcal{T}_{ ext{prod}}ig)$ ו \Longleftrightarrow ו $i\in\mathbb{N}$ לכל איני אוי (X_i) מ"טים אוי (X_i) מ"טים אוי (X_i) מושנה: יהיו

 X_lpha טענה: (אקסיומת הבחירה) \Longrightarrow (לכל $|\Lambda|>lpha$) ולכל $|\Lambda|>lpha$ מ"טים מתקיים (X_lpha

קומפקטי)). $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ קומפקטי)). \iff ($lpha\in\Lambda$ לכל לכל X_lpha) משקנה משפט טיכונוב: יהיו $\{X_lpha\}_{lpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי איי (משקנה משפט טיכונוב: יהיו

 $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ קומפקטי). טענה: יהי $\{0,1\}$ המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי $\{0,1\}$ קומפקטי וכן אינו קומפקטי. $\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left\{ 0,1
ight\} ,\mathcal{T}_{ ext{box}}
ight)$ רציפה f:X o Y ותהא X o Y מ"ט מצוייד עם טופולוגיית הסדר ותהא X o Y מיט מצוייד עם טופולוגיית הסדר

 $x \in X$ לכל $f\left(a\right) < f\left(x\right) < f\left(b\right)$ עבורם $a,b \in X$ אזי קיימים עבורו $\delta>0$ אזי X אזי פתוח של $A\subset\mathcal{P}\left(X
ight)$ עבורו מספר לבג: יהי מרחב מטרי קומפקטי ויהי $A\subset\mathcal{U}$ אם $\mathcal{U}\in\mathcal{A}$ אז קיימת אז קיימת אז או $A\subset X$ אם לכל

. מספר מספר אזי קיים מספר לבג. אזי מרחב מטרי קומפקטי ויהי $A \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$ יהי מספר מטרי מרחב מטרי קומפקטי ויהי רציפה אזי f:X o Y מרחב מטרי הוי אזי f:X o Y מרחב מטרי מרחב מטרי קומפקטי הוי מסקנה: יהי

 $x \in \mathcal{U}$ פתוחה המקיימת $\mathcal{U} \subseteq D$ פתוחה המקיימת . מענה: יהי X מ"ט קומפקטי אזי X מ"ט קומפקטי מקומית. שענה: יהי X האוסדורף התב"ש X קומפקטי מקומית.

 $D \subset X$ קיימת $x \in X$ עבורו לכל עבורו מחומית: מרחב מופולוגיה קומפקטי מקומית:

. מימת $\overline{\mathcal{U}}$ קיימת x באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית לכל $x \in X$

וכן קומפקטית עבורה $\overline{\mathcal{V}}$ עבורה x עבורה של x קיימת x סביבה של $x \in X$ לכל $x \in X$ V € 11

מספות: יהי X האוסדורף הומףהנו מהומים אזי X בנולרי . מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי מקומית \mathbb{R}^n

. אומפקטי מקומית (\mathbb{R}^{lepho} , $\mathcal{T}_{\mathrm{prod}}$) שענה: טענה: Q מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי מקומית.

 $f\left(X
ight)$ אזי ופתוחה אזי f:X
ightarrow Y מ"ט ותהא איי מקומית יהי אזי קומפקטי מקומית יהי איי מ"ט ותהא קומפקטית מקומית.

מסקנה: קומפקטיות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

. סענה: יהי א קומפקטי מקומית ותהא אוי א סגורה אזי א קומפקטית מקומית. עענה: יהי א קומפקטי מקומית ותהא מקומית. אזי א קומפקטית קומפקטית ותהא אוי א פתוחה אזי א קומפקטית מקומית. טענה: יהי א האוסדורף קומפקטי מקומית ותהא

 \iff ($i \in [n]$ טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"טים אזי מ"טים אזי אזי קומפקטי מקומית לכל (חמפקטי מקומית) קומפקטי מקומית) ($\prod_{i=1}^{n} X_i, \mathcal{T}_{prod}$

עבורה לכל $C \subseteq Y$ קומפקטית מתקיים כי f: X o Y מ"טים אזיX, Y יהיו מתקיים כי X. קומפקטית $f^{-1}(C)$

אותה איט יהי Y חח"ע על רציפה ונאותה f:X o Y חח"ע על רציפה ונאותה איט יהי X מ"ט יהי מ"ט יהי אוסדורף קומפקטי מקומית ותהא f:X o Y עבורו קיים שיכון עבורו האוסדורף אזי מ"ט אזי מ"ט אזי מ"ט אזי מ"ט אזי עבורו אוסדורף אינור מ"ט אזי מ"ט אזי מ

הערה: קומפקטיפיקציה היא לעיתים מ"ט ולעיתים השיכוו.

