רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1,\dots,a_n\}$ מתקיים $(a\in\{a_1,\dots,a_n\})\Longleftrightarrow((a=a_1)\vee\dots\vee(a=a_n))$.

סימון: תהא Σ אלפבית אזי Σ^* כל המחרוזות הסופיות באלפבית.

טענה: יהי עולם Σ תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת

- $B\subseteq S$.
- S סגורה להפעלת F.
- מינימליות: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ עבורה $B\subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S\subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: יהי עולם Σ תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}\subseteq\Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq X_{B,F}$.

טענה: תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid(B\subseteq Y)\wedge(F\text{ סגורה להפעלת }Y)\}$.

מסקנה: יהי עולם Σ ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$ אזי $X_{B,F}\subseteq Y$.

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על $\mathbb{N}$ אזי $(p(0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.p(n)\Longrightarrow p(n+1)))\Longrightarrow(\forall n\in\mathbb{N}.p(n))$.

סדרת יצירה: יהי $a\in X_{B,F}$ אזי $(a_1,\dots,a_n)$ עבורה $a_n=a$ וכן לכל $i\in[n]$ מתקיים $(a_i\in B)\vee(a_i$ מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ־$\{a_1,\dots,a_{i-1}\})$.

טענה: יהי $a\in\Sigma^*$ אזי $(a\in X_{B,F})\Longleftrightarrow($קיימת סדרת יצירה ל־$a)$.

מסקנה: $X_{B,F}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{a\in\Sigma^*\mid n\text{ בעלת סדרת יצירה באורך }a\}$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma=\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow,(,)\}\cup\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a\in\Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי

- $\wedge(\omega_1,\omega_2)="(\omega_1\wedge\omega_2)"$.
- $\vee(\omega_1,\omega_2)="(\omega_1\vee\omega_2)"$.
- $\Longrightarrow(\omega_1,\omega_2)="(\omega_1\Longrightarrow\omega_2)"$.
- $\neg(\omega_1)="(\neg\omega_1)"$.

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $\text{WFF}=X_{\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p\in\text{WFF}$ עבורו $p\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p\in\text{WFF}$ אזי $(p$ פסוק אטומי$)\vee($הפסוק p מתחיל עם $"("$ ונגמר עם $")"$$)$.

מסקנה: יהיו $q_1,q_2\in\text{WFF}$ אזי $q_1(q_2\notin\text{WFF}$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α פסוק אטומי.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\wedge\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\vee\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\Longrightarrow\gamma)$.
- קיים ויחיד $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=(\neg\beta)$.

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם $\mathcal{O}(\text{len}(\alpha))$ לבדיקה האם $\alpha\in\text{WFF}$.

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\neg$.
2. $\wedge,\vee$.
3. $\Longrightarrow$.

אמת: T, true.

שקר: F, false.

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

סימון: תהא $\circ\in\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ אזי טבלת האמת של $\circ$ הינה $TT_\circ$.

טענה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	$\neg q$
true	false
false	true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

השמה: פונקציה $v:\{p_i\}\to\{F,T\}$.

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\overline{v}:\mathsf{WFF}\to\{F,T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\overline{v}(p)=v(p)$.
- יהי α פסוק אזי $\overline{v}(\neg\alpha)=TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\overline{v}(\beta\circ\gamma)=TT_{\circ}(\overline{v}(\beta),\overline{v}(\gamma))$.

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורה $\overline{v}(\alpha)=T$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\mathsf{WFF}$ מסופקת על ידי v אזי $v\models\alpha$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha\in\mathsf{WFF}$ לא מסופקת על ידי v אזי $v\not\models\alpha$.

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $\mathsf{Var}:\mathsf{WFF}\to\mathcal{P}(\{p_i\})$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\mathsf{Var}(p)=\{p\}$.
- יהי α פסוק אזי $\mathsf{Var}(\neg\alpha)=\mathsf{Var}(\alpha)$.
- יהיו β,γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\mathsf{Var}(\beta\circ\gamma)=\mathsf{Var}(\beta)\cup\mathsf{Var}(\gamma)$.

משפט התלות הסופית: תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורה $\forall p\in\mathsf{Var}(\alpha).v_1(p)=v_2(p)$ אזי $\overline{v_1}(\alpha)=\overline{v_2}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_α.

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K\subseteq\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ עבורה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו $TT=TT_\alpha$.

טענה: $\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg,\wedge,\vee\in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v\models\alpha$.

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: יהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ טאוטולוגיה אזי $\models\alpha$.

סתירה: פסוק $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו $\models(\neg\alpha)$.

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha,\beta\in\mathsf{WFF}$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\overline{v}(\alpha)=\overline{v}(\beta)$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\mathsf{WFF}$ שקולים אזי $\alpha\equiv\beta$.

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha\in\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v\models\Gamma$.

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ אזי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v\models\Gamma$ מתקיים $v\models\alpha$.

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\mathsf{WFF}$ ויהי $\alpha\in\mathsf{WFF}$ פסוק נובע סמנטית מ־Γ אזי $\Gamma\models\alpha$.

