פונקציונל ליניארי: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f\in\mathrm{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$.

המרחב הדואלי: $V^{*}=\mathrm{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$.

טענה: V נ"ס $\Longleftarrow$ $V^{*}\cong V$.

שחלוף/העתקה הדואלית: תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(V,U\right)$ אזי $T^{t}:U^{*}\to V^{*}$ המוגדרת $T^{t}=\lambda\varphi\in U^{*}.\varphi\circ T$.

הטלה: $\Pi_{i}\left(x\right)=x_{i}$.

סימון: יהי C בסיס של V אזי $\Phi_{i}=\Pi_{i}\circ Q_{C}$.

הבסיס הדואלי: יהי C בסיס של V אזי $C^{*}=\left(\Phi_{i}\right)_{i=1}^{\dim(V)}$ בסיס של V^{*}.

טענה: יהי C בסיס של V אזי $\forall f\in V^{*}.f=\sum_{i=1}^{\dim(V)}f\left(C_{i}\right)\Phi_{i}$.

שורה של העתקה: תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(V,U\right)$ אזי $R_{i}\left(T\right)=\Phi_{i}\circ T$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}\left(T\right)=\mathrm{span}\left(\left(R_{i}\left(T\right)\right)_{i=1}^{\dim(U)}\right)$.

טענה: $\ker\left(T\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\ker\left(R_{i}\left(T\right)\right)$.

מסקנה: $\ker\left(T\right)=\bigcap_{f\in\mathcal{R}(T)}\ker\left(f\right)$.

מרחב האפסים: תהא $S\subseteq V^{*}$ אזי $S_{0}=\bigcap_{f\in S}\ker\left(f\right)$.

טענה: יהי V מ"ו ותהנא $S,T\subseteq V$

- S_{0} תמ"ו של V.
- $S\subseteq T\implies T_{0}\subseteq S_{0}$.
- $\left(\bigcup_{\alpha}S_{\alpha}\right)_{0}=\bigcap_{\alpha}\left(S_{\alpha}\right)_{0}$.
- $S_{0}=\left(\mathrm{span}\left(S\right)\right)_{0}$.
- $\left(\left\{0\right\}\right)_{0}=V$.
- $\left(V^{*}\right)_{0}=\left\{0\right\}$.

המרחב המאפס: תהא $A\subseteq V$ אזי $A^{0}=\left\{\varphi\in V^{*}\mid\varphi_{\restriction_{A}}=0\right\}$.

טענה: יהי V מ"ו ותהנא $A,B\subseteq V$.

- A^{0} תמ"ו של V^{*}.
- $A\subseteq B\implies B^{0}\subseteq A^{0}$.
- $\left(\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}\right)^{0}=\bigcap_{\alpha}\left(A_{\alpha}\right)^{0}$.
- $A^{0}=\left(\mathrm{span}\left(A\right)\right)^{0}$.
- $\left(\left\{0\right\}\right)^{0}=V^{*}$.
- $\left(V^{*}\right)^{0}=\left\{0\right\}$.

טענה: יהי V מ"ו נ"ס

- יהי $U\subseteq V$ תמ"ו אזי $\left(U^{0}\right)_{0}=U$.
- יהי $W\subseteq V^{*}$ תמ"ו אזי $\left(W_{0}\right)^{0}=W$.

משפט: $\dim\left(M\right)+\dim\left(M^{0}\right)=\dim\left(V\right)$.

משפט: $\dim\left(W\right)+\dim\left(W_{0}\right)=\dim\left(V^{*}\right)$.

משפט: יהי B בסיס של V^{*} אזי קיים בסיס C של V המקיים $B=C^{*}$.

מסקנה: U נ"ס $\Longleftarrow$ $\mathcal{R}\left(T\right)=\left(\ker\left(T\right)\right)^{0}$.

מסקנה: $\dim\left(\mathcal{R}\left(T\right)\right)=\dim\left(\mathrm{Im}\left(T\right)\right)=\mathrm{rank}\left(T\right)$.

המרחב הדואלי השני: $\left(V^{*}\right)^{*}$.

פונקציונל ההצבה/האיזומורפיזם הקנוני: $\lambda v\in V.\lambda\psi\in V^{*}.\psi\left(v\right)$.

משפט: פונקציונל ההצבה ליניארי וחח"ע.

דמיון מטריצות: $\forall A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right).A\sim B\iff\exists P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right).A=PBP^{-1}$.

מטריצה לכסינה: $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת $\exists\lambda\in\mathbb{F}^{n}.\exists P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right).A\sim\text{Diag}\left(\lambda\right)$.

מטריצה מלכסנת: $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורה $P\cdot\text{Diag}\left(\lambda\right)\cdot P^{-1}=A$.

העתקה לכסינה: $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת כי קיים בסיס B עבורו $\left[T\right]_{B}$ אלכסונית.

בסיס מלכסן: בסיס B עבורו $\left[T\right]_{B}$ אלכסונית.

הערה: T לכסינה $\iff$ לכל בסיס C מתקיים כי $\left[T\right]_{C}$ לכסינה.

וקטור עצמי (ו"ע): תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ אזי $0\neq v\in V$ המקיים $\exists\lambda\in\mathbb{F}.T\left(v\right)=\lambda v$.

ערך עצמי (ע"ע): תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ אזי $\lambda\in\mathbb{F}$ המקיים $\exists v\in V.T\left(v\right)=\lambda v$.

משפט: T לכסינה $\iff$ קיים בסיס B של וקטורים עצמיים.

המרחב העצמי (מ"ע): יהי λ ע"ע של T אזי $V_{\lambda}=\left\{ v\in V\mid T\left(v\right)=\lambda v\right\}$.

טענה: V_{λ} תמ"ו של V, $V_{0}=\ker\left(T\right)$.

מסקנה: T הפיכה $\iff$ $V_{0}=\left\{ 0\right\}$ $\iff$ 0 אינו ע"ע של T.

טענה: $V_{\lambda}=\ker\left(\lambda\cdot Id_{V}-T\right)$.

מסקנה: λ ע"ע של A $\iff$ $\left|\lambda I-A\right|=0$.

הפולינום האופייני (פ"א): תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $f_{A}\left(x\right)=\left|xI-A\right|$.

מסקנה: λ ע"ע של A $\iff$ $f_{A}\left(\lambda\right)=0$.

הגדרה: יהי B בסיס של V אזי $f_{T}\left(x\right)=f_{\left[T\right]_{B}}\left(x\right)$.

טענה: $A\sim B\implies f_{A}\left(x\right)=f_{B}\left(x\right)$.

פולינום מתוקן: $\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$ המקיים $a_{n}=1$.

טענה: יהי R תחום שלמות תהא $A\in M_{n}\left(R\right)$ ונניח כי $f_{A}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$

- $f_{A}\left(x\right)\in R\left[x\right]$ פולינום מתוקן.
- $\deg\left(f_{A}\left(x\right)\right)=n$.
- $a_{n-1}=-\text{trace}\left(A\right)$, $a_{0}=\left(-1\right)^{n}\left|A\right|$.

טענה: תהא $\sigma\in S_{n}$ אזי $\deg\left(\prod_{i=1}^{n}\left(xI-A\right)_{i,\sigma\left(i\right)}\right)=\sum_{i=1}^{n}\deg\left(\left(xI-A\right)_{i,\sigma\left(i\right)}\right)$.

טענה: $\deg\left(f_{A}\left(x\right)\right)\le\max_{\sigma\in S_{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\deg\left(\left(xI-A\right)_{i,\sigma\left(i\right)}\right)\right)$.

מסקנה: לכל $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ יש לכל היותר n ע"ע.

הריבוי הגאומטרי: יהי λ ע"ע אזי $\rho_{\lambda}=\dim\left(V_{\lambda}\right)$.

טענה: יהיו $\lambda_{1}\neq\lambda_{2}$ ע"ע אזי $V_{\lambda_{1}}\cap V_{\lambda_{2}}=\left\{ 0\right\}$.

משפט: יהיו $\lambda_{1},\ldots,\lambda_{k}$ ע"ע אזי $\bigoplus_{i=1}^{k}V_{\lambda_{i}}$.

מסקנה: יהיו $B_{i}\subseteq V_{\lambda_{i}}$ בת"ל לכל $i\in\left[k\right]$ אזי $B_{1}^{\frown}B_{2}^{\frown}\ldots^{\frown}B_{k}$ בת"ל.

מסקנה: A לכסינה $\iff$ $\sum_{i=1}^{k}\rho_{\lambda_{i}}=n$.

מסקנה: $\exists\lambda_{1}\neq\ldots\neq\lambda_{n}.f_{A}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x-\lambda_{i}\right)$ $\Longleftarrow$ A לכסינה.

טענה: A לכסינה $\Longleftarrow$ $\exists\lambda\in\mathbb{F}^{n}.f_{A}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x-\lambda_{i}\right)$.

הריבוי האלגברי: יהי λ ע"ע אזי $\mu_{\lambda}=\max_{n\in\mathbb{N}}\left(\left(x-\lambda\right)^{n}\mid f_{A}\left(x\right)\right)$.

