רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1,\ldots,a_n\}$ מתקיים $((a=a_1)\vee\ldots\vee(a=a_n))\Longleftrightarrow(a\in\{a_1,\ldots,a_n\})$.

סימון: תהא Σ קבוצה אזי $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Sigma^i$.

טענה: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת

- $B\subseteq S$.
- S סגורה להפעלת F.
- מינימליות: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ עבורה $B\subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S\subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}\subseteq\Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq X_{B,F}$.

עולם באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי Σ.

בסיס באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי B.

טענה: תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid(B\subseteq Y)\wedge(\text{סגורה להפעלת } Y\ F)\}$.

מסקנה הוכחה באינדוקציה מבנית: יהי Σ עולם ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$ אזי $X_{B,F}\subseteq Y$.

אינווריאנטה: יהי Σ עולם ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$ אזי Y.

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על $\mathbb{N}$ אזי $(\forall n\in\mathbb{N}.p(n))\Longrightarrow(p(0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.p(n)\Longrightarrow p(n+1)))$.

סדרת יצירה: יהי $a\in X_{B,F}$ אזי $(a_1,\ldots,a_n)$ עבורה $a_n=a$ וכן לכל $i\in[n]$ מתקיים $(a_i\in B)\vee(a_i$ מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ־$\{a_1,\ldots,a_{i-1}\})$.

טענה: יהי $a\in\Sigma^*$ אזי $(a\in X_{B,F})\Longleftrightarrow($קיימת סדרת יצירה ל־$a)$.

מסקנה: $X_{B,F}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a\in\Sigma^*\mid n \text{ בעלת סדרת יצירה באורך } a\}$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma=\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow,(,)\}\cup\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a\in\Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי

- $\wedge(\omega_1,\omega_2)="(\omega_1\wedge\omega_2)"$.
- $\vee(\omega_1,\omega_2)="(\omega_1\vee\omega_2)"$.
- $\Longrightarrow(\omega_1,\omega_2)="(\omega_1\Longrightarrow\omega_2)"$.
- $\neg(\omega_1)="(\neg\omega_1)"$.

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $\text{WFF}=X_{\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p\in\text{WFF}$ עבורו $p\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p\in\text{WFF}$ אזי $(p$ פסוק אטומי$)\vee($הפסוק p מתחיל עם $"("$ ונגמר עם $")"$$)$.

מסקנה: יהיו $q_1,q_2\in\text{WFF}$ אזי $q_1(q_2\notin\text{WFF}$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α פסוק אטומי.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\wedge\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\vee\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\Longrightarrow\gamma)$.
- קיים ויחיד $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=(\neg\beta)$.

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם $\mathcal{O}(\text{len}(\alpha))$ לבדיקה האם $\alpha\in\text{WFF}$.

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\neg$.
2. $\wedge,\vee$.
3. $\Longrightarrow$.

אמת: T, true.

שקר: F, false.

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

סימון: תהא $\circ\in\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ אזי טבלת האמת של $\circ$ הינה $TT_\circ$.

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	$\neg q$
true	false
false	true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

השמה: פונקציה $v:\{p_i\}\to\{F,T\}$.

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\overline{v}:\text{WFF}\to\{F,T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\overline{v}\left(p\right)=v\left(p\right)$.
- יהי α פסוק אזי $\overline{v}\left(\neg\alpha\right)=TT_{\neg}\left(\overline{v}\left(\alpha\right)\right)$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\overline{v}\left(\beta\circ\gamma\right)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\beta\right),\overline{v}\left(\gamma\right)\right)$.

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha\in\text{WFF}$ עבורה $\overline{v}\left(\alpha\right)=T$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\text{WFF}$ מסופקת על ידי v אזי $v\models\alpha$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\text{WFF}$ לא מסופקת על ידי v אזי $v\not\models\alpha$.

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $\text{Var}:\text{WFF}\to\mathcal{P}\left(\{p_i\}\right)$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\text{Var}\left(p\right)=\{p\}$.
- יהי α פסוק אזי $\text{Var}\left(\neg\alpha\right)=\text{Var}\left(\alpha\right)$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\text{Var}\left(\beta\circ\gamma\right)=\text{Var}\left(\beta\right)\cup\text{Var}\left(\gamma\right)$.

משפט התלות הסופית: תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי $\alpha\in\text{WFF}$ עבורה $\forall p\in\text{Var}\left(\alpha\right).v_1\left(p\right)=v_2\left(p\right)$ אזי $\overline{v_1}\left(\alpha\right)=\overline{v_2}\left(\alpha\right)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_{α}.

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K\subseteq\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ עבורה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו $TT=TT_{\alpha}$.

טענה: $\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg,\wedge,\vee\in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v\models\alpha$.

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ טאוטולוגיה אזי $\models\alpha$.

סתירה: פסוק $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו $\models\left(\neg\alpha\right)$.

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\overline{v}\left(\alpha\right)=\overline{v}\left(\beta\right)$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ שקולים אזי $\alpha\equiv\beta$.

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha\in\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v\models\Gamma$.

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ אזי $\alpha\in\text{WFF}$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v\models\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ ויהי $\alpha\in\text{WFF}$ פסוק נובע סמנטית מ־Γ אזי $\Gamma\models\alpha$.

טענה: יהיו $\alpha,\beta,\gamma\in\text{WFF}$ אזי

- $\left(\alpha\wedge\beta\right)\vee\gamma\equiv\left(\alpha\vee\gamma\right)\wedge\left(\beta\vee\gamma\right)$.
- $\left(\alpha\vee\beta\right)\wedge\gamma\equiv\left(\alpha\wedge\gamma\right)\vee\left(\beta\wedge\gamma\right)$.
- $\left(\alpha\wedge\beta\right)\equiv\left(\beta\wedge\alpha\right)$.
- $\left(\alpha\vee\beta\right)\equiv\left(\beta\vee\alpha\right)$.
- $\left(\alpha\wedge\beta\right)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge\left(\beta\wedge\gamma\right)$.
- $\left(\alpha\vee\beta\right)\vee\gamma\equiv\alpha\vee\left(\beta\vee\gamma\right)$.
- $\neg\left(\neg\alpha\right)\equiv\alpha$.
- $\neg\left(\alpha\wedge\beta\right)\equiv\left(\neg\alpha\right)\vee\left(\neg\beta\right)$.
- $\neg\left(\alpha\vee\beta\right)\equiv\left(\neg\alpha\right)\wedge\left(\neg\beta\right)$.