טענה: יהיו $\alpha,\beta,\gamma\in\mathsf{WFF}$ אזי

- $(\alpha\wedge\beta)\vee\gamma\equiv(\alpha\vee\gamma)\wedge(\beta\vee\gamma)$.
- $(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma\equiv(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$.
- $(\alpha\wedge\beta)\equiv(\beta\wedge\alpha)$.
- $(\alpha\vee\beta)\equiv(\beta\vee\alpha)$.
- $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$.
- $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\equiv\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$.
- $\neg(\neg\alpha)\equiv\alpha$.
- $\neg(\alpha\wedge\beta)\equiv(\neg\alpha)\vee(\neg\beta)$.
- $\neg(\alpha\vee\beta)\equiv(\neg\alpha)\wedge(\neg\beta)$.
- $(\alpha\Longrightarrow\beta)\equiv(\neg\alpha)\vee\beta$.

למה: יהי $\gamma\in\text{WFF}$ סתירה אזי לכל $\alpha\in\text{WFF}$ מתקיים $\gamma\models\alpha$.

טענה: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ עבורם $\Gamma\cup\{\alpha\}\models\beta$ וכן $\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\models\beta$ אזי $\Gamma\models\beta$.

טענה: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ עבורם $\Gamma\cup\{\alpha\}\models\beta$ וכן $\Gamma\cup\{\alpha\}\models\neg\beta$ אזי $\Gamma\models(\neg\alpha)$.

טענה: יהיו $\alpha,\beta\in\text{WFF}$ אזי $(\models(\alpha\Longrightarrow\beta))\Longleftrightarrow(\alpha\models\beta)$.

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha,\varphi\in\text{WFF}$ ויהי p פסוק אטומי אזי

- אם $\alpha=p$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)=\varphi$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha\neq p$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)=\alpha$.
- אם קיים $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=\neg\beta$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)=\neg\beta\left({}^{\varphi}/_{p}\right)$.
- אם קיימים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha=\beta\circ\gamma$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)=\beta\left({}^{\varphi}/_{p}\right)\circ\gamma\left({}^{\varphi}/_{p}\right)$.

טענה: יהיו $\alpha,\varphi\in\text{WFF}$ ויהי $p\in\text{Var}(\alpha)$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)\in\text{WFF}$.

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha,\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ ויהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי

- אם $\alpha=p_i$ עבור $i\in[n]$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)=\varphi_i$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha\neq p_i$ לכל $i\in[n]$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)=\alpha$.
- אם קיים $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=\neg\beta$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)=\neg\beta\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$.
- אם קיימים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha=\beta\circ\gamma$ אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)=\beta\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)\circ\gamma\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$.

טענה: יהיו $\alpha,\varphi\in\text{WFF}$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j)=\begin{cases}v(p_j) & i\neq j\\ \overline{v}(\varphi) & i=j\end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi}/_{p}\right)\right)=\overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו $\alpha,\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ יהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j)=\begin{cases}v(p_j) & j\notin[n]\\ \overline{v}(\varphi_j) & j\in[n]\end{cases}$ אזי $\overline{v}\left(\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)\right)=\overline{v'}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1\ldots\varphi_n\in\text{WFF}$ ויהיו $p_1\ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha\left({}^{\varphi_1}/_{p_1}\ldots{}^{\varphi_n}/_{p_n}\right)$ טאוטולוגיה.

הצורה הנורמלית NNF: $\text{NNF}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{NNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.

סימון: $\text{Conj}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}}$.

הצורה הנורמלית DNF: $\text{DNF}=X_{\text{Conj},\{\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{DNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.

סימון: $\text{Disj}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\vee\}}$.

הצורה הנורמלית CNF: $\text{CNF}=X_{\text{Disj},\{\wedge\}}$.

משפט: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי קיים $\beta\in\text{CNF}$ עבורו $\alpha\equiv\beta$.

מערכת הוכחה: יהי Σ אלפבית תהא $N\subseteq\Sigma^*$ תהא $A\subseteq N$ ותהא $F\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(N^n\to N)$ אזי (Σ,N,A,F).

הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.

נוסחאות של מערכת הוכחה: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי N.

אקסיומות של מערכת הוכחה: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי A.

כללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי F.

קבוצת המשפטים: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי $X_{A,F}$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi\in N$ משפט אזי $\underset{S}{\vdash}\varphi$.

מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה ותהא $\Gamma\subseteq N$ אזי (Σ,N,A,F,Γ).

קבוצת הטענות היכיחות מהנחות: תהא (Σ,N,A,F,Γ) מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי $X_{A\cup\Gamma,F}$.

הוכחה: תהא (Σ,N,A,F,Γ) מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי $\varphi\in N$ יכיח אזי סדרת יצירה של φ.

סימון: תהא S מערכת הוכחה תהיינה $\Gamma\subseteq N$ הנחות ויהי $\varphi\in N$ יכיח אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.

טענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi\in N$ אזי

- מונוטוניות: תהא $\Delta\subseteq N$ עבורה $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$ ותהא $\Delta\subseteq\Gamma$ אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.
- קומפקטיות: תהא $\Gamma\subseteq N$ עבורה $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$ אזי קיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית עבורה $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$.
- טרנזיטיביות: תהיינה $\Delta,\Gamma\subseteq N$ באשר $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$ וכן לכל $\alpha\in\Delta$ מתקיים $\Gamma\underset{S}{\vdash}\alpha$ אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $f\in F$ כלל היסק המקיים $f(x_1,\ldots,x_n)=y$ אזי $f:\frac{x_1\ldots x_n}{y}$.

כלל הניתוק (Modus Ponens): תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי $\text{MP}:\frac{(\alpha\Longrightarrow\beta),\alpha}{\beta}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

- אלפבית: $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$.
- נוסחאות: $N = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
  - $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$.
  - $A_3 = (((\neg\alpha) \Longrightarrow (\neg\beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
- כללי היסק: $F = \{\text{MP}\}$.

טענה: יהיו α, β נוסחאות ב־HPC אזי

- $\underset{\text{HPC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \alpha)$.
- $\underset{\text{HPC}}{\vdash} ((\neg\alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta))$.
- $\{\neg\alpha\} \underset{\text{HPC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \beta)$.

מסקנה: יהיו α, β נוסחאות ב־HPC באשר $\underset{\text{HPC}}{\vdash} (\neg\alpha)$ אזי $\{\alpha\} \underset{\text{HPC}}{\vdash} \beta$.

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון $\vdash$ הוא במערכת HPC.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוחסאות מעל HPC אזי $(\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \Longleftrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta))$.

סימון: תהא מערכת הוכחה S ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $\text{Ded}(\Gamma) = \{\alpha \in N \mid \Gamma \vdash \alpha\}$.

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $\vdash ((\neg(\neg\alpha)) \Longrightarrow \alpha)$.

מערכת הוכחה נאותה: מערכת הוכחה S עבורה לכל Γ הנחות מעל S ולכל α נוסחה מעל S מתקיים $\left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right) \Longrightarrow (\Gamma \models \alpha)$.

מערכת הוכחה שלמה: מערכת הוכחה S עבורה לכל Γ הנחות מעל S ולכל α נוסחה מעל S מתקיים $(\Gamma \models \alpha) \Longrightarrow \left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right)$.

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט הנאותות: HPC מערכת נאותה.

למה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β, γ נוסחאות מעל HPC אזי $((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \wedge (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \wedge (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$.

קבוצת הנחות עקבית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\Gamma \underset{S}{\nvdash} \alpha$.

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ אינה עקבית)$\Longleftrightarrow$(קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\left(\Gamma \underset{S}{\nvdash} \alpha\right) \wedge \left(\Gamma \underset{S}{\vdash} \alpha\right)$).

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות עקבית מעל S עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית מעל S המקיימת $\Gamma \subseteq \Delta$ מתקיים $\Gamma = \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC עבורה $\Gamma \vdash \alpha$ אזי $\alpha \in \Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\alpha \in \Gamma) \vee (\neg\alpha \in \Gamma)$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg\alpha \in \Gamma) \vee (\beta \in \Gamma))$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Δ עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(Γ ספיקה).

משפט השלמות: HPC מערכת שלמה.

מסקנה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \models \alpha) \Longleftrightarrow (\Gamma \vdash \alpha)$.

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

סימון: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ אזי $\text{Ass}(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid v \models \Gamma\}$.

טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\} \to \{F, T\}) \backslash \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על $\{p_i\} \to \{F, T\}$.

טענה: הטופולוגיה $\{(\{p_i\} \to \{F, T\}) \backslash \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

הגדרה: יהי G גרף פשוט לא מכוון תהא WFF $f : V \to \text{WFF}$ חח"ע ויהיו $(v,u) \in E$ אזי $\varphi_G : E \to \text{WFF}$ כך $\varphi_G((v,u)) = "f(v) \implies f(u)"$.

טענה: יהי G גרף פשוט לא מכוון ותהא $f : V \to \text{WFF}$ חח"ע אזי (G הינו 2־צביע)$\iff$($\{\varphi_G(e) \mid e \in E\}$ ספיקה).

מסקנה: יהי G גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו 2־צביע)$\iff$(לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו 2־צביע).

טענה: יהי G גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו k־צביע)$\iff$(לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו k־צביע).

קבוצת השמות גדירה: קבוצה $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.

טענה: $\varnothing$ גדירה, $\{p_i\} \to \{F,T\}$ גדירה, לכל v השמה $\{v\}$ גדירה.

טענה: קיימת $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ שאינה גדירה.

סימון: $K_{\text{finite}} = \left\{v \in \{p_i\} \to \{F,T\} \mid \left|v^{-1}(\{T\})\right| < \aleph_0\right\}$.

טענה: K_{finite} אינה גדירה.

קבוצת השמות גדירה באופן סופי: קבוצה $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ סופית המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.

משפט: תהא $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ התב"ש

- K גזירה וכן $K^{\mathcal{C}}$ גדירה.
- K גדירה באופן סופי.
- K גדירה על ידי פסוק יחיד.

מילון: יהי Σ אלפבית אזי $(\{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i,n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n \to \Sigma \mid i,n \in \mathbb{N}\})$.

סימני קבוע במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי C.

סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי R.

סימני פונקציה במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי F.

מילון סופי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ בעל מספר סופי של סימנים.

מילון יחסי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ חסר סימני פונקציה.

לוגיקה מסדר ראשון: יהי Σ אלפבית ויהי σ מילון אזי $(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{"(", ")"\}, \{\neg, \vee, \wedge, \implies\}, \{\forall, \exists\}, \sigma)$.

משתנים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: $\{"(", ")"\}$.

קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies\}$.

כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: תהא L לוגיקה מסדר ראשון אזי המילון D בה.

שמות עצם מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{f_{i,n} \mid i,n \in \mathbb{N}\}}$.

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי σ מילון ויהי t שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- t משתנה.
- t סימן קבוע.
- קיים ויחיד סימן פונקציה $f_{i,n}$ ושמות עצם $t_1 \ldots t_n$ עבורם $t = f(t_1 \ldots t_n)$.

הגדרה: יהי σ מילון יהי x משתנה ותהא $\alpha \in \sigma$ אזי

- $\forall(\alpha, x) = "\forall x \alpha"$.
- $\exists(\alpha, x) = "\exists x \alpha"$.

נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $\{R_{n,i}(t_1 \ldots t_n) \mid (i,n \in \mathbb{N}) \wedge (\text{שמות עצם } t_1 \ldots t_n)\}$.

נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{R_{n,i}(t_1 \ldots t_n) \mid (i,n \in \mathbb{N}) \wedge (\text{שמות עצם } t_1 \ldots t_n)\}, \{\wedge, \vee, \neg, \implies, \forall, \exists\}}$.

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α נוסחה אטומית.
- קיימת ויחידה נוסחה β עבורה $\alpha = "(\neg \beta)"$.
- קיימות ויחידות נוסחאות β, γ וכן פעולה בולינארית $\circ$ עבורן $\alpha = "(\beta \circ \gamma)"$.
- קיימת ויחידה נוסחה β וכן משתנה x וכן כמת Q עבורם $\alpha = "Qx\beta"$.

משתנה חופשי בשם עצם: נגדיר $\text{FV} : \{t \mid \sigma \text{ שם עצם במילון } t\} \to \mathcal{P}(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ כך

- יהי $c \in \sigma$ סימן קבוע אזי $\text{FV}(c) = \varnothing$.
- יהי $x \in \sigma$ משתנה אזי $\text{FV}(x) = \{x\}$.

- יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $f \in \sigma$ סימן פונקציה אזי $\text{FV}\left(f\left(t_1 \dots t_n\right)\right) = \bigcup \text{FV}\left(t_i\right)$.

משתנה חופשי בנוסחה: נגדיר $\text{FV} : \{\varphi \mid \sigma \text{ נוסחה במילון } \varphi\} \to \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}\right)$ כך

- יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $\text{FV}\left(R\left(t_1 \dots t_n\right)\right) = \bigcup \text{FV}\left(t_i\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\text{FV}\left(\neg\varphi\right) = \text{FV}\left(\varphi\right)$.
- תהיינה φ, ψ נוסחאות ויהי $\circ$ פעולה בוליאנית אזי $\text{FV}\left(\varphi \circ \psi\right) = \text{FV}\left(\varphi\right) \cup \text{FV}\left(\psi\right)$.
- תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי כמת Q עבורם $\text{FV}\left(Qx\varphi\right) = \text{FV}\left(\varphi\right) \setminus \{x\}$.

נוסחה סגורה: נוסחה φ עבורה $\text{FV}\left(\varphi\right) = \varnothing$.

סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\forall, \exists$.
2. $\neg$.
3. $\wedge, \vee$.
4. $\Longrightarrow$.

מבנה עבור מילון: יהי σ מילון יהי $D \neq \varnothing$ ותהא $C : \{c_i\} \to D$ חח"ע וכן $R : \{R_{n,i}\} \to D^n$ חח"ע לכל $n \in \mathbb{N}$ וכן $F : \{f_{n,i}\} \to \left(D^n \to D\right)$ חח"ע אזי $\left(D, C\left(c_0\right), \dots, R\left(R_{2,0}\right), \dots, f\left(f_{0,0}\right)\right)$.

תחום של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי D.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ בעל תחום D אזי $D^M = D$.

פירוש של סימנים במילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $\left(C\left(c_0\right), \dots, R\left(R_{2,0}\right), \dots, f\left(f_{0,0}\right)\right)$.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $c_i^M = C\left(c_i\right)$ וכן $R_{n,i}^M = R\left(R_{n,i}\right)$ וכן $f_{n,i}^M = F\left(f_{n,i}\right)$.

השמה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $v : \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \to D^M$.

השמת ערך לשם עצם: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ יהי ותהא v השמה אזי

- יהי $c_i \in \sigma$ סימן קבוע אזי $\overline{v}\left(c_i\right) = c_i^M$.
- יהי $x_i \in \sigma$ משתנה אזי $\overline{v}\left(x_i\right) = v\left(x_i\right)$.
- יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $f \in \sigma$ סימן פונקציה אזי $\overline{v}\left(f\left(t_1 \dots t_n\right)\right) = f^M\left(\overline{v}\left(t_1\right) \dots \overline{v}\left(t_n\right)\right)$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ויהי t שם עצם עבורו $\forall x \in \text{FV}\left(t\right). v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right)$ אזי $\overline{v_1}\left(t\right) = \overline{v_2}\left(t\right)$.

השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי $x_j \in \sigma$ משתנה ויהי $d \in D^M$ אזי נגדיר השמה $v\left[{}^{d}/{}_{x_j}\right]\left(x_i\right) = \begin{cases} v\left(x_i\right) & i \neq j \\ d & \text{else} \end{cases}$.

ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא v השמה אזי

- יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $\left(\left(\overline{v}\left(t_1\right), \dots, \overline{v}\left(t_n\right)\right) \in R^M\right) \Longleftrightarrow \left(\overline{v}\left(R\left(t_1 \dots t_n\right)\right) = T\right)$.
- תהא α נוסחה אזי $\overline{v}\left(\neg\alpha\right) = TT_{\neg}\left(\overline{v}\left(\alpha\right)\right)$.
- תהיינה α, β נוסחאות ויהי $\circ$ קשר בינארי אזי $\overline{v}\left(\alpha \circ \beta\right) = TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\alpha\right), \overline{v}\left(\beta\right)\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\exists d \in D^M \left(\overline{v\left[{}^{d}/{}_{x}\right]}\left(\varphi\right) = T\right)\right) \Longleftrightarrow \left(\overline{v}\left(\exists x\varphi\right) = T\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\left(\forall d \in D^M \left(\overline{v\left[{}^{d}/{}_{x}\right]}\left(\varphi\right) = T\right)\right) \Longleftrightarrow \left(\overline{v}\left(\forall x\varphi\right) = T\right)$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x \in \text{FV}\left(t\right). v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right)$ אזי $\overline{v_1}\left(\varphi\right) = \overline{v_2}\left(\varphi\right)$.

נוסחה ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי נוסחה φ עבורה $\overline{v}\left(\varphi\right) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא φ נוסחה ספיקה ב־M אזי $M, v \models \varphi$.

t־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה יהי M מבנה ותהא v השמה עבורם $M, v \models \varphi$ אזי $\left(M, v\right)$.

קבוצת נוסחאות ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים $\overline{v}\left(\varphi\right) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא Γ קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M אזי $M, v \models \Gamma$.

נוסחה ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M והשמה v עבורם $M, v \models \varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא v השמה תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה אם $\left(M, v\right)$ t־מודל של Γ אז $\left(M, v\right)$ t־מודל של φ אזי $\Gamma \overset{t}{\models} \varphi$.

נוסחאות t־שקולות: יהי σ מילון ותהא v השמה אזי נוסחאות φ, ψ עבורן $\{\psi\} \overset{t}{\models} \varphi$ וכן $\{\varphi\} \overset{t}{\models} \psi$.

נוסחה t־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ ולכל v השמה מתקיים $\left(M, v\right)$ t־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t־תקפה אזי $\overset{t}{\models}\varphi$.

נוסחה נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי נוסחה φ עבורה לכל v השמה מתקיים $M,v\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא φ נוסחה נכונה ב־M אזי $M\models\varphi$.

v־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה אזי מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi\in\Gamma$ מתקיים $M\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא Γ קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי $M\models\Gamma$.

נוסחה v־ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה אם M v־מודל של Γ אז M v־מודל של φ אזי $\Gamma\overset{v}{\models}\varphi$.

נוסחאות v־שקולות: יהי σ מילון אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\}\overset{v}{\models}\varphi$ וכן $\{\varphi\}\overset{v}{\models}\psi$.

נוסחה v־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ מתקיים M v־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה v־תקפה אזי $\overset{v}{\models}\varphi$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי $\left(\overset{t}{\models}\varphi\right)\Longleftrightarrow\left(\overset{v}{\models}\varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה תקפה אזי $\exists x\varphi$ תקפה וכן $\forall x\varphi$ תקפה.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ תקפה אזי φ תקפה.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)\Longrightarrow\left(\Gamma\overset{t}{\models}\varphi\right)$.

פסוק: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה $\mathrm{FV}(\varphi)=\varnothing$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת פסוקים ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)\Longleftarrow\left(\Gamma\overset{t}{\models}\varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי ($\Gamma\cup\{\varphi\}$ הינה t־ספיקה)$\Longleftrightarrow$($\Gamma\overset{t}{\not\models}\neg\varphi$).

טענה: יהי σ מילון ותהיינה φ,ψ נוסחאות אזי (φ,ψ הן t־שקולות)$\Longleftrightarrow$(($\varphi\Longleftrightarrow\psi$) תקפה).

הערה: יהי σ מילון בעל יחס שיוויון Id דו־מקומי אזי לכל מבנה M נגדיר $\mathrm{Id}^M=\mathrm{Id}_M$ ונסמן את היחס בעזרת $=$.

הצבת שם עצם בשם עצם: יהיו r,s שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- אם s סימן קבוע אזי $s\left[r/x\right]=s$.
- אם $s=x$ אזי $s\left[r/x\right]=r$.
- אם $s\neq x$ משתנה אזי $s\left[r/x\right]=s$.
- אם $s=f\left(t_1\ldots t_n\right)$ אזי $s\left[r/x\right]=f\left(t_1\left[r/x\right]\ldots t_n\left[r/x\right]\right)$.

