אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת
- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.

σ־אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת
- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.

משפט: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $\mathcal{F}$ הינה אלגברה מעל Ω.

פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1\ldots B_n\in\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}B_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(B_i\right)$.

מידה על אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ אדטיבית.

פונקציה σ־אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B_i\right)$.

מידה על σ־אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ σ־אדטיבית.

מרחב מדיד: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $(\Omega,\mathcal{F})$.

קבוצה מדידה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא μ מידה על $\mathcal{F}$ המקיימת $\exists E\in\mathcal{F}.\mu(E)<0$ אזי $\mu(\varnothing)=0$.

למה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ אזי μ אדטיבית.

למה: תהא μ מידה ותהיינה $A,B\in\mathcal{F}$ עבורן $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי
- מונוטונית עולה חלש: $\forall n\in\mathbb{N}.A_n\subseteq A_{n+1}$.
- מונוטונית יורדת חלש: $\forall n\in\mathbb{N}.A_{n+1}\subseteq A_n$.

סופרמום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\sup(A)=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$.

אינפימום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\inf(A)=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i$.

גבול עליון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$.

גבול תחתון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i$.

גבול: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ עבורה $\liminf_{n\to\infty}A_n=\limsup_{n\to\infty}A_n$ אזי $\lim_{n\to\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n$.

טענה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n\to\infty}A_n=B$ אזי $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(B)$.

מרחב מידה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה/σ־אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על $\mathcal{F}$ אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

מידת הסתברות: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ המקיימת $\mathbb{P}(\Omega)=1$.

מרחב הסתברות: מרחב מידה $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ עבורו μ מידת הסתברות.

מרחב התוצאות: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מאורע: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $E\in\mathcal{F}$.

מרחב המאורעות: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $\mathcal{F}$.

אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $\left((0,1],\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ עבורו לכל $A\subseteq(0,1]$ ולכל $b\in(0,1]$ באשר $A+b\subseteq(0,1]$ מתקיים $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A+b)$.

טענה: לכל מרחב הסתברות $\left((0,1],2^{(0,1]},\mathbb{P}\right)$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A$.

קבוצה סגורה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $A^{\mathcal{C}}$ פתוחה.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ σ־אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ הינה σ־אלגברה מעל Ω.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}$: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

קבוצה בורלית: $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

טענה: σ־אלגברה בורלית הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$ המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω ותהא $A \subseteq \Omega$ אזי $\{E \cap A \mid E \in \mathcal{F}\}$ הינה σ־אלגברה מעל A.

σ־אלגברה בורלית מעל $(0,1]$: $\mathfrak{B}_{(0,1]} = \{B \cap (0,1] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$.

מידת לבג: תהא $B \in \mathfrak{B}$ אזי $\lambda(B) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \mid B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\}$.

טענה: $\left((0,1], \mathfrak{B}_{(0,1]}, \lambda\right)$ מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

מרחב אחיד על A: עבור $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(A, \mathfrak{B}_A, \lambda)$.

σ־אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ותהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל Ω המכילות את $\mathcal{T}$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

הצילינדר של ה־σ־אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ו־σ־אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי $\mathcal{T}$.

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\varnothing, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_{\alpha} \cup \left\{A^{\mathcal{C}} \mid A \in \mathcal{F}_{\alpha}\right\} \cup \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_{\alpha}\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_{\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}_{\alpha}$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ויהיו $\omega, \kappa \in \Omega$ עבורן $\forall A \in \mathcal{T}.\omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A$ אזי $\forall A \in \sigma(\mathcal{T}).\omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A$.

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ עבורה $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$.

פונקציה מדידה בורל: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המקיימת $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.\varphi^{-1}[B] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

סימון: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ כך $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}[B]\right)$.

טענה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ מ"מ אזי $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_X)$ מרחב הסתברות.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ אזי

- $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}\left[A^{\mathcal{C}}\right] = f^{-1}[A]^{\mathcal{C}}$.

טענה: יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד ותהא $X : \Omega \to \mathbb{R}$ אזי $\left\{E \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}[E] \in \mathcal{F}\right\}$ הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

משפט: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X : \Omega \to \mathbb{R}$ אזי (X מ"מ)$\Longleftrightarrow$$\left(\forall t \in \mathbb{R}.X^{-1}[(-\infty, t)] \in \mathcal{F}\right)$.