- $.(\alpha \implies \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$

למה: יהי $\gamma \in \text{WFF}$ סתירה אזי לכל $\alpha \in \text{WFF}$ מתקיים $.\gamma \models \alpha$

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$ אזי $.\Gamma \models \beta$

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg\beta)$ אזי $.\Gamma \models (\neg\alpha)$

טענה: יהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ אזי $.(\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \implies \beta))$

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ ויהי p פסוק אטומי אזי

- אם $\alpha = p$ אזי $.\alpha [\varphi/p] = \varphi$
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p$ אזי $.\alpha [\varphi/p] = \alpha$
- אם קיים $\beta \in \text{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $.\alpha [\varphi/p] = \neg\beta [\varphi/p]$
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $.\alpha [\varphi/p] = \beta [\varphi/p] \circ \gamma [\varphi/p]$

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ ויהי $p \in \text{Var}(\alpha)$ אזי $.\alpha [\varphi/p] \in \text{WFF}$

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ ויהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי

- אם $\alpha = p_i$ עבור $i \in [n]$ אזי $.\alpha [\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] = \varphi_i$
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p_i$ לכל $i \in [n]$ אזי $.\alpha [\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] = \alpha$
- אם קיים $\beta \in \text{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $.\alpha [\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] = \neg\beta [\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n]$
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $.\alpha [\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] = \beta [\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n] \circ \gamma [\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n]$

סימון: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v השמה אזי ההשמה $.v [\overline{v}(\varphi)/p_i] (p_j) = \begin{cases} v(p_j) & i \neq j \\ \overline{v}(\varphi) & i = j \end{cases}$

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ יהי p פסוק אטומי ותהא v השמה אזי $.\overline{v} (\alpha (\varphi/p)) = \overline{v [\overline{v}(\varphi)/p]} (\alpha)$

סימון: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ יהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה אזי ההשמה $.v [\overline{v}(\varphi_1)/p_1, \ldots, \overline{v}(\varphi_1)/p_1] (p_j) = \begin{cases} v(p_j) & j \notin [n] \\ \overline{v}(\varphi_j) & j \in [n] \end{cases}$

מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ יהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה אזי $.\overline{v} (\alpha [\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n]) = \overline{v [\overline{v}(\varphi_1)/p_1, \ldots, \overline{v}(\varphi_1)/p_1]} (\alpha)$

מסקנה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n \in \text{WFF}$ יהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha [\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n]$ טאוטולוגיה.

הצורה הנורמלית NNF: $.\text{NNF} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee\}}$

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{NNF}$ עבורו $.\alpha \equiv \beta$

סימון: $.\text{Conj} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge\}}$

הצורה הנורמלית DNF: $.\text{DNF} = X_{\text{Conj}, \{\vee\}}$

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{DNF}$ עבורו $.\alpha \equiv \beta$

סימון: $.\text{Disj} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\vee\}}$

הצורה הנורמלית CNF: $.\text{CNF} = X_{\text{Disj}, \{\wedge\}}$

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{CNF}$ עבורו $.\alpha \equiv \beta$

מערכת הוכחה: יהי Σ אלפבית תהא $N \subseteq \Sigma^*$ תהא $A \subseteq N$ ותהא $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (N^n \to N)$ אזי $.(\Sigma, N, A, F)$

הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.

נוסחאות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $.N$

אקסיומות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $.A$

כללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $.F$

קבוצת המשפטים: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $.X_{A,F}$

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ משפט אזי $.\vdash_S \varphi$

מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $.(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$

קבוצת הטענות היכיחות מהנחות: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי $.X_{A \cup \Gamma, F}$

הוכחה: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי סדרת יצירה של $.\varphi$

סימון: תהא S מערכת הוכחה תהיינה $\Gamma \subseteq N$ הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי $.\Gamma \vdash_S \varphi$

טענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ אזי

- מונוטוניות: תהא $\Delta \subseteq N$ עבורה $\Delta \vdash_S \varphi$ ותהא $\Delta \subseteq \Gamma$ אזי $.\Gamma \vdash_S \varphi$

- קומפקטיות: תהא $N \supseteq \Gamma$ עבורה $\Gamma \vdash_S \varphi$ אזי קיימת $\Gamma \supseteq \Delta$ סופית עבורה $\Delta \vdash_S \varphi$.
- טרנזיטיביות: תהיינה $\Delta, \Gamma \subseteq N$ באשר $\Delta \vdash_S \varphi$ וכן לכל $\alpha \in \Delta$ מתקיים $\Gamma \vdash_S \alpha$ אזי $\Gamma \vdash_S \varphi$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $f \in F$ כלל היסק המקיים $f(x_1,\ldots,x_n) = y$ אזי $f : \frac{x_1 \ldots x_n}{y}$.

כלל הניתוק (Ponens Modus): תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $\text{MP} : \frac{(\alpha \Longrightarrow \beta), \alpha}{\beta}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

- אלפבית: $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$.
- נוסחאות: $N = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
  - $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$.
  - $A_3 = (((\neg\alpha) \Longrightarrow (\neg\beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
- כללי היסק: $F = \{\text{MP}\}$.

טענה: יהיו α, β נוסחאות ב־HPC אזי

- $\vdash_{\text{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \alpha)$.
- $\vdash_{\text{HPC}} ((\neg\alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta))$.
- $\{\neg\alpha\} \vdash_{\text{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta)$.

מסקנה: יהיו α, β נוסחאות ב־HPC באשר $\vdash_{\text{HPC}} (\neg\alpha)$ אזי $\{\alpha\} \vdash_{\text{HPC}} \beta$.

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון $\vdash$ הוא במערכת HPC.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוחסאות מעל HPC אזי $(\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \Longleftrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta))$.

סימון: תהא מערכת הוכחה S ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $\text{Ded}(\Gamma) = \{\alpha \in N \mid \Gamma \vdash \alpha\}$.

