C^m־יריעה k־מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^m\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k־מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי $C^\omega\left(A,B\right)=\left\{f:A\to B\mid \text{אנליטית מקומית } f\right\}$.

יריעה אנליטית k־מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f:G\to\mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

עקומה: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה חד־מימדית.

משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה דו־מימדית.

היפר־משטח/על־משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה $n-1$ מימדית.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה היפר־משפט חלק.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(קיימות $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות עבורן $\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}_\alpha$ יריעה לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m־יריעה k־מימדית ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r\in C^m\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $r\left(G\right)=\mathcal{M}$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r\in C^1\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה לכל $x\in G$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_r\left(x\right)\right)=k$.

הומאומורפיזם: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f\in C\left(A,B\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C\left(B,A\right)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r:G\to A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(קיימות $\left\{\mathcal{U}_\alpha\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ עבורן $\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן קיימות $\left\{G_\alpha\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^k\right)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha\subseteq C^m\left(G_\alpha,\mathbb{R}^n\right)$ עבורן $r_\alpha\left(G_\alpha\right)=\mathcal{U}_\alpha$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{U}$ המקיימת $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים כי $\left\{\nabla f_i\left(x\right)\right\}$ בת"ל.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1\ldots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי ($\left\{f_1\ldots f_{n-k}\right\}$ מערכת משוואות רגולרית)$\Longleftrightarrow$(לכל $x\in\mathcal{U}$ עבורו $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{\left(f_1\cdots f_{n-k}\right)}\left(x\right)\right)=n-k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m־יריעה k־מימדית ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{M}=\left\{\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)=0\right\}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\Longleftrightarrow$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\right\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $\left(0,0,0\right)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma:I\to\left(0,\infty\right)\times\mathbb{R}$ עקומה אזי $f:I\times\left(0,2\pi\right)\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f\left(t,\rho\right)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\cos(\rho)\\\gamma_1(t)\sin(\rho)\\\gamma_2(t)\end{pmatrix}$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma:I\to\left(0,\infty\right)\times\mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(\gamma\right)$ אזי משפט הסיבוב f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(f\right)$.

הטלה סטריאוגרפית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ נגדיר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n$ כך $f\left(x\right)=-\frac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\|x\|^2-1}{2}\right)$.

טורוס: משטח הסיבוב של $\mathbb{S}^1$.

סימון: נסמן טורוס בעזרת $\mathbb{T}^2$.

קו־אוריינטציה של יריעה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח אזי $N\in C\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{M}.\left(\left|N\left(x\right)\right|=1\right)\wedge\left(N\left(x\right)\perp x\right)$.

למה: טבעת מוביוס אינו משטח קו־אוריינטבילי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^3$ אזי $a\times b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $(u\times v)\perp v$ וכן $(u\times v)\perp u$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\left(u\in\operatorname{span}\left(v\right)\right)\iff\left(u\times v=0\right)$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\det\left(u,v,u\times v\right)=\left\Vert u\times v\right\Vert^2\geq0$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\left\Vert v\times u\right\Vert=\left\Vert v\right\Vert\left\Vert u\right\Vert\sin\left(\angle\left(v,u\right)\right)$.

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ממימד k: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה המקיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן קיים $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם עבורו $f\left(A\right)=f\left(\mathcal{U}\right)\cap\left(\mathbb{R}^k\times\left\{0_{n-k}\right\}\right)$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה אזי פרידיקט P עבורו לכל $a\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה P מתקיימת על $A\cap\mathcal{U}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ התב"ש
- $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית.
- $\mathcal{M}$ מקומית גרף של פונקציה $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל־$\mathbb{R}^k$.

מסקנה: תהא $r:G\to\mathbb{R}^n$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a\in G$ קיימת סביבה $W\subseteq\mathbb{R}^n$ של $\left(a,0_{n-k}\right)$ וקיים דיפאומורפיזם $s:W\to s\left(W\right)$ עבורו $s_{\restriction_{W\cap\left(G\times0_{n-k}\right)}}=r$.

הערה: יריעה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq A$ אזי ($\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־A)$\iff$($\forall x\in\mathcal{U}.\exists r>0.B_r\left(x\right)\cap A\subseteq\mathcal{U}$).

קבוצה קשירה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל־A מתקיים $\mathcal{U}\in\left\{A,\varnothing\right\}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי (A קשירה)$\iff$(לא קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset A$ פתוחות יחסית ל־A עבורן $A\in\left\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\right\}$).

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $f:A\to B$ אזי (f רציפה)$\iff$(לכל $\mathcal{U}\subseteq B$ פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי $f^{-1}\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה יחסית ל־A).

מפה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^k$ הפיכה עבורה $\varphi\left(\mathcal{U}\right)$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטריזציה טובה אזי $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$.

אטלס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קבוצה של מפות $\mathcal{A}$ עבורה $\bigcup\left\{\mathcal{C}_1\mid\mathcal{C}\in\mathcal{A}\right\}=\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $r:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\left(r\left(\mathcal{U}\right),r^{-1}\right)$ מפה.

המרחב הפרוייקטיבי: יהי $n\geq2$ אזי $\mathbb{RP}^n=\left\{vv^T\mid v\in\mathbb{S}^n\right\}$.

טענה: יהי $n\geq2$ אזי $\mathbb{RP}^n\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ יריעה n מימדית.

העתקת מעבר: תהיינה $\left(\mathcal{U}_1,\varphi_1\right),\left(\mathcal{U}_2,\varphi_2\right)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ המוגדרת $\varphi_{1,2}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$.

טענה: תהיינה $\left(\mathcal{U}_1,\varphi_1\right),\left(\mathcal{U}_2,\varphi_2\right)$ מפות אזי $\varphi_i\left(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\right)$ פתוחה עבור $i\in\left\{1,2\right\}$.

טענה: תהיינה $\left(\mathcal{U}_1,\varphi_1\right),\left(\mathcal{U}_2,\varphi_2\right)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}$ דיפאומורפיזם.

פונקציה C^α מיריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α.

הערה: נניח כי $\mathcal{M}$ יריעה C^α אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ הינה לכל היותר מדרגת חלקות C^α.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ אזי (f הינה C^α)$\iff$(קיים אטלס $\left\{\left(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha\right)\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קיים ל־$\mathcal{M}$ אטלס.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $\dim\left(\mathcal{M}\right)=k$.

פונקציה C^{α} בין יריעות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה ℓ־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ הינה C^{α}.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''\right)$ אזי $g\circ f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}''\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(לכל $p\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ של p עבורה קיימת $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ המקיימת $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$).

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ אזי (f הינה C^{α})$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ של $\mathcal{M}$ ולכל מפה $\left(\mathcal{V},\psi\right)$ של $\mathcal{M}'$ מתקיים כי $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^{α}).

דיפאומורפיזם C^{α}: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה f הפיכה וכן $f,f^{-1}\in C^{\alpha}$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות דיפאומורפיות אזי $\dim\left(\mathcal{M}\right)=\dim\left(\mathcal{M}'\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהיינה $\left(\mathcal{U},\varphi\right),\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפות באשר $\mathcal{U},\mathcal{V}$ סביבות של p אזי $\operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right)=\operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)$.

המרחב המשיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi\left(p\right)}\left(\varphi^{-1}\right)\right)$.

הערה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\subseteq\mathbb{R}^{n}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $\dim\left(T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\right)=\dim\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{ f=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\ker\left(\mathcal{D}_{p}\left(f\right)\right)$.

וקטור מהירות: תהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}$.