משפט: לכל λ ע"ע מתקיים $\rho_{\lambda}\le\mu_{\lambda}$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A לכסינה) $\iff$ ($f_A(x)$ פריק לגורמים לינארים)$\wedge$(לכל λ ע"ע מתקיים $\rho_\lambda = \mu_\lambda$).

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית ותהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A לכסינה) $\iff$ (לכל λ ע"ע מתקיים $\rho_\lambda = \mu_\lambda$).

העתקה ניתנת למשלוש: $T \in \text{Hom}(V)$ המקיימת כי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B$ משולשית.

משפט: T ניתנת למשלוש $\iff$ $\exists \lambda \in \mathbb{F}^n . f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

T אינווריאנטי/תת מרחב שמור: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי תמ"ו $U \subseteq V$ המקיים $T[U] \subseteq U$.

טענה: $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$ הם T אינו'.

טענה: יהיו $v_1, \ldots, v_k$ ו"ע אזי $\text{span}(v_1, \ldots, v_k)$ T אינו'.

טענה: תהא $A \subseteq V$ אזי התמ"ו ה־T אינו' הקטן ביותר שמכיל את A הוא $\text{span}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} T^i[A]\right)$.

מרחב פריק: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי V מ"ו עבורו קיימים $\{0\} \neq U, W \subseteq V$ T־אינו' המקיימים $V = U \oplus W$.

הצבה בפולינום: יהי $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ותהא $A \in M_m(\mathbb{F})$ אזי $p(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$.

טענה: $\forall p \in \mathbb{F}[x] . [p(T)]_B = p([T]_B)$.

טענה: (λ ע"ע של A) $\iff$ (λ ע"ע של A^t).

טענה: יהי $p \in \mathbb{F}_n[x]$ ותהא A המקיימת $Av = \lambda v$ אזי $p(A) v = p(\lambda) v$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\ker(p(T)), \text{Im}(p(T))$ הם T-אינו'.

טענה: יהי $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ מ"ו יהי $T \in \text{Hom}(V)$ נניח כי לכל $i \in [n]$ מתקיים כי V_i T אינו' וגם B_i בסיס של V_i אזי $[T]_B = \text{Diag}\left(\left(\left[T_{\restriction_{V_i}}\right]_{B_i}\right)_{i=1}^n\right)$.

מסקנה: נניח כי $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ מ"ו ונניח כי לכל $i \in [n]$ מתקיים כי V_i T אינו' אזי $f_T(x) = \prod_{i=1}^n f_{T_{\restriction_{V_i}}}(x)$.

טענה: יהיו $\lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_n$ ע"ע של T אזי (T לכסינה) $\iff$ ($\prod_{i=1}^n (T - \lambda_i \text{Id}) = 0$).

טענה: $\forall p \in \mathbb{F}[x] . A \sim B \implies p(A) \sim p(B)$.

טענה: יהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ ותהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $g(T) f(T) = f(T) g(T)$.

מסקנה: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ותהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $f(T) \circ T = T \circ f(T)$.

מסקנה: $T \circ S = S \circ T \implies$ $\text{Im}(S)$, $\ker(S)$ הן T אינו'.

משפט קיילי המילטון: $f_A(A) = 0$.

תת חוג: יהי $\langle R, +, * \rangle$ חוג עם יחידה אזי $R' \subseteq R$ המקיים $\left\langle R', +_{\restriction_{R'^2}}, *_{\restriction_{R'^2}} \right\rangle$ חוג עם יחידה.

משפט: כל תחום שלמות הוא תת חוג של שדה.

מחלק: יהי $b \in R$ אזי $a \in R$ המקיים $\exists c \in R . a * c = b$.

סימון: אם a מחלק את b אזי $a | b$.

מסקנה: יהי R תחום שלמות ונניח כי $b = u \cdot a$ וגם $a = v \cdot b$ אזי $v \cdot u = u \cdot v = 1$.

מסקנה: $\exists u \in R^\times . a = u \cdot b \iff (b|a) \wedge (a|b)$.

חברים: $a, b \in R$ המקיימים $\exists u \in R^\times . a \cdot u = b$.

סימון: אם a, b חברים אזי $a \sim b$.

אידאל: $I \subseteq R$ המקיים $(0 \in I)\wedge(\forall a, b \in I . a + b \in I)\wedge(\forall x \in R . \forall y \in I . x \cdot y \in I)$.

האידאל הנפרש על ידי איבר: יהי $a \in R$ אזי $Ra = (a) = \{b \cdot a \mid b \in R\}$.

משפט: יהי $I \subseteq \mathbb{Z}$ אידאל אזי $\exists a \in \mathbb{Z} . I = (a)$.

האידאל הנפרש על ידי קבוצה: תהא $X \subseteq R$ אזי $(X) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid (m \in \mathbb{N}_+) \wedge (\alpha \in R^m) \wedge (v \in X^m)\}$.

טענה: תהא $\varphi : R \to S$ הומומורפיזם בין חוגים אזי $\ker(\varphi)$ אידאל.

טענה: $(a) \subseteq (b) \iff b|a$, $a \in R^\times \iff \forall a \in R . (a) = R$.

אידאל ראשי: אידאל $R \subseteq I$ המקיים $\exists a \in R.\,(a)=I$.

תחום ראשי/PID: תחום שלמות R המקיים כי כל $I \subseteq R$ אידאל הוא ראשי.

אידאל ראשוני: אידאל $I \subseteq R$ המקיים $\forall a,b \in R.ab \in I \implies (a \in I) \vee (b \in I)$.

טענה: (a) ראשוני $\iff$ a ראשוני.

טענה: יהיו $I_1, I_2 \subseteq R$ אידאלים אזי $I_1 \cap I_2$ אידאל.

אידאל פריק: אידאל $I \subseteq R$ עבורו קיימים $I \neq I_1, I_2 \subseteq R$ המקיימים $I = I_1 \cap I_2$.

טענה: (a) אי פריק $\iff$ a אי פריק.

אידאל מירבי: אידאל $I \subseteq R$ המקיים כי לכל $I \subset J$ אידאל מתקיים $J = R$.

טענה: יהי I אידאל אזי (I מירבי) $\iff$ (I אי פריק).

gcd: יהיו $r_1,\ldots,r_n \in R$ אזי $d \in R$ המקיים $(d)=(r_1,\ldots,r_n)$.

טענה: נניח כי d הוא $\gcd(r_1,\ldots,r_n)$ מתקיים $(d|r_1\ldots r_n)\wedge(a|r_1\ldots r_n \implies a|d)$.

lcm: יהיו $r_1,\ldots,r_n \in R$ אזי $d \in R$ המקיים $(d)=(r_1)\cap\ldots\cap(r_n)$.

טענה: נניח כי d הוא $\operatorname{lcm}(r_1,\ldots,r_n)$ מתקיים $(r_1\ldots r_n|d)\wedge(r_1\ldots r_n|a \implies d|a)$.

זרים: $r_1,\ldots,r_n \in R$ המקיימים כי 1 הוא $\gcd(r_1,\ldots,r_n)$.

משפט: ($r_1,\ldots,r_n$ זרים) $\iff$ $(\exists a \in R^n.\sum_{i=1}^n a_i r_i = 1)$.

ראשוני: יהי R תחום שלמות אזי $a \in R$ המקיים $\forall p,q \in R.\,(a|pq) \implies (a|p)\vee(a|q)$.

אי פריק (א"פ): $a \in R \backslash R^\times$ המקיים $\forall p,q \in R.\,(a=pq) \implies (p \in R^\times)\vee(q \in R^\times)$.

טענה: יהי R חוג ויהי $0 \neq a \in R$ אזי (a ראשוני) $\Longleftarrow$ (a א"פ).

טענה: הפיך $\cdot$ ראשוני $=$ ראשוני, הפיך $\cdot$ א"פ $=$ א"פ.

טענה: יהי R תחום ראשי ויהי $0 \neq a \in R$ אזי (a ראשוני) $\iff$ (a א"פ).

פריקות חד ערכית: נניח כי $\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i=1}^m q_i$ עבור p_i, p_j ראשוניים אזי $(n=m)\wedge(\forall i \in [n]\,.p_i \sim q_i)$.

משפט: יהי R תחום המקיים כי כל ראשוני הוא אי פריק אזי R מקיים פריקות חד ערכית.

מסקנה: תחום ראשי מקיים פריקות חד ערכית.

תחום אוקלידי: תחום שלמות R ופונקציה $N: R\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$ המקיימת
$\forall y \in R.\forall x \in R\backslash\{0\}\,.\exists! q,r \in R.\,(y = xq+r)\wedge(N(r)<N(x))$.

טענה: כל תחום אוקלידי הוא ראשי.

חוג השלמים של גאוס: $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}[x]$ תחום אוקלידי ראשי, $\mathbb{Z}[i]$ תחום אוקלידי.