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $\vdash ((\neg(\neg\alpha)) \Longrightarrow \alpha)$.

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט הנאותות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $\left(\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \alpha\right) \Longrightarrow (\Gamma \models \alpha)$.

למה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β, γ נוחסאות מעל HPC אזי
$((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \wedge (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוחסאות מעל HPC אזי
$((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \wedge (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$.

קבוצת הנחות עקבית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\Gamma \nvdash_S \alpha$.

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ אינה עקבית)$\Longleftrightarrow$(קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\left(\Gamma \vdash_S (\neg\alpha)\right) \wedge \left(\Gamma \vdash_S \alpha\right)$).

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Gamma \supseteq \Delta$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות עקבית מעל S עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית מעל S המקיימת $\Delta \supseteq \Gamma$ מתקיים $\Delta = \Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC עבורה $\Gamma \vdash \alpha$ אזי $\alpha \in \Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\alpha \in \Gamma) \vee (\neg\alpha \in \Gamma)$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהיינה α, β נוחסאות מעל HPC אזי
$(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg\alpha \in \Gamma) \vee (\beta \in \Gamma))$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Δ עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(Γ ספיקה).

משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $\left(\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \alpha\right) \Longleftarrow (\Gamma \models \alpha)$.

מסקנה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \models \alpha) \Longleftrightarrow (\Gamma \vdash \alpha)$.

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Gamma \supseteq \Delta$ סופית Δ ספיקה).

סימון: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ אזי $\text{Ass}(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid v \models \Gamma\}$.

טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \backslash \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על $\{p_i\} \to \{F,T\}$.

טענה: הטופולוגיה $\{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \backslash \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

הגדרה: יהי G גרף פשוט לא מכוון תהא $f : V \to \text{WFF}$ חח"ע ויהיו $(v,u) \in E$ אזי $\varphi_G : E \to \text{WFF}$ כך $\varphi_G((v,u)) = "f(v) \implies f(u)"$.

טענה: יהי G גרף פשוט לא מכוון ותהא $f : V \to \text{WFF}$ חח"ע אזי (G הינו 2־צביע)$\iff$($\{\varphi_G(e) \mid e \in E\}$ ספיקה).

מסקנה: יהי G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו 2־צביע)$\iff$(לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו 2־צביע).

טענה: יהי G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו k־צביע)$\iff$(לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו k־צביע).

קבוצת השמות גדירה: קבוצה $K \subseteq \{p_i\} \to \{F,T\}$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.

טענה: $\varnothing$ גדירה.

טענה: $\{p_i\} \to \{F,T\}$ גדירה.

טענה: לכל v השמה $\{v\}$ גדירה.

טענה: קיימת $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ שאינה גדירה.

סימון: $K_{\text{finite}} = \left\{v \in \{p_i\} \to \{F,T\} \mid \left|v^{-1}(\{T\})\right| < \aleph_0\right\}$.

טענה: K_{finite} אינה גדירה.

קבוצת השמות גדירה באופן סופי: קבוצה $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ סופית המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.

משפט: תהא $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ התב"ש

- K גזירה וכן $K^{\mathcal{C}}$ גדירה.
- K גדירה באופן סופי.
- K גדירה על ידי פסוק יחיד.

מילון: יהי Σ אלפבית אזי $(\{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i,n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n \to \Sigma \mid i,n \in \mathbb{N}\})$.

סימני קבוע במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי C.

סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי R.

סימני פונקציה במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי F.

מילון סופי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ בעל מספר סופי של סימנים.

מילון יחסי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ חסר סימני פונקציה.

לוגיקה מסדר ראשון: יהי Σ אלפבית ויהי σ מילון אזי $(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{"(", ")"\}, \{\neg, \vee, \wedge, \implies\}, \{\forall, \exists\}, \sigma)$.

משתנים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: $\{"(", ")"\}$.

קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies\}$.

כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: תהא L לוגיקה מסדר ראשון אזי המילון σ בה.

שמות עצם מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{f_{i,n} \mid i,n \in \mathbb{N}\}}$.

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי σ מילון ויהי t שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- t משתנה.
- t סימן קבוע.
- קיים ויחיד סימן פונקציה $f_{i,n}$ ושמות עצם $t_1 \ldots t_n$ עבורם $t = f(t_1 \ldots t_n)$.

הגדרה: יהי σ מילון יהי x משתנה ותהא $\alpha \in \sigma$ אזי

- $\forall(\alpha, x) = "\forall x \alpha"$.
- $\exists(\alpha, x) = "\exists x \alpha"$.

נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $\{R_{n,i}(t_1 \ldots t_n) \mid (i,n \in \mathbb{N}) \wedge (\text{שמות עצם } t_1 \ldots t_n)\}$.

נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{R_{n,i}(t_1 \ldots t_n) \mid (i,n \in \mathbb{N}) \wedge (\text{שמות עצם } t_1 \ldots t_n)\}, \{\wedge, \vee, \neg, \implies, \forall, \exists\}}$.

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α נוסחה אטומית.
- קיימת ויחידה נוסחה β עבורה $\alpha = "(\neg \beta)"$.
- קיימות ויחידות נוסחאות β, γ וכן פעולה בולינארית $\circ$ עבורן $\alpha = "(\beta \circ \gamma)"$.

- קיימת ויחידה נוסחה β וכן משתנה x וכן כמת Q עבורם $\alpha = ”Qx\beta“$.

משתנה חופשי בשם עצם: נגדיר $\text{FV} : \{t \mid \sigma \text{ שם עצם במילון } t\} \to \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}\right)$ כך

- יהי $c \in \sigma$ סימן קבוע אזי $\text{FV}\left(c\right) = \varnothing$.
- יהי $x \in \sigma$ משתנה אזי $\text{FV}\left(x\right) = \{x\}$.
- יהיו $t_1 \ldots t_n$ שמות עצם ויהי $f \in \sigma$ סימן פונקציה אזי $\text{FV}\left(f\left(t_1 \ldots t_n\right)\right) = \bigcup \text{FV}\left(t_i\right)$.

