```
. טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזיA\cup B בת מנייה מנייה
                                                                      \bigcup_{i=1}^n A_i בת מנייה אזי בנות מנייה אזי בת מנייה. אוי בת מנייה.
טענה: תהא \langle f_n \mid n \in \mathbb{N} 
angle חדרת פונקציות באשר או בת מנייה לכל A_i סדרת פונקציות באשר או סענה:
                                                                            על לכל n\in\mathbb{N} אזי סופית או בת מנייה. f_n:\mathbb{N}	o A_n
                                                     A 	imes B = \{\langle a,b 
angle \mid (a \in A) \land (b \in B)\} מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                        טענה: תהיינה A,B בת מנייה אזי A \times B טענה:
                                                                       . בת מנייה A_1 \times \ldots \times A_n בנות מנייה אזיA_1 \ldots A_n בת מנייה
                                                                                                           A^1=A הגדרה: תהא A קבוצה אזי
                                                                                 A^n=A	imes A^{n-1} אזי n\in\mathbb{N}_+ ויהי קבוצה A הגדרה: תהא
                                                                                                                       .טענה: \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n בת מנייה
                                                                                                           |\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A\}| = \aleph_0 מסקנה: |\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A\}|
                                                                                                                                   |\mathbb{Z}|=leph_0 :טענה
                                                                                                                                   |\mathbb{Q}|=\aleph_0 :טענה
                                                                      p\left(a
ight)=0 מספר אלגברי: מספר a\in\mathbb{C} עבורו קיים a\in\mathbb{C} מספר
                                                                 p\left(a
ight)
eq0 מתקיים p\in\mathbb{Z}\left[x
ight] עבורו לכל a\in\mathbb{C} מספר מספר מספר
                                                                                                     |\{a\in\mathbb{C}\mid A אלגברי a\}|=leph_0 משפט קנטור:
                                                                       יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי A אזי A באשר יחס סדר חלקי/חלש:
                                                                                                     x \preccurlyeq x אזי x \in A יהי •
                                                                  x \preccurlyeq z אזי y \preccurlyeq z וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y,z \in A אזי יהיו x \preccurlyeq y
                                                        x=y אזי y \preccurlyeq x וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y \in A אזי יהיו חלשה: x = y אנטי סימטריות חלשה:
                                                                               יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי A^2 אזי A באשר יחס סדר חזק: תהא
                                                                                          \neg \left( x \prec x \right) אזי אזי יהי יהי פלקסיביות: •
                                                                 x\prec z אזי y\prec z וכן x\prec y עבורם x,y,z\in A אזי יהיו
                                                                 \neg (y \prec x) אזי x \prec y עבורם x,y \in A יהיו חזקה: \bullet
                                   (x\preccurlyeq y)\lor(y\preccurlyeq x) מתקיים x,y\in A אבורו לכל (A,\preccurlyeq) עבורו סדר חלקי יחס סדר אווי האקיים מדר קווי
                               (x \prec y) \lor (y \prec x) \lor (x = y) מתקיים x, y \in A עבורו לכל (x, x) עבור חזק יחס סדר חזק יחס עבורו לכל
                                                                                                             טענה: \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle יחס סדר קווי חלקי.
                                                                                       . יחס סדר חלקי \langle \mathcal{P}\left(A\right),\subseteq \rangle יחס סדר חלקי ענה: תהא
(aRb) \Longleftrightarrow (f(a)Sf(b)) מתקיים a,b \in A מתקיים (A,R), \langle B,S \rangle מדרים אזי (A,R), \langle B,S \rangle מתקיים
                                   . סדרים הפיכה \pi:A	o B הפימת \langle A,R \rangle, עבורם סדרים הפיכה שומרת הפיכה \pi:A	o B
                                                                    \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle איזומורפיים איזו סדרים \langle A,R \rangle , \langle B,S \rangle סדרים איזומורפיים
```

 $|X| \leq |Y|$  חח"ע אזי f: X o Y הגדרה: תהיינה X, Y קבוצות ותהא  $Y \mapsto f: X \to Y$  חח"ע ועל אזי |X| = |Y| הגדרה: תהיינה  $X, Y \mapsto X$ 

|X|<|Y| אזי אזי  $|X|\neq |Y|$  וכן  $|X|\leq |Y|$  אזי קבוצות עבורן אזי |X|<|Y|

 $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$  המקיים  $n\in\mathbb{N}$  עבורה עבורה עבורה חופית:

 $.|A|=|\{0,\dots,n-1\}|$  המקיים  $n\in\mathbb{N}$  קיים לא עבורה A קבוצה אינסופית: קבוצה אינסופית

טענה: תהא B סופית או בת מנייה תהא f:A o B ותהא קבוצה ותהא מנייה מנייה מנייה מנייה

|X|=|Y| אאי  $|Y|\leq |X|$  וכן  $|X|\leq |Y|$  אאי און |X|=|Y| איי ואין און איי וואר אוווי אווי און אווי וואר אי וואר אווי וואר אווי וואר אי וואר אווי וואר אי וואר אי וואר אווי וואר איי וואר אי וואר

 $|X| \neq |Y|$  אזי  $\neg (|X| = |Y|)$  איזי קבוצות עבורן תהיינה X,Y איזי

טענה: תהא B בת מנייה ותהא  $B\subseteq A$  אינסופית אזי B בת מנייה. מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא  $B\subseteq A$  אזי B סופית או בת מנייה.

