גרף מכוון קשיר: גרף מכוון G עבורו לכל $u,v\in V\left(G\right)$ קיים מסלול מ־u ל־v או מסלול מ־v ל־u.

גרף מכוון קשיר חזק: גרף מכוון G עבורו לכל $u,v\in V\left(G\right)$ קיים מסלול מ־u ל־v.

אלגוריתם BFS: יהי G גרף ויהי $s\in V\left(G\right)$ אזי

```
function BFS(G, s):
    (d, π, color) ← dict(V(G))
    for u ∈ V(G)\{s} do
        color[u] ← White
        d[u] ← ∞
        π[u] ← Null
    end
    color[s] ← Grey
    d[s] ← 0
    π[s] ← Null
    Q ← queue()
    while Q ≠ ∅ do
        u ← Q.head
        for v ∈ Neighbor(u) do
            if color[v] = White then
                color[v] ← Grey
                d[v] ← d[u] + 1
                π[v] ← u
                Q.enqueue(v)
        end
        Q.dequeue()
        color[u] ← Black
    end
    return (d, π, color)
```

טענה: יהי G גרף ויהי $s\in V\left(G\right)$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{BFS}\left(G,s\right)$ הינה $\mathcal{O}\left(\left|V\right|+\left|E\right|\right)$.

משפט: יהי G גרף ויהי $s\in V$ אזי $\left\{v\in V\mid \text{BFS}\left(G,s\right).\text{color}\left[v\right]=\text{Black}\right\}=\left[s\right]_{\rightarrow}$.

סימון: יהי G גרף ויהיו $u,v\in V$ אזי $\delta\left(v,u\right)=\min\left(\left\{\text{len}\left(\sigma\right)\mid v,u \text{ טיול בין } \sigma\right\}\right)$.

טענה: יהי G גרף ויהיו $v,u,w\in V$ באשר $\left(w,u\right)\in E$ אזי $\delta\left(v,u\right)\le\delta\left(v,w\right)+1$.

למה: יהי G גרף ויהיו $s,v\in V$ אזי בכל שלב בהרצת $\text{BFS}\left(G,s\right)$ מתקיים $d\left[v\right]\ge\delta\left(v\right)$.

למה: יהי G גרף יהי שלב בהרצת $\text{BFS}\left(G,s\right)$ בו $Q=\left(v_1\ldots v_n\right)$ אזי מתקיים $d\left[v_i\right]\le d\left[v_{i+1}\right]$ וכן $d\left[v_i\right]\le d\left[v_1\right]+1$.

משפט נכונות מרחקים: יהי G גרף ויהיו $s,v\in V$ אזי $d\left[v\right]=\delta\left(v,s\right)$.$\text{BFS}\left(G,s\right)$.

עץ BFS: יהי G גרף ויהי $s\in V$ נגדיר $V_\pi=\left\{v\in V\mid \text{BFS}\left(G,s\right).\pi\left[v\right]\ne\text{Null}\right\}\cup\left\{s\right\}$ וכן $E_\pi=\left\{\left(\pi\left[v\right],v\right)\mid v\in V_\pi\backslash\left\{s\right\}\right\}$ אזי $G_\pi=\left(V_\pi,E_\pi\right)$.

טענה: יהי G גרף ויהי $s\in V$ אזי

- מתקיים $\deg^{-}_{G_\pi}\left(s\right)=0$.
- לכל $v\in V\left(G_\pi\right)$ מתקיים $\deg^{-}_{G_\pi}\left(v\right)=1$.
- לכל $v\in V\left(G_\pi\right)$ קיים מסלול ב־G_π בין s,v.
- G_π הינו עץ.
- יהי $v\in V\left(G_\pi\right)$ ויהי σ מסלול ב־G_π בין s,v אזי σ המסלול הקצר ביותר בין s,v ב־G.

מסלול אוילר: מסלול העובר על כל הקשתות בגרף.

מעגל אוילר: מסלול אוילר שהינו מעגל.

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מעגל אוילר ב־G)$\Longleftrightarrow$(לכל $v\in V$ מתקיים $\deg\left(v\right)\in\mathbb{N}_{\text{even}}$).

אלגוריתם למציאת מעגל אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $u\in V$ מתקיים $\deg\left(u\right)\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי

```
function EulerCircle(G, v):
    σ ← List(E(G))
    u ← Neighbor(v)
    while u ≠ v do
        σ.append({v, u})
        G = G\{{v, u}}
        u ← Neighbor(u)
    end
    if length(σ) = |E(G)| then
        return σ
    else
        w ← {x ∈ V(G) | (∃y ∈ V(G).(x, y) ∈ σ) ∧ (deg(x) > 0)}
        σ[w] = EulerCircle(G, w)
    return σ
```

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $u \in V$ מתקיים $\deg(u) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ ויהי $v \in V(G)$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{EulerCircle}(G, v)$ הינה $\mathcal{O}(|E|)$.

טענה: באלגוריתם EulerCircle כל עוד לולאת ה־while פעילה מתקיים $|\text{Neighbor}(u)| \neq \varnothing$.

משפט: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $v \in V$ מתקיים $\deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\text{EulerCircle}(G)$ הינו מעגל אוילר.

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מסלול אוילר שאינו מעגל ב־G)$\Longleftrightarrow$($|\{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}| = 2$).

אלגוריתם למציאת מסלול אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו $|\{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}| = 2$ אזי

```
function EulerPath(G):
    {v, u} ← {v ∈ V(G) | deg(v) ∈ N_odd}
    G = G + {{v, u}}
    σ = EulerCircle(G, v)
    return σ\{v, u}
```

טענה: יהי G גרף לא מכוון אזי (G דו־צדדי)$\Longleftrightarrow$(לא קיים ב־G מעגל באורך אי־זוגי).

אלגוריתם זיהוי גרפים דו־צדדיים: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי

```
function IsBipartite(G):
    (d, π, color) ← BFS(G)
    for (v, u) ∈ V do
        if d(v) = d(u) then return False
    end
    return True
```

טענה: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי (G דו צדדי)$\Longleftrightarrow$($\text{IsBipartite}(G) = \text{True}$).

מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ויהיו $s, t \in V$ אזי מסלול σ מ־s ל־t עבורו $|\sigma| = \min\{|\tau| \mid t\text{־ל} \ s\text{־מסלול מ} \ \tau\}$.

גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד (גרף מק"ב): יהי G גרף ויהי $s \in V$ נגדיר $E' = \{e \in E \mid s\text{־חלק ממסלול קצר ביותר היוצא מ} \ e\}$ אזי (V, E').

אלגוריתם למציאת גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי

```
function ShortestPathGraph(G, s):
    (d, π, color) ← BFS(G)
    E' ← E(G_π)
    for (u, v) ∈ E(G) do
        if |height_{G_π}(u) − height_{G_π(v)}| = 1 then
            E'.append((u, v))
    end
    return (V(G), E')
```

טענה: תהא $E \in e$ אזי (e מחברת בין רמות עוקבות ביער BFS G_π)$\Longleftrightarrow$(e קשת במק"ב).

מסקנה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי $\text{ShortestPathGraph}\,(G,s)$ הינו גרף מק"ב מ־s.

גרף המסלולים הקצרים ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ויהיו $s,t \in V$ נגדיר $E' = \{e \in E \mid$ ממסלול קצר ביותר היוצא מ־s ל־t חלק $e\}$ אזי (V,E').

טענה: יהי G גרף מכוון ויהיו $s,t \in V$ אזי קיים אלגוריתם לחישוב גרף המסלולים הקצרים ביותר מ־s ל־t בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(|V|+|E|\right)$.

