C^m-יריעה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^m\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי $C^\omega\left(A,B\right)=\{f:A\to B\mid \text{אנליטית מקומית } f\}$.

יריעה אנליטית k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f:G\to\mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

עקומה: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה חד־מימדית.

משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה דו־מימדית.

היפר־משטח/על־משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ שהינה $n-1$ מימדית.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה היפר־משפט חלק.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות עבורן $\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}_\alpha$ יריעה לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m-יריעה k-מימדית ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r\in C^m\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $r\left(G\right)=\mathcal{M}$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r\in C^1\left(G,\mathbb{R}^n\right)$ עבורה לכל $x\in G$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_r\left(x\right)\right)=k$.

הומאומורפיזם: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f\in C\left(A,B\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C\left(B,A\right)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r:G\to A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\{\mathcal{U}_\alpha\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ פתוחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ עבורן $\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha$ וכן קיימות $\{G_\alpha\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^k\right)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha\subseteq C^m\left(G_\alpha,\mathbb{R}^n\right)$ עבורן $r_\alpha\left(G_\alpha\right)=\mathcal{U}_\alpha$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{U}$ המקיימת $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים כי $\{\nabla f_i\left(x\right)\}$ בת"ל.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1\ldots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי ($\{f_1\ldots f_{n-k}\}$ מערכת משוואות רגולרית)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{U}$ עבורו $\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{\left(f_1\cdots f_{n-k}\right)}\left(x\right)\right)=n-k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ C^m-יריעה k-מימדית ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{M}=\{\left(f_1\ldots f_{n-k}\right)=0\}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\right\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $(0,0,0)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה אזי $f:I\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f\left(t,\rho\right)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\cos(\rho)\\ \gamma_1(t)\sin(\rho)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(\gamma\right)$ אזי משפט הסיבוב f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}\left(f\right)$.

הטלה סטריאוגרפית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ נגדיר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n$ כך $f\left(x\right)=-\frac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\|x\|^2-1}{2}\right)$.

טורוס: משטח הסיבוב של $\mathbb{S}^1$.

סימון: נסמן טורוס בעזרת $\mathbb{T}^2$.

משטח אוריינטבילי: משטח $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורו קיימת $N \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ המקיימת $\forall x \in \mathcal{M}. (|N(x)| = 1) \wedge (N(x) \perp x)$.

למה: טבעת מוביוס אינו משטח אוריינטבילי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M} \backslash \partial\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M} \backslash \partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M} \backslash \partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^3$ אזי $a \times b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_1b_1 \end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$ אזי $(u \times v) \perp v$ וכן $(u \times v) \perp u$.

טענה: יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$ אזי $(u \in \operatorname{span}(v)) \iff (u \times v = 0)$.

טענה: יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$ אזי $\det(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 \geq 0$.

טענה: יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$ אזי $|v \times u| = \|v\| \|u\| \sin(\angle(v, u))$.

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ממימד k: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה קיימת $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה המקיימת $A \subseteq \mathcal{U}$ וכן קיים $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ דיפאומורפיזם עבורו $f(A) = f(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\})$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה אזי פרידיקט P עבורו לכל $a \in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה P מתקיימת על $A \cap \mathcal{U}$.

משפט: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ התב"ש

- $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית.
- $\mathcal{M}$ מקומית גרף של פונקציה $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל־$\mathbb{R}^k$.

מסקנה: תהא $r : G \to \mathbb{R}^n$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a \in G$ קיימת סביבה $W \subseteq \mathbb{R}^n$ של $(a, 0_{n-k})$ וקיים דיפאומורפיזם $s : W \to s(W)$ עבורו $r = s\restriction_{W \cap (G \times 0_{n-k})}$.

הערה: יריעה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U} \subseteq A$ עבורה קיימת $W \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $\mathcal{U} = W \cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U} \subseteq A$ עבורה קיימת $W \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $\mathcal{U} = W \cap A$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהא $\mathcal{U} \subseteq A$ אזי ($\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־A)$\iff$($\forall x \in \mathcal{U}. \exists r > 0. B_r(x) \cap A \subseteq \mathcal{U}$).

קבוצה קשירה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ עבורה לכל $\mathcal{U} \subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל־A מתקיים $\mathcal{U} \in \{A, \varnothing\}$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי (A קשירה)$\iff$(לא קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset A$ פתוחות יחסית ל־A עבורן $A \in \{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, \mathcal{U} \cup \mathcal{V}\}$).

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהא $f : A \to B$ אזי (f רציפה)$\iff$(לכל $\mathcal{U} \subseteq B$ פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי $f^{-1}(\mathcal{U})$ פתוחה יחסית ל־A).

מפה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ הפיכה עבורה $\varphi(\mathcal{U})$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטריזציה טובה אזי $(\mathcal{U}, \varphi)$.

