הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע אזי $|X|\le|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ועל אזי $|X|=|Y|$.

סימון: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $\neg(|X|=|Y|)$ אזי $|X|\neq|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|X|\neq|Y|$ אזי $|X|<|Y|$.

הערה: נקרא לביטוי $|X|$ העוצמה של X.

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין (קש"ב): תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|Y|\le|X|$ אזי $|X|=|Y|$.

סימון: $\aleph_0=|\mathbb{N}|$.

קבוצה בת מנייה: קבוצה X עבורה $|X|=\aleph_0$.

קבוצה סופית: קבוצה A עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $|\{0,\ldots,n-1\}|=n$.

קבוצה אינסופית: קבוצה A עבורה לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$.

טענה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אינסופית אזי B בת מנייה.

מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהא A בת מנייה תהא B קבוצה ותהא $f:A\to B$ על אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\cup B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות בנות מנייה אזי $\bigcup_{i=1}^n A_i$ בת מנייה.

טענה: תהא $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i\in\mathbb{N}$ ותהא $\langle f_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת פונקציות באשר $f_n:\mathbb{N}\to A_n$ על לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^\infty A_i$ סופית או בת מנייה.

מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid(a\in A)\wedge(b\in B)\}$.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\times B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ בנות מנייה אזי $A_1\times\ldots\times A_n$ בת מנייה.

הגדרה: תהא A קבוצה אזי $A^1=A$.

הגדרה: תהא A קבוצה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $A^n=A\times A^{n-1}$.

טענה: $\bigcup_{n=1}^\infty\mathbb{N}^n$ בת מנייה.

מסקנה: $|\{A\subseteq\mathbb{N}\mid \text{סופית } A\}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

מספר אלגברי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו קיים $p\in\mathbb{Z}[x]$ המקיים $p(a)=0$.

מספר טרנסצנדנטי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו לכל $p\in\mathbb{Z}[x]$ מתקיים $p(a)\neq0$.

משפט קנטור: $|\{a\in\mathbb{C}\mid \text{אלגברי } a\}|=\aleph_0$.

יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי $\preccurlyeq\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ באשר

- רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $x\preccurlyeq x$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq z$ אזי $x\preccurlyeq z$.
- אנטי סימטריות חלשה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq x$ אזי $x=y$.

יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי $\prec\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\prec\rangle$ באשר

- אנטי רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $\neg(x\prec x)$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\prec y$ וכן $y\prec z$ אזי $x\prec z$.
- אנטי סימטריות חזקה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\prec y$ אזי $\neg(y\prec x)$.

יחס סדר קווי חלקי/חלש: יחס סדר חלקי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\vee(y\preccurlyeq x)$.

יחס סדר קווי חזק: יחס סדר חזק $\langle A,\prec\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\prec y)\vee(y\prec x)\vee(x=y)$.

טענה: $\langle\mathbb{N},\le_{\mathbb{N}}\rangle$ יחס סדר קווי חלקי.

טענה: תהא A קבוצה אזי $\langle\mathcal{P}(A),\subseteq\rangle$ יחס סדר חלקי.

פונקציה שומרת סדר: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים אזי $f:A\to B$ חח"ע עבורה לכל $a,b\in A$ מתקיים $(aRb)\Longleftrightarrow(f(a)Sf(b))$.

סדרים חלקיים איזומורפיים: סדרים $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ עבורם קיימת $\pi:A\to B$ הפיכה שומרת סדר.

סימון: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים איזומורפיים אזי $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$.

יחס סדר קווי בעל איבר ראשון/מינימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $a\in A$ באשר לכל $b\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון $a\in A$ אזי $\min(A)=a$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle B,S\rangle\simeq\langle A,R\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר ראשון.

יחס סדר קווי בעל איבר אחרון/מקסימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $b\in A$ באשר לכל $a\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון $a\in A$ אזי $\max(A)=a$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle B,S\rangle\simeq\langle A,R\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר אחרון.