טענה: תהא $\gamma:\left(a,b\right)\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} אזי $\dot{\gamma}\left(t\right)\in T_{\gamma\left(t\right)}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\left\{ \dot{\gamma}\left(0\right)\mid\left(\gamma\in C^{1}\left(\left(-\varepsilon,\varepsilon\right),\mathcal{M}\right)\right)\wedge\left(\gamma\left(0\right)=p\right)\right\}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהיינה $\gamma_{1},\gamma_{2}:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ מסילות המקיימות $\gamma_{i}\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma_{i}}\left(0\right)=v$ אזי $\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}\right)\right)\left(0\right)$.

נגזרת של פונקציה בין יריעות: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}f:T_{p}\left(\mathcal{M}\right)\to T_{f\left(p\right)}\left(\mathcal{M}'\right)$ המוגדרת $\left(\mathcal{D}_{p}f\right)\left(v\right)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma\right)\right)\left(0\right)$ עבור מסילה $\gamma:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to\mathcal{M}$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=p$ וכן $\dot{\gamma}\left(0\right)=v$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}f$ העתקה לינארית.

משפט כלל השרשרת: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''\right)$ אזי $\mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right)=\mathcal{D}_{f\left(p\right)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_{p}f\right)\left(v\right)=\mathcal{D}_{p}\left(f\right)\cdot v$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{ F=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית עבור סביבה של p אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)=\operatorname{span}\left(\left\{ \nabla F_{1}\left(p\right),\ldots,\nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\} ^{\perp}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $\left\{ \mathcal{D}_{\varphi\left(p\right)}\varphi^{-1}\left(e_{1}\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi\left(p\right)}\varphi^{-1}\left(e_{k}\right)\right\}$ בסיס של $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

הערה: נגדיר את $\left\{ \mathcal{D}_{\varphi\left(p\right)}\varphi^{-1}\left(e_{1}\right),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi\left(p\right)}\varphi^{-1}\left(e_{k}\right)\right\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right)$ תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p ותהא $\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפה ב־$\mathcal{M}'$ באשר $\mathcal{V}$ סביבה של $f\left(p\right)$ אזי $\left[\mathcal{D}_{p}f\right]_{i,j}=\frac{\partial\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)_{i}}{\partial x_{j}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $g\in C^{\alpha}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ באשר $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של p וכן $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$ אזי $\mathcal{D}_{p}f=\left(\mathcal{D}_{p}g\right)_{\restriction T_{p}\left(\mathcal{M}\right)}$.

נגזרת כיוונית: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_{v}f=\mathcal{D}_{p}f\left(v\right)$.

טענה: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה בסביבה של p ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $L_{v}f=\sum_{i=1}^{k}v_{i}\cdot\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_{i}}$.

טענה: תהא $f\in C^{\alpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $v\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}=L_{v}f$.

וקטור נורמל: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\}$ עבורו $v\perp T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$.

וקטור נורמל יחידה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי וקטור נורמל $v\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\}$ עבורו $\left\Vert v\right\Vert =1$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\left\{ f=0\right\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $\frac{\nabla f\left(p\right)}{\left\Vert \nabla f\left(p\right)\right\Vert }$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $\{f=0\}$ הצגה סתומה רגולרית של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא Γ_f הצגה כגרף בסביבה של p אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p),-1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^2}}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא Γ_f הצגה כגרף של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},-1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

מכפלה מצולבת: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי $v_1\times\ldots\times v_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\det\begin{pmatrix}(v_1)_1 & \cdots & (v_{n-1})_1\\ \vdots & & \vdots\\ (v_1)_{i-1} & \cdots & (v_{n-1})_{i-1}\\ (v_1)_{i+1} & \cdots & (v_{n-1})_{i+1}\\ \vdots & & \vdots\\ (v_1)_n & \cdots & (v_{n-1})_n\end{pmatrix}e_i$.

הערה: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי בצורה לא פורמלית מתקיים $v_1\times\ldots\times v_{n-1}=\det\begin{pmatrix}e_1 & | & & |\\ \vdots & v_1 & \ldots & v_{n-1}\\ e_n & | & & |\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.

דטרמיננטת גראם: יהיו $v_1\ldots v_m\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Gamma(v_1\ldots v_m)=\det\begin{pmatrix}\langle v_1,v_1\rangle & \cdots & \langle v_1,v_m\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle v_m,v_1\rangle & \cdots & \langle v_m,v_m\rangle\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ אזי
- לכל $i\in[n-1]$ מתקיים $v_1\times\ldots\times v_{n-1}\perp v_i$.
- $\|v_1\times\ldots\times v_{n-1}\|=\sqrt{\Gamma(v_1\ldots v_{n-1})}$.
- $\det(v_1\times\ldots\times v_{n-1},v_1,\ldots,v_{n-1})\geq 0$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא r פרמטריזציה טובה בסביבה של p אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}(p)\times\ldots\times\frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}(p)$ וקטור נורמל ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא r פרמטריזציה טובה של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}\times\ldots\times\frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

סימון: תהא $f\in C^\infty(\mathcal{M})$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha f=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f)$.

סימון: תהיינה $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^{k}\binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in C^\infty(\mathcal{M})$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha(f\cdot g)=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^k\\|\beta|\leq|\alpha|}}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta(f)\,\partial^{\alpha-\beta}(g)$.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה אזי $D:C^\infty(\mathcal{U})\to C^\infty(\mathcal{U})$ המקיימת $\mathcal{D}(f)(x)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^k\\|\alpha|\leq m}}a_\alpha(x)\cdot\partial^\alpha f(x)$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $D:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ על $\mathcal{M}$ באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית מתקיים $\mathcal{D}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(x)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^k\\|\alpha|\leq m}}a_\alpha(x)\cdot\partial^\alpha\left(f\circ\varphi^{-1}\right)(x)$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

שדה וקטורי C^m: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ עבורה $v(p)\in T_p(\mathcal{M})$ לכל $p\in\mathcal{M}$ וכן לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מתקיים כי $x\mapsto\mathcal{D}_x\varphi(v(x))$ העתקה C^m.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי $L_v:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$ המוגדרת $L_v(f)(x)=L_{v(x)}(f)$ הינה אופרטור דיפרנציאלי.

תומך: תהא $f\in C(\mathcal{M})$ אזי $\text{supp}(f)=\overline{\{x\in\mathcal{M}\mid f(x)\neq 0\}}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה אזי $C_C^\infty(\mathcal{U})=\{f\in C^\infty(\mathcal{U})\mid \text{supp}(f)\text{ קומפקטית}\}$.

אופרטור מקומי: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $L:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה ולכל $f,g\in C_C^\infty$ עבורן $f_{\restriction\mathcal{U}}=g_{\restriction\mathcal{U}}$ מתקיים $L(f)_{\restriction\mathcal{U}}=L(g)_{\restriction\mathcal{U}}$.

הגדרה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^\infty(\mathcal{W})$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\|f\|_{W,n}=\sup_{\substack{x\in w\\|\alpha|\leq n}}\|(\partial^\alpha f)(x)\|$.

