```
אזי a,b\in\mathbb{R} אזי אינטרוול: יהיו
                                                                                                                      (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \bullet
                                                                                                                      (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \bullet
                                                                                                                      [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}
                                                                                                                       [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \bullet
                                                                                                                          .(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \bullet
                                                                                                                           .[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \bullet
                                                                                                                        .(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \bullet
                                                                                                                        (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\} \bullet
                                                                                                                                            .(-\infty,\infty)=\mathbb{R}
                                                                                                 \mathbb{F} אימס סדר חזק על \mathbb{F} המקיימים
                                                                      \forall x,y \in \mathbb{F}. \ (x < y) \lor (x > y) \lor (x = y) :טריכוטומיה/לינאריות
                                                                      \forall x,y,z \in \mathbb{F}.x < y \Longrightarrow x+z < y+z : קומפטביליות עם חיבור
                                                                  \forall x,y \in \mathbb{F}. \forall z > 0_{\mathbb{F}}. x < y \Longrightarrow x \cdot z < y \cdot z פומפטביליות עם כפל: •
                                                                      \exists x \in \mathbb{F}. \exists n \in \mathbb{N}. x < \sum_{i=0}^n 1 עבורו \mathbb{F} שדה בעל תכונת ארכימדס: שדה בעל ארכימדס
                                                                                                                       טענה: \mathbb{R} מקיים את תכונת ארכימדס.
                                                       |x|=[x]=\max{(n\in\mathbb{Z}\mid n\leq x)} אזי x\in\mathbb{R} יהי שלם ערך שלם תחתון: יהי
                                                                                                            \{x\}=x-[x] אזי x\in\mathbb{R} הערך השברי: יהי
                                                                                                          \lfloor x \rfloor = \min (n \in \mathbb{Z} \mid x \le n) ערך שלם עליון:
                                                                                                                                           .\nexists q\in\mathbb{Q}.q^2=2 :טענה
                  a\leq x\leq b מתקיים b^2\geq 2 מתקיים b\in\mathbb{Q}_+ ולכל a^2\leq 2 המקיים a\in\mathbb{Q} מתקיים a\in\mathbb{Q} טענה: לא קיים
                                                                                                    . orall y \in A.y \leq x המקיים x \in \mathbb{R} חסם מלעיל:
                                                          .\overline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A קבוצת החסמים מלעיל: תהא A\subseteq\mathbb{R} אזי אזי קבוצת החסמים מלעיל: תהא
                                                                                           .\overline{B}_A 
eq arnothing המקיימת A \subseteq \mathbb{R} קבוצה מלעיל: קבוצה חסומה מלעיל
                                                                                                     \forall y \in A.x < y המקיים x \in \mathbb{R} הספר
                                                           \underline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A קבוצת החסמים מלרע: תהא A\subseteq\mathbb{R} אזי A\subseteq \mathbb{R} אזי קבוצת החסמים מלרע
                                                                                            A\subseteq\mathbb{R} קבוצה חסומה מלרע: קבוצה A\subseteq\mathbb{R} המקיימת
                                                                 עבורה A חסומה מלעיל וכן A \subseteq \mathbb{R} חסומה מלרע. A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                       . \forall y \in A. y \leq x מקסימום: תהא A \subseteq \mathbb{R} אזי אזי מקסימום: תהא
                                                       \max{(A)} = x אזי \forall y \in A.y \leq x המקיים x \in A אזי A \subseteq \mathbb{R} אזי A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                         . \forall y \in A.x \leq y מינימום: תהא A \subseteq \mathbb{R} אזי אזי מינימום: תהא
                                                        \min\left(A
ight)=x אזי orall y\in A.x\leq y המקיים x\in A הויהי A\subseteq\mathbb{R} אזי A\subseteq\mathbb{R}
\exists c \in \mathbb{R}. \forall x \in X. \forall y \in Y. x \leq c \leq y אקסיומת השלמות: תהיינה \{\varnothing\} אך עבורן X,Y \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}
ight) \setminus \{\varnothing\}
                                                                          . טענה: תהא (\overline{B}_A) אזי \overline{B}_A 
eq arnothing עבורה A \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right) \setminus \{\varnothing\} אזי מענה:
                                                                       . קיים \max\left(\underline{B}_A\right) אזי אזי \underline{B}_A 
eq arnothing עבורה A \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right) \setminus \{\varnothing\} אזי תהא
                                                                                     \mathbb{Q} את הינו השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את \mathbb{R}
                                                                                    \sup\left(A
ight)=\min\left(\overline{B}_A
ight) אזי A\subseteq\mathbb{R} אוני תהא
                                                                                   \inf\left(A
ight)=\max\left(\underline{B}_A
ight) אזי A\subseteq\mathbb{R} אינפימום/חסם תחתון: תהא
                                                                              \inf\left(A
ight)=\min\left(A
ight) איים אזי \min\left(A
ight) עבורה A\subseteq\mathbb{R} טענה: תהא
                                                                           \operatorname{sup}(A) = \max(A) איים אזי \operatorname{max}(A) עבורה A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                              \operatorname{ann}((a,b)) = a אזי a < b עבורם a,b \in \mathbb{R} טענה: יהיו
```

 $.b = \sup (A) \bullet$

 $\sup ((a,b)) = b$ אזי a < b עבורם $a,b \in \mathbb{R}$ טענה: יהיו

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b\in\mathbb{R}$ חסומה מלעיל של

 $\forall d \in \overline{B}_A.b \le d \bullet$

```
. \forall \varepsilon > 0. \exists a \in A. (\sup(A) - \varepsilon < a < \sup(A)) מסקנה: תהא A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} מסקנה: תהא
                         (b = \sup(A)) \Longleftrightarrow ((\forall x \in A.x \le b) \land (\forall \varepsilon > 0.\exists x \in A.x > b - \varepsilon)) אזי A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\} מסקנה: תהא
                                                                                                                          טענה: תהיינה A,B\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\{\varnothing\} חסומות אזי
                                                                                                                                     \inf (A + B) = \inf (A) + \inf (B) \bullet
                                                                                                                                  .\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) \bullet
                                                                                                                                                       .\sup(-A) = -\inf(A) \bullet
                                                                                                                      b^2=c עבורו b\in\mathbb{R}_+ אזי קיים מענה: יהי c\in\mathbb{R}_+ יהי
                                                                                                 b^n=c טענה: יהי b\in\mathbb{R}_+ אזי קיים n\in\mathbb{N}_+ יהי c\in\mathbb{R}_+ טענה:
                                               . orall b \in B. orall arepsilon > 0. \exists a \in A. \ |b-a| < arepsilon המקיימת A \subseteq B אזי קבוצה B \subseteq \mathbb{R} אזי קבוצה אפופה: תהא
                                                       .(orall a,b\in\mathbb{R}.\,((a< b)\Longrightarrow ((a,b)\cap S
eq arnothing))) \Longleftrightarrow (\mathbb{R}^-טענה: תהא S\subseteq\mathbb{R} אזי S\subseteq S
                                                                                                            |a,b) \cap \mathbb{Q}| = \aleph_0 אזי a < b עבורם a,b \in \mathbb{Q} טענה: יהיו
                                                                                                 \exists r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \, (a < r < b) אזי a < b עבורם a, b \in \mathbb{Q} יטענה: יהיו
                                                                                                    \exists q \in \mathbb{Q}. \, (x < q < y) אזי x < y עבורם x,y \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                                                                                                                                                  \mathbb{R}מסקנה: \mathbb{Q} צפופה ב
                                                                                  .[a,b] \cap \mathbb{Q} בפופה ב־ a,b \in \mathbb{R} צפופה בי מסקנה: לכל מסקנה: לכל
                                                                                                                                .n! = \left\{egin{array}{ll} 1 & n=0 \ (n-1)! \cdot n & 	ext{else} \end{array}
ight. אזי n \in \mathbb{N} אנרת: יהי
                                                                                                             .\binom{n}{k}=rac{n!}{k!\cdot(n-k)!} אזי n,k\in\mathbb{N} אזי n,k\in\mathbb{N} בחר: יהיו n,k\in\mathbb{N} אזי n,k\in\mathbb{N} אזי n,k\in\mathbb{N} זהות פסקל: יהיו n,k\in\mathbb{N}
                                                               (a+b)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}a^ib^{n-i} אזי n\in\mathbb{N} וויהי a,b\in\mathbb{R} נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו
                                                                                                                                       [n]=\{1\dots n\} אזי n\in\mathbb{N}_+ סימון: יהי
                         \sum_{i=1}^n a_i \geq n אזי אזי \prod_{i=1}^n a_i = 1 וכן i \in [n] אכל a_i \geq 0 עבורם a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} אי־שיוויון הממוצעים: יהיו a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} עבורם a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} אי־שיוויון הממוצעים: יהיו a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} עבורם a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} אי־שיוויון הממוצעים: יהיו
.\left(rac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}=rac{n}{\sum_{i=1}^{n}rac{1}{a_i}}
ight)\Longleftrightarrow (orall i,j\in[n]\,.a_i=a_j) אזי i\in[n] אזי a_i\geq 0 עבורם a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}
                                                                                           (1+x)^n \geq 1+nx אזי איז איז n \in \mathbb{N} ויהי איז איז יהי ברנולי: יהי אי־שיוויון ברנולי:
                                                                                                                           |x|=\left\{egin{array}{ll} x&x\geq 0\ -x&x\leq 0 \end{array}
ight.אזי x\in\mathbb{R} יהי הערך המוחלט: יהי
                                                                                                   (|a| \geq b) \Longleftrightarrow ((b \leq a) \lor (a \leq -b)) אזי a,b \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                                                                                               (|a| \le b) \Longleftrightarrow (-b \le a \le b) אזי a,b \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                                                                              |a+b| \leq |a|+|b| אזי a,b \in \mathbb{R} איישיוויון המשולש (אש"מ): יהיו
                                                                            |x_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| איי איזי אוייון המשולש המוכלל: יהיי יהיו איx_1 \dots x_n \in \mathbb{R} איישיוויון המשולש
                                                                                                                              |a-b| \leq |a| + |b| אזי a,b \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
                                                                                                          |x-y| \leq |x-z| + |z-y| אזי x,y,z \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
                                                                                              |a|-|b| \le |a-b| אזי a,b\in\mathbb{R} איזי המשולש ההפוך: יהיו
                                                                                                         a=b אזי orall arepsilon>0. |a-b|<arepsilon עבורם a,b\in\mathbb{R} אזי
                                                                                                                \sum_{i=0}^n r^i = rac{1-r^{n+1}}{1-r}טענה: יהיr \in \mathbb{R} ויהיr \in \mathbb{R} אזי
                                                                                                                                                          a:\mathbb{N}	o\mathbb{R} סדרה: פונקציה
```

 $\forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0$ סדרה חיובית: •

 $a_n = a\left(n\right)$ סימון: תהא a סדרה אזי $a=(a_n)_{n=0}^\infty$ סימון: תהא a סדרה אזי

הגדרה: תהא a_n סדרה אזי

 $\forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0$:סדרה אי שלילית

 $\forall a \in \mathbb{R}. ((a < b) \Longrightarrow (a \notin \overline{B}_A)) \bullet$

