

רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1, \dots, a_n\}$ מתקיים $((a = a_1) \vee \dots \vee (a = a_n)) \iff (a \in \{a_1, \dots, a_n\})$.
סימון: תהא Σ קבוצה אזי $\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$.

טענה: תהא Σ קבוצה תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי קיימת ויחידה $S \subseteq \Sigma^*$ המקיימת $B \subseteq S$.

• S סגורה להפעלת F .

• מינימליות: תהא $A \subseteq \Sigma^*$ עבורה $B \subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S \subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי $X_{B,F} \subseteq \Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B \subseteq X_{B,F}$.

עולם באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי Σ .

בסיס באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי B .

טענה: תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי $X_{B,F} = \bigcap \{Y \subseteq \Sigma^* \mid (B \subseteq Y) \wedge (F \text{ סגורה להפעלת } Y)\}$.

מסקנה הוכחה באינדוקציה מבנית: יהי עולם Σ ותהא $Y \subseteq \Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B \subseteq Y$ אזי $X_{B,F} \subseteq Y$.

אינווריאנטה: יהי עולם Σ ותהא $Y \subseteq \Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B \subseteq Y$ אזי Y .

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על \mathbb{N} אזי $(\forall n \in \mathbb{N}. p(n)) \iff (p(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}. p(n) \implies p(n+1)))$.

סדרת יצירה: יהי $a \in X_{B,F}$ אזי (a_1, \dots, a_n) עבורה $a_n = a$ וכן לכל $i \in [n]$ מתקיים $a_i \in B$ מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ- $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$.

טענה: יהי $a \in \Sigma^*$ אזי $a \in X_{B,F} \iff$ (קיימת סדרת יצירה ל- a).

מסקנה: $\{a \in \Sigma^* \mid a \text{ בעלת סדרת יצירה באורך } n\} = X_{B,F}^n$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma = \{\wedge, \vee, \neg, \implies, (,)\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a \in \Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1, \omega_2 \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ אזי

• $\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)"$

• $\vee (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \vee \omega_2)"$

• $\implies (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \implies \omega_2)"$

• $\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)"$

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $WFF = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee, \neg, \implies\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p \in WFF$ עבורו $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p \in WFF$ אזי p (פסוק אטומי) \vee (הפסוק p מתחיל עם "(" ונגמר עם ")")

מסקנה: יהיו $q_1, q_2 \in WFF$ אזי $q_1(q_2 \notin WFF)$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha \in WFF$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

• α פסוק אטומי.

• קיימים ויחידים $\beta, \gamma \in WFF$ עבורם $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$

• קיימים ויחידים $\beta, \gamma \in WFF$ עבורם $\alpha = (\beta \vee \gamma)$

• קיימים ויחידים $\beta, \gamma \in WFF$ עבורם $\alpha = (\beta \implies \gamma)$

• קיים ויחיד $\beta \in WFF$ עבורו $\alpha = (\neg \beta)$

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם $\mathcal{O}(\text{len}(\alpha))$ לבדיקה האם $\alpha \in WFF$.

סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. \neg

2. \wedge, \vee

3. \implies

אמת: T, true

שקר: F, false

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

סימון: תהא $\circ \in \{\wedge, \vee, \neg, \implies\}$ אזי טבלת האמת של \circ הינה TT_\circ .

טענה: יהיו p, q פסוקים אזי

q	$\neg q$
true	false
false	true

q	p	$q \implies p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

השמה: פונקציה $v : \{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\bar{v} : WFF \rightarrow \{F, T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\bar{v}(p) = v(p)$
- יהי α פסוק אזי $\bar{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$
- יהיו β, γ פסוקים ותהא \circ פעולה בינארית אזי $\bar{v}(\beta \circ \gamma) = TT_{\circ}(\bar{v}(\beta), \bar{v}(\gamma))$

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha \in WFF$ עבורה $\bar{v}(\alpha) = T$

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in WFF$ מסופקת על ידי v אזי $v \models \alpha$

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in WFF$ לא מסופקת על ידי v אזי $v \not\models \alpha$

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $\text{Var} : WFF \rightarrow \mathcal{P}(\{p_i\})$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\text{Var}(p) = \{p\}$
 - יהי α פסוק אזי $\text{Var}(\neg \alpha) = \text{Var}(\alpha)$
 - יהיו β, γ פסוקים ותהא \circ פעולה בינארית אזי $\text{Var}(\beta \circ \gamma) = \text{Var}(\beta) \cup \text{Var}(\gamma)$
- משפט התלות הסופית:** תהייה v_1, v_2 השמות ויהי $\alpha \in WFF$ עבורה $v_1(p) = v_2(p) \forall p \in \text{Var}(\alpha)$ אזי $\bar{v}_1(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha)$

מסקנה: יהי $\alpha \in WFF$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_{α}

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K \subseteq \{\wedge, \vee, \neg, \implies\}$ עבורה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha \in WFF$ עבורו $TT = TT_{\alpha}$

טענה: $\{\wedge, \vee, \neg, \implies\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg, \wedge, \vee \in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha \in WFF$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v \models \alpha$

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha \in WFF$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v \models \alpha$

סימון: יהי $\alpha \in WFF$ טאוטולוגיה אזי $\models \alpha$

סתירה: פסוק $\alpha \in WFF$ עבורו $\models (\neg \alpha)$

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha, \beta \in WFF$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$

סימון: יהיו $\alpha, \beta \in WFF$ שקולים אזי $\alpha \equiv \beta$

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma \subseteq WFF$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha \in \Gamma$ מתקיים $v \models \alpha$

סימון: תהא $\Gamma \subseteq WFF$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v \models \Gamma$

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma \subseteq WFF$ אזי $\alpha \in WFF$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v \models \Gamma$ מתקיים $v \models \alpha$

סימון: תהא $\Gamma \subseteq WFF$ ויהי $\alpha \in WFF$ פסוק נובע סמנטית מ- Γ אזי $\Gamma \models \alpha$

טענה: יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in WFF$ אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
- $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$
- $(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$
- $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
- $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
- $\neg(\neg \alpha) \equiv \alpha$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg \alpha) \vee (\neg \beta)$
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg \alpha) \wedge (\neg \beta)$

$$\bullet (\alpha \implies \beta) \equiv (\neg \alpha) \vee \beta$$

למה: יהי $\gamma \in \text{WFF}$ סתירה אזי לכל $\alpha \in \text{WFF}$ מתקיים $\gamma \models \alpha$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta$ אזי $\Gamma \models \beta$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \neg \beta$ אזי $\Gamma \models (\neg \alpha)$.