טענה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^\infty(\mathcal{W})$ תהא $x\in\mathcal{W}$ עבורה $(\partial^\alpha f)(x)=0$ לכל $|\alpha|\leq n$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $\delta\in(0,\varepsilon)$ וכן $g\in C^\infty(\mathcal{W})$ עבורה
- $g_{\restriction B_{\frac{\delta}{2}}(x)}=0$.
- $g_{\restriction\mathcal{W}\setminus B_\delta(x)}=0$.
- $\|f-g\|_{W,n}<\varepsilon$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^{k}\binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

משפט פיטרה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $L:C^\infty(\mathcal{M})\to C^\infty(\mathcal{M})$ לינארית התב"ש

- L אופרטור מקומי.
- לכל $f\in C^{\infty}(\mathcal{M})$ מתקיים $\text{supp}(L(f))\subseteq\text{supp}(f)$.
- L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה יהי $L:C^{\infty}(\mathcal{V})\to C^{\infty}(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $x\in\mathcal{V}$ אזי קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{W}}$ קומפקטית וכן קיים $n\in\mathbb{N}$ וכן $C>0$ עבורם לכל $f\in C_{C}^{\infty}(\mathcal{W}\backslash\{x\})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0}\le C\|f\|_{\mathcal{W},n}$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה יהי $L:C^{\infty}(\mathcal{V})\to C^{\infty}(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ פתוחה עבורה קיימים $n\in\mathbb{N}$ וכן $C>0$ עבורם לכל $f\in C_{C}^{\infty}(\mathcal{W})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0}\le C\|f\|_{\mathcal{W},n}$ אזי L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n.

משפט פירוק יחידה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח של X אזי קיימות $\{\rho_{i}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$ עבורן
- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le\rho_{i}\le1$.
- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\text{supp}(\rho_{i})\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $|\{i\in\mathbb{N}\mid\rho_{i}(\mathcal{W})\neq0\}|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}(x)=1$.

מסקנה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה ויהי $L:C^{\infty}(\mathcal{V})\to C^{\infty}(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי אזי L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $X\subseteq\mathcal{M}$ ויהי $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח ב־$\mathcal{M}$ של X אזי קיימות $\{\rho_{i}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq C^{\infty}(\mathcal{M})$ עבורן
- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le\rho_{i}\le1$.
- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\text{supp}(\rho_{i})\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $|\{i\in\mathbb{N}\mid\rho_{i}(\mathcal{W})\neq0\}|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}(x)=1$.

מקבילון: יהיו $v_{1}\dots v_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Pi(v_{1}\dots v_{k})=\left\{\sum_{i=1}^{k}t_{i}v_{i}\mid\forall i\in[k].t_{i}\in[0,1]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $v_{1}\dots v_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Vol}_{k}(\Pi(v_{1}\dots v_{k}))=\sqrt{\Gamma(v_{1}\dots v_{k})}$.

טענה: יהיו $v_{1}\dots v_{k}\in\mathbb{R}^{k}$ אזי
- $\text{Vol}_{k}\left(\binom{v_{1}}{0^{n-k}},\dots,\binom{v_{k}}{0^{n-k}}\right)=|\det(v_{1}\dots v_{k})|$.
- תהא $T\in O(n)$ אזי $\text{Vol}_{k}(Tv_{1},\dots,Tv_{k})=\text{Vol}_{k}(v_{1},\dots,v_{k})$.

קבוצה זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מתקיים כי $\varphi(E\cap\mathcal{U})$ זניחה ב־$\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית יהי $\{(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha})\}_{\alpha\in\Lambda}$ אטלס של $\mathcal{M}$ ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ אזי (E זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$(לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי $\varphi_{\alpha}(E\cap\mathcal{U}_{\alpha})$ זניחה ב־$\mathbb{R}^{k}$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהיינה $\{E_{i}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{M})$ זניחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}$ זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}$.

קבוצת נקודות האי־רציפות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אזי $B_{f}=\{x\in\mathcal{M}\mid x\text{ אינה רציפה על }f\}$.

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה
- f חסומה.
- $\text{supp}(f)$ קומפקטי.
- B_{f} זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן על יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{E}$ אינטגרבילית רימן על $\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי (E מדידה ז'ורדן ב־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$($\varphi(E)$ מדידה ז'ורדן ב־$\mathbb{R}^{k}$).

פונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $\text{supp}(f)$ קומפקטית וכן קיימת מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ עבורה $\text{supp}(f)\subseteq\mathcal{U}$.

קבוצה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $A\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{A}$ נוחה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה $\{(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i})\}$ של $\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}_{i}$ נוחה לכל $i\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימות $f_{1}\dots f_{n}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה $r_{i}:G_{i}\to\mathcal{M}$ פרמטריזציות טובות באשר $G_{i}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ וכן $i\in\{1,2\}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי
$$\int_{G_{1}}(f\circ r_{1})(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}(r_{1})^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}(r_{1})\right)}\text{d}q=\int_{G_{2}}(f\circ r_{2})(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}(r_{2})^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}(r_{2})\right)}\text{d}q.$$

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r : G \to \mathcal{M}$ באשר $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ותהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \int_G (f \circ r)(q) \cdot \sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_q(r)^T \cdot \mathcal{D}_q(r)\right)} \mathrm{d}q$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r : G \to \mathcal{M}$ באשר $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ותהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \int_G (f \circ r)(q) \cdot \sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \dots \frac{\partial r}{\partial x_k}\right)} \mathrm{d}q$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U}, \varphi)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}} = \{f : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \mid (\operatorname{supp}(f) \subseteq \mathcal{U}) \wedge (\text{נוחה ואינטגרבילית רימן } f)\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U}, \varphi)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U}, \varphi)$ מפה אזי $\int_{\mathcal{M}} : R_{\mathcal{U}} \to \mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1 \dots f_n, g_1 \dots g_m : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f = \sum_{i=1}^n f_i$ וכן $f = \sum_{i=1}^m g_i$ אזי $\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{M}} g_i$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1 \dots f_n : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f = \sum_{i=1}^n f_i$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M}) = \{f : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \mid \text{אינטגרבילית רימן } f\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\int_{\mathcal{M}} : R(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $f \in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \int_{\mathcal{M}} f \mathrm{dVol}_k$.

מיצוי ז'ורדן של יריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $(E_i)_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\bigcup_{i=1}^\infty E_i = \mathcal{M}$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ באשר B_f זניחה אזי אם קיים $L \in \mathbb{R}$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $(E_i)_{i=1}^\infty$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\lim_{i \to \infty} \int_{E_i} f \cdot \mathbb{1}_{E_i} = L$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f = L$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f \in R(\mathcal{M})$ אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $(E_i)_{i=1}^\infty$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\int_{\mathcal{M}} f = \lim_{i \to \infty} \int_{\mathcal{M}} f \cdot \mathbb{1}_{E_i}$.

נפח של יריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\mathrm{Vol}_k(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} 1$.

מפות זרות: מפות $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$ עבורן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

טענה: תהיינה $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^n$ מפות זרות בזוגות על $\mathcal{M}$ תהא $S \subseteq \mathcal{M}$ זניחה ותהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ עבורה $f\restriction_{\mathcal{M} \setminus (S \cup (\biguplus_{i=1}^n \mathcal{U}_i))} = 0$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{U}_i} f$.

אינטגרל קווי מסוג ראשון: תהא $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ותהא $f : \operatorname{Im}(\gamma) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית אזי $\int_\gamma f \mathrm{dVol}_1$.

סימון: תהא $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma) = \lim_{m \to \infty} \sup_{a = t_0 < \ldots < t_m = b} \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$.

טענה: תהא $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M}) = \mathrm{Vol}_1(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית ותהא $\gamma : (a, b) \to \mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M}) = \mathrm{Length}(\gamma)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{Length}(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} \mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $r, \theta \in C^1(\mathbb{R})$ נגדיר $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ כך $\gamma(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$ אזי $\|\gamma'\| = \sqrt{r^2 + r'}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M}) = \mathrm{Vol}_2(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ יריעה דו־מימדית ותהא $r : G \to \mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה באשר $G \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M}) = \int_G \left|\frac{\partial r}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial r}{\partial x_2}(y)\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ אזי $\mathrm{Area}(\Gamma_f) = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

טענה: תהיינה $u, v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\det(I + uv^T) = 1 + \langle u, v \rangle$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n-k})$ אזי $\mathrm{Vol}_k(\Gamma_f) = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_k$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n-k})$ ותהא $\alpha : \Gamma_f \to \mathbb{R}$ באשר $\alpha(x)$ הזווית בין הנורמל של Γ_f בנקודה x לבין ציר e_{k+1} אזי $\sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2} = \frac{1}{\cos(\alpha(x))}$.