 $\forall n \in \mathbb{N}. a_n < 0$:סדרה שלילית

 $\forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq 0$ סדרה אי חיובית: •

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה אזי

```
\lim_{n	o\infty}r=r אזי r\in\mathbb{R} טענה: יהי
                                                                                                                                           \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 טענה:
                                                                                                                              g^n 	o 0טענה: יהי q \in (0,1) אזי
                                                                                                                                  \sqrt[n]{c} 	o 1 אזי c>0 טענה: יהי
                                                                                                                                                     \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 :טענה
                                                                                                                               rac{1}{n^{lpha}} 	o 0 אזי lpha \in \mathbb{Q}_+ טענה: יהי
               L_1=L_2 אזי \lim_{n	o\infty}a_n=L_2 וכן ווו\lim_{n	o\infty}a_n=L_1 ותהא סדרה עבורה L_1,L_2\in\mathbb{R} אזי איי
                                                           \lim_{n	o\infty}|a_n|=|L| אזי \lim_{n	o\infty}a_n=L משפט: יהי L\in\mathbb{R} אותהא סדרה עבורה עבורה
                                                                            .(\lim_{n\to\infty}a_n=0)\Longleftrightarrow (\lim_{n\to\infty}|a_n|=0) טענה: תהא סדרה אזי (מינה תהא
                         a_n = L (\lim_{n \to \infty} a_n = L) אזי a_n = L אזי a_n = L סענה: תהיינה a_n = L סדרות עבורן a_n \neq b_n
                                                          a_{n-1}(\lim_{n \to \infty} a_n = L) \Longleftrightarrow (\lim_{n \to \infty} a_{n+k} = L) אזי k \in \mathbb{N} טענה: תהא
סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא M>0.\exists N\in\mathbb{N}. \forall n>N.M< a_n סדרה מתבדרת לאינסופי/גבול אינסופי/גבול הרחב:
                                                                                                                                                  \lim_{n\to\infty} a_n = \infty
סדרה מתבדרת למינוס אינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא מדרה עבורה M>0.\exists N\in\mathbb{N}. \forall n>N. אזי
                                                                                                                                               \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty
                                                                                                                     \lim_{n\to\infty}a^n=\infty אזי a>1 טענה: יהי
                                                                                                                                          \lim_{n\to\infty} n=\infty טענה:
                                                                 \lim_{n	o\infty}rac{1}{a_n}=\infty אזי אוו\lim_{n	o\infty}a_n=0 טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת
                                                                        . אזי a אזי a חסומה a אזי a חסומה a ותהא a סדרה המקיימת a
                                                                                                                    מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.
                     a_n \in \mathbb{R} . (\lim_{n \to \infty} a_n = L) \iff (\forall \varepsilon > 0. \ | \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)\}| \in \mathbb{N}) טענה: יהי
                           . orall r \in (0,|L|)\,. \exists N \in \mathbb{N}. orall n > N.\, |a_n| > r אזי וותהא a_n = L סדרה המקיימת סדרה L \in \mathbb{R} יהי למה: יהי
                                                                         a_n\downarrow L אזי אזי a_n\to L ממש עבורה יורדת מחש סדרה ותהא ותהא ותהא L\in\mathbb{R}
                                                                          a_n \uparrow L אזי א a_n \to L מימון: יהי חדרה עולה ממש סדרה עולה מדרה ותהא L \in \mathbb{R}
                                                                              a_n \searrow L אזי אa_n \to L סדרה יורדת עבורה a אזי ותהא ותהא L \in \mathbb{R}
                                                                                 a_n 
ewline L אזי אזי עבורה עבורה סדרה ותהא חדרה a אזי אזי אזי יהי סימון: יהי
                                                                  .b_n 
\uparrow x וכן a_n \searrow x עבורן a,b: \mathbb{N} 	o \mathbb{Q} וכן אזי קיימות סדרות x \in \mathbb{R}
                    x=n+\sum_{i=-\infty}^{-1}a_i\cdot 10^i עבורם a:\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}	o\{0,\dots,9\} וקיימת n\in\mathbb{N} טענה ייצוג עשרוני: יהי
                                                               m\%n=\ell אזיn=km+\ell עבורם \ell\in\{0\dots n\} ויהיn,m,k\in\mathbb{N} איי
           \overline{d_1\dots d_n}=a אזי a\left(i
ight)=d_{i\%n} כך a:\mathbb{N}	o\{d_1\dots d_n\} נגדיר d_1\dots d_n\in\{0\dots 9\} אזי היו
                     (q\in\mathbb{Q})\Longleftrightarrow \left(\exists n,k,\ell\in\mathbb{N}.\exists a_1\ldots a_k,b_1\ldots b_\ell\in\{0\ldots 9\}\,.\,\left(q=n.a_1\ldots a_k\overline{b_1\ldots b_\ell}
ight)
ight) אוי q\in\mathbb{R} טענה: יהי
                                                                                                             משפט אוקלידס: \mathbb{P} חסומה מלרע אך לא מלעיל.
                                   n\in\mathbb{N}_+ לכל p_n\in\left\{p\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_i
ight)
ight\} וכן p_1\in\mathbb{P} לכל p_n\in\{p_i\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_i
ight)
                                                                   \left|\left\{\langle p,q
angle\in\mathbb{Q}	imes\mathbb{N}\;\middle|\; \left|	heta-rac{p}{q}
ight|<rac{1}{q^2}
ight\}
ight|\geqleph_0 אזי 	heta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} משפט דריכלה: יהי
                 \exists c\in\mathbb{R}.rac{c}{q^2}<\left|	heta-rac{p}{q}
ight| מתקיים מספר \left|	heta-rac{p}{q}
ight|<rac{1}{q^2} עבורם עבורם q\in\mathbb{N} עבורו לכל p\in\mathbb{Q} אזי a\in\mathbb{R} אזי a,y\in\mathbb{R} אזי a,y\in\mathbb{R} אזי ותהיינה a,b מענה חשבון גבולות: יהיו
```

 $\lim_{n o\infty}a_n=L$ אזי א $arphi>0.\exists N\in\mathbb{N}. orall n>N.$ $|a_n-L|<arepsilon$ חותהא a סדרה עבורה $L\in\mathbb{R}$ אזי אזי

. $\forall n,m \in \mathbb{N}. ((n < m) \Longrightarrow (a_n < a_m))$ שעולה ממש: . $\forall n,m \in \mathbb{N}. ((n < m) \Longrightarrow (a_n \le a_m))$ שעולה: . $\forall n,m \in \mathbb{N}. ((n < m) \Longrightarrow (a_n > a_m))$ שיורדת ממש: . $\forall n,m \in \mathbb{N}. ((n < m) \Longrightarrow (a_n \ge a_m))$ שיורדת: •

 $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. a_n < M$ סדרה חסומה מלעיל: סדרה המקיימת $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. M < a_n$ סדרה חסומה מלרע: סדרה a באשר a חסומה מלעיל. סדרה חסומה: סדרה a באשר a חסומה מלעיל.

 $a_n o L$ אזי $\lim_{n o \infty} a_n = L$ אזי חותהא סדרה עבורה $L \in \mathbb{R}$ איי יהי

```
a_n + b_n \to x + y \bullet
   .a_n \cdot b_n \to x \cdot y \bullet
```

 $rac{a_n}{b_n} o rac{x}{y}$ אזי $orall n \in \mathbb{N}.b_n
eq 0$ וכן y
eq 0 אם •

 $L \geq 0$ אזי $d_n o L$ אזי עבורה אי־שלילית אזי $L \in \mathbb{R}$ אזי למה: יהי

 $a_n o \sqrt[k]{a_n} o \sqrt[k]{L}$ אזי אזי $k \in \mathbb{N}_+$ ויהי $a_n o L$ טענה: תהא שלילית המקיימת

 $.a \preccurlyeq b$ אזי $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n \leq b_n$ סדרות עבורן a,b אזי תהיינה סימון: תהיינה

 $a \prec b$ אזי $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n < b_n$ סדרות עבורן a,b אזי מימון: תהיינה

 $\lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} b_n$ אזי אזי $a \preccurlyeq b$ סדרות מתכנסות סדרות מהיינה a,b סדרות:

a,b,c אאי a,c o L וכן $b\preccurlyeq c$ וכן $a\preccurlyeq b$ סדרות עבורן סדרות איינה a,b,c אונ $L\in\mathbb{R}$

 $a\cdot b o 0$ אזי איי מענה: תהא b o 0 אזי איי סדרה חסומה ותהא

 $rac{a}{n} o 0$ מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי

 $a.b o \sup{(B)}$ אבורה $b:\mathbb{N} o B$ משפט: תהא חסומה מלעיל אזי קיימת

 $ab \to \inf (B)$ עבורה $b: \mathbb{N} \to B$ מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי קיימת

 $a,b o \infty$ אזי $a \preccurlyeq b$ וכן $a o \infty$ סדרות עבורן a,b אזי מענה: תהיינה

 $a,b o -\infty$ אזי $b \preccurlyeq a$ וכן $a o -\infty$ סדרות עבורן מדרות a,b אזי

 $.a \rightarrow 0$ אזי $a \prec \alpha^n$ המקיים $\alpha \in [0,1)$ קיים עבורה אי שלילית סדרה a אחזי מבחן השורש: מבחן מבחן השורש מבחן השורש הגבולי: יהי $p\in\mathbb{R}$ ותהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $p\in\mathbb{R}$ אזי

 $.(0 \le p < 1) \Longrightarrow (a_n \to 0) \bullet$

 $.(p>1) \Longrightarrow (a_n \to \infty) \bullet$

 $\sup (a_n) = \sup (\operatorname{Im}(a))$ איי מלעיל סדרה סדרה מדרה מלעיל מימון: תהא

 $\inf\left(a_{n}\right)=\inf\left(\operatorname{Im}\left(a\right)\right)$ אזי מלרע סדרה סדרה מדרה מדרה מלרע סימון: תהא

משפט: תהא a סדרה אזי

 $a_n
sup (a_n)$ אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי

 $a_n
egthinspace \infty$ אם מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי מונוטונית •

 $a_n \searrow \inf \left(a_n \right)$ אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי

 $a_n \searrow -\infty$ אם מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע מיירדת וועה פונוטונית יורדת ו

אזי $\frac{a_{n+1}}{a_n} o L$ אזי המנה הגבולי: תהא a אחדה המנה הגבולי: מבחן המנה הגבולי

 $(L < 1) \Longrightarrow (a_n \to 0) \bullet$

 $(L>1)\Longrightarrow (a_n\to\infty)$ • $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$ מדרה אזי a סדרה אזי a סדרה אזי a

 $a_n = a$ משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא מדרה המקיימת $a_n \to a$ סדרה המקיימת משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: $a_n o a_n$ במובן הרחב אזי $a_n o a_n$ סדרה חיובית המקיימת ממוצע הנדסי: תהא משפט התכנסות ממוצע הנדסי:

 $\sqrt[n]{a_n} \to c$ משפט ז'אלאמבר: תהא a סדרה חיובית המקיימת a במובן הרחב אזי a במובן הרחב a סדרה חיובית המקיימת a סדרה חיובית המקיימת a במובן הרחב ותהא a סדרה המקיימת a במובן הרחב ותהא a סדרה המקיימת a סדרה נניח כי a סדרה נניח כי a סדרה נניח כי a סדרה נניח כי a סדרה נוחה a סדרה ותהא a סדרה ותהא a סדרה נוחה שוון a סדרה נוחה a סדרה נוחה שוון a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה ותהא a סדרה נוחה שוון a סדרה נוחה בישפט שטולץ: תהא a סדרה ותהא a סדרה נוחה שוון a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה וותהא a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה וותהא a סדרה בישפט שטולץ: a סדרה בישפט שטולץ: a סדרה וותהא a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה ב

טענה: $(1+\frac{1}{n})^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in (2,3]$ מסקנה: $e=\lim_{n o\infty}\left(1+rac{1}{n}
ight)^n$:קבוע אוילר

 $.\Big(1+rac{1}{a_n}\Big)^{a_n} o e$ אזי $a_n o\infty$ המקיימת $a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ אזי a_n אזי a_n המקיימת $a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$ עולה אזי a_n עולה אזי a_n 0. תת סדרה חלקית (ת"ס): תהא a_n 0 סדרה ותהא

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה של a אזי

.(ל חסומה מלעיל) מלעיל) מלעיל). • חסומה מלעיל).