אטלס: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קבוצה של מפות $\mathcal{A}$ עבורה $\bigcup \{\mathcal{C}_1 \mid \mathcal{C} \in \mathcal{A}\} = \mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $r : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r(\mathcal{U})$ אזי $(r(\mathcal{U}), r^{-1})$ מפה.

המרחב הפרוייקיבי: יהי $n \geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^n = \{vv^T \mid v \in \mathbb{S}^n\}$.

טענה: יהי $n \geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^n \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ יריעה n מימדית.

העתקת מעבר: תהיינה $(\mathcal{U}_1, \varphi_1), (\mathcal{U}_2, \varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_{1,2} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ המוגדרת $\varphi_{1,2} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$.

טענה: תהיינה $(\mathcal{U}_1, \varphi_1), (\mathcal{U}_2, \varphi_2)$ מפות ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $\varphi_i(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ פתוחה עבור $i \in \{1, 2\}$.

טענה: תהיינה $(\mathcal{U}_1, \varphi_1), (\mathcal{U}_2, \varphi_2)$ מפות ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $\varphi_{1,2}$ דיפאומורפיזם.

פונקציה C^α מיריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^m$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ מתקיים כי $f \circ \varphi^{-1}$ הינה C^α.

הערה: נניח כי $\mathcal{M}$ יריעה C^α אזי $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^m$ הינה לכל היותר מדרגת חלקות C^α.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^m$ אזי (f הינה C^α)$\iff$(קיים אטלס $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו $f \circ \varphi^{-1}$ הינה C^α לכל $\alpha \in \Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קיים ל־$\mathcal{M}$ אטלס.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\dim(\mathcal{M})=k$.

פונקציה C^α בין יריעות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה ℓ־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ הינה C^α.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהא $g\in C^\alpha(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$ אזי $g\circ f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}'')$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ אזי (f הינה C^α)$\iff$(לכל $p\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ של p עבורה קיימת $g\in C^\alpha(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ המקיימת $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$).

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ אזי (f הינה C^α)$\iff$(לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ של $\mathcal{M}$ ולכל מפה $(\mathcal{V},\psi)$ של $\mathcal{M}'$ מתקיים כי $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α).

דיפאומורפיזם C^α: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה f הפיכה וכן $f,f^{-1}\in C^\alpha$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות דיפאומורפיות אזי $\dim(\mathcal{M})=\dim(\mathcal{M}')$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהיינה $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ מפות באשר $\mathcal{U},\mathcal{V}$ סביבות של p אזי $\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}(\varphi(p))\right)=\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}(\psi(p))\right)$.

המרחב המשיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $T_p(\mathcal{M})=\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}(\varphi(p))\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $\dim(T_p(\mathcal{M}))=\dim(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{f=0\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $T_p(\mathcal{M})=\ker(\mathcal{D}_f(p))$.

וקטור מהירות: תהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 אזי $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}$.

טענה: תהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 אזי $\dot{\gamma}(t)\in T_{\gamma(t)}(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_p(\mathcal{M})=\left\{\dot{\gamma}(0)\mid\left(\gamma\in C^1((-\varepsilon,\varepsilon),\mathcal{M})\right)\wedge(\gamma(0)=p)\right\}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $f\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהיינה $\gamma_1,\gamma_2:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{M}$ מסילות המקיימות $\gamma_i(0)=p$ וכן $\dot{\gamma}_i(0)=v$ אזי $\left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma_1)\right)(0)=\left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma_2)\right)(0)$.

נגזרת של פונקציה בין יריעות: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ אזי $\mathcal{D}_pf:T_p(\mathcal{M})\to T_{f(p)}(\mathcal{M}')$ המוגדרת $(\mathcal{D}_pf)(v)=\left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right)(0)$ עבור מסילה $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{M}$ המקיימת $\gamma(0)=p$ וכן $\dot{\gamma}(0)=v$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ אזי $\mathcal{D}_pf$ העתקה לינארית.

משפט כלל השרשרת: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהא $g\in C^\alpha(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$ אזי $\mathcal{D}_p(g\circ f)=\mathcal{D}_{f(p)}(g)\cdot\mathcal{D}_p(f)$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ אזי $(\mathcal{D}_pf)(v)=\mathcal{D}_p(f)\cdot v$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{F=0\}$ הצגה סתומה רגולרית עבור סביבה של p אזי $T_p(\mathcal{M})=\mathrm{span}\left(\{\nabla F_1(p),\ldots,\nabla F_{n-k}(p)\}^\perp\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_1),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_k)\right\}$ בסיס של $T_p(\mathcal{M})$.

הערה: נגדיר את $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_1),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_k)\right\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $T_p(\mathcal{M})$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה ב־$\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p תהא $(\mathcal{V},\psi)$ מפה ב־$\mathcal{M}'$ באשר $\mathcal{V}$ סביבה של $f(p)$ אזי $[\mathcal{D}_pf]_{i,j}=\frac{\partial\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)_i}{\partial x_j}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $g\in C^\alpha(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ באשר $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של p וכן $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$ אזי $\mathcal{D}_pf=(\mathcal{D}_pg)_{\restriction T_p(\mathcal{M})}$.