X העוצמה של |X| העוצמה של

 $|X|=leph_0$  קבוצה X עבורה מנייה: קבוצה בת מנייה

 $|\{0,\ldots,n-1\}|=n$  אזי  $n\in\mathbb{N}$  סימון: יהי

סימון:  $|\mathbb{N}|=0$ %.

```
(aRb) \lor (a=b) מתקיים b \in A מתקיים a \in A עבורו קיים a \in A עבורו קיים a \in A מתקיים סדר קווי
                                                                      \min(A) = a אזי a \in A איבר ראשון בעל איבר קווי בעל אדר קווי אזי \langle A, R \rangle יהי
        . טענה: יהי \langle B,S \rangle אזי \langle B,S \rangle אזי איבר ראשון ויהי \langle B,S \rangle סדר קווי באשר סענה: יהי \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle סדר איבר ראשון ויהי
       (aRb) \lor (a=b) מתקיים a \in A מתקיים b \in A מתקיים סדר קווי \langle A,R \rangle עבורו קיים a \in A באשר לכל
                                                                     \max(A) = a אזי a \in A אזיבר אחרון בעל איבר סדר קווי בעל איבר אחרון יהי
        . טענה: אזי \langle B,S \rangle אזי אזי איבר אחרון ויהי יבעל איבר אחרון איבר אחרון ויהי יהי אוי סענה: יהי יהי אוי בעל איבר אחרון ויהי
                         zRy וכן xRz עבורו z\in A קיים xRy המקיימים xRy המקיימים עבורו z\in A עבורו ווע z\in A וכן
                                      טענה: יהי \langle A,R
angle\simeq \langle B,S
angle סדר קווי באשר \langle B,S
angle אזי \langle B,S
angle צפוף.
                                                                    טענה: \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
                                                                                                                        \mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}} \not\simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle מסקנה:
      \langle A, \preccurlyeq 
angle \simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} 
angle אזי |A| = leph_0 משפט קנטור: יהי \langle A, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר
       \langle A, \prec 
angle \simeq \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} 
angle אזי משפט קנטור: יהי \langle A, \prec 
angle סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר משפט קנטור: משפט קנטור:
                            (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים X \subseteq A אזי X \subseteq A מדר קווי ותהא A \subseteq A
                                                   \overline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי X \subseteq A סדר קווי ותהא סימון: יהי
                                                                   \overline{B}_X 
eq \emptyset עבורה X \subseteq A אזי אזי X \subseteq A סדר קווי אזי יהי
                            (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים מלרע: יהי אזי X \subseteq A אזי אזי תהא X \subseteq A מחסם מלרע: יהי
                                                    \underline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי ותהא סדר קווי יהי לא סדר קווי ותהא סדר אזי אזי לימון: יהי
                                                                    \underline{B}_X 
eq \varnothing עבורה X \subseteq A אזי אזי A \subseteq A סדר יהי יהי מלרע: יהי
                                                           . סדר חסם מלרע חסם מלרע חסם מלרע אזי איזי X\subseteq A סדר קווי אזי \langle A,R \rangle יהי
                                                                      \operatorname{sup}(X) = \min\left(\overline{B}_X\right) אזי X \subseteq A אדר קווי ותהא A, R סדר קווי ותהא
                                                                       \inf\left(X
ight)=\max\left(\underline{B}_X
ight) אזי אזי X\subseteq A סדר קווי ותהא אור \langle A,R
angle יהי יהי
                                                    \operatorname{sup}\left(X
ight) אינים סדר קווי אלם: סדר קווי \left\langle A,R
ight
angle עבורו לכל
                             (\sup(X),\inf(X),\inf(X)) סדר קווי אזי איי שלם)(A,R) סדר שלם) סטענה: יהי
            המקיים \langle L,\sqsubseteq \rangle סדר הוון אזי סדר ללא איבר האשון וללא איבר איבר חלקי: יהי הי\langle P,\preccurlyeq \rangle סדר הווי חלקי ללא איבר השוו וללא איבר איבר חלקי: יהי
                                                                                                                                            .P \subseteq L \bullet
                                                                                            (x \preccurlyeq y) \Longleftrightarrow (x \sqsubseteq y) מתקיים x, y \in P לכל
                                                                              . סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון. \langle L, \Box \rangle
                                                                                                                         \langle L, \sqsubseteq \rangle צפוף ב־ \langle P, \preccurlyeq \rangle \bullet
משפט יחידות השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר סדר קווי חלקי צפוף איבר ראשון ולא איבר אחרון ותהיינה משפט יחידות השלמה:
                                                                                    p \in P לכל \pi\left(p\right) = p עבורו \pi:L 	o L^* לכל
                      משפט קיום השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.
                                                    באשר \langle A,B \rangle אזי אזי A,B \subseteq P ויהיו חלקי ויהיו סדר קווי אזי אזי \langle P,\preccurlyeq \rangle באשר מתך דדקינד: יהי
                                                                                                                                     A \cap B = \emptyset •
                                                                                                                                     A \cup B = P \bullet
                                                                                                     a \preccurlyeq b מתקיים b \in B ולכל •
                                                                                                                      ללא איבר אחרון. \langle A, \preccurlyeq \rangle
```