σ־אלגברה נוצרת על ידי משתנה מקרי: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $\sigma(X) = \sigma\left(\left\{X^{-1}[B] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\right\}\right)$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

- יהי $c \in \mathbb{R}$ אזי cX מ"מ.
- $X + Y$ מ"מ.
- XY מ"מ.
- יהי Z מ"מ על $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ אזי $f \circ X$ מ"מ.

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אזי $f^{-1}[\mathcal{U}]$ פתוחה.

מסקנה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ אזי f מ"מ על $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$.

פונקציית התפלגות מצטברת (פה"מ): יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ המקיימת $F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t)$.

טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

- $\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$.
- $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$.
- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t \to a^+} F_X(t) = F_X(a)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X, Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

למה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}_0 \subseteq 2^{\Omega}$ סגורה לחיתוכים סופיים עבורה $\Omega \in \mathcal{F}_0$ ותהא $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ סגורה להפרשים וסגורה לגבולות אינסופיים עבורה $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ אזי $\sigma(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $(F_X = F_Y) \Longleftrightarrow (\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y)$.

תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X) = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0.\mathbb{P}(t - \varepsilon < X < t + \varepsilon) > 0\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X)$ הקבוצה הסגורה המינימלית ב־$\mathbb{R}$ עבורה $\mathbb{P}(X \in \text{supp}(X)) = 1$.

אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $t \in \mathbb{R}$ המקיים $\mathbb{P}(X = t) > 0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי $A_X = \{t \in \mathbb{R} \mid X \text{ אטום של } t\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $|A_X| \leq \aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי X המקיים $\mathbb{P}(X \in A_X) = 1$.

פונקציית צפיפות: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f \geq 0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי X עבורו קיימת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a < b$ מתקיים $\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

סימון: יהי X מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של X.

טענה: יהי X מ"מ אזי (X רציף)$\Longleftrightarrow$($\mathbb{P}(X \in A_X) = 0$).

הערה: לא כל משתנה מקרה הוא בדיד או רציף, ובמקרה זה $0 < \mathbb{P}(X \in A_X) < 1$.

טענה: יהי X מ"מ רציף אזי

- יהי $t \in \mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X = t) = 0$.
- $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,\mathrm{d}x$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $a \in \mathbb{R}$ עבורה $f_X \in C(a)$ אזי $F'_X(a) = f_X(a)$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ממש עד אשר $F_X = 1$ ויהי $p \in (0,1)$ אזי $x_p \in \mathbb{R}$ המקיים $F_X(x_p) = p$.

האחוזון ה־p: יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ויהי $p \in (0,1)$ אזי $x_p = \sup\{t \mid F_X(t) \leq p\}$.

טענה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ אזי קיים מ"מ X על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ עבורו $F_X = F$.

סימון: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ אזי $X^\star(s) = \sup\{t \mid F(t) \leq s\}$.

טענה: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ אזי $X^\star$ מ"מ על $\left((0,1), \mathfrak{B}_{(0,1)}, \lambda\right)$.

משפט: תהא $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ אזי $F_{X^\star} = F$.

התפלגות ברנולי: יהי $p \in [0,1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X אינדיקטור להצלחה בניסוי בעל סיכוי הצלחה p וסיכוי כישלון $1-p$.
- פונקציית הסתברות: $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- סימון: $X \sim \mathrm{Ber}(p)$.

התפלגות בינומית: יהי $p \in [0,1]$ ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר הניסויים שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p לניסוי.
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \{0, \ldots, n\}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- סימון: $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

התפלגות גאומטרית: יהי $p \in [0,1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל.
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.
- סימון: $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

התפלגות פואסונית: יהי $\lambda > 0$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר האירועים שקרו בפרק זמן נתון בעל קצב אירועים בפרק זמן זה λ.
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
- סימון: $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.

טענה: יהי $\lambda > 0$ ויהי $X_n \sim \mathrm{Bin}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ מ"מ יהי $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ מ"מ ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$.

