אותות אקראיים ורעש (0512-2532)

נכתב ע"י רון גולדמן בסמסטר א' תשפ"ו

מבוסס על הרצאות של פרופ' אורי ארז וד"ר אנטולי חינה

תוכן העניינים

חלק I

משתנים ווקטורים אקראיים

פרק 1

הסתברות ומשתנים אקראיים

1.1 מושגי יסוד בהסתברות

1.1.1 מרחב הסתברות

הגדרה 1.1 [σ-אלגברה] תהא Ω קבוצה לא ריקה, קבוצה לא ריקה $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ היא **σ-אלגברה** אם היא סגורה תחת איחוד בן מנייה ומשלים. אם $\mathcal{F}$ σ-אלגברה של Ω אז $(\Omega, \mathcal{F})$ הוא **מרחב מדיד**.

טענה 1.1 [תכונות של σ-אלגברה] אם $(\Omega, \mathcal{F})$ σ-אלגברה, אזי גם סגורה תחת איחוד סופי, חיתוך סופי ובן מנייה, וכן $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.

הגדרה 1.2 [מרחב הסתברות] השלשה $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ נקראת **מרחב הסתברות** אם היא מקיימת את אקסיומות קולמגורוב:

- $(\Omega, \mathcal{F})$ הוא מרחב מדיד, Ω יקרא מרחב המדגם וכן $\mathcal{F}$ יקרא שדה המאורעות.
- $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ היא פונקציה הנקראת פונקציית מידת ההסתברות המקיימת את הדרישות הבאות ($\mathbb{P}$ היא מידת הסתברות מעל $(\Omega, \mathcal{F})$):
  1. <u>אי-שליליות:</u> לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים כי $\mathbb{P}(A) \geq 0$.
  2. <u>מידת הסתברות:</u> $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  3. <u>σ-אדיטיביות:</u> אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ סדרת מאורעות זרים בזוגות, כלומר לכל $j \neq i$ מתקיים $A_i \cap A_j = \emptyset$, אזי $\mathbb{P}(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

טענה 1.2 [תכונות של מרחב הסתברות] יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, אזי הבאים מתקיימים:

1. <u>מונוטוניות:</u> לכל $A, B \in \mathcal{F}$ כך ש-$A \subseteq B$ מתקיים $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
2. לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים כי $\mathbb{P}(A) \leq 1$.
3. <u>σ-תת אדיטיביות / חסם האיחוד:</u> לכל סדרת מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ מתקיים כי $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
4. <u>נרמול:</u> $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
5. לכל $A \in \mathcal{F}$ מתקיים $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

מעתה ואילך, אם לא נאמר אחרת, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ הוא מרחב הסתברות.

1.1.2 הסתברות מותנית

הגדרה 1.3 [אי-תלות בין מאורעות] המאורעות $A, B \in \mathcal{F}$ הם **בלתי תלויים סטטיסטית** (בת"ס) אם $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

הגדרה 1.4 [הסתברות מותנית] תהינא $A, B \in \mathcal{F}$ מאורעות כך ש-$\mathbb{P}(B) \neq 0$, אזי **ההסתברות המותנית של A בהינתן B** היא

$$\mathbb{P}(A|B) \triangleq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

טענה 1.3 [כלל בייס] תהינא $A, B \in \mathcal{F}$ מאורעות כך ש-$\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \neq 0$, אזי

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}(B|A)$$

1.2 משתנה אקראי יחיד

1.2.1 מושגי יסוד

הגדרה 1.5 פונקצייה $X : \Omega \to \mathbb{R}$ תיקרא **משתנה אקראי** (מ"א) אם לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$.

1.2.1.1 פונקציית התפלגות מצטברת

הגדרה 1.6 עבור מ"א X **פונקציית ההתפלגות המצטברת** (CDF) שלו $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ על ידי

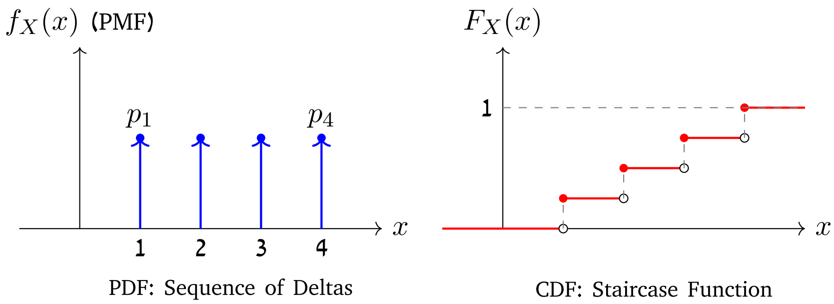
$$F_X(x) \triangleq \mathbb{P}(\{X \leq x\}) \coloneqq \mathbb{P}(X \leq x).$$

טענה 1.4 [תכונות של CDF] יהי X מ"א, אזי:

1. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $F_X(x) \in [0,1]$.
2. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.
3. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
4. <u>רציפות מימין:</u> לכל $x_0 \in \mathbb{R}$ מתקיים $F_X(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X\left(x_0^+\right)$.
5. <u>פונקציה מונוטונית לא יורדת:</u> לכל $x_2 > x_1$ מתקיים $F_X(x_2) \geq F_X(x_1)$.
6. לכל $a < b$ מתקיים $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
7. לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\mathbb{P}(X = a) = F_X(a^+) - F_X(a^-)$.

הגדרה 1.7 יהי X מ"א. אזי:

- X_D ייקרא **בדיד** אם קיימת $A \subseteq \mathbb{R}$ לכל היותר בת-מנייה עם משקלים $\{\alpha_a\}_{a\in A} \in (0,1)$, $\sum_{a\in A} \alpha_a = 1$, עבורם לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $F_X(x) = \sum_{a\in A} \alpha_a u(x-a)$.
- X_C ייקרא **רציף** אם F_X רציפה.
- X ייקרא **מעורב** אם קיימים $X_D, X_C \neq 0$ בדיד ורציף, ו-$\alpha \in (0,1)$, כך ש-$F_X = \alpha F_{X_D} + (1-\alpha)F_{X_C}$.



איור 1.1: מ"א בדיד

משפט 1.1 כל מ"א הוא בדיד, רציף, או מעורב.

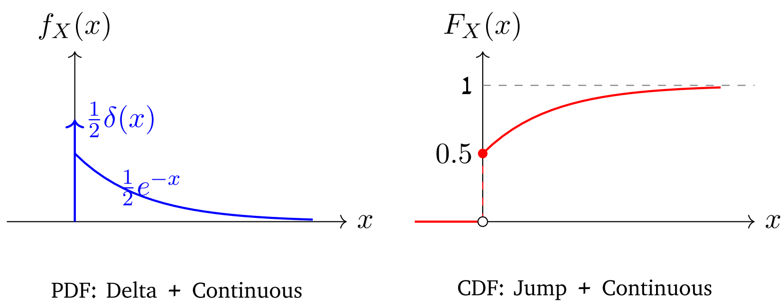
1.2.1.2 פונקציית צפיפות הסתברות

הגדרה 1.8 עבור מ"א X, התפלגות f_X (התפלגות, לא בהכרח פונקצייה) נקראת **פונקציית צפיפות הסתברות** (PDF) שלו אם לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x$$

טענה 1.5 [תכונות של PDF] יהי f_X PDF של מ"א X. אזי:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$.
2. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f_X(x) \geq 0$.
3. $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)\mathrm{d}x$.
4. לכל $x_0 \in \mathbb{R}$ בו F_X גזירה מתקיים $f_X(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(x_0)$.
5. אם F_X לא גזירה ב-$x_0 \in \mathbb{R}$, אזי גם $g_X(x) = \begin{cases} f_X(x), & x \neq x_0 \\ \alpha, & x = x_0 \end{cases}$ היא PDF של X לכל $\alpha \in \mathbb{R}$.



איור 1.2: מ"א מעורב

1.2.2 פונקציות של משתנים אקראיים

הגדרה 1.9 תהינא A, B קבוצות לא ריקות, ותהא $g : A \to B$ פונקציה. עבור $S \subseteq B$ **קבוצת המקורות** של S תחת f מוגדרת להיות

$$g^{-1}(S) \triangleq \{x \in A : \ g(x) \in S\}.$$

הגדרה 1.10 יהי X מ"א ו-$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. נגדיר את $Y = g(X)$ לכל $\omega \in \Omega$ על ידי

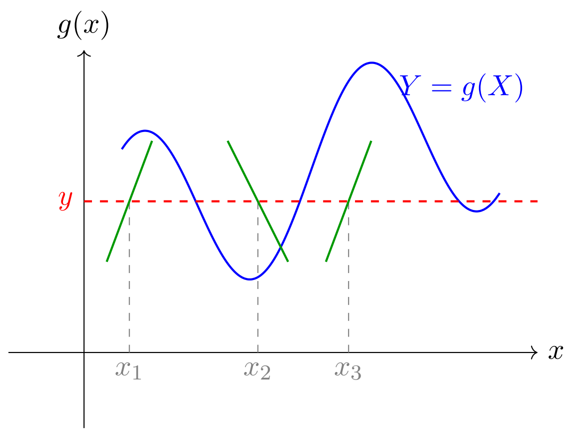
$$Y(\omega) = g(X(\omega)).$$

טענה 1.6 יהי X מ"א ו-$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה (מדידה בורל). אזי $Y = g(X)$ הוא מ"א ולכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\big(X \in g^{-1}((-\infty, y])\big)$$

טענה 1.7 יהי X מ"א עם PDF f_X ו-$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (מדידה בורל), ויהי $y \in \mathbb{R}$ כך שלמשוואה $g(x) = y$ מספר בן מנייה של פתרונות $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ כאשר $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. נניח כי $g'(x_i) \neq 0$ לכל i, אזי כאשר $Y = g(X)$ מתקיים

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$



איור 1.3: תרומת השורשים x_i לצפיפות $f_Y(y)$

1.2.3 מדדים

1.2.3.1 תוחלת

הגדרה 1.11 יהי X מ"א, ה**תוחלת** של X (אם קיימת) היא

$$\eta_X = \eta = \mathbb{E}(X) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x.$$

טענה 1.8 אם X מ"א בדיד כך ש-$\mathbb{P}(X\in S)=1$, עבור $S=\{x_i\}_i$ אזי

$$\mathbb{E}(X)=\sum_i x_i\mathbb{P}(X=x_i).$$

משפט 1.2 [משפט התוחלת] יהיו X מ"א ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (מדידה בורל) כך ש-$Y=g(X)$. אזי

$$\mathbb{E}(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\mathrm{d}x.$$

טענה 1.9 [ליניאריות התוחלת] יהיו X,Y מ"א ו-$a,b\in\mathbb{R}$. אזי מתקיים $\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$.

1.2.3.2 שונות

הגדרה 1.12 יהי X מ"א, **השונות** של X (אם קיימת) היא

$$\sigma_X^2=\sigma^2=\mathrm{Var}(X)\triangleq\mathbb{E}\Big((X-\eta_X)^2\Big)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\eta_X)^2f_X(x)\mathrm{d}x.$$

1.2.3.3 מומנטים

הגדרה 1.13 מומנט מסדר $n\in\mathbb{N}$ של מ"א X (אם קיים) מוגדר להיות

$$m_n(X)=m_n\triangleq\mathbb{E}(X^n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^nf_X(x)\mathrm{d}x.$$

הגדרה 1.14 מומנט מרכזי מסדר $n\in\mathbb{N}$ של מ"א X (אם קיים) מוגדר להיות

$$\mu_n(X)=\mu_n\triangleq\mathbb{E}((X-\eta_X)^n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\eta_X)^nf_X(x)\mathrm{d}x.$$

הגדרה 1.15 תהא S קבוצה סדורה, אזי S היא **סטטיסטיקה מסדר** k של מ"א X אם $S\in\Big\{\{\mu_i\}_{i=0}^k\cup\{m_1=\eta\},\{m_i\}_{i=0}^k\Big\}$.

טענה 1.10 שתי סוגי הסטטיסטיקות שקולות, כלומר ניתן לבטא את $\{\mu_i\}_{i=0}^k\cup\{m_1=\eta\}$ באמצעות $\{m_i\}_{i=0}^k$ בלבד ולהיפך.

1.2.3.4 אי-שוויון צ'בישב (Chebyshev)

טענה 1.11 [אי-שוויון צ'בישב] יהי X מ"א בעל תוחלת η, ושונות σ^2. אז לכל $a>0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(|X-\eta|\geq a)\leq\frac{\sigma^2}{a}.$$

1.2.3.5 אי-שוויון מרקוב (Markov)

טענה 1.12 [אי-שוויון מרקוב] יהי X מ"א אי-שלילי בעל תוחלת η. אזי לכל $a > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\eta}{a}.$$

1.2.4 אפיון סטטיסטי מלא

1.2.4.1 פונקציה אופיינית

הגדרה 1.16 יהי X מ"א, אזי **הפונקצייה האופיינית** שלו מוגדרת לכל $\omega \in \mathbb{R}$ ע"י

$$\phi_X(\omega) \triangleq \mathbb{E}\left(e^{i\omega X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f_X(x) \mathrm{d}x.$$

טענה 1.13 [תכונות של פונקצייה אופיינית] יהי X מ"א, אזי:

1. כמעט לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים
$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \phi_X(\omega) \mathrm{d}\omega.$$
2. $\phi_X(0) = 1$.
3. לכל $\omega \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\phi_X(\omega)| \leq 1$.
4. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{\mathrm{d}^n \phi_X}{\mathrm{d}\omega^n}(0) = i^n m_n$.
5. לכל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים
$$\phi_{aX+b}(\omega) = e^{i\omega b} \phi_X(a\omega).$$

1.2.4.2 פונקציה יוצרת מומנטים

הגדרה 1.17 יהי X מ"א, אזי **הפונקצייה יוצרת מומנטים** שלו מוגדרת לכל $s \in \mathbb{R}$ (אם קיימת) ע"י

$$M_X(s) \triangleq \mathbb{E}\left(e^{sX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) \mathrm{d}x.$$

טענה 1.14 [תכונות פונקציה יוצרת מומנטים] יהי X מ"א בעל פונקציה יוצרת מומנטים M_X. אזי:

1. פונקציה יוצרת מומנטים הינה אפיון סטטיסטי מלא של X.
2. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\frac{\mathrm{d}^n M_X}{\mathrm{d}s^n}(0) = m_n$.

1.2.4.3 חסם צ'רנוף (Chernoff)

טענה 1.15 [חסם צ'רנוף] יהי X מ"א בעל פונקציה יוצרת מומנטים M_X, אזי לכל $a \in \mathbb{R}$ ו-$s > 0$ מתקיים

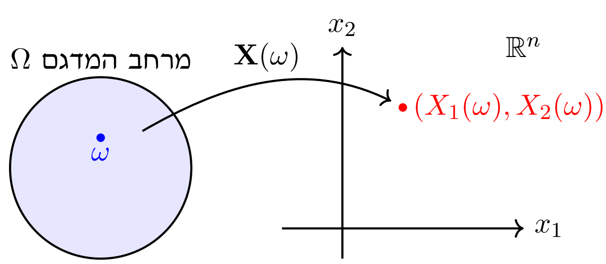
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-sa} M_X(s).$$

פרק 2

וקטורים אקראיים

2.1 מושגי יסוד

הגדרה 2.1 [וקטור אקראי] פונקציה $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathbf{T}} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ נקראת **וקטור אקראי** (ו"א) אם לכל $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים כי $\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\} := \{\omega \in \Omega : \; X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\} \in \mathcal{F}$.



איור 2.1: וקטור אקראי

2.1.1 פונקציית התפלגות מצטברת משותפת

הגדרה 2.2 [jCDF] יהי $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ו"א, אזי **פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת** של $\mathbf{X}$ (jCDF), $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מוגדרת לכל $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ על ידי:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

טענה 2.1 [תכונות jCDF] יהי $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ו"א, $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ה-jCDF של $\mathbf{X}$. אזי:

1. לכל $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \in [0,1]$.
2. $F_{\mathbf{X}}$ מונוטונית לא יורדת ורציפה מימין בכל משתנה $x_1, \ldots, x_n$.
3. $F_{\mathbf{X}}(\infty) = 1$.
4. לכל $i \in [n]$, $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = 0$.
5. לכל $I \subseteq [n]$ ה-jCDF השולי של תת הוקטור $\mathbf{X}' = (X_i)_{i \in I}$ היא $F_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}') = \lim\limits_{x_j \to \infty, j \notin I} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$.

2.1.2 פונקציית צפיפות הסתברות משותפת

הגדרה 2.3 [jPDF] יהי $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ו"א, אזי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ היא **פונקציית צפיפות הסתברות משותפת** של $\mathbf{X}$ (jPDF) אם לכל $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, מתקיים

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=\int\limits_{-\infty}^{\mathbf{x}}f\left(\mathbf{x}'\right)\mathrm{d}^n\mathbf{x}'=\int\limits_{x_1'=-\infty}^{x_1}\cdots\int\limits_{x_n'=-\infty}^{x_n}f\left(\mathbf{x}'\right)\mathrm{d}x_1'\cdots\mathrm{d}x_n'$$

טענה 2.2 [תכונות jPDF] יהי $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ו"א כך ש-$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ היא jPDF עבורו, אזי:

1. $\int\limits_{\mathbb{R}^n}f(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}=1$.
2. לכל $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $f(\mathbf{x})\geq 0$.
3. לכל $I\subseteq[n]$ בגודל m מתקיים כי

$$g\left(\mathbf{x}'\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underset{j\notin I}{\cdots}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\mathbf{x})\mathrm{d}^{n-m}\left(\mathbf{x}\setminus\mathbf{x}'\right)$$

היא jPDF שולי של תת הוקטור $\mathbf{X}'=\left(X_i\right)_{i\in I}$.

4. אם $F_{\mathbf{X}}$ גזירה ב-$\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ אזי מתקיים

$$f(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}}{\partial x_1\cdots\partial x_n}(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}}{\partial^n\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$$

5. אם $F_{\mathbf{X}}$ לא גזירה ב-$\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ אזי לכל $a\in\mathbb{R}$ גם $g(\mathbf{x})=\begin{cases}f(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\neq\mathbf{x}_0\\ a, & \mathbf{x}=\mathbf{x}_0\end{cases}$ היא jPDF של $\mathbf{X}$.

מסקנה 2.1 יהי $\mathbf{X}$ ו"א עם jPDF $f_{\mathbf{X}}$, אזי:

1. אם $F_{\mathbf{X}}\in C^1(\mathbb{R}^n)$, אזי $f_{\mathbf{X}}$ יחידה ומתקיים

$$f_{\mathbf{X}}=\frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}}{\partial^n\mathbf{x}}$$

2. לכל $S\subseteq\mathbb{R}^n$ (בורל) מתקיים

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}\in S)=\int\limits_S f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

2.2 פילוג מותנה ואי-תלות סטטיסטית

2.2.1 פילוג מותנה

טענה 2.3 [הסתברות מותנית] יהי $\mathbf{XY}$ ו"א ותהינא $S_{\mathbf{X}}\subseteq\mathbb{R}^n,S_{\mathbf{Y}}\subseteq\mathbb{R}^m$ (בורל) כך ש-$\mathbb{P}(\mathbf{Y}\in S_{\mathbf{Y}})\neq 0$, אזי

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}\in S_{\mathbf{X}}|\mathbf{Y}\in S_{\mathbf{Y}})=\frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}\in S_{\mathbf{X}},\mathbf{Y}\in S_{\mathbf{Y}})}{\mathbb{P}(\mathbf{Y}\in S_{\mathbf{Y}})}=\frac{\int\limits_{S_{\mathbf{X}}\times S_{\mathbf{Y}}}f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}^n\mathbf{x}\mathrm{d}^m\mathbf{y}}{\int\limits_{S_{\mathbf{Y}}}f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})\mathrm{d}^m\mathbf{y}}=\frac{\int\limits_{S_{\mathbf{X}}\times S_{\mathbf{Y}}}f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}^n\mathbf{x}\mathrm{d}^m\mathbf{y}}{\int\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbf{y}\in S_{\mathbf{Y}}}f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathrm{d}^n\mathbf{x}\mathrm{d}^m\mathbf{y}}$$

הגדרה 2.4 יהי $\mathbf{XY}$ ו"א, תהא $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (בורל) ויהי $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, נגדיר (אם הגבול מתכנס)

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in S|\mathbf{Y} = \mathbf{y}) \triangleq \lim_{\Delta \to 0} \mathbb{P}(\mathbf{X} \in S|Y_1 \in (y_1, y_1 + \Delta), \ldots, Y_m \in (y_m, y_m + \Delta))$$

טענה 2.4 יהי $\mathbf{XY}$ ו"א, תהא $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (בורל) ויהי $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ כך ש-$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0$, אזי

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in S|\mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \int_S \frac{f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

2.2.2 פונקציות פילוג מותנה

הגדרה 2.5 [jCDF מותנה] יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א, אזי **פונקציית ההתפלגות המותנית המצטברת המשותפת** של $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$, $F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ מוגדרת לכל $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ כך ש-$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0$ על ידי

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \triangleq \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}|\mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

טענה 2.5 יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א, אזי לכל $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ כך ש-$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0$, מתקיים

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \frac{f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

הגדרה 2.6 [jPDF מותנה] יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א, אזי $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ היא **פונקציית צפיפות התפלגות מותנית משותפת** של $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$, אם לכל $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ כך ש-$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0$, מתקיים

$$F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

טענה 2.6 יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א, ותהא f jPDF מותנה של $\mathbf{X}|\mathbf{Y}$.

1. אם $F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}$ גזירה לפי $\mathbf{x}$ ב-$\mathbf{x}_0$ אזי
$$f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}}{\partial^n \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$$
2. אם $F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}$ לא גזירה לפי $\mathbf{x}$ ב-$\mathbf{x}_0$ אזי לכל $a \in \mathbb{R}$ גם $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0 \\ a, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \end{cases}$ היא jPDF מותנה של $\mathbf{X}|\mathbf{Y}$.