טענה: יהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ אזי $(\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \implies \beta))$.

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ ויהי p פסוק אטומי אזי

$$\bullet \text{ אם } \alpha = p \text{ אזי } \alpha(\varphi/p) = \varphi$$

$$\bullet \text{ אם } \alpha \text{ פסוק אטומי וכן } \alpha \neq p \text{ אזי } \alpha(\varphi/p) = \alpha$$

$$\bullet \text{ אם קיים } \beta \in \text{WFF} \text{ עבורו } \alpha = \neg \beta \text{ אזי } \alpha(\varphi/p) = \neg \beta(\varphi/p)$$

$$\bullet \text{ אם קיימים } \beta, \gamma \in \text{WFF} \text{ וקיימת פעולה בינארית } \circ \text{ עבורה } \alpha = \beta \circ \gamma \text{ אזי } \alpha(\varphi/p) = \beta(\varphi/p) \circ \gamma(\varphi/p)$$

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ ויהי $p \in \text{Var}(\alpha)$ אזי $\alpha(\varphi/p) \in \text{WFF}$.

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \text{WFF}$ ויהיו $p_1 \dots p_n$ פסוקים אטומים אזי

$$\bullet \text{ אם } \alpha = p_i \text{ עבור } i \in [n] \text{ אזי } \alpha(\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n) = \varphi_i$$

$$\bullet \text{ אם } \alpha \text{ פסוק אטומי וכן } \alpha \neq p_i \text{ לכל } i \in [n] \text{ אזי } \alpha(\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n) = \alpha$$

$$\bullet \text{ אם קיים } \beta \in \text{WFF} \text{ עבורו } \alpha = \neg \beta \text{ אזי } \alpha(\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n) = \neg \beta(\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n)$$

$$\bullet \text{ אם קיימים } \beta, \gamma \in \text{WFF} \text{ וקיימת פעולה בינארית } \circ \text{ עבורה } \alpha = \beta \circ \gamma \text{ אזי } \alpha(\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n) = \beta(\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n) \circ \gamma(\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n)$$

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \text{WFF}$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v השמה נגדיר השמה $v'(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & i \neq j \\ \bar{v}(\varphi) & i = j \end{cases}$ אזי $\bar{v}'(\alpha(\varphi/p)) = \bar{v}'(\alpha)$

מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: טענה: יהיו $\alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \text{WFF}$ יהיו $p_1 \dots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה נגדיר השמה

$$\bar{v}'(\alpha(\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n)) = \bar{v}'(\alpha) \text{ אזי } v'(p_j) = \begin{cases} v(p_j) & j \notin [n] \\ \bar{v}(\varphi_j) & j \in [n] \end{cases}$$

מסקנה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1 \dots \varphi_n \in \text{WFF}$ ויהיו $p_1 \dots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha(\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n)$ טאוטולוגיה.

הצורה הנורמלית NNF: $\text{NNF} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee\}}$

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{NNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

סימון: $\text{Conj} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge\}}$

הצורה הנורמלית DNF: $\text{DNF} = X_{\text{Conj}, \{\vee\}}$

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{DNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

סימון: $\text{Disj} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\vee\}}$

הצורה הנורמלית CNF: $\text{CNF} = X_{\text{Disj}, \{\wedge\}}$

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{CNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

מערכת הוכחה: יהי Σ אלפבית תהא $N \subseteq \Sigma^*$ תהא $A \subseteq N$ ותהא (Σ, N, A, F) אזי $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (N^n \rightarrow N)$.

הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.

נוסחאות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי N

אקסיומת של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי A

כללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי F

קבוצת המשפטים: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $X_{A,F}$

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ משפט אזי $\vdash_S \varphi$

מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$

קבוצת הטענות היכחות מהנחות: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי $X_{A \cup \Gamma, F}$

הוכחה: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי סדרת יצירה של φ

סימון: תהא S מערכת הוכחה תהיינה $\Gamma \subseteq N$ הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי $\Gamma \vdash_S \varphi$

טענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ אזי

$$\bullet \text{ מונוטוניות: תהא } \Delta \subseteq N \text{ עבורה } \Delta \vdash_S \varphi \text{ ותהא } \Delta \subseteq \Gamma \text{ אזי } \Gamma \vdash_S \varphi$$

$$\bullet \text{ קומפקטיות: תהא } \Gamma \subseteq N \text{ עבורה } \Gamma \vdash_S \varphi \text{ אזי קיימת } \Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית עבורה } \Delta \vdash_S \varphi$$

$$\bullet \text{ טרנזיטיביות: תהיינה } \Delta, \Gamma \subseteq N \text{ באשר } \Delta \vdash_S \varphi \text{ וכן לכל } \alpha \in \Delta \text{ מתקיים } \Gamma \vdash_S \alpha \text{ אזי } \Gamma \vdash_S \varphi$$

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $f \in F$ כלל היסק המקיים $f(x_1, \dots, x_n) = y$ אזי $f : \frac{x_1 \dots x_n}{y}$.
כלל הניתוק (Ponens Modus): תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $\text{MP} : \frac{(\alpha \Rightarrow \beta), \alpha}{\beta}$.
מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

- אלפבית: $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Rightarrow, (,)\}$.
- נוסחאות: $N = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Rightarrow\}}$.
- אקסיומות:

$$\begin{aligned} &A_1 = (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) - \\ &A_2 = ((\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))) - \\ &A_3 = (((\neg \alpha) \Rightarrow (\neg \beta)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) - \\ &F = \{\text{MP}\} \text{ כללי היסק:} \end{aligned}$$

טענה: יהיו α, β נוסחאות ב-HPC אזי

- $\vdash_{\text{HPC}} (\alpha \Rightarrow \alpha)$
- $\vdash_{\text{HPC}} ((\neg \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$
- $\vdash_{\text{HPC}} \{\neg \alpha\} \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)$

מסקנה: יהיו α, β נוסחאות ב-HPC באשר $\vdash_{\text{HPC}} (\neg \alpha)$ אזי $\vdash_{\text{HPC}} \{\alpha\} \vdash \beta$.