תהליך פואסון: משתנים מקריים $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ כך שלכל $t \in \mathbb{R}_+$ המ"מ N_t סופר את מספר האירועים בלתי תלויים שקרו עד זמן t, בפרט $N_0 = 0$ וכן $N_{t+s} - N_s \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$ באשר λ ממוצע האירועים ליחידת זמן.

התפלגות אחידה: יהיו $a < b$ אזי

- המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקטע (a, b).
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a,b) \\ 1 & t \geq b \end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.

- סימון: $X\sim \text{Uni}\left(a,b\right)$.

התפלגות מעריכית: יהי $\lambda>0$ אזי

- המשתנה המקרי: X משך חיים של תהליך הנמשך λ יחידות זמן בממוצע.
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X\left(t\right)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t\geq0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_X\left(t\right)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geq0\\ 0 & t<0\end{cases}$.
- סימון: $X\sim \text{Exp}\left(\lambda\right)$.

טענה: יהי $\lambda>0$ יהי $X\sim \text{Exp}\left(\lambda\right)$ ויהיו $a,b>0$ אזי $\mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a\right)=\mathbb{P}\left(X>b\right)$.

טענה: יהי X מ"מ המקיים $\forall a,b>0.\mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a\right)=\mathbb{P}\left(X>b\right)$ אזי קיים $\lambda>0$ עבורו $X\sim \text{Exp}\left(\lambda\right)$.

טענה: הזמן הבינמופעי של תהליך פואסון עם קצב λ מופעים ליחידת זמן מתפלג $\text{Exp}\left(\lambda\right)$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על, עולה ממש וגזירה אזי $f_{\varphi\circ X}\left(t\right)=\frac{f_X\left(\varphi^{-1}\left(t\right)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(t\right)\right)}$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על, יורדת ממש וגזירה אזי $f_{\varphi\circ X}\left(t\right)=-\frac{f_X\left(\varphi^{-1}\left(t\right)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}\left(t\right)\right)}$.

הגדרה: יהי X מ"מ אזי $X^{+}=\max\left\{X,0\right\}$, $X^{-}=\min\left\{X,0\right\}$.

תוחלת: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\sum_{c\in A_X}c\cdot\mathbb{P}\left(X=c\right)$.

טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[X^{+}\right]+\mathbb{E}\left[X^{-}\right]$.

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו $\mathbb{E}\left[X\right]$ סופי.

משתנה מקרי סימטרי: יהי $a\in\mathbb{R}$ אזי מ"מ X עבורו $\forall b\in\mathbb{R}.\mathbb{P}\left(X\geq a+k\right)=\mathbb{P}\left(X\leq a-k\right)$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי סימטרי סביב a אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=a$.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}\left[aX+b\right]=a\mathbb{E}\left[X\right]+b$.

משתנה מקרי שולט: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט על Y אם $Y\leq X$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $X\geq Y$ מ"מ בדידים אזי $\mathbb{E}\left[X\right]\geq\mathbb{E}\left[Y\right]$.

תוחלת: יהי X מ"מ אזי

- $\mathbb{E}\left[X^{+}\right]=\sup\left\{\mathbb{E}\left[Y\right]\mid\left(0\leq Y\leq X^{+}\right)\wedge\left(\text{מ"מ בדיד }Y\right)\right\}$.
- $\mathbb{E}\left[X^{-}\right]=-\sup\left\{\mathbb{E}\left[Y\right]\mid\left(0\leq Y\leq -X^{-}\right)\wedge\left(\text{מ"מ בדיד }Y\right)\right\}$.
- $\mathbb{E}\left[X\right]=\mathbb{E}\left[X^{+}\right]+\mathbb{E}\left[X^{-}\right]$.

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו $\mathbb{E}\left[X\right]$ סופי.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}\left[aX+b\right]=a\mathbb{E}\left[X\right]+b$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $X\geq Y$ מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]\geq\mathbb{E}\left[Y\right]$.

טענה נוסחת הזנב: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_0^\infty\left(1-F_X\left(t\right)\right)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^0\left(0-F_X\left(t\right)\right)\mathrm{d}t$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_{-\infty}^\infty tf_X\left(t\right)\mathrm{d}t$.