מסקנה 2.2 יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א, ותהא $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}$ jPDF מותנה של $\mathbf{X}|\mathbf{Y}$.

1. אם $F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}$ גזירה לפי $\mathbf{x}$, אזי $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}$ יחידה ומתקיים $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}} = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}}{\partial^n \mathbf{x}}$.
2. לכל $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (בורל) מתקיים
$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in S|\mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \int_S f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

טענה 2.7 [כלל בייס] יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א כך ש-$f_{\mathbf{X}}, f_{\mathbf{Y}}$ ה-PDF/PMF של $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ בהתאמה (PMF אם בדיד), אזי לכל $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, כך ש-$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0$ מתקיים

$$f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}$$

טענה 2.8 יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א, אזי לכל $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ כך ש-$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \neq 0$. אזי ה-jPDF המותנה $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$, הוא jPDF של ו"א שנסמנו $\mathbf{X}|\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, כלומר $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}=\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$.

2.2.3 אי-תלות סטטיסטית

הגדרה 2.7 [אי-תלות סטטיסטית] יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א, נאמר ש-$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ וקטורים אקראיים **בלתי-תלויים סטטיסטית** ($\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ בת"ס) אם לכל $S_{\mathbf{X}} \subseteq \mathbb{R}^n, S_{\mathbf{Y}} \subseteq \mathbb{R}^m$ (בורל) מתקיים:

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in S_{\mathbf{X}}, \mathbf{Y} \in S_{\mathbf{Y}}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in S_{\mathbf{X}})\mathbb{P}(\mathbf{Y} \in S_{\mathbf{Y}})$$

נסמן $\mathbf{X} \perp\!\!\!\perp \mathbf{Y}$.

טענה 2.9 יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א, אזי הבאים שקולים:

1. $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ בת"ס.
2. $F_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ (כב"מ).
3. $f_{\mathbf{XY}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ (כב"מ).
4. $f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (כב"מ).
5. $f_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ (כב"מ).
6. $F_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ (כב"מ).
7. $F_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ (כב"מ).

הגדרה 2.8 [אי-תלות סטטיסטית במשותף] יהי $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathbf{T}}$ ו"א, נאמר ש-$X_1, \ldots, X_n$ הינם משתנים אקראיים **בלתי-תלויים סטטיסטית במשותף** (ונאמר כי $\mathbf{X}$ הינו ו"א בת"ס) אם לכל $S_{X_1}, \ldots, S_{X_n} \subseteq \mathbb{R}$ (בורל) מתקיים:

$$\mathbb{P}(X_1 \in S_{X_1}, \ldots, X_n \in S_{X_n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in S_{X_i})$$

טענה 2.10 יהי $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^{\mathbf{T}}$ ו"א, אזי הבאים שקולים:

1. $\mathbf{X}$ הינו ו"א בת"ס.
2. $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$ (כב"מ).
3. $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$ (כב"מ).

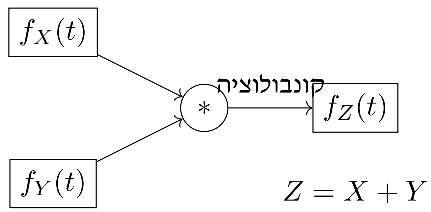
2.3 פונקציה של וקטור אקראי

2.3.1 סכום של וקטור אקראי

טענה 2.11 [התפלגות של סכום של ו"א] יהי $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^{\mathbf{T}}$ ו"א בת"ס, אזי $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא מ"א בעל PDF

$$f_Z(z) = (f_{X_1} * \cdots * f_{X_n})(z)$$

מסקנה 2.3 אם $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^{\mathbf{T}}$ ו"א iid עם פונקציה אופיינית $\phi = \phi_{X_1}$, אזי $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא מ"א בעל פ"א $\phi_Z = \phi^n$.



איור 2.2: סכום של משתנים אקראיים

2.3.2 תוחלת של וקטור אקראי ופונקציה של תוחלת של וקטור אקראי

הגדרה 2.9 [תוחלת של וקטור אקראי] יהי $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^{\mathbf{T}}$ ו"א, **התוחלת** של $\mathbf{X}$ (אם קיימת) מוגדרת להיות $\eta_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^n$ כך שלכל $i \in [n]$ מתקיים

$$(\mathbb{E}(\mathbf{X}))_i = (\eta_{\mathbf{X}})_i \triangleq \eta_{X_i} = \mathbb{E}(X_i)$$

משפט 2.1 [משפט ההחלקה / התוחלת השלמה] יהיו $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ו"א, אזי$\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{Y}|\mathbf{X}))$. בפרט במקרה שבו קיימת $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (מדידה בורל) כך ש-$\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$ מתקיים

$$\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{X})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{X})|\mathbf{X})) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

טענה 2.12 יהי $\mathbf{X}$ ו"א בגודל n עם PDF $f_{\mathbf{X}}$, ותהא $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (מדידה בורל) כך ש-$\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$. אזי, לכל $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ כך שמספר הפתרונות למשוואה $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ הוא בן מנייה, $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{N}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, כך ש-$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_i)$ קיים לכל i, מתקיים

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_i) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_i)}{\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_i)}$$

כאשר $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}}$ הוא היעקוביאן

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial g_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial g_m} \end{vmatrix}$$

2.4 מומנטים משותפים של וקטור אקראי

הגדרה 2.10 יהי $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ו"א, יהי $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, נגדיר את סדר המומנט $k = \mathbf{1}^\mathbf{T}\mathbf{k}$.
המומנט ה-$\mathbf{k}$ מוגדר להיות

$$m_\mathbf{k} \triangleq \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i^{k_i}\right)$$

המומנט המרכזי ה-$\mathbf{k}$ מוגדר להיות

$$\mu_\mathbf{k} \triangleq \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n (X_i - \eta_{X_i})^{k_i}\right)$$

הגדרה 2.11 תהא S קבוצה סדורה, אזי S היא **סטטיסטיקה מסדר** k של ו"א $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ אם

$$S \in \left\{ \{\mu_\mathbf{q}\}_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}:\ \mathbf{1}^\mathbf{T}\mathbf{q} \leq k} \cup \{m_{e_i} = \eta_{X_i}\}_{i=1}^n, \{m_\mathbf{q}\}_{\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}:\ \mathbf{1}^\mathbf{T}\mathbf{q} \leq k} \right\}$$

טענה 2.13 שתי סוגי הסטטיסטיקות שקולות.

2.4.1 סטטיסטיקה מסדר 2

הגדרה 2.12 [קוואריאנס] יהיו X, Y מ"א, נגדיר את ה**קווריאנס** ביניהם

$$\text{Cov}(X, Y) \triangleq \mathbb{E}((X - \eta_X)(Y - \eta_Y))$$

טענה 2.14 לכל X, Y מ"א מתקיים:

1. $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
2. $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$.

הגדרה 2.13 [סטטיסטיקה מסדר 2] יהי $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ו"א, נגדיר את מטריצות ה**אוטו-קוואריאנס** וה**אוטו-קורלציה** $C_\mathbf{X}, R_\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ על ידי:

$$C_\mathbf{X} \triangleq \mathbb{E}\Big((\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^\mathbf{T}\Big) = \begin{bmatrix} \text{Cov}(X_1, X_1) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \text{Cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

$$R_\mathbf{X} \triangleq \mathbb{E}\big(\mathbf{X}\mathbf{X}^\mathbf{T}\big) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}\big(X_1^2\big) & \cdots & \mathbb{E}(X_1 X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}(X_n X_1) & \cdots & \mathbb{E}\big(X_n^2\big) \end{bmatrix}$$

הגדרה 2.14 [PSD] תהא $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה סימטרית.

1. נאמר כי A **מוגדרת חיובית למחצה** (PSD) ונסמן $A \succeq 0$ אם לכל $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $v^\mathbf{T} A v \geq 0$.
2. נאמר כי A **מוגדרת חיובית** (PD) ונסמן $A \succ 0$ אם לכל $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $v^\mathbf{T} A v > 0$.

טענה 2.15 תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית.

1. A היא PSD אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה אי-שליליים אם ורק אם כל האיברים על האלכסון שלה אי-שליליים.
2. A היא PSD אם ורק אם כל הערכים העצמיים שלה חיוביים אם ורק אם כל האיברים על האלכסון שלה חיוביים אם ורק אם הפיכה.

טענה 2.16 יהי $\mathbf{X}$ ו"א, אזי:

1. $C_{\mathbf{X}}, R_{\mathbf{X}}$ הן מטריצות סימטריות מוגדרות חיובית למחצה (PSD).
2. $C_{\mathbf{X}} = R_{\mathbf{X}} - \mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbb{E}(\mathbf{X})^{\mathbf{T}}$.
3. $R_{\mathbf{X}}$ אלכסונית אמ"מ רכיבי $\mathbf{X}$ אורתוגונליים הדדית ($\forall i \neq j.\ \mathbb{E}(X_i X_j) = 0$).
4. $C_{\mathbf{X}}$ אלכסונית אמ"מ רכיבי $\mathbf{X}$ חס"ק הדדית ($\forall i \neq j.\ \mathsf{Cov}(X_i, X_j) = 0$), ובמקרה זה נאמר כי $\mathbf{X}$ הוא ו"א חס"ק.

מסקנה 2.4 יהי $\mathbf{X}$ ו"א, אזי $C_{\mathbf{X}}, R_{\mathbf{X}}$ לכסינות אורתוגונלית, כלומר עבור $A \in \{C_{\mathbf{X}}, R_{\mathbf{X}}\}$, קיימת מטריצה אלכסונית Λ ומטריצה אורתוגונלית U כך שמתקיים
$$A = U\Lambda U^{\mathbf{T}}$$

טענה 2.17 תהינא $A \in \mathbb{R}^{k\times n}, B \in \mathbb{R}^{m\times l}, C \in \mathbb{R}^{n\times m}, D \in \mathbb{R}^{k\times l}$ ותהא $X : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times m}$ מטריצה אקראית, אזי

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(AX) &= A\mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(XB) &= \mathbb{E}(X)B \\ \mathbb{E}(X+C) &= \mathbb{E}(X)+C \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}(AXB+D) = A\mathbb{E}(X)B + D$$

הגדרה 2.15 [סטטיסטיקה משותפת מסדר 2] יהיו $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n, \mathbf{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ו"א, נגדיר את מטריצות ה**קרוס-קוואריאנס** וה**קרוס-קורלציה** $C_{\mathbf{XY}}, R_{\mathbf{XY}} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ על ידי:

$$C_{\mathbf{XY}} \triangleq \mathbb{E}\Big((\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^{\mathbf{T}}\Big) = \begin{bmatrix} \mathsf{Cov}(X_1, Y_1) & \cdots & \mathsf{Cov}(X_1, Y_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{Cov}(X_n, Y_1) & \cdots & \mathsf{Cov}(X_n, Y_m) \end{bmatrix}$$
$$R_{\mathbf{XY}} \triangleq \mathbb{E}\big(\mathbf{X}\mathbf{Y}^{\mathbf{T}}\big) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X_1 Y_1) & \cdots & \mathbb{E}(X_1 Y_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{E}(X_n Y_1) & \cdots & \mathbb{E}(X_n Y_m) \end{bmatrix}$$

טענה 2.18 יהיו $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n, \mathbf{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ו"א, אזי $C_{\mathbf{XY}} = R_{\mathbf{XY}} - \mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbb{E}(\mathbf{Y})^{\mathbf{T}}$, גם כן $C_{\mathbf{X}} = C_{\mathbf{XX}}, R_{\mathbf{X}} = R_{\mathbf{XX}}$.

הגדרה 2.16 [חוסר קורלציה ואורתוגונליות] יהיו $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n, \mathbf{Y} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ ו"א:

1. נאמר כי $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ הם **חסרי קורלציה** (חס"ק) או בלתי-מתואמים אם $C_{\mathbf{XY}} = 0$.
2. נאמר כי $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ הם **אורתוגונליים** או ניצבים ונסמן $\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$ אם $R_{\mathbf{XY}} = 0$.

טענה 2.19 אם $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ הם בת"ס אזי הם גם חס"ק.

טענה 2.20 יהיו $\mathbf{X},\mathbf{Y}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ו"א, אזי $C_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}=C_{\mathbf{X}}+C_{\mathbf{XY}}+C_{\mathbf{YX}}+C_{\mathbf{Y}}$.

מסקנה 2.5 אם $\mathbf{X},\mathbf{Y}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ הם חס"ק אזי $C_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}}=C_{\mathbf{X}}+C_{\mathbf{Y}}$.

הערה 2.1 ניתן להגדיר מטריצות גם עבור $\mathbf{Z}=\mathbf{XY}$ ולקבל מטריצות בלוקים:

$$R_{\mathbf{Z}}=\begin{bmatrix}R_{\mathbf{X}} & R_{\mathbf{XY}}\\ R_{\mathbf{YX}} & R_{\mathbf{Y}}\end{bmatrix}\qquad\qquad C_{\mathbf{Z}}=\begin{bmatrix}C_{\mathbf{X}} & C_{\mathbf{XY}}\\ C_{\mathbf{YX}} & C_{\mathbf{Y}}\end{bmatrix},$$

הגדרה 2.17 [מקדמי מתאם] יהיו X,Y מ"א, r_{XY} נקרא **מקדם מתאם פירסון**, ו-ρ_{XY} נקרא **מקדם מתאם קולרציה**, כאשר:

$$\rho_{XY}\triangleq r_{X-\eta_X,Y-\eta_Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}\qquad\qquad r_{XY}\triangleq\frac{\mathbb{E}(XY)}{\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}},$$

טענה 2.21 יהיו X,Y מ"א, אזי:

1. $|r_{XY}|=1$ אמ"מ קיימת $\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש-$Y=\alpha X$.
2. $|\rho_{XY}|=1$ אמ"מ קיימת $\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש-$Y-\eta_Y=\alpha(X-\eta_X)$.
3. $X\perp Y$ אמ"מ $r_{XY}=0$.
4. X,Y הם חס"ק אמ"מ $\rho_{XY}=0$.
5. $r_{XY},\rho_{XY}\in[-1,1]$.

2.4.2 פונקציה אופיינית משותפת

הגדרה 2.18 [פונקציה אופיינית משותפת] יהי $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ו"א, אזי לכל $\omega\in\mathbb{R}^n$ **הפונקציה האופיינית המשותפת** של $\mathbf{X}$ מוגדרת להיות

$$\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega})\triangleq\mathbb{E}\left(e^{i\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}}\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}}f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\mathbf{x}$$

טענה 2.22 [תכונות של פ"א משותפת] יהי $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ו"א, אזי:

1. $\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{0})=1$.
2. $|\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega})|\le 1$.
3. לכל ו"א $\mathbf{Y}:\Omega\to\mathbb{R}^m$, $\phi_{\mathbf{XY}}(\boldsymbol{\omega},\mathbf{0})=\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega})$.
4. לכל $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-i\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}}\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\mathrm{d}^n\boldsymbol{\omega}$.
5. לכל $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n_{\ge0}$, $m_{\mathbf{k}}=\frac{1}{i^{\mathbf{1}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}}}\frac{\partial^{\mathbf{1}^{\mathbf{T}}\mathbf{k}}\phi_{\mathbf{X}}}{\prod_{i=1}^n\partial^{k_i}\omega_i}(\mathbf{0})$.
6. לכל $A\in\mathbb{R}^{m\times n},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$, מתקיים $\phi_{A\mathbf{X}+\mathbf{b}}(\boldsymbol{\omega})=e^{i\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega}}\phi_{\mathbf{X}}\left(A^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega}\right)$.
7. $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n,\mathbf{Y}:\Omega\to\mathbb{R}^m$ הם בת"ס אמ"מ לכל $\boldsymbol{\omega}_1\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{\omega}_2\in\mathbb{R}^m$, מתקיים $\phi_{\mathbf{XY}}(\boldsymbol{\omega}_1,\boldsymbol{\omega}_2)=\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega}_1)\phi_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\omega}_2)$.

2.4.3 מעבר וקטור אקראי דרך מערכת לינארית

טענה 2.23 יהי $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ו"א ותהינא $A\in\mathbb{R}^{m\times n},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$. נסמן $\mathbf{Y}=A\mathbf{X}+\mathbf{b}$, אזי:

1. $\mathbb{E}(\mathbf{Y})=A\mathbb{E}(\mathbf{X})+\mathbf{b}$.
2. $C_{\mathbf{Y}}=AC_{\mathbf{X}}A^{\mathbf{T}}$.
3. $C_{\mathbf{YX}}=AC_{\mathbf{X}}$.
4. $C_{\mathbf{XY}}=C_{\mathbf{X}}A^{\mathbf{T}}$.
5. $R_{\mathbf{Y}}=AR_{\mathbf{X}}A^{\mathbf{T}}+A\mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbf{b}^{\mathbf{T}}+\mathbf{b}\mathbb{E}(\mathbf{X})^{\mathbf{T}}A^{\mathbf{T}}+\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathbf{T}}$.
6. $R_{\mathbf{XY}}=R_{\mathbf{X}}A^{\mathbf{T}}+\mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbf{b}^{\mathbf{T}}$.
7. $R_{\mathbf{YX}}=AR_{\mathbf{X}}+\mathbf{b}\mathbb{E}(\mathbf{X})^{\mathbf{T}}$.

2.5 גאוסיות

2.5.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 2.19 [גאוסיות] ו"א $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ יקרא **גאוסי** (וא"ג) אם לכל $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים כי המ"א $\mathbf{Y}=\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}$ הינו מ"א גאוסי.

הגדרה 2.20 [התפלגות רב-נורמלית] אם $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^n$ וא"ג עם תוחלת $\eta_{\mathbf{X}}\in\mathbb{R}^n$ ואוטו-קווריאנס $C_{\mathbf{X}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ נסמן $\mathbf{X}\sim\mathcal{N}(\eta_{\mathbf{X}},C_{\mathbf{X}})$.

טענה 2.24 [תכונות של וא"ג] יהי $\mathbf{X}\sim\mathcal{N}(\eta_{\mathbf{X}},C_{\mathbf{X}})$ וא"ג ממימד n, אזי:

1. לכל $i\in[n]$ מתקיים כי X_i מא"ג.
2. לכל $A\in\mathbb{R}^{m\times n},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ גם $\mathbf{Y}=A\mathbf{X}+\mathbf{b}$ הינו וא"ג, $\mathbf{Y}\sim\mathcal{N}\left(A\eta_{\mathbf{X}}+\mathbf{b},AC_{\mathbf{X}}A^{\mathbf{T}}\right)$.
3. לכל $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega})=\exp\left(i\eta_{\mathbf{X}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{T}}C_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\omega}\right)$.
4. אם $C_{\mathbf{X}}$ הפיכה אזי לכל $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, מתקיים $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|C_{\mathbf{X}}|}}\mathbb{E}\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\eta_{\mathbf{X}})^{\mathbf{T}}C_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\eta_{\mathbf{X}})\right)$.
5. אם $\mathbf{Z}=\mathbf{XY}$ הוא וא"ג ממימד $n+m$, אזי גם $\mathbf{Y}|\mathbf{X}$ הינו וא"ג אשר מקיים:

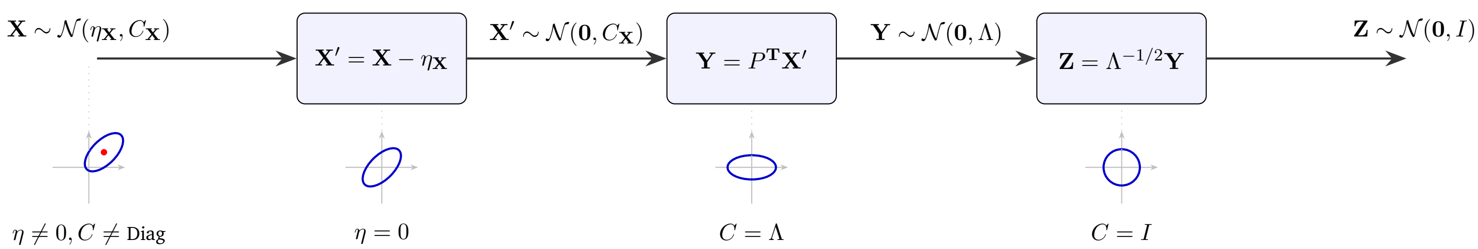
$$\begin{aligned}\mathbf{Y}|\mathbf{X}&\sim\mathcal{N}\left(\eta_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}},C_{\mathbf{Y},\mathbf{Y}|\mathbf{X}}\right)\\ \eta_{\mathbf{Y}|\mathbf{X}=\mathbf{x}}&=\eta_{\mathbf{XY}}+C_{\mathbf{YX}}C_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x}-\eta_{\mathbf{X}})\\ C_{\mathbf{Y},\mathbf{Y}|\mathbf{X}}&=C_{\mathbf{Y}}-C_{\mathbf{YX}}C_{\mathbf{X}}^{-1}C_{\mathbf{XY}}\end{aligned}$$

6. $\mathbf{X}$ הוא חס"ק אם ורק אם הוא בת"ס.

2.5.2 הלבנה וצביעה של וקטור אקראי גאוסי

אלגוריתם 2.1 [הלבנה של וא"ג] בהינתן $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\eta_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{X}})$ כך ש-$C_{\mathbf{X}}$ הפיכה:

1. נמרכז $\mathbf{X}' \leftarrow \mathbf{X} - \eta_{\mathbf{X}}$.
2. נלכסן את $C_{\mathbf{X}}$ אורתוגונלית $C_{\mathbf{X}} = P\Lambda P^{\mathbf{T}}$.
3. נחשב $\mathbf{Y} \leftarrow P^{\mathbf{T}}\mathbf{X}'$.
4. נחשב $\mathbf{Z} \leftarrow \Lambda^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Y}$.
5. נחזיר את $\mathbf{Z}$.