דיסקרימיננטה: יהי $f(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}_n[x]$ ויהיו $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ השורשים של f אזי
$\Delta(f)=(-1)^{\binom{n}{2}} a_n^{2(n-1)} \prod_{i\neq j}(\alpha_i-\alpha_j)$.

הגדרה: יהי $q \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\forall f,g \in \mathbb{F}[x]\,.f \sim_{(q)} g \iff f-g \in (q)$.

טענה: ${}^{\mathbb{F}[x]}/_{\sim_{(q)}}$ שדה.

משפט: $q\left([x]_{\sim_{(q)}}\right)=0$.

משפט: כל שדה מוכל בשדה סגור אלגברית.

טענה: יהיו $\mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}_1$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{F}_0)$ אזי (A הפיכה מעל $\mathbb{F}_1$) $\Longleftarrow$ (A הפיכה מעל $\mathbb{F}_0$).

טענה: תהיינה $A,B \in M_n(\mathbb{F}_0)$ אזי ($A \sim B$ מעל $\mathbb{F}_1$) $\Longleftarrow$ ($A \sim B$ מעל $\mathbb{F}_0$).

האידאל המאפס: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $I_A=\{p \in \mathbb{F}[x] \mid p(A)=0\}$.

מסקנה: $f_A \in I_A$.

הפולינום המינימלי: $m_A \in I_A$ המקיים (m_A פולינום מתוקן)$\wedge$($(m_A) = I_A$).

טענה: $m_A = \iota \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in I_A. (a_n = 1) \wedge (n = \min(\deg(p) \mid p \in I_A \setminus \{0\}))$.

טענה: תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ותהא $T \in \operatorname{Hom}(V)$

- $m_A | f \iff f(A) = 0$.
- $I_T = I_{[T]_B}$.
- $A \sim B \implies m_A = m_B$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $\lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_k$ כל הע"ע אזי (A לכסינה) $\iff$ ($m_A(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)$).

משפט: λ ע"ע של $A \iff m_A(\lambda) = 0$.

טענה: $\min\left(d \in \mathbb{N} \mid A^d = 0\right) = \deg(m_A)$.

למת המחלק הפולינום המינימלי: תהא $f \in \mathbb{F}[x]$ המקיימת $\deg(f) > 0$ אזי ($f | m_A$) $\Longleftarrow$ $f(A)$ לא הפיכה.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}_1$ אזי (בת"ל מעל $\mathbb{F}_1$) $\iff$ (בת"ל מעל $\mathbb{F}_0$).

משפט: m_A לא משתנה בהרחבת שדות.

משפט: $f_A | m_A^n$.

מסקנה: לכל $p \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים א"ם $p | m_A \iff p | f_A$.

טענה: נניח כי $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ מ"ו ונניח כי לכל $i \in [n]$ מתקיים כי V_i T אינו' אזי $m_T = \operatorname{lcm}\left(m_{T_{\restriction V_1}}, \ldots, m_{T_{\restriction V_n}}\right)$.

טענה: יהי U תמ"ו T אינו' אזי $p(T)_{\restriction U} = p(T_{\restriction U})$. $\forall p \in \mathbb{F}[x]$.

טענה: יהיו $S_1, S_2 \in \operatorname{Hom}(V)$ המקיימות $S_1 + S_2 = Id$, $S_1 \circ S_2 = 0 = S_2 \circ S_1$ אזי

- $\ker(S_1) = \operatorname{Im}(S_2)$, $\operatorname{Im}(S_1) = \ker(S_2)$.
- $V = \ker(S_1) \oplus \ker(S_2)$.

הכללה: יהיו $S_1 \ldots S_n \in \operatorname{Hom}(V)$ המקיימות $\sum_{i=1}^{n} S_i = 1$, $S_i \circ \left(\sum_{i \neq j} S_j\right) = 0$ אזי

- $\operatorname{Im}(S_i) = \bigcap_{i \neq j} \ker(S_j)$.
- $V = \oplus_{i=1}^{n} \ker(S_i)$.

משפט: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ תהא $T \in \operatorname{Hom}(V)$ ויהיו $f, g \in \mathbb{F}[x]$ המקיימות $\gcd(f, g) = 1$, $f(T)\,g(T) = 0$ אזי $V = \ker(g(T)) \oplus \ker(f(T))$.

הכללה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ תהא $T \in \operatorname{Hom}(V)$ ויהיו $p_1 \ldots p_n \in \mathbb{F}[x]$ המקיימות $\gcd(p_i, p_j) = 1$, $\prod_{i=1}^{n} p_i(T) = 0$ אזי $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker(p_i(T))$.

משפט הפירוק הפרימרי דרך הפולינום המינימלי: תהא $T \in \operatorname{Hom}(V)$ ונניח כי $m_T(x) = \prod_{i=1}^{n} q_i(x)^{r_i}$ באשר $q_i(x)$ אי פריקים מתוקנים אזי

- $V = \bigoplus_{i=1}^{n} \ker\left(q_i(T)^{r_i}\right)$.
- $m_{T_{\restriction \ker(q_i(T)^{r_i})}}(x) = q_i(x)^{r_i}$.

הגדרה: נניח כי $f_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)^{r_i}$ אזי $f_A^{red}(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$.

טענה: A לכסינה $\iff f_A^{red}(A) = 0$.

נגזרת: נניח כי $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ אזי $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

טענה: $f_A^{red} = \frac{f_A}{\gcd\left(f_A, f_A'\right)}$.

הגדרה: $(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

מירכוב: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $V_{\mathbb{C}} = \langle V^2, \cdot_{\mathbb{C}}, +_{\mathbb{C}} \rangle$.

מסקנה: $(a,b)\cong a+ib$.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ותהא $T\in\operatorname{Hom}(V)$ אזי נגדיר את $T_{\mathbb{C}}:V_{\mathbb{C}}\to V_{\mathbb{C}}$ כך $T_{\mathbb{C}}(u+iv)=T(v)+iT(u)$.

אינדקס הנילפוטנטיות: תהא $T\in\operatorname{Hom}(V)$ אזי $n(T)=\min\left\{k\in\mathbb{N}\mid T^k=0\right\}$.

טענה: נניח כי $m_T(x)=\prod_{i=1}^{\kappa}(x-\lambda_i)^{k_i}$ אזי $k_i=n\left(T_{\restriction_{\ker\left((x-\lambda_i)^{k_i}\right)}}-\lambda_i Id_{\ker\left((x-\lambda_i)^{k_i}\right)}\right)$.

שרשרת: יהי $v\in V$ אזי $\langle v,Tv,\ldots,T^nv\rangle$ עבורו $T^{n+1}v=0$.

מרחב T־ציקלי: מרחב וקטורי V המקיים כי קיימת שרשרת שהיא בסיס.

מסקנה: נניח כי $T\in\operatorname{Hom}(V)$ נילפוטנטית אזי ($n(T)=\dim(V)$) $\iff$ (V הוא T־ציקלי).

מסקנה: תהא $T\in\operatorname{Hom}(V)$ נילפוטנטית אזי (V מ"ו T ציקלי) $\iff$ (V אי פריק).

ציקלי מקסימלי: תמ"ו $U\subseteq V$ T־אינו' המקיים $\dim(U)=n(T)$.

יחס מנה: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו נגדיר יחס שקילות $v_1-v_2\in U\iff\forall v_1,v_2\in V.v_1\sim_U v_2$.

מרחב מנה: $V/U={}^{V}/_{\sim_U}$.

העתקת המנה: $T_U(v)=[v]_{\sim_U}$.

מסקנה: $\dim(V/U)=\dim(V)-\dim(U)$.

טענה: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו ויהיו $B=(v_1\ldots v_n)\in V^n$ וגם $\overline{B}=\left([v_1]_{\sim_U}\ldots[v_n]_{\sim_U}\right)\in V/U$

- $\overline{B}$ בת"ל $\Longleftarrow$ ($\forall\alpha\in\mathbb{F}.\forall v\in\prod_{i=1}^n[v_i]_{\sim_U}.\sum\alpha_iv_i\in U\implies\forall i\in[n].a_i=0$).
- $\overline{B}$ בת"ל $\Longleftarrow$ (B בת"ל)$\wedge$($U\oplus\operatorname{span}(B)$).
- $\overline{B}$ פורשת $\Longleftarrow$ $U+\operatorname{span}(B)=V$.
- $[v]_{B\frown C}=[P_U(v)]_C\frown\left[[v]_{\sim_U}\right]_{\overline{B}}$.

קרמימד: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו אזי $\dim(V/U)$.

הגדרה: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $W/U=T_U[W]=\left\{[w]_U\mid w\in W\right\}$.

הגדרה: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו ותהא $T\in\operatorname{Hom}(V)$ אזי נגדיר $\overline{T}:V/U\to V/U$ כך $\overline{T}\left([v]_{\sim_U}\right)=[T(v)]_{\sim_U}$.

טענה: יהי $W\subseteq V$ תמ"ו T־אינו' אזי $[T]_{B\frown C}=\left(\begin{array}{c|c}[T_{\restriction W}]_B & *\\ \hline 0 & [\overline{T}]_{\overline{C}}\end{array}\right)$.

בלוק ז'ורדן: $(J_k(\lambda))_{i,j}=\lambda\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j}$ או תצוגתית $J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix}_{k\times k}$.

מערך ז'ורדן: $I(\lambda)=\operatorname{Diag}(J_{k_1}(\lambda),\ldots,J_{k_r}(\lambda))$.

מטריצת/צורת ז'ורדן: $J=\operatorname{Diag}(I(\lambda_1),\ldots,I(\lambda_k))$.

טענה: $\left(J_r(0)^k\right)_{i,j}=\delta_{i+k,j}$.

הבינום של ניוטון: יהיו A,B מתחלפות אזי $(A+B)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$.

טענה: $J_n(\lambda)^k=(J_n(0)+\lambda I_n)^k=\sum_{m=0}^k\binom{m}{k}\lambda^{k-m}J_n(0)^m$.

מסקנה: יהי $\lambda\neq0$ אזי $J_n(\lambda)^{-1}=\sum_{i=1}^n\frac{1}{\lambda^i}J_n(0)^{i-1}$.

טענה: תהא $T\in\operatorname{Hom}(V)$ ויהי B בסיס של V

- $[T]_B=J_n(0)\iff B=(T^{n-1}v,\ldots,v)$ המקיים $v\in\ker(T^n)\setminus\ker(T^{n-1})$.

- $[T]_B = J_n(\lambda) \iff B = \left((T-\lambda I)^{n-1} v, \ldots, v\right)$ המקיים $v \in \ker\left((T-\lambda I)^n\right) \setminus \ker\left((T-\lambda I)^{n-1}\right)$.

מסקנה : $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן $\iff B$ שרשור בסיסים מהצורה $\left((T-\lambda I)^{n-1} v, \ldots, v\right)$.

וקטור עצמי מוכלל : תהא $S \in \mathrm{Hom}(V)$ אזי $v \in V$ שמקיים $\exists \lambda \in \mathbb{F}. \exists k > 0. (S-\lambda I)^k (v) = 0$.

משפט : תהא $T \in \mathrm{Hom}(V)$ ונניח כי $m_T(x) = \prod_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{r_i}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B = \mathrm{Diag}(I(\lambda_1), \ldots, I(\lambda_k))$.

טענה : נניח כי $[T]_B = \mathrm{Diag}(I(\lambda_1), \ldots, I(\lambda_k))$ בעבור $I(\lambda_i) = \mathrm{Diag}\left(J_{k_1^i}(\lambda_i), \ldots, J_{k_{n_i}^i}(\lambda_i)\right)$

- כל הע"ע של T הם $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
- $\mu_i = \sum_{j=1}^{n_i} k_j^i$.
- $\rho_i = n_i$.
- הריבוי האלגברי בפולינם המינימלי של ע"ע λ_i הוא $\max\left(k_1^i, \ldots, k_{n_i}^i\right)$.
- $\left|\left\{j \mid k_j^i \geq r\right\}\right| = \dim\left(\ker\left((T-\lambda_i I)^r\right)\right) - \dim\left(\ker\left((T-\lambda_i I)^{r-1}\right)\right)$.

מסקנה : צורת ז'ורדן היא יחידה עד כדי שינוי סדר.

אלגוריתם ז'ורדן : יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית ויהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ עם פ"א $f_A(x) = \prod_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{d_i}$ בעבור $\lambda_i \neq \lambda_j$

- צורת ז'ורדן :

$$
\begin{aligned}
& J = 0 \\
& \text{for } (1 \leq i \leq k) \\
& \qquad \text{for } (1 \leq m \leq d_i) \\
& \qquad\qquad s_{i,m} = \dim\left(\mathrm{sols}\left((A-\lambda_i I)^m\right)\right) \\
& \qquad \text{for } (1 \leq m \leq d_i) \\
& \qquad\qquad r_{i,m} = 2 s_{i,m} - s_{i,m+1} - s_{i,m-1} \\
& \qquad\qquad \text{for } (1 \leq t \leq r_{i,m}) \\
& \qquad\qquad\qquad J = \mathrm{Diag}(J, J_m(\lambda_i)) \\
& \text{return } B
\end{aligned}
$$

- בסיס ז'ורדן :

$$
\begin{aligned}
&P = \langle , \rangle \\
&\text{for } (1 \le i \le k) \\
&\quad \text{for } (1 \le m \le d_i) \\
&\quad\quad \text{for } (1 \le t \le r_{i,m}) \\
&\quad\quad\quad v_{i,m,t}^{1} \in \text{sols}\left((A - \lambda_i I)^{m}\right) \\
&\quad\quad\quad v_{i,m,t}^{1} \notin \text{sols}\left((A - \lambda_i I)^{m-1}\right) \\
&\quad\quad\quad v_{i,m,t}^{1} \notin \text{span}\left(v_{i,m',t'}^{\ell'};\ \begin{array}{c} 1 \le m' \le m \\ 1 \le t' \le r_{i,m'} \\ 2 \le \ell' \le m' \end{array} \right) \\
&\quad\quad\quad \text{for } (2 \le \ell \le m) \\
&\quad\quad\quad\quad v_{i,m,t}^{\ell} = (A - \lambda_i I)\, v_{i,m,t}^{\ell-1} \\
&\quad\quad\quad \text{for } (m \le l \le 1) \\
&\quad\quad\quad\quad P = P^\frown v_{i,m,t}^{l}
\end{aligned}
$$

התכנסות של סדרת מטריצות: תהא $A : \mathbb{N} \to M_n(\mathbb{F})$ אזי $\lim_{m\to\infty} A_m = \begin{pmatrix} \lim_{m\to\infty} (A_m)_{1,1} & \cdots & \lim_{m\to\infty} (A_m)_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lim_{m\to\infty} (A_m)_{n,1} & \cdots & \lim_{m\to\infty} (A_m)_{n,n} \end{pmatrix}$.

טענה: $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

מסקנה: $e^{I(\lambda)} = e^{\text{Diag}\left(J_{n_1}(\lambda),\ldots,J_{n_k}(\lambda)\right)} = \text{Diag}\left(e^{J_{n_1}(\lambda)},\ldots,e^{J_{n_k}(\lambda)}\right)$.

מסקנה: $e^J = e^{\text{Diag}(I(\lambda_1),\ldots,I(\lambda_k))} = \text{Diag}\left(e^{I(\lambda_1)},\ldots,e^{I(\lambda_k)}\right)$.

טענה: נניח כי $A = PJP^{-1}$ אזי $e^A = Pe^JP^{-1}$.

מסקנה: e^A קיים ומוגדר היטב בשדה סגור אלגברית.

טענה: יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ מתחלפות אזי $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$.

משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר): יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $F\left(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$.

משפט: בהינתן n תנאי התחלה קיים ויחיד פתרון $y(x)$ למד"ר מסדר n.

טענה: תהא $y \in (\mathbb{F} \to \mathbb{F})^n$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{sols}(y' = Ay) = \left\{ce^{Ax} \mid c \in \mathbb{F}^n\right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $m \in \mathbb{N}$ עבורו לכל V מ"ו המקיים כי $m \nmid \dim(V)$ לכל $T \in \text{Hom}(V)$ קיים ע"ע אזי לכל $T, S \in \text{Hom}(V)$ מתחלפות קיים ו"ע משותף.

לכסון סימולטני: יהיו $T, S \in \text{Hom}(V)$ לכסינות ומתחלפות אזי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B, [S]_B$ אלכסוניות.

מטריצה מצורפת/נלוית: יהי $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ מתוקן אזי $A_f = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

משפט: $f_{A_p}=p$.

טענה: $m_{A_p}=p$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ התב"ש

- לכל פולינום מעל $\mathbb{F}$ ממעלה n קיים פתרון.
- לכל V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ממימד n מתקיים כי לכל $T\in\mathrm{Hom}\left(V\right)$ קיים ע"ע מעל $\mathbb{F}$.
- לכל $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ קיים ע"ע מעל $\mathbb{F}$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ א"פ מתוקן אזי $\mathbb{E}_{f}=\left\{ g\left(A_{f}\right)\mid g\in\mathbb{F}\left[x\right]\right\}$ שדה.

טענה: $\left\langle I,A_{f},\ldots,A_{f}^{\deg(f)-1}\right\rangle$ בסיס של $\mathbb{E}_{f}$ בתור מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

מסקנה: $f\left(A_{f}\right)=0$.

צורת פרוביניוס: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ עם $f_{A}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{r}q_{i}\left(x\right)$ בעבור q_{i} א"פ זרים בזוגות אזי $A\sim\mathrm{Diag}\left(A_{q_{1}},\ldots,A_{q_{r}}\right)$.

הגדרה: נגדיר $M_{\mathbb{1}}\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ כך $\left(M_{\mathbb{1}}\right)_{i,j}=\delta_{i,n}\delta_{j,n}$.