אלגוריתם DFS: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי

```
function DFS(G, s):
    (k, π) ← dict(V)
    color ← dict(E)
    k[s] ← 1
    π[s] ← Null
    for u ∈ V\s do
        k[u] ← 0
        π[u] ← Null
    end
    for e ∈ E do
        color[e] ← White
    end
    i ← 2
    v ← s
    while (∃u ∈ Adj(v).color[(v, u)] = White) ∨ (π[v] ≠ Null) do
        if {u ∈ Adj(v) | color[(v, u)] = White} ≠ ∅ then
            w ← {u ∈ Adj(v) | color[(v, u)] = White}
            color[(v, w)] ← Black
            if k[w] = 0 then
                k[w] ← i
                π[w] ← v
                v ← w
                i ← i + 1
        else
            v ← π[v]
    end
    return (k, π)
```

טענה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{DFS}\,(G,s)$ הינה $\mathcal{O}\left(|V|+|E|\right)$.

זמן גילוי: יהי G גרף ויהי $s \in V\left(G\right)$ אזי k בהרצת $\text{DFS}\,(G,s)$.

טענה: יהי G גרף ויהיו $s,v \in V$ באשר $v \in [s]_{\rightarrow}$ אזי בהרצת $\text{DFS}\,(G,s)$ מתקיים $k\left[v\right] > 0$.

עץ DFS: יהי G גרף ויהי $s \in V$ נגדיר $V_\pi = \{v \in V \mid \text{DFS}\,(G,s).\pi\left[v\right] \neq \text{Null}\} \cup \{s\}$ וכן $E_\pi = \{(\pi\left[v\right],v) \mid v \in V_\pi \backslash \{s\}\}$ אזי $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$.

טענה: עץ DFS הינו עץ.

קשתות ביחס לריצת DFS: יהי G גרף ויהי G_π יער DFS אזי

- קשתות עץ: קשת $e \in E\left(G\right)$ עבורה $e \in E\left(G_\pi\right)$.

- קשתות קדמיות: קשת $(u,v)\in E(G)$ עבורה $(u,v)\notin E(G_\pi)$ וכן u הינו אב של v.
- קשתות אחוריות: קשת $(u,v)\in E(G)$ עבורה $(u,v)\notin E(G_\pi)$ וכן v הינו אב של u.
- קשתות חוצות: קשת $e\in E(G)$ שאינה קשת עץ או קדמית או אחורית.

טענה: יהי G גרף לא מכוון ותהא (u,v) קשת עץ אזי u צאצא של v בגרף G_π או v צאצא של u בגרף G_π.

מסקנה: יהי G גרף לא מכוון אזי לא קיימות קשתות חוצות.

אלגוריתם DFS בעל זמני נסיגה: יהי G גרף אזי

```
function DFS(G):
    (k, f, π, color, low) ← dict(V)
    for u ∈ V do
        k[u] ← 0
        π[u] ← Null
        color ← White
        low ← ∞
    end
    i ← 0
    for s ∈ V do
        if k[s] = 0 then
            DFS-VISIT(s, k, f, π, i)
    end
    return (k, f, π, low)
```

```
function DFS-VISIT(v, k, f, π, color, low, i):
    color[u] ← Gray
    i ← i + 1
    k[v] ← i
    for w ∈ Adj(v) do
        if (color[v] = Gray) ∧ (v ≠ π[u]) then
            low ← min(low[u], k[v])
        else if color[v] = White then
            π[w] ← v
            DFS-VISIT(w, k, f, π, color, low, i)
            low ← min(low[u], low[v])
    end
    color[u] ← Black
    i ← i + 1
    f[v] ← i
```

זמן נסיגה: יהי G גרף ויהי $s\in V(G)$ אזי f בהרצת $\mathrm{DFS}(G)$.

טענה Gray Path Lemma: יהיו $v,u\in V$ אזי (v צאצא של u ביער G_π)$\Longleftrightarrow$($k[u]<k[v]<f[u]$).

טענה: יהיו $v,u\in V$ אזי ((u,v) קשת חוצה)$\Longleftrightarrow$($f[v]<k[u]$).

משפט הסוגריים: יהי G גרף ויהיו $u,v\in V$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
- מתקיים $[k(u),f(u)]\cap[k(v),f(v)]=\varnothing$ וכן u,v אינם צאצא־אב ביער G_π.
- מתקיים $[k(u),f(u)]\subset[k(v),f(v)]$ וכן u צאצא של v ביער G_π.
- מתקיים $[k(u),f(u)]\supset[k(v),f(v)]$ וכן v צאצא של u ביער G_π.

משפט המסלול הלבן: יהי G גרף ויהיו $u,v\in V$ אזי (v צאצא של u ביער G_π)$\Longleftrightarrow$(בזמן $k(u)$ באלגוריתם $\mathrm{DFS}(G)$ יש מסלול לבן מ־u ל־v).

גרף מכוון אציקלי: גרף מכוון G בו לא קיים מעגל.

מיון טופולוגי: יהי G גרף מכוון אזי יחס סדר $\prec$ על V המקיים לכל $u,v\in V$ אם $(u,v)\in E$ אזי $v\prec u$.

משפט: יהי G גרף מכוון אזי (G אציקלי)$\Longleftrightarrow$(קיים מיון טופולוגי על G).

טענה אלגוריתם קנות': יהי G גרף מכוון אזי קיים אלגוריתם לבדיקת קיום מיון טופולוגי בסיבוכיות $\mathcal{O}(|V|+|E|)$.

משפט: יהי G גרף מכוון אזי (G אציקלי)$\iff$(אין קשתות אחוריות ב־G).

טענה: יהי G גרף מכוון אציקלי אזי f המתקבלת מהרצת $\text{DFS}(G)$ משרה מיון טופולוגי על G.

קודקוד מנתק: יהי G גרף מכוון אזי $v \in V(G)$ עבורו $\left|{}^{G-\{v\}}/_{\xrightarrow[G-\{v\}]{}}\right| < \left|{}^{G}/_{\xrightarrow[G]{}}\right|$.

אב חורג: יהי G גרף מכוון ויהי $v \in V$ אזי $w \in V$ עבורו (w, v) קשת אחורית.

זמן גילוי האב החורג המוקדם ביותר: יהי G גרף אזי low בהרצת $\text{DFS}(G)$.

אלגוריתם למציאת כל הקודקודים המנתקים: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי

function `DetachableVertices`(G)**:**
$s \leftarrow V$
$(k, f, \pi, \text{low}) \leftarrow \text{DFS}(G, s)$
$A \leftarrow \text{set}(V)$
if $|Adj_{G_\pi}(s)| \neq 1$ **then**
$A.\text{append}(s)$
for $u \in V \backslash \{s\}$ **do**
if $\exists v \in children(u).low[v] \geq k[u]$ **then**
$A.\text{append}(u)$
end
return A

טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות $\text{DetachableVertices}(G)$ הינה $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי $\text{DetachableVertices}(G)$ הינה קבוצת כל הקודקודים המנתקים.

רכיב קשיר היטב (רק"ה): יהי G גרף מכוון אזי קבוצה $C \subseteq V$ מקסימלית בגודלה עבורה לכל $u, v \in C$ קיים מסלול מ־u ל־v וכן מ־v ל־u.

גרף הופכי/משוחלף: יהי G גרף מכוון נגדיר $E' = \{(v, u) \mid (u, v) \in E\}$ אזי $G^T = (V, E')$.

טענה: יהי G גרף מכוון ותהא $C \subseteq V$ אזי (C רק"ה של G)$\iff$(C רק"ה של G^T).

אלגוריתם קוסראג'ו־שריר למציאת רכיבים קשירים היטב: יהי G גרף מכוון אזי

function `SCC`(G)**:**
$(k, f, \pi) \leftarrow \text{DFS}(G)$
`/* In the next line, in the main loop of DFS we go through the vertices in decreasing order of f[u] */`
$(k', f', \pi') \leftarrow \text{DFS}(G^T)$
$A \leftarrow \text{set}(\text{set}(V))$
for $v \in V$ **do**
$A.\text{append}\left([v]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}\right)$
end
return A

גרף הרכיבים: יהי G גרף מכוון נגדיר $E^* = \left\{(A, B) \in \text{SCC}(G)^2 \mid \exists u \in A. \exists v \in B. (u, v) \in E\right\}$ אזי $G^* = (\text{SCC}(G), E^*)$.

אלגוריתם למציאת גרף הרכיבים: יהי G גרף מכוון אזי

function `KosarajuSharir`(G)**:**
$V^* \leftarrow \text{SCC}(G)$
$E^* \leftarrow \text{set}((V^*)^2)$
for $(u, v) \in E$ **do**
if $[v]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}} \neq [u]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}$ **then**
$E^*.\text{append}\left(\left([v]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}, [u]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}\right)\right)$
end
end
return (V^*, E^*)

למה: יהי G גרף מכוון אזי G^* אציקלי.

הגדרה: יהי G גרף ותהא $U \subseteq V$ אזי

- זמן גילוי: $k(U) = \min_{u \in U}(k[u])$.
- זמן נסיגה: $f(U) = \max_{u \in U}(f[u])$.

למה: יהי G גרף מכוון ויהיו $C_1, C_2 \subseteq V$ רק"ה באשר $(C_1, C_2) \in E(G^*)$ אזי $f(C_2) < f(C_1)$.

מסקנה: יהי G גרף מכוון ויהיו $C_1, C_2 \subseteq V$ רק"ה באשר $(C_1, C_2) \in E\left(\left(G^T\right)^*\right)$ אזי $f(C_2) > f(C_1)$.

משפט: יהי G גרף מכוון ויהי $C \subseteq V$ אזי (C רק"ה)$\Longleftrightarrow$$(C \in \mathsf{SCC}(G))$.

מסקנה: יהי G גרף מכוון אזי $G^* = \mathsf{KosarajuSharir}(G)$.

קבוצת מוצא: יהי G גרף מכוון אזי $S \subseteq V$ המקיימת $\forall v \in V. \exists s \in S. s \to v$.

אלגוריתם למציאת קבוצת מוצא מינימלית: יהי G גרף מכוון אזי

```
function MinimalOriginSet(G):
    A ← set(V(G))
    G* ← ComponentGraph(G)
    for C ∈ V(G*) do
        v ← {u ∈ C | ∄w ∈ V(G)\C.(w,u) ∈ E(G)}
        A.append(v)
    end
    return A
```

טענה: יהי G גרף מכוון אזי $\mathsf{MinimalOriginSet}(G)$ קבוצת מוצא מינימלית.

טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות $\mathsf{MinimalOriginSet}(G)$ הינה $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

טענה: יהי G גרף מכוון ותהא $S \subseteq V$ אזי קיים אלגוריתם הבודק האם קיים הילוך σ העובר על S בסיבוכיות $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

גרף ממושקל: יהי G גרף ותהא $w : E \to \mathbb{R}$ אזי (G, w).

עץ פורש: יהי G גרף קשיר לא מכוון אזי תת־גרף $T \leq G$ באשר T עץ וכן $V(T) = V(G)$.

משקל עץ פורש: יהי G גרף קשיר לא מכוון ויהי $T \leq G$ עץ פורש אזי $w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$.

עץ פורש מינימלי (עפ"מ): יהי G גרף קשיר לא מכוון אזי עץ פורש $T \leq G$ עבורו $w(T) = \min\{w(S) \mid G \text{ עץ פורש של } S\}$.

חתך: יהי G גרף אזי $A, B \subseteq V(G)$ עבורם $A \uplus B = V(G)$.

קשתות החתך/חוצות: יהי G גרף ויהי $A, B \subseteq V(G)$ חתך אזי $\{(u,v) \in E(G) \mid (u \in A) \wedge (v \in B)\}$.

טענה: יהי $G \geq T$ עץ פורש ותהא $e \in E(G) \setminus E(T)$ אזי $T + \{e\}$ בעל מעגל יחיד.

טענה: יהי $T \leq G$ עץ פורש תהא $e_1 \in E(G) \setminus E(T)$ ותהא $e_2 \in E(T + \{e_1\})$ אשר הינה חלק ממעגל אזי $T + \{e_1\} - \{e_2\}$ עץ פורש.

טענה: יהי $T \leq G$ עץ פורש ותהא $e \in E(T)$ אזי $T - \{e\}$ הינו יער בעל שני עצים.

מסקנה: יהי $T \leq G$ עץ פורש תהא $e \in E(T)$ ויהי $v \in V(G)$ אזי $V(G) \setminus [v]_{\xrightarrow[T-\{e\}]{}}, [v]_{\xrightarrow[T-\{e\}]{}}$ חתך של G.

אלגוריתם גנרי למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי

```
function MST(G, w):
    color ← dict(E)
    for e ∈ E do
        color[e] = White
    end
    while ∃e ∈ E.color[e] = White do
        Blueless ← {A ⊆ V | ∀e ∈ (A^2 ∩ E).color[e] ≠ Blue}
        Redless ← {σ circle in G | ∀i ∈ [len(σ)].color[(σ[i], σ[i + 1])] ≠ Red}
        if Blueless ≠ ∅ then
            A ← Blueless
            f ← argmin_{e∈A^2∩E}(w(e))
            color[f] = Blue
        if Redless ≠ ∅ then
            σ ← Redless
            f ← argmax_{e∈σ}(w(e))
            color[f] = Red
    end
    return (V, {e ∈ E | color[e] = Blue})
```

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w ותהא $a \in E$ עבורה $\text{color}\left[a\right] = \text{White}$ באיטרציה של $\text{MST}\left(G\right)$ אזי קיימת $e \in E$ אשר ניתנת לצביעה.

מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי $\text{MST}\left(G\right)$ צובעת $|E|$ קשתות.

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי בכל איטרציה של $\text{MST}\left(G\right)$ קיים $T \leq G$ עפ"מ עבורו

- לכל $e \in E$ המקיימת $\text{color}\left[e\right] = \text{Blue}$ מתקיים $e \in E\left(T\right)$.
- לכל $e \in E$ המקיימת $\text{color}\left[e\right] = \text{Red}$ מתקיים $e \notin E\left(T\right)$.

מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי $\text{MST}\left(G\right)$ עפ"מ של G.

אלגוריתם פרים למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי

```
function Prim'sAlgorithm(G):
    color ← dict(E)
    U ← set(V)
    for e ∈ E do
        color[e] = White
    end
    r ← V
    U.append(r)
    while U ≠ V do
        (u, v) ← argmin_{e∈U×(V\U)}(w(e))
        color[(u, v)] = Blue
        U.append(v)
        for w ∈ U do
            if (w, v) ∈ E then
                color[(w, v)] = Red
        end
    end
    return (V, {e ∈ E | color[e] = Blue})
```

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי כל צביעת קשת באלגוריתם $\text{Prim'sAlgorithm}\left(G\right)$ נעשית כמו באלגוריתם הגנרי.

מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי $\text{Prim'sAlgorithm}\left(G\right)$ עפ"מ של G.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי ניתן לממש את $\text{Prim'sAlgorithm}\left(G\right)$ עם ערימת מינימום בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(|E|\log|V|\right)$.

הערה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי ניתן לממש את $\text{Prim'sAlgorithm}\left(G\right)$ בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(|E| + |V|\log|V|\right)$.

אלגוריתם קרוסקל למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי כל צביעת קשת באלגוריתם $\text{Kruskal'sAlgorithm}\left(G\right)$ נעשית כמו באלגוריתם הגנרי.

```
function Kruskal'sAlgorithm(G):
    color ← dict(E)
    L ← sort(E)
    for (u,v) ∈ L do
        if ∃σ ∈ {u → v}.∀i ∈ [n].color(σ(i)) = Blue then
            color[e] = Red
        else
            color[e] = Blue
    end
    return (V, {e ∈ E | color[e] = Blue})
```

מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי $\text{Kruskal'sAlgorithm}\left(G\right)$ עפ"מ של G.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי ניתן לממש את $\text{Kruskal'sAlgorithm}\left(G\right)$ עם Union-Find בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(|E|\log|V|\right)$ וכן סיבוכיות amortized $\mathcal{O}\left(|E|\cdot\alpha\left(|V|\right)\right)$.

אלגוריתם Borůvska למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w באשר w חח"ע אזי

```
function Borůvska'sAlgorithm(G):
    Trees ← set(set(G))
    for v ∈ V do
        Trees.append({v})
    end
    while |Trees| ≠ 1 do
        for T ∈ Tree do
            (u,v) ← argmin_{(u,v)∈V(T)×V(G)}(w((u,v)))
            S ← {S ∈ Tree | u ∈ V(S)}
            S ← S + T + {(u,v)}
            Trees.Remove(T)
        end
    end
    A ← Trees
    return A
```

טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w באשר w חח"ע אזי סיבוכיות $\text{Borůvska'sAlgorithm}\left(G\right)$ הינה $\mathcal{O}\left(|E|\log|V|\right)$.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w באשר w חח"ע אזי קיים ויחיד $T\le G$ עפ"מ.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w באשר w חח"ע אזי $\text{Borůvska'sAlgorithm}\left(G\right)$ עפ"מ של G.

משפט: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w תהא $A\subseteq E$ יהי C מעגל ותהא $e\in E$ בעלת משקל מקסימלי אזי קיים עפ"מ $T\le G$ עבורו $A\subseteq E\left(T\right)$ וכן $e\notin E\left(T\right)$.

טענה: יהיו $T_1,T_2\le G$ עפ"מ ויהיו $\alpha_1\le\ldots\le\alpha_n$ ו־$\beta_1\le\ldots\le\beta_m$ משקליי הקשתות כולל כפילויות אזי $n=m$ וכן $\alpha_i=\beta_i$ לכל $i\in[n]$.

אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי המכיל מספר מקסימלי של קשתות מקבוצה מסוימת: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w ותהא $F\subseteq E$ אזי

```
function PrioritizeMST(G, w, F):
    ω ← (V(G) → ℝ)
    m ← min({|w(e_1) − w(e_2)| | (e_1, e_2 ∈ E) ∧ (w(e_1) ≠ w(e_2))})
    ε ← m/2
    for e ∈ E do
        if e ∈ F then
            ω(e) ← w(e)
        else
            ω(e) ← w(e) + ε
    end
    return Kruskal'sAlgorithm(G, ω)
```

טענה: תהא $F \subseteq E$ ויהי T עפ"מ ביחס ל־w' באלגוריתם PrioritizeMST אזי T עפ"מ ביחס ל־w.

מסקנה: תהא $F \subseteq E$ אזי $\text{PrioritizeMST}(G, w)$ עפ"מ ב־G ביחס ל־w.

בעיית שיבוץ המשימות: יהיו $s_1 \dots s_n, f_1 \dots f_n \in \mathbb{R}$ באשר $s_i < f_i$ לכל $i \in [n]$ אזי $\max\left\{|A| \mid (A \subseteq \{[s_1, f_i]\}_{i=1}^{n}) \wedge (\forall I, J \in A. I \cap J = \varnothing)\right\}$.

אלגוריתם חמדן לבעיית שיבוץ המשימות: יהיו $s_1 \dots s_n, f_1 \dots f_n \in \mathbb{R}$ באשר $s_i < f_i$ לכל $i \in [n]$ אזי

```
function ActivitySelectionProblem(s_1, ..., s_n, f_1, ..., f_n):
    F ← list([s_1, f_1], ..., [s_n, f_n])
    /* In the next line, we put all the parameters in F and sort it based on f_i */
    F ← sort({f_1, ..., f_n})
    X ← list([s_1, f_1], ..., [s_n, f_n])
    X ← ∅
    for k ∈ [1, ..., n] do
        if X = ∅ then
            X.append(L[k])
        else if L[k] ∩ X.last = ∅ then
            X.append(L[k])
    end
    return X
```

טענה: יהיו $s_1 \dots s_n, f_1 \dots f_n \in \mathbb{R}$ באשר $s_i < f_i$ אזי סיבוכיות ActivitySelectionProblem הינה $\mathcal{O}(n \log(n))$.

משפט: לכל $k \in [n]$ באיטרציה ה־k בלולאה ב־ActivitySelectionProblem קיים פתרון לבעיה X^* עבורו $([s_i, f_i] \in X^*) \iff ([s_i, f_i] \in X)$.

מסקנה: יהיו $s_1 \dots s_n, f_1 \dots f_n \in \mathbb{R}$ באשר $s_i < f_i$ אזי ActivitySelectionProblem פתרון לבעיית שיבוץ המשימות.

הערה: כאשר משקל הגרף הוא ℓ הכוונה היא "אורך הקשת" ובכך אנו "מכלילים" גרף ללא משקל בתור גרף עבורו $\ell = 1$.

מעגל שלילי: יהי G מעגל ממושקל ℓ אזי מעגל C עבורו $\ell(C) < 0$.

מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ממושקל ℓ ויהיו $s, t \in V$ אזי מסלול σ מ־s ל־t עבורו $\ell(\sigma) = \min\{\ell(\tau) \mid \tau \in \{s \to t\}\}$.

למה: יהיו $s, t \in V$ עבורם קיים מסלול מ־s ל־t וכן כל מסלול מ־s ל־t לא עובר דרך קשת השייכת למעגל שלילי אזי קיים מסלול פשוט קצר ביותר בין s ל־t.

למה: יהיו $s, t \in V$ עבורם קיים מסלול מ־s ל־t וכן קיים מסלול מ־s ל־t העובר דרך קשת השייכת למעגל שלילי אזי לא קיים מסלול פשוט קצר ביותר בין s ל־t.

סימון: יהי G גרף ממושקל ℓ ויהיו $s, t \in V$ אזי $\delta(s, t) = \inf_{\sigma \in \{s \to t\}} \ell(\sigma)$.

בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא (SSSP): יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי $s \in V$ אזי $T \leq G$ עץ פורש בו כל מסלול מ־s ל־v הינו מסלול קצר ביותר ב־G.

למה אי־שיוויון המשולש: יהיו $u, v, w \in V$ אזי $\delta(u, v) \leq \delta(u, w) + \delta(w, v)$.

למה תת־מסלול קצר ביותר: יהי σ מסלול קצר ביותר ויהי $i \in \text{len}(\sigma)$ אזי $(\sigma[i], \dots \sigma[i+k])$ מסלול קצר ביותר.

אלגוריתם בלמן־פורד למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ ויהי $s \in V$ אזי

```
function BellmanFord(G, ℓ, s):
    (d, π) ← dict(V)
    d[s] ← 0
    for u ∈ V do
        d[u] ← ∞
        π[u] ← None
    end
    (c, i) ← 1
    while (i ≤ |V|) ∧ (c ≠ 0) do
        c ← 0
        for (u, v) ∈ E do
            c ← Relax(ℓ, d, u, v)
        end
    end
    return c

function Relax(ℓ, d, u, v):
    if d[v] > d[u] + ℓ(u, v) then
        d[v] ← d[u] + ℓ(u, v)
        π[v] ← u
        return 1
    return 0
```

למה: יהיו $s,u,v \in V$ באשר $(u,v) \in E$ וכן בריצת BellmanFord מתקיים $\delta(s,u) \le d[u]$ אזי $\delta(s,v) \le d[u] + \ell((u,v))$.

מסקנה: יהיו $s,u,v \in V$ באשר $(u,v) \in E$ וכן בריצת BellmanFord מתקיים $\delta(s,u) \le d[u]$ וכן $\delta(s,v) \le d[v]$ אזי לאחר הרצת $\text{Relax}(u,v)$ מתקיים $\delta(s,v) \le d[v]$.

למה: יהי $s \in V$ עבורו לכל $v \in V$ בריצת BellmanFord מתקיים $\delta(s,v) \le d[v]$ אזי לאחר כל רצף פעולות Relax נקבל כי לכל $v \in V$ מתקיים $\delta(s,v) \le d[v]$.

מסקנה: יהיו $s,v \in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים $d[v] = \infty$ אזי לאחר כל רצף פעולות Relax נקבל כי $d[v] = \infty$.

מסקנה: יהיו $s,v \in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים $d[v] = \delta(s,v)$ אזי לאחר כל רצף פעולות Relax נקבל כי $d[v] = \delta(s,v)$.

למה: יהיו $s,t \in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים $d[s] = 0$ ויהי $\sigma \in \{s \to t\}$ מסלול אזי לאחר הפעלת הרצף $(\text{Relax}(\sigma[0], \sigma[1]), \ldots, \text{Relax}(\sigma[n-1], \sigma[n]))$ נקבל כי $d[t] \le \ell(\sigma)$.

למה: יהי $s \in V$ עבורו לא קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s אזי BellmanFord יוצא מהלולאה הראשית כאשר $i < |V|$ וכן מחזיר 0 וכן לכל $v \in V$ מתקיים $d[v] = \delta(s,v)$.

למה: יהי $s \in V$ עבורו קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s אזי BellmanFord יוצא מהלולאה הראשית כאשר $i = |V|$ וכן מחזיר 1.

מסקנה: יהי $s \in V$ אזי

- (BellmanFord החזיר 1)$\Longleftrightarrow$(קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s).
- (BellmanFord החזיר 0)$\Longleftrightarrow$(לא קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s וכן לכל $v \in V$ מתקיים $d[v] = \delta(s,v)$).

עץ BellmanFord: יהי $s \in V$ נגדיר $V_\pi = \{v \in V \mid \text{BellmanFord}(G,s).\pi[v] \neq \text{Null}\} \cup \{s\}$ וכן $E_\pi = \{(\pi[v], v) \mid v \in V_\pi \backslash \{s\}\}$ אזי $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$.

למה: יהי $s \in V$ ויהי C מעגל בעץ BellmanFord באיזשהו שלב של הרצת BellmanFord אזי C מעגל שלילי.

למה: יהי $s \in V$ עבורו לא קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s אזי עץ BellmanFord הינו עץ.

למה: יהי $s \in V$ עבורו קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s אזי עץ BellmanFord מכיל מעגל שלילי.

מסקנה: יהי $s \in V$ אזי BellmanFord פתרון לבעיית SSSP.

משפט: יהי $s \in V$ אזי אלגוריתם BellmanFord רץ בסיבוכיות $\mathcal{O}(|E| \cdot |V|)$.

הערה: נניח כי $\ell : E \to \mathbb{Z}$ וכן $\ell(e) \ge -W$ אזי קיים אלגוריתם לבעיית SSSP בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(|E| \log^2(|V|) \log(|V| \cdot W) \log\log(|V|)\right)$.

אלגוריתם לבדיקת קיום מעגל במשקל 0 בגרף מכוון חסר מעגלים שליליים: יהי G גרף מכוון חסר מעגלים שליליים אזי

```
function IsZeroCircle(G, ℓ):
    V ← V ⊎ {s}
    for v ∈ V\{s} do
        E ← E ∪ {(s, v)}
        ℓ((s, v)) ← 0
    end
    (c, d, π) getsBellmanFord(G, ℓ, s)
    for e ∈ E do
        if d(v) ≠ d(u) + δ(u, v) then
            E ← E\{(s, v)}
    end
    if ∃ circle C ∈ G then  return True
    return False
```

טענה: בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות נקבל את גרף מק"ב מ־s.

טענה: אם בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות קיים מעגל C אזי $\ell(C) = 0$.

טענה: יהי C מעגל עבורו $\ell(C) = 0$ אזי בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות נקבל כי C בגרף.

מסקנה: יהי G גרף מכוון חסר מעגלים שליליים אזי (G בעל מעגל ממשקל 0)$\Longleftrightarrow$(IsZeroCircle מחזיר True).

טענה: יהי G גרף מכוון חסר מעגלים שליליים אזי סיבוכיות IsZeroCircle הינה $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|)$.

אלגוריתם למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף מכוון אציקלי: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s \in V$ אזי

```
function SSSP-DAG(G, ℓ, s):
    (d, π) ← dict(V)
    d[s] ← 0
    for u ∈ V do
        d[u] ← ∞
        π[u] ← None
    end
    /* Knuth'sAlgorithm is an algorithm to compute a topological sorting. */
    f ← Knuth'sAlgorithm(G)
    for i ∈ [1, ..., |V|] do
        for v ∈ Adj(f(i)) do
            Relax((f(i), v))
        end
    end
    return (d, π)
```

טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s \in V$ אזי SSSP-DAG(G) פתרון לבעיית SSSP.

טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s \in V$ אזי סיבוכיות SSSP-DAG(G) הינה $\mathcal{O}(|E| + |V|)$.

אלגוריתם דייקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף ללא משקלים שליליים: יהי G גרף מכוון עבורו $\ell \geq 0$ ויהי $s \in V$ אזי

```
function Dijkstra(G, ℓ, s):
    Q ← heap((V, int))
    (d, π) ← dict(V)
    d[s] ← 0
    for u ∈ V do
        d[u] ← ∞
        π[u] ← None
    end
    Q.insert((s, d[s]))
    while Q ≠ ∅ do
        u ← Q.min
        for v ∈ Adj(u) do
            if d[v] = ∞ then
                π[v] ← u
                d[v] ← d[u] + ℓ(u, v)
                Q.insert((v, d[v]))
            else if d[u] + ℓ(u, v) < d[v] then
                π[v] ← u
                d[v] ← d[u] + ℓ(u, v)
                Q.decrease-key((v, d[v]))
        end
    end
    return (d, π)
```

למה: יהיו $s,u\in V$ עבור בריצת Dijkstra הצומת u נמחקה מ־Q אזי $d\left[u\right]=\delta\left(s,u\right)$.

משפט: יהי $s\in V$ אזי Dijkstra פתרון לבעיית SSSP כאשר $\ell\geq0$.

משפט: יהי $s\in V$ אזי ניתן לממש את Dijkstra עם Fibonacci heaps בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(\left|E\right|+\left|V\right|\cdot\log\left(\left|V\right|\right)\right)$.

בעיית כל המסלולים הקצרים (APSP): יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי $D\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורו לכל $u,v\in V$ מתקיים $D_{u,v}=\delta\left(u,v\right)$ וכן $\Pi\in M_{\left|V\right|}\left(V\right)$ עבורו לכל $u,v\in V$ קיים מסלול קצר ביותר σ מ־u ל־v המקיים $\left(\Pi_{u,v},v\right)\in\sigma$.

פונקציית פוטנציאל: יהי G גרף אזי $p:V\to\mathbb{R}$.

פונקציית משקל מותאמת: תהא p פונקציית פוטנציאל אזי פונקציית משקל ℓ_{p} עבורה לכל $u,v\in V$ המקיימים $\left(u,v\right)\in E$ מתקיים $\ell_{p}\left(\left(u,v\right)\right)=\ell\left(\left(u,v\right)\right)+p\left(u\right)-p\left(v\right)$.

משפט: תהא p פונקציית פוטנציאל יהיו $s,t\in V$ ויהי σ מסלול מ־s ל־t אזי $\ell_{p}\left(\sigma\right)=\ell\left(\sigma\right)+p\left(s\right)-p\left(t\right)$.

מסקנה: תהא p פונקציית פוטנציאל יהיו $s,t\in V$ ויהי σ מסלול מ־s ל־t אזי (σ מסלול קצר ביותר ביחס ל־ℓ)$\Longleftrightarrow$(מסלול קצר ביותר ביחס ל־ℓ_{p}).

מסקנה: תהא p פונקציית פוטנציאל ויהי σ מעגל אזי $\ell_{p}\left(\sigma\right)=\ell\left(\sigma\right)$.

מסקנה: תהא p פונקציית פוטנציאל ויהיו $s,t\in V$ אזי $\delta_{\ell}\left(s,t\right)=\delta_{\ell_{p}}\left(s,t\right)-p\left(s\right)+p\left(t\right)$.

פונקציית פוטנציאל פיזבילית: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי פונקציית פוטנציאל p עבורה $\ell_{p}\geq0$.

משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי (קיימת פונקציית פוטנציאל פיזבילית)$\Longleftrightarrow$(G מצוייד עם ℓ חסר מעגלים שליליים).

אלגוריתם למציאת פונקציית פוטנאציל פיזבילית: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי

```
function FeasiblePotential(G, ℓ):
    G' ← G ⊎ {s}
    for v ∈ V(G) do
        E(G') ← E(G') ∪ {(s, v)}
        ℓ((s, v)) ← 0
    end
    c ← BelmanFord(G', ℓ, s)
    if c = 1 then return None
    p ← (V(G) → ℝ)
    for v ∈ V(G) do
        p(v) ← δ(s, v)
    end
    return p
```

טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי

- (G מצוייד עם ℓ בעל מעגל שלילי)$\Longleftrightarrow$($\text{FeasiblePotential}\left(G,\ell\right)$ מחזיר None).
- (G מצוייד עם ℓ בעל פונקציית פוטנציאל פיזבילית)$\Longleftrightarrow$($\text{FeasiblePotential}\left(G,\ell\right)$ מחזיר פונקציית פוטנציאל פיזבילית).

אלגוריתם ג'ונסון לבעיית כל המסלולים הקצרים: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי

```
function Johnson(G, ℓ):
    p ← FeasiblePotential(G, ℓ)
    if p = None then return None
    ℓ_p ← (E → ℝ)
    for (u, v) ∈ E do
        ℓ_p((u, v)) = ℓ((u, v)) + p(u) − p(v)
    end
    (D_{ℓ_p}, D_ℓ) ← M_{|V|}(ℝ)
    Π ← M_{|V|}(E)
    for v ∈ V do
        (d, π) ← Dijkstra(G, ℓ_p, v)
        /* Here D and Π will be simplified, to get a solution to APSP as needed we can modify a bit Dijkstra's
           algorithm to calculate D and Π on the way to get constant time for this assignment.          */
        D_v ← d
        Π_v ← π
    end
    for (u, v) ∈ E do
        D_ℓ((u, v)) = D_{ℓ_p}((u, v)) − p(u) + p(v)
    end
    return (D, Π)
```

משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי $\text{Johnson}\left(G,\ell\right)$ פתרון לבעיית APSP.

טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי סיבוכיות הריצה של $\text{Johnson}\left(G,\ell\right)$ הינה $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\left|V\right|+\left|V\right|^{2}\log\left(\left|V\right|\right)\right)$.

מכפלת Min Plus: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ותהא $B\in M_{n\times k}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $A*B\in M_{m\times k}\left(\mathbb{F}\right)$ באשר $\left(A*B\right)_{i,j}=\min_{k=1}^{n}\left(A_{i,k}+B_{k,j}\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי סיבוכיות הריצה של $A*B$ הינה $\mathcal{O}\left(n^{3}\right)$.

טענה: תהיינה $A,B,C\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $\left(A*B\right)*C=\left(A*B\right)*C$.

סימון: יהיו $s,v\in V$ אזי $\delta_{k}\left(s,v\right)=\min\left\{ \ell\left(\sigma\right)\mid\left(\sigma\in\left\{ s\to v\right\} \right)\wedge\left(\left|\sigma\right|\le k\right)\right\}$.

טענה: יהיו $s,v\in V$ אזי $\delta_{k}\left(s,v\right)=\min_{u\in V}\left(\delta_{k-1}\left(s,v\right)+\ell\left(u,v\right)\right)$.

סימון: יהי $s\in V$ אזי $\delta_{k}\left(s\right)\in M_{1\times\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ באשר $\left(\delta_{k}\left(s\right)\right)_{v}=\delta_{k}\left(s,v\right)$ לכל $v\in V$.

מטריצת המשקל: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ אזי $L\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ באשר לכל $u,v\in V$ מתקיים $L_{u,v}=\begin{cases} 0 & u=v\\ \ell\left(\left(u,v\right)\right) & \left(u\ne v\right)\wedge\left(\left(u,v\right)\in E\right)\\ \infty & \left(u\ne v\right)\wedge\left(\left(u,v\right)\notin E\right) \end{cases}$.

מסקנה: יהי $s\in V$ ותהא $L\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ מטריצת המשקל אזי $\delta_{k}\left(s\right)=\delta_{k-1}\left(s\right)*L$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}$ אזי $D^{\left(k\right)}\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}\right)$ באשר לכל $u,v\in V$ מתקיים $D_{u,v}^{\left(k\right)}=\delta_{k}\left(u,v\right)$.

מסקנה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $D^{(k)} = D^{(k-1)} * L$.

טענה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $D^{(k)} = L^k$.

הערה: יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $L^k = L * \ldots * L$.

טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ וחסר מעגלים שליליים ויהיו $k, m \geq |V| - 1$ אזי $D^{(k)} = D^{(m)}$.

טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל ℓ בעל מעגל שלילי ויהי $v \in V$ המופיע במעגל שלילי אזי $D^{(|V|)}_{v,v} < 0$.

מסקנה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $L^{|V|}$ פתרון לבעיית APSP.

אלגוריתם חזקה איטרטיבית: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ותהא $\star$ פעולה אסוציאטיבית אזי

```
function RepeatedSquaring(A, ⋆):
    (a_k ... a_0) ← (n)_2
    B ← M_n(ℝ)
    for i ∈ [k] do
        if a_i = 1 then
            B = B ⋆ A
        A = A ⋆ A
    end
    return B
```

טענה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $\text{RepeatedSquaring}(L, *)$ פתרון לבעיית APSP.

טענה: תהא $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי סיבוכיות הריצה של $\text{RepeatedSquaring}(L, *)$ הינה $\mathcal{O}\left(|V|^3 \log(|V|)\right)$.

סימון: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $F^{(k)} \in M_n(\mathbb{R})$ באשר לכל $u, v \in V$ מתקיים $F^{(k)}_{u,v} = \min\{\ell(\sigma) \mid (\sigma \in \{u \to v\}) \land (\text{עוברת דרך הצמתים } [k] \text{ למעט בהתחלה ובסוף } \sigma)\}$.

סימון: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ותהא $L \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $F^{(0)} \in M_n(\mathbb{R})$ באשר לכל $u, v \in V$ מתקיים $F^{(0)}_{u,v} = L$.

טענה: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ויהיו $u, v \in [n]$ אזי $F^{(k)}_{u,v} = \min\left\{F^{(k-1)}_{u,v}, F^{(k-1)}_{u,k} + F^{(k-1)}_{k,v}\right\}$.

אלגוריתם פלויד־וורשאל: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ותהא $L \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי

```
function FloydWarshall(n, L):
    Π ← M_n([n])
    for u ∈ [n] do
        for v ∈ [n] do
            if (u ≠ v) ∧ (L_{u,v} < ∞) then
                Π_{u,v} ← u
            else
                Π_{u,v} ← None
        end
    end
    F ← L
    for k ∈ [n] do
        for u ∈ [n] do
            for v ∈ [n] do
                if F_{u,k} + F_{k,v} < F_{u,v} then
                    F_{u,v} ← F_{u,k} + F_{k,v}
                    Π_{u,v} ← Π_{k,v}
            end
        end
    end
    return (F, Π)
```

טענה: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ותהא $L \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי $\text{FloydWarshall}(n, L)$ פתרון לבעיית APSP.

טענה: יהי $([n], E)$ גרף מכוון ותהא $L \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצת המשקל אזי סיבוכיות הריצה של $\text{FloydWarshall}(n, L)$ הינה $\mathcal{O}(n^3)$.

קבוצה בלתי תלויה: יהי G גרף אזי $I \subseteq V$ עבורה לכל $u, v \in I$ מתקיים $(u, v) \notin E$.

סימון: יהי $([n], E)$ גרף שרוך ויהי $w : [n] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ אזי $\text{mis}(i) = \max\{w(I) \mid (I \subseteq [i]) \wedge (I \text{ בלתי תלויה})\}$.

טענה: יהי $([n], E)$ גרף שרוך ויהי $w : [n] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ אזי $\text{mis}(0) = 0$ וכן $\text{mis}(1) = w(1)$ וכן $\text{mis}(i) = \max\{w(i) + \text{mis}(i-2), \text{mis}(i-1)\}$.

מסקנה: יהי $([n], E)$ גרף שרוך ויהי $w : [n] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ אזי $\text{mis}(n)$ בעל סיבוכיות זמן $\mathcal{O}(n)$.

תת־סדרה: יהי Σ אלפבית ותהא $A \in \Sigma^*$ אזי $B \in \Sigma^*$ עבורה קיימת $f : [|B|] \to [|A|]$ עולה ממש וחח"ע המקיימת $A_{f(i)} = B_i$ לכל $i \in [|B|]$.

סימון: יהי Σ אלפבית תהא $A \in \Sigma^*$ ותהא $B \in \Sigma^*$ תת־סדרה אזי $B \lhd A$.

בעיית תת־סדרה משותפת ארוכה ביותר (LCS): יהי Σ אלפבית ותהיינה $A, B \in \Sigma^*$ אזי $\max\{|C| \mid (C \in \Sigma^*) \wedge (C \lhd A) \wedge (C \lhd B)\}$.

סימון: תהיינה $A, B \in \Sigma^*$ תהא $k \leq |A|$ ותהא $\ell \leq |B|$ אזי $\text{lcs}(k, \ell) = \max\{|C| \mid (C \lhd (A_1, \ldots, A_k)) \wedge (C \lhd (B_1, \ldots, B_\ell))\}$.

טענה: תהיינה $A, B \in \Sigma^*$ אזי $\text{lcs}(k, \ell) = \begin{cases} 0 & (k=0) \vee (\ell=0) \\ \text{lcs}(k-1, \ell-1)+1 & (k, \ell>0) \wedge (A_k = B_\ell) \\ \max\{\text{lcs}(k-1, \ell), \text{lcs}(k, \ell-1)\} & (k, \ell>0) \wedge (A_k \neq B_\ell) \end{cases}$.

מסקנה: תהיינה $A, B \in \Sigma^*$ אזי $\text{lcs}(|A|, |B|)$ בעל סיבוכיות זמן $\mathcal{O}(|A| \cdot |B|)$ וסיבוכיות מקום $\mathcal{O}(|A| \cdot |B|)$.

בעיית תת־סדרה עולה ארוכה ביותר (LIS): יהי Σ אלפבית בעל סדר $\prec$ ותהא $A \in \Sigma^*$ אזי $\max\{|C| \mid (C \lhd A) \wedge (\forall i. C_{i-1} \prec C_i)\}$.

טענה: תהא $A \in \Sigma^*$ אזי בעיית LIS של A הינה בעיית LCS של $(A, \text{sort}(A))$.

סימון: תהא $A \in \Sigma^*$ אזי $\text{lenlis}(k) = \max\{|X| \mid ((A_1, \ldots, A_k) \text{ של lis הינו } X) \wedge (A_k \text{ מסתיים עם } X)\}$.

טענה: תהא $A \in \Sigma^*$ אזי $\text{lenlis}(1) = 1$ וכן $\text{lenlis}(k) = \max_{i \in [k-1]}\{\text{lenlis}(i) \mid A_i \prec A_k\}$.

סימון: תהא $A \in \Sigma^*$ אזי $\pi\text{lis}(1) = \text{None}$ וכן $\pi\text{lis}(k) = \arg\max\{\text{lenlis}(i) \mid A_i \prec A_k\}$.

מסקנה: תהא $A \in \Sigma^*$ ויהי $k = \arg\max\{\text{lenlis}(1), \ldots, \text{lenlis}(|A|)\}$ אזי $\left(x_{\pi\text{lis}^{(\ell)}(k)}, \ldots, x_{\pi\text{lis}^{(2)}(k)}, x_{\pi\text{lis}(k)}, x_k\right)$ פתרון של LIS בעל סיבוכיות $\mathcal{O}\left(|A|^2\right)$.

סימון: תהא $A \in \Sigma^*$ אזי $\min\text{lis}(m) = \min\{x_k \mid \text{lenlis}(k) = m\}$.

טענה: תהא $A \in \Sigma^*$ אזי $\min\text{lis}$ עולה ממש.

מסקנה: תהא $A \in \Sigma^*$ אזי $(\min\text{lis}(1), \ldots, \min\text{lis}(\ell))$ פתרון של LIS בעל סיבוכיות ריצה $\mathcal{O}(|A| \cdot \log(|A|))$.

סימון: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0, 1]$ ויהי T עץ חיפוש בינארי מעל $\{x_1 \ldots x_n\}$ אזי $\text{costp}(T) = \sum_{i=1}^{n}(p_i \cdot \text{depth}_T(x_i))$.

בעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0, 1]$ אזי עץ חיפוש בינארי T עבורו $\text{costp}(T)$ מינימלי.

טענה: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0, 1]$ ויהי T עץ חיפוש בינארי אזי $\text{costp}(T) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) + \text{costp}(T.\text{left}) + \text{costp}(T.\text{right})$.

מסקנה: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0, 1]$ ויהי T פתרון לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי אזי $T.\text{left}, T.\text{right}$ הינם פתרונות לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי.

סימון: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0, 1]$ אזי $\text{pp}(i, j) = \sum_{k=i}^{j} p_k$.

סימון: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0, 1]$ ויהיו $x_1 \ldots x_n$ אזי $\text{cp}(i, j) = \min\{\text{costp}(T) \mid \{x_i \ldots x_j\} \text{ עץ חיפוש בינארי מעל } T\}$.

טענה: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0, 1]$ ויהיו $x_1 \ldots x_n$ אזי $\text{cp}(i, i-1) = 0$ וכן $\text{cp}(i, i) = p_i$ וכן $\text{cp}(i, j) = \text{pp}(i, j) + \min_{i \leq k \leq j}(\text{cp}(i, k-1) + \text{cp}(k+1, j))$.

מסקנה אלגוריתם לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו $p_1 \ldots p_n \in (0, 1]$ ויהיו $x_1 \ldots x_n$ אזי

```
function OSBST(pp):
    K, C ← List([n]^2)
    for i ← [n+1] do
        C(i, i−1) ← 0
    end
    for d ← {0, ..., n−1} do
        for i ← [n−d] do
            C(i, i+d) ← ∞
            for k ← {i, ..., i+d} do
                t ← pp(i, j) + C(i, k−1) + C(k+1, j)
                if t < C(i, j) then
                    C(i, j) ← t
                    K(i, j) ← k
            end
        end
    end
```

מסקנה: יהיו $p_1 \dots p_n \in (0,1]$ אזי K. $\text{OSBST}(\text{pp})$ משרה פתרון לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי.

מסקנה: יהיו $p_1 \dots p_n \in (0,1]$ אזי $\text{OSBST}(\text{pp})$ בעל סיבוכיות ריצה $\mathcal{O}\left(n^3\right)$.

הערה: קיים אלגוריתם קנות' לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(n^2\right)$.

בעיית 0/1 תרמיל הגב: יהיו $W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי $S \subseteq [n]$ באשר $\sum_{i \in S} v_i$ מקסימלית וכן $\sum_{i \in S} w_i \leq W$.

בעיית שבר תרמיל הגב: יהיו $W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי $f : [n] \to [0,1]$ באשר $\sum_{i \in [n]} f(i) v_i$ מקסימלית וכן $\sum_{i \in [n]} f(i) w_i \leq W$.

אלגוריתם חמדן לבעיית שבר תרמיל הגב: יהיו $W, w_1 \dots w_n > 0$ ויהיו $v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי

```
function FractionalKnapsack(W, w_1, ..., w_n, v_1, ..., v_n):
    f ← ([n] → [0,1])
    P ← List([n] × ℝ)
    for i ← [n] do
        P(i) ← (i, v_i / w_i)
        f(i) ← 0
    end
    P ← sort(P) // Sort from high to low based on second coordinate.
    t ← 0
    i ← 1
    while (t < W) ∧ (i ≤ n) do
        j ← P(i)[0]
        if t + w_j ≤ W then
            f(j) ← 1
            t ← t + w_j
        else
            f(j) ← (W − t) / w_j
            t ← W
    end
    return f
```

סימון: יהיו $W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי $\text{bknap}(k, W) = \max\left\{\sum_{i \in S} v_i \mid (S \subseteq [k]) \wedge \left(\sum_{i \in S} w_i \leq W\right)\right\}$.

טענה: יהיו $w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי

- יהי $m \geq 0$ אזי $\text{bknap}(0, m) = 0$.
- יהי $i \in [n]$ אזי $\text{bknap}(i, 0) = 0$.
- יהי $m \geq 0$ ויהי $i \in [n]$ אזי $\text{bknap}(i, m) = \begin{cases} \text{bknap}(i-1, m) & w_i > m \\ \max\{\text{bknap}(i-1, m), \text{bknap}(i-1, m-w_i) + v_i\} & w_i \leq m \end{cases}$.

מסקנה: יהיו $W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי חישוב $\text{bknap}(n, W)$ בעל סיבוכיות ריצה $\mathcal{O}(nW)$.

מסקנה אלגוריתם לבעיית 0/1 תרמיל הגב: יהיו $W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי

```
function ZeroOneKnapsack(W, w_1, ..., w_n, v_1, ..., v_n):
    k ← n
    w ← W
    S ← Set([n])
    S ← ∅
    while (k > 0) ∧ (w > 0) do
        if bknap(k, w) ≠ bknap(k − 1, w) then
            S ← S ∪ {k}
            k ← k − 1
            w ← w − w_k
        else
            k ← k − 1
    end
```

מסקנה: יהיו $W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי $\text{ZeroOneKnapsack}(W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n)$ פתרון לבעיית 0/1 תרמיל הגב.

רשת זרימה: יהי G גרף מכוון וממושקל $c \geq 0$ ותהיינה $s, t \in V$ אזי (V, E, c, s, t).

פונקציית קיבולת: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי c.

קודקוד מקור: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי s.

קודקוד בור: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי t.

פונקציית זרימה: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ עבורה

- חסם קיבולת: $f \leq c$.
- שימור זרם: לכל $v \in V \backslash \{s, t\}$ מתקיים $\sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f((u, v)) = \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f((v, u))$.

בעיית הזרימה המקסימלית: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי פונקציית זרימה f עבורה $\sum_{\substack{u \in V \\ (u,t) \in E}} f((u, t)) - \sum_{\substack{u \in V \\ (t,u) \in E}} f((t, u))$ מקסימלית.

חתך s-t: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי (S, T) באשר $S, T \subseteq V$ וכן $S \uplus T = V$ וכן $s \in S$ וכן $t \in T$.

קשתות חוצות: תהא G רשת זרימה ויהי (S, T) חתך s-t אזי $E(S, T) = \{(u, v) \in E \mid (u \in S) \wedge (v \in T)\}$.

קשתות אחוריות: תהא G רשת זרימה ויהי (S, T) חתך s-t אזי $E(T, S) = \{(u, v) \in E \mid (u \in T) \wedge (v \in S)\}$.

קיבולת של חתך: יהי (S, T) חתך s-t אזי $c(S, T) = \sum_{e \in E(S,T)} c(e)$.

זרימה על פני חתך: יהי (S, T) חתך s-t אזי $f(S, T) = \sum_{e \in E(S,T)} f(e) - \sum_{e \in E(T,S)} f(e)$.

ערך/גודל של זרימה: תהא f זרימה אזי $|f| = f(V \backslash \{t\}, \{t\})$.

למה: תהא f זרימה ויהי (S, T) חתך s-t אזי $|f| = f(S, T)$.

מסקנה: תהא f זרימה אזי $|f| = f(\{s\}, V \backslash \{s\})$.

למה: תהא f זרימה ויהי (S, T) חתך s-t אזי $f(S, T) \leq c(S, T)$.

חתך s-t מינימלי: תהא f זרימה אזי (S, T) חתך s-t עבורו $f(S, T) = c(S, T)$.

מסקנה: תהא f זרימה ויהי (S, T) חתך s-t מינימלי אזי f זרימה מקסימלית.

מסלול ניתן להגדלה s-t: תהא f זרימה אזי $P \in \{s \to t\}$ באשר $f(e) < c(e)$ לכל $e \in P$.

טענת הגדלת מסלול: תהא f זרימה ויהי $P \in \{s \to t\}$ מסלול ניתן להגדלה s-t אזי קיימת פונקציית זרימה g עבורה $g_{\restriction_{E \backslash P}} = f_{\restriction_{E \backslash P}}$ וכן $|f| < |g|$.

זרימה חוסמת: פונקציית זרימה f עבורה לא קיים מסלול ניתן להגדלה s-t.

קשת אנטי־מקבילה: יהי G גרף מכוון ותהא $e \in E$ עבורה $e^{-1} \in E$ אזי e^{-1}.

רשת זרימה השיורית: תהא (V, E, c, s, t) רשת זרימה חסרת קשתות אנטי־מקבילות ותהא f זרימה אזי (V, E_f, c_f, s, t) באשר

- $E_f = \{e \in E \mid c(e) > f(e)\} \cup E^{-1}$.
- פונקציית שיוריות הקיבולת: תהא $e \in E_f$ אזי $c_f(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & e \in E \\ f(e^{-1}) & e \in E^{-1} \end{cases}$.

מסלול ניתן לשיפור s-t: תהא f זרימה אזי מסלול $P \in \{s \to t\}$ בגרף G_f.

מחסום/שיורית הקיבולת של מסלול: תהא f זרימה ויהי P מסלול ניתן לשיפור s-t אזי $c_f(P) = \min\{c_f(e) \mid e \in P\}$.

זרימה משופרת: תהא f זרימה ויהי P מסלול ניתן לשיפור s-t אזי $f_P\left(e\right)=\begin{cases} f(e)+c_f(P) & e\in P \\ f(e)-c_f(P) & e^{-1}\in P \\ f(e) & \text{else}\end{cases}$ לכל $e\in E\left(G\right)$.

למה: תהא f זרימה ויהי P מסלול ניתן לשיפור s-t אזי f_P זרימה של G וכן $\left|f_P\right|=\left|f\right|+c_f\left(P\right)$.

משפט: תהא f זרימה התב"ש
- f זרימה מקסימלית ב־G.
- לכל מסלול $P\in\left\{s\to t\right\}$ בגרף G_f מתקיים כי P אינו מסלול ניתן לשיפור s-t.
- קיים $\left(S,T\right)$ חתך s-t מינימלי ל־G.

אלגוריתם פורד־פלקרסון: תהא $\left(V,E,c,s,t\right)$ רשת זרימה אזי

```
function FordFulkerson(V, E, c, s, t):
    f ← (E → ℝ)
    f ← 0
    while True do
        G_f ← ResidualNetwork(G, c, s, t, f) // Construct it like any graph.
        π_{G_f} ← BFS(G, s)
        if {s → t} ∩ π_{G_f} = ∅ then return f
        else
            P ← {s → t} ∩ π_{G_f} // The path is taken from π_{G_f}.
            f ← f_P
    end
```

סימון: תהא $\left(V,E,c,s,t\right)$ רשת זרימה אזי $\text{FF}=\text{FordFulkerson}\left(V,E,c,s,t\right)$.

משפט: תהא $\left(V,E,c,s,t\right)$ רשת זרימה באשר $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי קיימת זרימה מקסימלית f באשר $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$.

טענה: תהא $\left(V,E,c,s,t\right)$ רשת זרימה באשר $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי בכל איטרציה של FF מתקיים
- f זרימה של G.
- $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$.
- $c_f\left(P\right)\geq1$.

משפט: תהא $\left(V,E,c,s,t\right)$ רשת זרימה באשר $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא f זרימה מקסימלית באשר $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי
- FF פתרון לבעיית הזרימה המקסימלית לכל בחירת מסלולים באלגוריתם.
- FF עושה לכל היותר $\left|f\right|$ שיפורי מסלול.
- $\text{FF}\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\left(V,E,c,s,t\right)$ רשת זרימה באשר $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא f זרימה מקסימלית באשר $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של FF הינה $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\left|f\right|\right)$.

משפט זרימה מקסימלית קיבולת מינימלית: תהא G רשת זרימה אזי $\max\left\{\left|f\right|\mid f\text{ זרימה}\right\}=\min\left\{c\left(S,T\right)\mid \left(S,T\right)\text{ חתך s-t מינימלי}\right\}$.