X בפוף ב־X משלנה: יהי X מ"ט ותהא Y קומפקטיפיקציה אזי אוי משלנה:

 $|Y\setminus X|=1$ אבנקודתית/אלכטנדרוב: יהיX מ"ט אזי קומפקטיפיקציה אינקודתית/אלכטנדרוב: יהיX יהי

 $q\circ i=f$ רציפה עבורה q:Y o Z רציפה קיימת f:X o Z ולכל טענה: יהי X מ"ט ותהיינה Y,Z קומפקטיפיקציות סטון־צ'ך אזי Z,Y הומיאומורפיים.

למה: יהיו מיטים $a:\mathbb{N} o \prod_{lpha \in \Lambda} X_lpha$ מ"טים תהא מ"טים $\{X_lpha\}_{lpha \in \Lambda}$ יהיו לכל $\pi_{lpha}\left(a\right)$ מתכנסת ל־ (a_{n}) מתכנסת ל־ (a_{n}) אזיי מתכנסת ל־ $(b\in\Pi_{lpha\in\Lambda}X_{lpha})$

טענה: $\{x \in [0,1]
ightarrow \{0,1\} \mid |\{x_{lpha}=1\}| \leq lpha_0\}$ סענה: הומפהנומ

. סענה: [0,1] o [0,1] קומפקטית וכן אינה קומפקטית סדרתית

. טענה: $[0,1]^2$ מצוייד עם טופולוגיית הסדר המילוני הינו קומפקטי וכן קומפקטי סדרתית. X איזי א קומפקטי סדרתית. איזי א קומפקטי סדרתית.

X טענה: יהי לינדלוף קומפקטי סדרתית אזי לינדלוף קומפקטי סדרתית אזי טופולוגיית הישר ארוך: יהי ω_1 אחינו בן־מניה איי בן־מניה שהינו עם הסדר מצוייד עם הסדר ω_1 יהי יהי ω_1 אחינו בן־מניה איי

. טענה: הישר הארוך הינו קומפקטי סדרתית וכן אינו קומקפטי וכן אינו מטריזבילי. $\Delta\subseteq\Lambda$ וכן קיימת $lpha\in\Lambda$ וכן היימת לכל משטים אזי משטים אזי משטים אזי מקומית לכל מקומית לכל משטים אזי ו $(X_lpha)_{lpha\in\Lambda}$ סופית עבורה $(\prod_{\alpha\in\Lambda}X_{\alpha},\mathcal{T}_{\mathrm{prod}})$ \iff $(eta\in\Lambda\setminus\Delta)$ קומפקטי קומפקטי

מטרי מטרי (A,d)) אזי (A) אזי אזי ($A \subseteq X$ מרחב מטרי שלם מרחב (X,d) אזי יהי שלם).

. מרחב מטרי שלם ($X, \min \{d, 1\}$) אזי שלם מטרי מטרי מרחב מטרי (X, d) אזי יהי $ho\left(d
ight):X^\Lambda imes X^\Lambda o\mathbb{R}$ אוי קבוצה אוי מרחב מטרי (X,d) המטריקה האחידה: יהי $.
ho\left(d
ight)\left(x,y
ight)=\sup_{lpha\in\Lambda}\left\{\min\left\{d\left(x_{lpha},y_{lpha}
ight),1
ight\}
ight\}$ המוגדרת

 $ho\left(d
ight)<1$ וכן X^{Λ} וכן אור מטריקה מעל $ho\left(d
ight)$ מרחב מטרי ותהא המעל $ho\left(d
ight)$ סענה: יהי $\left(X^{\Lambda},
ho\left(d
ight)
ight)$ מרחב מטרי שלם ותהא Λ קבוצה אזי $\left(X,d
ight)$ מרחב מטרי שלם. תהיינה f: X o Y מרחב מטרי (Y, d) ותהיינה למה: יהי X מ"ט יהי (X, d) ותהיינה

רציפה. $f_n \xrightarrow{u} f$ אויי $f_n \xrightarrow{u} f$ רציפות עבורן אויי $f_n \xrightarrow{u} f$ רציפה. טענה: יהי X מ"ט ויהי (Y,d) מרחב מטרי אזי ענה: יהי X יהי אינה במרחב מטרי אזי מ"ט ויהי אויהי מענה: $(Y^X, \rho(d))$

מסקנה: יהי X מ"ט ויהי (Y,d) מרחב מטרי שלם אזי C (X,Y) מרחב מטרי שלם.