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון \vdash הוא במערכת HPC.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)) \iff (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$.

סימון: תהא מערכת הוכחה S ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $\text{Ded}(\Gamma) = \{\alpha \in N \mid \Gamma \vdash \alpha\}$.

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $\vdash ((\neg(\neg \alpha)) \Rightarrow \alpha)$.

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט הנאותות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \alpha) \iff (\Gamma \models \alpha)$.

למה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β, γ נוסחאות מעל HPC אזי

$$((\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)) \wedge (\Gamma \vdash (\beta \Rightarrow \gamma))) \Rightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \gamma))$$

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי

$$((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \wedge (\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \vdash \beta)) \Rightarrow (\Gamma \vdash \beta)$$

קבוצת הנחות עקבית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\Gamma \not\vdash_S \alpha$.

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי Γ אינה עקבית \iff קיימת α נוסחה מעל S המקיימת

$$((\Gamma \vdash_S (\neg \alpha)) \wedge (\Gamma \vdash_S \alpha))$$

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי Γ עקבית \iff (לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות עקבית מעל S עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית

מעל S המקיימת $\Gamma \subseteq \Delta$ מתקיים $\Gamma = \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC עבורה $\Gamma \vdash \alpha$ אזי $\alpha \in \Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\alpha \in \Gamma) \vee (\neg \alpha \in \Gamma)$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי

$$(\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)) \iff ((\neg \alpha \in \Gamma) \vee (\beta \in \Gamma))$$

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Δ עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash \alpha) \iff (\Gamma \models \alpha)$.

משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \alpha) \iff (\Gamma \models \alpha)$.

מסקנה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash \alpha) \iff (\Gamma \models \alpha)$.

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי $(\Gamma \models \alpha) \iff$ (לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

סימון: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ אזי $\text{Ass}(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \mid v \models \Gamma\}$.

טענה: הקבוצה $\{\{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \mid \{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \in \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על $\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$.

טענה: הטופולוגיה $\{\{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \mid \{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \in \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

הגדרה: יהי G גרף פשוט לא מכוון תהא $f : V \rightarrow \text{WFF}$ חח"ע ויהיו $(v, u) \in E$ אזי $\varphi_G : E \rightarrow \text{WFF}$ כך
 $\varphi_G((v, u)) = "f(v) \implies f(u)"$

טענה: יהי G גרף פשוט לא מכוון ותהא $f : V \rightarrow \text{WFF}$ חח"ע אזי $(G$ הינו 2-צביע) $\iff \{ \varphi_G(e) \mid e \in E \}$ ספיקה).

מסקנה: יהי G גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי $(G$ הינו 2-צביע) \iff לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו 2-צביע).

טענה: יהי G גרף בן מנייה פשוט לא מכוון אזי $(G$ הינו k -צביע) \iff לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו k -צביע).

קבוצת השמות גדירה: קבוצה $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.
טענה: \emptyset גדירה.

טענה: $\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$ גדירה.

טענה: לכל v השמה $\{v\}$ גדירה.

טענה: קיימת $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$ שאינה גדירה.

סימון: $K_{\text{finite}} = \{v \in \{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \mid |v^{-1}(\{T\})| < \aleph_0\}$.

טענה: K_{finite} אינה גדירה.

קבוצת השמות גדירה באופן סופי: קבוצה $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ סופית המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.

משפט: תהא $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$ התב"ש

• K גזירה וכן K^c גדירה.

• K גדירה באופן סופי.

• K גדירה על ידי פסוק יחיד.

מילון: יהי Σ אלפבית אזי $(\{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i, n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n \rightarrow \Sigma \mid i, n \in \mathbb{N}\})$.

סימני קבוע במילון: יהי (C, R, F) מילון אזי C .

סימני יחס במילון: יהי (C, R, F) מילון אזי R .

סימני פונקציה במילון: יהי (C, R, F) מילון אזי F .

מילון סופי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ בעל מספר סופי של סימנים.

מילון יחסי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ חסר סימני פונקציה.

לוגיקה מסדר ראשון: יהי Σ אלפבית ויהי σ מילון אזי $(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{",(", ")", "\neg, \vee, \wedge, \implies\}, \{\forall, \exists\}, \sigma)$.

משנתים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: $\{",(", ")", "\neg, \vee, \wedge, \implies\}$.

קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies\}$.

כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: תהא L לוגיקה מסדר ראשון אזי המילון D בה.

שמות עצם מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{f_{i,n} \mid i, n \in \mathbb{N}\}}$.

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי σ מילון ויהי t שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

• t משתנה.

• t סימן קבוע.

• קיים יחיד סימן פונקציה $f_{i,n}$ ושמות עצם $t_1 \dots t_n$ עבורם $t = f(t_1 \dots t_n)$.

הגדרה: יהי σ מילון יהי x משתנה ותהא $\alpha \in \sigma$ אזי

• $\forall(\alpha, x) = "\forall x \alpha"$

• $\exists(\alpha, x) = "\exists x \alpha"$

נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $\{R_{n,i}(t_1 \dots t_n) \mid (i, n \in \mathbb{N}) \wedge (t_1 \dots t_n \text{ שמות עצם})\}$.

נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{R_{n,i}(t_1 \dots t_n) \mid (i, n \in \mathbb{N}) \wedge (t_1 \dots t_n \text{ שמות עצם})\}, \{\wedge, \vee, \neg, \implies, \forall, \exists\}}$.

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

• α נוסחה אטומית.

• קיימת ויחידה נוסחה β עבורה $\alpha = "\neg \beta"$.

• קיימות ויחידות נוסחאות β, γ וכן פעולה בוליארית \circ עבורן $\alpha = "(\beta \circ \gamma)"$.

• קיימת ויחידה נוסחה β וכן משתנה x וכן כמות Q עבורם $\alpha = "Qx \beta"$.

משתנה חופשי בשם עצם: נגדיר $\text{FV} : \{t \mid \sigma \text{ עצם במילון } \sigma\} \rightarrow \mathcal{P}(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ כך

• יהי $c \in \sigma$ סימן קבוע אזי $FV(c) = \emptyset$.

• יהי $x \in \sigma$ משתנה אזי $FV(x) = \{x\}$.

• יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $f \in \sigma$ סימן פונקציה אזי $FV(f(t_1 \dots t_n)) = \bigcup FV(t_i)$.

משתנה חופשי בנוסחה: נגדיר $\mathcal{P}(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{\varphi \mid \sigma \text{ נוסחה במילון } \sigma\})$ כך

• יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $FV(R(t_1 \dots t_n)) = \bigcup FV(t_i)$.

• תהא φ נוסחה אזי $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$.

• תהיינה φ, ψ נוסחאות ויהי \circ פעולה בוליאנית אזי $FV(\varphi \circ \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$.

• תהא נוסחה φ יהי משתנה x ויהי כמת Q עבורם $FV(Qx\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\}$.

נוסחה סגורה: נוסחה φ עבורה $FV(\varphi) = \emptyset$.

סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. \forall, \exists .

2. \neg .

3. \wedge, \vee .

4. \implies .

מבנה עבור מילון: יהי σ מילון יהי $D \neq \emptyset$ ותהא $C : \{c_i\} \rightarrow D$ וכן $R : \{R_{n,i}\} \rightarrow D^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ וכן

$(D, C(c_0), \dots, R(R_{2,0}), \dots, f(f_{0,0}))$ אזי $F : \{f_{n,i}\} \rightarrow (D^n \rightarrow D)$.

תחום של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי D .

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ בעל תחום D אזי $D^M = D$.

פירוש של סימנים במילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $(C(c_0), \dots, R(R_{2,0}), \dots, f(f_{0,0}))$.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $c_i^M = C(c_i)$ וכן $R_{n,i}^M = R(R_{n,i})$ וכן $f_{n,i}^M = F(f_{n,i})$.

השמה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $v : \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow D^M$.

השמת ערך לשם עצם: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ יהי ותהא v השמה אזי

• יהי $c_i \in \sigma$ סימן קבוע אזי $\bar{v}(c_i) = c_i^M$.

• יהי $x_i \in \sigma$ משתנה אזי $\bar{v}(x_i) = v(x_i)$.

• יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $f \in \sigma$ סימן פונקציה אזי $\bar{v}(f(t_1 \dots t_n)) = f^M(\bar{v}(t_1) \dots \bar{v}(t_n))$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ויהי t שם עצם עבורו $\forall x \in FV(t). v_1(x) = v_2(x)$ אזי

$\bar{v}_1(t) = \bar{v}_2(t)$.

השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי $x_j \in \sigma$ משתנה ויהי $d \in D^M$ אזי נגדיר השמה

$v[d/x_j](x_i) = \begin{cases} v(x_i) & i \neq j \\ d & \text{else} \end{cases}$.

ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא v השמה אזי

• יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_n)) \in R^M \iff (\bar{v}(R(t_1 \dots t_n)) = T)$.

• תהא α נוסחה אזי $\bar{v}(\neg\alpha) = TT_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$.

• תהיינה α, β נוסחאות ויהי \circ קשר בינארי אזי $\bar{v}(\alpha \circ \beta) = TT_{\circ}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta))$.

• תהא φ נוסחה אזי $(\bar{v}(\exists x\varphi) = T) \iff (\exists d \in D^M (\bar{v}[d/x](\varphi) = T))$.

• תהא φ נוסחה אזי $(\bar{v}(\forall x\varphi) = T) \iff (\forall d \in D^M (\bar{v}[d/x](\varphi) = T))$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x \in FV(t). v_1(x) = v_2(x)$ אזי

$\bar{v}_1(\varphi) = \bar{v}_2(\varphi)$.

נוסחה ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי נוסחה φ עבורה $\bar{v}(\varphi) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא φ נוסחה ספיקה ב- M אזי $M, v \models \varphi$.

t-מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה יהי M מבנה ותהא v השמה עבורם $M, v \models \varphi$ אזי (M, v) .

קבוצת נוסחאות ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים $\bar{v}(\varphi) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא Γ קבוצת נוסחאות ספיקה ב- M אזי $M, v \models \Gamma$.

נוסחה ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M והשמה v עבורם $M, v \models \varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא v השמה ותהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה אם (M, v) t-מודל של Γ אז (M, v) t-מודל של

φ אזי $\Gamma \models^t \varphi$.

נוסחאות t -שקולות: יהי σ מילון ותהא v השמה אזי נוסחאות φ, ψ עבורן $\varphi \models^t \psi$ וכן $\{\varphi\} \models^t \psi$.

נוסחה t -תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ ולכל v השמה מתקיים $(M, v) \models^t \varphi$.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t -תקפה אזי $\models^t \varphi$.

נוסחה נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי נוסחה φ עבורה לכל v השמה מתקיים $M, v \models \varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא φ נוסחה נכונה ב- M אזי $M \models \varphi$.

v -מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה אזי מבנה M עבורו $M \models \varphi$.

קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים $M \models \varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא Γ קבוצת נוסחאות נכונה ב- M אזי $M \models \Gamma$.

