פולינום טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על a אזי $P_n\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(x-a\right)^k$.

שארית טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על a אזי $R_n\left(f,a\right)\left(x\right)=f\left(x\right)-P_n\left(f,a\right)\left(x\right)$.

טור טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ חלקה על a אזי $P\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(x-a\right)^k$.

פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_+\left(a\right)=f\left(a\right)$ וכן $F'_-\left(b\right)=f\left(b\right)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^I \mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $\left(G'=f\right)\Longleftrightarrow\left(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c\right)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int\left(f+g\right)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int\left(\alpha f\right)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^I$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int\left(\left(f\circ g\right)\cdot g'\right)$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\left\{x_0,\ldots,x_n\right\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\left\{x_0,\ldots,x_n\right\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\left\{x_0,\ldots,x_n\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i=1}^{n}\left|\Delta x_i\right|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda\left(\Pi_2\right)\le\lambda\left(\Pi_1\right)$.

נקודות מתאימות: תהא $\left\{x_0,\ldots,x_n\right\}$ חלוקה אזי $\left\{t_1\ldots t_n\right\}$ המקיימות $\forall i\in\left\{1\ldots n\right\}.t_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{t_i\right\}$ נקודות מתאימות אזי $S\left(f,\Pi,\left\{t_i\right\}\right)=\sum f\left(t_i\right)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\left\{t_i\right\}$ מתקיים $\left|S\left(f,\Pi,\left\{t_i\right\}\right)-L\right|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f\left(t\right)dt=\int_a^b f\left(t\right)dt$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f\left(\varphi\right)d\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R\left(\left[a,b\right]\right)=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]} \mid \text{אינטגרבילית רימן } f\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f\left(t\right)dt=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S\left(f,\Pi,\left\{t_i\right\}\right)$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{t_i\right\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot dt=c\left(b-a\right)$.

טענה: $D\left(x\right)\notin R\left(\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_i,x_{i-1}]}\left(f\right)\cdot\Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_i,x_{i-1}]}\left(f\right)\cdot\Delta x_i$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sup_{\text{נקודות מתאימות}\left\{t_i\right\}}S\left(f,\Pi,\left\{t_i\right\}\right)$.

- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}} S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\geq\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\leq\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\text{חלוקה }\Pi}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\leq\underline{I}(f)\leq\overline{I}(f)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f,J)=\sup_{x,y\in J}(f(x)-f(y))$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0\in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\iff(\lim_{\delta\to0}\omega(f,[x_0-\delta,x_0+\delta])=0)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\iff(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}(I).\omega(f,I)<\varepsilon)$.

תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p\}=\Pi_2$ חלוקות
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\geq\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p_1\ldots p_m\}=\Pi_2$ חלוקות
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\geq\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\leq\underline{I}(f)\leq\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)\geq\overline{I}(f)\geq\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$ אזי $f\in R([a,b])$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: $C([a,b])\subseteq R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי $f\in R([a,b])$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $f\restriction_{[a,b]}\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $(f\in R([a,b]))\wedge(f\in R([b,c]))$ אזי $f\in R([a,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in[a,d]$ עבורה $f\in R([a,d])$ אזי $f\in R([b,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,c])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([b,c])$ אזי $f\in R([a,c])$.

טענה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases}y & x=b\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $g\in R([a,c])$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$ אזי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\left\{ \left(a_{i},b_{i}\right)\right\} _{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_{i},b_{i}\right)$ וכן $\sum\left(b_{i}-a_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\left|A\right|\leq\aleph_{0}$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_{A}}=g_{\restriction_{A}}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_{i} & x\in\left\{ b_{1}\ldots b_{m}\right\} \\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_{a}^{c}f\left(x\right)dx=\int_{a}^{c}g\left(x\right)dx$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{b}\alpha f+\beta g=\alpha\int_{a}^{b}f+\beta\int_{a}^{b}g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ ויהי $b\in\left(a,c\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f+\int_{b}^{c}f=\int_{a}^{c}f$.