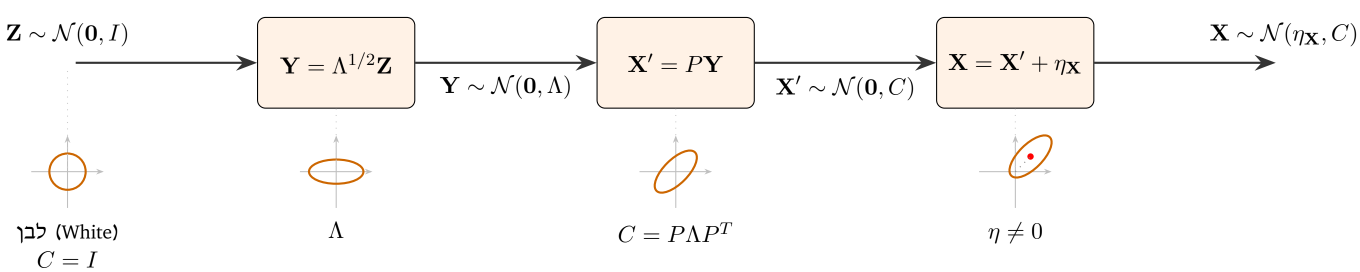


איור 2.3: הלבנה

הערה 2.2 כאשר עבור $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ מתקיים $\Lambda^\alpha = \text{diag}(\lambda_1^\alpha, \ldots, \lambda_n^\alpha)$.

אלגוריתם 2.2 [צביעה של וא"ג] בהינתן $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(0, I)$ ו-$\eta \in \mathbb{R}^n, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש-C הפיכה:

1. נלכסן את C אורתוגונלית $C = P\Lambda P^{\mathbf{T}}$.
2. נחשב $\mathbf{Y} \leftarrow \Lambda^{\frac{1}{2}}\mathbf{Z}$.
3. נמרכז $\mathbf{X}' \leftarrow P\mathbf{Y}$.
4. $\mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X}' + \eta$.
5. נחזיר את $\mathbf{X}$.



איור 2.4: צביעה

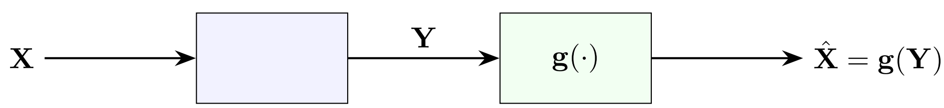
פרק 3

שערוך

תהינא $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ קבוצות.

בעיה 3.1 נניח כי אנו יודעים את $\mathbf{Y}:\Omega\to\mathcal{Y}$ אך לא את $\mathbf{X}:\Omega\to\mathcal{X}$. נרצה **לשערך** את $\mathbf{X}$ מתוך $\mathbf{Y}$, על ידי פונקציה $\mathbf{g}:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ כך שעבור **המשערך** $\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{g}(\mathbf{Y})$ יתקיים $\mathbf{X}\approx\hat{\mathbf{X}}$.

הגדרה 3.1 [שערוך] בהינתן ו"א $\mathbf{X}:\Omega\to\mathcal{X},\mathbf{Y}:\Omega\to\mathcal{Y}$, **משערך** של $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$ זהו $\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{g}(\mathbf{Y})$ עבור פונקציה $\mathbf{g}:\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ כלשהי.



איור 3.1: מערכת שערוך

3.1 קריטריוני שגיאה

בעיה 3.2 היינו רוצים לקבל $\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{X}$ אך לא נוכל תמיד להבטיח זאת.

טענה 3.1 קיים משערך $\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{g}(\mathbf{Y})$ עבורו $\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{X}$ אם ורק אם קיימת פונקציה חד-חד ערכית $\mathbf{f}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ כך ש-$\mathbf{Y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$.

הגדרה 3.2 [מדד עיוות] פונקציה $d:\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to[0,\infty)$ נקראת **מדד עיוות** אם לכל $\mathbf{x}\in\mathcal{X}$ מתקיים $d(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$.

לשתי ההגדרות הבאות נניח כי $\mathcal{X}$ הוא מרחב וקטורי (לאוו דווקא נוצר סופית).

הגדרה 3.3 [שגיאת שערוך] יהי $\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{g}(\mathbf{Y})$ משערך של $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$, אזי **שגיאת השערוך ההפרשית** הינה

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}=\mathbf{X}-\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{X}-\mathbf{g}(\mathbf{Y})$$

הגדרה 3.4 [מדד עיוות הפרשי] פונקציה $d:\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to[0,\infty)$ נקראת **מדד עיוות הפרשי** אם קיימת $d':\mathcal{X}\to[0,\infty)$ כך שלכל $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathcal{X}$ מתקיים $d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=d'(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$, במקרה זה נסמן פשוט $d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=d(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$.

להגדרה הבאה נניח כי $\mathcal{X}=\bigtimes_i\mathcal{X}_i$ וכי $\mathbf{x}=(x_i)_i$ (לא בהכרח מספר סופי או בן מנייה של i).

הגדרה 3.5 [מדד עיוות פריק] פונקציה $d:\mathcal{X}\times\mathcal{X}\to[0,\infty)$ נקראת **מדד עיוות פריק** אם קיימים $(d_i:\mathcal{X}_i\times\mathcal{X}_i\to[0,\infty))_i$ מדדי

עיוות כך שלכל $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in \mathcal{X}$ מתקיים:

$$d\left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}\right) = \sum_i d_i\left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}\right)$$

הגדרה 3.6 [מדד עיוות האמינג] נגדיר את **מדד עיוות האמינג / 0-1 loss / המטריקה הבדידה**

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \triangleq \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \\ 0, & \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \end{cases}$$

בשתי ההגדרות הבאות $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי:

הגדרה 3.7 [מדד שגיאה ריבועית] נגדיר את **מדד השגיאה הריבועית**

$$d(\mathbf{x}) \triangleq \|\mathbf{x}\|^2$$

הגדרה 3.8 [מדד שגיאה מוחלטת] נגדיר את **מדד השגיאה המוחלטת**

$$d(\mathbf{x}) \triangleq \|\mathbf{x}\|$$

הגדרה 3.9 [עיוות ממוצע] לכל $\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{g}(\mathbf{Y})$ ומדד עיוות d נגדיר **עיוות ממוצע**

$$\mathcal{D} \triangleq \mathbb{E}\left(d\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right)\right) = \mathbb{E}(d(\mathbf{X}, \mathbf{g}(\mathbf{Y})))$$

3.2 שערוך אופטימלי

הגדרה 3.10 [שערוך אופטימלי] בהינתן מדד עיוות $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0, \infty)$, $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{g}(\mathbf{Y})$ הוא **משערך אופטימלי** של $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$ אם הוא מביא את $\mathcal{D}$ למינימום

$$\mathbf{g} \in \arg\min_{\mathbf{g}:\mathcal{Y} \to \mathcal{X}} \mathcal{D} = \arg\min_{\mathbf{g}:\mathcal{Y} \to \mathcal{X}} \mathbb{E}(d(\mathbf{X}, \mathbf{g}(\mathbf{Y})))$$

טענה 3.2 לכל מדד עיוות $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0, \infty)$, עבור הפונקציה

$$\mathbf{g}_{\mathsf{opt}}^d(\mathbf{y}) = \arg\min_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}} \mathbb{E}(d(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{x}}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

מתקיים כי $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{g}_{\mathsf{opt}}^d(\mathbf{Y})$ הוא משערך אופטימלי של $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$.

3.2.1 משערך אופטימלי תחת מדד הסתברות השגיאה

נניח ו-$\mathbf{X}$ הוא בדיד, וכן $\mathcal{X}$ מרחב וקטורי.

תחת מדד האמינג מתקיים

$$\mathcal{D} = \mathbb{E}\left(d\left(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}\left\{\mathbf{X} \neq \hat{\mathbf{X}}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{X} \neq \hat{\mathbf{X}}\right)$$

ולכן במקרה זה נקרא **מדד הסתברות השגיאה**.

טענה 3.3 המשערך האופטימלי תחת מדד הסתברות השגיאה הוא $\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MAP}} = \mathbf{g}_{\mathsf{MAP}}(\mathbf{Y})$ כאשר לכל $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$

$$\mathbf{g}_{\mathsf{MAP}}(\mathbf{y}) \in \arg\max_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(\mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}} | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

הערה 3.1 המשערך נבחר לפי כלל MAP - Maximum A Posteriori מאחר שמחליטים על ערך משוער לאחר ראיית $\mathbf{Y}$.

3.3 שערוך אופטימלי במובן של שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית

אם נשתמש במדד עיוות שגיאה ריבועית $d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ במרחב וקטורי נוצר סופית $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ עם הנורמה האוקלידית, אז תוחלת העיוות תוגדר להיות

$$\mathcal{D} = \mathbb{E}\left(\left(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\right)\right)$$

וזהו מדד MSE - Mean Squared Error, נרצה לכן למצוא משערך אופטימלי במובן MSE. נבחין כי תוחלת העיוות היא למעשה הספק השגיאה $\mathcal{D} = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\mathcal{E}}\right)$.

הגדרה 3.11 [משערך אופטימלי במובן MSE] נגדיר את $\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}}$ להיות ה**משערך האופטימלי במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית** של $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$, כלומר $\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}} = \mathbf{g}(\mathbf{Y})$ כאשר

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) \triangleq \arg\min_{\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}} \mathbb{E}\Big((\mathbf{X} - \hat{\mathbf{x}})^{\mathbf{T}}(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{x}}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}\Big)$$

נסמן את **שגיאת השערוך ההפרשית במובן שגיאה ריבועית ממוצעת מינימלית** של $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{MMSE}} \triangleq \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}}$$

משפט 3.1 משערך ה-MMSE של $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$ נתון על ידי $\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}} = \mathbb{E}(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$.

משפט 3.2 [חוסר הטייה] מתקיים כי $\mathbb{E}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{MMSE}}) = \mathbf{0}$, או באופן שקול, $\mathbb{E}\left(\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}}\right) = \mathbb{E}(\mathbf{X})$.

מסקנה 3.1 [משפט פיתגורס] $R_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{MMSE}}} = C_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{MMSE}}} = C_{\mathbf{X}} - C_{\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}}} = R_{\mathbf{X}} - R_{\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}}}$.

משפט 3.3 ה-MMSE הוא

$$\mathsf{MMSE} \triangleq \mathcal{D}_{\mathsf{MMSE}} = \mathsf{trace}(R_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{MMSE}}}) = \mathsf{trace}(C_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{MMSE}}}) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{MMSE}_i$$

כאשר MMSE_i הוא ה-MMSE של X_i מתוך $\mathbf{Y}$.

מסקנה 3.2 [משפט השונות השלמה] $C_{\mathbf{X}} = \mathbb{E}\left(C_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}\right) + C_{\mathbb{E}(\mathbf{X}|\mathbf{Y})}$.

משפט 3.4 לכל משערך $\hat{\mathbf{X}}$ עם שגיאה $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ מתקיים

$$R_{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - R_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{MMSE}}} \succeq 0$$

משפט 3.5 $\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}}$ הוא יחיד ולכל משערך $\hat{\mathbf{X}}$ מתקיים $\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}} \perp \hat{\mathbf{X}}$.

3.3.1 שערוך לינארי אופטימלי במובן MSE

נניח כי $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ מרחבים וקטוריים.

הגדרה 3.12 [שערוך לינארי] עבור $\mathbf{g} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ המשערך $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{g}(\mathbf{Y})$ ייקרא **משערך לינארי** אם $\mathbf{g}$ טרנספורמציה לינארית.

בפרק זה נדון במקרה $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n, \mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ בלבד, ואז משערך לינארי הוא מהצורה $\hat{\mathbf{X}} = A\mathbf{Y} + \mathbf{b}$ כאשר $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

הגדרה 3.13 [משערך לינארי אופטימלי] נגדיר את $\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}}$ להיות **המשערך הלינארי האופטימלי** של $\mathbf{X}$ מתוך $\mathbf{Y}$, במובן MSE. כלומר קיימים $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ כך ש-$\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}} = A\mathbf{Y} + \mathbf{b}$ כאשר:

$$(A, \mathbf{b}) \in \arg \min_{(A,\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left(\left(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\right)^{\mathbf{T}}\left(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}\right)\right) = \arg \min_{(A,\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{n\times m}\times\mathbb{R}^n} \mathbb{E}\left((\mathbf{X} - A\mathbf{Y} + \mathbf{b})^{\mathbf{T}}(\mathbf{X} - A\mathbf{Y} + \mathbf{b})\right)$$

נסמן ב-$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{LMMSE}}$ את **השגיאה הלינארית האופטימלית** של $\mathbf{X}$ מתוך $\mathbf{Y}$ במובן MSE:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{LMMSE}} \triangleq \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}}$$

נניח ו- $C_{\mathbf{Y}}$ הפיכה, אזי:

משפט 3.6 $\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}} = C_{\mathbf{XY}}C_{\mathbf{Y}}^{-1}(\mathbf{Y} - \eta_{\mathbf{Y}}) + \eta_{\mathbf{X}}$.

משפט 3.7 [חוסר הטייה] מתקיים כי $\mathbb{E}(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{LMMSE}}) = \mathbf{0}$, או באופן שקול, $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \mathbb{E}\left(\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}}\right)$.

משפט 3.8 $C_{\mathbf{X}} - C_{\mathbf{XY}}C_{\mathbf{Y}}^{-1}C_{\mathbf{XY}}^{\mathbf{T}} = R_{\mathbf{X}} - R_{\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}}} = C_{\mathbf{X}} - C_{\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}}} = C_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{LMMSE}}} = R_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{LMMSE}}}$.

משפט 3.9 ה-LMMSE הוא

$$\mathsf{LMMSE} \triangleq \mathcal{D}_{\mathsf{LMMSE}} = \mathsf{trace}(R_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{LMMSE}}}) = \mathsf{trace}(C_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{LMMSE}}}) = \mathsf{trace}\left(C_{\mathbf{X}} - C_{\mathbf{XY}}C_{\mathbf{Y}}^{-1}C_{\mathbf{XY}}^{\mathbf{T}}\right)$$

כאשר LMMSE_i הוא ה-LMMSE של X_i מתוך $\mathbf{Y}$.

משפט 3.10 לכל משערך לינארי $\hat{\mathbf{X}}$ עם שגיאה $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ מתקיים

$$R_{\boldsymbol{\mathcal{E}}} - R_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{LMMSE}}} \succeq 0$$

משפט 3.11 $\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}}$ הוא יחיד ולכל משערך לינארי $\hat{\mathbf{X}}$ מתקיים $\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}} \perp \hat{\mathbf{X}}$.

משפט 3.12 אם $\mathbf{X}|\mathbf{Y} = \mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{\mathsf{LMMSE}}(\mathbf{y}), C_{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathsf{LMMSE}}})$ אזי $\hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{MMSE}} = \hat{\mathbf{X}}_{\mathsf{LMMSE}}$.

מסקנה 3.3 בהינתן סטטיסטיקה מסדר 2 $(\eta_{\mathbf{X}}, \eta_{\mathbf{Y}}, C_{\mathbf{X}}, C_{\mathbf{Y}}, C_{\mathbf{XY}})$, אזי בשערוך $\mathbf{X}$ בהינתן $\mathbf{Y}$ מתקיים

$$\mathsf{MMSE} \leq \mathsf{LMMSE}$$

כאשר שוויון מתקבל כאשר $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ גאוסיים במשותף, כלומר המקרה הגאוסי הוא המקרה הגרוע ביותר מבחינת הערכת שגיאת שערוך במובן MSE.

חלק II

תהליכים אקראיים

פרק 4

מבוא לתהליכים אקראיים

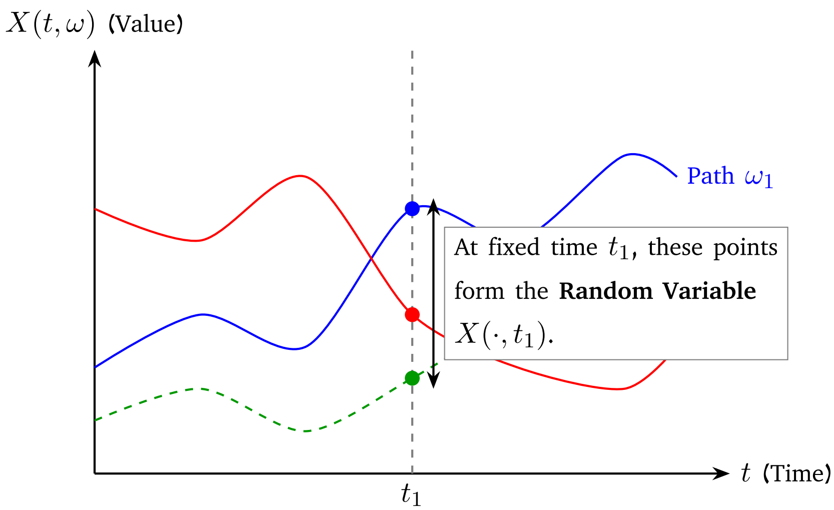
4.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 4.1 [תהליך אקראי] נניח כי $T \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$, אזי $X : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ הוא **תהליך אקראי** (ת"א) בזמן T אם לכל $t \in T$ מתקיים כי $X(\cdot, t) : \Omega \to \mathbb{R}$ הוא משתנה אקראי.

סימון 4.1 אם $T = \mathbb{Z}$ אזי $X(\cdot, n) = X[n] : \Omega \to \mathbb{R}$ הוא תהליך אקראי **בזמן בדיד**. לעיתים נסמן גם $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

סימון 4.2 אם $T = \mathbb{R}$ אזי $X(\cdot, t) = X(t) : \Omega \to \mathbb{R}$ הוא תהליך אקראי **בזמן רציף**. לעיתים נסמן גם $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$

הגדרה 4.2 [מדגם] יהי X תהליך אקראי, אזי $X(\cdot, \omega)$ נקראת **פונקצית מדגם** של התהליך.



הגדרה 4.3 [k-th order CDF] עבור ת"א X בזמן T, **פונקציית ההתפלגות המצטברת מסדר k** היא $F_X : \mathbb{R}^k \times T^k \to \mathbb{R}$ אשר מוגדרת לפי ה-jCDF:

$$F_X(a_1, \ldots, a_k; t_1, \ldots, t_k) \triangleq F_{X(t_1), \ldots, X(t_k)}(a_1, \ldots, a_k) \qquad \begin{array}{l} \forall t_1, \ldots, t_k \in T \\ \forall a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \end{array}$$

הגדרה 4.4 [פילוג של תהליך] יהי ת"א X בזמן T, אזי **הפילוג** של X הוא $\left\{F_X^{(k)}\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ כאשר $F_X^{(k)}$ ה-CDF מסדר k.

4.2 סטטיסטיקה מסדר 2 של תהליך

הגדרה 4.5 [סטטיסטיקה מסדר 2 של תהליך] יהי X ת"א בזמן T, נגדיר את $\eta_X : T \to \mathbb{R}, R_X : T \times T \to \mathbb{R}, C_X : T \times T \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$\eta_X(t) \triangleq \mathbb{E}(X(t)) \qquad \forall t \in T$$
$$R_X(t_1,t_2) \triangleq \mathbb{E}(X(t_1)X(t_2)) \qquad \forall t_1,t_2 \in T$$
$$C_X(t_1,t_2) \triangleq \mathsf{Cov}(X(t_1),X(t_2)) \qquad \forall t_1,t_2 \in T$$

טענה 4.1 [קשרים בין סטטיסטיקה מסדר 2] יהי X ת"א בזמן T, אזי

$$C_X(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) \qquad \forall t_1,t_2 \in T$$
$$R_X(t,t) = \mathbb{E}\big(X^2(t)\big), C_X(t,t) = \sigma^2_{X(t)} \triangleq \sigma^2_X(t) \qquad \forall t \in T$$

הגדרה 4.6 תהא $K : T \times T \to \mathbb{R}$ פונקציה סימטרית.

1. K היא **מוגדרת חיובית למחצה** (PSD) אם לכל פונקציה $0 \neq f : T \to \mathbb{R}$ (כאשר האינטגרל הופך לסכום בהתאם ל-T):

$$\iint_{T\times T} f(t_1)K(t_1,t_2)f(t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \geq 0$$

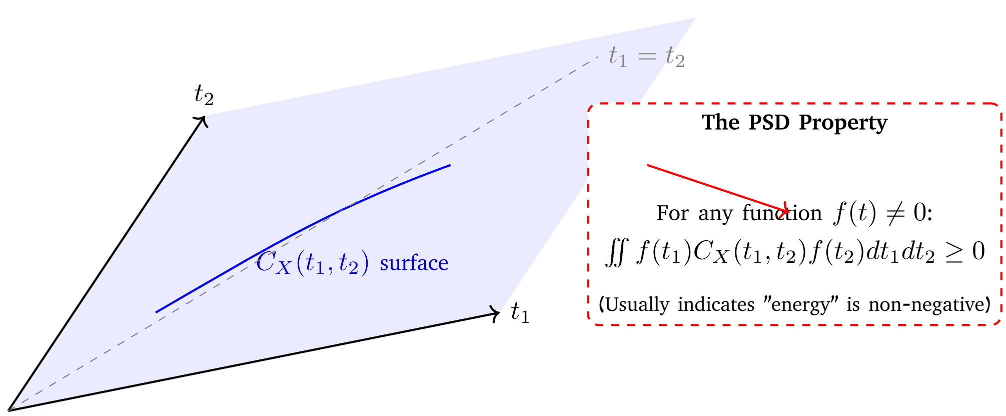
2. K היא **מוגדרת חיובית** (PD) אם לכל פונקציה $0 \neq f : T \to \mathbb{R}$ (כאשר האינטגרל הופך לסכום בהתאם ל-T):

$$\iint_{T\times T} f(t_1)K(t_1,t_2)f(t_2)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 > 0$$

טענה 4.2 יהי X ת"א, אזי R_X, C_X הן סימטריות, ובפרט PSD.