.(עסומה מלרע) אסומה מלרע) סומה מלרע).

 $(a \to L) \Longrightarrow (b \to L) \bullet$

.(מונוטונית) מונוטונית) מונוטונית) a

```
.|\bigcap_{n=0}^{\infty}\left[a_{n},b_{n}\right]|=1 אזי
                                                                                                  \mathcal{C}=[0,1]\setminus igcup_{n=0}^{\infty}igcup_{k=0}^{3^n-1}ig(rac{3k+1}{3^{n+1}},rac{3k+2}{3^{n+1}}ig) קבוצת קנטור:
                                                               משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.
                                          משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.
                                                                                                                                         \mathbb{R}_{\infty} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} סימון:
                                            . במובן b 	o x עבורה עבורה b 	o a עבורה עבורה קיימת עבורה a עבורה אזי x \in \mathbb{R}_\infty
                    \widehat{\mathcal{P}}\left(a
ight)=\{L\in\mathbb{R}_{\infty}\mid a סדרה אזי L\} גבול חלקי של של לLו\mathcal{P}\left(a
ight)=\{L\in\mathbb{R}\mid a סימון: תהא a סדרה אזי L
                                                                                                                                                   טענה: תהא a סדרה אזי
                                                                                                                     (\infty \in \widehat{\mathcal{P}})אינה חסומה מלעיל a
                                                                                                                   (-\infty \in \widehat{\mathcal{P}}) \Longleftrightarrowענה חסומה מלרע) •
                                                                                                                                    \left|\widehat{\mathcal{P}}
ight|>0 טענה: תהא a סדרה אזי
                                                             (\forall \varepsilon>0. \ |\{a_n\mid |a_n-L|<arepsilon\}|= \aleph_0) \Longleftrightarrow (\stackrel{\cdot}{L}\in \mathcal{P}) משפט: תהא סדרה אזי
                                                                                        \widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\subseteq\left[\inf\left(a
ight),\sup\left(a
ight)
ight]מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי
                                                                                                          .\lim (\sup (a)) = \sup (\mathcal{P}) סדרה אזי a סדרה מימון: תהא
                                                                                                            \operatorname{lim}(a) = \operatorname{lim}(\sup(a)) סימון: תהא a סדרה אזי
                                                                                                            .\lim (\inf (a)) = \inf (\mathcal{P}) אזי a סדרה a סדרה מימון: תהא
                                                                                                             \underline{\lim}\left(a\right)=\lim\left(\inf\left(a\right)\right)אזי סדרה a סדרה מימון: תהא סדרה מימון
                                                                             (\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}) \wedge (\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|=1)איי משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)
                                                                                           משפט: תהא \min\left(\mathcal{P}\right), \max\left(\mathcal{P}\right) אזי סדרה חסומה אזי סדרה משפט
\widehat{\mathcal{P}}(a)=ig|_{i=1}^m\widehat{\mathcal{P}}\left(a_{b_i}
ight) איי סענה: יהיו a סדרה אזי b_1\ldots b_m:\mathbb{N}	o\mathbb{N} ותהא a סדרה אזי וותהא b_1\ldots b_m:\mathbb{N}	o\mathbb{N}
                                                                            . orall x \in A. \exists arepsilon > 0. \ (x-arepsilon, x+arepsilon) \subseteq A המקיימת המחה: A \subseteq \mathbb{R}
                                                            . פתוחה \bigcup_{i=1}^\infty A_i אזי i\in\mathbb{N} פתוחה לכל \{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}
ight) פתוחה.
                                                                                . פתוחה \bigcap_{i=1}^n A_i אזי A_1 \ldots A_n \subseteq \mathbb{R} פתוחה סענה: תהיינה
                                                                                                            קבוצה סגורה: קבוצה B\subseteq\mathbb{R} פתוחה.
                                                             . סגורה \bigcap_{i=1}^\infty B_i אזי i\in\mathbb{N} סגורה לכל B_i באשר באשר \{B_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}
ight)
                                                                                  סענה: תהיינה A_1 \ldots A_n \subseteq \mathbb{R} סגורות אזי סגורה. A_1 \ldots A_n \subseteq \mathbb{R}
                                                  .\exists a\in (S\backslash\left\{x
ight\})^{\mathbb{N}}\,.\lim_{n	o\infty}a_n=x המקיימת x\in\mathbb{R} אזי אזי S\subseteq\mathbb{R} נקודת הצטברות: תהא
                                                                                                                                              טענה: תהא B\subseteq\mathbb{R} התב"ש
                                                                                                                                                    . קבוצה סגורה B \bullet
                                                                                                                                  \forall a \in B^{\mathbb{N}}. \lim_{n \to \infty} a_n \in B \bullet
                                                                                                              \{x \in \mathbb{R} \mid B  נקודת הצטברות של \{x \in \mathbb{R} \mid B \in B \bullet \}
                                                                                               משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים \mathcal{P}\left(a\right) קבוצה סגורה.
                                                                                         \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. P\left(n\right) במעט תמיד: פרידקט P\left(n\right) המקיים
```

 $orall n\in\mathbb{N}.$ $(a_n\leq b_n)\wedge([a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n])$ וגם b-a o 0 חדרות המקיימות תהיינה a,b חדרות מקוננים: תהיינה

 $.(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N.a_n \le L) \Longrightarrow (\limsup a \le L) \bullet$

 $a = \liminf a \iff$ משפט: תהא סדרה אזי (מתכנסת) משפט: משפט: משפט

 $|\{n\in\mathbb{N}\mid P\left(n
ight)\}|=leph_{0}$ שביח: פרידקט $P\left(n
ight)$ המקיים

.טענה: תהא a סדרה ללא מקסימום אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש

. סענה: תהא a סדרה אזי קיימת תח סדרה מונוטונית טענה:

 $.(\forall N \in \mathbb{N}.\exists n > N.a_n \ge L) \Longrightarrow (\limsup a \ge L) \bullet$

 $(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N.a_n \ge L) \Longrightarrow (\liminf a \ge L) \bullet$

 $(\forall N \in \mathbb{N}.\exists n > N.a_n \leq L) \Longrightarrow (\liminf a \geq L) \bullet$

משפט: תהא a סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$ התב"ש

משפט: תהא $L \in [-\infty,\infty]$ אזי אדרה ויהי a אזי

 $\lim \sup a = L \bullet$

```
. \forall \varepsilon>0. \exists N\in\mathbb{N}. \forall m,n\geq N. \, |a_m-a_n|<\varepsilon סדרת קושי: סדרה a המקיימת
                                                                                                                  למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.
                                                                                    a מתכנסת) סדרת (מתכנסת) משפט: תהא a סדרת אזי (מתכנסת)
                                                                                \sum_{i=k}^{\infty}a_i=\lim_{n	o\infty}\sum_{i=k}^na_i אזי k\in\mathbb{Z} סכום אינטופי: יהי
                                                                                                \sum_{i=0}^\infty a_i טור: תהא a סדרה אזי \sum_{i=0}^\infty a_i טור: תהא \sum_{n=0}^\infty a_n טור אזי \sum_{n=0}^\infty a_n סימון: יהי
                                                                                 S_n^a = \sum_{i=0}^n a_i סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרת הסכומים
                                                                           .(S_n^a 	o L) \Longrightarrow (\sum_{i=0}^\infty a_i = L) טור מתכנס: תהא סדרה אזי
                                                                                             \sum_{m=0}^{\infty} ar^m טור גאומטרי: יהיa 
eq 0 ויהי r \in \mathbb{R}
                                                                                    (|r|<1) \Longleftrightarrowמשפט: יהי r\in\mathbb{R} אזי r\in\mathbb{R} מתכנס) משפט: יהי
                                                                                                                                       .\sum_{n=1}^{\infty}rac{1}{n} הטור ההרמוני: .\sum_{n=1}^{\infty}rac{1}{n}
ightarrow\infty טענה:
                                                                                   (a_n 	o 0)בשנט: תהא a_n 	o 0משנט: תהא a_n 	o 0משנט: תהא a_n 	o 0משנט: תהא a_n 	o 0
(orall arepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}. orall m>N. orall k\in\mathbb{N}. \left|\sum_{n=m}^{m+k}a_n
ight|<arepsilon)מור אזי \sum_{n=0}^{\infty}a_n מורים ויהי \sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n אזי איזי \xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\} טורים ויהי \sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n
                                                                                      .(מתכנס) מתכנס) מתכנס) מתכנס) מתכנס) מתכנס) מתכנס) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)
                                                                                               \sum_{n=0}^{\infty} \xi a_n מתכנס) מתכנס) מתכנס) \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתכנס) \sum_{n=0}^{\infty} a_n מהגדרה: יהי \sum_{n=0}^{\infty} a_n טור אזי
                                                                                                                         \forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0 טור חיובי:
                                                                                                                    \forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0 טור אי שלילי:
                                                                                                                         \forall n \in \mathbb{N}. a_n < 0 טור שלילי: •
                                                                                                                    \forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq 0 טור אי חיובי: •
                                                                            . טור מתכנס בהחלט: טור \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| המקיים \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתכנס
                                                                            . טענה: יהי כנס טור מתכנס טור מתכנס טור כהחלט אזי יהי \sum_{n=0}^\infty a_n יהי יהי
                                 \sum a_n \preccurlyeq \sum b_n אזי a_n \leq b_nמסויים ממקום עבורם חיוביים טורים טורים הייו \sum a_n, \sum b_n יהייו יהיו
                                                               משפט ההשוואה: יהיו \sum a_n, \sum b_n טורים המקיימים \sum a_n, \sum b_n אזי
                                                                                                \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתכנס). מתכנס) מתכנס). \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתבדר). \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתבדר).
                                      מבחן במובן rac{a_n}{b_n} 	o L מבחן המקיימות חיוביות מדרות היה מהבולי: יהיו מבחלי: יהיו
                                                                              (L \in (0,\infty)) \Longrightarrow ((\sum b_n < \infty) \Longleftrightarrow (\sum a_n < \infty)) \bullet
                                                                                       (L=0) \Longrightarrow ((\sum b_n < \infty) \Longrightarrow (\sum a_n < \infty)) \bullet
                                                                                     (L = \infty) \Longrightarrow ((\sum b_n < \infty) \longleftarrow (\sum a_n < \infty)) \bullet
              . (מתכנס). \sum a_n טור אי שלילי (קיים q\in(0,1) עבורו כמעט תמיד \sum a_n טור אי שלילי (קיים a_n) עבורו כמעט עבורו יהי
                                                                                                        מבחן השורש הגבולי: יהי סור חיובי אזי מבחן השורש הגבולי
                                                                                                .(lim \left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)<1)מתכנס) \sum a_n
                                                                                               .(lim \left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right) > 1) מתבדר \sum a_n •
                                                                                             מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי\sum a_n' טור חיובי אזי
```