 $[p] = \langle (-\infty,p)\,,[p,\infty)
angle$  אזי  $p\in P$  ויהי חלקי חלקי סדר קווי חלקי אזי  $\langle P,\preccurlyeq \rangle$  יהי

.Ded  $(P)=\{\langle A,B\rangle \mid$  חתך דדקינד  $\langle A,B\rangle \}$  סדר קווי חלקי אזי מימון: יהי  $\langle P,\preccurlyeq \rangle$ 

 $\langle A,B
angle \preccurlyeq \langle C,D
angle$  אזי  $A\subseteq C$  חתכי דדקינג באשר  $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$  וויהיו חלקי ויהיו איזי  $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$  חתכי מהגדרה: יהי

טענה: יהי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי ויהי  $p \in P$  אזי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  חתך דדקינד.

 $.\langle\{[p]\mid p\in P\}\,,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$  טענה: יהי יהי יהי סדר קווי חלקי אזי יהי ענה: יהי יהי ערה פחתכי בהתאמה מעל בתור שיכון של  $P,\preccurlyeq\rangle$  בחתכי הדדקינד שלה.

טענה: יהי  $\langle \mathrm{Ded}\,(P)\,,\preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי סענה: יהי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי סענה: יהי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי  $\langle \mathrm{Ded}\,(P)\,, \preccurlyeq \rangle$ 

```
\mathcal{C}=igcap_{i=0}^\infty C_i אזי n\in\mathbb{N} לכל C_{n+1}=\left(rac{1}{3}C_n
ight)\cup\left(rac{2}{3}+rac{1}{3}C_n
ight) ונגדיר ונגדיר C_0=[0,1] לכל
                                                                                                                          .(\mathcal{C},<_{\mathbb{R}})\simeq\left(^{\mathbb{N}}\left\{ 0,1
ight\} ,<_{\mathsf{lex}}
ight) טענה:
|A\cup B|=|C\cup D| אזי און |B|=|D| וכן |A|=|C| סענה: תהיינה |A\cup B|=|C\cup D| אזי אזי ותהיינה לבוצות ארות ותהיינה
                                                                                   |A|+|B|=|A\cup B| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות זרות אזי
                                                                                                             |A \times \{0\}| = |A| טענה: תהא A קבוצה אזי
                                                            |A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}| הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי
                                      |A \times B| = |C \times D| אזי |B| = |D| וכן |A| = |C| אזי |A, B, C, D| טענה: תהיינה
                                                                                       |A|\cdot |B| = |A	imes B| הגדרה כפל: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                            |A|=\kappa עבורה עבורה קבוצה אם קיימת עוצמה א היא עוצמה הערה: נאמר כי היא אוצמה אם היא
                                                                                                                  \kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa טענה: תהא א עוצמה אזי \kappa
                                                                                  \kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu טענה: תהיינה \kappa, \lambda, \mu עוצמות אזי
                                                                                       A = \{f \mid f: B \to A\} הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי
                                               |BA| = |DC| אזי אזי |B| = |D| וכן וכן |A| = |C| אזי אזי |A,B,C,D|
                                                                                                     |A|^{|B|}=|^BA| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                                                                                |\mathbb{R}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                                       \kappa \cdot \kappa = \kappa^2 טענה: תהא א עוצמה אזי
                          (\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu}) וכן (\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)} וכן \kappa^{(\lambda + \mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} עוצמות אזי \kappa, \lambda, \mu וכן \kappa, \lambda, \mu
                                                                                            .\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0 וכן אזי n\in\mathbb{N} וכן n\in\mathbb{N} יהי אזי יהי
                                                                                             \aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0 טענה: יהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ וכן וכן
                                                                                                                             \aleph_0^n=leph_0 אזי n\in\mathbb{N}_+ טענה: יהי
                                                      2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+\aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                         2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot \aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי יהי
                                                                                       (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן (2^{\aleph_0})^n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי יהי
                                                                                                 \mathfrak{K}_0^{leph_0}=2^{leph_0} וכן n^{leph_0}=2^{leph_0} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי יהי
                                                                                                                                       (2^{\aleph_0})^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0} :טענה
                                          |\mathbb{N}\mathbb{N}|=2^{\aleph_0} וכן |\mathbb{N}	o\mathbb{R}|=2^{\aleph_0} וכן וכן |\mathbb{C}|=2^{\aleph_0} וכן |\mathbb{R}^n|=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי וכן
                                          |B \backslash A| = 2^{\aleph_0} אזי |A| \leq \aleph_0 באשר A \subseteq B ותהא ותהא |B| = 2^{\aleph_0} אזי באשר B
                                                                                                     |\{a\in\mathbb{C}\mid מסקנה: a\}|=2^{leph_0} מספר טרנסצנדנטי
                                                                                                                 |\{a\in\mathbb{R}\midמסקנה: |\{a\in\mathbb{R}\mid aאי־רציונלי |a|=2^{leph_0}
                                                                                                    |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R})\wedge (f)\}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                               |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R})\wedge (f)\}|=2^{leph_0} מסקנה: |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R}) + (f)\}|=2^{leph_0}
                                                                                                          |\{A\mid (A\subseteq\mathbb{R})\land (פתוחה|A|\}|=2^{leph_0} טענה:
                                           יחס סדר טוב: סדר קווי \langle W, \prec 
angle עבורו לכל A 
eq \varnothing באשר איבר קטן ביותר. עבורו לכל
```