משפט 4.1 [אי-שוויון קושי-שוורץ] יהי X ת"א בזמן T, אזי לכל $t_1,t_2 \in T$ מתקיים:

$$|R_X(t_1,t_2)| \leq \sqrt{R_X(t_1,t_1)} \cdot \sqrt{R_X(t_2,t_2)}$$
$$|C_X(t_1,t_2)| \leq \sqrt{C_X(t_1,t_1)} \cdot \sqrt{C_X(t_2,t_2)}$$

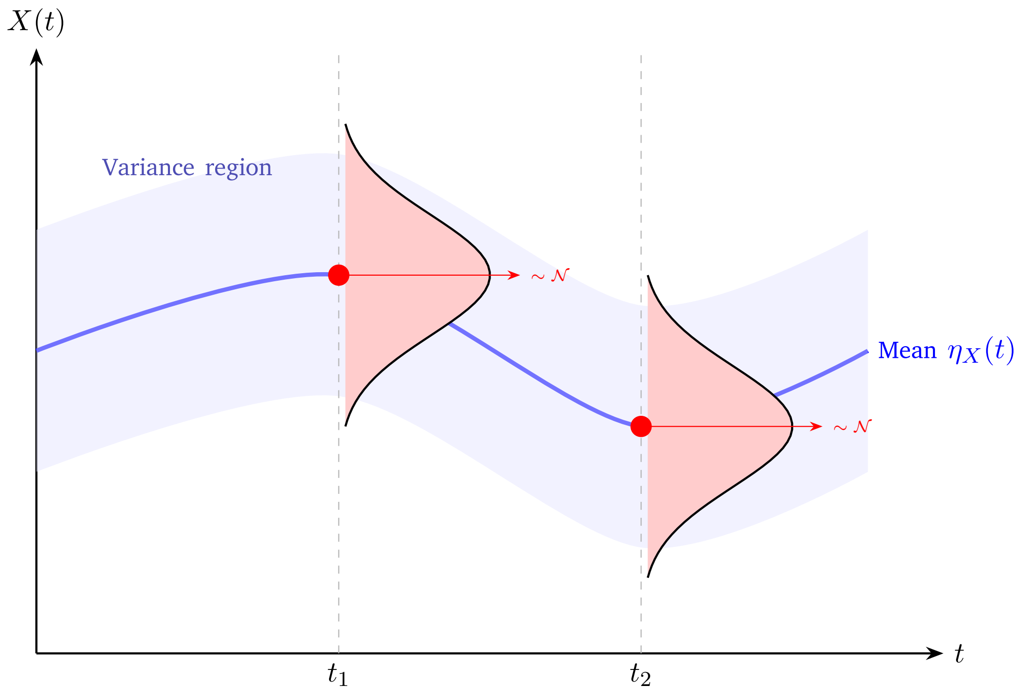


4.2.1 תהליך גאוסי

הגדרה 4.7 [תהליך גאוסי] ת"א X בזמן T הוא **גאוסי** (תא"ג), אם לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכל $t_1, \ldots, t_n \in T$, $\mathbf{X} = (X(t_1), \ldots, X(t_n))^{\mathbf{T}}$ הוא וא"ג, כלומר:

$$\forall t_1, \ldots, t_n \in T; \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i) \sim \mathcal{N}$$

טענה 4.3 יהי X ת"א גאוסי בעל פילוג לא ידוע, ונניח ונתונה לנו הסטטיסטיקה מסדר 2 שלו $\{\eta_X, C_X, R_X\}$, אזי ניתן למצוא מתוכה את הפילוג של X.



Gaussian Process
At any times $t_1, \ldots, t_n$, the vector $[X(t_1), \ldots, X(t_n)]^T$ is jointly Gaussian.

פרק 5

סטציונריות וסטטיסטיקה משותפת

5.1 סטציונריות

5.1.1 סטציונריות במובן הצר

הגדרה 5.1 [SSS] ת"א X הוא **סטציונרי במובן הצר** (SSS) אם לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכל $t_1, \dots, t_n \in T$:

$$F_X(a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n) = F_X(a_1, \dots, a_n; t_1 + \Delta, \dots, t_n + \Delta) \qquad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}; \forall \Delta \in T$$

טענה 5.1 אם X ת"א SSS אזי ה-CDF מסדר 1 שלו קבוע בזמן, כלומר לכל $t_1, t_2 \in T$, $F_{X(t_1)} = F_{X(t_2)}$, כלומר $X(t_1) \equiv X(t_2)$ שווי התפלגות.

משפט 5.1 [טרנספורמציה חסרת זיכרון] אם X ת"א SSS אז לכל מערכת חסרת זיכרון $g : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ התהליך $Y = g(X)$ הוא SSS.

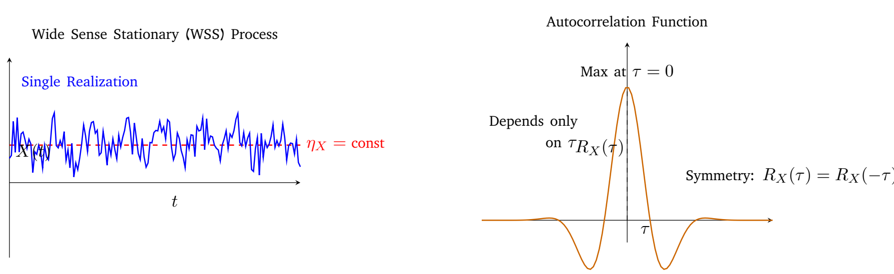
משפט 5.2 [טרנספורמציה קבועה בזמן] אם X ת"א SSS אזי לכל מערכת קבועה בזמן $g : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ התהליך $Y = g(X)$ הוא SSS.

משפט 5.3 אם X תא"ג אזי הוא WSS אם ורק אם הוא SSS.

5.1.2 סטציונריות במובן הרחב

הגדרה 5.2 [WSS] ת"א X הוא **סטציונרי במובן הרחב** (WSS) אם:

1. לכל $t, \Delta \in T$ מתקיים כי $\eta_X(t) = \eta_X(t + \Delta)$.
2. לכל $t_1, t_2, \Delta \in T$ מתקיים כי $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 + \Delta, t_2 + \Delta)$.



איור 5.1: תהליך WSS

טענה 5.2 [הגדרה שקולה ל-WSS] יהי X ת"א, אזי הבאים שקולים:

1. X הוא WSS.
2. קיימים $\eta_X \in \mathbb{R}, R_X : T \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים:
   (א) לכל $t \in T$ מתקיים כי $\eta_X(t) = \eta_X$.
   (ב) לכל $t_1, t_2 \in T$ מתקיים כי $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)$.
3. קיימים $\eta_X \in \mathbb{R}, R_X : T \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים:
   (א) לכל $t \in T$ מתקיים כי $\eta_X(t) = \eta_X$.
   (ב) לכל $t, \tau \in T$ מתקיים כי $R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau)$.

הערה 5.1 ניתן לנסח את ההגדרות גם עבור C_X במקום R_X.

משפט 5.4 אם X SSS אזי X WSS.

טענה 5.3 [תכונות של תהליכים WSS] יהי X ת"א WSS, אזי:

- **הספק ממוצע:** לכל $t \in T$ מתקיים

$$C_X(0) = \mathrm{Var}(X(t)) \qquad R_X(0) = \mathbb{E}\big(X^2(t)\big),$$

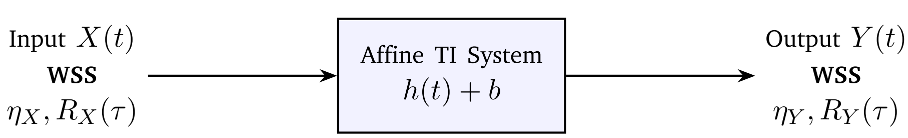
- **סימטריה:** לכל $\tau \in T$ מתקיים

$$C_X(-\tau) = C_X(\tau) \qquad R_X(-\tau) = R_X(\tau),$$

- **אי-שוויון קושי-שוורץ:** לכל $\tau \in T$ מתקיים

$$|C_X(\tau)| \le C_X(0) \qquad |R_X(\tau)| \le R_X(0),$$

משפט 5.5 [טרנספורמציה אפינית וקבועה בזמן] יהי X ת"א WSS, ותהא מערכת $g : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ אפינית וקבועה בזמן, כלומר כזו שקיימת לה $h : T \to \mathbb{R}$ ו-$b \in \mathbb{R}$ כך שלכל $f : T \to \mathbb{R}$ מתקיים $g(f)(t) = (h * f)(t) + b$. אזי $g(X)$ הוא ת"א WSS.



איור 5.2: מעבר תהליך WSS במערכת אפינית וקבועה בזמן

5.1.3 סטציונריות אסימפטוטית

הגדרה 5.3 [ASSS] ת"א X הוא SSS **אסימפטוטית** אם לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכל n דגימות $t_1, \ldots, t_n \in T$, הגבול הבא קיים:

$$\lim_{\Delta \to \infty} F_X(a_1, \ldots, a_n; t_1 + \Delta, \ldots, t_n + \Delta) \triangleq F_X^{\mathsf{SSS}}(a_1, \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n), \qquad \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

הגדרה 5.4 [AWSS] ת"א X הוא WSS **אסימפטוטית** אם לכל $t_1, t_2 \in T$ הגבולות הבאים קיימים:

1. $\lim_{t\to\infty} \eta_X(t) \triangleq \eta_X^{\mathsf{WSS}}$.
2. $\lim_{\Delta\to\infty} R_X(t_1+\Delta, t_2+\Delta) \triangleq R_X^{\mathsf{WSS}}(t_1-t_2)$.

5.2 סטטיסטיקה משותפת

5.2.1 פילוג משותף

הגדרה 5.5 [פילוג משותף] יהיו X, Y ת"א בזמן T, S, נאמר כי אנו יודעים את **הפילוג המשותף** שלהם, אם לכל $n, k \in \mathbb{N}$, ו-$t_1, \ldots, t_n \in T, s_1, \ldots, s_k \in S$ אנו יודעים את ה-jCDF

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_n),Y(s_1),\ldots,Y(s_k)}$$

טענה 5.4 יהיו X, Y ת"א בזמן T, אזי אנו יודעים את הפילוג המשותף שלהם אם ורק אם לכל $r \in \mathbb{N}$ ו-$\tau_1, \ldots, \tau_r \in T$ אנו יודעים את ה-jCDF

$$F_{X(\tau_1),\ldots,X(\tau_r),Y(\tau_1),\ldots,Y(\tau_r)}$$

הגדרה 5.6 נאמר כי שני ת"א X, Y בזמן T, S הם **בלתי-תלויים** (בת"ס) ונסמן $Y \perp\!\!\!\perp X$ אם לכל $n, k \in \mathbb{N}$, ו-$t_1, \ldots, t_n \in T, s_1, \ldots, s_k \in S$,

$$F_{X(t_1),\ldots,X(t_n),Y(s_1),\ldots,Y(s_k)}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k) = F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1,\ldots,x_n)F_{Y(s_1),\ldots,Y(s_k)}(y_1,\ldots,y_k)$$
$$\forall x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_k \in \mathbb{R}$$

הגדרה 5.7 [סטטיסטיקה משותפת מסדר 2 של תהליכים אקראיים] יהיו X, Y ת"א בזמן T, S, נגדיר את **הסטטיסטיקה המשותפת** מסדר 2 שלהם $R_{XY}, C_{XY} : T \times S \to \mathbb{R}$:

- **פונקצית הקרוס-קורלציה:** לכל $t_1 \in T, t_2 \in S$

$$R_{XY}(t_1,t_2) \triangleq \mathbb{E}(X(t_1)X(t_2))$$

- **פונקציץ הקרוס-קוואריאנס:** לכל $t_1 \in T, t_2 \in S$

$$C_{XY}(t_1,t_2) \triangleq \mathrm{Cov}(X(t_1),X(t_2))$$

יהיו X, Y ת"א בזמן T, S, אזי:

- X, Y הם אורתוגונליים ($X \perp Y$) אם $R_{XY} = 0$.
- X, Y הם **בלתי מתואמים** (חס"ק) אם $C_{XY} = 0$.

5.2.2 סטציונריות משותפת

הגדרה 5.8 [jSSS] ת"א X,Y בזמן T הם **סטציונריים במובן הצר במשותף** (jSSS) אם לכל $n,k\in\mathbb{N}$, ולכל $t_1,\dots,t_n,s_1,\dots,s_k\in T$ מתקיים:

$$F_{X(t_1),\dots,X(t_n),Y(s_1),\dots,Y(s_k)}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k)=F_{X(t_1+\Delta),\dots,X(t_n+\Delta),Y(s_1+\Delta),\dots,Y(s_k+\Delta)}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k)$$
$$\forall x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k\in\mathbb{R},\forall\Delta\in T$$

טענה 5.5 ת"א X,Y הם jSSS אם ורק אם לכל $r\in\mathbb{N}$ ו-$\tau_1,\dots,\tau_n\in T$ מתקיים:

$$F_{X(\tau_1),\dots,X(\tau_r),Y(\tau_1),\dots,Y(\tau_r)}(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r)=F_{X(\tau_1+\Delta),\dots,X(\tau_r+\Delta),Y(\tau_1+\Delta),\dots,Y(\tau_r+\Delta)}(x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_r)$$
$$\forall x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k\in\mathbb{R},\forall\Delta\in T$$

טענה 5.6 [jSSS$\Longrightarrow$SSS] אם X,Y הם jSSS אזי כל אחד מהם הוא SSS.

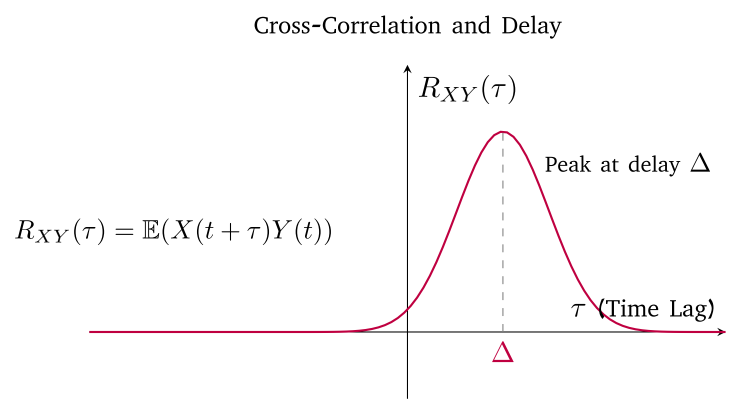
טענה 5.7 [SSS$\perp$SSS$\Longrightarrow$jSSS] אם X,Y הם בת"ס ו-SSS אזי X,Y הם jSSS.

הגדרה 5.9 [jWSS] ת"א X,Y בזמן T הם **סטציונריים במובן הרחב במשותף** (jWSS) אם כל אחד מהם WSS וגם

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1+\Delta,t_2+\Delta)\qquad\forall t_1,t_2\in T\forall\Delta\in T$$

טענה 5.8 יהיו X,Y ת"א WSS בזמן T, אזי הבאים שקולים:

1. X,Y הם jWSS.
2. קיימת $R_{XY}:T\to\mathbb{R}$ כך שלכל $t_1,t_2\in T$ מתקיים $R_{XY}(t_1,t_2)=R_{XY}(t_1-t_2)$.
3. קיימת $R_{XY}:T\to\mathbb{R}$ כך שלכל $t,\tau\in T$ מתקיים $R_{XY}(t+\tau,t)=R_{XY}(\tau)$.



איור 5.3: קרוס-קורלציה של תהליכים jWSS

משפט 5.6 אם X,Y jSSS אזי הם גם jWSS.

5.2.3 גאוסיות משותפת

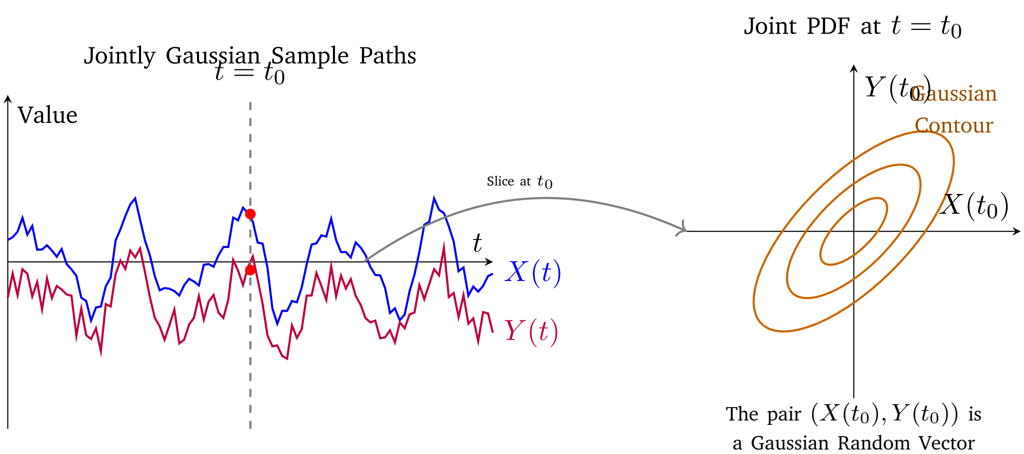
הגדרה 5.10 [תהליכים גאוסיים במשותף] ת"א X, Y בזמנים T, S הם **גאוסיים במשותף** אם לכל $n, k \in \mathbb{N}$, ולכל $t_1, \dots, t_n \in T, s_1, \dots, s_k \in S$ מתקיים כי $\mathbf{XY} = (X(t_1), \dots, X(t_n), Y(s_1), \dots, Y(s_k))^{\mathbf{T}}$ הוא וא"ג, כלומר:

$$\forall t_1, \dots, t_n \in T, s_1, \dots, s_k \in S; \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i X(t_i) + \sum_{i=1}^{k} b_i Y(s_i) \sim \mathcal{N}$$

טענה 5.9 ת"א X, Y בזמן T הם גאוסיים במשותף אם ורק אם לכל $r \in \mathbb{N}$, ולכל $\tau_1, \dots, \tau_r \in T$ מתקיים כי $\mathbf{XY} = (X(\tau_1), \dots, X(\tau_r), Y(\tau_1), \dots, Y(\tau_r))^{\mathbf{T}}$ הוא וא"ג, כלומר:

$$\forall \tau_1, \dots, \tau_r \in T; \forall a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{r} [a_i X(\tau_i) + b_i Y(\tau_i)] \sim \mathcal{N}$$

משפט 5.7 אם X, Y בזמן T הם גאוסיים במשותף אזי הם jWSS אם ורק אם jSSS.



איור 5.4: תהליכים גאוסיים במשותף

פרק 6

שרשראות מרקוב

6.1 מושג המרקוביות ותכונות בסיסיות

6.1.1 מרקוביות

הגדרה 6.1 [שלשה מרקובית] ו"א (X_1, X_2, X_3) יקרא **שלשת מרקוב** אם בהינתן X_2, X_1 ו-X_3 הם בת"ס. כלומר $X_1 \perp\!\!\!\perp X_3 | X_2$:

$$F_{X_1,X_3|X_2}(x_1, x_3|x_2) = F_{X_1|X_2}(x_1|x_2)F_{X_3|X_2}(x_3|x_2)$$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \qquad X_1 \longleftrightarrow X_2 \longleftrightarrow X_3 \qquad X_1 — X_2 — X_3 \qquad X_1 \multimap X_2 \multimap X_3 \qquad X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow X_3$$

הערה 6.1 עבור $X_1 \to X_2 \to X_3$, ייתכן ו-X_1, X_3 תלויים (ללא התנייה על X_2).

