פולינום טיילור : תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על a אזי $P_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(x-a\right)^{k}$.

שארית טיילור : תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על a אזי $R_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=f\left(x\right)-P_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)$.

טור טיילור : תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ חלקה על a אזי $P\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(x-a\right)^{k}$.

פונקציה קדומה : תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.

טענה : תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $\left(G'=f\right)\iff\left(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c\right)$.

חלוקה : יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\left\{x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ המקיימות $a=x_{0}<x_{1}\ldots<x_{n-1}<x_{n}=b$.

סימון : תהא $\left\{x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\Delta x_{i}=x_{i}-x_{i-1}$.

מדד העדינות : תהא $\Pi=\left\{x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i=1}^{n}\left|\Delta x_{i}\right|$.

עידון : תהא Π_{1} חלוקה אזי חלוקה Π_{2} המקיימת $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$.

טענה : תהא Π_{1} חלוקה וכן Π_{2} עידון אזי $\lambda\left(\Pi_{2}\right)\le\lambda\left(\Pi_{1}\right)$.

נקודות מתאימות : תהא $\left\{x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\left\{t_{1}\ldots t_{n}\right\}$ המקיימות $\forall i\in\left\{1\ldots n\right\}.t_{i}\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]$.

סכום רימן : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $S\left(f,\Pi,\left\{t_{i}\right\}\right)=\sum f\left(t_{i}\right)\Delta x_{i}$.

אינטגרביליות רימן : $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\left\{t_{i}\right\}$ מתקיים $\left|S\left(f,\Pi,\left\{t_{i}\right\}\right)-L\right|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt$.

הערה : יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(\varphi\right)d\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

סימון : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt=\int_{[a,b]}f\left(t\right)dt=\int_{[a,b]}f=\int_{a}^{b}f$.

הערה : כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון : $R\left(\left[a,b\right]\right)=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid\text{אינטגרבילית רימן } f\right\}$.

הערה : ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S\left(f,\Pi,\left\{t_{i}\right\}\right)$.

טענה : יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_{a}^{b}c\cdot dt=c\left(b-a\right)$.

טענה : $D\left(x\right)\notin R\left(\mathbb{R}\right)$.

משפט : תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{\left[x_{i},x_{i-1}\right]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

סכום דרבו תחתון : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{\left[x_{i},x_{i-1}\right]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

למה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sup_{\left\{t_{i}\right\}\text{נקודות מתאימות}}S\left(f,\Pi,\left\{t_{i}\right\}\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\inf_{\left\{t_{i}\right\}\text{נקודות מתאימות}}S\left(f,\Pi,\left\{t_{i}\right\}\right)$.

למה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.

מסקנה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_{1},Π_{2} חלוקות אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)$.

האינטגרל העליון : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}\left(f\right)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

האינטגרל התחתון : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה : תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\overline{I}\left(f\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי $\omega\left(f,J\right)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה ויהי $x_{0}\in J$ אזי (f רציפה על x_{0})$\Longleftrightarrow\left(\lim_{\delta\to0}\omega\left(f,\left[x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right]\right)=0\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow\left(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}\left(I\right).\omega\left(f,I\right)<\varepsilon\right)$.

תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right)\Delta x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p_{1}\ldots p_{m}\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\ge\overline{I}\left(f\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: $C\left(\left[a,b\right]\right)\subseteq R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $f_{\upharpoonright_{\left[a,b\right]}}\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\wedge\left(f\in R\left(\left[b,c\right]\right)\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in\left[a,d\right]$ עבורה $f\in R\left(\left[a,d\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$ אזי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\left\{ \left(a_{i},b_{i}\right)\right\} _{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_{i},b_{i}\right)$ וכן $\sum\left(b_{i}-a_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\left|A\right|\le\aleph_{0}$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_A}=g_{\restriction_A}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases} y_i & x\in\{b_1\dots b_m\}\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^c g(x)\,dx$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,c])$ ויהי $b\in(a,c)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $f\ge 0$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\le\sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R([a,b])$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ אזי $F\in C([a,b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(x_0)\int_a^b g(x)\,dx$.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int_a^{x_0} g(x)\,dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)\,dx$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ אזי $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ יהיו $x_1\dots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\dots x_n\}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]|_a^b=f(b)-f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

הלמה של בונה: תהא $\substack{f\in C([a,b])\\ f\in C^1((a,b))}$ עבורה $(f'\ge 0)\vee(f'\le 0)$ ותהא $g\in C([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int_a^{x_0} g(x)\,dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)\,dx$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ אזי $R_n(f,a)(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\substack{\varphi\in[a,b]^{[\alpha,\beta]}\\ \varphi\in C^1([\alpha,\beta])}$ המקיימת $\substack{\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx=-\int_0^{2\pi} f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\right|\le\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1}(k-2n)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^m\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^m\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\dots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\dots(2n-1)\cdot(2n-1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $f\in R([a,b])$. $\forall b\in[a,\infty)$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $f\in R([a,b])$. $\forall a\in(-\infty,b]$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.

- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.\left(a<b\right)\implies\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)$ אזי $\int_{-\infty}^{\infty}f=\int_{-\infty}^{0}f+\int_{0}^{\infty}f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=\left(a,b\right]$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[c,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim\limits_{r\to a^{+}}\int_{r}^{b}f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=\left[a,b\right)$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=\lim\limits_{r\to b^{-}}\int_{a}^{r}f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R\left(I\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{I}\mid \int_{I}f \text{ קיים וסופי}\right\}$.