f:A o B עבורו קיימת  $\langle B,\sqsubset
angle$  עבור איבר אחרון וללא איבר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון

 $\langle P, \preccurlyeq 
angle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} 
angle$  משפט: יהי  $\langle P, \preccurlyeq 
angle$  סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי

 $\langle {
m Ded}\,(P)\,,\preccurlyeq \rangle$  טענה: יהי  $\langle P,\preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי פופה אזי  $\langle P,\preccurlyeq \rangle$  טענה: יהי  $\langle P, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי  $\langle {
m Ded}\,(P)\,, \preccurlyeq \rangle$  סדר קווי חלקי אזי

 $(\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}})$  מספרים ממשיים:  $(\mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}})$  הינה ההשלמה של

 $|\mathcal{P}\left(X
ight)|=\left|^X2
ight|$  אזי קבוצה א קבוצה איזי אינה: תהא  $|X|<|\mathcal{P}\left(X
ight)|$  משפט קנטור: תהא  $|X|<|\mathcal{P}\left(X
ight)|$ 

 $\mathcal{P}\left(X\right)=\left\{Y\mid Y\subseteq X\right\}$  אזי קבוצה החזקה: תהא קבוצה אזי תהא Xקבוצה החזקה: סימון: תהא אזי Xקבוצה אזי X

שומרת סדר.

 $|\mathbb{R}| 
eq \aleph_0$  טענה:

 $|\mathbb{R}|=|\mathbb{N}2|$  :טענה

```
W[a] = \{b \in W \mid b \prec a\} אזי a \in W יחס סדר טוב ויהי \langle W, \prec \rangle יחי יחס סדר טוב ויהי
                                                                       Wבישה ב־W רישה ב־W יחס סדר טוב ויהי ויהי W(a) אזי A \in W
                                               S=W\left[x
ight] אזי קיים x\in W טענה: יהי X\in W יחס סדר טוב ותהא ותהא S רישה ב־
                     x \in W טענה: יהי (X \prec f(x)) \lor (x = f(x)) אומרת סדר אזי f: W \to W לכל לכל על יהי (W, \prec) יחס סדר טוב ותהא
                                                                              W \not\simeq W \left[ a 
ight] אזי a \in W יחס סדר טוב ויהי \langle W, \prec 
angle אזי מסקנה: יהי
                                                              f=\mathrm{Id} איזומורפיזם אזי f:W	o W יחס סדר טוב ויהי יהי איזימורפיזם אזי
                                          f=g איזומורפיזמים אזי f,g:W	o A ויהיו סדר טובים אזי \langle W, \prec 
angle, \langle A, 
angle מסקנה: יהיו
                                                 משפט ההשוואה: יהיו מהבאים מתקיים סדר טובים אזי משפט ההשוואה: יהיו \langle W, \prec 
angle \, , \langle A, \sqsubset 
angle יחסי סדר טובים אזי
                                                                                                                              .\langle W, \prec \rangle \simeq \langle A, \Box \rangle \bullet
                                                                                               \langle W[w], \prec \rangle \simeq \langle A, \Box \rangle עבורו w \in W •
                                                                                                   \langle W, \prec \rangle \simeq \langle A[a], \sqsubseteq \rangle עבורו a \in A סיים •
                                                             y \in X מתקיים y \in A ולכל A \in X עבורה עבורה לכל קבוצה ארנזיטיבית:
                                                                                      סדר טוב. \langle X, \in 
angle יחס סדר טוב. \langle X, \in 
angle
                                                                                                              טענה: יהי \alpha \cup \{\alpha\} סודר אזי \alpha \cup \{\alpha\}
                                                                                                                        \alpha \notin \alpha טענה: יהי \alpha סודר אזי
                                                                                                        . סודר x אזי אזי x \in \alpha סודר ויהי \alpha סודר מענה: יהי
                                                                                                \alpha \notin \beta אזי \beta \in \alpha טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים באשר
                                                                                               \alpha \in \beta אזי \alpha \subseteq \beta טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים באשר
                                                                   טענה משפט ההשוואה: יהיו lpha,eta סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים
                                                                                                                                            \alpha = \beta \bullet
                                                                                                                                            \alpha \in \beta \bullet
                                                                                                                                            .\beta \in \alpha \bullet
                                                                                 . סענה: \min{(S)} אזי סודרים אל ריקה לא ריקה לא קבוצה S קבוצה לא יים.
                                                                                                                         \mathcal{O}_n = \{ \alpha \mid סודר \alpha \} הגדרה:
                                                                                                                                      \mathcal{O}_n = \mathrm{Ord} : סימון
                                                                                                     טענה פרדוקס גוראלי־פורטי: מינה קבוצה. טענה
                                                              (\alpha \cup \{\alpha\} \in \beta) \lor (\alpha \cup \{\alpha\} = \beta) אזי \alpha \in \beta סודרים באשר \alpha, \beta אזי יהיו
                                                                                                         \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} סודר אזי \alpha סודר מימון: יהי
                                                         eta \in \alpha טענה: תהא eta \in S מתקיים אזי קיים סודר אזי קיים מודרים אזי קבוצת סודרים אזי קיים סודר
                                            \langle lpha, \in 
angle \simeq \langle W, \prec 
angle עבורו מיפוס סדר טוב. יהי יהי יהי יהי טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי
                                                                     \langle W, \prec 
angleיחס משפט: יהי \langle W, \prec 
angleיחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל־
                                                  \operatorname{cotp}\left(\langle W, \prec 
angle
ight) = lpha אזי אזי אזי סודר טיפוס מודר טיפוס מדר טוב ויהי \langle W, \prec 
angle אזי מימון: יהי
אזי לכל קבוצה P אזי לכל קבוצה Y אזי לכל קבוצה X קיימת קבוצה לכל קבוצה אקסיומת ההחלפה: תהא P אזי לכל קבוצה אקסיומת החלפה:
                                                                          באשר לכל P\left(a,b
ight) קיים b\in B קיים a\in A זוהי אינה טענה B
                           קבוצה. אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי \{a \in A \mid P\left(a\right)\} קבוצה. אוהי אינה טענה
משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר \alpha מתקיים משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P מוסחה באשר לכל סודר מתקיים
                                                                                                                                                     .P(\gamma)
                                                                             lpha=eta+1 סודר עוקב: סודר eta עבורו קיים סודר עוקב סודר lpha
                                                                              משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת
```

.טענה:  $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$  סדר טוב

 $.S \neq W \bullet$ 

טענה: יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $n \in \mathbb{N}$  סדר טוב.  $n \in \mathbb{N}$ 

 $b \in S$  אזי  $b \prec a$  אם  $b \in W$  ולכל  $a \in S$ 

רישה של יחס סדר טוב: יהי  $\langle W, \prec 
angle$  יחס סדר טוב אזי  $S \subseteq W$  רישה של יחס סדר טוב:

```
.P(\varnothing) \bullet
P(\alpha) \Longrightarrow P(\alpha+1) מתקיים \alpha סודר •
```

 $(\forall \beta \in \alpha.P(\beta)) \Longrightarrow (P(\alpha))$  מתקיים  $\alpha$  מתקיים •

 $.P\left(\gamma\right)$  מתקיים אזי לכל סודר

אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה S באשר S וכן לכל  $\emptyset \in S$  מתקיים  $x+1 \in S$  זוהי אינה טענה

טענה: תהא S קבוצה באשר  $\delta \notin S$  וכן לכל  $x \in S$  מתקיים מתקיים  $x \in S$  ויהי  $\delta$  הסודר הראשון באשר  $\delta \notin S$  אזי  $\delta$  סודר גבולי.

 $\omega$  סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו

סימון:  $\emptyset = 0$ .