הגדרה 6.2 [מרקוביות] ת"א $\{X_t\}_{t\in T}$ בזמן T הוא **מרקובי** או **שרשרת מרקוב** בזמן T אם לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $n+1$ זמנים מסודרים $t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$, מתקיים כי:

$$F_{X_{t_{n+1}}|X_{t_n},\ldots,X_{t_1}}(x_{n+1}|x_n, \ldots, x_1) = F_{X_{t_{n+1}}|X_{t_n}}(x_{n+1}|x_n) \qquad \forall x_{n+1}, x_n, \ldots, x_1 \in \mathbb{R}$$

טענה 6.1 [מרקוביות עם ערכים בדידים] ת"א $\{X_t\}_{t\in T}$ בזמן T המקבל ערכים בדידים הוא מרקובי אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} \in T$ מסודרים $t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}$, מתקיים כי:

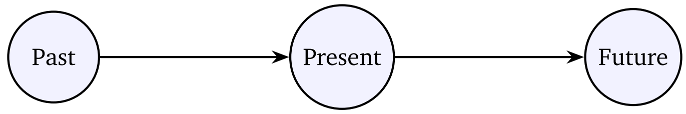
$$\mathbb{P}\big(X_{t_{n+1}} = x_{n+1}|X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_1} = x_1\big) = \mathbb{P}\big(X_{t_{n+1}} = x_{n+1}|X_{t_n} = x_n\big) \qquad \forall x_{n+1}, x_n, \ldots, x_1 \in \mathbb{R}$$

משפט 6.1 [היפוך-זמני] אם $\{X_t\}_{t\in T}$ תהליך מרקובי אזי גם ההיפוך הזמני שלו $\{X_{-t}\}_{t\in T}$ הוא תהליך מרקובי. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכל $n+1$ זמנים מסודרים $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ מתקיים:

$$F_{X_{t_0}|X_{t_1},\ldots,X_{t_n}}(x_0|x_1, \ldots, x_n) = F_{X_{t_0}|X_{t_1}}(x_0|x_1) \qquad \forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

משפט 6.2 [דו-צדדיות] אם $\{X_t\}_{t\in T}$ תהליך מרקובי אז לכל $n > 2$ ו-$0 < k < n$, ולכל $n+2$ זמנים מסודרים $t_0 < \cdots < t_{k-1} < t_k < t_{k+1} < \cdots < t_{n+1}$, לכל $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$F_{X_{t_k}|X_{t_0},\ldots,X_{t_{k-1}},X_{t_{k+1}},\ldots X_{t_{n+1}}}(x_k|x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}) = F_{X_{t_k}|X_{t_{k-1}},X_{t_{k+2}}}(x_k|x_{k-1}, x_{k+1})$$



Information flow is "blocked" by the present.
$\mathbb{P}(\text{Future}|\text{Present, Past}) = \mathbb{P}(\text{Future}|\text{Present})$

איור 6.1: שרשרת מרקוב

6.1.2 שרשרת בזמן בדיד

טענה 6.2 [הגדרה שקולה בזמן בדיד] ת"א $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ הוא שרשת מרקוב בזמן בדיד אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$F_{X_{n+1}|X_n,\dots,X_{n-\ell}}(x_{n+1}|x_n,\dots,x_{n-\ell}) = F_{X_{n+1}|X_n}(x_{n+1}|x_n) \qquad \forall x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-\ell} \in \mathbb{R}$$

טענה 6.3 [הגדרה שקולה לתהליך ימני] ת"א $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ (כלומר $X_n = 0, \forall n < 0$) הוא שרשרת מרקוב בזמן בדיד אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$F_{X_{n+1}|X_n,\dots,X_0}(x_{n+1}|x_n,\dots,x_0) = F_{X_{n+1}|X_n}(x_{n+1}|x_n) \qquad \forall x_{n+1}, x_n, \dots, x_0 \in \mathbb{R}$$

טענה 6.4 ת"א $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ המקבל ערכים בדידים הוא שרשת מרקוב בזמן בדיד אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_{n-\ell} = x_{n-\ell}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n) \qquad \forall x_{n+1}, x_n, \dots, x_{n-\ell} \in \mathbb{R}$$

טענה 6.5 ת"א ימני $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ המקבל ערכים בדידים הוא שרשת מרקוב בזמן בדיד אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n) \qquad \forall x_{n+1}, x_n, \dots, x_0 \in \mathbb{R}$$

הגדרה 6.3 [הומוגניות] שרשרת מרקוב בזמן בדיד X היא **הומוגנית** אם לכל $n \in \mathbb{Z}$:

$$F_{X_{n+1}|X_n}(x_1|x_0) = F_{X_1|X_0}(x_1|x_0) \qquad \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}$$

טענה 6.6 שרשרת מרקוב בזמן בדיד X המקבלת ערכים בדידים היא הומוגנית אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_1|X_n = x_0) = \mathbb{P}(X_1 = x_1|X_0 = x_0) \qquad \forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}$$

הגדרה 6.4 עבור ת"א $\{X_t\}_{t\in T}$, **האלפבית** שלו הוא $\mathcal{X} = \bigcup_{t\in T} \mathsf{Supp}(X_t)$ כאשר $\mathsf{Supp}(X)$ זהו התומך של המ"א X אשר מכיל את כל הערכים ש-X יכול לקבל.

טענה 6.7 אם X היא שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן בדיד אזי האלפבית $\mathcal{X} = \mathsf{Supp}(X_n)$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.

משפט 6.3 [כלל השרשת] תהא X שרשרת מרקוב בזמן בדיד המקבלת ערכים בדידים, אזי לכל $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i | X_{i-1} = x_{i-1})$$

ואם בנוסף, X היא הומוגנית

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 = x_i | X_0 = x_{i-1})$$

הערה 6.2 מכאן והלאה נניח כי כל השרשראות הן הומוגניות עם אלפבית בן-מנייה $\mathcal{X}$ (בפרט מקבלת ערכים בדידים, אולי מספר סופי). נניח בה"כ $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, s\}$ כאשר $s \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (אולי $\mathcal{X} = \mathbb{N}$).

6.2 מצבים ומעברים

הגדרה 6.5 [הסתברות המעברים] $p_{ij} \triangleq \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i)$.

הגדרה 6.6 [מטריצת המעברים] $P \triangleq \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{s,1} & \cdots & p_{s,s} \end{bmatrix}$.

הגדרה 6.7 [מטריצה סטוכסטית] מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ נקראת **סטוכסטית** אם:

- לכל $i, j \in [n] \times [m]$, $a_{ij} \geq 0$.
- לכל $i \in [n]$, סכום השורה ה-i הוא 1, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = 1$.

טענה 6.8 מטריצת המעברים P היא סטוכסטית.

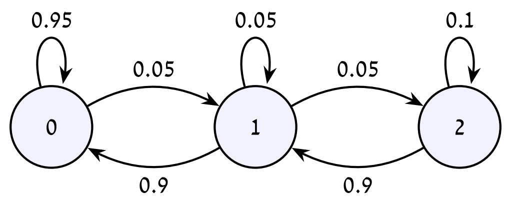
דוגמה 6.1 [קטיף דובדנים] ליבי קוטפת דובדנים במרום גולן. היא מתחילה בלי דובדנים בידה, ויכולה להחזיק לכל היותר דובדבן אחד בכל יד. בכל 10 שניות:

- היא מוצאת דובדבן חדש בהסתברות 0.1.
- אם היא לא מוצאת דובדבן חדש אבל יש לה לפחות דובדבן אחד, היא אוכלת אותו.
- אם היא מוצאת דובדבן ויש לה לפחות יד אחד פנויה, היא אוכלת את הדובדבן החדש בהסתברות 0.5,אחרת שומרת אותו.
- אם היא מוצאת דובדבן חדש ושני ידיה מלאות, היא אוכלת את הדובדבן החדש.

6.2.1 ייצוג גרפי

הגדרה 6.8 [גרף מעברים] גרף המעברים של הוא גרף מכוון ממשוקל $(G = (V, E), w)$ כאשר:

- הצמתים הם האלפבית $V = \mathcal{X}$.
- קיימת קשת בין מצב i למצב j אם ורק אם $p_{ij} > 0$, $E = \{(i, j) : p_{ij} > 0\}$.
- לכל קשת יש משקל שהוא ההסתברות למעבר, $w(i, j) = p_{ij}$.

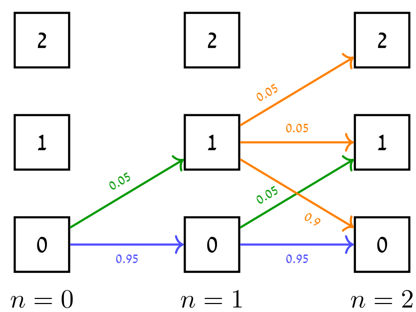


איור 6.2: גרף מעברים לקטיף דובדבנים

הגדרה 6.9 [גרף טרליס] גרף טרליס הוא עץ (אינסופי) ממשוקל $(T=(V,E),w)$ כאשר:

- הצמתים הם האלפבית בתוספת זמן $V\subseteq\mathcal{X}\times\mathbb{Z}_{\geq 0}$
- קיימת קשת בין מצב i למצב j בזמן n, אם ורק אם $p_{ij}>0$ וכן הם נמצאים בשכבות המתאימות בגרף, $E=\left\{(i,j)_n:\ i\in V_n,p_{ij}>0\right\}$.
- כל שכבה V_n מתאימה לזמן n, והמצבים בכל שכבה מתאימים למצבים הנגישים בזמן n, כאשר מתחילים בזמן 0 עם המצבים בהסתברות גדולה מ-0 (או במצב אחד אם נתון).
- המשקל של $(i,j)_n$ הוא ההסתברות לעבור ממצב i למצב j בזמן n, $w(i,j)=\mathbb{P}(X_{n+1}=j|X_n=i)=p_{ij}$.

הערה 6.3 ניתן להגדיר גרפים גם לשרשרת לא הומוגנית עם אלפבית סופי.



איור 6.3: גרף טרליס לקטיף דובדבנים

6.2.2 פילוג שולי ומשוואת צ'אפמן קולמגורוב

הגדרה 6.10 [פילוג שולי] ההתפלגות השולית של X_n היא $\pi^{(n)}\triangleq\begin{bmatrix}\mathbb{P}(X_n=1) & \cdots & \mathbb{P}(X_n=s)\end{bmatrix}\in[0,1]^{1\times s}$.

טענה 6.9 $\pi^{(n+1)}=\pi^{(n)}P$.

מסקנה 6.1 $\pi^{(n+k)}=\pi^{(n)}P^k$.

משפט 6.4 [משוואת צ'אפמן-קולמגורוב] מטריצת המעברים ל-k צעדים הינה

$$P^{(k)}\triangleq\begin{bmatrix}p_{1,1}^{(k)} & \cdots & p_{1,s}^{(k)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{s,1}^{(k)} & \cdots & p_{s,s}^{(k)}\end{bmatrix}=P^k,$$

כאשר $p_{ij}^{(k)}\triangleq\mathbb{P}(X_k=j|X_0=j)$ ההסתברות להגיע ממצב i למצב j לאחר k צעדים.

6.3 שכחת העבר, ארגודיות ומחלקות מצבים

הערה 6.4 בחלק זה בעצם נתייחס לשרשרת בתור מטריצת המעברים, ולא כתהליך, שכן לתהליך $\pi^{(0)}$ מוגדר ביחידות, ואנו רוצים לדון על שינויים שלו.

6.3.1 וקטור פילוג סטציונרי

הגדרה 6.11 π^{ss} הוא **וקטור פילוג סטציונרי** (שולי) של שרשרת מרקוב, אם, בהינתן תנאי התחלה $\pi^{(0)} = \pi^{\text{ss}}$, הפילוגים לא משתנים: $\pi^{(1)} = \cdots = \pi^{(n)} = \cdots = \pi^{\text{ss}}$.

טענה 6.10 π^{ss} הוא וקטור פילוג סטציונרי של שרשרת מרקוב עם מטריצת מעברים P אם ורק אם הוא וקטור עצמי שמאלי של P עם ערך עצמי 1, כלומר $\pi^{\text{ss}} = \pi^{\text{ss}} P$.

טענה 6.11 אם $\lim_{n\to\infty} \pi^{(n)} = \pi$ קיים עבור תנאי התחלה $\pi^{(0)}$, אזי π הוא וקטור פילוג סטציונרי.

הערה 6.5 במקרה זה, השרשרת הנתונה היא סטציונרית אסימפטוטית במובן הצר (ASSS).

6.3.2 שכחת העבר

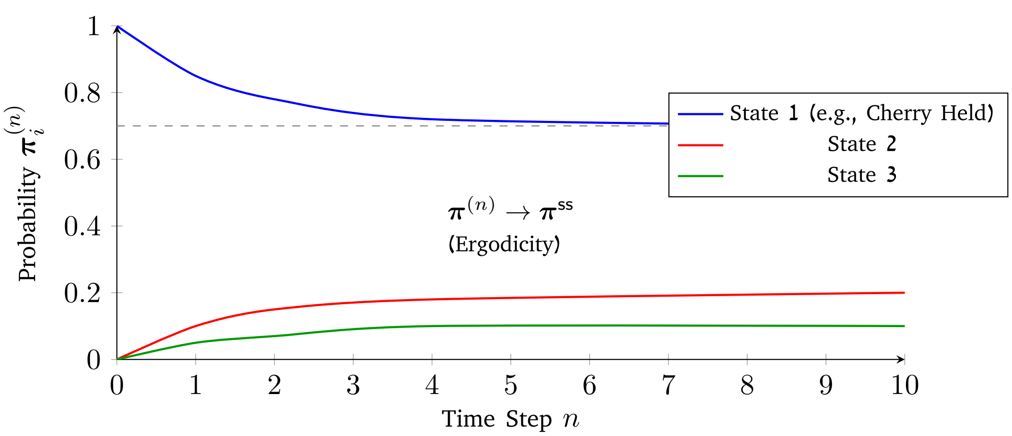
הערה 6.6 ייתכן יותר מוקטור פילוג סטציונרי יחיד עבור מטריצת מעברים נתונה P.

הגדרה 6.12 [ארגודיות של שרשרת] נאמר כי שרשרת מרקוב היא **ארגודית** אם היא שוכחת את העבר, כלומר $\pi^{(n)}$ מתכנס לאותו π^{ss} לכל התפלגות שולית התחלתית $\pi^{(0)}$.

טענה 6.12 לשרשרת מרקוב ארגודית יש פילוג סטציונרי יחיד.

משפט 6.5 עבור שרשרת מרקוב ארגודית, הגבול $\lim_{n\to\infty} P^n \triangleq P^\infty$ קיים. יתרה מכך, כל השורות של P^∞ שוות לוקטור הפילוג הסטציונרי (היחיד) של השרשרת:

$$P^\infty = \begin{bmatrix} \pi^{\text{ss}} \\ \vdots \\ \pi^{\text{ss}} \end{bmatrix}$$



איור 6.4: התכנסות לפילוג סטציונרי של שרשרת מרקוב ארגודית

6.3.3 מחלקות מצבים

הגדרה 6.13 [נגישות] מצב j **נגיש** ממצב i אם הוא יכול להתקבל מתוך i לאחר מספר סופי של צעדים, כלומר קיים n עבורו $p_{ij}^{(n)} > 0$. נסמן $i \to j$.

הגדרה 6.14 [קשירות] מצבים i ו-j **מתקשרים** אם הם נגישים אחד מהשני. נסמן $i \leftrightarrow j$.

טענה 6.13 תקשורת היא יחס שקילות. בפרט, מקיים:

- רפלקסיביות: כל מצב מתקשר עם עצמו $i \leftrightarrow i$.
- סימטריות: $j \leftrightarrow i$ אם ורק אם $i \leftrightarrow j$.
- טרנזיטיביות: אם $j \leftrightarrow i$ וגם $k \leftrightarrow j$ אזי $k \leftrightarrow i$.

הגדרה 6.15 [מצב נשנה] מצב i הוא **נשנה** אם הוא נגיש מכל מצב הנגיש ממנו, כלומר $i \to j \implies j \to i$, או באופן שקול $i \to j \implies i \leftrightarrow j$.

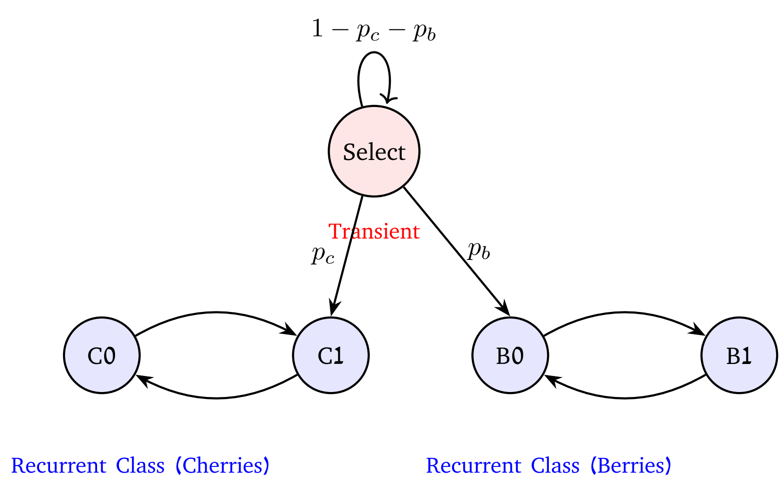
הגדרה 6.16 [מצב חולף] מצב i הוא **חולף** אם הוא לא נשנה, כלומר קיים מצב j כך ש-$i \to j$ אך $j \not\to i$.

הגדרה 6.17 [מחלקה] קבוצה $C \subseteq \mathcal{X}$ של מצבים היא **מחלקה** אם כל המצבים בה מתקשרים אחד עם השני. באופן שקול, C היא מחלקה אם היא מחלקת שקילות של יחס התקשורת, $C \in \mathcal{X}/\leftrightarrow$.

הגדרה 6.18 [מחלקה נשנית] מחלקה היא **נשנית** אם כל המצבים בה נשנים.

הגדרה 6.19 [מחלקה חולפת] מחלקה היא **חולפת** אם כל המצבים בה חולפים.

טענה 6.14 המצבים במחלקה הם כולם חולפים או כולם נשנים, כלומר כל מחלקה היא נשנית או חולפת.



איור 6.5: סיווג מצבים ומחלקות בקטיף דובדבנים ואוכמניות, כאשר ניתן לקטוף רק סוג אחד

6.3.4 זמני חזרה ומחזור

הגדרה 6.20 [מחלק] $0 \neq d \in \mathbb{Z}$ **מחלק** את $n \in \mathbb{Z}$, מסומן ב-$d|n$, אם $n = k \cdot d$ עבור $k \in \mathbb{Z}$.

הגדרה 6.21 [מחלק משותף גדול ביותר (GCD)] עבור $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ נגדיר את **המחלק המשותף הגדול ביותר** שלהם להיות

$$\gcd(a, b) = \max\{ d \in \mathbb{Z} : \; d|a \wedge d|b \}$$

הערה 6.7 $0|d$ לכל $d \in \mathbb{Z}$.

הגדרה 6.22 [זמני חזרה] זמני החזרה של מצב i היא קבוצת כל המספרים n, ככה שניתן לחזור ל-i מ-i ב-n צעדים, נסמן:

$$\left\{n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \dots\right\} \triangleq \left\{n \in \mathbb{N}:\, p_{ii}^{(n)} > 0\right\}$$

הגדרה 6.23 [מחזור] המחזור של מצב i הוא ה-GCD של זמני החזרה שלו

$$d(i) \triangleq \gcd\left(n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \dots\right)$$

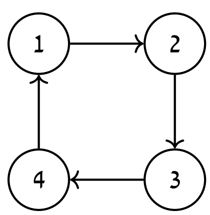
מצב עם מחזור 1 הוא **לא-מחזורי**.

הערה 6.8 נתייחס רק למחזוריות של מצבים נשנים.

טענה 6.15 אם i, j באותה מחלקה נשנית אזי $d(i) = d(j)$.

משפט 6.6 נניח ושרשרת מרקוב מורכבת ממחלקה (נשנית) יחידה שהיא d-מחזורית. אזי $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$ לא קיים, אך $\lim\limits_{n\to\infty} P^{dn}$ כן קיים.

הערה 6.9 הגבולות $\lim\limits_{n\to\infty} P^{dn}, \lim\limits_{n\to\infty} P^{dn+1}, \dots \lim\limits_{n\to\infty} P^{dn+d-1}$ שונים באופן כללי.



$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{P_1} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{P_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q_1} & \mathbf{Q_2} & \mathbf{Q_T} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{P_i}$: Recurrent Classes
$\mathbf{Q}$: From Transient to Recurrent classes

Return Times: $\{4, 8, 12, \dots\}$
Period $d = \mathrm{GCD}(4, 8) = 4$

איור 6.6: מחזוריות

6.3.5 משפט פרון-פרוביניוס

משפט 6.7 [פרון-פרוביניוס] תהא P מטריצה סטוכסטית, כאשר נתייחס לשרשרת X ש-P מטריצת המעברים שלה מתקיים:

1. קיים וקטור הסתברות $\boldsymbol{\pi}$ שהוא פתרון למשוואה

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P \tag{6.1}$$

כלומר, 1 הוא ערך עצמי של המטריצה P וקיים וקטור הסתברות $\boldsymbol{\pi}$, כלומר $\sum_i \pi_i = 1$, כך ש-$\boldsymbol{\pi}$ וקטור עצמי שמאלי שמתאים לערך עצמי 1.

2. אם לשרשרת יש מחלקה נשנית יחידה, אזי קיים פתרון יחיד ל-6.1.

3. אם השרשרת מורכבת מ-r מחלקות נשנות, אזי יש r וקטורי הסתברות $\boldsymbol{\pi}_1^{\mathsf{ss}}, \dots, \boldsymbol{\pi}_r^{\mathsf{ss}}$ בלתי-תלויים לינארית שפותרים את 6.1.
אם נסדר את המצבים בכל מחלקה בצורה עוקבת (ולאחר מכן את המחלקות החולפות), ככה שכל מחלקה נשנית בגודל k_i, ויש

ℓ מצבים חולפים, אזי קיימים $\mathbf{v}_1 \in [0,1]^{1\times k_1}, \dots, \mathbf{v}_r \in [0,1]^{1\times k_r}, Q \in [0,1]^{\ell\times s}$ כך שמתקיים:

$$P = \begin{bmatrix} \Pi_1 & \\ \vdots & \\ \Pi_i & 0_{(s-\ell)\times\ell} \\ \vdots & \\ \Pi_r & \\ & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{\pi}_1^{\mathsf{ss}})^{k_1} & \\ \vdots & \\ (\boldsymbol{\pi}_i^{\mathsf{ss}})^{k_i} & 0_{(s-\ell)\times\ell} \\ \vdots & \\ (\boldsymbol{\pi}_r^{\mathsf{ss}})^{k_r} & \\ & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^{k_1} & & & 0_{k_1\times(s-k_1)} & \\ & \ddots & & & \\ 0_{k_i\times\left(\sum_{j=1}^{i-1}k_j\right)} & & \mathbf{v}_i^{k_i} & 0_{k_i\times\left(s-\sum_{j=1}^{i-1}k_j\right)} & 0_{(s-\ell)\times\ell} \\ & & & \ddots & \\ 0_{k_r\times(s-\ell)} & & & \mathbf{v}_r^{k_r} & \\ & & Q & & \end{bmatrix}$$

בנוסף, לכל צירוף קמור ($\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$), מתקיים כי $\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{ss}} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \boldsymbol{\pi}_i^{\mathsf{ss}}$ הוא וקטור הסתברות שפותר את 6.1.

