פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי $A\times A\to A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית על A אזי $a*b=*\left(a,b\right)$.

חבורה: תהא G קבוצה אזי $*:G\times G\to G$ עבורה קיים $e\in G$ עבורו

- אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in G$ מתקיים $a*\left(b*c\right)=\left(a*b\right)*c$.
- איבר יחידה: לכל $a\in G$ מתקיים $a*e=e*a=a$.
- איבר הופכי: לכל $a\in G$ קיים $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $S\left(X\right)=\left\{ f:X\to X\mid \text{הפיכה } f\right\}$.

חבורת התמורות: תהא X קבוצה אזי $\left(S\left(X\right),\circ\right)$.

טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_{n}=S\left(\left[n\right]\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|S_{n}\right|=n!$.

חבורת המטריצות: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\text{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.

החבורות החיבוריות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},+\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ אזי $A^{*}=A^{\times}=A\backslash\left\{ 0\right\}$.

החבורות הכפליות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Q}^{*},\mathbb{R}^{*},\mathbb{C}^{*}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},\cdot\right)$.

החבורה הטריוואלית: יהי x אזי $\left(\left\{ x\right\},\text{Id}\right)$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sim_{n}\subseteq\mathbb{Z}^{2}$ המוגדרת $\left(\left(x\sim_{n}y\right)\Longleftrightarrow\left(n|\left(x-y\right)\right)\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_{n}=\mathbb{Z}_{n}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $+:C_{n}\times C_{n}\to C_{n}$ המוגדרת $\left[x\right]_{\sim_{n}}+\left[y\right]_{\sim_{n}}=\left[x+y\right]_{\sim_{n}}$.

חבורת שאריות החלוקה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|C_{n}\right|=n$.

חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה לכל $g,h\in G$ מתקיים $g*h=h*g$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge3}$ אזי $\left(S_{n},\circ\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(\text{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$ אבלית.

חבורה סופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\in\mathbb{N}$.

חבורה אינסופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\ge\aleph_{0}$.

סדר של חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה סופית אזי $\text{ord}\left(G\right)=\left|G\right|$.

סדר של חבורה: תהא G חבורה אינסופית אזי $\text{ord}\left(G\right)=\infty$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $o\left(G\right)=\text{ord}\left(G\right)$.

תת־חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי $\left(H,*_{\restriction_{H\times H}}\right)$ עבורה

- סגירות לכפל: לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b\in H$.
- סגירות להופכי: לכל $a\in H$ מתקיים $a^{-1}\in H$.
- איבר יחידה: יהי e איבר היחידה של G אזי $e\in H$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ עבורה $\left(H,*_{\restriction_{H\times H}}\right)$ תת־חבורה אזי $H\le G$.

למה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\in\mathcal{P}\left(G\right)\backslash\left\{ \varnothing\right\}$ אזי $\left(H\le G\right)\Longleftrightarrow$(לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b^{-1}\in H$).

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהיינה $A,B\subseteq G$ אזי $A*B=\left\{ a*b\mid\left(a\in A\right)\land\left(b\in B\right)\right\}$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה תהא $H\subseteq G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\left\{ g\right\}*H$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(n\mathbb{Z},+\right)\le\left(\mathbb{Z},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\left(\text{SL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)\le\left(\text{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $R_{n}=\left\{ z\in\mathbb{C}\mid z^{n}=1\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(R_{n},\cdot\right)\le\left(\mathbb{C}^{*},\cdot\right)$.

טענה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $G\le G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $\{e\}\le G$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי קיים ויחיד $e\in G$ עבורו $a*e=e*a=a$ לכל $a\in G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a\in G$ אזי קיים ויחיד $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $a\in G$ ויהי $b\in G$ איבר הופכי ל־a אזי $a^{-1}=b$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהיו $a,b\in G$ אזי $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a\in G$ אזי $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$.

מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c\in G$ עבורם $a*b=a*c$ אזי $b=c$.

מסקנה כלל צמצום מימין: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c\in G$ עבורם $b*a=c*a$ אזי $b=c$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $g\in G$ אזי $g^0=e$.