 $\mathbb{N} = \omega$  :הגדרה

 $n \in \mathbb{N}$  לכל  $n+1=n \cup \{n\}$  הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה

 $\alpha < \beta$  אזי  $\alpha \in \beta$  סודרים באשר  $\alpha, \beta$  אזי מימון: יהיו

הגדרה חיבור: יהי lpha סודר אזי

 $\alpha + 0 = \alpha \bullet$ 

 $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$  יהי  $\beta$  סודר אזי •

 $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$  יהי  $\beta$  סודר גבולי אזי •

 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  אזי ( $\alpha, \beta, \gamma$  יהיו יהיו מענה: יהיו

 $.\gamma + \alpha < \gamma + \beta$  אזי  $\alpha < \beta$  סודרים באשר  $\alpha, \beta, \gamma$  יהיו יהיו

 $\alpha+\gamma\leq \beta+\gamma$  אזי  $\alpha<\beta$  סודרים באשר  $\alpha,\beta,\gamma$  אזי יהיו

 $lpha+\gamma=eta$  טענה: יהיו lpha, סודרים באשר lpha<eta אזי קיים ויחיד סודר lpha, סודרים באשר

 $\omega + 1 > \omega$  וכן  $1 + \omega = \omega$  וכן  $0 + \omega = \omega$ 

הגדרה כפל: יהי  $\alpha$  סודר אזי

 $\alpha \cdot 0 = 0$ 

 $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$  יהי  $\beta$  סודר אזי •

 $.\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha \cdot \gamma)$  יהי  $\beta$  סודר גבולי אזי •

 $.\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$  אזי  $\gamma \neq 0$  וכן  $\alpha < \beta$  סודרים באשר  $\alpha, \beta, \gamma$  יהיו

 $lpha\cdot\gamma<eta\cdot\gamma$  אזי lpha<eta טענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים באשר

 $lpha\left(b+\gamma
ight)=lpha\cdoteta+lpha\cdot\gamma$  סענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים אזי

 $\omega\cdot 2=\omega+\omega$  וכן  $\omega=\omega$  וכן  $1\cdot\omega=\omega$  וכן  $0\cdot\omega=0$ 

 $\omega + \omega > \omega + n$  אזי  $n < \omega$ 

טענה: יהי  $\alpha$  סודר אזי  $\alpha+\omega$  סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי lpha סודר אזי

 $\alpha^0 = 1 \bullet$ 

 $.lpha^{eta+1}=lpha^eta\cdotlpha$  יהי eta סודר אזי יהי  $\bullet$ 

 $\alpha^{\beta} = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha^{\gamma})$  יהי  $\beta$  סודר גבולי אזי •

 $lpha < \gamma^{lpha} < \gamma^{eta}$  אזי  $1 < \gamma$  וכן lpha < eta סענה: יהיו  $lpha, eta, \gamma$  סודרים באשר

 $lpha^{\gamma} \leq eta^{\gamma}$  אזי lpha < eta אזי  $lpha, eta, \gamma$  סענה: יהיו

 $lpha^{eta}\cdotlpha^{\gamma}=lpha^{eta+\gamma}$  טענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים אזי

 $(lpha^eta)^\gamma=lpha^{eta\cdot\gamma}$  טענה: יהיו  $lpha,eta,\gamma$  סודרים אזי

 $\omega^2>2^\omega$  וכן  $\omega^2=\omega\cdot\omega$  וכן  $\omega^1=\omega$  וכן  $\omega^2=\omega$  וכן  $\omega^1=\omega$  וכן  $\omega^2=\omega$ 

 $\omega^{\alpha} > \alpha$  טענה: יהי  $\alpha$  סודר אזי

טענה צורת קנטור נורמלית: יהי lpha סודר אזי קיים ויחיד  $k<\omega$  קיימים ויחיד סודר אזי קיים היהי סודר אזי קיים ויחיד א קיימים ויחידים אויחידים אויחידים מענה צורת פוטור נורמלית: יהי  $lpha = \sum_{i=1}^k \omega^{eta_i} \cdot n_i$  עבורם  $n_1 \dots n_k \in \mathbb{N}_+$  ויחידים

 $\xi < lpha$  וכן  $eta = lpha \cdot \delta + \xi$  עבורם  $\xi, \delta$  עבורם ויחידים ויחידים אזי קיימים וכן lpha < eta וכן lpha < eta