. (מתכנס) בורו $\sum a_n$ ($\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ מתכנס) עבורו עבורו $q \in (0,1)$

.(כמעט תמיד בדר) מתבדר) (כמעט תמיד ב $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ מתבדר). מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי אזי

 $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1 \}$ מתכנס) $\sum_{n \to \infty} a_n$ • .($\lim_{n \to \infty} \left(\inf_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right) > 1 \}$ מתבדר) $\sum_{n \to \infty} a_n$ •

 $. \forall \varepsilon > 0. \ (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n < L + \varepsilon) \land (\forall \varepsilon > 0. \forall N \in \mathbb{N}. \exists n \geq N. a_n > L - \varepsilon)$ • .($\liminf a \leq \liminf b) \land (\limsup a \leq \limsup b)$ אזי אזי $a_n \preccurlyeq b_n$ אזי משפט: תהיינה a,b סדרות המקיימות

```
(x>1)מסקנה: יהי x\in\mathbb{R} אזי (x>1) מתכנס)
                                                                                                             מתכנס. \sum (-1)^n a_n אזי a_n \setminus 0 מתכנס.
                                                                                                 טור מתכנס בתנאי: טור \sum |a_n| מתכנס המקיים \sum a_n טור מתכנס בתנאי
                                \sum_{k=m}^n a_k \left(b_{k+1}-b_k
ight) = \left(a_n b_{n+1}-a_m b_m
ight) - \sum_{k=m+1}^n b_k \left(a_k-a_{k-1}
ight) אינה a,b סענה: תהיינה a,b סדרות אזי a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{k+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^k a_k \left(b_k-b_{k+1}
ight) התמרת אבל: תהיינה a,b סדרות אזי a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{k+1} + \sum_{k=1}^n a_k b_{k+1} + \sum_{k=1}^n a_k b_{k+1}
                                        . סדרה \sum a_n b_n אזי חסומה אזי \sum a_n b_n מתכנס. סדרה עבורה \sum a_n b_n סדרה סדרה סדרה שונוטונית ותהא
                                                        מתכנס. \sum a_n b_n אזי אזי \sum a_n b_n טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי סדרה \sum a_n
                                                                  . \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}=\infty משפט: \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k=L אולה ממש אזי b\in\mathbb{N}^\mathbb{N} טור ותהא \sum_{b_0=0}^\infty a_n=L משפט: יהי \sum_{n=0}^\infty a_n=L
אזי \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L בעלי אותו סימן וגם (a_i)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1} וכן וכן b_0=0 וכן שולה ממש עבורה b\in\mathbb{N}^\mathbb{N} אזי b\in\mathbb{N}^\mathbb{N}
                                                                             \sum a_{p(n)} = \sum a_n אווג אזי p \in \mathbb{N}^\mathbb{N} משפט: יהי \sum a_n טור חיובי מתכנס ויהי
                                                                                                                               a_n^-=rac{|a_n|-a_n}{2} סימון: תהא סדרה אזי a_n סדרה מון: תהא a_n^+=rac{|a_n|+a_n}{2} סדרה אזי a_n
                                                         .((סמתכנס) אזי \sum a_n^-ו)\wedge מתכנס) מתכנס בהחלט) מתכנס בהחלט) מתכנס סדרה מיי מתכנס) מתכנס בהחלט) משפט: תהא
                                                                          \sum a_{p(n)} = \sum a_n איווג אזי p \in \mathbb{N}^\mathbb{N} משפט: יהי יהי טור מתכנס בהחלט ויהי
                                                                           a_n^+ = \infty = \sum a_n^-משפט: תהא a_n סדרה אזי (a_n מתכנס בתנאי) משפט: תהא משפט
                                                                                                                                                    \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} סימון:
                                                                                                                          משפט רימן: יהי\sum a_nטור מתכנס בתנאי אזי
                                                                                            \sum a_{\sigma(n)} = S הפיכה עבורה \sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N} קיימת S \in \hat{\mathbb{R}} לכל
                                                                               . הרחב ממכנסת לא \sum a_{\sigma(n)} עבורה הפיכה \sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N} מתכנסת \bullet
           \sum a_{p(n)}b_{q(k)}=(\sum a_n)\,(\sum b_n) אזי היו אויים מתכנסים טורים \sum a_n,\sum b_n תמורות ויהיו p,q\in\mathbb{N}^\mathbb{N}
                                                                                                  \sum a_k \left(x-x_0
ight)^k אזי x_0 \in \mathbb{R} סדרה ויהי a_n סדרה מזקות: תהא
                                   x \in (-|q|,|q|) טור חזקות המתכנס עבור \sum a_k x^k אזי אזי q \in \mathbb{R} משפט: יהי
                                                                                              עבורו R \in [0,\infty] אזי חזקות אזי \sum a_k x^k יהי יהי
                                                                                                       . מתכנס בהחלט \sum a_k x^k מתכנס בהחלט x \in (-R,R) לכל
                                                                                                                    . מתבדר \sum a_k x^k מתקיים x \notin [-R, R] סתבדר
                                                                                                  משפט אבל: יהי \sum a_k x^k טור חזקות אזי קיים רדיוס התכנסות.
                                                R=rac{1}{\limsup\left(|a_n|^{rac{1}{n}}
ight)} אזי איזי R אזי ההתכנסות בעל רדיוס טור חזקות טור איזי \sum a_nx^n משפט קושי הדמרד: יהי
                                        -\left(\limsup\left(|a_n|^{rac{1}{n}}
ight)=0
ight)\Longrightarrow(R=\infty) אזי הערה: יהי ווא פעל חזקות בעל רדיוס ההתכנסות התכנסות הערה: יהי
                                    .\Big(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\Big)\Longrightarrow (R=0) אזי איי ההתכנסות בעל רדיוס בעל רדיוס ההתכנסות בעל רדיוס ההתכנסות \sum a_nx^n אזי יהיו בעל רדיוס בעל רדיוס החלנת אזי חזקות אזי וורי חזקות אזי \sum a_nx^n, \sum b_nx^n מכפלת קושי: יהיו
                        a_n מתכנס עבור \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n אזי איזי q\in\mathbb{R} מתכנס עבור טענה: יהיו \sum a_n x^n, \sum b_n x^n
                                                                                 (C)\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{n	o\infty}rac{\sum_{i=0}^{n-1}S_i^a}{n} אור אזי \sum a_n טור איזי יהי ביארו: יהי יהי \sum_{n=0}^{\infty}S_i^a=\sum_{i=0}^{n-1}a_n\left(1-rac{i}{n}
ight) טענה: יהי \sum a_n טור אזי \sum a_n
                                                                                                                                 פונקציה מונוטונית: תהא f \in \mathbb{R} 	o \mathbb{R} אזי
                                                                                                    \forall x, y \in \mathbb{R}. (x < y) \Longrightarrow (f(x) < f(y)) פעולה ממש: •
                                                                                                             . \forall x,y \in \mathbb{R}. \, (x < y) \Longrightarrow (f \, (x) \leq f \, (y)) \, : עולה: •
                                                                                                   \forall x, y \in \mathbb{R}. (x < y) \Longrightarrow (f(x) > f(y)) יורדת ממש: •
```

 $.orall x,y\in\mathbb{R}.\ (x< y)\Longrightarrow (f\left(x
ight)\geq f\left(y
ight))$ יורדת: • $.[0,\infty)\$ טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $n\in\mathbb{N}_+$ מונוטונית עולה ממש בקטע $.(f\left(x
ight)=x^n)\Longrightarrow \left(f^{-1}\left(x
ight)=x^{rac{1}{n}}
ight)$ אזי $n\in\mathbb{N}$ טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$

(משפט העיבוי: תהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי a_n מתכנס a_n מתכנס). משפט העיבוי:

(מתכנס) אי שלילית יורדת אזי $\sum m^n a_{m^n}$ מתכנס) אי שלילית יורדת אזי וורה $\sum m^n a_{m^n}$ מתכנס).

```
\mathrm{constant}(c^{a_n})=\mathrm{lim}\left(c^{b_n}
ight) אזי a_n,b_n\searrow b המקיימות a,b\in\mathbb{Q}^\mathbb{N} תהיינה c\in\mathbb{R} יטענה: יהי
                                        הגדרה: יהיו b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} ותהא b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} המקיימת n, m \in \mathbb{N} אזי הגדרה:
                                                                                                        .x^{-n} = \frac{1}{x^n} \bullet.x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} \bullet
                                                                                                   .a^b = \lim_{n \to \infty} a^{b_n} \bullet
                                     f(x)=x^{\alpha} כך f:[0,\infty) \to [0,\infty) נגדיר 0<\alpha יהי
                                    f\left(x
ight)=x^{lpha} כך f:\left(0,\infty
ight)
ightarrow\left(0,\infty
ight) נגדיר 0>lpha יהי
                                                                                         \sqrt[n]{x}=x^{rac{1}{n}} אזי n\in\mathbb{N} שורש: יהי
                                                                        \left(yx
ight)^{a}=y^{a}x^{a} אזי a,b,x,y\in\mathbb{R} משפט: יהיו
                                                                              (x^a)^b=x^{ab} אזי a,b,x\in\mathbb{R} משפט: יהיו
                                                                             x^ax^b=x^{a+b} אזי a,b,x\in\mathbb{R} משפט: יהיו
                                                                      x^r < x^\ellטענה: יהי x > 1 אזי x > 1
                                                                x^r > x^\ellטענה: יהי 0 < r < \ell ויהיו 0 < x < 1 טענה:
                                     f\left(x
ight)=a^{x} כך כך f\in\left(0,\infty
ight)^{\mathbb{R}} נגדיר 0<lpha
eq1 יהי הפונקציה המעריכית:
       . בתור היחס בין הצלע ממול האווית ליתר במשולש ישר אווית. \sin:[0,2\pi] 	o [-1,1] סינוס:
                                                                      \sin(x+2\pi k)=\sin(x) אזי איניס: יהי k\in\mathbb{N}
     . אווית ישר אווית ליתר במשולש ישר אווית היחס בין הצלע ככ\cos:[0,2\pi] 	o [-1,1] גדיר גדיר נגדיר
                                                                  \cos\left(x+2\pi k
ight)=\cos\left(x
ight) אזי איי אוי k\in\mathbb{N} קוסינוס: יהי
                                        	an(x)=rac{\sin(x)}{\cos(x)} כך לוח: \mathbb{R}ackslash\left\{rac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}
ight\}
ightarrow\mathbb{R} טנגנס: נגדיר
                                            \cot{(x)}=rac{\cos(x)}{\sin(x)} כך \cot:\mathbb{R}ackslash\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}	o\mathbb{R} קוטנגנס: נגדיר
                                                                                                טענה: זהויות טריגנומטריות.
                                                                                                     arcsin = sin^{-1}:הגדרה
                                                                                                    arccos = cos^{-1} :מגדרה
                                                                                                   \arctan = \tan^{-1}:הגדרה
                                                                                                     .arccot = \cot^{-1} :הגדרה
                                                            f^{-1} = \log_a אזי f(x) = a^x נסמן a > 0 אזי לוגריתם: יהי
                                                                                    \ln = \log_e :סימון (הלוגריתם הטבעי)
                                                                                                     טענה: זהויות לוגרתמיות.
                f\left(x+a
ight)=f\left(x
ight) המקיים a\in\mathbb{R}_{+} עבורה קיים f:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R} פונקציה מחזורית:
                                       \forall x \in \mathbb{R}. f(-x) = f(x) המקיימת f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} פונקציה זוגית: פונקציה מונקציה f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}
                               \forall x \in \mathbb{R}. f(-x) = -f(x) המקיימת f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} פונקציה אי־זוגית: פונקציה המקיימת
                                           I_{x,\delta}=(x-\delta,x+\delta)\setminus\{x\} אזי x\in\mathbb{R} ויהי \delta>0 ויהי
פונקציה מתכנסת בנקודה: יהי L \in \mathbb{R} יהיו a < x_0 < b עבורם a < x_0 < b עבורם יהי L \in \mathbb{R} יהי
```

 $(x^m)^{rac{1}{n}}=\left(x^k
ight)^{rac{1}{\ell}}$ אזי $rac{m}{n}=rac{k}{\ell}$ טענה: יהיו $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ המקיימים

- $. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0,\delta}. \left| f\left(x\right) L \right| < \varepsilon$ קושי: •
- $\forall y \in (a,b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to L)$ היינה: •

fל לפי קושי) אזי fמתכנסת ב־ x_0 לים לפי קושי) אזי $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ותהא $a < x_0 < b$ עבורם $a,b,x_0 \in A$ ויהיו $a,b,x_0 \in A$ ויהיו $a,b,x_0 \in A$ לפי היינה).