הגדרה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=-\int_{b}^{a}f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\geq0$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\geq0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\geq\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $m\leq f\leq M$ אזי $m\left(b-a\right)\leq\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\leq M\left(b-a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_{a}^{b}f\right|\leq\int_{a}^{b}\left|f\right|\leq\sup_{\left[a,b\right]}\left(\left|f\right|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסוים: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ אזי $F\in C\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $0\leq g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(x_{0}\right)\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0\leq g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_{a}^{x_{0}}g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_{0}}^{b}g\left(x\right)dx$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ אזי $F'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ יהיו $x_{1}\ldots x_{n}\in\left[a,b\right]$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]\backslash\left\{ x_{1}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $\left[f\right]|_{a}^{b}=f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f'g=\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}fg'$.

הלמה של בונה: תהא $\frac{f\in C\left(\left[a,b\right]\right)}{f\in C^{1}\left(\left(a,b\right)\right)}$ עבורה $\left(f'\geq0\right)\vee\left(f'\leq0\right)$ ותהא $g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_{a}^{x_{0}}g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_{0}}^{b}g\left(x\right)dx$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $R_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=\frac{1}{n!}\int_{a}^{x}f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)\left(x-t\right)^{n}dt$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\substack{\varphi\in[a,b]^{[\alpha,\beta]}\\ \varphi\in C^1([\alpha,\beta])}$ המקיימת $\substack{\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx=-\int_0^{2\pi} f'(x)\,\frac{\sin(nx)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\right|\le\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1}(k-2n)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^m\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^m\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6...(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5...(2n-1)\cdot(2n-1)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty)\,.f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b]\,.f\in R([a,b])$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.\,(a<b)\Longrightarrow(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R([a,c])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\;\middle|\;\text{קיים וסופי }\int_I f\right\}$.

הערה: מכאן כל המשפטים יהיו חד צדדים ימינה אך תקפים לכל סוגי הקטעים עם שינויים קלים.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ויהי $c\in(a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^\omega f\ge\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'(x)=f(x)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F(b)-F(a)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,\omega))$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}[f\cdot g]\,|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $\substack{\varphi\in[a,\omega)^{[c,\eta)}\\ \varphi\in C^1([c,\eta))}$ המקיימת $\substack{\varphi(c)=a\\ \lim_{b\to\eta}\varphi(b)=\omega}$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega)\,.f\in R([a,b])$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in(a,\omega)\,.\forall b_1,b_2\in[B,\omega)\,.\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow(f\in R([a,\omega)))$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega)\,.f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega)\,.f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\le\int_a^\omega|f|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftrightarrow(F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega)\,.f,g\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega f<\infty\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $f,g\in R\left([a,b]\right).\forall b\in(a,\omega)$ אזי $\left(\int_a^{\omega}f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^{\omega}g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\int_1^{\infty}f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^{\infty}f\left(n\right)\le\int_1^{\infty}f\le\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n\right)$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}$.

טענה: $\lim_{s\to1^{+}}\zeta\left(s\right)\left(s-1\right)=1$.

משפט אבל: תהא $g\in C\left([a,\omega)\right)\cap R\left([a,\omega)\right)$ ותהא $f\in C^{1}\left([a,\omega)\right)$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^{\omega}fg<\infty$.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C\left([a,\omega)\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_a^{x}g$ חסומה ותהא $f\in C^{1}\left([a,\omega)\right)$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $\int_a^{\omega}fg<\infty$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^{n}}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^{I}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in I.\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

סימון: $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{\text{p.w.}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in C\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in R\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in R\left(I\right)\right)$.
- גבול האינטגרל: נניח $\underset{\forall n\in\mathbb{N}.f_{n}\in R(I)}{f\in R(I)}$ אזי $\left(\int_I f=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}\int_I f_{n}=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_{n} גזירה אזי $\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_{n}'\left(x\right)=L\right)\not\Longrightarrow\left(f'\left(x\right)=L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^{I}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\Longleftrightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=0\right)$.

סימון: $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.\left|f_{n}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

חסומה במידה אחידה: $f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.\left|f_{n}\left(x\right)\right|\le M$.