4. השרשרת היא ארגודית אם ורק אם היא מכילה מחלקה יחידה ולא מחזורית. במקרה זה, השרשרת היא ASSS ומתכנסת לוקטור הפילוג הסטציונרי (היחיד) $\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{ss}}$ לכל תנאי התחלה $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$.
   - מטריצת המעברים P היא למידה מתוך מסלול יחיד.
5. השרשת תיקרא ארגודית עם תופעת מעבר אם יש מחלקה נשנית יחידה ולא מחזורית (יש מחלקות חולפות). במקרה זה, השרשרת היא ASSS ומתכנסת לוקטור הפילוג הסטציונרי (היחיד) $\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{ss}}$ לכל תנאי התחלה $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$. יתרה מכך,
   - ההסתברויות של המצבים החולפים ב-$\boldsymbol{\pi}^{\mathsf{ss}}$ הם 0.
   - המחלקות הנשנות (ורק הן) במטריצה P למידות מתוך מסלול יחיד.

   * בשני המקרים, $P^\infty \triangleq \lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}^{\mathsf{ss}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi}^{\mathsf{ss}} \end{bmatrix}$.
6. אם בשרשרת יש יותר ממחלקה נשנית אחת אז השרשרת לא ארגודית. במקרה זה, אם נתחיל במצב נשנה, נשאר במחלקה של המצב. אם נתחיל במצב חולף, נגיע בסוף למחלקה נשנית.
7. אם השרשרת מורכבת ממחלקה אחת d-מחזורית, אזי היא לא ארגודית וגם $\lim_{n\to\infty} P^n$ לא קיים, אך הגבולות $\lim_{n\to\infty} P^{dn+i}$ כן קיימים לכל $i \in \{0\} \cup [d-1]$.

פרק 7

תהליך אוטו-רגרסיבי והתפלגויות סינגולריות

7.1 תהליך אוטו-רגרסיבי

הגדרה 7.1 ת"א $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ הוא **אוטו-רגרסיבי** (AR) אם קיים ת"א $\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ i.i.d רציף בהחלט (קיים לו PDF) ופונקציה $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, ככה ש-$\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \perp\!\!\!\perp X_0$ ומתקיים

$$X_n = g(X_{n-1}, W_n)$$

טענה 7.1 אם X הוא AR אזי הוא גם מרקובי.

7.1.1 תהליך אוטו-רגרסיבי לינארי

מכאן והלאה נדון בתהליך לינארי בלבד.

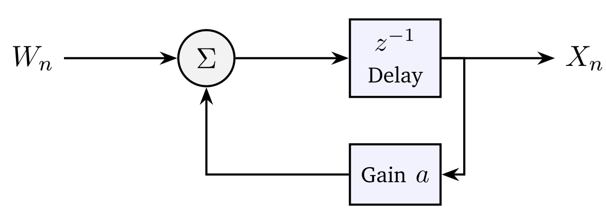
הגדרה 7.2 תהליך AR X הוא **לינארי** אם $X_n = aX_{n-1} + W_n$.

טענה 7.2 עבור תהליך AR לינארי $f_{X_n|X_{n-1}}(x_n|x_{n-1}) = f_W(x_n - ax_{n-1})$.

מסקנה 7.1 מכלל השרשרת לתהליכים מרקוביים

$$f_{X_0,\ldots,X_n}(x_0,\ldots,x_n) = f_{X_0}(x_0)\prod_{i=1}^{n} f_W(x_i - ax_{i-1})$$

טענה 7.3 מתקיים $X_n = a^nX_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^kW_{n-k}$.



איור 7.1: תהליך אוטורגרסיבי

מסקנה 7.2 התהליך X הוא ASSS אם ורק אם $|a|<1$, ובמקרה זה:

$$\eta_X[n] = a^n\left(\eta_X[0] - \frac{\eta_W}{1-a}\right) + \frac{\eta_W}{1-a}$$
$$C_X[n,k] = a^{n+k}\left(C_X[0] - \frac{C_W}{1-a^2}\right) + a^{|n-k|}\frac{C_W}{1-a^2}$$

7.2 התפלגויות סינגולריות

7.2.1 סוגי רציפות של משתנים אקראיים

הגדרה 7.3 [רציפות בהחלט] מ"א X הוא **רציף בהחלט** אם ה-CDF שלו F_X רציפה וקיימת לו PDF f_X כך ש-$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\mathrm{d}x$. במקרה זה נאמר כי F_X **רציפה בהחלט**.

הגדרה 7.4 [רציפות סינגולרית] מ"א X הוא **סינגולרי** אם ה-CDF שלו F_X רציפה וגם הנגזרת שלה מתאפסת כמעט בכל מקום (מכך נובע שלא ניתן להגדיר PDF).

7.2.2 בחזרה לתהליך AR לינארי

למה 7.1 לכל $n\in\mathbb{N}$:

$$\phi_{X_n}(\omega) = \prod_{k=0}^{n-1}\phi_W\left(a^k\omega\right)$$

טענה 7.4 אם $|a|<1$, אזי הפילוג הסטציונרי $X^{\mathsf{SSS}} \triangleq \lim_{n\to\infty} X_n$ קיים ומתקיים

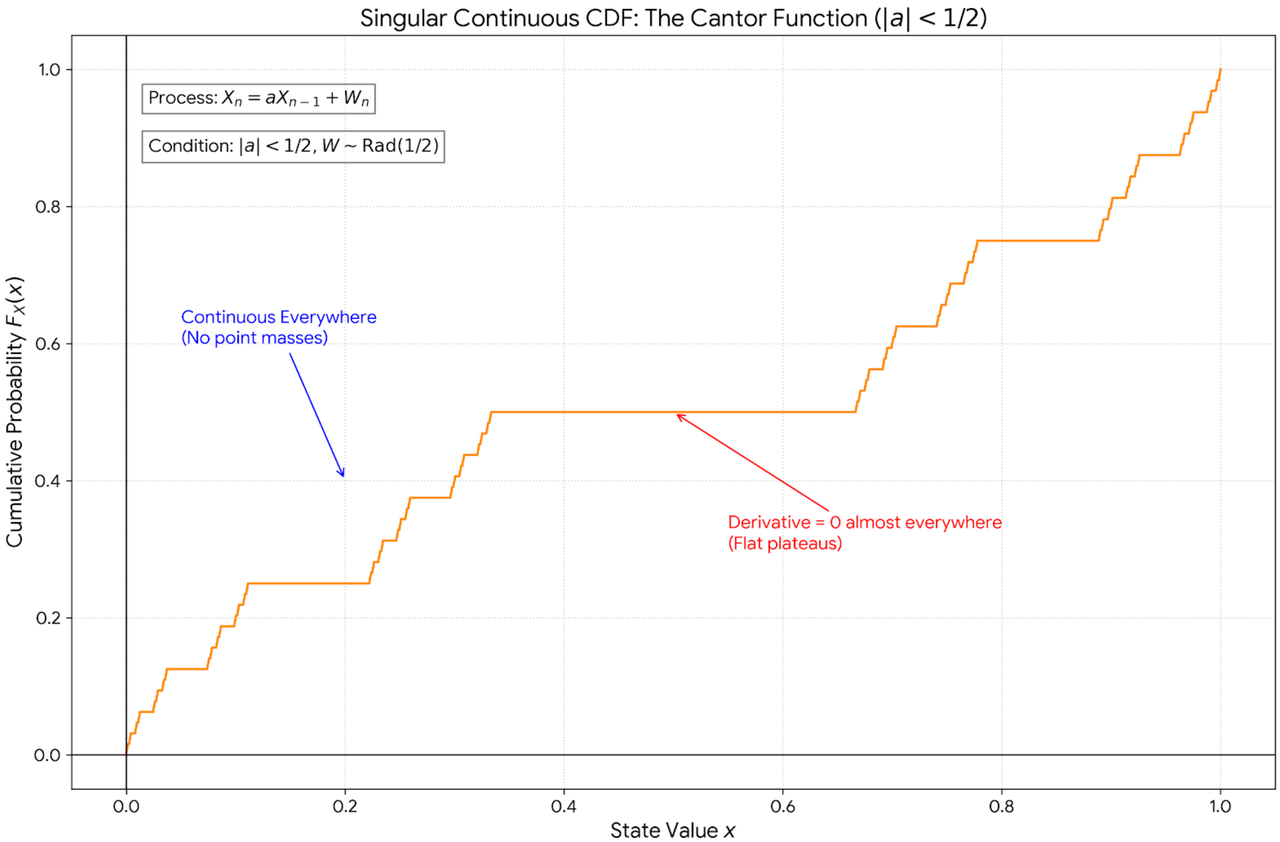
$$\phi_X^{\mathsf{SSS}}(\omega) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\phi_W\left(a^k\omega\right)$$

משפט 7.1 אם $|a|<1$, אזי X^{SSS} רציף בהחלט אם ורק אם יש פתרון (שיהווה PDF) למשוואה הפונקציונלית

$$f(x) = \frac{1}{|a|}f\left(\frac{x}{a}\right) * f_W(x)$$

משפט 7.2 נתבונן בתהליך AR $X_n = aX_{n-1} + W_n$, כאשר $\sim \mathscr{R}ad(p)$ $W = \begin{cases} 1, & \text{w.p. } p \\ -1, & \text{w.p. } 1-p \end{cases}$.

- אם $p=\frac{1}{2}$ אזי X^{SSS} הוא רציף בהחלט כמעט לכל $a\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.
- אם $|a|=p=\frac{1}{2}$, אזי X^{SSS} רציף בהחלט ובפרט $X^{\mathsf{SSS}}\sim\mathcal{U}(-2,2)$.
- אם $p=\frac{1}{2}$ ו-$|a|<\frac{1}{2}$ אזי X^{SSS} סינגולרי.
- אם $|a|=\frac{1}{2}$ ו-$p\neq\frac{1}{2}$ אזי X^{SSS} סינגולרי.



איור 7.2: ויזואליזציה של CDF סינגולרי

7.2.3 משפט הפירוק של לבג

משפט 7.3 [לבג] יהי X מ"א, אזי קיימים מ"א X_C רציף בהחלט, X_D בדיד, X_S סינגולרי, ו-$\alpha_C, \alpha_D, \alpha_S \in [0,1]$ כך שמתקיים:

$$X = \begin{cases} X_C, & \text{w.p. } \alpha_C \\ X_D, & \text{w.p. } \alpha_D \\ X_S, & \text{w.p. } \alpha_S \end{cases}$$

כלומר

$$F_X = \alpha_C F_{X_C} + \alpha_D F_{X_D} + \alpha_S F_{X_S}$$

כאשר

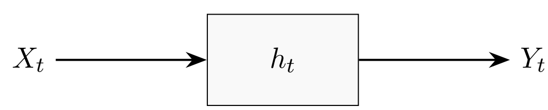
$$\alpha_C + \alpha_D + \alpha_S = 1$$

פרק 8

מעבר תהליכים במערכות LTI וספקטרום צפיפות הספק

הערה 8.1 לאורך פרק זה נרשום תוצאות בזמן רציף, אז זה למעשה תקף גם בזמן בדיד אם נחליף את התמרת פורייה ב-DTFT.

8.1 מעבר תהליכים אקראיים דרך מסנן



איור 8.1: מעבר תהליך אקראי במסנן

8.1.1 תוחלת

משפט 8.1 יהי X ת"א ו-$Y = h * X$ כאשר h הוא מסנן, אזי $\eta_Y = h * \eta_X$.

מסקנה 8.1 [WSS] אם X הוא WSS, אזי $\eta_Y = \eta_X H(0)$ כאשר $H = \mathcal{F}\{h\}$ פונקציית התמסורת של המסנן.

8.1.2 קרוס-קורלציה

משפט 8.2 יהיו $h, \widetilde{h}$ מסננים, $X, \widetilde{X}$ ת"א עם קרוס-קורלציה $R_{X,\widetilde{X}}$. נרשום $Y = h * X, \widetilde{Y} = h * \widetilde{X}$, אזי

1. $R_{Y,\widetilde{X}}(t_1, t_2) = h(t_1) * R_{X,\widetilde{X}}(t_1, t_2)$
2. $R_{X,\widetilde{Y}}(t_1, t_2) = R_{X,\widetilde{X}}(t_1, t_2) * \widetilde{h}(t_2)$
3. $R_{Y,\widetilde{Y}}(t_1, t_2) = h(t_1) * R_{X,\widetilde{X}}(t_1, t_2) * \widetilde{h}(t_2)$

מסקנה 8.2 יהי X ת"א ו-h מסנן, ונסמן $Y = h * X$. אזי,

1. $R_{Y,X}(t_1, t_2) = h(t_1) * R_X(t_1, t_2)$
2. $R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) * h(t_2)$
3. $R_Y(t_1, t_2) = h(t_1) * R_X(t_1, t_2) * h(t_2)$

8.1.3 קורלציה בזמן

הגדרה 8.1 תהינא $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, לכל $\tau \in \mathbb{R}$, אם האינטגרל הבא מתכנס, הוא נקרא **הקורלציה בזמן** של f, g:

$$(f \star g)(\tau) \triangleq f(\tau) * g(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - \alpha) g(-\alpha) \mathrm{d}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta) g(\beta - \tau) \mathrm{d}\beta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\gamma + \tau) g(\gamma) \mathrm{d}\gamma$$

8.1.4 מעבר תהליכים JWSS במסנן

משפט 8.3 אם $X, \widetilde{X}$ ת"א JWSS שעוברים מסננים $h, \widetilde{h}$ בהתאמה כך שמתקבלים $Y, \widetilde{Y}$ בהתאמה. אזי $X, \widetilde{X}, Y, \widetilde{Y}$ הם JWSS בזוגות ומתקיים:

1. $R_{Y,\widetilde{X}}(\tau) = h(\tau) * R_{X,\widetilde{X}}(\tau)$
2. $R_{X,\widetilde{Y}}(\tau) = R_{X,\widetilde{X}}(\tau) * \widetilde{h}(-\tau) = \left(R_{X,\widetilde{X}} \star \widetilde{h}\right)(\tau)$
3. $R_{Y,\widetilde{Y}}(\tau) = h(\tau) * R_{X,\widetilde{X}}(\tau) * \widetilde{h}(-\tau) = \left(h * \left(R_{X,\widetilde{X}} \star \widetilde{h}\right)\right)(\tau)$

מסקנה 8.3 אם X ת"א WSS שעובר מסנן h כך שמתקבל $Y = h * X$, אזי X, Y הם jWSS ומתקיים:

1. $R_{Y,X}(\tau) = h(\tau) * R_X(\tau)$
2. $R_{X,Y}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) = (R_X \star h)(\tau)$
3. $R_Y(\tau) = h(\tau) * R_X(\tau) * h(-\tau) = (h * (R_X \star h))(\tau)$

8.2 פונקציית צפיפות הספק ספקטרלית (ספקטרום)

8.2.1 מוטיבציה והגדרה ראשונית

הגדרה 8.2 ההספק של ת"א WSS X הוא $R_X(0) = \mathbb{E}\left[X_t^2\right]$.

נרצה למצוא $S_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ כך שיתקיים

$$R_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) \mathrm{d}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \mathrm{d}f$$

הגדרה 8.3 יהי ת"א X WSS בזמן רציף עם פונקציית אוטוקורלציה R_X. אזי, **האוטוספקטרום של $\boldsymbol{X}$** מוגדר בתור

$$S_X(\omega) \triangleq \mathcal{F}\{R_X\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} \mathrm{d}\tau$$

טענה 8.1 יהי ת"א X WSS בזמן רציף עם פונקציית אוטוקורלציה R_X ואוטוספקטרום S_X. אזי

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X\}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} \mathrm{d}\omega$$

מסקנה 8.4 אם נציב $\tau = 0$:

$$R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)\mathrm{d}\omega$$

הגדרה 8.4 תהינא שני ת"א JWSS X ו-Y בזמן רציף עם פונקציית קרוס-קורלציה R_{XY}. אזי **הקרוס-ספקטרום** מוגדר בתור

$$S_{XY}(\omega) \triangleq \mathcal{F}\{R_{XY}\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

8.2.2 תכונות הספקטרום

הערה 8.2 [תזכורת] אם $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי

1. $b(-\tau) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} B(-\omega) = B^*(\omega)$
2. אם a זוגית אזי $a(\tau) = a(-\tau) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} A(\omega) = A(-\omega) = A^*(\omega)$, ובפרט A ממשית וזוגית.

טענה 8.2 [תכונות האוטוספקטרום] יהי ת"א WSS X בזמן רציף עם פונקציית אוטוספקטרום S_X. אזי:

1. $S_X(\omega)$ היא פונקציה דטרמיניסטית של ω.
2. S_X היא ממשית.
3. S_X היא פונ' זוגית.
4. $S_X(\omega) \geq 0$ לכל ω.

טענה 8.3 [תכונות הקרוס-ספקטרום] תהינא שני ת"א JWSS X ו-Y בזמן רציף עם פונקציות קרוס-ספקטרום S_{XY}, S_{YX}. אזי:

1. $S_{XY}(\omega)$ היא פונקציה דטרמיניסטית של ω.
2. $S_{XY}(\omega)$ היא פונקציה מרוכבות ולווא דווקא ממשית.
3. $S_{XY}(-\omega) = S_{YX}(\omega) = S^*_{XY}(\omega)$.

משפט 8.4 יהיו $h, \widetilde{h}$ מסננים, $X, \widetilde{X}$ ת"א JWSS עם קרוס-קורלציה $R_{X,\widetilde{X}}$. נרשום $Y = h * X, \widetilde{Y} = h * \widetilde{X}$, אזי:

1. $R_{Y,\widetilde{X}} = h * R_{X,\widetilde{X}} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_{Y,\widetilde{X}} = HS_{X,\widetilde{X}}$
2. $R_{X,\widetilde{Y}} = R_{X,\widetilde{X}} \star \widetilde{h} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_{X,\widetilde{Y}} = S_{X,\widetilde{X}}\widetilde{H}^*$
3. $R_{Y,\widetilde{Y}} = h * R_{X,\widetilde{X}} \star \widetilde{h} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_{Y,\widetilde{Y}} = HS_{X,\widetilde{X}}\widetilde{H}^*$

מסקנה 8.5 אם X ת"א WSS שעובר מסנן h כך שבמוצא מתקבל $Y = h * X$, אזי:

1. $R_{Y,X} = h * R_X \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_{Y,X} = HS_X$
2. $R_{X,Y} = R_X \star h \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_{X,Y} = S_X H^*$
3. $R_Y = h * R_X \star h \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S_Y = HS_XH^* = |H|^2 S_X$

שוב, ניתן לקבל את אותן תוצאות גם בזמן בדיד.

8.3 רעש לבן ותכנון ספקטרלי

8.3.1 רעש לבן

הגדרה 8.5 [רעש לבן] ת"א WSS W נקרא **רעש לבן** (או תהליך לבן) אם קיים קבוע $N_0 > 0$ כך ש-$R_W = \frac{N_0}{2}\delta$.

טענה 8.4 יהי W רעש לבן, אזי $\eta_W = 0$, $S_W = \frac{N_0}{2}$.

מסקנה 8.6 $C_W(0) = R_W(0) = \frac{N_0}{2}\delta(0)$. בפרט $C_W \equiv R_W$, כלומר הדגימות של W חס"ק ואורתוגונליות.

טענה 8.5 אם $\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ תהליך iid עם תוחלת אפס אזי הוא רעש לבן.

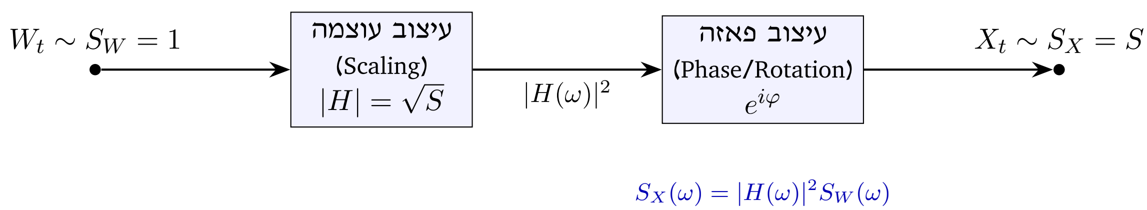
טענה 8.6 [AWGN] אם $\{W_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ תא"ג אזי הוא לבן אם ורק אם הוא iid עם תוחלת אפס.

8.3.2 תכנון ספקטרלי: צביעה והלבנה

בעיה 8.1 [צביעה] נניח ונתון לנו רעש לבן $\{W_t\}_{t\in T}$ עם אוטוספקטרום $S_W = 1$, ונניח גם כי נתונה לנו פונקציה אי-שלילית וזוגית $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נרצה למצוא $h : T \to \mathbb{R}$ כך ש-$X_t = h_t * W_t$ יתן לנו $S_X = S$.

טענה 8.7 לכל $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אי-זוגית, אם $H(\omega) = \sqrt{S(\omega)}e^{i\varphi(\omega)}$, אזי עבור $X_t = h_t * W_t$ נקבל כי $S_X = S$.

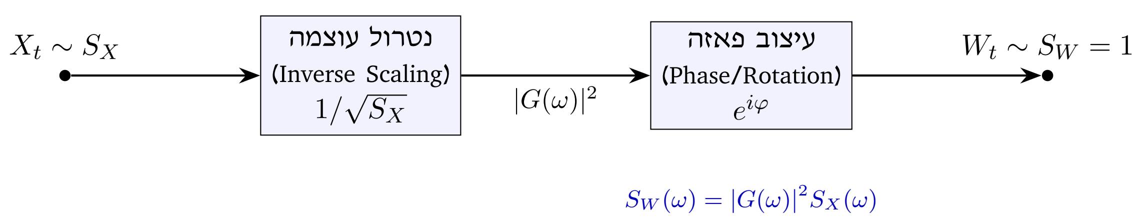
מסקנה 8.7 כל פונקציה אי-שלילית וזוגית $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא צפיפות הספק-ספקטרלית של תהליך כלשהו.