משפט ארכימדס: יהיו P_1, P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M}) = 2\pi h$.

מסקנה: יהיו P_1, P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $R \cdot \mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $R \cdot \mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M}) = 2\pi hR$.

קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים מקבילים אזי $P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\max\{d(x,H_1),d(x,H_2)\}\le d(H_1,H_2)\}$.

רוחב קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים אזי $\text{Width}(P_{H_1,H_2})=d(H_1,H_2)$.

רוחב גוף: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\text{Width}(K)=\inf_{\{K\subseteq P\mid P\text{ קורה}\}}(\text{Width}(P))$.

משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $\text{Width}(K)\le\sum_{i=1}^m\text{Width}(P_i)$.

רוחב יחסי של קורה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ותהא P קורה אזי $\text{Width}_K(P)=\inf_{m\in\mathbb{R}_+}\{m\in\mathbb{R}_+\mid\exists a\in\mathbb{R}^n.K\subseteq m\cdot P+a\}$.

השערת באנג: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^m\text{Width}_K(P_i)$. השערה פתוחה

טענה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי עבורו $K=-K$ ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^m\text{Width}_K(P_i)$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ אזי $\varphi^{-1}(t)$ על־משטח.

טענה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi(\mathcal{V})=(a,b)$ ותהא $p\in\mathcal{V}$ אזי קיים $\delta>0$ עבורו לכל $f\in R(V_\delta(p))$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית מתקיים $\int_{B_\delta(p)}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\text{dVol}_{n-1}(x)\,\text{d}t$.

משפט נוחסאת קו־שטח: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi(\mathcal{V})=(a,b)$ ותהא $f\in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\text{dVol}_{n-1}(x)\,\text{d}t$.

גרדיאנט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $u\in T_x(\mathcal{M})$ עבורו $\langle u,v\rangle=L_v\varphi(x)$ לכל $v\in T_x(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי הגרדיאנט של φ בנקודה x הוא $\nabla_x\varphi$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של $x\in\mathcal{M}$ ותהא $\psi\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ באשר $\psi_{\restriction_{\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}}=\varphi_{\restriction_{\mathcal{U}}}$ אזי $\nabla_x\varphi=\text{Proj}_{T_x(\mathcal{M})}(\nabla_x\psi)$.

משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi(\mathcal{M})=(a,b)$ ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\text{dVol}_{n-1}(x)\,\text{d}t$.

מסקנה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R}^k)$ באשר $\text{rank}(\mathcal{D}_x\varphi)=k$ ותהא $f\in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_{\varphi(\mathcal{V})}\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\sqrt{\det\left((\mathcal{D}_x\varphi)\cdot(\mathcal{D}_x\varphi)^T\right)}}\text{dVol}_{n-1}(x)\,\text{d}t$.

טענה: תהא $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהא $A\in O(n+1)$ אזי $\int_{\mathbb{S}^n}f(x)\,\text{dVol}_n=\int_{\mathbb{S}^n}f(Ax)\,\text{dVol}_n$.

טענה: יהי $r>0$ אזי $\text{Vol}_n(r\cdot\mathbb{S}^n)=r^n\cdot\text{Vol}_n(\mathbb{S}^n)$.

טענה שטח פנים של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

טענה נפח של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_n(B_1(0))=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{M})=\{v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k\mid\mathcal{M}\text{ מעל }C^\alpha\text{ שדה וקטורי }v\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה C^α ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}\in\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ ולכל $i\in[k]$ מתקיים כי $\left\langle v(x),\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}(x)\right\rangle$ הינה C^α).

טענה: יהי v שדה וקטורי על $\mathcal{M}$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$($v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k$ הינה C^α).

שדה וקטורי C^m מעל תת־קבוצה: תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ אזי $v:A\to\mathbb{R}^k$ עבורה $v(x)\in T_x(\mathcal{M})$ וכן לכל $p\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ וקיים $u\in\mathfrak{X}^m(\mathcal{U})$ עבורו $u_{\restriction_{A\cap\mathcal{U}}}=v_{\restriction_{A\cap\mathcal{U}}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ ותהא $v:A\to\mathbb{R}^k$ אזי (v שדה וקטורי C^α מעל A)$\Longleftrightarrow$(קיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה ב־$\mathcal{M}$ וקיימת $u\in\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$ עבורה $u_{\restriction_{\mathcal{U}}}=v$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ אזי $\nabla\varphi\in\mathfrak{X}^0(\mathcal{M})$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ על־משטח קשיר אזי ($\mathcal{M}$ בעל 0 קו־אוריינטציות)$\vee$($\mathcal{M}$ בעל 2 קו־אוריינטציות).

שטף: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{M}}\langle F(x),N(x)\rangle\,\text{dVol}_{n-1}(x)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהיו $F_1,F_2\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורם F_1,F_2 שדות וקטוריים דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{\alpha F_1+\beta F_2}(\mathcal{M})=\alpha\text{Flux}_{F_1}(\mathcal{M})+\beta\text{Flux}_{F_2}(\mathcal{M})$.

טענה: יהיו $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים זרים עד כדי קבוצה זניחה בעלי קו־אוריינטציה N_1,N_2 בהתאמה ויהי $F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M}_1\cup\mathcal{M}_2)=\text{Flux}_F(\mathcal{M}_1)+\text{Flux}_F(\mathcal{M}_2)$.

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח בעל קו־אוריינטציה N ויהי $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M}, N) = \text{Flux}_F(\mathcal{M}, -N)$.

דיברגנץ: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(F)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ נגדיר $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ כך $f(x) = F(x)$ אזי $\text{div}(F)(x) = \text{trace}(\mathcal{D}_x(f))$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{div}(A \circ F)(A^{-1}x) = \text{div}(F)(x)$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(f \cdot F) = f \cdot \text{div}(F) + \langle \nabla f, F \rangle$.

לפלסיאן: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\Delta f = \text{div}(\nabla f)$.

סימון: תהא $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Cube}_\ell(x) = \{Q \subseteq \mathbb{R}^n \mid (x \in Q) \wedge (\text{אורך הצלע של } Q \text{ הוא } \ell) \wedge (Q \text{ קובייה})\}$.

הערה: תהא $x \in \mathbb{R}^n$ ויהי $Q \in \text{Cube}_\ell(x)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial Q) = \sum \text{Flux}_F(E_i)$ באשר $\{E_i\}$ פאות Q עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני ל־Q.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{div}(F)(x) = \lim_{\substack{Q \in \text{Cube}_\ell(x) \\ \ell \to 0}} \frac{1}{\text{Vol}_n(Q)} \text{Flux}_F(\partial Q)$.

נקודת שפה חלקה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $x \in \partial\mathcal{U}$ עבורה קיימת $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של x וקיימת $f \in C^1(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ עבורה $\nabla_x f \neq 0$ וכן $f(x) = 0$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U} = \{x \in \partial\mathcal{U} \mid x \text{ נקודת שפה חלקה}\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה תהא $x \in \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ ותהא $f \in C^1(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ באשר $\mathcal{W}$ סביבה של x המקיימת $\nabla_x f \neq 0$ וכן $f(x) = 0$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\}$ אזי $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x) = (\mathcal{W}, f)$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x \in \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיימת $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של x עבורה $\mathcal{W} \cap \partial\mathcal{U}$ היפר־משטח.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־$\partial\mathcal{U}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ יריעה.