נוסחה v -ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M עבורו $M \models \varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה אם $M \models^v \varphi$ מודל של Γ אז $M \models^v \varphi$ מודל של φ אזי $\Gamma \models^v \varphi$.

נוסחאות v -שקולות: יהי σ מילון אזי נוסחאות φ, ψ עבורן $\varphi \models^v \psi$ וכן $\{\varphi\} \models^v \psi$.

נוסחה v -תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ מתקיים $M \models^v \varphi$ מודל של φ .

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה v -תקפה אזי $\models^v \varphi$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי $\left(\models^v \varphi \right) \iff \left(\models^t \varphi \right)$.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה תקפה אזי $\exists x \varphi$ תקפה וכן $\forall x \varphi$ תקפה.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x \varphi$ תקפה אזי φ תקפה.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma \models^t \varphi \right) \implies \left(\Gamma \models^v \varphi \right)$.

פסוק: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה $FV(\varphi) = \emptyset$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת פסוקים ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma \models^t \varphi \right) \iff \left(\Gamma \models^v \varphi \right)$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $(\Gamma \cup \{\varphi\}) \models^t \neg \varphi \iff (\Gamma \not\models^t \neg \varphi)$.

טענה: יהי σ מילון ותהינה φ, ψ נוסחאות אזי $(\varphi, \psi \text{ הן } t\text{-שקולות}) \iff (\varphi \iff \psi) \text{ תקפה}$.

איזומורפיזם בין מבנים: יהי σ מילון והיו M, N מבנים מעל σ אזי $G : D^M \rightarrow D^N$ חח"ע ועל עבורה

- לכל סימן קבוע $c \in \sigma$ מתקיים $G(c^M) = c^N$.
- לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ ולכל $a_1 \dots a_n \in D^M$ מתקיים $G(f^M(a_1 \dots a_n)) = f^N(G(a_1) \dots G(a_n))$.
- לכל סימן יחס $R \in \sigma$ ולכל $a_1 \dots a_n \in D^M$ מתקיים $(a_1 \dots a_n \in R^M) \iff ((G(a_1) \dots G(a_n)) \in R^N)$.

מבנים איזומורפיים: יהי σ מילון אזי מבנים M, N מעל σ עבורם קיים איזומורפיזם G מ- M ל- N .

טענה: יהי σ מילון והיו M, N מבנים איזומורפיים מעל σ והי φ פסוק אזי $(M \models \varphi) \iff (N \models \varphi)$.

הערה: יהי σ מילון בעל יחס שיוויון Id דו-מקומי אזי לכל מבנה M נגדיר $\text{Id}^M = \text{Id}_M$ ונסמן את היחס בעזרת $=$.

הצבת שם עצם בשם עצם: יהיו r, s שמות עצם והי x משתנה אזי

- אם s סימן קבוע אזי $s[r/x] = s$.
- אם $s = x$ אזי $s[r/x] = r$.
- אם $s \neq x$ משתנה אזי $s[r/x] = s$.
- אם $s = f(t_1 \dots t_n)$ אזי $s[r/x] = f(t_1[r/x] \dots t_n[r/x])$.

הצבת שם עצם בנוסחה: תהא φ נוסחה יהי r שמות עצם והי x משתנה אזי

- אם $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$ אזי $\varphi[r/x] = R(t_1[r/x] \dots t_n[r/x])$.
- אם $\varphi = \neg \alpha$ אזי $\varphi[r/x] = \neg(\alpha[r/x])$.
- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי $\varphi[r/x] = \alpha[r/x] \circ \beta[r/x]$.
- אם $\varphi = \forall x \alpha$ אזי $\varphi[r/x] = \forall x \alpha$.
- אם $\varphi = \exists x \alpha$ אזי $\varphi[r/x] = \exists x \alpha$.
- אם $\varphi = \forall y (\alpha)$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi[r/x] = \forall y (\alpha[r/x])$.
- אם $\varphi = \exists y (\alpha)$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi[r/x] = \exists y (\alpha[r/x])$.

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא φ נוסחה והי x משתנה אזי

- אם $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$ אזי שם עצם x .

- אם $\neg \alpha$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב- α .
- אם $\alpha \circ \beta$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב- α וכן ב- β .
- אם $\forall y \alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב- α אזי שם עצם r .
- אם $\exists y \alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב- α אזי שם עצם r .
- אם $\forall y \alpha$ וכן $x \in FV(\varphi)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב- α וכן $y \notin FV(r)$.
- אם $\exists y \alpha$ וכן $x \in FV(\varphi)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב- α וכן $y \notin FV(r)$.

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f : \mathcal{P}(\{x_i\}) \rightarrow \mathcal{P}(\{x_i\})$ כך

- אם $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$ אזי $f(\varphi) = \emptyset$.
- אם $\neg \alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha)$.
- אם $\alpha \circ \beta$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$.
- אם $\forall x \alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$.
- אם $\exists y \alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{y\}$.

למה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי $(r$ חופשי להצבה ב- $\varphi) \iff (y \in FV(r)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור y ב- $\varphi[r/x]$).

סימון: יהי s שם עצם x יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי נגדיר השמה v כך $v(\bar{v}(r)/x)(y) = \begin{cases} v(y) & x \neq y \\ \bar{v}(r) & \text{else} \end{cases}$

מסקנה: יהי s שם עצם x יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי $\bar{v}(s[r/x]) = \bar{v}(\bar{v}(r)/x)(s)$

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב- φ אזי $\bar{v}(\varphi[r/x]) = \bar{v}(\bar{v}(r)/x)(\varphi)$

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה ב- φ אזי $\bar{v}(\varphi) = \bar{v}(\bar{v}(x)/y)(\varphi[y/x])$

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב- φ אזי

- $(\exists x \varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi[y/x]))$
- $(\forall x \varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi[y/x]))$

הצורה הנורמלית PNF: $X_{\{\varphi\}} : \{\varphi, \exists, \forall\}$ נוסחה חסרת כמתים