למה: תהיינה $f_{n},g_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f\right)\wedge\left(g_{n}\xrightarrow{\text{u}}g\right)$ אזי $f_{n}g_{n}\xrightarrow{\text{u}}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_{n}\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\left(\exists f\in\mathbb{R}^{I}.f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.\left|f_{n}\left(x\right)-f_{m}\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה $f_{n}\in C\left(I\right)$ עבורן $f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in C\left(I\right)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{I_{n}\right\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_{n}$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_{0}}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_{n}$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_{n}\in C\left([a,b]\right)$ עבורן $\underset{\forall n<m.f_{m}<f_{n}}{f_{n}\xrightarrow{\text{p.w.}}f}$ באשר $f\in C\left([a,b]\right)$ אזי $f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f$.

מסקנה: תהיינה $f_{n}\in C\left([a,b]\right)$ עבורן $f_{n}\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ באשר $f\in C\left([a,b]\right)$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\left\{f_{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהיינה $f_{n}\in R\left([a,b]\right)$ עבורן $f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[a,b\right]$ ותהא $\Psi\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.\left|f_n\right|\le\Psi$
אזי $\left(\forall b\in\left[a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\wedge\left(\int_a^\omega f\right.$ מתכנס בהחלט$\left.\right)\wedge\left(\int_a^\omega f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^\omega f_n\right)$.

טענה: $\int_0^\infty e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: תהיינה $f_n\in C^1\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $f_n'\xrightarrow{\text{u}}g$ ותהא $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורה $\left\{f_n\left(x_0\right)\right\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ וכן $f'=g$.

סימון: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^n f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $\sum_{i=0}^\infty f_n=f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\sum_{i=0}^\infty u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b\sum_{i=0}^\infty u_n=\sum_{i=0}^\infty\int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C^1\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורה $\sum u_i\left(x_0\right)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^\infty u_i\right)=\sum_{i=0}^\infty\frac{d}{dx}u_i$.

משפט M בוחן של וירשטראס: תהיינה $u_n\in\mathbb{R}^I$ ותהא $M\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^\infty M_n<\infty$ וכן $\forall x\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\left|u_n\left(x\right)\right|\le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^n a_kb_k=\sum_{k=1}^n a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^k a_m\left(b_k-b_{k+1}\right)$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x\in\left[a,b\right]$ הסדרה $\left\{g_n\right\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^n f_ig_i$ מתכנסת במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n\xrightarrow{\text{u}}0$ וכן לכל $x\in\left[a,b\right]$ הסדרה $\left\{g_n\right\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^n f_ig_i$ מתכנסת במ"ש.

פונקציית וירשטראס: יהי $a\in\left(0,1\right)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1\right\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W\left(x\right)=\sum_{k=0}^\infty a^k\cos\left(b^k\pi x\right)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0\left(4^kx\right)}{4^k}\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0\left(x+1\right)=\triangle_0\left(x\right)\right)\wedge\left(\triangle_0\left(x\right)=\begin{cases}x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1-x & \frac{1}{2}\le x\le1\end{cases}\right)$.

טענה: $\triangle_n\xrightarrow{\text{u}}\triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט וירשטראס: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי $\exists p\in\mathbb{R}\left[x\right].\max_{\left[a,b\right]}\left|f\left(x\right)-p\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

משפט וירשטראס: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_n\in\mathbb{R}\left[x\right]$ עבורה $p_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

הגדרה: תהא $f\in C\left(\left[0,1\right]\right)$ אזי $B_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[0,1\right]\right)$ אזי $B_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

משפט: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q\in\mathbb{R}$ ויהי $r<\left|q\right|$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $\left[-\left|r\right|,\left|r\right|\right]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי קיים $R\in\left[0,\infty\right]$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases}\text{מתכנס} & x\in\left(-R,R\right)\\ \text{מתבדר} & x\notin\left[-R,R\right]\end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי $R\in\left[0,\infty\right]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right)\Longrightarrow\left(R=\infty\right)\right)\wedge\left(\left(\limsup\left(\left|a_n\right|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right)\Longrightarrow\left(R=0\right)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^\infty a_kx^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^\infty ka_kx^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}a_{k+m}x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty}a_k<0$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־$-R$).

סכים לפי אבל: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$.

התכנסות צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$.