|eta|<|lpha| מתקיים eta<lpha עבורו לכל lpha

 $\aleph_0 = \omega$  :סימון

```
טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים בני מנייה אזי \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^{\beta} סודרים בני מנייה.
                                                                                        . טענה: קיים סודר \alpha המקיים \omega < \alpha המקיים \alpha אינו בן מנייה
                                                                                                     .\delta < \kappa טענה: יהי \delta סודר אזי קיים מונה א באשר
                                                                                   lpha < lpha^+ סודר אזי lpha^+ הינו המונה הראשון עבורו lpha^+ סימון: יהי
                                                                                                                 \aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha}^+ אזי \alpha סודר אזי מודר מי: איני הגדרה
                                                                                                    \aleph_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_{\beta} אזי גבולי סודר מודר \alpha יהי : איז הגדרה
                                                                                                                          טענה: יהי \alpha סודר אזי \alpha מונה.
                                                                                          \kappa=\aleph_{lpha} עבורו סיענה: יהי מונה אזי קיים ויחיד סודר מונה א
                                                                                                                         \omega_{\alpha}=\aleph_{\alpha} סודר אזי סודר מימון: יהי סימון:
                                                                              |\delta|=leph_lpha אזי אוי|\delta|=|lpha_lpha| אזי אינסופיים באשר אינסופיים סימון: יהיו
הערה: כאשר מבצעים פעולות בין מונים הכוונה היא לפי ההגדרה של עוצמות, כאשר מבצעים פעולות בין סודרים הכוונה היא לפי
                                                                                                                                         ההגדרה של סודרים.
הגדרה: יהי \alpha סודר אזי יחס סדר \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \rangle באשר לכל \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \rangle באשר לכל הגדרה: יהי \alpha סודר אזי יחס סדר אי
                                                                                                                                                          מתקיים
                                                                                                                         \max(\beta, \gamma) < \max(\delta, \kappa) \bullet
                                                                                                            .\beta < \delta וכן \max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa) •
                                                                                             .\gamma < \kappa וכן \beta = \delta וכן \max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa)
                                                                                                 טענה: יהי \alpha סודר אזי \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}, \lhd \rangle יחס סדר טוב.
                                                                                                   .otp (\langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}, \lhd \rangle) = \aleph_{\alpha} משפט: יהי \alpha סודר אזי משפט:
                                                                                                                 \aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\alpha}=\aleph_{\alpha} מסקנה: יהי \alpha סודר אזי מסקנה:
                                                                                                                    משפט: יהיו \kappa,\lambda מונים אינסופיים אזי
                                                                                                                               .\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\} \bullet
                                                                                                                                .\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\} \bullet
                                                                                                                              מסקנה: יהיו lpha,eta סודרים אזי
                                                                                                                            \aleph_{\alpha} + \aleph_{\beta} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \bullet
                                                                                                                              \aleph_{\alpha} \cdot \aleph_{\beta} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \bullet
                                f\left(X
ight)\in X מתקיים X\in S מתקיים f:S	o A מוק באשר S פונקציית בחירה: תהא
                             אקסיומת הבחירה (AC): תהא S קבוצה באשר קבוצה באיר אינה טענה S אווי אינה אינה טענה אקסיומת הבחירה (AC).
                                                               g:\mathbb{N}	o A אזי (קיימת f:A	o\mathbb{N} חח"ע) אזי (קיימת f:A	o\mathbb{N} אזי (קיימת מענה: תהא
         A משפט הסדר הטוב/משפט צרמלו: תהא A קבוצה עבורה קיימת פונקציית בחירה על
                                                         הגדרה משפט הסדר הטוב: תהא A קבוצה אזי קיים סדר טוב על A. זוהי אינה טענה
                                                                                                                    משפט: (AC)\Longleftrightarrow(AC)
                                                          AC טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד סודר lpha עבורו A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד
                                                                               אינה טענה ,AC דורש .2^{\aleph_0}=leph_1:(CH) השערת הרצף הפרטית
                                                     אינה טענה ,AC אורי אינה אינה אינה מודר אזי (GCH): יהי lpha סודר איזי יהי אינה אינה מערת הרצף הכללית
                                                                                                                             .ZFC בלתי תלויה ב־CH
                                                                                                                           .ZFC בלתי תלויה ב־GCH
                                                                                                                               הערה: AC בלתי תלויה ב־ZF.
                                                                        AC טענה: תהא B\subseteq A בת מנייה. דורש אזי קיימת אורט קבוצה אינסופית אזי קיימת
  AC טענה: תהא (A_n\mid n\in\mathbb{N}) סופית או בת מנייה. דורש או בת מנייה לכל A_i סופית או בת מנייה. דורש
          (b \leq a) \Longrightarrow (b=a) מתקיים b \in A באשר לכל a \in A עבורו קיים a \in A עבורו קיים עבור מינימלי: סדר חלקי סדר חלקי עבורו קיים
           a\in A מתקיים (b\leq a) מתקיים a\in A באשר לכל b\in A עבורו קיים b\in A עבורו קיים איבר מקסימלי: סדר קווי בעל איבר מקסימלי:
הגדרה הלמה של צורן: יהי \langle P, \leq 
angle יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת A \subseteq P קיים חסם מלעיל אזי קיים ב־P יחס סדר טוב עבורו
                                                                                                                         (AC) \Longleftrightarrow (AC)משפט:
```

```
AC דורש .\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|
                    טענה: תהא |A_i|=|B_i| לכל לבא קבוצות ותהיינה ל|A_i|=|B_i| לכל קבוצות ותהיינה ל|A_i|=|B_i| לכל לכל אזיי
                                                                                                                               AC דורש .\left|\prod_{i\in I}A_i\right|=\left|\prod_{i\in I}B_i\right|
              לכל |A_i|=\kappa_i קבוצות באשר אזיי ותהיינה \langle A_i \mid i \in I 
angle מונים ותהיינה \langle \kappa_i \mid i \in I 
angle לכל לכל אזיי הגדרה כפל מונים: תהא
                                                                                                                                  AC דורש .\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \prod_{i \in I} A_i \right|
                                                                                            AC הערה: מכאן והלאה לא ייסומן כאשר הטענות יסתמכו על
                                                                           \sum_{i<\lambda}\kappa=\kappa\cdot\lambda אזי \kappa\geq 1 מונה אינסופי ויהי \kappa מונה באשר אוי מונה אינסופי ויהי
                 \sum_{i<\lambda} \kappa_i = \sup\left\{\kappa_i \mid i<\lambda
ight\}\cdot \lambda אזי i<\lambda לכל האינסופי ויהיו \left\{\kappa_i \mid i<\lambda
ight\} מונים באשר מונה i<\lambda מונים מונה אינסופי ויהיו
                                                                                                                                           \sum_{1 \leq n < \aleph_0} n = \aleph_0 טענה:
                                                                                                                                          \prod_{1 \le n < \aleph_0} n = 2^{\aleph_0} טענה:
  \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i אזי i\in I אזי הכיו הא i\in I משפט קניג: תהא משפט קניג: תהא אונים ויהיו משפט קוניג מונים ויהיו
וכן i<\delta לכל lpha>lpha_i המקיימת lpha המקיימת lpha לכל lpha>lpha לכל סודר: יהי lpha סודר גבולי אזי הסודר המינימלי \delta עבורו קיימת סדרה עולה
                                                                                                                                                            .\alpha = \bigcup_{i < \delta} \alpha_i
                                                                                                 \operatorname{cof}(\alpha) סודר גבולי אזי הסופיות של \alpha הינה סודר גבולי
                                                                                               \operatorname{cof}(\aleph_{\omega}) = \omega וכן \operatorname{cof}(\omega + \omega) = \omega וכן \operatorname{cof}(\omega) = \omega
                                                                                                               .lpha=\cos{(lpha)} סודר סדיר: סודר גבולי lpha המקיים
                                                                                                                \alpha \neq \operatorname{cof}(\alpha) סודר חריג: סודר גבולי
                                                                                                                      מונה. \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                                              טענה: יהי \kappa מונה אזי \kappa סודר גבולי.
                                                                                                        \operatorname{cof}\left(\operatorname{cof}\left(\alpha\right)\right)=\operatorname{cof}\left(\alpha\right) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                              .סענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי \cot(\alpha) מונה סדיר
            AC טענה: יהי lpha סודר אזי lpha_{lpha+1} סדיר. דורש
                                                                                                              \operatorname{cof}(\aleph_{\alpha}) = \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                                                                \operatorname{cof}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0 טענה:
```