קבוצה חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\partial\mathcal{U} = \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$.

קבוצה בעלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \text{Vol}_n((\partial\mathcal{U} \backslash \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) + B_\varepsilon^n(0)) = 0$.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x \in \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ עבורה $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x) = (\mathcal{W}, f)$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} : \mathcal{W} \cap \partial^{\text{sm}}\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ נורמל יחידה.

קו־אוריינטציה חיצונית קנונית לשפה חלקה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $N : \partial^{\text{sm}}\mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ באשר $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}(x) = (\mathcal{W}, f)$ מתקיים $N_{\restriction_{\mathcal{W} \cap \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$.

שטף: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ בעלת שפה כמעט חלקה תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\partial\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U}) = \text{Flux}_F(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U})$.

למה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ יהי $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ ותהא $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Flux}_{A \circ F}(A \cdot \mathcal{M}) = \text{Flux}_F(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $a \in \mathbb{R}^n$ יהי $r > 0$ תהא $g \in C^1(B_r(a), \mathbb{R})$ באשר $\frac{\partial g}{\partial x_i} \neq 0$ לכל $i \in [n]$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{R}^n)$ באשר $\text{supp}(F) \subseteq B_r(a)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\{g < 0\}) = \int_{\{g<0\}} \text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) < \infty$ תהא $a \in \partial\mathcal{U} \backslash \partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיים $r > 0$ עבורו לכל $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיים $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$ ולכל $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ המקיים $\text{supp}(F) \subseteq B_r(a)$ מתקיים $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה וחלקה תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \text{div}(F)$.

למה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $X + B_\varepsilon(0)$ מדידה ז'ורדן.

למה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית אזי קיים $C \in \mathbb{R}$ עבורו לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ המקיימת

- $0 \le \psi \le 1$.
- $\psi_{\restriction_{X + B_\varepsilon(0)}} = 1$.
- $\psi_{\restriction_{\mathbb{R}^n \backslash (X + B_{3\varepsilon}(0))}} = 0$.
- לכל $i \in [n]$ מתקיים $\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right| \le \frac{C}{\varepsilon}$.

משפט הדיברגנץ: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{W})$ אזי $\text{Flux}_F(\partial\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \text{div}(F)$.

טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) < \infty$ ויהי N נורמל חיצוני ל־$\mathcal{U}$ אזי $\text{Vol}_n(\mathcal{U}) = \frac{1}{n} \int_{\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}} \langle x, N \rangle \, \text{dVol}_{n-1}(x)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}\right) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{W}$ תהיינה $f, g \in C^1(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\int_{\mathcal{U}} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \cdot g\right) = \int_{\partial\mathcal{U}} (f \cdot g \cdot \langle N, v\rangle) - \int_{\mathcal{U}} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial v}\right)$.

טענה נוסחאות גרין: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $u, v : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ אזי

1. נניח כי u הינה C^2 אזי $\int_G \Delta u = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial N}$.
2. נניח כי v הינה C^2 וכן u הינה C^1 אזי $\int_G \langle \nabla u, \nabla v\rangle = -\int_G u \cdot \Delta v + \int_{\partial G} u \cdot \frac{\partial v}{\partial N}$.
3. נניח כי u, v הן C^2 אזי $\int_G (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) = \int_{\partial G} \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial N} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial N}\right)$.

אנרגיית דיריכלה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ אזי $\int_G \|\nabla v\|^2$.

מסקנה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ אזי $\int_G \|\nabla v\|^2 = -\int_G v \cdot \Delta v + \int_{\partial G} v \cdot \frac{\partial v}{\partial N}$.

פונקציה הרמונית: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $u \in C^2(G, \mathbb{R})$ המקיימת $\Delta u = 0$.

טענה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $u \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ הרמונית אזי

- $\mathrm{Flux}_{\nabla u}(\partial G) = 0$.
- נניח כי $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}} = 0$ אזי u קבועה מקומית ב־G.
- נניח כי $u_{\restriction_{\partial G}}$ קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב־G.

סימון: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $⨍_{\mathcal{U}} f = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{U})} \int_{\mathcal{U}} f$.

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a \in \mathbb{R}^n$ יהי $r > 0$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r(a)} \subseteq \mathcal{W}$ ותהא $u \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ הרמונית אזי $u(a) = ⨍_{\partial B_r(a)} u$.

מסקנה: תהא $a \in \mathbb{R}^n$ יהי $r > 0$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r(a)} \subseteq \mathcal{W}$ ותהא $u \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ הרמונית אזי $u(a) = ⨍_{B_r(a)} u$.

טענה: תהא $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Delta f(a) = \lim_{r \to 0} \frac{2n}{r^2} \left(⨍_{\partial B_r(a)} f - f(a)\right)$.

מסקנה עקרון המקסימום: יהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\max\left(u\left(\overline{G}\right)\right) \in u(G)$ אזי u קבועה.

מסקנה עקרון המינמום: יהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\min\left(u\left(\overline{G}\right)\right) \in u(G)$ אזי u קבועה.

משפט ליוביל: תהא $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי u קבועה.

מסקנה: תהא $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלעיל אזי u קבועה.

טענה אינטגרל פואסון: יהי $n \geq 3$ תהא $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ באשר $\mathrm{supp}(u)$ קומפקטי ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $u(a) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta u(x)}{|x-a|^{n-2}} \mathrm{d}x$.

משפט גרעין פואסון: תהא $u : \overline{B_1^n(0)} \to \mathbb{R}$ רציפה באשר $u_{\restriction_{B_1^n(0)}}$ הרמונית אזי לכל $a \in B_1^n(0)$ מתקיים $u(a) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x) \cdot \frac{1-\|a\|^2}{\|x-a\|^n} \mathrm{dVol}_{n-1}$.

מסקנה: תהא $f \in C^2\left(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R}\right)$ אזי $u : \overline{B_1^n(0)} \to \mathbb{R}$ המוגדרת $u(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(y) \cdot \frac{1-\|x\|^2}{\|y-x\|^n} \mathrm{dVol}_{n-1}(y)$ הינה הרמונית וכן $u_{\restriction_{\mathbb{S}^{n-1}}} = f$.

המרחב הדואלי: יהי V מ"ו ממשי אזי $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$.

סימון: יהי V מ"ו ממשי יהי $\{e_1 \ldots e_n\}$ בסיס של V ויהי $i \in [n]$ אזי $e_i^* : V \to \mathbb{R}$ המוגדרת $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

טענה: יהי V מ"ו ממשי ויהי $\{e_1 \ldots e_n\}$ בסיס של V אזי $\{e_1^* \ldots e_n^*\}$ בסיס של V^*.

המרחב הקו־משיק: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p \in \mathcal{M}$ אזי $T_p(\mathcal{M})^*$.

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p \in \mathcal{M}$ אזי $T_p^*(\mathcal{M}) = T_p(\mathcal{M})^*$.

קו־וקטורים: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p \in \mathcal{M}$ אזי $v \in T_p^*(\mathcal{M})$.

1־תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega : \mathcal{M} \to (\mathbb{R}^n)^*$ המקיימת $\omega(x) \in T_x^*(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω 1־תבנית דיפרנציאלית על $\mathcal{M}$ ותהא $x \in \mathcal{M}$ אזי $\omega_x = \omega(x)$.

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_x \in (\mathbb{R}^n)^*$ אלא $\omega_x \in T_x^*(\mathcal{M})$.