איור 8.2: צביעה של רעש לבן

בעיה 8.2 [הלבנה] בהינתן ת"א WSS $\{X_t\}_{t\in T}$ עם אוטוספקטרום $S_X > 0$. נרצה למצוא מסנן $g : T \to \mathbb{R}$ כך ש-$W_t = g_t * X_t$ הוא רעש לבן עם $S_W = 1$.

טענה 8.8 לכל $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אי-זוגית, אם $G(\omega) = \dfrac{e^{i\varphi(\omega)}}{\sqrt{S_X(\omega)}}$, אזי $W_t = g_t * X_t$ הוא רעש לבן עם $S_W = 1$.



איור 8.3: הלבנה של תהליך

8.4 משמעות הספקטרום

משפט 8.5 אם X ת"א WSS אזי לכל $\omega \in \mathbb{R}$ מתקיים $S_X(\omega) \geq 0$.

הגדרה 8.6 [BPF] $h : T \to \mathbb{R}$ היא **band-pass filter** (BPF) סביב תדר $\omega_0 \in \mathbb{R}$ וברוחב $\Delta > 0$ עם הספק יחידה אם

$$H(\omega) = H_{\omega_0,\Delta}(\omega) \triangleq \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}, & |\omega \pm \omega_0| \le \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\Big(\mathbb{1}_{\left[-\omega_0-\frac{\Delta}{2},-\omega_0+\frac{\Delta}{2}\right]}(\omega) + \mathbb{1}_{\left[\omega_0-\frac{\Delta}{2},\omega_0+\frac{\Delta}{2}\right]}(\omega)\Big)$$

משפט 8.6 [אי-שוויון קושי-שוורץ הספקטרלי] אם X, Y ת"א jWSS אזי לכל $\omega \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$|S_{XY}(\omega)| \le \sqrt{S_X(\omega)} \cdot \sqrt{S_Y(\omega)}$$

משפט 8.7 יהי X ת"א WSS. אזי, סינונים של X סביב תדרים שונים הם אורתוגונליים. כלומר, לכל $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, עבור התהליכים

$$X_{\omega_1,\Delta} = h_{\omega_1,\Delta} * X, \qquad X_{\omega_2,\Delta} = h_{\omega_2,\Delta} * X$$

אם $\Delta < |\omega_1 - \omega_2|$, אזי $X_{\omega_1,\Delta} \perp X_{\omega_2,\Delta}$.

משפט 8.8 עבור ת"א X, Y jWSS עם ספקטרום $S_{XY}(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$, נגדיר לכל ω_0, Δ את המסנן

$$G_{\omega_0,\Delta}(\omega) \triangleq \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}e^{i\varphi(\omega)}, & |\omega \pm \omega_0| \le \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}}e^{i\varphi(\omega)}\Big(\mathbb{1}_{\left[-\omega_0-\frac{\Delta}{2},-\omega_0+\frac{\Delta}{2}\right]}(\omega) + \mathbb{1}_{\left[\omega_0-\frac{\Delta}{2},\omega_0+\frac{\Delta}{2}\right]}(\omega)\Big)$$

אזי, סינונים של X, Y סביב תדרים שונים עם H, G בהתאמה הם אורתוגונליים. כלומר, לכל $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$, עבור התהליכים

$$X_{\omega_1,\Delta} = h_{\omega_1,\Delta} * X, \qquad Y_{\omega_2,\Delta} = g_{\omega_2,\Delta} * Y$$

אם $\Delta < |\omega_1 - \omega_2|$, אזי $X_{\omega_1,\Delta} \perp Y_{\omega_2,\Delta}$.

טענה 8.9 X ת"א WSS עם תוחלת η_X, ונסמן $\tilde{X} = X - \eta_X$, אזי $S_X(\omega) = S_{\tilde{X}}(\omega) + 2\pi\eta_X^2\delta(\omega)$.

פרק 9

מסנן וינר

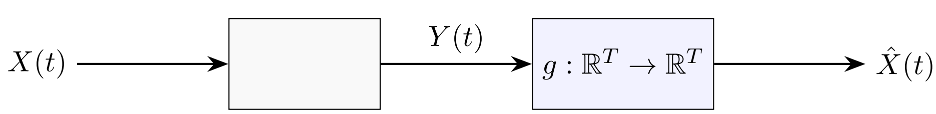
9.1 שערוך במובן MSE של תהליך

בעיה 9.1 נניח ו-X, Y הם ת"א, וידוע לנו Y. נרצה לבצע שערוך אופטימלי במובן MSE של X מתוך Y, כלומר למצוא ת"א $\hat{X}$ כך שמדד העיוות

$$d\left(X-\hat{X}\right)=\int\limits_{T}\left|X(t)-\hat{X}(t)\right|^{2}\mathrm{d}t \tag{9.1}$$

ממוזער בתוחלת

$$\min_{\hat{X}}\mathbb{E}\left(\int\limits_{T}\left|X(t)-\hat{X}(t)\right|^{2}\mathrm{d}t\right)$$



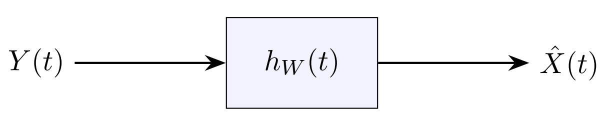
משפט 9.1 המשערך MMSE של $X(t_0)$ מתוך כל התהליך Y נתון על ידי

$$\hat{X}_{\mathsf{MMSE}}(t_0)=\mathbb{E}\big(X(t_0)|\{Y(t)\}_{t\in T}\big)$$

וה-MMSE שלו הינו

$$\mathsf{MMSE}(t_0)=\mathbb{E}\big(\mathrm{Var}(X(t_0))|\{Y(t)\}_{t\in T}\big)$$

9.2 מסנן וינר-קולמגורוב



ראינו כי עבור $\omega_2 \neq \omega_1$, לכל $|\omega_1-\omega_2| > \Delta$ מתקיים $X_{\omega_1,\Delta}\perp X_{\omega_2,\Delta}, Y_{\omega_1,\Delta}\perp Y_{\omega_2,\Delta}, X_{\omega_1,\Delta}\perp Y_{\omega_2,\Delta}$, ולכן כדי לשערך את המידע של X סביב תדר $\omega=\omega_0$, רק המידע של Y סביב תדר $\omega=\omega_0$ יהיה שימושי לנו.

תהינא X,Y ת"א jWSS עם תוחלת אפס $\eta_X=\eta_Y\equiv 0$ וספקטרום S_X,S_Y,S_{XY}.

משפט 9.2 המשערך LMMSE של $X(t_0)$ בהינתן כל התהליך Y הוא

$$\hat{X}_{\mathsf{LMMSE}}(t_0)=(h_W*Y)(t_0)=\int_T h_W(t_0-\tau)Y(\tau)\mathrm{d}\tau$$

כאשר $h_W:T\to\mathbb{R}$ **מסנן וינר-קולמוגורוב**

$$H_W(\omega)\triangleq\frac{S_{XY}(\omega)}{S_Y(\omega)}$$

9.2.1 תכונות מסנן וינר

הגדרה 9.1 נגדיר את **שגיאת השערוך** $\mathcal{E}_{\mathsf{LMMSE}}\triangleq X-\hat{X}_{\mathsf{LMMSE}}$.

משפט 9.3 [חוסר הטייה] לכל קבוע $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathcal{E}_{\mathsf{LMMSE}}\perp b$.

משפט 9.4 [אורתוגונליות] לכל מסנן $h:T\to\mathbb{R}$ וקבוע $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $\mathcal{E}_{\mathsf{LMMSE}}\perp h*Y+b$.

משפט 9.5 [LMMSE] ה-LMMSE הוא

$$\mathsf{LMMSE}=\mathbb{E}\big(\mathcal{E}^2_{\mathsf{LMMSE}}(t)\big)=R_{\mathcal{E}_{\mathsf{LMMSE}}}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{\mathcal{E}_{\mathsf{LMMSE}}}(\omega)\mathrm{d}\omega=R_X(0)-R_{\hat{X}_{\mathsf{LMMSE}}}(0)$$

כאשר

$$S_{\mathcal{E}_{\mathsf{LMMSE}}}(\omega)=S_X(\omega)-\frac{|S_{XY}(\omega)|^2}{S_Y(\omega)}=\begin{cases}S_X(\omega)-\frac{|S_{XY}(\omega)|^2}{S_Y(\omega)}, & S_Y(\omega)>0\\ S_X(\omega), & S_Y(\omega)=0\end{cases}$$

משפט 9.6 [תהליכים גאוסיים] אם X,Y גאוסיים במשותף אזי ה-MMSE הוא ה-LMMSE.

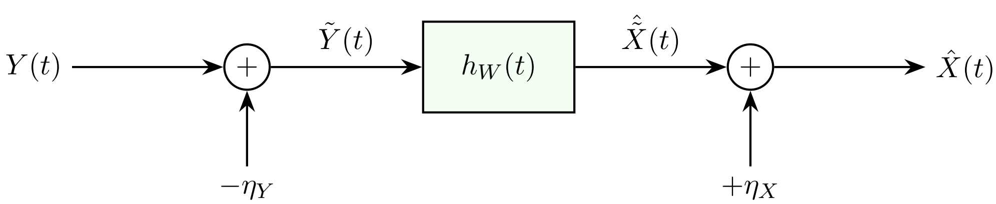
9.2.2 תהליכים עם תוחלת לא-אפס

משפט 9.7 תהינא X,Y ת"א jWSS עם תוחלות η_X,η_Y בהתאמה. אזי, המשערך LMMSE של $X(t_0)$ בהינתן כל התהליך Y הוא

$$\hat{X}_{\mathsf{LMMSE}}(t_0)=\eta_X+(h_W*(Y-\eta_Y))(t_0)=\eta_X+\int_T h_W(t_0-\tau)(Y(\tau)-\eta_Y)\mathrm{d}\tau$$

כאשר $h_W:T\to\mathbb{R}$ מסנן וינר של $\tilde{X}=X-\eta_X,\tilde{Y}=Y-\eta_Y$:

$$H_W(\omega)=\frac{S_{\tilde{X}\tilde{Y}}(\omega)}{S_{\tilde{Y}}(\omega)}$$



פרק 10

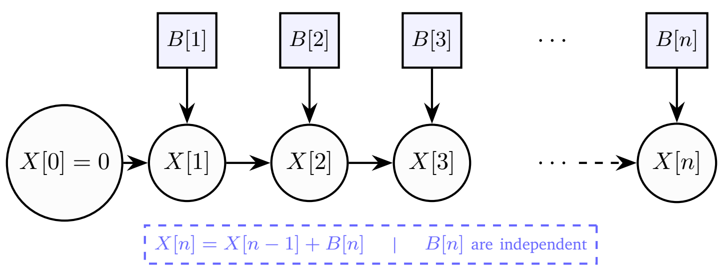
תהליכי תוספות

10.1 תהליך עם תוספות בזמן בדיד

10.1.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 10.1 [DT IIP] ת"א X ימני בזמן בדיד הוא בעל **תוספות בלתי תלויים** (תהליך עם תוספות בת"ס / IIP) אם:

1. $X[0] = 0$.
2. ל-X תוספות בת"ס: $X[n] = \sum_{i=1}^{n} B[i]$ כאשר $\{B[i]\}$ ת"א בת"ס.



איור 10.1: תהליך תוספות בת"ס

הגדרה 10.2 [תוספת] יהי X ת"א ימני בזמן בדיד, ויהיו $0 \leq n_1 < n_2$. אזי, **התוספת** של X בין הזמנים n_1 ו-n_2 מוגדרת להיות

$$X[n_1, n_2] \triangleq X[n_2] - X[n_1]$$

הערה 10.1 $X[0, n] = X[n]$.

טענה 10.1 $X[n] = \sum_{i=1}^{n-1} B[i] + B[n] = X[n-1] + B[n] = X[n-1] + X[n-1, n] = X[0, n-1] + X[n-1, n]$.

הגדרה 10.3 [תוספות זרות] יהי X ת"א ימני בזמן בדיד, נאמר כי התוספות $X[n_1, n_2]$ ו-$X[n_3, n_4]$ הן **זרות** אם $0 \leq n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4$.

הערה 10.2 $X[n_1, n_2] = X[n_2] - X[n_1] = \sum_{i=1}^{n_2} B_i - \sum_{i=1}^{n_1} B_i = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} B_i$.

טענה 10.2 יהי X תהליך IIP בזמן בדיד, אזי תוספות זרות שלו הן בלתי תלויות, כלומר, לכל $0 \leq n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4$ מתקיים

$$X[n_3, n_4] \perp\!\!\!\perp X[n_1, n_2] \iff (X[n_4] - X[n_3]) \perp\!\!\!\perp (X[n_2] - X[n_1])$$

טענה 10.3 [הגדרה שקולה] ת"א X ימני בזמן בדיד הוא IIP אם ורק אם:

1. $X[0] = 0$.
2. לכל $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k$, התוספות הזרות $\{X[n_{i-1}, n_i]\}_{i=1}^{k}$ הן בלתי תלויות.

10.1.2 תוספות סטציונריות

הגדרה 10.4 [DT stationary IIP] ת"א X ימני בזמן בדיד הוא בעל **תוספות בת"ס סטציונריות** (תהליך IIP סטציורני):

1. $X[0] = 0$.
2. ל-X יש תוספות IID: $X[n] = \sum_{i=1}^{n} B[i]$, $\{B[i]\}$ הוא IID.

טענה 10.4 [הגדרה שקולה] ת"א X ימני בזמן בדיד הוא תהליך IIP סטציונרי אם ורק אם:

1. X הוא תהליך IIP בזמן בדיד.
2. התוספות הן "סטציונריות": $X[n_1, n_2]$ מתפלג כמו $X[n_2 - n_1]$.

הערה 10.3 תהליך IIP סטציונרי הוא לא תהליך סטציונרי.

מסקנה 10.1 יהי X תהליך IIP סטציונרי בזמן בדיד. אזי:

1. לכל $k \in \mathbb{N}$, התהליך $\{X[k, k+n]\}_{n=0}^{\infty}$ הוא IIP סטציונרי בזמן בדיד.
2. לכל $n \in \mathbb{N}$, התהליך $\{X[k, k+n]\}_{k=0}^{\infty}$ הוא סטציונרי במובן הצר (SSS).

טענה 10.5 תהליך IIP סטציונרי בזמן בדיד הוא תהליך אוטו-רגרסיבי לינארי עם $a = 1$ (בפרט לא סטציונרי!).

מסקנה 10.2 התוחלת והשונות של תהליך IIP סטציונרי X לינאריות בזמן לכל $n \geq 0$:

$$\eta_X[n] = n \cdot \eta_B = n \cdot \eta_X[1]$$
$$\sigma_X^2[n] = n \cdot \sigma_B^2 = n \cdot \sigma_X^2[1]$$

ופונקציית הקווריאנס הינה

$$C_X[n, m] = \sigma_X^2[1] \cdot \min\{n, m\}$$

לכל $n, m \geq 0$.

הערה 10.4 זה ש-B הוא IID לא אומר ש-X הוא SSS, למעשה הוא לא WSS אפילו.

טענה 10.6 יהי תהליך IIP סטציונרי בזמן בדיד X, אזי קיים רעש לבן W ופונקציה לינארית $f[n] = n\eta$ כך שלכל $n \geq 0$ מתקיים

$$X[n] = \sum_{i=1}^{n} W[n] + f[n] = \sum_{i=1}^{n} W[n] + n\eta$$

10.1.3 מרקוביות

יהי X ת״א IIP סטציונרי בזמן בדיד.

משפט 10.1 X הוא מרקובי.

מסקנה 10.3 [אקסטרפולציה] משערך ה-MMSE של $X[n]$ בהינתן $\{X[i]\}_{i=1}^{k}$ עבור $0 < k \leq n$, נתון על ידי

$$\hat{X}[n] = X[k] + (n-k)\eta_X[1]$$

מסקנה 10.4 [אינטרפולציה] משערך ה-MMSE של $X[k]$ בהינתן $\{X[i]\}_{i=n}^{n+\ell}$ עבור $0 < k \leq n, \ell \geq 0$, נתון על ידי

$$\hat{X}[k] = \frac{k}{n}X[n]$$

10.2 תהליך בינומי

10.2.1 הגדרה ותכונות בסיסיות

הגדרה 10.5 [תהליך בינומי] ת״א X ימני בזמן בדיד הוא **תהליך בינומי** עם פרמטר p אם:

1. $X_0 = 0$.
2. קיים ת״א $B_n \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er(p)$, כך ש-$X_n = X_{n-1} + B_n$.

מ״א בדיד N **מתפלג בינומית** עם פרמטרים $n \in \mathbb{N}, p \in [0,1]$ אם

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0\} \cup [n]$$

נסמן $N \sim \mathscr{B}in(n,p)$.

טענה 10.7 [תכונות תהליך בינומי] יהי X תהליך בינומי עם פרמטר p, אזי:

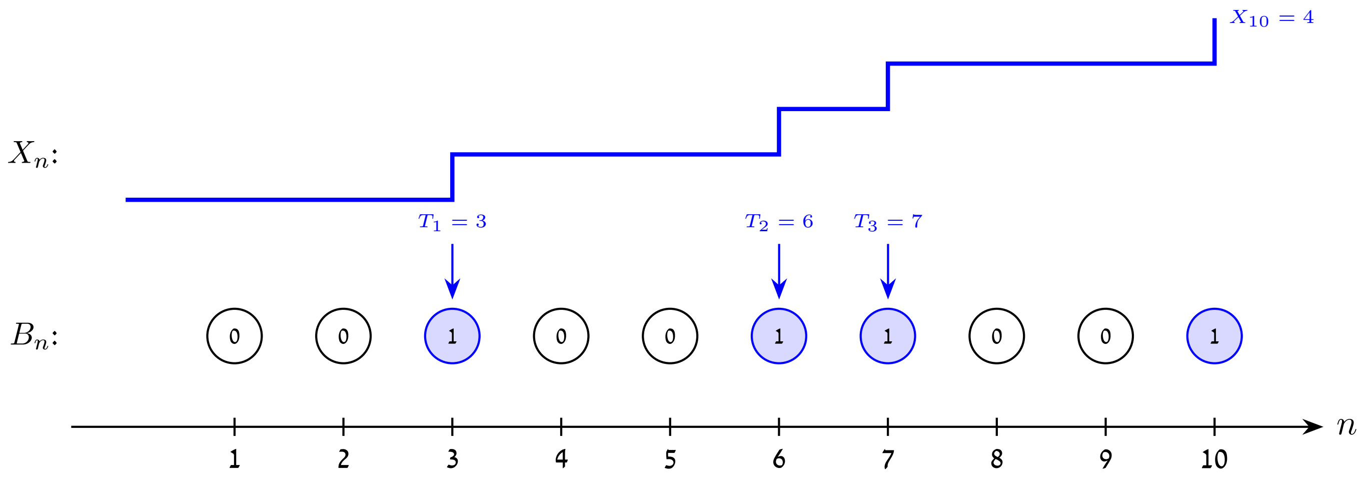
1. X הוא תהליך IIP סטציונרי בזמן בדיד.
2. מתקיים

$$\begin{aligned} \eta_X[n] &= np \\ \sigma_X^2[n] &= np(1-p) \\ C_X[n,m] &= p(1-p) \cdot \min\{n,m\} \end{aligned}$$

3. הפילוג השולי של X_n הוא

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

כלומר $X_n \sim \mathscr{B}in(n,p)$.



איור 10.2: תהליך בינומי

10.2.2 זמני הגעה

יהי X תהליך בינומי עם פרמטר p.

הגדרה 10.6 זמן ההגעה הראשון T_1 מוגדר להיות הזמן הראשון בו $X_n = 1$, כלומר:

$$T_1(\omega) \triangleq \min\{n \geq 0 : \; X_n(\omega) = 1\}$$

הגדרה 10.7 [התפלגות גיאומטרית] מ"א G **מתפלג גיאומטרית** עם פרמטר $p \in [0,1]$ אם

$$\mathbb{P}(G = n) = (1-p)^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

נסמן $G \sim \mathscr{G}eo(p)$.

טענה 10.8 $T_1 \sim \mathscr{G}eo(p)$, בפרט

$$\mathbb{P}(T_1 = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p, \qquad \mathbb{E}(T_1) = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{Var}(T_1) = \frac{1-p}{p^2}$$

הגדרה 10.8 זמן ההגעה ה-k T_k מוגדר להיות הזמן הראשון בו $X_n = k$, כלומר:

$$T_k(\omega) \triangleq \min\{n \geq 0 : \; X_n(\omega) = k\}$$

הגדרה 10.9 הזמן ה-k **בין הגעות** מוגדר להיות $D_k \triangleq T_k - T_{k-1}$, או באופן שקול

$$T_k = T_{k-1} + D_k$$

טענה 10.9 $D_k \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{G}eo(p)$.

מסקנה 10.5 T הוא תהליך IIP סטציונרי בזמן בדיד. בפרט

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} D_k, \qquad \mathbb{E}(T_k) = k\mathbb{E}(T_1) = \frac{k}{p}, \qquad \text{Var}(T_k) = k\text{Var}(T_1) = k\frac{1-p}{p^2}$$

$$\mathbb{P}(T_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \Longleftrightarrow \qquad T_k \sim \mathscr{P}ascal(k,p)$$

טענה 10.10 נניח ו-X תהליך בינומי עם פרמטר p, אזי ניתן לשחזר את X, B מתוך T, D ולהיפך. בפרט:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{\infty} u[n - T_k], \qquad u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

10.2.2.1 תכונת חוסר הזיכרון של התפלגות גאומטרית

הגדרה 10.10 [חוסר זיכרון] נאמר כי מ"א בדיד G עם תומך $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ הוא **חסר זיכרון** אם

$$\mathbb{P}(G > n + k | G > k) = \mathbb{P}(G > n), \qquad \forall n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

טענה 10.11 אם $G \sim \mathscr{G}eo$ אזי הוא חסר זיכרון.