 $\lim_{x \to x_0} f\left(x
ight) = L$ איי x_0 המתכנסת ב x_0 המתכנסת x_0 אויהיו x_0 אויהיו בנקודה: יהי x_0 אויהיו x_0 אויהיו x_0 אויהיו x_0 אויהיו בנקודה: יהי

- $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. x \in (x_0, \min\{x_0 + \delta, b\}). |f(x) L| < \varepsilon$ סושי:
 - $\forall y \in (x_0, b)^{\mathbb{N}} . (y_n \downarrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to L)$ היינה: •

 x_0 טענה: יהי $x_0 \in A$ יהיו $x_0 \in A$ עבורם $x_0 \in A$ ותהא $x_0 \in A$ יהיו $x_0 \in A$ יהיו $x_0 \in A$ עבורם $x_0 \in A$ עבורם $x_0 \in A$ יהינה).

 x_0 לים אזיי $x_0 < b$ יהיו $x_0 \in A$ יהיו איזי $x_0 \in A$ יהיו איזי ותהא $x_0 \in A$ יהיו איזי ותהא $\lim_{x \to x^+} f(x) = L$

 $f:(a,x_0) o\mathbb{R}$ ותהא $a< x_0$ עבורם $a,x_0\in A$ יהיו והי בנקודה: יהי שמאל בנקודה: יהי מתכנסת חד־צדדית משמאל בנקודה: יהי

- . $\forall \varepsilon>0.\exists \delta>0.x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$ קושי:
 - $\forall y \in (a, x_0)^{\mathbb{N}} . (y_n \uparrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to L) :$ היינה •

aטענה: יהי a אזי a יהיו a עבורם $a,x_0\in A$ יהיו a עבורם a יהיו a יהיו a עבורם a יהיו a יהי a יהיו a יהיי a יהיו a יהיו a יהיי a יחי a יהיי a יהיי a יהיי a יהיי a יהיי a יהיי a יהי

 $f:(a,\infty) o\mathbb{R}$ ותהא $a< x_0$ עבורם $a,x_0\in A$ יהיו והי עבור $a,x_0\in R$ אזי אינטוף: יהי

- $. orall arepsilon > 0. \exists M \in \mathbb{R}. orall x \geq M. \left| f\left(x
 ight) L
 ight| < arepsilon$ קושי:
- $\forall y \in (a,\infty)^{\mathbb{N}} . (y_n \to \infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to L)$ היינה: •

f)לפי קושי) לים לפי מתכנסת f אזי $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ ותהא $a< x_0$ עבורם $a,x_0\in A$ יהיו ל $a< x_0$ ותהא באינסוף ל $a,x_0\in A$ יהיו לפי היינה).

 $\lim_{x o\infty}f\left(x
ight)=L$ יהיו $L\in\mathbb{R}$ יהי המתכנסת עבורם $a,x_0\in A$ ותהא $a< x_0$ ותהא $a< x_0$ עבורם $a,x_0\in A$ יהיו $a< x_0$ י

- $. \forall \varepsilon > 0. \exists M \in \mathbb{R}. \forall x \leq M. \left| f\left(x\right) L \right| < \varepsilon$ קושי: •
- $\forall y \in (a, x_0)^{\mathbb{N}} . (y_n \uparrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to L)$ היינה: •

f)לישי) לפי קושי לים אינסוף לים מתכנסת במינוס אזי ($t\in\mathbb{R}$ אזי ותהא אוי ותהא $x_0< b$ עבורם $x_0,b\in A$ ויהיו ויהיו ויהיו ענה: יהי מתכנסת במינוס אינסוף ל-t לפי היינה).

 $\lim_{x \to -\infty} f\left(x
ight) = L$ אזי $L \in \mathbb{R}$ המתכנסת במינוס אינסוף ל־ $L \in \mathbb{R}$ אזי $x_0 < b$ ווהיי $x_0 < b$ עבורם $x_0, b \in A$ ויהיי ווהיי $x_0 < b$ ויהיי במקום פונקציה מתכנסת נאמר גם כי היא בעלת גבול סופי.

אזי $f:(a,b) o \mathbb{R}$ ותהא $a < x_0 < b$ עבורם $a,b,x_0 \in A$ יהיו בנקודה: יהיו

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0, \delta}. f(x) > M$ קושי: •
- $\forall y \in (a,b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$ היינה:

fמתבדרת (פושי) ב־ $a,b,x_0 \in A$ אזי לפי מתבדרת f אזי (a,b) אזי $a< x_0 < b$ עבורם $a,b,x_0 \in A$ אזי לאינסוף ב־ $a,b,x_0 \in A$ לאינסוף ב־ $a,b,x_0 \in A$ לאינסוף ב־ $a,b,x_0 \in A$ לפי היינה).

 $\lim_{x \to x_0} f\left(x
ight) = \infty$ אזי אזי $a < x_0 < b$ ותהא ותהא $a < x_0 < b$ שבורם $a, b, x_0 \in A$ יימון: יהיו

אזי $f:(a,b) o \mathbb{R}$ ותהא $a < x_0 < b$ עבורם $a,b,x_0 \in A$ יהיו בנקודה: יהיו

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0, \delta}. f(x) < M$ קושי: •
- $\forall y \in (a,b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty) :$ היינה •

f)לשי(טענה: יהיו $a,b,x_0\in A$ לפי קושי) אזי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ותהא ותהא $a< x_0< b$ לפי קושי $a,b,x_0\in A$ למינוס אינסוף ב־ $a,b,x_0\in A$ למינוס אינסוף ב־ $a,b,x_0\in A$ למינוס אינסוף ב־ $a,b,x_0\in A$ למינוס אינסוף ב- $a,b,x_0\in A$

 $\lim_{x \to x_0} f\left(x
ight) = -\infty$ אזי אינסוף ב־ $a,b,x_0 \in A$ אזי אזי היון: יהיו $a < x_0 < b$ עבורם $a,b,x_0 \in A$ אזי אזי היון $a,b,x_0 \in A$ עבורם $a,b,x_0 \in A$ אזי אזי $a < x_0 < b$ עבורם $a,b,x_0 \in A$ אזי אזי אזי אזי אזי אינסוף בנקודה: יהיו $a,b,x_0 \in A$ עבורם $a,b,x_0 \in A$ אזי

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, \min\{x_0 + \delta, b\}). f(x) > M$ פושי:
 - $\forall y \in (x_0, b)^{\mathbb{N}} . (y_n \downarrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$ היינה: •

f)לפי קושי) לפי מימין לאינסוף ב $x_0 < b$ עבורם $x_0 < b$ עבורם $x_0 < b$ עבורם $x_0 < b$ עבורם $x_0 < b$ עבורם לפי היינה).

- $. \forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, \min \{x_0 + \delta, b\}) \, . f(x) < M$ קושי:
 - $\forall y \in (x_0, b)^{\mathbb{N}} \cdot (y_n \downarrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty)$ היינה:

f)לפי קושי) לפי לפי למינוס אינסוף ב $x_0 < b$ עבורם $t, x_0 \in A$ אזי ל $t: (x_0, b) \to \mathbb{R}$ אזי לפי קושי) אינסוף ב $t, x_0 \in A$ עבורם למינוס אינסוף ב $t, x_0 \in A$ מתבדרת חד־צדדית מימין למינוס אינסוף ב $t, x_0 \in A$ לפי היינה).

 x_0 ימין מימין מימין מימין ההא המתבדרת הדצדדית המתבדרת ותהא $x_0 < b$ ותהא עבורם $x_0 < b$ ותהא אינסוף בי $x_0 < b$ ותהא ותהא וותהא . $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

אזי $f:(a,x_0) o\mathbb{R}$ ותהא $a< x_0$ עבורם $a,x_0\in A$ אזי ניהיו בנקודה: יהיו משמאל לאינסוף בנקודה:

- $. \forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in \left(\max\left\{x_0 \delta, a\right\}, x_0\right). f\left(x\right) > M$ קושי:
 - $\forall y \in (a, x_0)^{\mathbb{N}} \cdot (y_n \uparrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$ היינה: •

f)לפי קושי) לפי קושי ב־ x_0 עבורם $a,x_0\in A$ אזי לאינסוף ב־ x_0 לפי קושי) אזי לוגדית משמאל לאינסוף ב־ x_0 לפי היינה).

סימון: יהיו משמאל אינסוף ב- $a,x_0\in A$ המתבדרת חד־צדדית ותהא מינסוף ב- $a,x_0\in A$ ותהא ותהא $a< x_0$ עבורם ב- $a,x_0\in A$ המתבדרת וווו $a,x_0\in A$ אזי וווו $a,x_0\in A$ ותהא ווווא $a,x_0\in A$ המתבדרת חד־צדדית משמאל לאינסוף ב- $a,x_0\in A$ אזי מימון: יהיו

אזי $f:(a,x_0) o\mathbb{R}$ ותהא $a< x_0$ פונקציה מתבדרת אינסוף בנקודה: יהיו אינסוף בנקודה: מתבדרת משמאל למינוס אינסוף בנקודה:

- $. \forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in \left(\max\left\{x_0 \delta, a\right\}, x_0\right). f\left(x\right) < M$ קושי:
 - $\forall y \in (a, x_0)^{\mathbb{N}} . (y_n \uparrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty)$ היינה: •

טענה: יהיו $a,x_0 \in A$ עבורם $a,x_0 \in A$ ותהא $a < x_0$ ותהא $a < x_0$ ותהא $a < x_0$ עבורם $a,x_0 \in A$ אזי $a,x_0 \in A$ אזי $a,x_0 \in A$ עבורם $a,x_0 \in A$ עבורם $a,x_0 \in A$ עבורם אינסוף ב־ $a,x_0 \in A$ לפי היינה).

 x_0 בימון: יהיו $a,x_0\in A$ עבורם $a,x_0\in A$ ותהא ותהא $a< x_0$ ותהא עבורם $a,x_0\in A$ המתבדרת חד־צדדית משמאל למינוס אינסוף ב־ $a,x_0\in A$ ותהא $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$

אזי $f:(a,\infty) o\mathbb{R}$ ותהא $a< x_0$ עבורם $a,x_0\in A$ אזי יהיו לאינסוף לאינסוף אזי מתבדרת מתבדרת מתבדרת אינסוף אזי

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f\left(x\right) > M$. $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f\left(x\right) > M$
- $\forall y \in (a,\infty)^{\mathbb{N}} . (y_n \to \infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$ היינה: •

טענה: יהיו f) אזי f (מתבדרת באינסוף לפי קושי) אזי לו מתבדרת f (מתבדרת ההא $a < x_0$ עבורם $a, x_0 \in A$ אזי לאינסוף לפי היינה).