משתנה חופשי בנוסחה: נגדיר $\text{FV} : \{\varphi \mid \sigma \text{ נוסחה במילון } \varphi\} \to \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}\right)$ כך

- יהיו $t_1 \ldots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $\text{FV}\left(R\left(t_1 \ldots t_n\right)\right) = \bigcup \text{FV}\left(t_i\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\text{FV}\left(\neg\varphi\right) = \text{FV}\left(\varphi\right)$.
- תהיינה φ, ψ נוסחאות ויהי $\circ$ פעולה בוליאנית אזי $\text{FV}\left(\varphi \circ \psi\right) = \text{FV}\left(\varphi\right) \cup \text{FV}\left(\psi\right)$.
- תהא נוסחה φ יהי משתנה x ויהי כמת Q עבורם $\text{FV}\left(Qx\varphi\right) = \text{FV}\left(\varphi\right) \setminus \{x\}$.

נוסחה סגורה: נוסחה φ עבורה $\text{FV}\left(\varphi\right) = \varnothing$.

סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\forall, \exists$.
2. $\neg$.
3. $\wedge, \vee$.
4. $\Longrightarrow$.

מבנה עבור מילון: יהי σ מילון יהי $D \neq \varnothing$ ותהא $C : \{c_i\} \to D$ וכן $R : \{R_{n,i}\} \to D^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ וכן $F : \{f_{n,i}\} \to \left(D^n \to D\right)$ אזי $\left(D, C\left(c_0\right), \ldots, R\left(R_{1,0}\right), \ldots, f\left(f_{0,0}\right) \ldots\right)$.

תחום של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי D.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ בעל תחום D אזי $D^M = D$.

פירוש של סימנים במילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $\left(C\left(c_0\right), \ldots, R\left(R_{2,0}\right), \ldots, f\left(f_{0,0}\right)\right)$.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $c_i^M = C\left(c_i\right)$ וכן $R_{n,i}^M = R\left(R_{n,i}\right)$ וכן $f_{n,i}^M = F\left(f_{n,i}\right)$.

השמה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $v : \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to D^M$.

השמת ערך לשם עצם: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ יהי ותהא v השמה אזי

- יהי $c_i \in \sigma$ סימן קבוע אזי $\overline{v}\left(c_i\right) = c_i^M$.
- יהי $x_i \in \sigma$ משתנה אזי $\overline{v}\left(x_i\right) = v\left(x_i\right)$.
- יהיו $t_1 \ldots t_n$ שמות עצם ויהי $f \in \sigma$ סימן פונקציה אזי $\overline{v}\left(f\left(t_1 \ldots t_n\right)\right) = f^M\left(\overline{v}\left(t_1\right) \ldots \overline{v}\left(t_n\right)\right)$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ויהי t שם עצם עבורו $\forall x \in \text{FV}\left(t\right) . v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right)$ אזי $\overline{v_1}\left(t\right) = \overline{v_2}\left(t\right)$.

השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי $x_j \in \sigma$ משתנה ויהי $d \in D^M$ אזי נגדיר השמה $v\left[{}^{d}/{}_{x_j}\right]\left(x_i\right) = \begin{cases} v(x_i) & i \neq j \\ d & \text{else} \end{cases}$.

ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא v השמה אזי

- יהיו $t_1 \ldots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $\left(\overline{v}\left(R\left(t_1 \ldots t_n\right)\right) = T\right) \iff \left(\left(\overline{v}\left(t_1\right), \ldots, \overline{v}\left(t_n\right)\right) \in R^M\right)$.
- תהא α נוסחה אזי $\overline{v}\left(\neg\alpha\right) = TT_{\neg}\left(\overline{v}\left(\alpha\right)\right)$.
- תהיינה α, β נוסחאות ויהי $\circ$ קשר בינארי אזי $\overline{v}\left(\alpha \circ \beta\right) = TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\alpha\right), \overline{v}\left(\beta\right)\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\overline{v}\left(\exists x\varphi\right) = T\right) \iff \left(\exists d \in D^M \left(\overline{v\left[{}^{d}/{}_{x}\right]}\left(\varphi\right) = T\right)\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\overline{v}\left(\forall x\varphi\right) = T\right) \iff \left(\forall d \in D^M \left(\overline{v\left[{}^{d}/{}_{x}\right]}\left(\varphi\right) = T\right)\right)$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x \in \text{FV}\left(t\right) . v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right)$ אזי $\overline{v_1}\left(\varphi\right) = \overline{v_2}\left(\varphi\right)$.

נוסחה ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי נוסחה φ עבורה $\overline{v}\left(\varphi\right) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא φ נוסחה ספיקה ב־M אזי $M, v \models \varphi$.

t־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה יהי M מבנה ותהא v השמה עבורם $M, v \models \varphi$ אזי $\left(M, v\right)$.

קבוצת נוסחאות ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים $\overline{v}\left(\varphi\right) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא Γ קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M אזי $M, v \models \Gamma$.

נוסחה ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M והשמה v עבורם $M, v \models \varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא v השמה תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה לכל (M,v) t־מודל של Γ מתקיים כי (M,v) t־מודל של φ אזי $\Gamma \overset{t}{\models} \varphi$.

נוסחאות t־שקולות: יהי σ מילון ותהא v השמה אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\} \overset{t}{\models} \varphi$ וכן $\{\varphi\} \overset{t}{\models} \psi$.

נוסחה t־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ ולכל v השמה מתקיים (M,v) t־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t־תקפה אזי $\overset{t}{\models} \varphi$.

נוסחה נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי נוסחה φ עבורה לכל v השמה מתקיים $M,v \models \varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא φ נוסחה נכונה ב־M אזי $M \models \varphi$.

v־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה אזי מבנה M עבורו $M \models \varphi$.

קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים $M \models \varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא Γ קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי $M \models \Gamma$.

נוסחה v־ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M עבורו $M \models \varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה לכל M v־מודל של Γ מתקיים כי M v־מודל של φ אזי $\Gamma \overset{v}{\models} \varphi$.

נוסחאות v־שקולות: יהי σ מילון אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\} \overset{v}{\models} \varphi$ וכן $\{\varphi\} \overset{v}{\models} \psi$.