הגדרה: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $g\in G$ אזי $g^n=g*g^{n-1}$.

סימון: תהא G חבורה יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $g\in G$ אזי $g^{-n}=(g^n)^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $g\in G$ אזי $g^{-n}=\left(g^{-1}\right)^n$.

חבורת המכפלה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות נגדיר $(g,h)\cdot(g',h')=(g*g',h\otimes h')$ לכל $g,g'\in G$ ולכל $h,h'\in H$ אזי $(G\times H,\cdot)$.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי חבורת המכפלה הינה חבורה.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי (חבורת המכפלה אבלית)$\Longleftrightarrow$(H,G אבליות).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K\le G$ אזי ($H*K\le G$)$\Longleftrightarrow$($HK=KH$).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K\le G$ אזי ($H\cup K\le G$)$\Longleftrightarrow$($H\cap K\in\{H,K\}$).

הגדרה: תהא X קבוצה ותהא $Y\subseteq X$ אזי $\text{Stab}\left(Y\right)=\{\pi\in S\left(X\right)\mid\forall y\in Y.\pi\left(y\right)=y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ותהא $Y\subseteq X$ אזי $\text{Stab}\left(Y\right)\le S\left(X\right)$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $\{H_i\}_{I\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(G\right)$ באשר $H_i\le G$ לכל $i\in I$ אזי $\bigcap_{i\in I}H_i\le G$.

הגדרה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\mathcal{F}\left(X\right)=\{H\le G\mid X\subseteq H\}$.

החבורה שנוצרת על ידי תת־קבוצה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\langle X\rangle=\bigcap_{H\in\mathcal{F}(X)}H$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\langle X\rangle\le G$.

טענה מינימליות החבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $X\subseteq G$ ותהא $H\le G$ עבורה $X\subseteq H$ אזי $\langle X\rangle\subseteq H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\langle X\rangle=\left\{\prod_{i=1}^{k}x_i^{s_i}\;\middle|\;(k\in\mathbb{N})\wedge\left(x\in X^k\right)\wedge\left(s\in\{\pm1\}^k\right)\right\}$.

קבוצת יוצרים של חבורה: תהא G חבורה אזי $X\subseteq G$ עבורה $\langle X\rangle=G$.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

חבורה ציקלית: חבורה G עבורה קיים $g\in G$ המקיים $\langle g\rangle=G$.

למה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\langle g\rangle=\left\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m\in\mathbb{Z}$ ויהי $g\in G$ אזי $g^{n+m}=g^n*g^m$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m\in\mathbb{Z}$ ויהי $g\in G$ אזי $(g^n)^m=g^{n\cdot m}$.

למה: תהא G חבורה אזי (G ציקלית)$\Longleftrightarrow$(קיים $g\in G$ עבורו $G=\left\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$).

מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.

סדר של איבר: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}\left(g\right)=\text{ord}\left(\langle g\rangle\right)$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}\left(g\right)=\min\{n\in\mathbb{N}_+\mid g^n=e\}$.

הערה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ עבורו $\text{ord}\left(g\right)$ לא קיים אזי $\text{ord}\left(g\right)=\infty$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $g\in G$ באשר $\text{ord}\left(g\right)<\infty$ אזי $\left(\text{ord}\left(g\right)|n\right)\Longleftrightarrow\left(g^n=e\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $i\in\mathbb{Z}_n$ אזי ($\langle i\rangle=\mathbb{Z}_n$)$\Longleftrightarrow$($i,n$ זרים).

טענה: תהא G חבורה ציקלית ותהא $H\le G$ אזי H ציקלית.

טענה: $(\mathbb{Q},+)$ אינה נ"ס.

קוסט ימני: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ויהי $g\in G$ אזי $H*g$.

קוסט שמאלי: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H$.

נציג של קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי Hg קוסט ימני אזי g.

נציג של קוסט שמאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי אזי g.

מסקנה: תהא G חבורה אבלית תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $Hg = gH$.