הצבת שם עצם בנוסחה: תהא φ נוסחה יהי r שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi=R\left(t_1\ldots t_n\right)$ אזי $\varphi\left[r/x\right]=R\left(t_1\left[r/x\right]\ldots t_n\left[r/x\right]\right)$.
- אם $\varphi=\neg\alpha$ אזי $\varphi\left[r/x\right]=\neg\left(\alpha\left[r/x\right]\right)$.
- אם $\varphi=\alpha\circ\beta$ אזי $\varphi\left[r/x\right]=\alpha\left[r/x\right]\circ\beta\left[r/x\right]$.
- אם $\varphi=\forall x\alpha$ אזי $\varphi\left[r/x\right]=\forall x\alpha$.
- אם $\varphi=\exists x\alpha$ אזי $\varphi\left[r/x\right]=\exists x\alpha$.
- אם $\varphi=\forall y\alpha$ באשר $x\neq y$ אזי $\varphi\left[r/x\right]=\forall y\left(\alpha\left[r/x\right]\right)$.
- אם $\varphi=\exists y\alpha$ באשר $x\neq y$ אזי $\varphi\left[r/x\right]=\exists y\left(\alpha\left[r/x\right]\right)$.

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא φ נוסחה ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi=R\left(t_1\ldots t_n\right)$ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi=\neg\alpha$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α.
- אם $\varphi=\alpha\circ\beta$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן ב־β.
- אם $\varphi=\forall y\alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi=\exists y\alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi=\forall y\alpha$ וכן $x\in\mathrm{FV}(\varphi)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y\notin\mathrm{FV}(r)$.
- אם $\varphi=\exists y\alpha$ וכן $x\in\mathrm{FV}(\varphi)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y\notin\mathrm{FV}(r)$.

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f:\{\text{נוסחאות}\}\to\mathcal{P}\left(\{x_i\}\right)$ כך

- אם $\varphi=R\left(t_1\ldots t_n\right)$ אזי $f(\varphi)=\varnothing$.

- אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha)$.
- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$.
- אם $\varphi = \forall x\alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$.
- אם $\varphi = \exists y\alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$.

למה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי (r חופשי להצבה ב־φ)$\Longleftrightarrow$(לכל $y \in \mathrm{FV}(r)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור y ב־$\varphi[r/x]$).

סימון: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי נגדיר השמה $v\left[\overline{v}(r)/x\right](y) = \begin{cases} v(y) & x\neq y \\ \overline{v}(r) & \text{else} \end{cases}$.

מסקנה: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי $\overline{v}(s[r/x]) = \overline{v\left[\overline{v}(r)/x\right]}(s)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}(\varphi[r/x]) = \overline{v\left[\overline{v}(r)/x\right]}(\varphi)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}(\varphi) = \overline{v\left[v(x)/y\right]}(\varphi[y/x])$.

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־φ אזי
- $(\exists x\varphi) \equiv^t (\exists y(\varphi[y/x]))$.
- $(\forall x\varphi) \equiv^t (\forall y(\varphi[y/x]))$.

הצורה הנורמלית PNF: $X_{\{\varphi \mid \text{נוסחה חסרת כמתים } \varphi\},\{\forall,\exists\}}$.

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי (φ בצורת PNF)$\Longleftrightarrow$(קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן $x_1 \dots x_n$ משתנים וכן $Q_1 \dots Q_n$ כמתים עבורם $\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \alpha$).

טענה: תהיינה φ, ψ נוסחאות אזי
- $(\forall x(\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi))$.
- $(\exists x(\varphi \vee \psi)) \equiv^t ((\exists x\varphi) \vee (\exists x\psi))$.
- תהא $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$ אזי $((\forall x\varphi) \vee \psi) \equiv^t (\forall x(\varphi \vee \psi))$.
- תהא $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$ אזי $((\exists x\varphi) \wedge \psi) \equiv^t (\exists x(\varphi \wedge \psi))$.
- $(\neg(\forall x\varphi)) \equiv^t (\exists x(\neg\varphi))$.
- $(\neg(\exists x\varphi)) \equiv^t (\forall x(\neg\varphi))$.

משפט: תהא φ נוסחה אזי קיימת נוסחה α בצורת PNF עבורה $\varphi \equiv^t \alpha$.

פסוק אוניברסלי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$.

פסוק יישי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל σ ויהי סימן קבוע $c \notin \sigma$ אזי ($\exists x\varphi$ ספיקה מעל σ)$\Longleftrightarrow$($\varphi[c/x]$ ספיקה מעל $\sigma \cup \{c\}$).

סקולמיזציה למילון: יהי σ מילון ויהיו $a_1 \dots a_n \notin \sigma$ סימני קבועים ופונקציות אזי $\sigma \cup \{a_1 \dots a_n\}$.

קבועי סקולם: יהי σ מילון ויהי $\sigma \cup \{a_1 \dots a_n\}$ סקולמיזציה של סימני קבועים ל־σ אזי $a_1 \dots a_n$.

פונקציות סקולם: יהי σ מילון ויהי $\sigma \cup \{a_1 \dots a_n\}$ סקולמיזציה של פונקציות ל־σ אזי $a_1 \dots a_n$.

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ אזי ($\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x\varphi$ ספיק מעל σ)$\Longleftrightarrow$($\forall y_1 \dots \forall y_n (\varphi[f(y_1 \cdots y_n)/x])$ ספיק מעל סקולמיזציה $\sigma \cup \{f\}$ של פונקציה n־מקומית).

משפט סקולם: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ באשר φ מעל מילון σ ומחזיר פסוק אוניברסלי ψ באשר ψ מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(ψ ספיק).

טענה: קיים אלגוריתם FOLWFF המקבל נוסחה חסרת משתנים וכמתים φ מעל מילון ללא שיוויון ומחזיר פסוק α מעל WFF המקיים
- (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(α ספיק).
- (φ תקפה)$\Longleftrightarrow$(α טאוטולוגיה).

למה: תהא φ נוסחה חסרת משתנים וכמתים המורכבת מיחסים $\alpha_1 \dots \alpha_k$ נגדיר השמה של WFF כך $v(p_i) = (M \models \alpha_i)$ אזי $(M \models \psi) \iff (\overline{v}(\mathrm{FOLWFF}(\psi)) = T)$.

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה הרברנד: יהי σ מילון ללא שיוויון אזי מבנה M המקיים
- לכל $a \in D^M$ קיים שם עצם סגור α עבורו $\alpha^M = a$.
- יהיו α, β שמות עצם שונים אזי $\alpha^M \neq \beta^M$.

מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ויהי M מבנה הרברנד של σ אזי D^M בן־מנייה.

הערה: מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב $D^M = \{\varphi \mid \text{שם עצם חסר משתנים ב־}\sigma\ \varphi\}$.

מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד M על σ.

טענה: יהי M מבנה הרברנד מעל σ ותהא v השמה עבורה $v\left(x_i\right)=t_i$ אזי

- יהי r שם עצם באשר $\mathrm{FV}\left(r\right)=\left\{x_1\ldots x_n\right\}$ אזי $\overline{v}\left(r\right)=r\left[{}^{t_1}/_{x_1},\ldots,{}^{t_n}/_{x_n}\right]$.
- תהא φ נוסחה באשר $\mathrm{FV}\left(\varphi\right)=\left\{x_1\ldots x_n\right\}$ אזי $\left(M\models\varphi\left[{}^{t_1}/_{x_1},\ldots,{}^{t_n}/_{x_n}\right]\right)\iff\left(M,v\models\varphi\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי ($\exists x\varphi$ ספיקה)$\iff$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi\left[{}^{s}/_{x}\right]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\exists x\varphi$ פסוק אזי ($\exists x\varphi$ תקפה)$\iff$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi\left[{}^{s}/_{x}\right]$ תקפה).
- תהא φ נוסחה אזי ($\forall x\varphi$ ספיקה)$\iff$(לכל שם עצם סגור s מתקיים כי $\varphi\left[{}^{s}/_{x}\right]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ פסוק אזי ($\forall x\varphi$ תקפה)$\iff$(לכל שם עצם חסר משתנים s מתקיים כי $\varphi\left[{}^{s}/_{x}\right]$ תקפה).

משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי (φ ספיק)$\iff$(φ ספיק במבנה הרברנד).

מופעי בסיס: תהא φ נוסחה חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}\left(\varphi\right)=\left\{x_1\ldots x_n\right\}$ אזי

$\mathrm{GroundInstance}\left(\forall x_1\ldots\forall x_n\varphi\right)=\left\{\varphi\left[{}^{s_1}/_{x_1},\ldots,{}^{s_n}/_{x_n}\right]\mid s_1\ldots s_n \text{ שמות עצם חסרי משתנים}\right\}$.

סימון: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)=\bigcup_{\varphi\in\Gamma}\mathrm{GroundInstance}\left(\varphi\right)$.

טענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים וכמתים אזי (Γ ספיקה)$\iff$(Γ ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- Γ ספיקה.
- Γ ספיקה במבנה הרברנד.
- $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)$ ספיקה.
- $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)$ ספיקה במבנה הרברנד.

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון ללא שיוויון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי

- (Γ ספיקה)$\iff$(לכל $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית Δ ספיקה).
- ($\Gamma\overset{t}{\models}\varphi$)$\iff$(קיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית עבורה $\Delta\overset{t}{\models}\varphi$).
- ($\Gamma\underset{v}{\models}\varphi$)$\iff$(קיימת $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית עבורה $\Delta\underset{v}{\models}\varphi$).

טענה: יהיו x,y משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\left\{E\left(\cdot,\cdot\right)\right\}$ המקיימת ($M\models\Gamma$)$\iff$(יש מסלול ב־M מ־x ל־y).

משפט: יהי σ מילון בעל קבוע תהא φ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי ($\exists x\varphi$ תקפה)$\iff$(קיימים שמות עצם סגורים $t_1\ldots t_n$ עבורם $\varphi\left[{}^{t_1}/_{x}\right]\vee\ldots\vee\varphi\left[{}^{t_n}/_{x}\right]$ תקפה).

הערה: ניתן להגדיר מילון ומבנה לא בני־מנייה.

משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי σ מילון בן־מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ אזי (φ ספיקה)$\iff$(קיים מבנה בן־מנייה M מעל σ בו φ ספיקה).

משפט לוונהיים־סקולם העולה: יהי σ מילון בן־מנייה יהי M מבנה בן־מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ באשר φ ספיקה ב־M אזי לכל עוצמה אינסופית κ ולכל מבנה M' מעוצמה κ מעל σ מתקיים כי φ ספיקה ב־M'.

מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ותהא κ עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל σ המקיימת $\left(\left|M\right|=\kappa\right)\iff\left(M\models\Gamma\right)$.

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

משפט בדיקת תקפות: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ המקיים (האלגוריתם מחזיר תשובה)$\iff$(φ תקפה).

בעיית הריצוף: יהיו $R_1\ldots R_n$ ריבועים בעלי צלע מאורך 1 וכן כל צלע שלהם צבועה בצבע אזי האם ניתן לרצף את $\mathbb{R}^2_{\geq0}$ בעזרת הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

טענה: לא קיים אלגוריתם המכריע את בעיית הריצוף.

משפט צ'רץ'־טיורינג: לא קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ ומכריע האם היא תקיפה.

יחס קונגרואנציה: יהי σ מילון אזי סימן יחס דו־מקומי $E\in\sigma$ המקיים

- רפלקסיבי: $\forall x\left(E\left(x,x\right)\right)$.
- סימטרי: $\forall x\forall y\left(E\left(x,y\right)\Longrightarrow E\left(y,x\right)\right)$.
- טרנזיטיבי: $\forall x\forall y\forall z\left(\left(E\left(x,y\right)\wedge E\left(y,z\right)\right)\Longrightarrow E\left(x,z\right)\right)$.
- לכל $f\in\sigma$ סימן פונקציה מתקיים $\forall x_1\ldots\forall x_n\forall y_1\ldots\forall y_n\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n}E\left(x_i,y_i\right)\right)\Longrightarrow E\left(f\left(x_1\ldots x_n\right),f\left(y_1\ldots y_n\right)\right)\right)$.
- לכל $R\in\sigma$ סימן יחס מתקיים $\forall x_1\ldots\forall x_n\forall y_1\ldots\forall y_n\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n}E\left(x_i,y_i\right)\right)\Longrightarrow\left(R\left(x_1\ldots x_n\right)\iff R\left(y_1\ldots y_n\right)\right)\right)$.

הערה: בהינתן מילון עם שיוויון σ ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן σ_E את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

מילון מחלקות קונגרואנציה: יהי מילון σ עם שיוויון ויהי M מבנה על σ אזי מבנה M_E מעל σ_E המקיים

- $D^{M'} = {}^{D^M}/_E$.
- לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ מתקיים $f^{M'}\left([a_1]_E, \ldots, [a_n]_E\right) = \left[f^M\left(a_1 \ldots a_n\right)\right]_E$.
- לכל סימן יחס $R \in \sigma$ מתקיים $R^{M'}\left([a_1]_E, \ldots, [a_n]_E\right) \Longleftrightarrow R^M\left(a_1 \ldots a_n\right)$.

החלפת שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא φ נוסחה מעל מילון עם שיוויון σ באשר $f_1 \ldots f_n$ סימני הפונקציות ב־φ וכן $R_1 \ldots R_m$ סימני היחס ב־φ אזי

$\varphi_E = \varphi\left[{}^{E}/_{=}\right] \wedge (E \text{ יחס שקילות}) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n}(f_i \text{ ל־} E \text{ יחס קונגרואנציה ביחס})\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{m}(E_i \text{ ל־} E \text{ יחס קונגרואנציה ביחס})\right)$.

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ עם שיוויון יהי M מבנה מעל σ ותהא v השמה נגדיר השמה $v_E : \{x_i\} \to D^{M_E}$ באשר $v_E\left(x_i\right) = \left[v\left(x_i\right)\right]_E$ אזי $(M, v \models \varphi) \Longleftrightarrow (M_E, v_E \models \varphi_E)$.

משפט: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ באשר φ מעל מילון עם שיוויון σ ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון ψ באשר ψ מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(ψ ספיק).

משפט: תהא Γ קבוצת נוסחאות מעל σ עם שיוויון אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(Γ_E ספיקה).

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון עם שיוויון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

כלל ג'ן: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי $\text{Gen} : \frac{\alpha}{\forall x \alpha}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי σ מילון חסר שיוויון אזי

- אלפבית: $\Sigma = \sigma$.
- נוסחאות: $N = X_{\{t \mid t \text{ שם עצם}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
  - $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$.
  - $A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
  - יהי t שם עצם חופשי להצבה במקום x ב־α אזי $A_4 = ((\forall x \alpha) \Longrightarrow \alpha\left[{}^{t}/_{x}\right])$
  - יהי $x \notin \text{FV}(\alpha)$ אזי $A_5 = ((\forall x(\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow (\forall x \beta)))$.
- כללי היסק: $F = \{\text{MP}, \text{Gen}\}$.

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

משפט הנאותות: יהי σ מילון ללא שיוויון תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} \alpha\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$.

טענה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ פסוק באשר $\underset{\text{HPC}}{\vdash} \alpha$ וכן $\text{Var}(\alpha) = \{p_1 \ldots p_n\}$ ויהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ נוסחאות אזי $\underset{\text{HC}}{\vdash} \alpha\left[{}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right]$.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α, β נוחסאות מעל HC עבורן $\Gamma \cup \{\alpha\} \underset{\text{HC}}{\vdash} \beta$ וכן בהוכחה לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב־α אזי $\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \beta)$.

משפט השלמות של גדל: יהי σ מילון ללא שיוויון תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} \alpha\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$.