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי $(\varphi$ בצורת PNF) \iff (קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן $x_1 \dots x_n$ משתנים וכן $Q_1 \dots Q_n$ כמתים עבורם $(\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \alpha)$

טענה: תהיינה φ, ψ נוסחאות אזי

- $(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi))$
- $(\exists x (\varphi \vee \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi))$
- תהא $x \notin FV(\psi)$ אזי $(\forall x \varphi) \vee \psi \equiv^t (\forall x (\varphi \vee \psi))$
- תהא $x \notin FV(\psi)$ אזי $(\exists x \varphi) \wedge \psi \equiv^t (\exists x (\varphi \wedge \psi))$
- $(\neg (\forall x \varphi)) \equiv^t (\exists x (\neg \varphi))$
- $(\neg (\exists x \varphi)) \equiv^t (\forall x (\neg \varphi))$

משפט: תהא φ נוסחה אזי קיימת נוסחה α בצורת PNF עבורה $\varphi \equiv^t \alpha$

פסוק אוניברסלי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $FV(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$ המקיימת $\forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$

פסוק יישי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $FV(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$ המקיימת $\forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל σ ויהי סימן קבוע $c \notin \sigma$ אזי $\exists x \varphi$ ספיקה מעל σ \iff $\varphi[c/x]$ ספיקה מעל $\sigma \cup \{c\}$

סקולמיזציה למילון: יהי σ מילון ויהיו $a_1 \dots a_n$ סימני קבועים ופונקציות אזי $\sigma \cup \{a_1 \dots a_n\}$

קבועי סקולם: יהי σ מילון ויהי $\sigma \cup \{a_1 \dots a_n\}$ סקולמיזציה של סימני קבועים ל- σ אזי $a_1 \dots a_n$

פונקציות סקולם: יהי σ מילון ויהי $\sigma \cup \{a_1 \dots a_n\}$ סקולמיזציה של פונקציות ל- σ אזי $a_1 \dots a_n$

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ אזי $\forall y_1 \dots \forall y_n (\varphi[f(y_1 \dots y_n)/x]) \iff \varphi$ ספיק מעל σ \iff $\forall y_1 \dots \forall y_n (\varphi[f(y_1 \dots y_n)/x])$ ספיק מעל סקולמיזציה $\sigma \cup \{f\}$ של פונקציה n -מקומית.

משפט סקולם: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ באשר φ מעל מילון σ ומחזיר פסוק אוניברסלי ψ באשר ψ מעל מילון σ' עבורו $(\varphi$ ספיק) \iff $(\psi$ ספיק).

טענה: קיים אלגוריתם FOLWFF המקבל נוסחה חסרת משתנים וכמתים φ מעל מילון ללא שיוויון ומחזיר פסוק α מעל WFF המקיים

- $(\varphi$ ספיק) \iff $(\alpha$ ספיק).
- $(\varphi$ תקפה) \iff $(\alpha$ טאוטולוגיה).

למה: תהא φ נוסחה חסרת משתנים וכמתים המורכבת מיחסים $\alpha_1 \dots \alpha_k$ נגדיר השמה של WFF כך $v(p_i) = (M \models \alpha_i)$ אזי

$$(M \models \psi) \iff (\bar{v}(\text{FOLWFF}(\psi)) = T)$$

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה הרברנד: יהי σ מילון ללא שיוויון אזי מבנה M המקיים

• לכל $a \in D^M$ קיים שם עצם סגור α עבורו $\alpha^M = a$.

• יהיו α, β שמות עצם שונים אזי $\alpha^M \neq \beta^M$.

מסקנה: יהי σ מילון בן-מנייה ויהי M מבנה הרברנד של σ אזי D^M בן-מנייה.

הערה: מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב $\{\varphi \mid \text{שם עצם חסר משתנים ב-}\sigma\} = D^M$.

מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד M על σ .

טענה: יהי M מבנה הרברנד מעל σ ותהא v השמה עבורה $v(x_i) = t_i$ אזי

• יהי r שם עצם באשר $\text{FV}(r) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $\bar{v}(r) = r[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$.

• תהא φ נוסחה באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $(M, v \models \varphi) \iff (M \models \varphi[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n])$.

• תהא φ נוסחה אזי $(\exists x\varphi \text{ ספיקה}) \iff (\text{קיים שם עצם סגור } s \text{ עבורו } \varphi[s/x] \text{ ספיקה})$.

• תהא φ נוסחה עבורה $\exists x\varphi$ פסוק אזי $(\exists x\varphi \text{ תקפה}) \iff (\text{קיים שם עצם סגור } s \text{ עבורו } \varphi[s/x] \text{ תקפה})$.

• תהא φ נוסחה אזי $(\forall x\varphi \text{ ספיקה}) \iff (\text{לכל שם עצם סגור } s \text{ מתקיים כי } \varphi[s/x] \text{ ספיקה})$.

• תהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ פסוק אזי $(\forall x\varphi \text{ תקפה}) \iff (\text{לכל שם עצם חסר משתנים } s \text{ מתקיים כי } \varphi[s/x] \text{ תקפה})$.

משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי $(\varphi \text{ ספיקה}) \iff (\varphi \text{ ספיק במבנה הרברנד})$.

מופעי בסיס: תהא φ נוסחה חסרת כמתים באשר $\text{FV}(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי

$\text{GroundInstance}(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi) = \{\varphi[s_1/x_1, \dots, s_n/x_n] \mid s_1 \dots s_n \text{ שמות עצם חסרי משתנים}\}$

סימון: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי $\text{GroundInstance}(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \text{GroundInstance}(\varphi)$.

טענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים וכמתים אזי $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\Gamma \text{ ספיקה במבנה הרברנד})$.

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

• Γ ספיקה.

• Γ ספיקה במבנה הרברנד.

• $\text{GroundInstance}(\Gamma)$ ספיקה.

• $\text{GroundInstance}(\Gamma)$ ספיקה במבנה הרברנד.