מסקנה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H)\Longleftrightarrow(gH = H)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H)\Longleftrightarrow(Hg = H)$

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $G/H = \{gH \mid g \in G\}$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $_H\backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי G/H חלוקה של G.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי $\left(g_2^{-1}g_1 \in H\right) \Longleftrightarrow (g_1H = g_2H)$.

הקוסט הטריוואלית: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי eH.

אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $[G : H] = |G/H|$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $[G : H] = |_H\backslash G|$.

טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H \le G$ אזי $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot [G : H]$.

משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא $H \le G$ אזי $\text{ord}(H) \mid \text{ord}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ותהא $K \le H$ אזי $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי לכל $g \in G\backslash\{e\}$ מתקיים $G = \langle g\rangle$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי G ציקלית.

מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(n, p) = 1$ אזי $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

למה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \le G$ חבורות סופיות אזי $|HK| = \frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$.

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p > q$ ותהא G חבורה באשר $|G| = pq$ אזי לכל $H, K \le G$ באשר $\text{ord}(H) = p$ וכן $\text{ord}(K) = p$ מתקיים $K = H$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 3}$ אזי $\left(S_n/\text{Stab}(1)\right) \cap \left(_{\text{Stab}(1)}\backslash S_n\right) = \{\text{Stab}(1)\}$.

קוסט כפול: תהא G חבורה תהיינה $H, K \le G$ ויהי $g \in G$ אזי HgK.

טענה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \le G$ אזי $\{HgK \mid g \in G\}$ חלוקה של G.

הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי $\varphi : G \to H$ המקיימת

- שימור איבר יחידה: $\varphi(e_G) = e_H$.
- שימור כפל: לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
- שימור הופכי: לכל $g \in G$ מתקיים $\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1}$.

טענה: תהיינה G, H חבורות ותהא $\varphi : G \to H$ אזי (φ הומומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi\left(a \cdot b^{-1}\right) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1}$).

גרעין של הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי

- $\text{Im}(\varphi) \le H$.
- $\ker(\varphi) \le G$.
- (φ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\ker(\varphi) = \{e_G\}$).

טענה: תהיינה G, H, K חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $\psi : H \to K$ הומומורפיזם אזי $\psi \circ \varphi$ הומומורפיזם.

טענה: תהיינה G, H חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(\varphi(g)) \mid \text{ord}(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם.

טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא G חבורה אזי $\varphi : G \to \{e\}$ המוגדרת $\varphi(g) = e$ לכל $g \in G$ הינה הומומורפיזם.

טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $\text{Id} : H \to G$ הינו הומומורפיזם.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $\det : \text{GL}(V) \to \mathbb{F}^*$ הינו הומומורפיזם.

מטריצת תמורה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \to \text{GL}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(\rho(\sigma))_{i,j} = \begin{cases} 1 & j=\sigma(i) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ לכל $i, j \in [n]$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ תהא $\sigma \in S_n$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\rho(\sigma) \cdot v = \begin{pmatrix} v_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ v_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \to \text{GL}_n(\mathbb{R})$ הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\det\left(\rho\left(\sigma\right)\right)\in\{\pm1\}$.

סימן של תמורה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\text{sign}:S_n\to\{\pm1\}$ המוגדרת $\text{sign}=\det\circ\rho$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי sign הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\text{sign}\left(\sigma\right)=\frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\text{sign}\left(\sigma\right)=\left(-1\right)^{\left|\left\{(i,j)\in[n]^2\mid(i<j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))\right\}\right|}$.

חבורת התמורות הזוגיות: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n=\ker\left(\text{sign}\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n\le S_n$.

איזומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם הפיך $\varphi:G\to H$.

סימון: תהיינה G,H חבורות איזומורפיות אזי $G\cong H$.

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם אזי φ^{-1} איזומורפיזם.

למה: תהיינה G,H,K חבורות יהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם ויהי $\psi:H\to K$ איזומורפיזם אזי $\psi\circ\varphi$ איזומורפיזם.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה של חבורות אזי $\cong$ יחס שקילות על $\mathcal{A}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong R_n$.