סכים לפי צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

סימון: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$ וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R([a,b])$ אזי $u+iv\in R([a,b])$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\int_a^b(u+iv)=\int_a^bu+i\int_a^bv$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי

- $\int_a^b(f+g)=\int_a^bf+\int_a^bg$.
- $\int_a^bf=\int_a^cf+\int_c^bf$.
- $\int_a^bcf=c\int_a^bf$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^bf}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\frac{d}{dx}(u+iv)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\|f\|\in R([a,b])$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^xf(t)\,dt\right)'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^bf(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי $\int_a^b f'g=\left[f\cdot g\right]|_a^b-\int_a^b fg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left([a,b]\right)$ אזי $\left\Vert \int_a^b f\right\Vert \le\int_a^b\left\Vert f\right\Vert$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R\left(\mathbb{T}\right)=\left\{ f\in R\left([0,2\pi]\right)\mid\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)\right\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n\left(t\right)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n\left(t\right)\in R\left(\mathbb{T}\right)$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_n\right\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $\left(c_m\ne0\right)\vee\left(c_{-m}\ne0\right)$ אזי m.

טענה: $R\left(\mathbb{T}\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

טענה: $\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle$ מכפלה פנימית על $R\left(\mathbb{T}\right)$.

טענה: $\left\langle e_n,e_m\right\rangle =\begin{cases} 0 & n\ne m\\ 1 & n=m \end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\left\langle f,e_m\right\rangle$.

סימון: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(m\right)=\left\langle f,e_m\right\rangle$.

טענה: יהי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(k\right)=c_k$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_n\left(t\right)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)\overline{\hat{g}\left(n\right)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\left\Vert f\right\Vert ^2=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^2$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(m\right)=\left\langle f,e_m\right\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\left(S_mf\right)\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_n\left(t\right)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(-n\right)=\overline{\hat{f}\left(n\right)}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$(S_mf ממשית).

טענה: תהא $f\in R\left([0,2\pi]\right)$ ויהי $\left|k\right|\le m$ אזי $\left(f-S_mf\right)\perp e_k$.

מסקנה: תהא $f\in R\left([0,2\pi]\right)$ אזי $\left(f-S_mf\right)\perp S_mf$.

מסקנה: תהא $f\in R\left([0,2\pi]\right)$ אזי $\left\Vert f\right\Vert ^2=\left\Vert S_mf\right\Vert ^2+\left\Vert f-S_mf\right\Vert ^2$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R\left([0,2\pi]\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^2\le\left\Vert f\right\Vert ^2$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R\left([0,2\pi]\right)$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_2: תהיינה $f_n,g\in R\left([0,2\pi]\right)$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\left\Vert f_n-g\right\Vert =0\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{L_2}g\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_2 איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\Vert g\right\Vert \le\sup\left|g\right|$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in R\left([0,2\pi]\right)$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{L_2}f\right)\Longrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_{n}\in\mathbb{C}\left[x\right]$ עבורה $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t\in\left[0,2\pi\right]}\left|p\left(t\right)-f\left(t\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\left\Vert p-f\right\Vert <\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי קיימיים p_{n} פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}\ge\left\Vert f-\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\right\Vert ^{2}$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{m\to\infty}\left\Vert S_{m}f-f\right\Vert =0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורה $\left\Vert f\right\Vert ^{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[-\pi,\pi\right)}$ המוגדרת $f\left(t\right)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\hat{f}\left(0\right)=0\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}i}{n}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}\sin\left(nt\right)}{n}$.
- יהי $r\in\left[0,\pi\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[-r,r\right]$.
- $S_{m}f\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ על $\left(-\pi,\pi\right)$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}=\frac{\pi^{2}}{6}$.

מסקנה: $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[0,2\pi\right]}$ המוגדרת $f\left(t\right)=\frac{\left(\pi-t\right)^{2}}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\hat{f}\left(0\right)=\frac{\pi^{2}}{12}\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{1}{2n^{2}}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\frac{\pi^{2}}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos\left(nt\right)}{n^{2}}$.
- $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[0,2\pi\right]$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}=\frac{\pi^{4}}{90}$.

מסקנה: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k^{2}}=\frac{\pi^{2}}{12}$.

למה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f'}\left(n\right)=in\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}\left(f'\right)=\left(S_{m}f\right)'$.

למה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f^{\left(k\right)}}\left(n\right)=i^{k}n^{k}\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$ אזי $f\in C^{k-2}\left(\mathbb{T}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$.