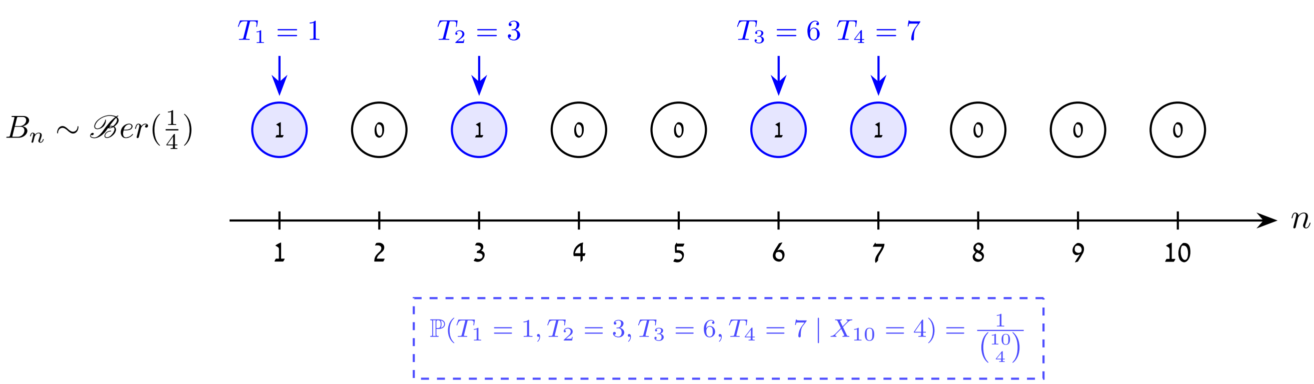
10.2.2.2 הפילוג המותנה של ההגעות

משפט 10.2 $T_1, \ldots, T_k | X_n = k \sim \mathcal{U}(B_{n,k})$ כאשר $B_{n,k}$ קבוצת כל הסדרות הבינאריות באורך n עם k 1-ים:

$$\mathbb{P}(T_1 = n_1, \ldots, T_k = n_k | X_n = k) = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

$$n \geq k \geq 0$$

$$0 < n_1 < \cdots < n_k \leq n$$



איור 10.3: הגעות של תהליך בינומי

10.2.3 פיצול ומיזוג תהליך ברנולי

משפט 10.3 [פיצול] תהינא $S_n \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er(q)$, $B_n \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er(p)$ בת"ס $S \perp\!\!\!\perp B$. **נפצל** את B_n לפי S_n:

$$U_n = S_n B_n$$
$$V_n = (1 - S_n) B_n$$

אזי $U_n \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er(qp), V_n \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er((1-q)p)$.

משפט 10.4 [מיזוג] תהינא $U_n \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er(qp), V_n \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er((1-q)p)$ בת"ס $U \perp\!\!\!\perp V$. **נמזג** את U, V:

$$B_n = U_n \vee V_n = U_n \mathsf{OR} V_n$$

אזי $B_n \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er(1-(1-p)(1-q))$.

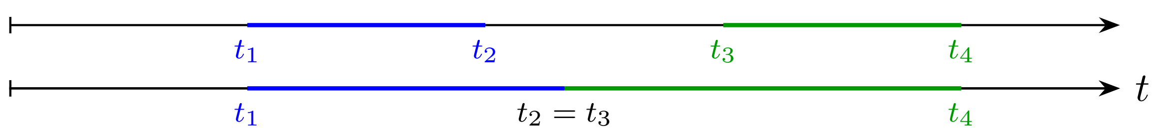
10.3 תהליך לוי

10.3.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 10.11 יהי $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ת"א ימני בזמן רציף, ויהיו $0 \leq t_1 < t_2$. אזי, **התוספת** של X בין הזמנים t_1 ו-t_2 מוגדרת להיות

$$X(t_1, t_2) \triangleq X(t_2) - X(t_1)$$

הגדרה 10.12 [תוספות זרות] יהי $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ת"א ימני בזמן רציף, התוספות $X(t_1,t_2)$ ו-$X(t_3,t_4)$ הן **זרות** אם $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_3$.

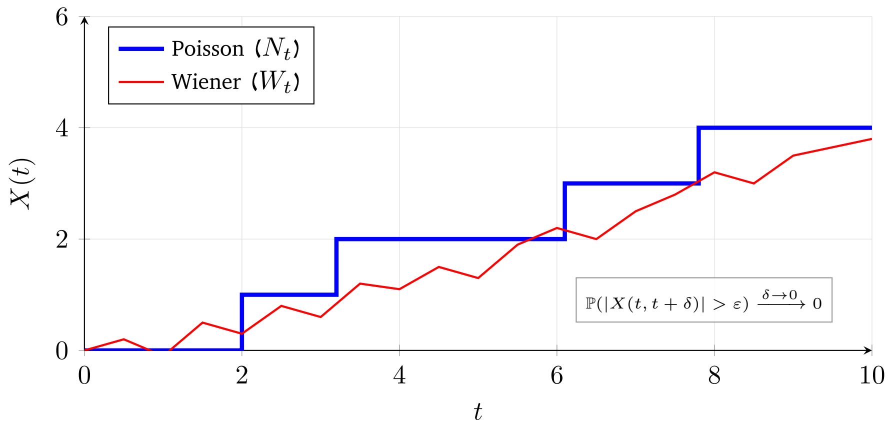


איור 10.4: תוספות זרות בזמן רציף

הגדרה 10.13 [תהליך לוי] ת"א $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ הוא **תהליך לוי** או **תהליך תוספות בת"ס סטציונריות בזמן רציף** (CT stationary IIP) אם:

1. $X(0) = 0$.
2. ל-X יש תוספות בת"ס: לכל $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, קבוצת התוספות הזרות $\{X(t_{i-1}, t_i)\}_{i=1}^k$ היא בת"ס.
3. התוספות של X הן סטציונריות: $X(t_1,t_2)$ מתפלג כמו $X(t_2 - t_1)$.
4. רציפות בהסתברות: לכל $t \geq 0$ ולכל $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \mathbb{P}(|X(t+\delta) - X(t)| > \varepsilon) = \lim_{\delta\to 0} \mathbb{P}(|X(t, t+\delta)| > \varepsilon) = 0$$



איור 10.5: פונקציות מדגם של תהליכי לוי

טענה 10.12 יהי $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ תהליך לוי, אזי קיים תהליך IIP סטציונרי בזמן בדיד $\{X[n]\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש-$X[n] = \lim_{\delta\to 0} X(n\delta)$.

משפט 10.5 התוחלת והשונות של תהליך לוי X הם ליניארים בזמן:

$$\begin{aligned}\eta_X(t) &= t\cdot\eta_X(1),\\ \sigma_X^2(t) &= t\cdot\sigma_X^2(1),\end{aligned}$$

וגם פונקציית הקווריאנס שווה ל-

$$C_X(t,s) = \sigma_X^2(1)\cdot\min\{t,s\}$$

לכל $t,s\geq 0$.

10.3.2 מרקוביות

משפט 10.6 X הוא מרקובי.

מסקנה 10.6 [אקסטרפולציה] משערך ה-MMSE של $X(t_n)$ בהינתן $\{X(t_i)\}_{i=1}^{n-1}$ עבור $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, נתון על ידי

$$\hat{X}(t_n) = X(t_{n-1}) + (t_n - t_{n-1})\eta_X(1)$$

מסקנה 10.7 [אינטרפולציה] משערך ה-MMSE של $X(t_1)$ בהינתן $\{X(t_i)\}_{i=2}^{n}$ עבור $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$, נתון על ידי

$$\hat{X}(t_1) = \frac{t_1}{t_2}X(t_2)$$

10.3.3 תהליך הנגזרת

יהי X תהליך לוי.

משפט 10.7 תהליך הנגזרת $\dot{X}(t) \triangleq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)$ הוא בעל תוחלת $\eta_{\dot{X}}(t)\equiv\eta_X(1)$ ופונקציית קוואריאנס

$$C_{\dot{X}}(t,s) = \sigma_X^2(1)\cdot\delta(t-s)$$

עבור $t,s\geq 0$. כלומר, $\dot{X}(t)-\eta_{\dot{X}}(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[X(t)-\eta_X(t)]$, הוא תהליך לבן "המתחיל" בזמן 0.

מסקנה 10.8 קיים רעש לבן $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ ופונקציה לינארית $f(t)=\eta t$ כך שמתקיים

$$X(t)=\int\limits_0^t W(t)\mathrm{d}t+f(t)=\int\limits_0^t W(t)\mathrm{d}t+\eta t$$

10.4 תהליך פואסון

10.4.1 מושגים בסיסיים

הגדרה 10.14 [התפלגות פואסון] נאמר כי מ"א בדיד A מתפלג **פואסון** עם פרמטר $\lambda>0$, ונסמן $A\sim\mathscr{P}ois(\lambda)$ אם

$$\mathbb{P}(A=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\qquad k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

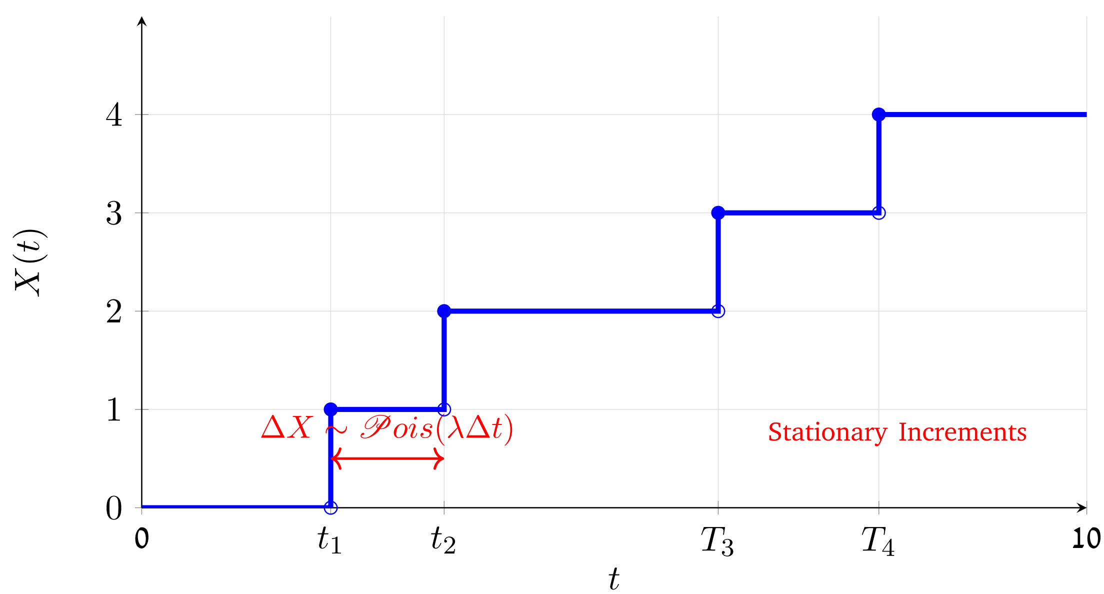
טענה 10.13 אם $A\sim\mathscr{P}ois(\lambda)$ אזי $\mathbb{E}(A)=\mathrm{Var}(A)=\lambda$.

טענה 10.14 נניח ו-$A_1\sim\mathscr{P}ois(\lambda_1), A_2\sim\mathscr{P}ois(\lambda_2)$ הם בת"ס $A_1\perp\!\!\!\perp A_2$, אזי $A_1+A_2\sim\mathscr{P}ois(\lambda_1+\lambda_2)$.

הגדרה 10.15 [תהליך פואסון] תהליך לוי קרא ***תהליך* פואסון** אם התוספות שלו מתפלגות פואסון. כלומר, תהליך $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ אם:

1. $X(0)=0$.
2. ל-X תוספות בת"ס סטציונריות.
3. $X(t)\sim\mathscr{P}ois(\lambda t)$ לכל $t\geq 0$, כאשר $\lambda=\sigma_X^2(1)>0$.

טענה 10.15 אם X הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ, אזי $X(t_1,t_2)\sim\mathscr{P}ois(\lambda(t_2-t_1))$, לכל $0\leq t_1<t_2$.



איור 10.6: תהליך פואסון

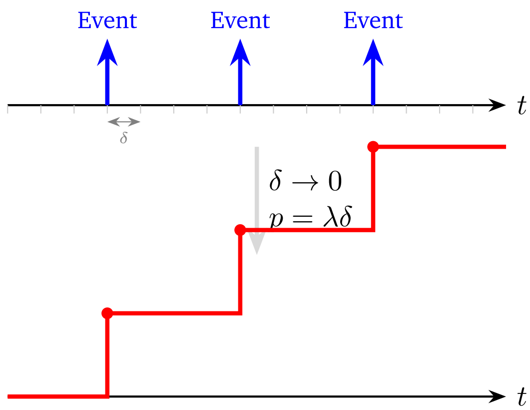
10.4.2 פואסון כגבול של בינומי

משפט 10.8 [תהליך פואסון כגבול של תהליך בינומי] ת"א ימני בזמן רציף X הוא תהליך פואסון עם פרמטר $\lambda > 0$ אם ורק אם קיימת משפחת ת"א $\left\{B_\delta[i] \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er(\lambda\delta)\right\}_{\delta>0}$, כך שאם נגדיר את ההרצפה של תהליך בינומי לזמן רציף באמצעות התהליך ברנולי $B_\delta[i] \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er(\lambda\delta)$:

$$X_\delta(t) = \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor} B_\delta[i] = \sum_{i=1}^{\infty} B_\delta[i]u[t-i\delta] \sim \text{"}\mathscr{B}in\left(\left\lfloor\frac{t}{\delta}\right\rfloor, \lambda\delta\right)\text{"}$$

אזי, $X = \lim_{\delta\to 0} X_\delta$.

הערה 10.5 עבור $X_\delta[n] \triangleq X_\delta(n\delta)$ אכן נקבל תהליך בינומי עם פרמטר $\lambda\delta$.



איור 10.7: תהליך פואסון כגבול תהליך בינומי

הערה 10.6 השקילות הנ"ל מאפשרת לנו לתרגם את התכונות של תהליכים בינומיים לתהליכי פואסון.

טענה 10.16 יהי X תהליך פואסון עם פרמטר λ, אזי:

$$\eta_X(t) = \lambda t$$
$$\sigma_X^2(t) = \lambda t$$

וכן לכל $t_1, t_2 \geq 0$:

$$C_X(t_1, t_2) = \lambda \min\{t_1, t_2\}$$

משפט 10.9 [מיזוג] תהינה $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ תהליכי פואסון עם פרמטרים λ_1, λ_2, אזי $X = X_1 + X_2$ הוא תהליך פואסון עם $\lambda_1 + \lambda_2$.

משפט 10.10 [פיצול] יהי X תהליך פואסון עם פרמטר λ, ויהי B תהליך ברנולי בת"ס $B \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{B}er(q)$, כך ש-$X \perp\!\!\!\perp B$. בהגעה ה-$k$ בתהליך $(X(t+\varepsilon) > X(t))$, נוסיף:

$$X_1(t+\varepsilon) \leftarrow X_1(t) + B_k$$
$$X_2(t+\varepsilon) \leftarrow X_2(t) + (1 - B_k)$$

אזי, X_1, X_2 מתפלגים פואסון עם $\lambda_1 = q\lambda, \lambda_2 = (1-q)\lambda$ ובת"ס $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

10.4.3 זמני הגעה

הגדרה 10.16 [התפלגות מעריכית] מ"א רציף D מתפלג **מעריכית** עם פרמטר $\lambda > 0$ אם

$$f_D(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0$$

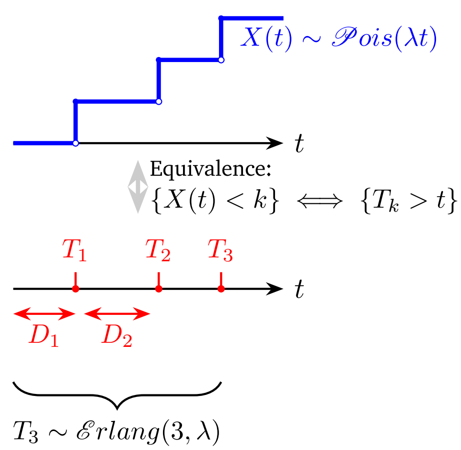
נסמן $D \sim \mathscr{E}xp(\lambda)$.

טענה 10.17 אם $D \sim \mathscr{E}xp(\lambda)$ אזי

$$F_D(t) = 1 - e^{-\lambda t} \implies \qquad \mathbb{P}(D > t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0$$
$$\mathbb{E}(D) = \frac{1}{\lambda}, \mathrm{Var}(D) = \frac{1}{\lambda^2}, \implies \qquad \mathbb{E}\left(D^2\right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

משפט 10.11 [תהליך פואסון כתהליך הגעות] ת"א ימני בזמן רציף X הוא תהליך פואסון עם פרמטר $\lambda > 0$ אם ורק אם זמני ההגעה של X, $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ הם תהליך IIP סטציונרי בדיד עם תוספות $D_k \overset{\text{IID}}{\sim} \mathscr{E}xp(\lambda)$, כלומר:

$$T_k = T_{k-1} + D_k, \qquad T_0 = 0$$
$$T_k(\omega) \triangleq \min\{t \geq 0 : X_t(\omega) = k\}$$



איור 10.8: תהליך פואסון כתהליך הגעות

למה 10.1 הזמנים בין ההגעות של התהליך הבינומי $\mathscr{G}eo(p = \lambda\delta)$ מתכנסים ל-$\mathscr{E}xp(\lambda)$. כלומר אם $D \sim \mathscr{E}xp(\lambda)$ ו-$D_\delta \sim \mathscr{G}eo(\lambda\delta)$ אזי

$$\mathbb{P}(D > t) = \lim_{\delta \to 0} \mathbb{P}(D_\delta > t)$$

הגדרה 10.17 [התפלגות ארלנג] מ"א רציף D **מתפלג ארלנג** עם פרמטרים $k \in \mathbb{N}, \lambda > 0$ אם

$$f_D(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}, \qquad t \geq 0$$

נסמן $D \sim \mathscr{E}rlang(k, \lambda)$.

טענה 10.18 אם $D\sim \mathscr{E}rlang(k,\lambda)$, אזי $\mathbb{E}(D)=\frac{k}{\lambda},\text{Var}(D)=\frac{k}{\lambda^2}$.

מסקנה 10.9 זמני ההגעה בתהליך פואסון מתפלגים $T_k\sim \mathscr{E}rlang(k,\lambda)$.

10.4.4 תכונת חוסר הזיכרון של התפלגות מעריכית

טענה 10.19 אם $D\sim \mathscr{E}xp(\lambda)$ אזי D חסר זיכרון.

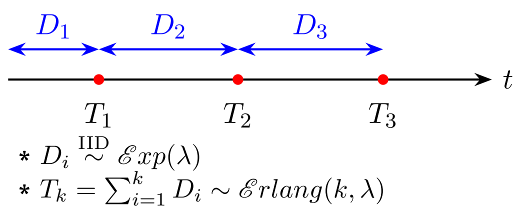
טענה 10.20 אם $X_1,X_2\overset{\text{IID}}{\sim}\mathcal{N}(0,1)$ אזי $X_1^2+X_2^2\sim \mathscr{E}xp\left(\frac{1}{2}\right)$.

10.4.5 סמלוץ תהליך פואסון

בעיה 10.1 בהינתן $\lambda>0$, נרצה לסמלץ תהליך פואסון X עם פרמטר λ מזמנים 0 עד T.

אלגוריתם 10.1 כדי לסמלץ תהליך פואסון X עם פרמטר λ מזמנים 0 עד T:

1. נאתחל $T_0=D_0=0,i=0$
2. כל עוד $T_i<T$:
   (א) $i\leftarrow i+1$
   (ב) $D_i\sim \mathscr{E}xp(\lambda)$ (באופן בלתי תלוי בקודמים)
   (ג) $T_i\leftarrow T_{i-1}+D_i$



איור 10.9: נסיון 1 לסמלוץ של תהליך פואסון

משפט 10.12 בהינתן $X(t)=k$, זמני ההגעה $T_1,\dots,T_k$ הם IID אחידים בהינתן סדר. כלומר, עבור $\left(\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_k\right)\overset{\text{IID}}{\sim}\mathcal{U}\left([0,t]^k\right)$:

$$f_{\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_k|X(t)}(t_1,\dots,t_k|k)=\prod_{i=1}^k f_{\tilde{T}_i|X(t)}(t_i|k)=\frac{1}{t^k},\qquad 0<t_i\le t$$

נסדר אותם:

$$\begin{aligned}T_1&=\min\left\{\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_k\right\}\\T_2&=\min\left\{\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_k\right\}\setminus\{T_1\}\\&\vdots\\T_k&=\max\left\{\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_k\right\}\end{aligned}$$

ואז

$$f_{T_1,\dots,T_k|X(t)}(t_1,\dots,t_k|k)=\prod_{i=1}^{k}f_{T_i|X(t)}(t_i|k)=\frac{k!}{t^k},\qquad 0<t_1<\cdots<t_k\le t$$

אלגוריתם 10.2 כדי לסמלץ תהליך פואסון X עם פרמטר λ מזמנים 0 עד T:

1. נייצר ערך בזמן t: $X(t)\sim \mathscr{P}ois(\lambda t)$
   - נסמן את הערך המיוצר ב-k
2. נבחר $\left(\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_k\right)\overset{\text{IID}}{\sim}\mathcal{U}\left([0,t]^k\right)$
3. נמיין אותם להיות $T_1,\dots,T_k$

The End