יחס סדר קווי צפוף: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ המקיימים xRy קיים $z\in A$ עבורו xRz וכן zRy.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי צפוף ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle B,S\rangle\simeq\langle A,R\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ צפוף.

טענה: $\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.

מסקנה: $\langle\mathbb{N},\leq_{\mathbb{N}}\rangle\not\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A,\prec\rangle$ סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\prec\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},<_{\mathbb{Q}}\rangle$.

חסם מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\overline{B}_X=\{a\in A\mid X \text{ חסם מלעיל של } a\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\overline{B}_X\neq\varnothing$.

חסם מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\underline{B}_X=\{a\in A\mid X \text{ חסם מלרע של } a\}$.

קבוצה חסומה מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\underline{B}_X\neq\varnothing$.

קבוצה חסומה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ בעלת חסם מלרע וחסם מלעיל.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\sup(X)=\min\left(\overline{B}_X\right)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\inf(X)=\max\left(\underline{B}_X\right)$.

יחס סדר קווי שלם: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $X\subseteq A$ חסומה מלעיל קיים $\sup(X)$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי ($\langle A,R\rangle$ סדר שלם)$\Longleftrightarrow$(לכל $X\subseteq A$ חסומה קיימים $\sup(X),\inf(X)$).

קבוצה צפופה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה לכל $x,y\in A$ באשר xRy קיים $z\in X$ המקיים xRz וכן zRy.

השלמה של יחס סדר קווי חלקי: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי סדר חלקי $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ המקיים

- $P\subseteq L$.
- לכל $x,y\in P$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\Longleftrightarrow(x\sqsubseteq y)$.
- $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
- $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ צפוף ב־$\langle L,\sqsubseteq\rangle$.

משפט יחידות השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה $\langle L,\sqsubseteq\rangle,\langle L^*,\sqsubseteq^*\rangle$ השלמות אזי קיים איזומורפיזם $\pi:L\to L^*$ עבורו $\pi(p)=p$ לכל $p\in P$.

משפט קיום השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.

חתך דדקינד: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $A,B\subseteq P$ לא ריקות אזי $\langle A,B\rangle$ באשר

- $A\cap B=\varnothing$.
- $A\cup B=P$.
- לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ מתקיים $a\preccurlyeq b$.
- $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]=\langle(-\infty,p),[p,\infty)\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]$ חתך דדקינד.

הגדרה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $\langle A,B\rangle,\langle C,D\rangle$ חתכי דדקינג באשר $A\subseteq C$ אזי $\langle A,B\rangle\preccurlyeq\langle C,D\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\{[p]\mid p\in P\},\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$.

הערה: נשתמש בהתאמה מעל בתור שיכון של P בחתכי הדדקינד שלה.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\mathrm{Ded}(P)=\{\langle A,B\rangle\mid \text{חתך דדקינד } \langle A,B\rangle\}$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle P, \preccurlyeq\rangle$ צפופה ב־$\langle \text{Ded}\left(P\right), \preccurlyeq\rangle$.

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle \text{Ded}\left(P\right), \preccurlyeq\rangle$ סדר שלם.

טענה: יהי $\langle A, \prec\rangle$ סדר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון $\langle B, \sqsubset\rangle$ עבורו קיימת $f : A \to B$ שומרת סדר.

מספרים ממשיים: $\langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}\rangle$ הינה ההשלמה של $\langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט: יהי $\langle P, \preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי $\langle P, \preccurlyeq\rangle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}\rangle$.

טענה: $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$.

קבוצת החזקה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}\left(X\right) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$.

סימון: תהא X קבוצה אזי ${}^{X}2 = \{f \mid f : X \to \{0, 1\}\}$.

טענה: תהא X קבוצה אזי $|\mathcal{P}\left(X\right)| = \left|{}^{X}2\right|$.