הערה: מכאן כל המשפטים יהיו חד צדדים ימינה אך תקפים לכל סוגי הקטעים עם שינויים קלים.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\left\{ \infty\right\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{\omega}\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\int_{a}^{\omega}f+\beta\int_{a}^{\omega}g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהי $c\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{a}^{c}f+\int_{c}^{\omega}f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_{a}^{\omega}f\ge\int_{a}^{\omega}g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ על $\left[a,\omega\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\lim_{b\to\omega}F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ אזי $\int_{a}^{\omega}f'g=\lim_{b\to\omega}\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{\omega}fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $\substack{\varphi\in\left[a,\omega\right)^{\left[c,\eta\right)}\\ \varphi\in C^{1}\left(\left[c,\eta\right)\right)}$ המקיימת $\substack{\varphi\left(c\right)=a\\ \lim_{b\to\eta}\varphi\left(b\right)=\omega}$ אזי $\int_{a}^{\omega}f=\int_{c}^{\eta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in\left(a,\omega\right).\forall b_{1},b_{2}\in\left[B,\omega\right).\left|\int_{b_{1}}^{b_{2}}f\right|<\varepsilon\right)\iff\left(f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$ אינו מתכנס אך $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ עבורה $\int_{a}^{\omega}f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_{a}^{\omega}f\right|\le\int_{a}^{\omega}\left|f\right|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)\iff$ ($F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ חסומה על $\left[a,\omega\right)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימות $\forall b\in\left(a,\omega\right).f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}g<\infty\right)\implies\left(\int_{a}^{\omega}f<\infty\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{\left[a,\omega\right)}$ המקיימות $\forall b\in\left(a,\omega\right).f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_{a}^{\omega}f=\infty\right)\implies\left(\int_{a}^{\omega}g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\left(\int_{1}^{\infty}f<\infty\right)\iff\left(\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{\left[1,\infty\right)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^{\infty}f\left(n\right)\le\int_{1}^{\infty}f\le\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:\left(1,\infty\right)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$.

טענה: $\lim_{s\to1^{+}}\zeta\left(s\right)\left(s-1\right)=1$.

משפט אבל: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)\cap R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $f\in C^{1}\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_{a}^{\omega}fg<\infty$.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_{a}^{x}g$ חסומה ותהא $f\in C^{1}\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $\int_{a}^{\omega}fg<\infty$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^{n}}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

שאיפה נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^{I}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\iff\left(\forall x\in I.\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

סימון: $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)\iff\left(f_{n}\xrightarrow{\text{p.w.}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in C\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in R\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in R\left(I\right)\right)$.

- **גבול האינטגרל**: נניח $\underset{\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I)}{f\in R(I)}$ אזי $\left(\int_I f=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)$.
- **נגזרת**: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(f'(x)=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=L\right)$.

שאיפה במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\right)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.|f_n(x)|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(g_n\xrightarrow{\text{u}}g\right)\wedge\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{\text{u}}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C(I)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in C(I)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists B\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in B}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $\underset{\forall n<m.f_m<f_n}{f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f}$ באשר $f\in C([a,b])$ אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ באשר $f\in C([a,b])$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R([a,\omega))$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi\in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.|f_n|\le\Psi$ אזי $\left(\forall b\in[a,\omega).f\in R([a,b])\right)\wedge\left(\int_a^{\omega}f\text{ מתכנסת בהחלט}\right)\wedge\left(\int_a^{\omega}f=\lim_{n\to\infty}\int_a^{\omega}f_n\right)$.

טענה: $\int_0^{\infty}e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: תהיינה $f_n\in C^1([a,b])$ עבורה $f_n'\xrightarrow{\text{u}}g$ ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ וכן $f'=g$.

סימון: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n}f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty}f_n=f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b\sum_{i=0}^{\infty}u_n=\sum_{i=0}^{\infty}\int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}u_i$.

משפט M בוחן של ויירשטראס: תהיינה $u_n\in\mathbb{R}^I$ ותהא $M\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}M_n<\infty$ וכן $\forall x\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.|u_n(x)|\le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m\left(b_k-b_{k+1}\right)$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n}f_ig_i$ מתכנסת במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n\xrightarrow{\text{u}}0$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n}f_ig_i$ מתכנסת במ"ש.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a\in(0,1)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cos\left(b^k\pi x\right)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0(4^kx)}{4^k}\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0(x+1)=\triangle_0(x)\right)\wedge\left(\triangle_0(x)=\left\{\begin{smallmatrix}x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1-x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{smallmatrix}\right)\right)$.

טענה: $\triangle_n\xrightarrow{u}\triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי $\exists p\in\mathbb{R}[x].\max_{[a,b]}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ אזי קיימת $p_n\in\mathbb{R}[x]$ עבורה $p_n\xrightarrow{u}f$.

הגדרה: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n\xrightarrow{u}f$.

משפט: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q\in\mathbb{R}$ ויהי $r<|q|$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|,|r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי קיים $R\in[0,\infty]$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases}\text{מתכנס} & x\in(-R,R)\\ \text{מתבדר} & x\notin[-R,R]\end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי $R\in[0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right)\Longrightarrow(R=\infty)\right)\wedge\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right)\Longrightarrow(R=0)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}a_{k+m}x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty}a_k<0$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־$-R$).

סכים לפי אבל: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,(A)$.

התכנסות צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n\,(C)$.

סכים לפי צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\,(C)$.

סימון: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell\,(C)$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\,(C)$.

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\,(C)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\,(A)$.

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho\,(A)$ וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.