 $\lim_{x \to \infty} f\left(x
ight) = \infty$ אזי $x_0 = a$ אזי היין היין המתבדרת אינטוף $a, x_0 \in A$ ותהא ותהא $a < x_0$ ותהא $a < x_0$ אזי $a < x_0$ פונקציה מתבדרת באינטוף למינוס אינטוף: יהיו $a, x_0 \in A$ עבורם $a, x_0 \in A$ ותהא אינטוף למינוס אינטוף: יהיו

- $. \forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f\left(x\right) < M$ קושי: •
- $\forall y \in (a,\infty)^{\mathbb{N}}. (y_n \to \infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty)$:היינה

סענה: יהיו f) אזי $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ ותהא $a< x_0$ עבורם $a,x_0\in A$ אזי יהיו $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ ותהא באינסוף לפי קושי).

 $\lim_{x \to \infty} f\left(x
ight) = -\infty$ אזי אינסוף ב־ $a,x_0 \in A$ אזי היין $a,x_0 \in A$ אזי היין $a,x_0 \in A$ אזי היין אינסוף: יהיו $a,x_0 \in A$ אזי עבורם $a,x_0 \in A$ אזי יהיו $a,x_0 \in A$ אזי יהיו אינסוף לאינסוף: יהיו $a,x_0 \in A$ עבורם $a,x_0 \in A$ ותהא

- $. \forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \leq \delta. f\left(x\right) > M$ קושי: •
- $\forall y \in (-\infty, b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to -\infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$ היינה:

fסענה: יהיו f לפי קושי) אזי $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ אזי ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ ותהא ותהא $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ אזי ותהא במינוס אינסוף לאינסוף לפי היינה).

 $\lim_{x \to -\infty} f\left(x
ight) = \infty$ אינסוף לאינסוף איזי המתבדרת במינוס $f: (-\infty,b) \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 < b$ עבורם $b,x_0 \in A$ איזי $f: (-\infty,b) \to \mathbb{R}$ ותהא a

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \leq \delta. f(x) < M$ קושי:
- $\forall y \in (-\infty, b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to -\infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty)$ היינה: •

fל (שפי) אינסוף למינוס אינסוף למינוס אזי אזי $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ אזי ותהא $x_0< b$ עבורם $b,x_0\in A$ אזי לפינוס אינסוף למינוס אינסוף למינוס אינסוף לפי היינה).

סימון: יהיו אינסוף למינוס אינסוף אינסוף המתבדרת המינוס אינסוף א

הערה: במקום פונקציה מתבדרת לאינסוף או למינוס אינסוף נאמר גם כי היא בעלת גבול במובן הרחב או מתכנסת במובן הרחב.

 $f\left(x
ight) \xrightarrow[x o a]{} L$ יהי $\lim_{x o a} f\left(x
ight) = L$ עבורה עבורה ותהא $f:I o \mathbb{R}$ ותהא $a \in \hat{\mathbb{R}}$ יהי $L \in \hat{\mathbb{R}}$ יהי

 $((\lim_{x o a}f\left(x
ight)=L_1)\wedge(\lim_{x o a}f\left(x
ight)\overset{x o a}{=}L_2))\Longrightarrow(L_1=L_2)$ אזי $a\in I$ ויהי $f:I o\mathbb{R}$ אזי $f:I o\mathbb{R}$ קטע פתוח תהא

```
D\left(x
ight) = \left\{egin{array}{ll} 0 & x\in\mathbb{Q} \\ 1 & x
otin \end{array}
ight. כך D:\mathbb{R}	o\mathbb{R} נגדיר a< b באשר a,b\in\mathbb{R} אזי הגדרה: יהיו
                                                                                                                                                          .(a,b) = [a,b] \bullet
                                                                                                                                                       .(a,\infty) = [a,\infty] \bullet
                                                                                                                                                  .(-\infty,b)=[-\infty,b]
                                                                            טענה חשבון גבולות: יהי I\subseteq\mathbb{R} קטע פתוח יהי a\in 	ilde{I} אזי זיהי איר יהי
                                                                                      \lim_{x \to a} \left( f\left( x \right) + g\left( x \right) \right) = \left( \lim_{x \to a} f\left( x \right) \right) + \left( \lim_{x \to a} g\left( x \right) \right) \bullet
                                                                                           \lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x)) \cdot (\lim_{x \to a} g(x)) \bullet
                                                                                                                                      \lim_{x \to a} x = a אזי a \in \hat{\mathbb{R}} למה: יהי
                                                                                                 \lim_{x	o a}p\left(x
ight)=p\left(a
ight) אזי p\in\mathbb{R}\left[x
ight] ויהי a\in\mathbb{R} ויהי
\lim_{x	o a}f\left(x
ight)=b המקיימת f:	ilde{I}	o	ilde{J} ותהא g:	ilde{J}	o\mathbb{R} ותהא b\in	ilde{J} המקיימת a\in	ilde{I} אזי היי
                                                                                                                                       \lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{x \to b} g(x)
                                          \mathbb{R}[x] \cup \{\sin,\cos\} \cup \{x^a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup (\bigcup \{\{\log_a(x),a^x\} \mid a>0\}) פונקציות אלמנטריות בסיסיות:
                              פונקציה אלמנטרית: תהיינה f,q פונקציות אלמנטריות בסיסיות אזי \mathbb{R} 	o \mathbb{R} באשר אחד מהבאים מתקיים
                                                                                                                                                                 .h = f \circ g \bullet
                                                                                                                                                                .h = f + q \bullet
                                                                                                                                                                  .h = f \cdot g \bullet
                                                                                                                                                                  .h = f^{-1} \bullet
                                                                         \forall a \in \mathrm{Dom}\,(f)\,.\,\lim_{x \to a} f\,(x) = f\,(a) טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי
                                                                                                                                   |\sin{(x)}| \leq |x| אזי x \in \mathbb{R} משפט: יהי
                                                                         f(x) \preccurlyeq g(x) אזי \forall x \in I. f(x) \leq g(x) המקיימות f,g:I \to \mathbb{R} איי
                     \lim_{x	o a}f\left(x
ight)\leq\lim_{x	o a}g\left(x
ight) אזי f\left(x
ight)\preccurlyeq g\left(x
ight) המקיימות g\left(x
ight) אזי a\in\hat{\mathbb{R}} ותהיינה a\in\hat{\mathbb{R}} ותהיינה
                                               f\left(x
ight) \preccurlyeq g\left(x
ight) \preccurlyeq h\left(x
ight) המקיימות f,g,h:\mathbb{R}^{I} אזי ותהיינה בלל הטנדוויץ': יהיf\left(x
ight) \preccurlyeq g\left(x
ight) \preccurlyeq h\left(x
ight) האי
                                                                                                                    .\Big(f\left(x
ight),h\left(x
ight) \xrightarrow[x 
ightarrow a]{} L\Big) \Longrightarrow \Big(g\left(x
ight) \xrightarrow[x 
ightarrow a]{} L\Big) . \lim_{x 
ightarrow 0} rac{\sin(x)}{x} = 1
                                                                                                                                                אזי f:I	o\mathbb{R} אזי
                                                                                                 \lim_{x\to a} f\left(x\right) = f\left(x_0\right) עבורה a\in I בנקודה: •
                                                                       \lim_{x\to a^+}f\left(x
ight)=f\left(x_0
ight) עבורה a\in I מימין בנקודה:
                                                                    \lim_{x\to a^-}f\left(x
ight)=f\left(x_0
ight) עבורה a\in I בנקודה: • רציפה חד צדדית משמאל בנקודה:
                                                       \forall a \in I. \lim_{x \to a} f\left(x\right) = f\left(a\right) המקיימת המקיימר פונקציה פונקציה פונקציה בצורת קושי: פונקציה f: I \to \mathbb{R}
        . orall a \in I. orall x \in I^\mathbb{N}. ((x_n 	o a) \Longrightarrow (\lim_{n 	o \infty} f\left(x_n
ight) = f\left(a
ight))) המקיימת f: I 	o \mathbb{R} המקיימת פונקציה רציפה בצורת היינה:
                                                                       .(רציפה בצורת הנייה) אזי f:I	o\mathbb{R} אזי f:I	o\mathbb{R} משפט: תהא
                                               \exists x \in B. \exists \varepsilon > 0. \ (x-\varepsilon,x+\varepsilon) \cap A \subseteq B המקיימת B \subseteq A אזי אA \subseteq \mathbb{R} מתוחה יחסית: תהיינה
                                           (I^{-1}) פתוחה יחסית לf:I 	o \mathbb{R} פתוחה משפט: תהא אזי (f:I 	o \mathbb{R} אזי לכל אזי (לכל
                       f_{\lceil (a,c) 
ceil} רציפה על איזי f_{\lceil (a,c) 
ceil} רציפה על איזי f_{\lceil (a,c) 
ceil} רציפה על איזי f:(a,b) 
ightarrow \mathbb{R} רציפה על טענה: תהא
                                                                                              C\left(I
ight)=\{f:I
ightarrow\mathbb{R}\mid I סימון: תהא I\subseteq\mathbb{R} אזי f\} רציפה על
                                                                                                                  טענה: תהא f\in C\left((a,b)
ight) איפה מונוטונית עולה
                                                                                     \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f[(a,b)] חסומה מלעיל) • חסומה מלעיל)
                                                                                             \lim_{x\to b^-} f(x) = \inftyאינה חסומה מלעיל) אינה חסומה f[(a,b)]
```

 $\dim_{x\to b^-} f(x) = \inf f[(a,b)]$ חסומה מלרע) מלרע) חסומה מלרע) חסומה אינה מלרע) f[(a,b)] . ($\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$)

 $\forall x \in I. f\left(x
ight) > 0$ עבורה על a עבורה a עבורה איז קיימת סביבה a עבורה איז קיימת a עבורה איז קיימת סביבה a עבורה איז קיימת סביבה על a

 $\forall x \in I.f\left(x
ight) > g\left(x
ight)$ בציבה I של a עבורה $f\left(a
ight) > g\left(a
ight)$ המקיימות על a המקיימות על a המקיימות איז קיימת סביבה a של a עבורה a