משפט קנטור: תהא X קבוצה אזי $|X| < |\mathcal{P}\left(X\right)|$.

טענה: $|\mathbb{R}| = \left|{}^{\mathbb{N}}2\right|$.

קבוצת קנטור: נגדיר $C_0 = [0, 1]$ ונגדיר $C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mathcal{C} = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$.

טענה: $\left(\mathcal{C}, <_{\mathbb{R}}\right) \simeq \left({}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}, <_{\text{lex}}\right)$.

טענה: תהיינה A, B קבוצות זרות ותהיינה C, D קבוצות זרות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \cup B| = |C \cup D|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות זרות אזי $|A| + |B| = |A \cup B|$.

טענה: תהא A קבוצה אזי $|A \times \{0\}| = |A|$.

הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}|$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \times B| = |C \times D|$.

הגדרה כפל: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| \cdot |B| = |A \times B|$.

הערה: נאמר כי κ היא עוצמה אם קיימת קבוצה A עבורה $|A| = \kappa$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי ${}^{B}A = \{f \mid f : B \to A\}$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $\left|{}^{B}A\right| = \left|{}^{D}C\right|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A|^{|B|} = \left|{}^{B}A\right|$.

מסקנה: $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$ וכן $\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)}$ וכן $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu})$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\aleph_0 + n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0^n = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $2^{\aleph_0} + n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $2^{\aleph_0} \cdot n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\left(2^{\aleph_0}\right)^n = 2^{\aleph_0}$ וכן $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ וכן $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $|\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{N} \to \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $\left|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}\right| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא B קבוצה באשר $|B| = 2^{\aleph_0}$ ותהא $A \subseteq B$ באשר $|A| \leq \aleph_0$ אזי $|B \backslash A| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{C} \mid \text{מספר טרנסצנדנטי } a\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{R} \mid \text{אי־רציונלי } a\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \wedge (\text{רציפה } f)\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \wedge (\text{מונוטונית } f)\}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $|\{A \mid (A \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\text{פתוחה } A)\}| = 2^{\aleph_0}$.

יחס סדר טוב: סדר קווי $\langle W, \prec\rangle$ עבורו לכל $A \subseteq W$ באשר $A \neq \varnothing$ קיים איבר קטן ביותר.

טענה: $\langle\mathbb{N},<_{\mathbb{N}}\rangle$ סדר טוב.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\langle\mathbb{N}_{\le n},<_{\mathbb{N}_{\le n}}\right\rangle$ סדר טוב.

רישה של יחס סדר טוב: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב אזי $S\subseteq W$ המקיימת

- $S\ne W$.
- לכל $a\in S$ ולכל $b\in W$ אם $b\prec a$ אזי $b\in S$.

סימון: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a\in W$ אזי $W\left[a\right]=\left\{b\in W\mid b\prec a\right\}$.

מסקנה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a\in W$ אזי $W\left[a\right]$ רישה ב־W.

טענה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ותהא S רישה ב־W אזי קיים $x\in W$ עבורו $S=W\left[x\right]$.

טענה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ותהא $f:W\to W$ שומרת סדר אזי $\left(x\prec f\left(x\right)\right)\vee\left(x=f\left(x\right)\right)$ לכל $x\in W$.

מסקנה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a\in W$ אזי $W\not\simeq W\left[a\right]$.

מסקנה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $f:W\to W$ איזומורפיזם אזי $f=\mathrm{Id}$.

מסקנה: יהיו $\langle W,\prec\rangle,\langle A,\sqsubset\rangle$ יחסי סדר טובים ויהיו $f,g:W\to A$ איזומורפיזמים אזי $f=g$.