נוסחה v־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ מתקיים M v־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה v־תקפה אזי $\overset{v}{\models} \varphi$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי $\left(\overset{t}{\models} \varphi\right) \iff \left(\overset{v}{\models} \varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה תקפה אזי $\exists x\varphi$ תקפה וכן $\forall x\varphi$ תקפה.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ תקפה אזי φ תקפה.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma \overset{v}{\models} \varphi\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \overset{t}{\models} \varphi\right)$.

פסוק: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה $\mathrm{FV}(\varphi) = \varnothing$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת פסוקים ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma \overset{v}{\models} \varphi\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{t}{\models} \varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי ($\Gamma \cup \{\varphi\}$ הינה t־ספיקה)$\iff$($\Gamma \overset{t}{\not\models} \neg\varphi$).

טענה: יהי σ מילון ותהיינה φ,ψ נוסחאות אזי (φ,ψ הן t־שקולות)$\iff$($(\varphi \iff \psi)$ תקפה).

הסגור האוניברסלי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x_1 \ldots x_n\}$ אזי $\varphi^{\forall} = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi$.

הסגור היישי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\mathrm{FV}(\varphi) = \{x_1 \ldots x_n\}$ אזי $\varphi^{\exists} = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \varphi$.

סימון: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת נוסחאות אזי $\Gamma^{\forall} = \left\{\varphi^{\forall} \mid \varphi \in \Gamma\right\}$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה ויהי M מבנה אזי ($\varphi^{\forall}$ ספיק ב־M)$\iff$($M \models \varphi$).

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma^{\forall} \overset{v}{\models} \varphi^{\forall}\right) \iff \left(\Gamma \overset{v}{\models} \varphi\right)$.

איזומורפיזם בין מבנים: יהי σ מילון ויהיו M,N מבנים מעל σ אזי $G : D^M \to D^N$ חח"ע ועל עבורה

- לכל סימן קבוע $c \in \sigma$ מתקיים $G\left(c^M\right) = c^N$.
- לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ ולכל $a_1 \ldots a_n \in D^M$ מתקיים $G\left(f^M(a_1 \ldots a_n)\right) = f^N\left(G(a_1) \ldots G(a_n)\right)$.
- לכל סימן יחס $R \in \sigma$ ולכל $a_1 \ldots a_n \in D^M$ מתקיים $\left((G(a_1) \ldots G(a_n)) \in R^N\right) \iff \left((a_1 \ldots a_n) \in R^M\right)$.

מבנים איזומורפיים: יהי σ מילון אזי מבנים M,N מעל σ עבורם קיים איזומורפיזם G מ־M ל־N.

טענה: יהי σ מילון יהיו M,N מבנים איזומורפיים מעל σ ויהי φ פסוק אזי $(N \models \varphi) \iff (M \models \varphi)$.

הערה: יהי σ מילון בעל יחס שיוויון Id דו־מקומי אזי לכל מבנה M נגדיר $\mathrm{Id}^M = \mathrm{Id}_M$ ונסמן את היחס בעזרת $=$.

הצבת שם עצם במשתנה: יהיו r,s שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- אם s סימן קבוע אזי $s\left[{}^{r}/{}_{x}\right] = s$.
- אם $s = x$ אזי $s\left[{}^{r}/{}_{x}\right] = r$.
- אם $s \neq x$ משתנה אזי $s\left[{}^{r}/{}_{x}\right] = s$.
- אם $s = f(t_1 \ldots t_n)$ אזי $s\left[{}^{r}/{}_{x}\right] = f\left(t_1\left[{}^{r}/{}_{x}\right] \ldots t_n\left[{}^{r}/{}_{x}\right]\right)$.

הצבת שם עצם בנוסחה: תהא φ נוסחה יהי r שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi = R(t_1 \ldots t_n)$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/{}_{x}\right] = R\left(t_1\left[{}^{r}/{}_{x}\right] \ldots t_n\left[{}^{r}/{}_{x}\right]\right)$.

- אם $\varphi=\neg\alpha$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]=\neg\left(\alpha\left[{}^{r}/_{x}\right]\right)$.
- אם $\varphi=\alpha\circ\beta$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]=\alpha\left[{}^{r}/_{x}\right]\circ\beta\left[{}^{r}/_{x}\right]$.
- אם $\varphi=\forall x\alpha$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]=\forall x\alpha$.
- אם $\varphi=\exists x\alpha$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]=\exists x\alpha$.
- אם $\varphi=\forall y\alpha$ באשר $x\neq y$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]=\forall y\left(\alpha\left[{}^{r}/_{x}\right]\right)$.
- אם $\varphi=\exists y\alpha$ באשר $x\neq y$ אזי $\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]=\exists y\left(\alpha\left[{}^{r}/_{x}\right]\right)$.

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא φ נוסחה ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi=R\left(t_1\ldots t_n\right)$ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi=\neg\alpha$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α.
- אם $\varphi=\alpha\circ\beta$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן ב־β.
- אם $\varphi=\forall y\alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi=\exists y\alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi=\forall y\alpha$ וכן $x\in\mathrm{FV}\left(\varphi\right)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y\notin\mathrm{FV}\left(r\right)$.
- אם $\varphi=\exists y\alpha$ וכן $x\in\mathrm{FV}\left(\varphi\right)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y\notin\mathrm{FV}\left(r\right)$.

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f:\{\text{נוסחאות}\}\to\mathcal{P}\left(\{x_i\}\right)$ כך

- אם $\varphi=R\left(t_1\ldots t_n\right)$ אזי $f\left(\varphi\right)=\varnothing$.
- אם $\varphi=\neg\alpha$ אזי $f\left(\varphi\right)=f\left(\alpha\right)$.
- אם $\varphi=\alpha\circ\beta$ אזי $f\left(\varphi\right)=f\left(\alpha\right)\cup f\left(\beta\right)$.
- אם $\varphi=\forall x\alpha$ אזי $f\left(\varphi\right)=f\left(\alpha\right)\cup\{x\}$.
- אם $\varphi=\exists y\alpha$ אזי $f\left(\varphi\right)=f\left(\alpha\right)\cup\{x\}$.