משתנה מקרי שולט סטוכסטית: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט סטוכסטית על Y אם $F_Y\geq F_X$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}\left(Y\leq X\right)=1$ אזי X שולט סטוכסטית על Y.

טענה: יהיו X,Y מ"מ

- אם X שולט סטוכסטית על Y אזי $\mathbb{E}\left[Y\right]\leq\mathbb{E}\left[X\right]$.
- אם $\mathbb{P}\left(Y\leq X\right)=1$ אזי $\mathbb{E}\left[Y\right]\leq\mathbb{E}\left[X\right]$.
- חיבוריות: $\mathbb{E}\left[X+Y\right]=\mathbb{E}\left[X\right]+\mathbb{E}\left[Y\right]$.

טענה אי־שיוויון מרקוב: יהי $X\geq0$ מ"מ אינטגרבילי ויהי $b>0$ אזי $\mathbb{P}\left(X\geq b\right)\leq\frac{\mathbb{E}\left[X\right]}{b}$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא φ מדידה בורל אזי $\mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\sum_{c\in A_X}\varphi\left(c\right)\cdot\mathbb{P}\left(X=c\right)$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא φ רציפה למקוטעין אזי $\mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\int_{-\infty}^\infty\varphi\left(t\right)f_X\left(t\right)\mathrm{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\int_0^1X^{\star}\left(t\right)\mathrm{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום מלרע אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^{1-\varepsilon}X^{\star}\left(t\right)\mathrm{d}t$.

טענה: יהי X מ"מ חסום מלעיל אזי $\mathbb{E}\left[X\right]=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^1X^{\star}\left(t\right)\mathrm{d}t$.

שונות: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\text{Var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)^2\right]$.

סטיית תקן: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\sigma\left(X\right)=\sqrt{\text{Var}\left(X\right)}$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\text{Var}\left(X\right)=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}^2\left[X\right]$.

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\mathrm{Var}\left(aX+b\right)=a^{2}\mathrm{Var}\left(X\right)$.

טענה אי־שיוויון צ'בישב: יהי X מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי $a>0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|\geq a\right)\leq\frac{\mathrm{Var}(X)}{a^{2}}$.

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_{X}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $M_{X}\left(t\right)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_{X}\in C^{n}\left(I\right)$ אזי $M_{X}^{(n)}\left(0\right)=\mathbb{E}\left[X^{n}\right]$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_{X}\left(t\right)$ קיים וסופי על I אזי $\mathbb{E}\left[\left|X\right|^{n}\right]$ מתכנס לכל $n\in\mathbb{N}$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי $\varepsilon>0$ עבורו $M_{X}\left(t\right)$ קיים וסופי על $\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)$ אזי $M_{X}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{n}\frac{t^{n}\mathbb{E}[X^{n}]}{n!}$.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}^{n}$: תהיינה $\left\{ \mathcal{F}_{i}\right\} _{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}^{n}$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_{i}$.

משתנה מקרי n מימדי: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות אזי $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n}$ עבורו $\forall B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}}.X^{-1}\left[B\right]\in\mathcal{F}$.

משפט: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות ותהא $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n}$ אזי (X מ"מ)$\iff\left(\forall t\in\mathbb{R}^{n}.\forall i\in\left[n\right].X_{i}^{-1}\left[\left(-\infty,t\right)\right]\in\mathcal{F}\right)$.

סימון: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n}$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_{X}:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}}\to\mathbb{R}^{n}$ כך $\mathbb{P}_{X}\left(B\right)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B\right]\right)$.

טענה: יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega\to\mathbb{R}^{n}$ מ"מ אזי $\left(\mathbb{R}^{n},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}},\mathbb{P}_{X}\right)$ מרחב הסתברות.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת: יהי X מ"מ על $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ אזי $F:\mathbb{R}^{n}\to\left[0,1\right]$ המקיימת $F_{X}\left(t\right)=\mathbb{P}\left(X_{1}\leq t_{1},\ldots,X_{n}\leq t_{n}\right)$.

טענה: יהי $\left(X,Y\right)$ מ"מ אזי
- יהי $\ell\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{k\to-\infty}F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=0$.
- יהי $k\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{\ell\to-\infty}F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=0$.
- $\lim_{\ell\to\infty}\lim_{k\to\infty}F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=1$.
- רציפות מימין: יהיו $p,q\in\mathbb{R}$ אזי $\lim_{k\to p^{+}}\lim_{\ell\to q^{+}}F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=F_{X,Y}\left(p,q\right)$.