משפט ההשוואה: יהיו $\langle W,\prec\rangle,\langle A,\sqsubset\rangle$ יחסי סדר טובים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\langle W,\prec\rangle\simeq\langle A,\sqsubset\rangle$.
- קיים $w\in W$ עבורו $\langle W\left[w\right],\prec\rangle\simeq\langle A,\sqsubset\rangle$.
- קיים $a\in A$ עבורו $\langle W,\prec\rangle\simeq\langle A\left[a\right],\sqsubset\rangle$.

קבוצה טרנזיטיבית: קבוצה X עבורה לכל $A\in X$ ולכל $y\in A$ מתקיים $y\in X$.

סודר: קבוצה טרנזיטיבית X עבורה $\langle X,\in\rangle$ יחס סדר טוב.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha\cup\{\alpha\}$ סודר.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha\notin\alpha$.

טענה: יהי α סודר ויהי $x\in\alpha$ אזי x סודר.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $\beta\notin\alpha$.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\beta\subsetneq\alpha$ אזי $\alpha\in\beta$.

טענה משפט ההשוואה: יהיו α,β סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\alpha=\beta$.
- $\alpha\in\beta$.
- $\beta\in\alpha$.

טענה: תהא S קבוצה לא ריקה של סודרים אזי $\min\left(S\right)$ קיים.

הגדרה: $\mathcal{O}_n=\left\{\alpha\mid\text{סודר }\alpha\right\}$.

סימון: $\mathcal{O}_n=\mathrm{Ord}$.

טענה פרדוקס גוראלי־פורטי: $\mathcal{O}_n$ אינה קבוצה.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $\left(\alpha\cup\{\alpha\}\in\beta\right)\vee\left(\alpha\cup\{\alpha\}=\beta\right)$.

סימון: יהי α סודר אזי $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$.

טענה: תהא S קבוצת סודרים אזי קיים סודר α עבורו לכל $\beta\in S$ מתקיים $\beta\in\alpha$.

טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב אזי סודר α עבורו $\langle\alpha,\in\rangle\simeq\langle W,\prec\rangle$.

משפט: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל־$\langle W,\prec\rangle$.

סימון: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי α סודר טיפוס של $\langle W,\prec\rangle$ אזי $\mathrm{otp}\left(\langle W,\prec\rangle\right)=\alpha$.

אקסיומת ההחלפה: תהא P נוסחה באשר לכל קבוצה X קיימת ויחידה קבוצה Y עבורה $P\left(X,Y\right)$ אזי לכל קבוצה A קיימת קבוצה B באשר לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ המקיים $P\left(a,b\right)$. זוהי אינה טענה

אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי $\left\{a\in A\mid P\left(a\right)\right\}$ קבוצה. זוהי אינה טענה

משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר α מתקיים $\left(\forall\beta\in\alpha.P\left(\beta\right)\right)\Longrightarrow\left(P\left(\alpha\right)\right)$ אזי לכל סודר γ מתקיים $P\left(\gamma\right)$.

סודר עוקב: סודר α עבורו קיים סודר $\beta\in\alpha$ המקיים $\alpha=\beta+1$.

סודר גבולי: סודר α עבורו לכל סודר $\beta\in\alpha$ מתקיים $\alpha\ne\beta+1$.

משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת

- $P(\varnothing)$.
- לכל סודר α מתקיים $P(\alpha)\implies P(\alpha+1)$.
- לכל סודר גבולי α מתקיים $(\forall\beta\in\alpha.P(\beta))\implies(P(\alpha))$.

אזי לכל סודר γ מתקיים $P(\gamma)$.

אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה S באשר $\varnothing\in S$ וכן לכל $x\in S$ מתקיים $x+1\in S$. זוהי אינה טענה

טענה: תהא S קבוצה באשר $\varnothing\in S$ וכן לכל $x\in S$ מתקיים $x+1\in S$ ויהי δ הסודר הראשון באשר $\delta\notin S$ אזי δ סודר גבולי.

סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו $\varnothing$ הינו ω.

סימון: $0=\varnothing$.

הגדרה: $\mathbb{N}=\omega$.

הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה $n+1=n\cup\{n\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

סימון: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $\alpha<\beta$.

הגדרה חיבור: יהי α סודר אזי

- $\alpha+0=\alpha$.
- יהי β סודר אזי $\alpha+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+1$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha+\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\alpha+\gamma\le\beta+\gamma$.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי קיים ויחיד סודר γ עבורו $\alpha+\gamma=\beta$.

טענה: $0+\omega=\omega$ וכן $1+\omega=\omega$ וכן $\omega+1>\omega$.

הגדרה כפל: יהי α סודר אזי

- $\alpha\cdot0=0$.
- יהי β סודר אזי $\alpha\cdot(\beta+1)=(\alpha\cdot\beta)+\alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha\cdot\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha\cdot\gamma)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ וכן $\gamma\neq0$ אזי $\gamma\cdot\alpha<\gamma\cdot\beta$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\alpha\cdot\gamma\le\beta\cdot\gamma$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\alpha(b+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

טענה: $0\cdot\omega=0$ וכן $1\cdot\omega=\omega$ וכן $2\cdot\omega=\omega$ וכן $\omega\cdot2=\omega+\omega$.

טענה: יהי $n<\omega$ אזי $\omega+\omega>\omega+n$.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha+\omega$ סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי α סודר אזי

- $\alpha^0=1$.
- יהי β סודר אזי $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha^\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha^\gamma)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ וכן $\gamma>1$ אזי $\gamma^\alpha<\gamma^\beta$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\alpha^\gamma\le\beta^\gamma$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

טענה: $1^\omega=1$ וכן $2^\omega=\omega$ וכן $\omega^1=\omega$ וכן $\omega^2=\omega\cdot\omega$ וכן $\omega^2>2^\omega$.

טענה: יהי α סודר אזי $\omega^\alpha\ge\alpha$.

טענה צורת קנטור נורמלית: יהי α סודר אזי קיים ויחיד $k<\omega$ קיימים ויחידים $\beta_1\ldots\beta_k$ סודרים באשר $\beta_i>\beta_j$ לכל $i<j$ וקיימים ויחידים $n_1\ldots n_k\in\mathbb{N}_+$ עבורם $\alpha=\sum_{i=1}^k\omega^{\beta_i}\cdot n_i$.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha>0$ וכן $\beta>\alpha$ אזי קיימים ויחידים סודרים ξ,δ עבורם $\beta=\alpha\cdot\delta+\xi$ וכן $\xi<\alpha$.

מונה: סודר α עבורו לכל $\beta<\alpha$ מתקיים $|\beta|<|\alpha|$.

סימון: $\aleph_0=\omega$.

הערה: ההגדרה מלעיל מתלכדת עם היות $|\omega|=\omega$, לשם נוחות נשתמש פה בסימון זה ובהמשך נצדיקו.

טענה: יהיו α,β סודרים בני מנייה אזי $\alpha+\beta,\alpha\cdot\beta,\alpha^{\beta}$ סודרים בני מנייה.

טענה: קיים סודר α המקיים $\omega<\alpha$ באשר α אינו בן מנייה.

טענה: יהי δ סודר אזי קיים מונה κ באשר $\delta<\kappa$.

סימון: יהי α סודר אזי α^{+} הינו המונה הראשון עבורו $\alpha<\alpha^{+}$.

הגדרה $\aleph$: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha+1}=\aleph_{\alpha}^{+}$.

הגדרה $\aleph$: יהי α סודר גבולי אזי $\aleph_{\alpha}=\bigcup_{\beta<\alpha}\aleph_{\beta}$.

טענה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha}$ מונה.

טענה: יהי κ מונה אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $\kappa=\aleph_{\alpha}$.

סימון: יהי α סודר אזי $\omega_{\alpha}=\aleph_{\alpha}$.