למה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי (r חופשי להצבה ב־φ)$\iff$(לכל $y\in\mathrm{FV}\left(r\right)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור y ב־$\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]$).

סימון: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי נגדיר השמה $v\left[{}^{\overline{v}(r)}/_{x}\right]\left(y\right)=\begin{cases}v(y) & x\neq y\\ \overline{v}(r) & \text{else}\end{cases}$.

מסקנה: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי $\overline{v}\left(s\left[{}^{r}/_{x}\right]\right)=\overline{v\left[{}^{\overline{v}(r)}/_{x}\right]}\left(s\right)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}\left(\varphi\left[{}^{r}/_{x}\right]\right)=\overline{v\left[{}^{\overline{v}(r)}/_{x}\right]}\left(\varphi\right)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}\left(\varphi\right)=\overline{v\left[{}^{v(x)}/_{y}\right]}\left(\varphi\left[{}^{y}/_{x}\right]\right)$.

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־φ אזי

- $\left(\exists x\varphi\right)\equiv^{t}\left(\exists y\left(\varphi\left[{}^{y}/_{x}\right]\right)\right)$.
- $\left(\forall x\varphi\right)\equiv^{t}\left(\forall y\left(\varphi\left[{}^{y}/_{x}\right]\right)\right)$.

הצורה הנורמלית PNF: $X_{\{\varphi\mid\text{נוסחה חסרת כמתים } \varphi\},\{\forall,\exists\}}$.

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי (φ בצורת PNF)$\iff$(קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן $x_1\ldots x_n$ משתנים וכן $Q_1\ldots Q_n$ כמתים עבורם $\varphi=Q_1x_1\ldots Q_nx_n\alpha$).

טענה: תהיינה φ,ψ נוסחאות אזי

- $\left(\forall x\left(\varphi\wedge\psi\right)\right)\equiv^{t}\left(\left(\forall x\varphi\right)\wedge\left(\forall x\psi\right)\right)$.
- $\left(\exists x\left(\varphi\vee\psi\right)\right)\equiv^{t}\left(\left(\exists x\varphi\right)\vee\left(\exists x\psi\right)\right)$.
- תהא $x\notin\mathrm{FV}\left(\psi\right)$ אזי $\left(\left(\forall x\varphi\right)\vee\psi\right)\equiv^{t}\left(\forall x\left(\varphi\vee\psi\right)\right)$.
- תהא $x\notin\mathrm{FV}\left(\psi\right)$ אזי $\left(\left(\exists x\varphi\right)\wedge\psi\right)\equiv^{t}\left(\exists x\left(\varphi\wedge\psi\right)\right)$.
- $\left(\neg\left(\forall x\varphi\right)\right)\equiv^{t}\left(\exists x\left(\neg\varphi\right)\right)$.
- $\left(\neg\left(\exists x\varphi\right)\right)\equiv^{t}\left(\forall x\left(\neg\varphi\right)\right)$.

משפט: תהא φ נוסחה אזי קיימת נוסחה α בצורת PNF עבורה $\varphi\equiv^{t}\alpha$.

פסוק אוניברסלי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}\left(\alpha\right)=\{x_1\ldots x_n\}$ המקיימת $\varphi=\forall x_1\ldots\forall x_n\alpha$.

פסוק יישי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}\left(\alpha\right)=\{x_1\ldots x_n\}$ המקיימת $\varphi=\exists x_1\ldots\exists x_n\alpha$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל σ ויהי סימן קבוע $c\notin\sigma$ אזי ($\exists x\varphi$ ספיקה מעל σ)$\iff$($\varphi\left[{}^{c}/_{x}\right]$ ספיקה מעל $\sigma\cup\{c\}$).

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ אזי ($\forall y_1\ldots\forall y_n\exists x\varphi$ ספיק מעל σ)$\iff$($\forall y_1\ldots\forall y_n\left(\varphi\left[{}^{f(y_1\cdots y_n)}/_{x}\right]\right)$ ספיק מעל המילון $\sigma\cup\{f\}$ באשר f פונקציה n־מקומית).

משפט סקולם: קיים אלגוריתם sk המקבל נוסחה φ מעל מילון σ ומחזיר פסוק אוניברסלי מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$($\text{sk}(\varphi)$ ספיק).

סקולמיזציה למילון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי המילון המינימלי מעליו מוגדר $\text{sk}(\varphi)$.

טענה: קיים אלגוריתם FOLWFF המקבל נוסחה חסרת משתנים וכמתים φ מעל מילון ללא שיוויון ומחזיר פסוק α מעל WFF המקיים

- (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(α ספיק).
- (φ תקפה)$\Longleftrightarrow$(α טאוטולוגיה).

למה: תהא φ נוסחה חסרת משתנים וכמתים המורכבת מהנוסחאות האטומיות $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ נגדיר השמה של WFF כך $v(p_i) = (M \models \alpha_i)$ אזי $(\overline{v}(\text{FOLWFF}(\varphi)) = T) \Longleftrightarrow (M \models \varphi)$.

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה הרברנד: יהי σ מילון ללא שיוויון אזי מבנה M המקיים

- לכל $a \in D^M$ קיים שם עצם סגור α עבורו $\alpha^M = a$.
- יהיו α, β שמות עצם שונים אזי $\alpha^M \neq \beta^M$.

מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ויהי M מבנה הרברנד של σ אזי D^M בן־מנייה.

הערה: מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב $D^M = \{\varphi \mid \sigma\text{-שם עצם חסר משתנים ב} \varphi\}$.

מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד M על σ.

טענה: יהי M מבנה הרברנד מעל σ ותהא v השמה עבורה $v(x_i) = t_i$ אזי

- יהי r שם עצם באשר $\text{FV}(r) = \{x_1 \ldots x_n\}$ אזי $\overline{v}(r) = r[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$.
- תהא φ נוסחה באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \ldots x_n\}$ אזי $(M \models \varphi[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]) \Longleftrightarrow (M, v \models \varphi)$.
- תהא φ נוסחה אזי ($\exists x\varphi$ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi[s/x]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\exists x\varphi$ פסוק אזי ($\exists x\varphi$ תקפה)$\Longleftrightarrow$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi[s/x]$ תקפה).
- תהא φ נוסחה אזי ($\forall x\varphi$ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל שם עצם סגור s מתקיים כי $\varphi[s/x]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ פסוק אזי ($\forall x\varphi$ תקפה)$\Longleftrightarrow$(לכל שם עצם חסר משתנים s מתקיים כי $\varphi[s/x]$ תקפה).

משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(φ ספיק במבנה הרברנד).

מופעי בסיס: תהא φ נוסחה חסרת כמתים באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \ldots x_n\}$ אזי
$\text{GroundInstance}(\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi) = \{\varphi[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n] \mid \text{שמות עצם חסרי משתנים } s_1 \ldots s_n\}$.

סימון: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי $\text{GroundInstance}(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \text{GroundInstance}(\varphi)$.

טענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים חסרי כמתים אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(Γ ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- Γ ספיקה.
- Γ ספיקה במבנה הרברנד.
- $\text{GroundInstance}(\Gamma)$ ספיקה.
- $\text{GroundInstance}(\Gamma)$ ספיקה במבנה הרברנד.

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון ללא שיוויון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי

- (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).
- ($\Gamma \overset{t}{\models} \varphi$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \overset{t}{\models} \varphi$).
- ($\Gamma \underset{v}{\models} \varphi$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \underset{v}{\models} \varphi$).

טענה: יהיו x, y משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\{E(\cdot,\cdot)\}$ המקיימת ($M \models \Gamma$)$\Longleftrightarrow$(יש מסלול ב־M מ־x ל־y).

משפט: יהי σ מילון בעל קבוע תהא φ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי ($\exists x\varphi$ תקפה)$\Longleftrightarrow$(קיימים שמות עצם סגורים $t_1 \ldots t_n$ עבורם $\varphi[t_1/x] \vee \ldots \vee \varphi[t_n/x]$ תקפה).

מבנה הנקין: יהי σ מילון אזי מבנה H מעל σ עבורו לכל $a \in D^H$ קיים שם עצם סגור t עבורו $t^H = a$.

עוצמה של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה מעל σ אזי $|M| = |D^M|$.

משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה מעל σ אזי (φ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(קיים מבנה לכל היותר בן־מנייה M בו φ ספיקה).

משפט לוונהיים־סקולם העולה: יהי σ מילון יהי M מבנה בן־מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ באשר φ ספיקה ב־M אזי לכל עוצמה אינסופית κ קיים מבנה M' מעוצמה κ עבורו φ ספיקה ב־M'.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא κ עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל σ המקיימת $(M \models \Gamma) \Longleftrightarrow (|M| = \kappa)$.

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

סימון: $\text{VALID} = \{\langle \sigma, \varphi \rangle \mid (\sigma \text{ נוסחה מעל } \varphi) \wedge (\varphi \text{ תקפה})\}$.

משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי σ מילון אזי $\text{VALID} \in \mathcal{RE}$.

משפט צ'רץ'־טיורינג: $\text{HALT} \le_m \text{VALID}$.

מסקנה: $\text{VALID} \notin \mathcal{R}$.

בעיית הריצוף: יהיו $R_1 \dots R_n$ ריבועים בעלי צלע מאורך 1 וכן כל צלע שלהם צבועה בצבע אזי האם ניתן לרצף את $\mathbb{R}^2_{\ge 0}$ בעזרת הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

בעיית הריצוף: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $R : [n]^2 \times \{\text{left}, \text{right}, \text{above}, \text{below}\} \to \{\text{yes}, \text{no}\}$ אזי $f : \mathbb{N}^2 \to [n]$ עבורה

- לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R\left(f\binom{n}{m}, f\binom{n-1}{m}, \text{left}\right) = \text{yes}$.
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R\left(f\binom{n}{m}, f\binom{n+1}{m}, \text{right}\right) = \text{yes}$.
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R\left(f\binom{n}{m}, f\binom{n}{m+1}, \text{above}\right) = \text{yes}$.
- לכל $m \in \mathbb{N}_+$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R\left(f\binom{n}{m}, f\binom{n}{m-1}, \text{below}\right) = \text{yes}$.

סימון: $\text{TILING} = \{(n, R, f) \mid R \text{ עבור } f \text{ פתרון לבעיית הריצוף}\}$.

משפט: $\text{VALID} \le_m \text{TILING}$.

מסקנה: $\text{TILING} \notin \mathcal{R}$.

יחס קונגרואנציה: יהי σ מילון אזי $E \in \sigma$ סימן יחס דו־מקומי המקיים

- רפלקסיבי: $\forall x (E(x, x))$.
- סימטרי: $\forall x \forall y (E(x, y) \Longrightarrow E(y, x))$.
- טרנזיטיבי: $\forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \Longrightarrow E(x, z))$.
- לכל $f \in \sigma$ סימן פונקציה מתקיים $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \left(\left(\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i)\right) \Longrightarrow E(f(x_1 \dots x_n), f(y_1 \dots y_n))\right)$.
- לכל $R \in \sigma$ סימן יחס מתקיים $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n \left(\left(\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i)\right) \Longrightarrow (R(x_1 \dots x_n) \Longleftrightarrow R(y_1 \dots y_n))\right)$.

הערה: בהינתן מילון עם שיוויון σ ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן σ_E את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

מילון מחלקות קונגרואנציה: יהי מילון σ עם שיוויון ויהי M מבנה על σ אזי מבנה M_E מעל σ_E המקיים

- $D^{M'} = {}^{D^M}/_{E}$.
- לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ מתקיים $f^{M'}\left([a_1]_E, \dots, [a_n]_E\right) = \left[f^M(a_1 \dots a_n)\right]_E$.
- לכל סימן יחס $R \in \sigma$ מתקיים $R^{M'}\left([a_1]_E, \dots, [a_n]_E\right) \Longleftrightarrow R^M(a_1 \dots a_n)$.

החלפת שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא φ נוסחה מעל מילון עם שיוויון σ באשר $f_1 \dots f_n$ סימני הפונקציות ב־φ וכן $R_1 \dots R_m$ סימני היחס ב־φ אזי $\varphi_E = \varphi\left[{}^E/_{=}\right] \wedge (E \text{ יחס שקילות}) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n (f_i \text{ יחס קונגרואנציה ביחס ל־} E)\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^m (E_i \text{ יחס קונגרואנציה ביחס ל־} E)\right)$.

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ עם שיוויון יהי M מבנה מעל σ ותהא v השמה נגדיר השמה $v_E : \{x_i\} \to D^{M_E}$ באשר $v_E(x_i) = [v(x_i)]_E$ אזי $(M, v \models \varphi) \Longleftrightarrow (M_E, v_E \models \varphi_E)$.

משפט: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ באשר φ מעל מילון עם שיוויון σ ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון ψ באשר ψ מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(ψ ספיק).

משפט: תהא Γ קבוצת נוסחאות מעל σ עם שיוויון אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(Γ_E ספיקה).

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון עם שיוויון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

המודל הסטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי מבנה $\mathcal{M}_\mathbb{N}$ עבורו

- $D^{\mathcal{M}_\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ וכן $c_0^{\mathcal{M}_\mathbb{N}} = 0$ וכן $c_1^{\mathcal{M}_\mathbb{N}} = 1$.
- $f_+^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}(a, b) = a + b$.
- $f_\times^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}(a, b) = a \times b$.
- $\left((a, b) \in R_>^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}\right) \Longleftrightarrow (a > b)$.

פסוקים נכונים אריתמטית: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי $\text{AT} = \{\alpha \mid (\mathcal{M}_\mathbb{N} \models \alpha) \wedge (\text{FV}(\alpha) = \varnothing)\}$.

מודל לא סטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי מבנה M עבורו $M \models \text{AT}$ וכן M אינו איזומורפי ל־$\mathcal{M}_\mathbb{N}$.

טענה: יהי M מודל לא סטדנרטי של הטבעיים אזי $\left|D^M\right| > \aleph_0$.

כלל ג'ן: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי $\frac{\alpha}{\forall x\alpha}$: Gen.

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי σ מילון חסר שיוויון אזי

- אלפבית: $\Sigma = \sigma$.
- נוסחאות: $N = X_{\{t \mid \text{שם עצם } t\},\{\neg,\Longrightarrow,\forall\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
  - $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$.
  - $A_3 = (((\neg\alpha) \Longrightarrow (\neg\beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
  - יהי t שם עצם חופשי להצבה במקום x ב־α אזי $A_4 = ((\forall x\alpha) \Longrightarrow \alpha\left[{}^{t}/{}_{x}\right])$
  - יהי $x \notin \text{FV}(\alpha)$ אזי $A_5 = ((\forall x(\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow (\forall x\beta)))$.
- כללי היסק: $F = \{\text{MP}, \text{Gen}\}$.

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

משפט הנאותות: יהי σ מילון ללא שיוויון תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} \alpha\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$.

טענה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ פסוק באשר $\underset{\text{HPC}}{\vdash} \alpha$ וכן $\text{Var}(\alpha) = \{p_1 \ldots p_n\}$ ויהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ נוסחאות אזי $\underset{\text{HC}}{\vdash} \alpha\left[{}^{\varphi_1}/{}_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/{}_{p_n}\right]$.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HC עבורן $\Gamma \cup \{\alpha\} \underset{\text{HC}}{\vdash} \beta$ וכן בהוכחה לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב־α אזי $\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \beta)$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HC עבורן $\Gamma \cup \{\alpha\} \underset{\text{HC}}{\vdash} \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \underset{\text{HC}}{\vdash} \beta$ וכן בהוכחות לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב־α אזי $\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} \beta$.

קבוצת נוסחאות σ־שלמה: יהיו σ,Σ מילונים באשר $\Sigma \subseteq \sigma$ אזי קבוצת נוסחאות Γ מעל Σ עבורה לכל פסוק φ מעל σ מתקיים $(\varphi \in \Gamma) \vee (\neg\varphi \in \Gamma)$.

קבוצת נוסחאות בעלת תכונת הנקין: יהי σ מילון אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל נוסחה φ באשר $\neg\forall x\varphi$ פסוק וכן $\neg\forall x\varphi \in \Gamma$ מתקיים שקיים סימן קבוע $c \in \sigma$ עבורו $\neg\varphi\left[{}^{c}/{}_{x}\right] \in \Gamma$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma \subseteq \sigma$ וקיימת Δ עקבית σ־שלמה מעל Σ המקיימת $\Gamma \subseteq \Delta$.

למה: יהי σ מילון תהא Γ עקבית תהא φ נוסחה באשר $\neg\forall x\varphi$ פסוק וכן $\neg\forall x\varphi \in \Gamma$ ויהי $c \notin \sigma$ סימן קבוע אזי $\Gamma \cup \{\neg\varphi\left[{}^{c}/{}_{x}\right]\}$ עקבית מעל $\sigma \cup \{c\}$.

משפט הנקין: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma \subseteq \sigma$ וקיימת Δ עקבית מעל Σ המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma \subseteq \sigma$ וקיימת Δ מעל Σ עקבית Σ־שלמה המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין יהי M מבנה ההרברנד מעל σ עבורו $\left((t_1 \ldots t_n) \in R^M\right) \Longleftrightarrow (R(t_1 \ldots t_n) \in \Gamma)$ לכל סימן יחס $R \in \sigma$ ולכל שמות עצם $t_1 \ldots t_n$ ותהא φ נוסחה אזי $(\varphi \in \Gamma) \Longleftrightarrow (M \models \varphi)$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין אזי קיים מבנה M עבורו $M \models \Gamma$.

משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} \alpha\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$.

תורה של מבנה: יהי M מבנה מעל מילון σ אזי $\text{Th}(M) = \{\varphi \mid (M \models \varphi) \wedge (\text{FV}(\varphi) = \varnothing)\}$.

מסקנה: $\text{Th}(\mathcal{M}_{\mathbb{N}}) = \text{AT}$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת פסוקים התב"ש

- לכל מבנים M,N המספקים את Γ מתקיים $\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$.
- לכל פסוק φ מתקיים $(\Gamma \vdash \varphi) \vee (\Gamma \vdash (\neg\varphi))$.