טענה: יהי $\left(X,Y\right)$ מ"מ ויהיו $k_{1}<k_{2}$ וכן $\ell_{1}<\ell_{2}$ אזי $F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{2}\right)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{1}\right)\geq F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{1}\right)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{2}\right)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ n מימדיים עבורם $\mathbb{P}_{X}=\mathbb{P}_{Y}$.

טענה: יהיו מ"מ n מימדיים X,Y אזי $\left(F_{X}=F_{Y}\right)\iff\left(\mathbb{P}_{X}=\mathbb{P}_{Y}\right)$.

טענה: יהי X מ"מ n מימדי אזי X_{i} מ"מ חד־מימדי.

משתנה מקרי שולי: יהי X מ"מ n מימדי אזי X_{i}.

פונקציית התפלגות מצטברת שולית: יהי $\left(X,Y\right)$ מ"מ דו־מימדי אזי
- $F_{X}\left(t\right)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}\left(t,y\right)$.
- $F_{Y}\left(t\right)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}\left(x,t\right)$.

אטום: יהי X מ"מ n מימדי אזי $a\in\mathbb{R}^{n}$ עבורו $\mathbb{P}\left(X=a\right)>0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי $A_{X}=\left\{ t\in\mathbb{R}\mid X\text{ אטום של }t\right\}$.

טענה: יהי X מ"מ n מימדי אזי $\left|A_{X}\right|\leq\aleph_{0}$.

משתנה מקרי בדיד: X מ"מ n מימדי עבורו $\mathbb{P}\left(X\in A_{X}\right)=1$.

טענה: יהי X מ"מ n מימדי בדיד אזי $\forall a\in A_{X}.\mathbb{P}_{X}\left(a\right)=\mathbb{P}\left(X=a\right)$.

טענה: יהי X מ"מ n מימדי אזי (X מ"מ בדיד)$\iff$(X_{i} מ"מ בדיד לכל $i\in\left[n\right]$).

פונקציית צפיפות משותפת: $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f\geq0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x_{1},\ldots,x_{n}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}=1$.

משתנה מקרי רציף: X מ"מ n מימדי עבורו קיימת $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ המקיימות $a_{i}<b_{i}$ מתקיים $\mathbb{P}\left(a_{1}<X_{1}<b_{1},\ldots,a_{n}<X_{n}<b_{n}\right)=\int_{a_{n}}^{b_{n}}\ldots\int_{a_{1}}^{b_{1}}f\left(x_{1},\ldots,x_{n}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}$.

טענה: יהי X מ"מ n מימדי אזי (X רציף)$\iff$($\mathbb{P}\left(X\in A_{X}\right)=0$).

טענה: הי X מ"מ n מימדי ויהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathbb{P}\left(X=a\right)=0$.

טענה: יהי X מ"מ n מימדי רציף אזי $F_{X}\left(a\right)=\int_{-\infty}^{a_{n}}\ldots\int_{-\infty}^{a_{1}}f_{X}\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}$.

טענה: יהי X מ"מ n מימדי רציף ותהא $p:\left[n\right]\to\left[n\right]$ תמורה אזי $F_{X}\left(a\right)=\int_{-\infty}^{a_{p(n)}}\ldots\int_{-\infty}^{a_{p(1)}}f_{X}\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}$.

טענה: יהי X מ"מ n מימדי רציף ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ עבורה $f_{X}\in C\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial^{2}F_{X}}{\partial x\partial y}\left(a\right)=\frac{\partial^{2}F_{X}}{\partial y\partial x}\left(a\right)=f_{X}\left(a\right)$.

טענה: יהי X מ"מ n מימדי רציף אזי X_{i} מ"מ רציף לכל $i\in\left[n\right]$.

פונקציית צפיפות שולית: יהי $\left(X,Y\right)$ מ"מ דו־מימדי אזי
- $f_{X}\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(t,y\right)\mathrm{d}y$.
- $f_{Y}\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,t\right)\mathrm{d}x$.