סימון: יהיו δ,α סודרים אינסופיים באשר $|\delta|=|\aleph_{\alpha}|$ אזי $|\delta|=\aleph_{\alpha}$.

הערה: כאשר מבצעים פעולות בין מונים הכוונה היא לפי ההגדרה של עוצמות, כאשר מבצעים פעולות בין סודרים הכוונה היא לפי ההגדרה של סודרים.

הגדרה: יהי α סודר אזי יחס סדר $\langle\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha},\lhd\rangle$ באשר לכל $(\delta,\kappa),(\beta,\gamma)\in\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha}$ מתקיים $(\delta,\kappa)\lhd(\beta,\gamma)$ אם"ם אחד מהבאים מתקיים

- $\max(\beta,\gamma)<\max(\delta,\kappa)$.
- $\max(\beta,\gamma)=\max(\delta,\kappa)$ וכן $\beta<\delta$.
- $\max(\beta,\gamma)=\max(\delta,\kappa)$ וכן $\beta=\delta$ וכן $\gamma<\kappa$.

טענה: יהי α סודר אזי $\langle\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha},\lhd\rangle$ יחס סדר טוב.

משפט: יהי α סודר אזי $\mathrm{otp}(\langle\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha},\lhd\rangle)=\aleph_{\alpha}$.

מסקנה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\alpha}=\aleph_{\alpha}$.

משפט: יהיו κ,λ מונים אינסופיים אזי

- $\kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.
- $\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.

מסקנה: יהיו α,β סודרים אזי

- $\aleph_{\alpha}+\aleph_{\beta}=\aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$.
- $\aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\beta}=\aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$.

פונקציית בחירה: תהא S קבוצה באשר $\varnothing\notin S$ אזי $f:S\to A$ עבורה לכל $X\in S$ מתקיים $f(X)\in X$.

אקסיומת הבחירה (AC): תהא S קבוצה באשר $\varnothing\notin S$ אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S. זוהי אינה טענה

טענה: תהא $A\neq\varnothing$ אזי (קיימת $f:A\to\mathbb{N}$ חח"ע)$\iff$(קיימת $g:\mathbb{N}\to A$ על).

משפט הסדר הטוב/משפט צרמלו: תהא A קבוצה עבורה קיימת פונקציית בחירה על $\mathcal{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$ אזי קיים סדר טוב על A.

הגדרה משפט הסדר הטוב: תהא A קבוצה אזי קיים סדר טוב על A. זוהי אינה טענה

משפט: (AC)$\iff$(משפט הסדר הטוב).

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $|A|=\aleph_{\alpha}$. דורש AC

השערת הרצף הפרטית (CH): $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. דורש AC, זוהי אינה טענה

השערת הרצף הכללית (GCH): יהי α סודר אזי $2^{\aleph_{\alpha}}=\aleph_{\alpha+1}$. דורש AC, זוהי אינה טענה

הערה: CH בלתי תלויה ב־ZFC.

הערה: GCH בלתי תלויה ב־ZFC.

הערה: AC בלתי תלויה ב־ZF.

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיימת $B\subseteq A$ בת מנייה. דורש AC

טענה: תהא $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ סופית או בת מנייה. דורש AC

יחס סדר חלקי בעל איבר מינימלי: סדר חלקי $\langle A,\leq\rangle$ עבורו קיים $a\in A$ באשר לכל $b\in A$ מתקיים $(b\leq a)\implies(b=a)$.

יחס סדר קווי בעל איבר מקסימלי: סדר קווי $\langle A,\leq\rangle$ עבורו קיים $b\in A$ באשר לכל $a\in A$ מתקיים $(b\leq a)\implies(b=a)$.

הגדרה הלמה של צורן: יהי $\langle P,\leq\rangle$ יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת $A\subseteq P$ קיים חסם מלעיל אזי קיים ב־P איבר מקסימלי. זוהי אינה טענה

משפט: (AC)$\iff$(הלמה של צורן).