טענה: יהי $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ אזי $\omega_x(u) = \langle v(x), u\rangle$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

נגזרת חיצונית: תהא $f \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ אזי $\mathrm{d}f : \mathcal{M} \to (\mathbb{R}^n)^*$ המוגדרת $(\mathrm{d}f)(x)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x)$.

טענה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}f$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

טענה כלל לייבניץ': תהיינה $f,g\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}\left(f\cdot g\right)=f\cdot\mathrm{d}g+g\cdot\mathrm{d}f$.

הטלה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $i\in\left[n\right]$ אזי $q_{i}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $q_{i}\left(u\right)=u_{i}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $x_{i}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $x_{i}=q_{i}\circ\varphi$.

מערכת קואורדינטות מקומיות על יריעה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\left\{ x_{1}\ldots x_{k}\right\}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ויהי $i\in\left[k\right]$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(p\right)=\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_{i}}\left(\varphi\left(p\right)\right)$.

הערה: מטרת הסימונים מלעיל הינה לאפשר קואורדינטות $x_{1}\ldots x_{k}$ על $\mathcal{M}$ כמו ב־$\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $i\in\left[k\right]$ אזי $\mathrm{d}x_{i}$ 1־תבנית דיפרנציאלית ב־$\mathcal{U}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ויהי $i\in\left[n\right]$ אזי $\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(p\right)=\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_{i}}\left(\varphi\left(p\right)\right)$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i\in\left[k\right]$ ויהי $p\in\mathcal{U}$ אזי $\mathrm{d}x_{i}|_{p}=\mathrm{d}x_{i}\left(p\right)$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $x\in\mathcal{U}$ אזי $\left\{ \mathrm{d}x_{1}|_{x},\ldots,\mathrm{d}x_{k}|_{x}\right\}$ בסיס של $T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i\in\left[k\right]$ ויהי $p\in\mathcal{U}$ אזי $\mathrm{d}x_{i}|_{p}=\left(\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(p\right)\right)^{*}$.

1־תבנית דיפרנציאלית C^{m}: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי 1־תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ של $\mathcal{M}$ ולכל $f_{1}\ldots f_{k}\in\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ באשר $\omega=\sum_{i=1}^{k}f_{i}\cdot\mathrm{d}x_{i}$ מתקיים $f_{1}\ldots f_{k}\in C^{m}\left(\mathcal{U}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא ω 1־תבנית דיפרנציאלית אזי $\left(\omega\in C^{m}\right)\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\left\{ \left(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha}\right)\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו לכל $\alpha\in\Lambda$ ולכל $f_{1}\ldots f_{k}\in\mathcal{U}_{\alpha}\to\mathbb{R}$ באשר $\omega=\sum_{i=1}^{k}f_{i}\cdot\mathrm{d}x_{i}$ מתקיים $f_{1}\ldots f_{k}\in C^{m}\left(\mathcal{U}_{\alpha}\right)$).

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)=\left\{ \omega\mid\mathcal{M}\text{ על }C^{\infty}\text{ 1־תבנית דיפרנציאלית }\omega\right\}$.

טענה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\cdot\mathrm{d}x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in C^{m+1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\mathrm{d}f$ הינה 1־תבנית דיפרנציאלית C^{m}.

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right)$ אזי $F^{*}:\Omega^{1}\left(\mathcal{N}\right)\to\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $F^{*}\left(\omega,x,v\right)=\omega_{F\left(x\right)}\left(\mathcal{D}_{x}\left(F\right)\cdot v\right)$.

סימון: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $N\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $F\in C^{1}\left(M,N\right)$ אזי $\left(F_{\omega}^{*}\right)_{x}\left(v\right)=F^{*}\left(\omega,x,v\right)$.

אינטגרל קווי מסוג שני: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega=\int_{a}^{b}\omega_{\gamma\left(t\right)}\left(\gamma'\left(t\right)\right)\mathrm{d}t$.

טענה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\int_{\gamma}:\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין תהא $\psi:\left[\alpha,\beta\right]\to\left[a,b\right]$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega=\int_{\gamma\circ\psi}\omega$.

העתקה לינארית שומרת אוריינטציה: העתקה $\varphi\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\det\left(\left[\varphi\right]_{\mathrm{st}}\right)>0$.

דיפאומורפיזם שומר אוריינטציה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי דיפאומורפיזם $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ עבורו $\mathcal{D}_{x}\left(f\right)$ שומרת אוריינטרציה לכל $x\in\mathcal{U}$.

אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה פשוטה אזי $O:\mathrm{Im}\left(\gamma\right)\to\mathbb{R}^{n}$ רציפה למקוטעין עבורה $O\left(x\right)\in\left\{ \pm\dot{\gamma}\left(\gamma^{-1}\left(x\right)\right)\right\}$.

הערה: אם המסילה לא פשוטה נפרק אותה מספר מסילות פשוטות ונחבר בסוף.

האוריינטציה הסטנדרטית של מסילה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה פשוטה C^{1} למקוטעין אזי $O:\mathrm{Im}\left(\gamma\right)\to\mathbb{R}^{n}$ המוגדרת $O\left(x\right)=\dot{\gamma}\left(\gamma^{-1}\left(x\right)\right)$.

טענה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי האוריינטציה הסטנדרטית של γ הינה אוריינטציה של $\mathrm{Im}\left(\gamma\right)$.

היפוך אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\overline{\gamma}:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ המוגדרת $\overline{\gamma}\left(t\right)=\gamma\left(a+b-t\right)$.

טענה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\int_{\overline{\gamma}}\omega=-\int_{\gamma}\omega$.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}\omega=-\int_{b}^{a}\omega$.

שרשור מסילות: תהא $\gamma_{1}:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\gamma_{2}:\left[b,c\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\left(\gamma_{1}\cup\gamma_{2}\right)\left(t\right)=\begin{cases}\gamma_{1}\left(t\right) & t\in\left[a,b\right]\\ \gamma_{2}\left(t\right) & t\in\left(b,c\right]\end{cases}$.

טענה: תהא $\gamma_{1}:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין תהא $\gamma_{2}:\left[b,c\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma_{1}\cup\gamma_{2}}\omega=\int_{\gamma_{1}}\omega+\int_{\gamma_{2}}\omega$.

טענה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר לכל $t\in\left[a,b\right]$ קיימת $\mathcal{U}$ סביבה של $\gamma\left(t\right)$ בה f הינה C^{1} אזי $\int_{\gamma}\mathrm{d}f=f\left(\gamma\left(b\right)\right)-f\left(\gamma\left(a\right)\right)$.

סימון: תהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\left\Vert \omega_{x}\right\Vert _{\infty}=\max\left\{ \omega_{x}\left(v\right)\mid\left(v\in T_{x}\left(\mathcal{M}\right)\right)\wedge\left(\left\Vert v\right\Vert =1\right)\right\}$.

טענה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega\leq\mathrm{Length}\left(\gamma\right)\cdot\max_{t\in\left[a,b\right]}\left\Vert \omega_{\gamma\left(t\right)}\right\Vert _{\infty}$.

הערה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ אזי ניתן לחשוב על ∂G בתור איחוד סופי זר של מסילות סגורות.

אוריינטציית רגל שמאל: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא N קו־אוריינטציה חיצונית של ∂G ותהיינה $\gamma_1\ldots\gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup\gamma_i=\partial G$ אזי אוריינטציה $O:\partial G\to\mathbb{R}^2$ עבורה $\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot O(x)=-N(x)$ לכל $x\in\partial G$.

טענה פרמטריזציה נורמלית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 אזי קיימות $\gamma_1\ldots\gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup\gamma_i=\partial G$ וכן לכל $i\in[m]$ ולכל $t\in\mathrm{Dom}(\gamma_i)$ מתקיים $\|\gamma_i'(t)\|=1$.

משפט גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $P,Q\in C^1(\mathcal{W})$ אזי $\int_{\partial G}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\int_G\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

מסקנה נוסחת גאוס: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין אזי $\mathrm{Area}(G)=\frac{1}{2}\int_{\partial G}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

העתקה לינארית אנטי סימטרית: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $T\in\mathrm{Hom}\left(V^k,\mathbb{R}\right)$ עבורה לכל $u_1\ldots u_k\in V$ ולכל $i,j\in[k]$ שונים מתקיים כי $T\left(\begin{pmatrix}u_1\\\vdots\\u_k\end{pmatrix}\right)=-T\left(R_{i\leftrightarrow j}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\\vdots\\u_k\end{pmatrix}\right)$.

הערה: יהיו $i,j\in[n]$ אזי $R_{i\leftrightarrow j}\in M_n(A)$ הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות i,j.

k־תבנית: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\bigwedge^k V^*=\left\{\omega\in\mathrm{Hom}\left(V^k,\mathbb{R}\right)\mid \omega\ \text{אנטי סימטרית}\right\}$.

סימון: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\bigwedge^0 V^*=\mathbb{R}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\det_n\in\bigwedge^n V^*$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהיו $u_1\ldots u_k\in V$ תלויים לינארית ותהא $\omega\in\bigwedge^k V^*$ אזי $\omega(u_1\ldots u_k)=0$.

מכפלת וודג'/מכפלת יתד: יהיו $\varphi_1\ldots\varphi_k\in V^*$ אזי $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\in\bigwedge^k V^*$ באשר $(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)(u_1\ldots u_k)=\det\left((\varphi_i(u_j))_{i,j\in[k]}\right)$ לכל $u_1\ldots u_k\in V$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהי $e_1\ldots e_n$ בסיס של V ויהי $k\in[n]$ אזי $\left\{e_{a_1}^*\wedge\ldots\wedge e_{a_k}^*\mid 1\le a_1<\ldots<a_k\le n\right\}$ בסיס של $\bigwedge^k V^*$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\dim\left(\bigwedge^k V^*\right)=\binom{n}{k}$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\bigwedge^n V^*=\mathrm{span}\{\det_n\}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $k,\ell\in\mathbb{N}$ אזי קיימת ויחידה $\wedge:\bigwedge^k V^*\times\bigwedge^\ell V^*\to\bigwedge^{k+\ell}V^*$ עבורה $(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)\wedge(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\wedge\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k$ לכל $\varphi_1\ldots\varphi_k,\psi_1\ldots\psi_\ell\in V^*$.

p־תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega:\mathcal{M}\to\mathrm{Hom}\left((\mathbb{R}^n)^p,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $\omega(x)\in\bigwedge^p T_x^*(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω p־תבנית דיפרנציאלית על $\mathcal{M}$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\omega_x=\omega(x)$.

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_x\in\mathrm{Hom}\left((\mathbb{R}^n)^p,\mathbb{R}\right)$ אלא $\omega_x\in\bigwedge^p T_x^*(\mathcal{M})$.

מכפלת וודג'/מכפלת יתד: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω p־תבנית דיפרנציאלית ותהא ν q־תבנית דיפרנציאלית אזי $\omega\wedge\nu$ הינה $(p+q)$־תבנית דיפרנציאלית באשר $(\omega\wedge\nu)_x=\omega_x\wedge\nu_x$.

סימון: תהא $a:[p]\to[k]$ באשר $1\le a_1<\ldots<a_k\le n$ אזי $\mathrm{d}x_{\{a_1\ldots a_p\}}=\mathrm{d}x_{a_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{a_p}$.

p־תבנית דיפרנציאלית C^m: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי p־תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ של $\mathcal{M}$ ולכל $f\in\mathcal{P}_p([k])\to(\mathcal{U}\to\mathbb{R})$ באשר $\omega=\sum_{I\in\mathcal{P}_p([k])}f_I\cdot\mathrm{d}x_I$ מתקיים $f_I\in C^m(\mathcal{U})$ לכל $I\in\mathcal{P}_p([k])$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\Omega^p(\mathcal{M})=\{\omega\mid \omega\ \text{הינה}\ p\text{־תבנית דיפרנציאלית}\ C^\infty\ \text{על}\ \mathcal{M}\}$.

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $F\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$ אזי $H^*:\Omega^p(\mathcal{N})\to\Omega^p(\mathcal{M})$ המוגדרת $H^*(\omega,x,v_1\ldots v_p)=\omega_{H(x)}\left(\mathcal{D}_x(H)\cdot v_1,\ldots,\mathcal{D}_x(H)\cdot v_p\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $H\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$ אזי $(H_\omega^*)_x(v)=H^*(\omega,x,v)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\mathcal{L}\subseteq\mathbb{R}^\ell$ יריעה תהא $H\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ותהא $G\in C^1(\mathcal{N},\mathcal{L})$ אזי $(G\circ H)^*=H^*\circ G^*$.

נגזרת חיצונית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\mathrm{d}:\Omega^p(\mathcal{U})\to\Omega^{p+1}(\mathcal{U})$ המוגדרת $\mathrm{d}\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_p([k])}f_I\cdot\mathrm{d}x_I\right)=\sum_{I\in\mathcal{P}_p([k])}(\mathrm{d}f_I\wedge\mathrm{d}x_I)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי d לינארית.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\omega\in\Omega^p(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega)=0$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\Omega(\mathcal{U})=\bigcup_{p\in\mathbb{N}_+}\Omega^p(\mathcal{U})$.

אופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות דיפרנציאליות: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\mathrm{b}:\Omega\left(\mathcal{U}\right)\to\Omega\left(\mathcal{U}\right)$ באשר $\mathrm{b}\left(\omega\right)\in\Omega^{p+1}\left(\mathcal{U}\right)$ לכל $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{U}\right)$ המקיימת $\mathrm{b}\left(\alpha_{1}\wedge\ldots\wedge\alpha_{k}\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(-1\right)^{i+1}\left(\alpha_{1}\wedge\ldots\wedge\alpha_{i-1}\wedge\mathrm{b}\left(\alpha_{i}\right)\wedge\alpha_{i+1}\wedge\ldots\wedge\alpha_{k}\right)$ לכל $\alpha_{1}\ldots\alpha_{k}\in\mathcal{U}^{*}$.

טענה כלל לייבניץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי d מקיימת את כלל לייבניץ.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $\mathrm{b}:\Omega\left(\mathcal{U}\right)\to\Omega\left(\mathcal{U}\right)$ לינארית המקיימת את כלל לייבניץ וכן $\mathrm{b}\left(\mathrm{b}\left(\omega\right)\right)=0$ לכל $\omega\in\Omega\left(\mathcal{U}\right)$ וכן $\mathrm{b}\left(f\right)=\mathrm{d}f$ לכל $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\mathrm{b}=\mathrm{d}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}\right)$ אזי $\mathrm{d}\left(F_{\omega}^{*}\right)=F_{\mathrm{d}\omega}^{*}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}\right)$ אזי $\left(F^{-1}\right)^{*}=\left(F^{*}\right)^{-1}$.

סימון: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}\right)$ אזי $F^{-*}=\left(F^{-1}\right)^{*}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהיינה $\left(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1}\right),\left(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2}\right)$ מפות אזי $\varphi_{2}^{*}\left(\mathrm{d}\left(\varphi_{2}^{-*}\left(\omega\right)\right)\right)=\varphi_{1}^{*}\left(\mathrm{d}\left(\varphi_{1}^{-*}\left(\omega\right)\right)\right)$.

הגדרה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\mathrm{d}\omega\in\Omega^{p+1}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים $\varphi^{-*}\left(\mathrm{d}\omega\right)=\mathrm{d}\left(\varphi^{-*}\omega\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\left(\mathcal{M},\varphi\right)$ מפה ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\mathrm{d}\omega=\varphi^{*}\left(\mathrm{d}\left(\varphi^{-*}\omega\right)\right)$.

הערה: בקבוצה $\mathbb{R}^{n}$ עצמה p־תבנית היא שקולה ל־p־תבנית דיפרנציאלית מהיות ומתקיים $T_{p}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\mathbb{R}^{n}$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim\left(V\right)=n$ אזי $\det_{n}=\mathrm{d}x_{1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{n}$.

אינגטרל: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U}\right)$ עבורה $f\cdot\mathrm{d}x_{1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{k}$ בעלת תומך קומפקטי אזי $\int_{\mathcal{U}}\left(f\cdot\mathrm{d}x_{1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{n}\right)=\int_{\mathcal{U}}f\left(x\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{k}$.

הערה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה ויהי $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי קיימת $f\in C\left(\mathcal{U}\right)$ עבורה $\omega=f\cdot\det_{k}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחומים יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{U}\right)$ בעלת תומך קומפקטי אזי $\int_{\mathcal{U}}\omega=\mathrm{sign}\left(\det\left(\mathcal{D}\left(T\right)\right)\right)\cdot\int_{\mathcal{V}}T_{\omega}^{*}$.

תבנית נפח: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה $\omega_{x}\neq0$ לכל $x\in\mathcal{M}$.

תבניות נפח שקולות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי תבניות נפח $\omega_{1},\omega_{2}\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורן קיימת $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר $f>0$ המקיימת $\omega_{2}=f\cdot\omega_{1}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי שקילות תבניות נפח על $\mathcal{M}$ הינו יחס שקילות.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה קשירה אזי קיימות לכל היותר 2 מחלקות שקילות של תבניות נפח על $\mathcal{M}$.

אוריינטציה של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה קשירה אזי מחלקת שקילות של תבניות נפח על $\mathcal{M}$.

האוריינטציה האוקלידית הסטנדרטית: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי מחלקת השקילות של $\det_{n}$.

תבנית נפח חיובית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה אזי תבנית נפח $\eta\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ השייכת לאוריינטציה.

מפה משמרת אוריינטציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה אזי מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ עבורה לכל η תבנית נפח חיובית על $\mathcal{U}$ מתקיים כי $\left(\varphi^{-1}\right)^{*}\left(\eta\right)$ תבנית נפח חיובית על $\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי קיימת מפה משמרת אוריינטציה $\left(\mathcal{U},\psi\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה תהיינה $\left(\mathcal{U},\varphi\right),\left(\mathcal{V},\psi\right)$ מפות משמרות אוריינטציה ותהא $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ בעלת תומך קומפקטי עבורה $\mathrm{supp}\left(\omega\right)\subseteq\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ אזי $\int_{\varphi\left(\mathcal{U}\right)}\varphi_{\omega}^{-*}=\int_{\psi\left(\mathcal{V}\right)}\psi_{\omega}^{-*}$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה משמרת אוריינטציה ותהא $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ בעלת תומך קומפקטי עבורה $\mathrm{supp}\left(\omega\right)\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\int_{\mathcal{M}}\omega=\int_{\varphi\left(\mathcal{U}\right)}\varphi_{\omega}^{-*}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא ω k־תבנית יהיו $\left\{ \left(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i}\right)\right\} _{i=1}^{\infty},\left\{ \left(\mathcal{V}_{i},\psi_{i}\right)\right\} _{i=1}^{\infty}$ כיסויים של $\mathrm{supp}\left(\omega\right)$ יהי $\left\{ \rho_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}$ פירוק יחידה של $\left\{ \left(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i}\right)\right\} _{i=1}^{\infty}$ ויהי $\left\{ \eta_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}$ פירוק יחידה של $\left\{ \left(\mathcal{V}_{i},\psi_{i}\right)\right\} _{i=1}^{\infty}$ אזי $\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathcal{M}}\left(\rho_{i}\cdot\omega\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathcal{M}}\left(\eta_{i}\cdot\omega\right)$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא ω k־תבנית יהי $\left\{ \left(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i}\right)\right\} _{i=1}^{\infty}$ כיסוי של $\mathrm{supp}\left(\omega\right)$ ויהי $\left\{ \rho_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}$ פירוק יחידה של $\left\{ \left(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i}\right)\right\} _{i=1}^{\infty}$ אזי $\int_{\mathcal{M}}\omega=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathcal{M}}\left(\rho_{i}\cdot\omega\right)$.

משפט גרין בשפה של תבנית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ וכן ∂G הינה C^{1} למקוטעין תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא ω 1־תבנית על $\mathcal{W}$ אזי $\int_{\partial G}\omega=\int_{G}\mathrm{d}\omega$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

1־תבנית דיפרנציאלית סגורה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה $\mathrm{d}\omega=0$.

1־תבנית דיפרנציאלית מדוייקת: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה קיימת $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ המקיימת $\omega=\mathrm{d}f$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ מדוייקת אזי ω סגורה.

1־תבנית דיפרנציאלית משמרת: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה לכל מסילה סגורה C^{1} למקוטעין γ מתקיים $\int_{\gamma}\omega=0$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי (ω משמרת)$\Longleftrightarrow$(קיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין מתקיים $\int_{\gamma}\omega=f\left(\gamma\left(b\right)\right)-f\left(\gamma\left(a\right)\right)$).

טענה: תהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ סגורה אזי ω משמרת.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי (ω מדוייקת)$\Longleftrightarrow$(ω משמרת).

מסקנה: תהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי (ω סגורה)$\Longleftrightarrow$(ω מדוייקת)$\Longleftrightarrow$(ω משמרת).

שפה גאומטרית/קצה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\partial_{g}\mathcal{M}=\overline{\mathcal{M}}\backslash\mathcal{M}$.

נקודת קצה חלקה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $x\in\partial_{g}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה קיים $\delta>0$ וקיימת יריעה $\mathcal{N}\subseteq B_{\delta}\left(x\right)$ באשר $\mathcal{M}\cap B_{\delta}\left(x\right)\subseteq\mathcal{N}$ וקיימת $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ וקיימת פרמטריזציה טובה $r:\mathcal{V}\to\mathcal{N}$ עבורן $r^{-1}\left(x\right)\in\partial^{\text{sm}}\left(r^{-1}\left(\mathcal{N}\right)\right)$.

יריעה בעלת קצה חלק: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה כל $x\in\partial_{g}\mathcal{M}$ הינה נקודת קצה חלקה.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית בעלת קצה חלק אזי $\partial_{g}\mathcal{M}$ יריעה $(k-1)$־מימדית.

אוריינטציה מושרית על קצה חלק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית בעלת קצה חלק יהי N קו־אוריינטציה ותהא $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ תבנית נפח אזי $\omega^{\partial}\in\Omega^{k-1}\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $\omega_{x}^{\partial}\left(u_{1}\ldots u_{k-1}\right)=\omega_{x}\left(N\left(x\right),u_{1}\ldots u_{k-1}\right)$.

משפט סטוקס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית חסומה בעלת קצה חלק ותהא $\omega\in\Omega^{k-1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\int_{\mathcal{M}}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial_{g}\mathcal{M}}\omega$.