הגדרה: יהי $q\left(x\right)^{\ell}$ בעבור q_{i} א"פ מתוקן אזי $C\left(q\right)\in M_{\ell\deg(q)}\left(\mathbb{F}\right)$ כך $C\left(q\right)=\begin{pmatrix}A_{q} & \ddots & 0 & 0\\ 0 & \ddots & M_{\mathbb{1}} & 0\\ & \ddots & A_{q} & M_{\mathbb{1}}\\ 0 & & 0 & A_{q}\end{pmatrix}$.

צורת יעקובסון: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ עם $f_{A}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{r}q_{i}\left(x\right)^{\ell_{i}}$ בעבור q_{i} א"פ זרים אזי $A\sim\mathrm{Diag}\left(C\left(q_{1}\right),\ldots,C\left(q_{r}\right)\right)$.

הגדרה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ אזי $\overline{A}\in M_{m\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ כך $\left(\overline{A}\right)_{i,j}=\overline{\left(A\right)_{i,j}}$.

טענה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהי λ ע"ע של $A_{\mathbb{C}}$ עם ו"ע b אזי $\overline{\lambda}$ ע"ע של $A_{\mathbb{C}}$ עם ו"ע $\overline{b}$.

טענה: $\mu_{\lambda}=\mu_{\overline{\lambda}}$, $\rho_{\lambda}=\rho_{\overline{\lambda}}$.

הגדרה: יהי $a+ib\in\mathbb{C}$ אזי $M_{\mathbb{C}}^{\lambda}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$לכסינה יהיו $\alpha_{1},\ldots,a_{k}\in\mathbb{R}$ ע"ע עם ו"ע $b_{1},\ldots,b_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ ויהיו $\lambda_{1},\overline{\lambda_{1}},\ldots,\lambda_{m},\overline{\lambda_{m}}\in\mathbb{C}$ ע"ע עם $c_{1},\ldots,c_{m}\in\mathbb{C}^{n}$ ו"ע של $\lambda_{1},\ldots,\lambda_{m}$ אזי

- $\left\langle b_{1},\ldots,b_{k},c_{1},\overline{c_{1}},\ldots,c_{m},\overline{c_{m}}\right\rangle$ בסיס מלכסן מעל $\mathbb{C}$.
- $B=\left\langle b_{1},\ldots,b_{k},\mathrm{Re}\left(c_{1}\right),\mathrm{Im}\left(c_{1}\right),\ldots,\mathrm{Re}\left(c_{m}\right),\mathrm{Im}\left(c_{m}\right)\right\rangle$ בסיס מעל $\mathbb{R}$ עבורו $\left[A\right]_{B}=\mathrm{Diag}\left(a_{1},\ldots,a_{k},M_{\mathbb{C}}^{\lambda_{1}},\ldots,M_{\mathbb{C}}^{\lambda_{m}}\right)$.

טענה: תהא λ ע"ע ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\dim\left(\ker\left(A-\lambda I\right)^{m}\right)=\dim\left(\ker\left(A-\overline{\lambda}I\right)^{m}\right)$.

מסקנה: $\overline{I\left(\lambda\right)}=I\left(\overline{\lambda}\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ נניח כי $\left\langle b_{1},\ldots,b_{k}\right\rangle$ שרשרת היוצרת את $J_{k}\left(\lambda\right)$ אזי $\left\langle \overline{b_{1}},\ldots,\overline{b_{k}}\right\rangle$ שרשרת היוצרת את $J_{k}\left(\overline{\lambda}\right)$.

מכפלה הרמיטית/מכפלה פנימית (מ"פ): יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle :V^{2}\to\mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות: $\forall a,b,c\in V.\left\langle \alpha a+\beta b,c\right\rangle =\alpha\left\langle a,c\right\rangle +\beta\left\langle b,c\right\rangle$.
- הרמיטיות: $\forall a,b\in V.\left\langle a,b\right\rangle =\overline{\left\langle b,a\right\rangle }$.
- חיוביות: $\forall a\in V.\left\langle a,a\right\rangle \in\mathbb{R}_{+}$.
- חיוביות ממש: $\forall a\in V.\left(\left\langle a,a\right\rangle =0\right)\iff\left(a=0\right)$.

מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ): $\left\langle V,+,\cdot,\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle \right\rangle$ שמקיים $\left\langle V,+,\cdot\right\rangle$ מ"ו)$\wedge$($\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle$ מ"פ).

מכפלה סקלרית סטנדרטית: יהיו $a,b\in\mathbb{C}^{n}$ אזי $\left\langle a,b\right\rangle =\sum_{i=1}^{n}a_{i}\overline{b_{i}}$.

הגדרה: $\left(\overline{A}\right)_{i,j}=\overline{(A)_{i,j}}$.

מטריצה צמודה: $A^{*}=\overline{A}^{t}$.

מכפלה פנימית על מטריצות: יהיו $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left\langle A,B\right\rangle =\text{trace}\left(AB^{*}\right)$.

מכפלה פנימית על פונקציות רציפות: יהיו $f,g\in C^{0}\left(\left[0,1\right]\right)$ אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\int_{0}^{1}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

נורמה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert a\right\Vert =\sqrt{\left\langle a,a\right\rangle }$.

ניצב/אורתוגונלי/מאונך: $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ המקיימים $\left\langle a,b\right\rangle =0$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ניצבים אזי $a\perp b$.

קוסינוס: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא θ הזווית בין a,b אזי $\cos\left(\theta_{a,b}\right)=\frac{\left\langle a,b\right\rangle }{\left\Vert a\right\Vert \cdot\left\Vert b\right\Vert }$.

טענה: $\left(A^{*}\right)^{*}=A$, $\left(\alpha A\right)^{*}=\overline{\alpha}A^{*}$, $\left(A+B\right)^{*}=A^{*}+B^{*}$, $\left(AB\right)^{*}=B^{*}A^{*}$.

מסקנה: יהי $v,u\in\mathbb{C}^{n}$ אזי $\left\langle v,u\right\rangle _{st}=u^{*}\cdot v$.

הגדרה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אזי $\left\langle v,u\right\rangle _{A}=u^{*}Av$.

מטריצה הרמיטית: $A^{*}=A$.

הגדרה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי

- חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית: $\forall v\in\mathbb{C}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .\left\langle Ax,x\right\rangle >0$.
- אי שלילית: $\forall v\in\mathbb{C}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .\left\langle Av,v\right\rangle \geq0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v\in\mathbb{C}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .\left\langle Av,v\right\rangle <0$.
- אי חיובית: $\forall v\in\mathbb{C}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .\left\langle Av,v\right\rangle \leq0$.

מסקנה: (A הרמיטית וחיובית לחלוטין) $\iff$ ($\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle _{A}$ מ"פ).

טענה: יהי V ממ"פ

- $\forall v\in V.\left\langle v,0\right\rangle =\left\langle 0,v\right\rangle =0$.
- $\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i},\sum_{i=1}^{m}\beta_{i}u_{i}\right\rangle =\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{i}\overline{\beta_{j}}\left\langle v_{i},u_{i}\right\rangle$.

מטריצת גראם: יהי V ממ"פ ויהיו $v_{1},\ldots,v_{n}\in V$ אזי $\left(G\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)\right)_{i,j}=\left\langle v_{i},v_{j}\right\rangle$.

טענה: ($G\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$ הרמיטית ומוגדרת חיובית) $\iff$ ($v_{1},\ldots,v_{n}$ בת"ל).

מרחק: יהיו v,u אזי $\text{dist}\left(v,u\right)=\left\Vert v-u\right\Vert$.

טענה: $\left\Vert v\right\Vert \geq0$, $\left\Vert v\right\Vert =0\iff v=0$, $\left\Vert \alpha v\right\Vert =\left|\alpha\right|\left\Vert v\right\Vert$.

אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\left\Vert v+u\right\Vert \leq\left\Vert v\right\Vert +\left\Vert u\right\Vert$.

אי שיוויון קושי שוורץ: יהי V ממ"פ אזי $\forall v,u\in V.\left|\left\langle v,u\right\rangle \right|\leq\left\Vert v\right\Vert \left\Vert u\right\Vert$.

טענה: $\text{dist}\left(v,u\right)\geq0$, $\text{dist}\left(v,u\right)=0\iff v=u$, $\text{dist}\left(v,u\right)+\text{dist}\left(u,w\right)\leq\text{dist}\left(v,w\right)$.

משפט פיתגורס: $\left\Vert v-u\right\Vert ^{2}=\left\Vert v\right\Vert +\left\Vert u\right\Vert \iff\text{Re}\left(\left\langle v,u\right\rangle \right)=0$.

משפט הקוסינוסים: $\left\Vert v-u\right\Vert =\left\Vert v\right\Vert ^{2}+\left\Vert u\right\Vert ^{2}-2\left\Vert v\right\Vert \left\Vert u\right\Vert \text{Re}\left(\cos\left(\theta_{v,u}\right)\right)$.

קבוצה אורתוגונלית: קבוצה $S\subseteq V$ המקיימת $\forall v,u\in S.v\neq u\implies v\perp u$.

וקטור יחידה: $v\in V$ המקיים $\left\Vert v\right\Vert =1$.

נרמול: יהי $0\neq v\in V$ אזי $\frac{v}{\left\Vert v\right\Vert }$.

קבוצה אורתונורמלית: קבוצה $S\subseteq V$ אורתגונלית המקיימת $\forall v\in S.\left\Vert v\right\Vert =1$.

משפט: תהא $0\notin S\subseteq V$ אורתוגונלית אזי S בת"ל.

טענה: תהא $0\notin B=\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$ סדרה אורתוגונלית

- $G\left(B\right)=\text{Diag}\left(\left\Vert v_{1}\right\Vert ^{2},\ldots\left\Vert v_{n}\right\Vert ^{2}\right)$.

- נניח כי B בסיס אזי $\left(\left[v\right]_{B}\right)_{i}=\frac{\left\langle v,v_{i}\right\rangle }{\left\langle v_{i},v_{i}\right\rangle }$.
- נניח כי B בסיס אזי $\left\langle v,u\right\rangle =\left[v\right]_{B}^{T}G\left(B\right)\overline{\left[u\right]_{B}}$.
- שיוויון פרסבל: נניח כי B בסיס אזי $\left\Vert v\right\Vert =\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|\left\langle v,v_{i}\right\rangle \right|^{2}}{\left\Vert v_{i}\right\Vert ^{2}}}$.

ניצבות לקבוצה: יהי $S\subseteq V$ אזי s $\forall s\in S.v\perp s\iff v\perp S$.

טענה: $\forall i\in\left[n\right].v\perp v_{i}\iff v\perp\text{span}\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$.

הטלה אורתוגונלית: יהי $e_{1},\ldots,e_{k}$ בסיס אורתונורמלי של $U\subseteq V$ נגדיר $P_{U}:V\to U$ כך $P_{U}\left(v\right)=\sum_{i=1}^{k}\left\langle v,e_{i}\right\rangle e_{i}$.

טענה: P_{U} לינארית, $v-P_{U}\left(v\right)\perp U$, $P_{U}^{2}=P_{U}$, $\text{Im}\left(P_{U}\right)=U$, $\ker\left(P_{U}\right)=\left\{ v\mid v\perp U\right\}$.

המשלים לניצב: יהי $U\subseteq V$ אזי $U^{\perp}=\left\{ v\in V\mid v\perp U\right\}$.

טענה: $U^{\perp}$ תמ"ו, $U\oplus U^{\perp}$.

טענה: יהי V מ"ו נ"ס ויהיו $U,W\subseteq V$ ויהי בסיס אורתונורמלי של U
- $V=U\oplus U^{\perp}$, $v=P_{U}\left(v\right)+\left(v-P_{U}\left(v\right)\right)$.
- $P_{\left(U,U^{\perp}\right)}=P_{U}$, $P_{\left(U^{\perp},U\right)}=Id-P_{U}$.
- $W^{\perp}\subseteq U^{\perp}\implies U\subseteq W$.
- $\dim\left(U\right)+\dim\left(U^{\perp}\right)=\dim\left(V\right)$.
- $\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$.
- $\left(U+W\right)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$, $\left(U\cap W\right)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$.

מסקנה: $\left\langle v,v\right\rangle =\left\langle P_{U}\left(v\right),P_{U}\left(v\right)\right\rangle +\left\langle v-P_{U}\left(v\right),v-P_{U}\left(v\right)\right\rangle$.

מרחק ממרחב: יהי $U\subseteq V$ מרחב ויהי $v\in V$ אזי $\text{dist}\left(v,U\right)=\inf_{u\in U}\left(\text{dist}\left(v,u\right)\right)$.

משפט: יהי $U\subseteq V$ מרחב ויהי $v\in V$ אזי $\text{dist}\left(v,U\right)=\text{dist}\left(v,P_{U}\left(v\right)\right)$.

תהליך גראם שמידט: בהינתן $v_{1},\ldots v_{n}\in V$ בת"ל נגדיר $GS\left(v_{1},\ldots v_{n}\right)=\left(\frac{v_{i}-P_{\text{span}\left(v_{1},\ldots,v_{i-1}\right)}\left(v_{i}\right)}{\left\Vert v_{i}-P_{\text{span}\left(v_{1},\ldots,v_{i-1}\right)}\left(v_{i}\right)\right\Vert }\right)_{i=1}^{n}$.

טענה: $\text{span}\left(v_{1},\ldots v_{n}\right)=\text{span}\left(GS\left(v_{1},\ldots v_{n}\right)\right)$, $GS\left(v_{1},\ldots v_{n}\right)$ קבוצה אורתונורמלי.

מסקנה: יהי V ממ"פ ויהי $U\subseteq V$ תמ"ו נ"ס אזי קיים בסיס אורתונורמלי ל־U.

מטריצה אורתוגונלית: מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ המקיימת $AA^{t}=I$.

מטריצה אוניטרית: מטריצה $Q\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ המקיימת $QQ^{*}=I$.

טענה: Q אוניטרית $\iff$ עמודות Q בסיס אורתונורמלי לממ"פ $\left(\mathbb{C}^{n},\left\langle ,\right\rangle _{st}\right)\iff$ Q^{t} אוניטרית.

טענה: תהא $Q\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אזי $\left|\det\left(Q\right)\right|=1$.

משפט פירוק QR: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ בעבור $m\ge n$ אזי $A=QR$ בעבור Q אוניטרית ו־R משולשית עליונה.

מסקנה: נניח כי $QR=A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ אזי $Q\in M_{m}\left(\mathbb{C}\right)$, $R\in M_{m\times n}\left(\mathbb{C}\right)$.

טענה: נניח כי $A=QR$ ונניח כי $\left(u_{1},\ldots,u_{r}\right)$ בסיס של $\mathcal{C}\left(A\right)$ ו־$\left(u_{1},\ldots,u_{m}\right)$ השלמה לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^{m}$ אזי

$$\left(R\right)_{i,j}=\begin{cases} \left\langle C_{j}\left(A\right),u_{i}\right\rangle & i\le j\\ 0 & else \end{cases}$$

$$C_{i}\left(Q\right)=u_{i}$$

טענה: יהיו B,C בסיסים של V אזי $G\left(C\right)=\left(\left[Id\right]_{B}^{C}\right)^{T}G\left(B\right)\overline{\left[Id\right]_{B}^{C}}$.

משפט: B בת"ל $\iff\det\left(G\left(B\right)\right)\neq0$.

טענה: $\det\left(G\left(B\right)\right)\geq0$.

הגדרה: $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\sqrt{\det\left(G\left(B\right)\right)}$.

טענה: $v_{1},\ldots,v_{n}$ אורתוגונלים $\Longleftarrow$ $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left\Vert v_{i}\right\Vert$.

טענה: יהי E בסיס אורתונורמלי ויהי B בסיס אזי $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\left|\det\left(\left[Id\right]_{E}^{B}\right)\right|$.

הגדרה: נגדיר יחס שקילות על בסיסים $\det\left(\left[Id\right]_{C}^{B}\right)>0\iff B\sim C$.

נפח עם אוריאנטציה: יהי E בסיס אורתונורמלי ויהי B בסיס אזי $\text{Vol}^{*}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\det\left(\left[Id\right]_{E}^{B}\right)$.

טענה: יהי V ממ"פ יהי $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ ויהי B בסיס אורתונורמלי אזי $\left(\left[T\right]_{B}\right)_{i,j}=\left\langle T\left(B_{j}\right),B_{i}\right\rangle$.

הגדרה: יהי V ממ"פ ויהי $v\in V$ נגדיר $a_{v}\in V^{*}$ כך $a_{v}\left(u\right)=\left\langle u,v\right\rangle$.

הגדרה: יהי V ממ"פ נ"ס אזי נגדיר $a:V\to V^{*}$ כך $a\left(v\right)=a_{v}$.

טענה: $a\left(v\right)$ הפיכה ובפרט איזומורפיזם קנוני בין V ל־V^{*}.

משפט: תהא V נ"ס אזי $\forall T\in\text{Hom}\left(V\right).\exists!T^{*}\in\text{Hom}\left(V\right).\forall v,u\in V.\left\langle T\left(v\right),u\right\rangle=\left\langle v,T^{*}\left(u\right)\right\rangle$.

טענה: $T^{*}=a^{-1}\circ T^{t}\circ a$.

טענה: יהיו $T,S\in\text{Hom}\left(V\right)$

- $\left(T+S\right)^{*}=T^{*}+S^{*}$.
- $\left(\alpha T\right)^{*}=\overline{\alpha}T^{*}$.
- $\left(T\circ S\right)^{*}=S^{*}\circ T^{*}$.
- $T^{**}=T$.
- $\left[T^{*}\right]_{B}=\left[T\right]_{B}^{*}$.

מסקנה: יהי B בסיס אורתונורמלי אזי $\left(\left[T^{*}\left(u\right)\right]_{B}\right)_{i}=\left\langle u,T\left(B_{i}\right)\right\rangle$.

איזומטריה: יהיו V,U ממ"פ אזי $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ הפיכה המקיימת $\forall v,u\in V.\left\langle v,u\right\rangle=\left\langle T\left(v\right),T\left(u\right)\right\rangle$.

טענה: יהיו $S,T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ איזומטריות

- $S\circ T$ איזומטריה.
- S^{-1} איזומטריה.
- $\left\Vert v\right\Vert_{V}=\left\Vert S\left(v\right)\right\Vert_{U}$, $\text{dist}\left(u,v\right)=\text{dist}\left(S\left(v\right),S\left(u\right)\right)$.
- $\theta_{v,u}=\theta_{S(v),S(u)}$, $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\text{Vol}\left(\text{Par}\left(S\left(B\right)\right)\right)$.

משפט: יהיו V,U ממ"פ אזי $V\cong U\iff\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ התב"ש

- T איזומטריה.
- $T^{*}\circ T=Id$.
- לכל בסיס אורתונומלי B של V מתקיים כי $T\left(B\right)$ בסיס אורתונומלי של U.
- קיים בסיס אורתונומלי B של V עבורו $T\left(B\right)$ בסיס אורתונומלי של U.
- $\forall v,u\in V.\text{dist}\left(v,u\right)=\text{dist}\left(T\left(v\right),T\left(u\right)\right)$.

מסקנה: יהי B בסיס אזי (T איזומטריה) $\iff$ ($\left[T\right]_{B}^{-1}=\left[T\right]_{B}^{*}$).

מסקנה: תהא T איזומטריה ויהי λ ע"ע אזי $\left|\lambda\right|=1$.

העתקה קונפורמית: $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ המקיימת $\forall v,u\in V.\theta_{v,u}=\theta_{T(v),T(u)}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ איזומטריה אזי λT קונפורמית.

העתקה שומרת נפח: $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ המקיימת $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\text{Vol}\left(\text{Par}\left(T\left(B\right)\right)\right)$.

העתקה הרמיטית: $T \in \text{Hom}(V)$ המקיימת $T^* = T$.

העתקה נורמלית: $T \in \text{Hom}(V)$ המקיימת $TT^* = T^*T$.

משפט: יהי B בסיס אורתונורמלי ויהי C בסיס אזי (C אורתונורמלי) $\iff$ ($[Id]_C^B$ אוניטרית).

טענה: A אוניטרית $\iff$ T_A איזומטריה.

הגדרה:

- $U(n) = \{Q \in M_n(\mathbb{C}) \mid QQ^* = I\}$.
- $SU(n) = \{Q \in U(n) \mid \det(Q) = 1\}$.
- $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$.
- $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$.

טענה: $\langle U(n), \cdot\rangle$, $\langle SU(n), \cdot\rangle$, $\langle O(n), \cdot\rangle$, $\langle SO(n), \cdot\rangle$ חבורות.

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי ($\ker(T) = \text{Im}(T^*)^\perp$)$\wedge$($\text{Im}(T) = \ker(T^*)^\perp$).

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי (T אוניטריות)$\vee$(T הרמיטיות) $\Longleftarrow$ (T נורמלית).

טענה: תהא T נורמלית אזי $\forall v, u \in V. \langle T(v), T(u)\rangle = \langle T^*(v), T^*(u)\rangle$.

מסקנה: $\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$, $T^*(v) \perp T^*(u) \iff T(v) \perp T(u)$.

לכסינה אוניטרית/לכסינה אורתוגונלית: $T \in \text{Hom}(V)$ עבורה קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש־$[T]_B$ אלכסונית.

דמיון אוניטרי: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ המקיימות כי קיימת מטריצה P אוניטרית עבורה $A = PBP^*$.

לכסינה אוניטרית/לכסינה אורתוגונלית: A אשר דומה אוניטרית למטריצה אלכסונית.

טענה: תהא A מטריצה הרמיטית/אוניטרית/נורמלית ותהא B דומה אוניטרית ל־A אזי B הרמיטית/אוניטרית/נורמלית.

למה: אם W הוא T אינו' אז $W^\perp$ הוא T^* אינו'.

למה: T נורמלית אז לכל v, λ מתקיים $T^*(v) = \overline{\lambda} v \iff T(v) = \lambda v$.

טענה: אם T נורמלית אז $T - \lambda I$ נורמלית.

טענה: אם T נורמלית אז ו"ע לע"ע שונים ניצבים.

למה: (T נורמלית)$\wedge$(f_T מתפרק לגורמים לינאריים) $\iff$ (T ניתנת ללכסון אוניטרי).

משפט הפירוק הספקטרלי: $A \in M_n(\mathbb{C})$ ניתנת ללכסון אוניטרי $\iff$ A נורמלית.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ נורמלית

- $A = A^* \iff \text{sols}_{\mathbb{C}}(f_A) \subseteq \mathbb{R}$.
- $AA^* = I \iff \text{sols}_{\mathbb{C}}(f_A) \subseteq \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1\}$.

משפט הפירוק הספקטרלי: $A \in M_n(\mathbb{R})$ ניתנת ללכסון אורתוגונלי $\iff$ A סימטרית.

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי (T נורמלית) $\iff$ ($\exists p \in \mathbb{R}[x]. T^* = p(T)$).

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי קיים תמ"ו $U \subseteq V$ T־אינו' המקיים $\dim(U) \leq 2$.

משפט: תהא T העתקתה נורמלית אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו

$$[T]_B = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & \\ \hline & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & -b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_r & b_r \\ & & & & & & -b_r & a_r \end{array}\right)$$

מסקנה: תהא T העתקתה אורתוגונלית אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו

$$[T]_B = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R(\theta_k) \end{array}\right)$$

לכסון סימולטני אוניטרי: יהיו $T, S \in \operatorname{Hom}(V)$ נורמליות ומתחלפות אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו $[T]_B, [S]_B$ אלכסוניות.

תבנית בילינארית: יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f : V \times W \to \mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות ברכיב הראשון: $f(\alpha v + \beta u, w) = \alpha f(v, w) + \beta f(u, w)$.
- לינאריות ברכיב השני: $f(w, \alpha v + \beta u) = \alpha f(w, v) + \beta f(w, u)$.

טענה: יהיו $\varphi \in V^*$, $\psi \in W^*$ אזי $f(v, w) = \varphi(v)\psi(w)$ תבנית בילינארית.

מרחב התבניות הבילינאריות: $\{T \in V \times W \to \mathbb{F} \mid T\text{תבנית בילינארית}\}$ $\operatorname{Bil}(V, W) = B(V, W) =$.

טענה: $B(V, W)$ מ"ו.

טענה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי $f_A(v, u) = v^t A u$ תבנית בילינארית.

טענה: תהא $f \in B(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$ אזי $\exists A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . f = f_A$.

מסקנה: תהא $f_A \in B\left(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n\right)$ אזי $(A)_{i,j} = f_A\left(e_i, e_j\right)$.

מטריצה מייצגת: תהא $f \in B\left(V, W\right)$ ויהיו C בסיס של V וגם B בסיס של W אזי המטריצה $A \in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורה $f_A\left(x, y\right) = f\left(Q_C^{-1}\left(x\right), Q_B^{-1}\left(y\right)\right)$.

סימון: המטריצה המייצגת של f על פי הבסיסים C, B היא $[f]_B^C = M\left(f\right)$.

טענה: $\left([f]_B^C\right)_{i,j} = f\left(v_i, v_j\right)$.

מסקנה: $f\left(v, u\right) = [v]_C^t \cdot [f]_B^C \cdot [u]_B$.

משפט: $[*]_B^C : B\left(V, W\right) \to M_{\dim(V)\times\dim(W)}\left(\mathbb{F}\right)$ המוגדרת $[*]_B^C\left(f\right) = [f]_B^C$ היא איזומורפיזם.

מסקנה: $\dim\left(B\left(V, W\right)\right) = \dim\left(V\right) \cdot \dim\left(W\right)$.

משפט: $[f]_{B_1}^{C_1} = \left([Id]_{C_2}^{C_1}\right)^t [f]_{B_2}^{C_2} [Id]_{B_2}^{B_1}$.

דרגה של תבנית: תהא $f \in B\left(V, W\right)$ אזי $\text{rank}\left(f\right) = \text{rank}\left([f]_C^B\right)$.

מסקנה: $[f]_C^B = \left(\begin{array}{c|c} I_{\text{rank}(f)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

סימון: $B\left(V, V\right) = B\left(V\right)$.

סימון: אם $f \in B\left(V\right)$ אזי $[f]_C = [f]_C^C$.

מטריצות חופפות: $A, B \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימות $\exists P \in M_n^\times\left(\mathbb{F}\right) . P^t BP = A$.

טענה: יהיו A, B חופפות אזי

- $\text{rank}\left(A\right) = \text{rank}\left(B\right)$.
- $\exists c \in \mathbb{F}. \left|A\right| = c^2 \left|B\right|$.

תבנית סימטרית: $f \in B\left(V\right)$ המקיימת $\forall v, u \in V. f\left(v, u\right) = f\left(u, v\right)$.

תבנית אנטי סימטרית: $f \in B\left(V\right)$ המקיימת $\forall v, u \in V. f\left(v, u\right) = -f\left(u, v\right)$.

תבנית מנוונת: $f \in B\left(V\right)$ המקיימת $\exists v \in V\setminus\{0\} . \left(\forall w \in V. f\left(v, w\right) = 0\right) \vee \left(\forall w \in V. f\left(w, v\right) = 0\right)$.

הגדרה: תהא $\varphi \in B\left(V\right)$ מעל $\mathbb{F}$ המקיימת $\text{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ אזי

- $\varphi^+\left(u, v\right) = \frac{\varphi(u,v)+\varphi(v,u)}{2}$.
- $\varphi^-\left(u, v\right) = \frac{\varphi(u,v)-\varphi(v,u)}{2}$.

משפט: תהא $\varphi \in B\left(V\right)$ אזי (φ סימטרית) $\iff$ ($[\varphi]_C$ סימטרית).

תבנית ריבועית: תהא $f \in B\left(V\right)$ תבנית סימטרית אזי $Q_f : V \to \mathbb{F}$ המקיימת $Q_f\left(v\right) = f\left(v, v\right)$.

משפט הפולריזציה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ ותהא $f \in B\left(V\right)$ סימטרית אזי

- $f\left(v, w\right) = \frac{Q_f(v+v)-Q_f(v)-Q_f(w)}{2}$.
- $f \neq 0 \implies Q_f \neq 0$.

לכסון תבניות: נניח $\text{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ תהא $f \in B\left(V\right)$ תבנית סימטרית אז קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B$ אלכסונית.

מסקנה: תהא $f \in B\left(V\right)$ מעל $\mathbb{C}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B = \left(\begin{array}{c|c} I_{\text{rank}(f)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

מסקנה: תהא $f \in B\left(V\right)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B = \text{Diag}\left(I_p, -I_q, 0\right)$.

משפט ההתמדה של סילבסטר: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}\left(I_p, -I_q, 0\right)$ וגם $[f]_C = \text{Diag}\left(I_{p'}, -I_{q'}, 0\right)$ אזי $\langle p, q\rangle = \langle p', q'\rangle$.

אינדקס ההתמדה החיובי: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}\left(I_p, -I_q, 0\right)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי p.

סימון: אינדקס ההתמדה החיובי הוא $\sigma_+\left(f\right)$.

אינדקס ההתמדה השלילי: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי q.

סימון: אינדקס ההתמדה החיובי הוא $\sigma_-(f)$.

הסיגנטורה/החתימה של תבנית: תהא f תבנית מעל $\mathbb{R}$ אזי $(\sigma_+(f), \sigma_-(f))$.

סימון: $\sigma_0(f) = \dim(V) - \text{rank}(f)$.

המינור הפינתי: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי נגדיר $A_{(k)} \in M_k(\mathbb{R})$ כך $\left(A_{(k)}\right)_{i,j} = (A)_{i,j}$.

הדטרמיננטה הפינתית: $\Delta_k = \left|A_{(k)}\right|$, $\Delta_0 = 1$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0$. $\forall k \in [n]$ אזי קיימת $C \in M_n(\mathbb{R})$ משולשית תחתונה עבורה CAC^t אלכסונית.

קריטריון סילבסטר: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0$. $\forall k \in [n]$ אזי $\sigma_-(A) = |\{i \in [n] \mid \Delta_i \Delta_{i-1} < 0\}|$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0$. $\forall k \in [n]$ אזי (A מוגדרת חיובית) $\iff$ ($\forall i \in [n]. \Delta_i > 0$).

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה המקיים $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ וגם $\forall \alpha \in \mathbb{F}. \exists \beta \in \mathbb{F}. \beta^2 = \alpha$ ותהא $T \in B(V)$ סימטרית אזי הסיגנטורה היא $(\text{rank}(T), 0)$.

שיטת לגראנז' על פי השלמה לריבוע: תהא Q_f תבנית ריבועית אזי קיימת החלפת משתנים עבורה $Q_f(v) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ בפרט $[Q_f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ באשר B בסיס המשתנים המוחלפים.

הגדרה: תהא $T \in B(V)$ סימטרית מעל $\mathbb{R}$ אזי

- חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית: $\forall v \in V \setminus \{0\}. T(v,v) > 0$.
- אי שלילית: $\forall v \in V \setminus \{0\}. T(v,v) \geq 0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v \in V \setminus \{0\}. T(v,v) < 0$.
- אי חיובית: $\forall v \in V \setminus \{0\}. T(v,v) \leq 0$.

טענה: תהא $T \in B(V)$ סימטרית ותהא $A = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מטריצה מייצגת אזי

- T חיובית לחלוטין $\iff$ $A = I$.
- T אי שלילית $\iff$ $A = \text{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.
- T שלילית לחלוטין $\iff$ $A = -I$.
- T אי חיובית $\iff$ $A = \text{Diag}(-1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית התב"ש

- T_A מוגדרת חיובית.
- לכל $T \in \text{Hom}(V)$ המטריצה $[T]_B = A$ מוגדרת חיובית.
- קיים $T \in \text{Hom}(V)$ כך שהמטריצה $[T]_B = A$ מוגדרת חיובית.
- כל הע"ע של A ממשיים חיוביים ממש.

משפט: תהא A סימטרית מייצגת של $f \in B(V)$ סימטרית מעל $\mathbb{R}$ אזי

$$\sigma_+(f) = \#\{\lambda \mid \lambda > 0 \wedge \text{ע"ע } \lambda\}$$
$$\sigma_-(f) = \#\{\lambda \mid \lambda < 0 \wedge \text{ע"ע } \lambda\}$$
$$\sigma_0(f) = \#\{\lambda \mid \lambda = 0 \wedge \text{ע"ע } \lambda\}$$

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ הרמיטית אי שלילית מעל $\mathbb{C}$ אזי קיימת ויחידה $R \in \text{Hom}(V)$ המקיימת $R^2 = T$.

סימון : אם $R^2=T$ אזי $R=\sqrt{T}$.

משפט הפירוק הפולרי של העתקות לינאריות הפיכות : תהא $T\in\operatorname{Hom}(V)$ הפיכה אזי קיימות ויחידות $U\in\operatorname{Hom}(V)$ אוניטרית ו־$R\in\operatorname{Hom}(V)$ מוגדרת חיובית הרמיטית עבורן מתקיים $T=UR$.

מסקנה : תהא $T\in\operatorname{Hom}(V)$ הפיכה אזי נגדיר $R=\sqrt{TT^*}$, $U=T\circ\left(\sqrt{TT^*}\right)^{-1}$.

ערכים סינגולרים : תהא $T\in\operatorname{Hom}(V)$ אזי הע"ע של $\sqrt{TT^*}$.

טענה : $f_{TT^*}(x)=f_{T^*T}(x)$.

פירוק SVD : תהא $A\in M_n(\mathbb{C})$ אזי קיימות U,V אוניטריות וקיימת D אלכסונית אי שלילית המקיימות $A=UDV$.

טענה : נניח כי $A=UDV$ פירוק SVD ונניח כי $\alpha_1\ldots\alpha_n$ הערכים הסינגולרים של A אזי $D=\operatorname{Diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

תבנית סימפלקטית : תבנית בילינארית אנטי סימטירת לא מנוונת.

הגדרה : תהא $\omega\in B(V)$ סימפלקטית ויהי $W\subseteq V$ תמ"ו אזי $W^\omega=\{v\in V\mid\forall w\in W.\omega(v,w)=0\}$.

מרחב לגרנז'יאני : תהא $\omega\in B(V)$ סימפלקטית אזי תמ"ו $W\subseteq V$ המקיים $W^\omega=W$.

מבנה מרוכב : יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי איזומורפיזם $J\in\operatorname{Hom}(V)$ המקיים $J^2=-I$.

מבנה תואם תבנית : מבנה מרוכב J ותבנית סימפלקטית ω המקיימות $(\forall v,u\in V.\omega(Jv,Ju)=\omega(v,u))$ $\wedge(\forall v\in V.\omega(Jv,v)>0)$.

שניונית : פולינום בנעלמים $x_1\ldots x_n$ מהצורה $c+2\sum_{i=1}^n b_ix_i+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^{j-1}(A)_{i,j}x_ix_j+\sum_{i=1}^n(A)_{i,i}x_i^2=0$.

מסקנה : מטריציונית שניונית היא $c+2b^tx+x^tAx=0$.

המטריצה המצומצמת של שניונית : A.

מסקנה : מטריצניות שניונית היא $\begin{pmatrix}x_1&\ldots&x_n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix}=0$.

המטריצה המורחבת של שניונית : $\begin{pmatrix}A&b\\b&c\end{pmatrix}$.

איזומטריה אופיינית : $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת כי קיימת איזומטריה T וקיים $w\in\mathbb{R}^3$ עבורם $f(x)=T(x)+w$.