

כדור פתוח: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$

כדור סגור: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $\bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$

ספירה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$

תיבה פתוחה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j < x_j < b_j\}$

תיבה סגורה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\bar{\Pi}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j \leq x_j \leq b_j\}$

נקודה פנימית: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in M$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq M$ אזי x נקודה פנימית.

פנים של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\overset{\circ}{M} = \{x \in M \mid M \text{ נקודה פנימית של } x\}$

קבוצה פתוחה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $M = \overset{\circ}{M}$

נקודה חיצונית: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in M$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \cap M = \{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\partial M = \{x \in M \mid M \text{ נקודת שפה של } x\}$

קבוצה סגורה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M \subseteq M$

סגור של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\bar{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(x \text{ נקודה חיצונית של } M) \iff (x \text{ נקודה פנימית של } \mathbb{R}^n \setminus M)$

מסקנה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ פתוחה}) \iff (M^c \text{ סגורה})$

קבוצה חסומה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r > 0. M \subseteq B_r(0)$

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ קבוצות פתוחות עבורן } A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ מתקיים } \exists B \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda). A \subseteq \bigcup_{n \in B} I_n)$

סימון: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{(k)} = a(k)$

גבול: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L \in \mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{(k)} - L\| = 0$ אזי $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)} = L$

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x \rightarrow a}$ וכן $\lim_{x \rightarrow a}$

משפט: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b \right) \iff \left(\forall j \in [n]. a_j^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b_j \right)$

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $(a \text{ מתכנסת}) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a^{(m)} - a^{(p)}\| < \varepsilon)$

מסקנה: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $(a \text{ מתכנסת}) \iff \left(\forall j \in [n]. \forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a_j^{(m)} - a_j^{(p)}\| < \varepsilon \right)$

משפט בולצאנו וויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת-סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } a \in K^{\mathbb{N}} \text{ קיימת תת-סדרה } a^{(k_i)} \text{ המקיימת } \lim_{i \rightarrow \infty} a^{(k_i)} \in K)$

הערה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ נחשוב על f כקטור של פונקציות $f = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ כאשר $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$

גבול: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $L \in \mathbb{R}^m$ אזי

- היינה: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אזי $\forall x \in A^{\mathbb{N}}. (x^{(k)} \rightarrow a) \implies (f(x^{(k)}) \rightarrow L)$
- קושי: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אזי $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in A \setminus \{a\}. \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - L\| < \varepsilon$

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי $a \in A$ עבורה $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

סימון: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $B \subseteq A$ אזי $(f \text{ רציפה נקודתית עבור כל } b \in B) \iff (f \in C(B))$

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $B \subseteq A$ אזי $(f \in C(b)) \iff (f_1, \dots, f_m \in C(b))$

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהינה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ וכן $B \subseteq \mathbb{R}^m$ אזי $f : A \rightarrow B$ הפיכה עבורה f, f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ כך $\gamma(t) = (1-t)a + tb$

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל- b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל- b אזי $[a, b] = \text{Im}(\gamma)$

קבוצה קמורה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a, b \in M. [a, b] \subseteq M$.
טענה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a), \overline{B}_r(a)$ קבוצות קמורות.
קבוצה קשירה: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x, y \in M$ קיימת מסילה $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ המקיימת $\gamma(0) = x$ וכן $\gamma(1) = y$.
תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_{\leq \aleph_0}(\mathbb{R}^n)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\bigcup \mathcal{A} = M$.
תכונת דרבו: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת לכל $a, b \in A$ עבורן $f(a) < f(b)$ מתקיים $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$.
טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ קשירה ותהא $f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.
משפט וירשטראס: תהא $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ אזי קיימים $x, y \in \mathcal{K}$ עבורם $f(\mathcal{K}) = [f(x), f(y)]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ המקיימת
 $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in \mathcal{M}. \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.
טענה: תהא $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R}^m)$ אזי f רציפה במ"ש.
נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל \mathbb{R} אזי $v : L \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה לכל $a \in L$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\bullet (v(a) \geq 0) \wedge ((v(a) = 0) \iff (a = 0))$$

$$\bullet \text{הומוגניות: } v(\lambda a) = |\lambda| \cdot v(a)$$

$$\bullet \text{אי שיוויון המשולש (אש"מ): } v(a + b) \leq v(a) + v(b)$$

טענה: תהא $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c > 0$ עבורו $v(x) \leq c \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

טענה: תהא $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי $v \in C(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהא $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c > 0$ עבורו $v(x) \leq c \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

נורמות שקולות: $v, \eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a, b > 0$ המקיימים $a \cdot \eta \leq v \leq b \cdot \eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי $\|\cdot\|, v$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $v, \rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמות ותהא $x \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $(\rho(x^{(k)}) \rightarrow 0) \iff (v(x^{(k)}) \rightarrow 0)$.

נורמת ℓ_p : עבור $p \in \mathbb{N}_+$ נגדיר נורמה $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\|v\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_∞ : נגדיר נורמה $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $a \in (0, 1)$ אזי $\gamma'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $a \in (0, 1)$ אזי $\gamma'(a) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(a) \\ \vdots \\ \gamma'_m(a) \end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה קיימת $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ המקיימת

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$$

סימון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a \in \mathcal{U}$ אזי $f \in \mathcal{D}(a)$.

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f \in \mathcal{D}(a) \implies f \in C(a)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\text{grad} f(a) = [L]_{\text{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $a \in \mathcal{U}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f(a) = \text{grad} f(a)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hx_i) - f(a)}{h}$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\nabla f(a))_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a))$ קיימת לכל i $\nRightarrow f \in \mathcal{D}(a)$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ המקיימת

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$$

טענה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $(\forall i \in \{1 \dots m\}. f_i \in \mathcal{D}(a)) \iff (f \in \mathcal{D}(a))$.

דיפרנציאל: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\mathcal{D}_f(a) = \begin{pmatrix} -\nabla f_1(a) - \\ \vdots \\ -\nabla f_m(a) - \end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $(\mathcal{D}_f(a))_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

משפט: יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהיינה $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי

- אם $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $f \in C(a)$.
 - אם $f, g \in \mathcal{D}(a)$ אזי $cf, f + g \in \mathcal{D}(a)$.
 - $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \implies (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$.
 - תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \implies (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$.
- פונקציה גזירה ברציפות:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ויהי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ וכן $\mathcal{D}_f \in C(\mathcal{U})$.
- סימון:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות אזי $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$.
- מסקנה:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ אזי $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U})$ $\forall i \in [m], \forall j \in [n]$.
- משפט:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ עבודה $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U})$ $\forall i \in [m], \forall j \in [n]$ אזי $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$.
- מסקנה:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי $(f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)) \iff \left(\forall i \in [m]. \forall j \in [n]. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U}) \right)$.
- נגזרת כיוונית:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathcal{U}$ ויהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$.
- טענה:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v$.
- מסקנה:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום יהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ המקיימת $f \in \mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \mathcal{D}_f(a) \cdot v$.
- טענה:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום אזי $(\mathcal{U} \text{ קשירה מסילתית}) \iff (\mathcal{U} \text{ קשירה פוליגונית})$.
- משפט:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$.
- מסקנה:** יהי $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$.
- טענה:** תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \implies (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$.
- מסקנה:** תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c \in \mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$.