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון ללא שיוויון ותהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי

• $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\text{לכל } \Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית } \Delta \text{ ספיקה})$.

• $(\Gamma \models^t \varphi) \iff (\text{קיימת } \Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית עבורה } \Delta \models^t \varphi)$.

• $(\Gamma \models^v \varphi) \iff (\text{קיימת } \Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית עבורה } \Delta \models^v \varphi)$.

טענה: יהיו x, y משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\{E(\cdot, \cdot)\}$ המקיימת $(M \models \Gamma) \iff (\text{יש מסלול ב-} M \text{ מ-} x \text{ ל-} y)$.

משפט: יהי σ מילון בעל קבוע ותהא φ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי $(\exists x\varphi \text{ תקפה}) \iff (\text{קיימים שמות עצם סגורים } t_1 \dots t_n \text{ עבורם}$

$\varphi[t_1/x] \vee \dots \vee \varphi[t_n/x]$ תקפה).

מבנה הנקין: יהי σ מילון אזי מבנה H מעל σ עבורו לכל $a \in D^H$ קיים שם עצם סגור t עבורו $t^H = a$.

הערה: ניתן להגדיר מילון ומבנה לא בני-מנייה.

משפט לוונהיים-סקולם היורד: יהי σ מילון בן-מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ אזי $(\varphi \text{ ספיקה}) \iff (\text{קיים מבנה בן-מנייה } M \text{ מעל } \sigma \text{ בו}$

φ ספיקה).

משפט לוונהיים-סקולם העולה: יהי σ מילון בן-מנייה יהי M מבנה בן-מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ באשר φ ספיקה ב- M אזי לכל

עוצמה אינסופית κ ולכל מבנה M' מעוצמה κ מעל σ מתקיים כי φ ספיקה ב- M' .

מסקנה: יהי σ מילון בן-מנייה ותהא κ עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל σ המקיימת

$(|M| = \kappa) \iff (M \models \Gamma)$.

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן-מנייה לתורת הקבוצות.

סימון: יהי σ מילון אזי $\text{VALID} = \{\varphi \mid (\varphi \text{ נוסחה מעל } \sigma) \wedge (\varphi \text{ תקפה})\}$.

משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי σ מילון אזי $\text{VALID} \in \mathcal{RE}$.

משפט צ'רץ'-טיורינג: $\text{HALT} \leq_m \text{VALID}$.

מסקנה: $\text{VALID} \notin \mathcal{R}$.

בעיית הריצוף: יהיו $R_1 \dots R_n$ ריבועים בעלי צלע מאורך 1 וכן כל צלע שלהם צבועה בצבע אזי האם ניתן לרצף את $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ בעזרת הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

בעיית הריצוף: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $R : [n]^2 \times \{\text{left, right, above, below}\} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$ אזי $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow [n]$ עברה

- לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n-1}{m}), \text{left}) = \text{yes}$.
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n+1}{m}), \text{right}) = \text{yes}$.
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n}{m+1}), \text{above}) = \text{yes}$.
- לכל $m \in \mathbb{N}_+$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n}{m-1}), \text{below}) = \text{yes}$.

סימון: f פתרון לבעיית הריצוף עבור R $\text{TILING} = \{(n, R, f) \mid R \text{ פתרון לבעיית הריצוף עבור } R\}$.

משפט: $\text{VALID} \leq_m \text{TILING}$.

מסקנה: $\text{TILING} \notin \mathcal{R}$.

יחס קונגרואנציה: יהי σ מילון אזי $E \in \sigma$ סימן יחס דר-מוקומי המקיים

- רפלקסיבי: $\forall x (E(x, x))$.
- סימטרי: $\forall x \forall y (E(x, y) \implies E(y, x))$.
- טרנזיטיבי: $\forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \implies E(x, z))$.
- לכל $f \in \sigma$ סימן פונקציה מתקיים $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i)) \implies E(f(x_1 \dots x_n), f(y_1 \dots y_n)))$.
- לכל $R \in \sigma$ סימן יחס מתקיים $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i)) \implies (R(x_1 \dots x_n) \iff R(y_1 \dots y_n)))$.

הערה: בהינתן מילון עם שיויון σ ניתן לחשוב על השיויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן את המילון עם קונגרואנציה במקום שיויון.

מילון מחלקות קונגרואנציה: יהי מילון σ עם שיויון σ והי M מבנה על σ אזי מבנה M_E מעל σ_E המקיים

$$D^{M'} = D^M /_E \bullet$$

- לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ מתקיים $f^{M'}([a_1]_E, \dots, [a_n]_E) = [f^M(a_1 \dots a_n)]_E$.
- לכל סימן יחס $R \in \sigma$ מתקיים $R^{M'}([a_1]_E, \dots, [a_n]_E) \iff R^M(a_1 \dots a_n)$.

החלפת שיויון ביחס קונגרואנציה: תהא φ נוסחה מעל מילון עם שיויון σ באשר $f_1 \dots f_n$ סימני הפונקציות ב- φ וכן $R_1 \dots R_m$ סימני היחס ב- φ אזי $\varphi_E = \varphi[E/=] \wedge (E \text{ יחס קונגרואנציה ביחס } E) \wedge (\bigwedge_{i=1}^m (E_i \text{ יחס קונגרואנציה ביחס } E_i)) \wedge (\bigwedge_{i=1}^n (E_i \text{ יחס קונגרואנציה ביחס } E_i))$.

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ עם שיויון σ והי M מבנה מעל σ ותהא v השמה נגדיר השמה $v_E : \{x_i\} \rightarrow D^{M_E}$ באשר $v_E(x_i) = [v(x_i)]_E$.

$$(M_E, v_E \models \varphi_E) \iff (M, v \models \varphi) \text{ אזי } v_E(x_i) = [v(x_i)]_E$$

משפט: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ באשר φ מעל מילון עם שיויון σ ומחזיר נוסחה חסרת שיויון ψ באשר ψ מעל מילון σ' עבורו $(\varphi \text{ ספיקה}) \iff (\psi \text{ ספיקה})$.