נגזרת כיוונית: תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathbb{R}^m)$ ותהא $v\in T_p(\mathcal{M})$ אזי $L_vf=\mathcal{D}_pf(v)$.

טענה: תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathbb{R}^m)$ תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה בסביבה של p ותהא $v\in T_p(\mathcal{M})$ אזי $L_vf=\sum_{i=1}^k v_i\cdot\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_i}$.

טענה: תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathbb{R}^m)$ ותהא $v\in T_p(\mathcal{M})$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}=L_vf$.

וקטור נורמל: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ עבורו $v\perp T_p(\mathcal{M})$.

וקטור נורמל יחידה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי וקטור נורמל $v\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ עבורו $\|v\|=1$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{f=0\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא Γ_{f} הצגה כגרף בסביבה של p אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n},1\right)}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^{2}}}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מכפלה מצולבת: יהיו $v_{1}\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי e_{i} $v_{1}\times\ldots\times v_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\left(-1\right)^{i+1}\det\begin{pmatrix}\left(v_{1}\right)_{1} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{1}\\ \vdots & & \vdots\\ \left(v_{1}\right)_{i-1} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{i-1}\\ \left(v_{1}\right)_{i+1} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{i+1}\\ \vdots & & \vdots\\ \left(v_{1}\right)_{n} & \ldots & \left(v_{n-1}\right)_{n}\end{pmatrix}$.

הערה: יהיו $v_{1}\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי בצורה לא פורמלית מתקיים $v_{1}\times\ldots\times v_{n-1}=\det\begin{pmatrix}e_{1} & | & & |\\ \vdots & v_{1} & \ldots & v_{n-1}\\ e_{n} & | & & |\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_{1}\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.

דטרמיננטת גראם: יהיו $v_{1}\ldots v_{m}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Gamma\left(v_{1}\ldots v_{m}\right)=\det\begin{pmatrix}\left\langle v_{1},v_{1}\right\rangle & \ldots & \left\langle v_{1},v_{m}\right\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \left\langle v_{m},v_{1}\right\rangle & \ldots & \left\langle v_{m},v_{m}\right\rangle\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_{1}\ldots v_{n-1}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי
- לכל $i\in[n-1]$ מתקיים $v_{1}\times\ldots\times v_{n-1}\perp v_{i}$.
- $\|v_{1}\times\ldots\times v_{n-1}\|=\sqrt{\Gamma\left(v_{1}\ldots v_{n-1}\right)}$.
- $\det\left(v_{1}\times\ldots\times v_{n-1},v_{1},\ldots,v_{n-1}\right)\geq0$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא r פרמטריזציה בסביבה של p אזי $\frac{\partial r}{\partial x_{1}}\times\ldots\times\frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ וקטור נורמל ל־p.

סימון: תהא $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^{k}$ אזי $\partial^{\alpha}f=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}}\left(f\right)$.

סימון: תהיינה $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{k}$ אזי $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^{k}\binom{\alpha_{i}}{\beta_{i}}$.

טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\alpha\in\mathbb{N}^{k}$ אזי $\partial^{\alpha}\left(f\cdot g\right)=\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{k}\\ |\beta|\leq|\alpha|}}\binom{\alpha}{\beta}\partial^{\beta}\left(f\right)\partial^{\alpha-\beta}\left(g\right)$.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{d}$ פתוחה אזי $D:C^{\infty}\left(\mathcal{U}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{U}\right)$ המקיימת $\mathcal{D}\left(f\right)\left(x\right)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{k}\\ |\alpha|\leq m}}a_{\alpha}\left(x\right)\cdot\partial^{\alpha}\left(f\right)\left(x\right)$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן a_{α} חלקות.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $D:C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ על $\mathcal{M}$ באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית מתקיים $\mathcal{D}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)=\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^{k}\\ |\alpha|\leq m}}a_{\alpha}\left(x\right)\cdot\partial^{\alpha}\left(f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן a_{α} חלקות.

שדה וקטורי C^{m}: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $v:\mathcal{M}\to\bigcup_{p\in\mathcal{M}}T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה $v\left(p\right)\in T_{p}\left(\mathcal{M}\right)$ וכן לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $x\mapsto\mathcal{D}_{x}\varphi\left(v\left(x\right)\right)$ העתקה C^{m}.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי $L_{v}:C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $L_{v}\left(f\right)\left(x\right)=L_{v(x)}\left(f\right)$ הינה אופרטור דיפרנציאלי.

תומך: תהא $f\in C\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\text{supp}\left(f\right)=\overline{\left\{x\in\mathcal{M}\mid f\left(x\right)\neq0\right\}}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה אזי $C_{C}^{\infty}\left(\mathcal{U}\right)=\left\{f\in C^{\infty}\left(\mathcal{U}\right)\mid\text{supp}\left(f\right)\right\}$ קומפקטית$\}$.

אופרטור מקומי: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה ולכל $f,g\in C_{C}^{\infty}$ עבורן $f_{\restriction\mathcal{U}}=g_{\restriction\mathcal{U}}$ מתקיים $L\left(f\right)_{\restriction\mathcal{U}}=L\left(g\right)_{\restriction\mathcal{U}}$.

הגדרה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה תהא $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\|f\|_{W,n}=\sup_{\substack{x\in w\\ |\alpha|\leq n}}\|\left(\partial^{\alpha}f\right)\left(x\right)\|$.

טענה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה תהא $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ תהא $x\in\mathcal{W}$ עבורה $\left(\partial^{\alpha}f\right)\left(x\right)=0$ לכל $|\alpha|\leq n$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $\delta\in\left(0,\varepsilon\right)$ וכן $g\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ עבורה
- $g_{\restriction B_{\frac{\delta}{2}}(x)}=0$.
- $g_{\restriction\mathcal{W}\backslash B_{\delta}(x)}=0$.
- $\|f-g\|_{W,n}<\varepsilon$.

סימון: יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{k}$ אזי $\binom{\alpha}{\beta}=\prod_{i=1}^{k}\binom{\alpha_{i}}{\beta_{i}}$.

משפט פיטרה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ לינארית התב"ש
- L אופרטור מקומי.
- לכל $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ מתקיים $\text{supp}\left(L\left(f\right)\right)\subseteq\text{supp}\left(f\right)$.
- L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה יהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $x\in\mathcal{V}$ אזי קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{W}}$ קומפקטית וכן קיים $n\in\mathbb{N}$ וכן $C>0$ עבורם לכל $f\in C_{C}^{\infty}\left(\mathcal{W}\backslash\left\{x\right\}\right)$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0}\leq C\|f\|_{\mathcal{W},n}$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה יהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ פתוחה עבורה קיימים $n\in\mathbb{N}$ וכן $C>0$ עבורם לכל $f\in C_{C}^{\infty}\left(\mathcal{W}\right)$ מתקיים $\left\Vert Lf\right\Vert _{\mathcal{W},0}\le C\left\Vert f\right\Vert _{\mathcal{W},n}$ אזי L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n.

משפט פירוק יחידה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי $\left\{ \mathcal{U}_{\alpha}\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח של X אזי קיימות $\left\{ \rho_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן

- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le\rho_{i}\le1$.
- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\text{supp}\left(\rho_{i}\right)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $\left|\left\{ i\in\mathbb{N}\mid\rho_{i}\left(\mathcal{W}\right)\ne0\right\} \right|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}\left(x\right)=1$.

מסקנה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה ויהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)\to C^{\infty}\left(\mathcal{V}\right)$ אופרטור לינארי מקומי אזי L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $X\subseteq\mathcal{M}$ ויהי $\left\{ \mathcal{U}_{\alpha}\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ כיסוי פתוח ב־$\mathcal{M}$ של X אזי קיימות $\left\{ \rho_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq C^{\infty}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורן

- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $0\le\rho_{i}\le1$.
- לכל $i\in\mathbb{N}$ קיים $\alpha\in\Lambda$ עבורו $\text{supp}\left(\rho_{i}\right)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x\in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\left|\left\{ i\in\mathbb{N}\mid\rho_{i}\left(\mathcal{W}\right)\ne0\right\} \right|\in\mathbb{N}$.
- לכל $x\in X$ מתקיים $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}\left(x\right)=1$.

מקבילון: יהיו $v_{1}\ldots v_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Pi\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{k}t_{i}v_{i}\mid\forall i\in\left[k\right].t_{i}\in\left[0,1\right]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $v_{1}\ldots v_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Vol}_{k}\left(\Pi\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\right)=\sqrt{\Gamma\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)}$.

טענה: יהיו $v_{1}\ldots v_{k}\in\mathbb{R}^{k}$ אזי

- $\text{Vol}_{k}\left(\left(\begin{smallmatrix}v_{1}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right),\ldots,\left(\begin{smallmatrix}v_{k}\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right)\right)=\left|\det\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\right|$.
- תהא $T\in O\left(n\right)$ אזי $\text{Vol}_{k}\left(Tv_{1},\ldots,Tv_{k}\right)=\text{Vol}_{k}\left(v_{1},\ldots,v_{k}\right)$.

קבוצה זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מתקיים כי $\varphi\left(E\cap\mathcal{U}\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית יהי $\left\{ \left(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha}\right)\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ אטלס של $\mathcal{M}$ ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ אזי (E זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$(לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי $\varphi_{\alpha}\left(E\cap\mathcal{U}_{\alpha}\right)$ זניחה ב־$\mathbb{R}^{k}$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהיינה $\left\{ E_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}\right)$ זניחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}$ זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}$.

קבוצת נקודות האי־רציפות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אזי $B_{f}=\left\{ x\in\mathcal{M}\mid x\text{ אינה רציפה על }f\right\}$.

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה

- f חסומה.
- $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטי.
- B_{f} זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן על יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{E}$ אינטגרבילית רימן על $\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי (E מדידה ז'ורדן ב־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$($\varphi\left(E\right)$ מדידה ז'ורדן ב־$\mathbb{R}^{k}$).

פונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית וכן קיימת מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ עבורה $\text{supp}\left(f\right)\subseteq\mathcal{U}$.

קבוצה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $A\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{A}$ נוחה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה $\left\{ \left(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i}\right)\right\}$ של $\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}_{i}$ נוחה לכל $i\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימות $f_{1}\ldots f_{n}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה $r_{i}:G_{i}\to\mathcal{M}$ פרמטריזציות טובות באשר $G_{i}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ וכן $i\in\left\{ 1,2\right\}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי
$\int_{G_{1}}\left(f\circ r_{1}\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r_{1}\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r_{1}\right)\right)}\text{d}q=\int_{G_{2}}\left(f\circ r_{2}\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r_{2}\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r_{2}\right)\right)}\text{d}q$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r\right)\right)}\text{d}q$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}\left(f\circ r\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial r}{\partial x_{1}}\ldots\frac{\partial r}{\partial x_{k}}\right)}\text{d}q$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}=\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid(\operatorname{supp}(f)\subseteq\mathcal{U})\wedge(f\text{ נוחה ואינטגרבילית רימן})\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R_{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\dots f_n,g_1\dots g_m:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^n f_i$ וכן $f=\sum_{i=1}^m g_i$ אזי $\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{M}}f_i=\sum_{i=1}^m\int_{\mathcal{M}}g_i$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_1\dots f_n:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^n f_i$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{M}}f_i$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})=\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid f\text{ אינטגרבילית רימן}\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R(\mathcal{M})\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}\mathrm{dVol}_k$.

מיצוי ז'ורדן של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $(E_i)_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{M})$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\bigcup_{i=1}^\infty E_i=\mathcal{M}$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר B_f זניחה אזי אם קיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות סגורות $(E_i)_{i=1}^\infty$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\lim_{i\to\infty}\int_{E_i}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}=L$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=L$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $(E_i)_{i=1}^\infty$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\int_{\mathcal{M}}f=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{M}}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}$.

נפח של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\mathrm{Vol}_k(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{M}}1$.

מפות זרות: מפות $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ עבורן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

טענה: תהיינה $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i)\}_{i=1}^n$ מפות זרות בזוגות על $\mathcal{M}$ תהא $S\subseteq\mathcal{M}$ זניחה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\restriction_{\mathcal{M}\setminus(S\cup(\biguplus_{i=1}^n\mathcal{U}_i))}=0$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^n\int_{\mathcal{U}_i}f$.

סימון: תהא $\gamma\in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\lim_{m\to\infty}\sup_{a=t_0<\ldots<t_m=b}\sum_{i=1}^m\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_1(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית ותהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Length}(\gamma)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{Length}(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $r,\theta\in C^1(\mathbb{R})$ נגדיר $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^2$ כך $\gamma(t)=(r(t)\cos(\theta(t)),r(t)\sin(\theta(t)))$ אזי $\|\gamma'\|=\sqrt{r^2+r'}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_2(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^3$ יריעה דו־מימדית ותהא $r:G\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה באשר $G\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=\int_G\left|\frac{\partial r}{\partial x_1}(x)\times\frac{\partial r}{\partial x_2}(y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי $\mathrm{Area}(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

טענה: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\det(I+uv^T)=1+\langle u,v\rangle$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k})$ אזי $\mathrm{Vol}_k(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|\nabla f(x)\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k})$ ותהא $\alpha:\Gamma_f\to\mathbb{R}$ באשר $\alpha(x)$ הזווית בין הנורמל של Γ_f בנקודה x לבין ציר e_{k+1} אזי $\frac{1}{\cos(\alpha(x))}=\sqrt{1+\|\nabla f(x)\|^2}$.

משפט ארכימדס: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=2\pi h$.

מסקנה: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=2\pi hR$.

קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ היפר־משטחים מקבילים אזי $P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\max\{d(x,H_1),d(x,H_2)\}\le d(H_1,H_2)\}$.

רוחב קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ היפר־משטחים אזי $\mathrm{Width}(P_{H_1,H_2})=d(H_1,H_2)$.

רוחב גוף: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\mathrm{Width}(K)=\inf_{\{K\subseteq P\mid P\text{ קורה}\}}(\mathrm{Width}(P))$.

משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\dots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $\mathrm{Width}(K)\le\sum_{i=1}^m\mathrm{Width}(P_i)$.

רוחב יחסי של קורה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ גוף קמור קומפקטי ותהא P קורה אזי $\text{Width}_{K}\left(P\right)=\inf_{m\in\mathbb{R}_{+}}\left\{ m\in\mathbb{R}_{+}\mid\exists a\in\mathbb{R}^{n}.K\subseteq m\cdot P+a\right\}$.

השערת באנג: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_{1}\ldots P_{m}$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}P_{i}$ אזי $1\le\sum_{i=1}^{m}\text{Width}_{K}\left(P_{i}\right)$. השערה פתוחה

טענה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ גוף קמור קומפקטי עבורו $K=-K$ ויהיו $P_{1}\ldots P_{m}$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}P_{i}$ אזי $1\le\sum_{i=1}^{m}\text{Width}_{K}\left(P_{i}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\ne0$ אזי $\varphi^{-1}\left(t\right)$ היפר־משטח.

טענה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\ne0$ וכן $\varphi\left(\mathcal{V}\right)=\left(a,b\right)$ ותהא $p\in\mathcal{V}$ אזי קיים $\delta>0$ עבורו לכל $f\in R\left(V_{\delta}\left(p\right)\right)$ באשר $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית מתקיים $\int_{B_{\delta}\left(p\right)}f=\int_{a}^{b}\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\left\Vert \nabla\varphi\left(x\right)\right\Vert }\text{dVol}_{n-1}\left(x\right)\text{d}t$.

משפט נוחסאת קו־שטח: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\ne0$ וכן $\varphi\left(\mathcal{V}\right)=\left(a,b\right)$ ותהא $f\in R\left(\mathcal{V}\right)$ באשר $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_{a}^{b}\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\left\Vert \nabla\varphi\left(x\right)\right\Vert }\text{dVol}_{n-1}\left(x\right)\text{d}t$.

גרדיאנט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $u\in T_{x}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורו $\left\langle u,v\right\rangle =L_{v}\varphi\left(x\right)$ לכל $v\in T_{x}\left(\mathcal{M}\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי הגרדיאנט של φ בנקודה x הוא $\nabla_{x}\varphi$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של $x\in\mathcal{M}$ ותהא $\psi\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ באשר $\psi_{\restriction\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}=\varphi_{\restriction\mathcal{U}}$ אזי $\nabla_{x}\varphi=\text{Proj}_{T_{x}\left(\mathcal{M}\right)}\left(\nabla_{x}\psi\right)$.

משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ באשר $\nabla\varphi\ne0$ וכן $\varphi\left(\mathcal{M}\right)=\left(a,b\right)$ ותהא $f\in R\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{a}^{b}\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\left\Vert \nabla\varphi\left(x\right)\right\Vert }\text{dVol}_{n-1}\left(x\right)\text{d}t$.

מסקנה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}^{k}\right)$ באשר $\text{rank}\left(\mathcal{D}_{x}\varphi\right)=k$ ותהא $f\in R\left(\mathcal{V}\right)$ באשר $\text{supp}\left(f\right)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_{\varphi\left(\mathcal{V}\right)}\int_{\varphi^{-1}\left(t\right)}\frac{f\left(x\right)}{\sqrt{\det\left(\left(\mathcal{D}_{x}\varphi\right)\cdot\left(\mathcal{D}_{x}\varphi\right)^{T}\right)}}\text{dVol}_{n-1}\left(x\right)\text{d}t$.

טענה: תהא $f:\mathbb{S}^{n}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהא $A\in O\left(n+1\right)$ אזי $\int_{\mathbb{S}^{n}}f\left(x\right)\text{dVol}_{n}=\int_{\mathbb{S}^{n}}f\left(Ax\right)\text{dVol}_{n}$.

טענה: יהי $r>0$ אזי $\text{Vol}_{n}\left(r\cdot\mathbb{S}^{n}\right)=r^{n}\cdot\text{Vol}_{n}\left(\mathbb{S}^{n}\right)$.

טענה שטח פנים של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\text{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

טענה נפח של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\text{Vol}_{n}\left(B_{1}\left(0\right)\right)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathfrak{X}^{\alpha}\left(\mathcal{M}\right)=\left\{ v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{k}\mid \text{שדה וקטורי } C^{\alpha} \text{ מעל } \mathcal{M}\ v\right\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה C^{α} ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה אזי $\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_{i}}\in\mathfrak{X}^{\alpha}\left(\mathcal{U}\right)$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי (v הוא C^{α})$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ ולכל $i\in\left[k\right]$ מתקיים כי $\left\langle v\left(x\right),\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_{i}}\left(x\right)\right\rangle$ הינה C^{α}).

טענה: יהי v שדה וקטורי על $\mathcal{M}$ אזי (v הוא C^{α})$\Longleftrightarrow$($v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{k}$ הינה C^{α}).

שדה וקטורי C^{m} מעל תת־קבוצה: תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ אזי $v:A\to\mathbb{R}^{k}$ עבורה $v\left(x\right)\in T_{x}\left(\mathcal{M}\right)$ וכן לכל $p\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ וקיים $u\in\mathfrak{X}^{m}\left(\mathcal{U}\right)$ עבורו $u_{\restriction A\cap\mathcal{U}}=v_{\restriction A\cap\mathcal{U}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ ותהא $v:A\to\mathbb{R}^{k}$ אזי (v שדה וקטורי C^{α} מעל A)$\Longleftrightarrow$(קיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה ב־$\mathcal{M}$ וקיימת $u\in\mathfrak{X}^{\alpha}\left(\mathcal{U}\right)$ עבורה $u_{\restriction\mathcal{U}}=v$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\nabla\varphi\in\mathfrak{X}^{0}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ על־משטח קשיר אזי ($\mathcal{M}$ בעל 0 אוריינטציות)$\vee$($\mathcal{M}$ בעל 2 אוריינטציות).

שטף: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא N אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}\right)=\int_{\mathcal{M}}\left\langle F\left(x\right),N\left(x\right)\right\rangle \text{dVol}_{n-1}\left(x\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא N אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהיו $F_{1},F_{2}\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורם F_{1},F_{2} שדות וקטוריים דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{\alpha F_{1}+\beta F_{2}}\left(\mathcal{M}\right)=\alpha\text{Flux}_{F_{1}}\left(\mathcal{M}\right)+\beta\text{Flux}_{F_{2}}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: יהיו $\mathcal{M}_{1},\mathcal{M}_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטחים זרים עד כדי קבוצה זניחה בעלי אוריינטציה N_{1},N_{2} בהתאמה ויהי $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}_{1},\mathcal{M}_{2}$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}_{1}\cup\mathcal{M}_{2}\right)=\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}_{1}\right)+\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}_{2}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח בעל אוריינטציה N ויהי $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M},N\right)=\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M},-N\right)$.

דיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\text{div}\left(F\right)\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_{i}}{\partial x_{i}}\left(x\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ נגדיר $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{n}$ כך $f\left(x\right)=F\left(x\right)$ אזי $\text{div}\left(F\right)\left(x\right)=\text{trace}\left(\mathcal{D}_{x}\left(f\right)\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ ותהא $A\in\text{GL}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\text{div}\left(A\circ F\right)\left(A^{-1}x\right)=\text{div}\left(F\right)\left(x\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\text{div}\left(f\cdot F\right)=f\cdot\text{div}\left(F\right)+\left\langle \nabla f,F\right\rangle$.

לפלסיאן: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\Delta f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}^{2}}$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\Delta f=\text{div}\left(\nabla f\right)$.

סימון: תהא $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Cube}_{\ell}\left(x\right)=\left\{ Q\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\left(x\in Q\right)\wedge\left(Q\text{ קובייה}\right)\wedge\left(\text{אורך הצלע של }Q\text{ הוא }\ell\right)\right\}$.

הערה: תהא $x\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $Q\in\text{Cube}_{\ell}\left(x\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial Q\right)=\sum\text{Flux}_{F}\left(E_{i}\right)$ באשר $\left\{ E_{i}\right\}$ פאות Q עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני ל־Q.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\text{div}\left(F\right)\left(x\right)=\lim_{\substack{Q\in\text{Cube}_{\ell}\left(x\right)\\ \ell\to0}}\frac{1}{\text{Vol}_{n}\left(Q\right)}\text{Flux}_{F}\left(\partial Q\right)$.

נקודת שפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $x\in\partial\mathcal{U}$ עבורה קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של x וקיימת $f\in C^{1}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ עבורה $\nabla_{x}f\neq0$ וכן $f\left(x\right)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\left\{ f<0\right\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}=\left\{ x\in\partial\mathcal{U}\mid x\text{ נקודת שפה חלקה}\right\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה תהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ באשר $\mathcal{W}$ סביבה של x המקיימת $\nabla_{x}f\neq0$ וכן $f\left(x\right)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\left\{ f<0\right\}$ אזי $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}\left(x\right)=\left(\mathcal{W},f\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של x עבורה $\partial\mathcal{U}\cap\mathcal{W}$ היפר־משטח.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־$\partial\mathcal{U}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ יריעה.

קבוצה חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $\partial\mathcal{U}=\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$.

קבוצה בעלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\text{Vol}_{n}\left(\left(\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)+B_{\varepsilon}^{n}\left(0\right)\right)=0$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ עבורה $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}\left(x\right)=\left(\mathcal{W},f\right)$ אזי $\frac{\nabla f}{\left\Vert \nabla f\right\Vert }:\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{n}$ נורמל יחידה.

אוריינטציה חיצונית קנונית לשפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $N:\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ באשר $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}\left(x\right)=\left(\mathcal{W},f\right)$ מתקיים $N_{\restriction_{\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}}=\frac{\nabla f}{\left\Vert \nabla f\right\Vert }$.

שטף: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ בעלת שפה כמעט חלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\partial\mathcal{U}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\text{Flux}_{F}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)$.

למה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא N אוריינטציה של $\mathcal{M}$ יהי $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ ותהא $A\in\text{GL}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\text{Flux}_{A\circ F}\left(A\cdot\mathcal{M}\right)=\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ יהי $r>0$ תהא $g\in C^{1}\left(B_{r}\left(a\right),\mathbb{R}\right)$ באשר $\frac{\partial g}{\partial x_{i}}\neq0$ לכל $i\in\left[n\right]$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ באשר $\text{supp}\left(F\right)\subseteq B_{r}\left(a\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\left\{ g<0\right\} \right)=\int_{\left\{ g<0\right\} }\text{div}\left(F\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $a\in\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיים $r>0$ עבורו לכל $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיים $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ולכל $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ המקיים $\text{supp}\left(F\right)\subseteq B_{r}\left(a\right)$ מתקיים $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה וחלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ויהי $\varepsilon>0$ אזי $X+B_{\varepsilon}\left(0\right)$ מדידה ז'ורדן.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית אזי קיים $C\in\mathbb{R}$ עבורו לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\psi\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ המקיימת
- $0\le\psi\le1$.
- $\psi_{\restriction_{X+B_{\varepsilon}\left(0\right)}}=1$.
- $\psi_{\restriction_{\mathbb{R}^{n}\backslash\left(X+B_{3\varepsilon}\left(0\right)\right)}}=0$.
- לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_{i}}\right|\le\frac{C}{\varepsilon}$.

משפט הדיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ ויהי N נורמל חיצוני ל־$\mathcal{U}$ אזי $\text{Vol}_{n}\left(\mathcal{U}\right)=\frac{1}{n}\int_{\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}\left\langle x,N\right\rangle \text{dVol}_{n-1}\left(x\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ תהיינה $f,g\in C^{1}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\int_{\mathcal{U}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\cdot g\right)=\int_{\partial\mathcal{U}}\left(f\cdot g\cdot\left\langle N,v\right\rangle \right)-\int_{\mathcal{U}}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\right)$.

טענה נוסחאות גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $u,v:\mathcal{W}\to\mathbb{R}$ אזי
1. נניח כי u הינה C^{2} אזי $\int_{G}\Delta u=\int_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial N}$.
2. נניח כי v הינה C^{2} וכן u הינה C^{1} אזי $\int_{G}\left\langle \nabla u,\nabla v\right\rangle =-\int_{G}u\cdot\Delta v+\int_{\partial G}u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.

3. נניח כי u,v הן C^2 אזי $\int_G \left(u\cdot\Delta v - v\cdot\Delta u\right) = \int_{\partial G}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial N} - v\cdot\frac{\partial u}{\partial N}\right)$.

אנרגיית דיריכלה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_G\left\|\nabla v\right\|^2$.

מסקנה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_G\left\|\nabla v\right\|^2 = -\int_G v\cdot\Delta v + \int_{\partial G} v\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.

פונקציה הרמונית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $u\in C^2\left(G,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $\Delta u = 0$.

טענה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה ופתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי

- $\mathrm{Flux}_{\nabla u}\left(\partial G\right) = 0$.
- נניח כי $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}} = 0$ אזי u קבועה מקומית ב־G.
- נניח כי $u_{\restriction_{\partial G}}$ קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב־G.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $⨍_{\mathcal{U}} f = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{U})}\int_{\mathcal{U}} f$.

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right) = ⨍_{\partial B_r(a)} u$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right) = ⨍_{B_r(a)} u$.

טענה: תהא $f\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Delta f\left(a\right) = \lim_{r\to 0}\frac{2n}{r^2}\left(⨍_{\partial B_r(a)} f - f\left(a\right)\right)$.

מסקנה עקרון המקסימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\max\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

מסקנה עקרון המינמום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\min\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

משפט ליוביל: תהא $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי u קבועה.

מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלעיל אזי u קבועה.

טענה אינטגרל פואסון: יהי $n\geq 3$ תהא $u\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ באשר $\mathrm{supp}\left(u\right)$ קומפקטי ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $u\left(a\right) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)(n-2)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Delta u(x)}{|x-a|^{n-2}}\mathrm{d}x$.

משפט גרעין פואסון: תהא $u:\overline{B_1^n\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר $u_{\restriction_{B_1^n(0)}}$ הרמונית אזי לכל $a\in B_1^n\left(0\right)$ מתקיים $u\left(a\right) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\left(x\right)\cdot\frac{1-\left\|a\right\|^2}{\left\|x-a\right\|^n}\mathrm{dVol}_{n-1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^2\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}\right)$ אזי $u:\overline{B_1^n\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $u\left(x\right) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f\left(y\right)\cdot\frac{1-\left\|x\right\|^2}{\left\|y-x\right\|^n}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y\right)$ הינה הרמונית וכן $u_{\restriction_{\mathbb{S}^{n-1}}} = f$.