 $\prod_{i\in I}X_i=ig\{f\mid (f:I o igcup_{i\in I}X_i)\land (orall i\in I)\}$  הגדרה: תהא I קבוצה ותהיינה  $X_i\mid i\in I$  קבוצות אזי

טענה: תהא  $|A_i|=|B_i|$  לכל אזיי אויר קבוצות ארות ותהיינה אוי אויר אוות ארות אויינה ל $|A_i|=|B_i|$  לכל אזיי איינה ל $|A_i|=|B_i|$  לכל אזיי

לכל  $|A_i|=\kappa_i$  אזי ארות באשר  $|A_i|=\kappa_i$  מונים ותהיינה אזי מונים ותהיינה אזי אונים ותהיינה אזי אונים ותהיינה אזי אונים ותהיינה אזיי אזיי

AC טענה: תהא I קבוצה ותהיינה  $X_i \neq \emptyset$  קבוצות באשר  $X_\alpha \neq \emptyset$  לכל  $X_\alpha \neq \emptyset$  אזי  $X_i \mid i \in I$  דורש  $X_i \mid i \in I$  סענה: (AC) $\longleftarrow$ ( $X_i \mid i \in I$ ) אזי  $X_i \neq \emptyset$  אזי  $X_i \neq \emptyset$  סענה: (לכל קבוצה  $X_i \mid i \in I$ ) קבוצות אם  $X_i \neq \emptyset$ 

.(AC) (AC) או  $|A| \leq |B|$  מתקיים A,B מתקיים או (לכל קבוצות A,B מדה ויהי A,B מ"ו מעל A,B אזי קיים בסיס ל-A,B דורש AC טענה: יהי A,B שדה ויהי A,B מ"ו מעל A,B אזי קיים בסיס ל

AC דורש . $\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|=\left|\bigcup_{i\in I}B_i\right|$