 $\lim_{x o a^+}f\left(x
ight)=L$ אזי וכן $\lim_{x o a^-}f\left(x
ight)=L$ אזי ההי והי $f:I o \mathbb{R}$ תהא $L\in \hat{\mathbb{R}}$ תהא והי $f:I o \mathbb{R}$

```
(\forall x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \to x_0} f\left(x
ight) \in \mathbb{R}) \Longrightarrow (\exists x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \to x_0} f\left(x
ight) = f\left(x_0
ight)) איז f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} מסקנה: תהא
                                                                                               . משפט ויירשטראס הראשון: תהא f \in C\left([a,b]
ight) אזי חסומה משפט ויירשטראס
                                                     . קיימים \max\left(f\left([a,b]\right)\right),\min\left(f\left([a,b]\right)\right) אזי f\in C\left([a,b]\right) השני: תהא
              \forall y \in (\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))) . \exists c \in (a, b) . f(c) = y איז f \in C([a, b]) משפט ערך הביניים: תהא
                                                                     \exists \zeta \in [a,b]. f(\zeta) = 0 אזי f(a) f(b) < 0 המקיימת f \in C([a,b]) אזי למה: תהא
                                                                   f([a,b]) = [\min(f([a,b])), \max(f([a,b]))] אזי f \in C([a,b]) מסקנה: תהא
                                                                \forall x,y \in A. \forall \lambda \in [0,1]. \lambda x + (1-\lambda) y \in A המקיימת A \subseteq \mathbb{R} הבוצה קטע מוכלל:
                                                                                     . ממש. f מונוטונית ממש חח"ע אזי f מונוטונית ממש למה: יהי f קטע מוכלל ותהא
                                 (f^{-1} \in C\left(f\left(I
ight)
ight)) \wedgeקטע מוכלל ותהא משפט: יהי f \in C\left(I
ight) משפט: יהי קטע מוכלל ותהא
                                           (f \in C(I)) \Longleftrightarrowסטע מוכלל) קטע מוכלל ותהא ממש אזי (f \in \mathbb{R}^I מונוטונית ממש אזי (f \in \mathbb{R}^I קטע מוכלל)
                                                                                                                                x^{a},a^{x}\in C\left(\mathbb{R}
ight) אזי a>0 מסקנה: יהי
                                                                           a_n^{b_n} 	o a^b סדרה אזי b_n 	o b וכן סדרה חיובית מסקנה: תהא מסקנה: מסקנה
                                                                                 .\exists \zeta \in \mathbb{R}. p\left(\zeta
ight)=0 אזי p \in \mathbb{R}_n\left[x
ight] ackslash \mathbb{R}_{n-1}\left[x
ight] ויהי n \in \mathbb{N}_{	ext{odd}} איזי n \in \mathbb{N}_{	ext{odd}}
A\subseteq \mathcal{D}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n מתקיים מתקיים A\subseteq \bigcup_{n\in\Lambda}I_n קטעים פתוחים עבורם \{I_n\}_{n\in\Lambda} כך שלכל באלכל לבוצה קומפקטית:
                                                                                                          . קומפקטית [a,b] אזי a < b יהיו היינה־בורל: הלמה של היינה־בורל:
    . orall arepsilon > 0. \exists \delta > 0. orall x \in A. orall y \in (x-\delta,x+\delta) \, . \, |f\left(x
ight) - f\left(y
ight)| < arepsilon המקיימת המישה המידה שווה (במ"ש): f \in \mathbb{R}^A
                                              משפט: תהא f\in\mathbb{R}^A רציפה במ"ש אזי f רציפה. f\in\mathbb{R}^A אזי f\in\mathbb{R}^A אזי f\in\mathbb{R}^A תנאי ליפשיץ: תהא f\in\mathbb{R}^A עבורה f\in\mathbb{R}^A עבורה f\in\mathbb{R}^A עבורה f\in\mathbb{R}^A
                                                                                             [a,b] משפט קנטור: תהא f\in C\left([a,b]
ight) אזי אי משפט קנטור
                                                                    (a,d) טענה: תהא f\in\mathbb{R}^A רציפה במ"ש על (a,b] ,[c,d) אזי f\in\mathbb{R}^A טענה:
        A : \forall x \in D^\mathbb{N}. (\lim_{n \to \infty} \in \mathbb{R}) \Longrightarrow (\lim_{n \to \infty} f(x_n) \in \mathbb{R}) פרה־קומפקטיות: תהא D \subseteq \mathbb{R} ותהא ותהא C \subseteq \mathbb{R}
                                                                          c(\lim_{x \to a^+} f(x) \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrowטענה: תהא f \in C((a,b]) אזי אזי (f \in C((a,b])
                                              (\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrowמסקנה: תהא f \in C((a,b)) אזי אזי (f \in C((a,b))
                                                     [a,\infty) אזי f רציפה במ"ש על \lim_{x \to \infty} f(x) \in \mathbb{R} המקיימת המקיימת הא
                                                                                                                . חסומה f אזי איי רציפה רציפה f \in \mathbb{R}^{(a,b)} אחי טענה: תהא
                             \omega_{f}\left(\delta
ight)=\sup\left\{ \left|f\left(x_{1}
ight)-f\left(x_{2}
ight)\right.
ight|\left(x_{1},x_{2}\in I
ight)\wedge\left(\left|x_{1}-x_{2}
ight|<\delta
ight)
ight\} אזי f\in\mathbb{R}^{I} אזי f\in\mathbb{R}^{I} מודולוס הרציפות: תהא
                                                                                                                                                  אזיf:I	o\mathbb{R} אזיf:I
                                                     .f'\left(x_0
ight)=\lim_{x	o x_0}rac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} אזי x_0\in I אזי x_0\in I אזי x_0\in I אזי .f'_+\left(x_0
ight)=\lim_{x	o x_0^+}rac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} אזי x_0\in I אזי בנקודה: תהא
```

 $(\forall q \in \mathbb{Q}.f(q) = g(q)) \Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}.f(x) = g(x))$ איז $f,g \in C(\mathbb{R})$ טענה: יהיו

. $(orall y\in \mathbb{N}^I.\,(y_n o a)\Longrightarrow ($ יים וסופי ווא $f:I o \mathbb{R}$ אזי אזי ($f:I o \mathbb{R}$ אאי ווא ליים וסופי)

a טענה חשבון רציפות: יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהיו $a\in\mathbb{R}$ ויהיו $a\in\mathbb{R}$ רציפות על $a\in\mathbb{R}$ אזי $g\circ f$ אזי $g\circ f$ רציפה על $g:B\to C$ וכן a רציפה על $g:B\to C$ רציפה על

. טענה: תהא $\forall x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \to x_0} f\left(x\right) \in \mathbb{R}$ עבורה $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ אזי כמות נקודות האי־רציפות לכל היותר בת מנייה.

 $\lim_{x o a}f\left(g\left(x
ight)
ight)=f\left(\lim_{x o a}g\left(x
ight)
ight)$ אזי $g:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ רציפה ותהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

נקודת אי־רציפות: תהא $f:I o\mathbb{R}$ אזי מהא

 $\lim_{x\to a^{-}} f(x) \neq \lim_{x\to a^{+}} f(x)$ סוג ראשון/קפיצה: •

. (לא קיים) לא $\lim_{x\to a^-}f(x))\lor($ לא לא היים לא $\lim_{x\to a^+}f(x))$ לא שני: שני: $f:I\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.

 $R\left(x
ight) = \left\{egin{array}{l} rac{1}{q} & \exists p,q \in \mathbb{Z}. (\gcd(p,q)=1) \land \left(x=rac{p}{q}
ight) \ & ext{else} \end{array}
ight.$ כך $R:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ בונקציית רימן: נגדיר

 $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$: סליקה

 $R(x)=R\left(x+1
ight)$ אזי $x\in\mathbb{R}$ טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי . $\lim_{x\to a}R\left(x
ight)=0$ אזי $x\in\mathbb{R}$ טענה: יהי

מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

 $rac{p}{a}$ אזי $p,q\in\mathbb{R}\left[x
ight]$ פונקציה רציונאלית: יהיו

```
x'\left(t
ight)=v\left(t
ight) אזי חלקיק ותהיינה x,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי
                                                         (x_0 בנקודה f) (אירה בנקודה f) אזי אינ x_0 \in \tilde{I} ותהא ותהא f \in \mathbb{R}^I איזי מענה:
                          \lim_{x	o x_0}rac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}=0 המקיימת p\left(x
ight)\in\mathbb{R}_n\left[x
ight]\setminus\mathbb{R}_{n-1}\left[x
ight] אזי x_0\in I אחזי f\in\mathbb{R}^I המקיימת קירוב בנקודה:
                                                                                 \deg\left(p
ight) אזי x_0 קירוב בנקודה p\left(x
ight) ויהי f\in\mathbb{R}^{I} אזי מדר הקירוב: תהא
            f אזי f\in\mathbb{R}^I אזי f\in\mathbb{R}^I אזי f\in\mathbb{R}^I אזי f\in\mathbb{R}^I אזי f\in\mathbb{R}^I אזי אבילית בנקודה: תהא
                                             (x_0) אזי איירה בנקודה (x_0) אזי אזי אזי פענה: תהא f \in \mathbb{R}^I אזי אזי אזי אזי אזי אזי מענה: תהא
                                                                                                    אזי x_0 אזירות בנקודה f,g\in\mathbb{R}^I אזירות היינה
                                                                                                                      (f \pm q)'(x_0) = f'(x_0) \pm q'(x_0) \bullet
                                                                                                    .(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \bullet
                                                                                   (g(x_0) \neq 0) \Longrightarrow \left( \left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \right) \bullet
                                .\left(f^{-1}
ight)'(y_{0})=rac{1}{f'(f^{-1}(y_{0}))} אזי f^{-1}\left(y_{0}
ight) אזירה על f\in C\left(I
ight) אונית x_{0}\in I אחיי x_{0}\in I מונוטונית חזק אזירה על
                                                                                                                                        	an'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} מסקנה: (e^x)' = e^x
                                                                                                                         \left(x^{r}
ight)'=rx^{r-1} אזי r\in\mathbb{R} מסקנה: יהי
                                                                                                                                        .arctan' (x) = \frac{1}{1+x^2}מסקנה:
g \circ f'(x_0) = g'(f(x)) \cdot f'(x) אזי איזי איזירה על g \in C(f(I)) גזירה על גזירה על גזירה על f \in C(I) איזי אזירה על גזירה על השרשרת: תהא
                                                                                                                         f^{(0)}=f אזי f:I	o\mathbb{R} הגדרה: תהא
                                                                                             f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}
ight)' אזי f:I 	o \mathbb{R} ותהא n \in \mathbb{N} יהי הגדרה: יהי
                                                                               .(\Delta f)\left(x
ight)=f\left(x+1
ight)-f\left(x
ight) אזי f:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R} תהא הפרש דיסקרטי: תהא
                                                                                                                   \Delta^{(0)}f=\Delta f אזי f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} תהא
                                                                                    \Delta^{(k+1)} f = \Delta \left( \Delta^{(k)} f \right) אזי f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} ותהא k \in \mathbb{N} יהי יהי
                                                                                              ביפה. f' בינקציה גזירה ברציפות: f:I \to \mathbb{R} רציפה
                                                                                                                       .C^{0}\left( I
ight) =C\left( I
ight) אזי I\subseteq\mathbb{R} סימון: תהא
                                                             C^{n}\left(I
ight)=\left\{ f\in C^{n-1}\left(I
ight)\mid אזי f
ight\} אזי אזי I\subseteq\mathbb{R} אזי n\in\mathbb{N} יהי יהי יהי
                                                                                             .C^{\infty}\left(I\right)=\bigcap_{n=0}^{\infty}C^{n}\left(I\right) אזי I\subseteq\mathbb{R} תהא חלקות: תהא
                                  .(f\cdot g)^{(n)}\left(x
ight)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}\left(x
ight)\cdot g^{(n-k)}\left(x
ight) גזירות אזי f,g:I	o\mathbb{R} ותהיינה n\in\mathbb{N} ותהיינה מכלל לייבניץ: יהי
                                                                                                     נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא f:I	o\mathbb{R} אזי
                                                                 .\exists \delta>0. \forall x\in (x_0-\delta,x_0+\delta)\,. f\left(x
ight)\leq f\left(x_0
ight) עבורה x_0\in I מקסימום:
                                                                   \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). f(x_0) \le f(x) עבורה x_0 \in I מינימום:
                                         f'(x_0)=0 אוי אוי קיצון איי גקודת קיצון איי x_0\in(a,b) ותהא אוירה על f\in C\left([a,b]
ight) אויי משפט פרמה:
                                      \exists c \in (a,b) \,. f'(c) = 0 אזי f(a) = f(b) המקיימת (a,b) גזירה על f \in C([a,b]) אזי רול: תהא
                                                        \exists c \in (a,b)\,.f'\left(c
ight) = rac{f(b)-f(a)}{b-a} איז אירה על f \in C\left([a,b]
ight) משפט לגרנז': תהא
                                                                                        .(שישה במ"ש) גזירה אזי f \in \mathbb{R}^I רציפה במ"ש). טענה: תהא
                                                                                                                                         .\forall x > 0.e^x > 1 + x טענה:
                                                                                                             \forall x,y \in \mathbb{R}. \left| \sin(x) - \sin(y) \right| < |x - y| טענה:
                                                 \exists a \in \mathbb{R}. \forall x \in \mathbb{R}. f(x) = a אזי \forall x \in \mathbb{R}. f'(x) = 0 גזירה המקיימת f \in C(\mathbb{R}) אזי f \in C(\mathbb{R})
                                                                                \exists c \in \mathbb{R}. q = h + c אזי q' = h' המקיימות q, h \in \mathbb{R}^I מסקנה: תהיינה
                                                                            \exists c \in \mathbb{R}. f\left(x
ight) = e^{x} אזי f = f' אזי גוירה המקיימת f \in C\left(\mathbb{R}
ight) איזי
                       \exists x_0 \in (a,b) \, . rac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = rac{f'(x_0)}{g'(x_0)} אזי (a,b) אזי f,g \in C\left([a,b]
ight) משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה
                                                                                                                                     משפט: תהא f \in \mathbb{R}^I גזירה אזי
                                                                                              . עולה ממש f'(x) > 0 מתקיים x \in I אזי או פלכל •
```