משפט: תהא Γ קבוצת נוסחאות מעל σ עם שיויון σ אזי $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\Gamma_E \text{ ספיקה})$.

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון עם שיויון σ ותהא φ נוסחה אזי $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית } \Delta \text{ סופית } \Delta \text{ ספיקה})$.

המודל הסטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי מבנה $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$ עבורו

$$c_1^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = 1 \text{ וכן } c_0^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = 0 \text{ וכן } D^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = \mathbb{N} \bullet$$

$$f_+^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a, b) = a + b \bullet$$

$$f_\times^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a, b) = a \times b \bullet$$

$$(a, b) \in R_>^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} \iff (a > b) \bullet$$

פסוקים נכונים אריתמטיים: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי $\text{AT} = \{\alpha \mid (\mathcal{M}_{\mathbb{N}} \models \alpha) \wedge (\text{FV}(\alpha) = \emptyset)\}$

מודל לא סטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי מבנה M עבורו $M \models \text{AT}$ וכן M אינו איזומורפי ל- $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$.

טענה: יהי M מודל לא סטנדרטי של הטבעיים אזי $|D^M| > \aleph_0$.

כלל ג'ן: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי $\text{Gen} : \frac{\alpha}{\forall x \alpha}$

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי σ מילון חסר שיויון אזי

$$\Sigma = \sigma \bullet$$

$$N = X_{\{t \mid \text{שם עצם } t\}, \{\neg, \implies, \forall\}} \bullet$$

• אקסיומות:

- $A_1 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha))$
- $A_2 = ((\alpha \implies (\beta \implies \gamma)) \implies ((\alpha \implies \beta) \implies (\alpha \implies \gamma)))$
- $A_3 = (((\neg \alpha) \implies (\neg \beta)) \implies (\beta \implies \alpha))$
- $A_4 = ((\forall x \alpha) \implies \alpha[t/x])$ אזי α ב- x במקום x חופשי להצבה במקום x
- $A_5 = ((\forall x (\alpha \implies \beta)) \implies (\alpha \implies (\forall x \beta)))$ אזי $x \notin \text{FV}(\alpha)$ יהי x

• כללי היסק: $F = \{\text{MP}, \text{Gen}\}$

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

משפט הנאותות: יהי σ מילון ללא שיויון תהייה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $(\Gamma \vdash_{\text{HC}} \alpha) \implies (\Gamma \models^v \alpha)$

טענה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ פסוק באשר $\vdash_{\text{HPC}} \alpha$ וכן $\text{Var}(\alpha) = \{p_1 \dots p_n\}$ ויהי $\varphi_1 \dots \varphi_n$ נוסחאות אזי $\vdash_{\text{HC}} \alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]$

משפט הדידוקציה: תהייה Γ הנחות מעל HC ותהייה α, β נוסחאות מעל HC עבורן $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{HC}} \beta$ וכן בהוכחה לא הופעל כלל Gen

על משתנה חופשי ב- α אזי $\Gamma \vdash_{\text{HC}} (\alpha \implies \beta)$

משפט הדידוקציה: תהייה Γ הנחות מעל HC ותהייה α, β נוסחאות מעל HC עבורן $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{HC}} \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \vdash_{\text{HC}} \beta$ וכן בהוכחות

לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב- α אזי $\Gamma \vdash_{\text{HC}} \beta$

קבוצת נוסחאות σ -שלמה: יהיו σ, Σ מילונים באשר $\sigma \subseteq \Sigma$ אזי קבוצת נוסחאות Γ מעל Σ עבורה לכל פסוק φ מעל σ מתקיים $(\varphi \in \Gamma) \vee (\neg \varphi \in \Gamma)$

קבוצת נוסחאות בעלת תכונת הנקין: יהי σ מילון אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל נוסחה φ באשר $\neg \forall x \varphi$ פסוק וכן $\neg \forall x \varphi \in \Gamma$ מתקיים שקיים סימן קבוע $c \in \sigma$ עבורו $\neg \varphi[c/x] \in \Gamma$

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\sigma \subseteq \Sigma$ וקיימת Δ עקבית σ -שלמה מעל Σ המקיימת $\Gamma \subseteq \Delta$

למה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית תהא φ נוסחה באשר $\neg \forall x \varphi$ פסוק וכן $\neg \forall x \varphi \in \Gamma$ ויהי $c \notin \sigma$ סימן קבוע אזי $\Gamma \cup \{\neg \varphi[c/x]\}$ עקבית מעל $\sigma \cup \{c\}$

משפט הנקין: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\sigma \subseteq \Sigma$ וקיימת Δ עקבית מעל Σ המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\sigma \subseteq \Sigma$ וקיימת Δ מעל Σ עקבית Σ -שלמה המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין יהי M מבנה ההרברנד מעל σ עבורו $((t_1 \dots t_n) \in R^M) \iff (R(t_1 \dots t_n) \in \Gamma)$ ולכל שמות עצם $t_1 \dots t_n$ ותהא φ נוסחה אזי $(M \models \varphi) \iff (\varphi \in \Gamma)$

מסקנה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין אזי קיים מבנה M עבורו $M \models \Gamma$

משפט השלמות של גדל: יהי σ מילון ללא שיויון תהייה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $(\Gamma \vdash_{\text{HC}} \alpha) \iff (\Gamma \models^v \alpha)$

תורה של מבנה: יהי M מבנה מעל מילון σ אזי $\text{Th}(M) = \{\varphi \mid (M \models \varphi) \wedge (\text{FV}(\varphi) = \emptyset)\}$

מסקנה: $\text{Th}(\mathcal{M}_{\mathbb{N}}) = \text{AT}$

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת פסוקים התב"ש

• לכל מבנים M, N המספקים את Γ מתקיים $\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$

• לכל פסוק φ מתקיים $(\Gamma \vdash \varphi) \vee (\Gamma \vdash (\neg \varphi))$