טענה: תהיינה G,H חבורות תהא $S\subseteq G$ באשר $\langle S\rangle=G$ ויהיו $\varphi,\psi:G\to H$ הומומורפיזמים באשר $\varphi_{\restriction_S}=\psi_{\restriction_S}$ אזי $\varphi=\psi$.

מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם חח"ע $\varphi:G\to H$.

אפימורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם על $\varphi:G\to H$.

אוטומורפיזם: תהא G חבורה אזי איזומורפיזם $\varphi:G\to G$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\text{Aut}\left(G\right)=\{\varphi:G\to G\mid \text{אוטומורפיזם } \varphi\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\left(\text{Aut}\left(G\right),\circ\right)$ חבורה.

חבורת קליין: $K=C_2\times C_2$.

טענה: חבורת קליין הינה אבלית.

טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.

טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־C_4.

פונקציית הצמדה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $c_g:G\to G$ המוגדרת $c_g\left(x\right)=gxg^{-1}$ לכל $x\in G$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי c_g אוטומורפיזם.

אוטומורפיזם פנימי: תהא G חבורה אזי אוטומורפיזם $\varphi:G\to G$ עבורו קיים $g\in G$ המקיים $\varphi=c_g$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\text{Inn}\left(G\right)=\{c_g\mid g\in G\}$.

תת־חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $H\le G$ עבורה לכל $g\in G$ מתקיים $c_g\left(H\right)=H$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ נורמלית אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ התב"ש

- $H\trianglelefteq G$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gHg^{-1}=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gH=Hg$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg\subseteq H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $H\subseteq g^{-1}Hg$.
- ${}^{G}/_{H}={}_{H}\backslash^{G}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ באשר $[G:H]=2$ אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\text{Inn}\left(G\right)\trianglelefteq\text{Aut}\left(G\right)$.

תת־חבורה אופיינית: תהא G חבורה אזי $K\le G$ עבורה לכל $\varphi\in\text{Aut}\left(G\right)$ מתקיים $\varphi\left(K\right)=K$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $K\le G$ אופיינית אזי $K\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H\trianglelefteq G$ ותהא $K\le H$ אופיינית ב־H אזי $K\trianglelefteq G$.

מרכז של חבורה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)=\{g\in G\mid\forall h\in G.gh=hg\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)\trianglelefteq G$.

חבורת הייזנברג: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}\right)=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&a&b\\&1&c\\&&1\end{smallmatrix}\right)\middle| a,b,c\in\mathbb{F}\right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathbb{F})) \cong (\mathbb{F},+)$.

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_n \trianglelefteq S_n$.

חבורה פשוטה: חבורה G עבורה לכל $H \trianglelefteq G$ מתקיים $H \in \{\{e\},G\}$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי C_p פשוטה.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ פשוטה.

הגדרה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ נגדיר $* : {}^{G}/_{N} \times {}^{G}/_{N} \to {}^{G}/_{N}$ כך $(gN)*(hN) = (g*h)N$.

חבורת המנה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $({}^{G}/_{N},*)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי חבורת המנה הינה חבורה.

העתקת המנה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $q : G \to {}^{G}/_{N}$ המוגדרת $q(g) = gN$.

טענה: תהא G חבורה תהא $N \trianglelefteq G$ ותהא q העתקת המנה אזי

- q הינה הומומורפיזם.
- $\ker(q) = N$.
- q על.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $(H \trianglelefteq G) \Longleftrightarrow$(קיים אוטומורפיזם $\varphi : G \to G$ עבורו $H = \ker(\varphi)$).

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_n$.

משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי ${}^{G}/_{\ker(\varphi)} \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.

טענה: תהא G חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $G \cong \mathbb{Z}$.
- קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $G \cong \mathbb{Z}_n$.

טענה: תהא G חבורה אזי $|{}^{G}/_{\mathcal{Z}(G)}| \notin \mathbb{P}$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $H,K \trianglelefteq G$ באשר $G = HK$ וכן $H \cap K = \{e\}$ אזי $G \cong H \times K$.

מסקנה: יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ זרים אזי $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית תהא $H \le G$ מאינדקס p ותהא $N \trianglelefteq G$ מאינדקס p באשר $H \ne N$ אזי $G = HN$ וכן $p^2 | \mathrm{ord}(G)$.

חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H,K חבורות ויהי $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ הומומורפיזם נגדיר $(h,k)\cdot(h',k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')$ לכל $h,h' \in H$ ולכל $k,k' \in K$ אזי $(H \times K, \cdot)$.

סימון: תהיינה H,K חבורות ויהי $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה $H \rtimes_{\varphi} K$.

טענה: תהיינה H,K חבורות ויהי $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ אזי $H \rtimes_{\varphi} K$ הינה חבורה.

טענה: תהיינה H,K חבורות נגדיר $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = \mathrm{Id}_H$ לכל $k \in K$ אזי $H \rtimes_{\varphi} K \cong H \times K$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}) = \{f : \mathbb{F} \to \mathbb{F} \mid \exists a \in \mathbb{F}^{\times} (\exists b \in \mathbb{F} (\forall x \in \mathbb{F} (f(x) = ax+b)))\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $(\mathrm{Aff}(\mathbb{F}), \circ)$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה נגדיר $\varphi : \mathbb{F}^{\times} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F})$ כך $\varphi(a)(b) = ab$ לכל $a \in \mathbb{F}^{\times}$ ולכל $b \in \mathbb{F}$ אזי $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F} \rtimes_{\varphi} \mathbb{F}^{\times}$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל אזי $\mathrm{Iso}(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid (\text{איזומטריה } \varphi) \wedge (\varphi(P) = P)\}$.

החבורה הדיהדרלית: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל בעל n קודקודים אזי $D_n = \mathrm{Iso}(P)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ אזי $(D_n, \circ)$ חבורה.

סימון: תהא X קבוצה ויהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ פרידיקטים על X אזי $\langle X \mid \varphi_1 \ldots \varphi_n \rangle = \{x \in \langle X \rangle \mid \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ אזי $D_n \cong \langle r,s \mid s^2 = e, r^n = e, srs = r^{-1} \rangle$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ אזי

- אם $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\{D_n, \langle sr, r^2 \rangle, \langle s, r^2 \rangle\} \cup \{H \le \langle r \rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n.
- אם $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\{D_n\} \cup \{H \le \langle r \rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n.

טענה: $\mathcal{H}(\mathbb{F}_2) \cong D_4$.

טענה: תהא G חבורה יהי $K \trianglelefteq G$ יהי $H \trianglelefteq G$ באשר $G = HK$ וכן $H \cap K = \{e\}$ ונגדיר $\varphi : K \to \mathrm{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = c_k$ לכל $k \in K$ אזי $G \cong H \rtimes_{\varphi} K$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ ונגדיר $\varphi:C_2\to\text{Aut}\left(C_n\right)$ כך $\varphi\left(k\right)=c_k$ לכל $k\in K$ אזי $D_n\cong C_n\rtimes_\varphi C_2$.

טענה: $K\trianglelefteq A_4$.

חבורה פתירה: חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0\dots G_n\le G$ המקיימות

- $G_n=G$.
- $G_0=\{e\}$.
- $G_{i-1}\trianglelefteq G_i$ לכל $i\in[n]$.
- ${}^{G_i}/{}_{G_{i-1}}$ אבלית לכל $i\in[n]$.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי G פתירה.

טענה: תהא G חבורה פשוטה באשר G אינה אבלית אזי G אינה פתירה.

משפט: יהי $n\in[4]$ אזי S_n פתירה.

משפט האיזומורפיזם השני: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי ${}^{H}/{}_{(H\cap N)}\cong{}^{(HN)}/{}_{N}$.

טענה: תהא G חבורה ותהיינה $N,K\trianglelefteq G$ באשר $K\le N$ אזי ${}^{N}/{}_{K}\trianglelefteq{}^{G}/{}_{N}$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה $N,K\trianglelefteq G$ באשר $K\le N$ אזי ${}^{G}/{}_{N}\cong{}^{(G/K)}/{}_{(N/K)}$.

משפט ההתאמה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי קיימת $\Phi:\{H\le G\mid N\le H\}\to\{H\mid H\le{}^{G}/{}_{N}\}$ חח"ע ועל המקיימת

- לכל $K\trianglelefteq G$ המקיימת $N\le K$ מתקיים $\Phi\left(K\right)\trianglelefteq{}^{G}/{}_{N}$.
- משמרת מנות: לכל $K\trianglelefteq G$ המקיימת $N\le K$ מתקיים ${}^{G}/{}_{K}\cong{}^{\Phi(G)}/{}_{\Phi(K)}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי (N נורמלית מקסימלית)$\Longleftrightarrow$(${}^{G}/{}_{N}$ פשוטה).

פעולה שמאלית של חבורה על קבוצה: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי פונקציה $f:G\times X\to X$ המקיימת

- לכל $x\in X$ מתקיים $f\left(e,x\right)=x$.
- לכל $g,h\in G$ ולכל $x\in X$ מתקיים $f\left(g\cdot h,x\right)=f\left(g,f\left(h,x\right)\right)$.

הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.

סימון: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $f:G\times X\to X$ פעולה על G אזי $f\left(g,x\right)=g.x$.

סימון: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $G\curvearrowright X=\{f:G\times X\to X\mid \text{פעולה } f\}$.

הפעולה השמאלית: תהא G חבורה נגדיר $f\in G\curvearrowright G$ כך $f\left(g,x\right)=gx$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.

הפעולה הימנית: תהא G חבורה נגדיר $f\in G\curvearrowright G$ כך $f\left(g,x\right)=xg^{-1}$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.

הערה: מכאן והלאה נאמר כי G פועלת על X ונסמן $g.x$ את הפעולה.

מסלולים: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ ויהי $x\in X$ אזי $\text{orb}_\alpha\left(x\right)=\{g.x\mid g\in G\}$.

סימון: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $o\left(x\right)=\text{orb}\left(x\right)$.

פעולה טרנזיטיבית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f\in G\curvearrowright X$ עבורה קיים $x\in X$ המקיים $o\left(x\right)=X$.

מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $\text{Stab}_G\left(x\right)=\{g\in G\mid g.x=x\}$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $\text{Stab}_G\left(x\right)\le G$.

פעולה חופשית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f\in G\curvearrowright X$ עבורה לכל $x\in X$ מתקיים $\text{Stab}_G\left(x\right)=\{e\}$.

למה: תהא G חבורה תהא X קבוצה תהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ ויהי $g\in G$ אזי $\alpha\left(g\right)\in S\left(X\right)$.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ אזי $\varphi_\alpha:G\to S\left(X\right)$ המוגדרת $\varphi_\alpha\left(g\right)\left(x\right)=\alpha\left(g,x\right)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ אזי φ_α הומומורפיזם.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi:G\to S\left(X\right)$ הומומורפיזם אזי $\alpha_\varphi:G\times X\to X$ המוגדרת $\alpha_\varphi\left(g,x\right)=\varphi\left(g\right)\left(x\right)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi:G\to S\left(X\right)$ הומומורפיזם אזי α_φ פעולה.

למה מסלול מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $|o\left(x\right)|=[G:\text{Stab}_G\left(x\right)]$.

למה של ברנסייד: תהא X קבוצה ותהא G חבורה סופית הפועלת על X אזי $|\{o\left(x\right)\mid x\in X\}|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{x\in X\mid g.x=x\}|$.

הפעולה על הקוסטים השמאליים: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי $\alpha\in G\curvearrowright{}^{G}/{}_{H}$ המוגדרת $\alpha\left(g,g'H\right)=gg'H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.

פעולות אקוואריאנטיות/שקולות: תהיינה X,Y קבוצות ותהא G חבורה אזי $(\alpha,\beta)\in(G\curvearrowright X)\times(G\curvearrowright Y)$ עבורן קיימת $F:X\to Y$ חח"ע ועל המקיימת $F\left(\alpha\left(g,x\right)\right)=\beta\left(g,F\left(x\right)\right)$ לכל $g\in G$ ולכל $x\in X$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $X \curvearrowleft G \ni \alpha$ טרנזיטיבית ויהי $x \in X$ עבורו $o(x) = X$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים של ${}^{G}/_{\mathrm{Stab}_G(x)}$ אקוריאנטית ל־α.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $X \curvearrowleft G \ni \alpha$ טרנזיטיבית אזי קיימת $H \le G$ עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים אקוריאנטית ל־α.

טענה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $\{o(x) \mid x \in X\}$ חלוקה של X.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $X \curvearrowleft G \ni \alpha$ טרנזיטיבית אזי לכל $x \in X$ מתקיים $o(x) = X$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ איזומטריות של $\mathbb{R}^3$ ותהא $p \in \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(P \times \{0\})$ אזי $\mathrm{Poly}(p) = |\{\varphi_i(P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i(P \times \{0\})\}|$.

גוף אפלטוני: קבוצה קמורה לא זניחה $K \subseteq \mathbb{R}^3$ עבורה קיים מצולע משוכלל $P \subseteq \mathbb{R}^2$ וקיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן

- פאות איזומטריות: $\partial K = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(P \times \{0\})$.
- קודקוד משותף זהה כמות: לכל קודקודים $v_1, v_2 \in K$ מתקיים $\mathrm{Poly}(v_1) = \mathrm{Poly}(v_2)$.

מספר פאות של גוף אפלטוני: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $n \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו קיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן $\partial K = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(P \times \{0\})$ באשר $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\mathrm{Iso}(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid (\text{איזומטריה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\}$.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\mathrm{Iso}_+(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid (\text{איזומטריה משמרת אוריינטציה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\}$.

הגדרה סימון שלפלי: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני בעל $n \in \mathbb{N}$ פאות ויהי $v \in K$ קודקוד אזי $\{n, \mathrm{Poly}(k)\}$.

הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.

דודקהדרון: גוף אפלטוני $K \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל סימון שלפלי $\{5, 3\}$.

טענה: יהי D דודקהדרון אזי $\mathrm{Iso}_+(D) \cong A_5$.

מסקנה: יהי D דודקהדרון אזי $\mathrm{ord}(\mathrm{Iso}_+(D)) = 60$.

משפט קיילי: תהא G חבורה אזי קיימת קבוצה X וקיימת $H \le S(X)$ עבורה $H \cong G$.

מסקנה: תהא G חבורה באשר $\mathrm{ord}(G) = \aleph_0$ אזי קיימת $H \le S(\mathbb{N})$ עבורה $H \cong G$.

משפט קושי: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p | \mathrm{ord}(G)$ אזי קיים $g \in G$ עבורו $\mathrm{ord}(g) = p$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p | \mathrm{ord}(G)$ אזי קיימת $H \le G$ ציקלית עבורה $\mathrm{ord}(H) = p$.

טענה: תהא G חבורה באשר $\mathrm{ord}(G) = 6$ אזי $G \cong \mathbb{Z}_6$ או $G \cong S_3$.

פעולת ההצמדה: תהא G חבורה אזי $G \curvearrowleft G \ni \alpha$ המוגדרת $\alpha(g, h) = c_g(h)$.

סימון: תהא G חבורה ויהיו $h, g \in G$ אזי $h^g = g^{-1} h g$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $g, h, k \in G$ אזי $h^{g \cdot k} = (h^g)^k$.

מחלקת הצמידות: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = \{g h g^{-1} \mid g \in G\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = o(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי $\{[h] \mid h \in G\}$ חלוקה של G.

המרכז של איבר: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \mathrm{Stab}_G(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) \le G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)$ אופיינית.

טענה: תהא G חבורה אזי ${}^{G}/_{\mathcal{Z}(G)} \cong \mathrm{Inn}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $|[g]| = [G : C_G(g)]$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו g, h, k באשר $k = g h g^{-1}$ אזי $|C_G(k)| = |C_G(h)|$.

משפט משוואת מחלקות הצמידות: תהא G חבורה סופית ותהא $C \subseteq G$ קבוצת נציגים של $\{[h] \mid h \in G\}$ אזי $\sum_{g \in C} \frac{1}{|C_G(g)|} = 1$.

טענה: תהא G חבורה סופית אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcup \{[g] \mid (g \in G) \wedge (|[g]| = 1)\}$.

למה: A_5 פשוטה.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 5}$ ותהא $H \trianglelefteq A_n$ עבורה קיים מעגל π בגודל שלוש המקיים $\pi \in H$ אזי $H = A_n$.

למה: A_6 פשוטה.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 5}$ אזי A_n פשוטה ואינה אבלית.

הישר הפרויקטיבי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ונגדיר $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{F}^2\backslash\{0\}\mid\exists\lambda\in\mathbb{F}^\times\left(x=\lambda y\right)\right\}$ אזי $\mathbb{PF}=\left(\mathbb{F}^2\backslash\{0\}\right)/R$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\mathcal{Z}\left(\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}\right)\right)=\left\{\lambda I_n\mid\lambda\in\mathbb{F}^\times\right\}$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\mathrm{PGL}_n\left(\mathbb{F}\right)=\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}\right)/\mathcal{Z}\left(\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}\right)\right)$.

חבורת־p: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|G|=p^n$.

משפט: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורת־p אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)\ne\{e\}$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה מסדר p^2 אזי G אבלית.

תת־חבורה p סילו: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ ותהא G חבורה באשר $|G|=p^k\cdot m$ אזי $H\le G$ באשר $|H|=p^k$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא $H\le G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\iff$(H חבורת־p וכן לכל $K\le G$ חבורה־p מתקיים $|K|\le|H|$).

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\iff$(H חבורת־p וכן $p\not|\left[G:H\right]$).

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $\mathrm{Syl}_p\left(G\right)=\left\{H\le G\mid G\text{ תת־חבורה־}p\text{ סילו של } H\right\}$

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p=\left|\mathrm{Syl}_p\left(G\right)\right|$.

למה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ אזי $p\not|\binom{p^n\cdot m}{p^n}$.

משפט סילו הראשון: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי קיימת $H\le G$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p\ge1$.

המנרמל של חבורה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי $N_G\left(H\right)=\left\{g\in G\mid gHg^{-1}=H\right\}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי $N_G\left(H\right)\le G$ וכן $H\trianglelefteq N_G\left(H\right)$.

למה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ תהא G חבורה באשר $|G|=p^k\cdot m$ ותהיינה $H,K\le G$ חבורות־p־סילו באשר $H\ne K$ אזי $H\nsubseteq N_G\left(K\right)$.

משפט סילו השני: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהיינה H,K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g\in G$ עבורו $gHg^{-1}=K$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא H תת־חבורה־p סילו של G אזי $\left(H\trianglelefteq G\right)\iff\left(n_p=1\right)$.

קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $Y\subseteq X$ עבורה לכל $g\in G$ ולכל $y\in Y$ מתקיים $g.y\in Y$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ותהא $Y\subseteq X$ אזי (Y הינה G־שמורה)$\iff$(קיימת $\mathcal{O}\subseteq X$ עבורה $Y=\bigcup_{x\in\mathcal{O}}o\left(x\right)$).

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ונגדיר $\alpha\in G\curvearrowright\mathrm{Syl}_p\left(G\right)$ כך $\alpha\left(g,H\right)=gHg^{-1}$ אזי α טרנזיטיבית.

למה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה תהא $H\le G$ תת־חבורת־p סילו תהא $R\subseteq\mathrm{Syl}_p\left(G\right)$ באשר $H\in R$ וכן R הינה H־שמורה אזי $|R|\equiv1\mod p$.

משפט סילו השלישי: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p\equiv1\mod p$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p|\mathrm{ord}\left(G\right)$.

מסקנה משפטי סילו: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי

1. קיימת $H\le G$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.
2. תהיינה H,K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g\in G$ עבורו $gHg^{-1}=K$.
3. $n_p\equiv1\mod p$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $H\le S_p$ באשר $|H|=p$ אזי קיים p־מעגל $\pi\in S_p$ עבורו $H=\langle\pi\rangle$.

מסקנה משפט ווילסון: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $(p-1)!\equiv-1\mod p$.