 $f'_-(x_0)=\lim_{x o x_0^-}rac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ אוי אוי $x_0\in I$ אויה: תהא בנקודה: משמאל בנקודה: תהא $f'(x_0)=\lim_{h o 0}rac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ אוי $x_0\in I$ ותהא $f:I o \mathbb{R}$

 $f':I o\mathbb{R}$ אזי $f:I o\mathbb{R}$ נגזרת: תהא

 $\frac{df}{dx}(x)=rac{d}{dx}f(x)=f'(x)$ אזי $f\in\mathbb{R}^I$ סימון: תהא

```
f''(x_0) < 0 אם f''(x_0) < 0 אזי f''(x_0)
                                        .f'_+(a)=\lim_{x	o a^+}f'(x) איי איי \lim_{x	o a^+}f'(x)\in\mathbb{R} משפט: תהא f\in C\left([a,b)
ight) גיירה על
.\exists \delta>0. \forall x\in (x_0-\delta,x_0+\delta)\,.f'(x)>0 אזי f'(x_0)>0 אוי x_0\in [a,b] גזירה ברציפות ויהי f:[a,b]	o\mathbb{R} איזי f:[a,b]
                                                                                                                                                                                              למה: תהא f:[a,b]	o\mathbb{R} גזירה אזי
                                                                                                                                                                       אזי מקומי מקומי a אזי f'_{+}\left(a\right)<0 אם •
                                                                                                                                                                   אזי b אזי מקסימום מקומי. f'_{-}(b)>0 אם
                       \exists y \in \left(\min\left(f'\left(a\right), f'\left(b\right)\right), \max\left(f'\left(a\right), f'\left(b\right)\right)\right). \exists c \in \left(a, b\right). f'\left(c\right) = y גזירה אזי f \in \mathbb{R}^{[a, b]} משפט דרבו: תהא
                                                           מתכנס במובן מתכנס מובן \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} עבורה עבורה x \in 	ilde{I} גזירות ותהא אזי גזירות מתכנס מובן מובן אזי
                                                                                 (\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \bullet 
                                                                                                                    (\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \bullet
                                                                                 \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} אזי־שיוויון הולדר: יהיו x,y \in \mathbb{R}^n ויהיו x,y \in \mathbb{R}^n המקיימים מו
                                                                                                   אזי rac{1}{p}+rac{1}{q}=1 המקיימים p,q>0 ויהיו x,y\in\mathbb{R}^n אזי יהיו מינקובסקי: יהיו
                                                                                                                                                      . (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}} 
                                                                                                                           מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא f,g:I	o\mathbb{R} אזי אסימפטוטית: מחלקות אסימפטוטית: מחלקות אסימפטוטית
                                       f \leq g אינטואיטיבית f \in O\left(g
ight) איזי \exists c > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in \left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right). |f\left(x
ight)| \leq c |g\left(x
ight)| אם
                                                                                                                                              f\geq g אזי f\in\Omega\left(g
ight) אינטואיטיבית g\in O\left(f
ight) אם
                                                                                                                             f < g אינטואיטיבית f \in o(g) איז \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0
                                                                                                                                                f>g אזי f\in\omega\left(g
ight) אזי g\in\sigma\left(f
ight) אם •
                                                                                                               f=g אינטואיטיבית .f\in\Theta\left(g
ight) אזי אזי f\in\Omega\left(g
ight) וכן f\in\Omega\left(g
ight)
                                                                                               אינטואיטיבית f=g אינטואיטיבית איז \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 אם •
                                                                       f\in\Theta\left(g
ight) אזי rac{f(x)}{g(x)} אזי x\to x_0 עבורה x\to x_0 ותהא x\to x_0 ותהא ותהא x\to x_0 אזי ותהא למה: יהי
                                 . \forall k \in \left\{0\dots n\right\}.f^{(k)}\left(a\right)=g^{(k)}\left(a\right) עבורן a עבורן a אזי f,g:I \to \mathbb{R} אזי a \in I מזדהה עד סדר: יהי מידה
                                                     f-g\in o\left(\left(x-x_0
ight)^n
ight) אזי איזי סדר n על סדר n המזדהות f,g\in\mathbb{R}^{(a,b)} ותהיינה x_0\in(a,b) טענה: יהי
                                        h^{(k)}\left(x_{0}
ight)=0 וכן x_{0} וכן אזירה n אזי א אזירה h\in\sigma\left(\left(x-x_{0}
ight)^{n}
ight) וכן n רציפה על אזיפה וכן וכן n רציפה על אזירה וכן וכן n רציפה על וכן וכן וכן וכן וכן ויאר אזירה וויאר וויא
                             x_0 על סדר p\in\mathbb{R}_n\left[x
ight]\setminus\mathbb{R}_{n-1}\left[x
ight] אזי על p\in\mathbb{R}_n\left[x
ight]\setminus\mathbb{R}_{n-1}\left[x
ight] אזי על p\in\mathbb{R}_n\left[x
ight] שמזדהה עם p\in\mathbb{R}_n\left[x
ight]
                                        למה: יהי k\in\mathbb{N} ותהא x_0\in\mathbb{R} אזי x_0\in\mathbb{R} אזי x_0\in\mathbb{R} אזי t\in\mathbb{N} למה: יהי t\in\mathbb{N} ותהא t\in\mathbb{N} אזי t\in\mathbb{R} אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם t\in\mathbb{R} עד סדר t\in\mathbb{R} טענה: תהא t\in\mathbb{R}
                                          .P_n\left(x
ight)=\sum_{k=0}^nrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\left(x-x_0
ight)^k אזי פולינום הטיילור הוא f\in\mathbb{R}^I אזי פעמים על סענה: תהא
                                                                                                          R_n\left(x
ight)=f\left(x
ight)-P_n\left(x
ight) אזי על x_0 פעמים על f\in\mathbb{R}^I אזירה תהא
                                                                                                     R_{n}\left(x
ight)\in o\left(\left|x-x_{0}
ight|^{n}
ight) אזי x_{0} אזירה t\in\mathbb{R}^{I} משפט פאנו: תהא
                                                                                 למה: תהא \forall k \in \{0\dots n\}\,.g^{(k)}\left(x_0
ight) = 0 פעמים המקיימת n+1 גזירה אזירה מיירה תהא
                                                                                                  \forall x \in (a,b) . \exists c \in (\min(x,x_0), \max(x,x_0)) . g(x) = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}
                                                                                                                             משפט השארית של לגרנז': תהא f \in \mathbb{R}^{(a,b)} משפט השארית של לגרנז': משפט
                                                                                             \forall x \in (a,b) . \exists c \in (\min(x,x_0), \max(x,x_0)) . R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}
                            . \forall x \in (a,b) \,. \left(\exists M \in \mathbb{R}. \forall k \in \mathbb{N}. \left| f^{(k)}\left(x\right) \right| < M \right) \Longrightarrow \left( R_n\left(x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right) אזי f \in C^\infty\left((a,b)\right) מסקנה: תהא
                                   f\left(x
ight)=\sum_{k=0}^{\infty}rac{f^{\left(k
ight)}\left(x_{0}
ight)}{k!}\left(x-x_{0}
ight)^{k} אזי \forall x\in\left(a,b
ight).R_{n}\left(x
ight)\xrightarrow[n
ightarrow\infty]{}0 עבורה f\in C^{\infty}\left(\left(a,b
ight)\right)
                                                                         \forall x \in (a,b) . \left|f^{(m)}\left(x
ight)
ight| < a_m סדרה המקיימת f \in C^{\infty}\left((a,b)
ight) אזי
                                                      \forall c \in \mathbb{R}. \left(\lim_{m \to \infty} \frac{a_m}{m!} c^m = 0\right) \Longrightarrow \left(\forall x \in \left[x_0 - c, x_0 + c\right]. f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \left(x - x_0\right)^k\right)
                                                  \int_{0}^{\infty} \left(\cos\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \wedge \left(\sin\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \wedge \left(e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}\right)
```

אם אכל f'(x)<0 מתקיים $x\in I$ אורדת ממש. $x\in I$ אם לכל $f'(x_0)=0$ אזי על אזירה פעמיים על $x\in I$ אזי $f'(x_0)=0$ אזי

 $f''(x_0)>0$ אם $f''(x_0)>0$ אזי $f''(x_0)$

```
e \notin \mathbb{Q}. משקנה: 0 משפט השארית של קושי: תהא f \in \mathbb{R}^{(a,b)} גזירה f \in \mathbb{R}^{(a,b)} משפט השארית של קושי: תהא f \in \mathbb{R}^{(a,b)} גזירה f \in \mathbb{R}^{(a,b)} אזי f \in \mathbb{R}^{(a,b)} ... f \in \mathbb{R}^{(a,b)
```

- . אזי f''(x) > 0 מתקיים $x \in I$ אזי אם לכל
- . אזי f''(x) < 0 מתקיים $x \in I$ אזי אם לכל

 $f\in C\left((a,b)
ight)$ אזי קמורה $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא