גרף מכוון קשיר: גרף מכוון G עבורו לכל $u,v \in V(G)$ קיים מסלול מ־u ל־v או מסלול מ־v ל־u.

גרף מכוון קשיר חזק: גרף מכוון G עבורו לכל $u,v \in V(G)$ קיים מסלול מ־u ל־v.

אלגוריתם BFS: יהי G גרף ויהי $s \in V(G)$ אזי

```
function BFS(G, s):
    (d, π, color) ← dict(V(G))
    for u ∈ V(G)\{s} do
        color[u] ← White
        d[u] ← ∞
        π[u] ← Null
    end
    color[s] ← Grey
    d[s] ← 0
    π[s] ← Null
    Q ← queue()
    while Q ≠ ∅ do
        u ← Q.head
        for v ∈ Neighbor(u) do
            if color[v] = White then
                color[v] ← Grey
                d[v] ← d[u] + 1
                π[v] ← u
                Q.enqueue(v)
            end
        end
        Q.dequeue()
        color[u] ← Black
    end
    return (d, π, color)
```

טענה: יהי G גרף ויהי $s \in V(G)$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{BFS}(G,s)$ הינה $\mathcal{O}(|V|+|E|)$.

משפט: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי $\{v \in V \mid \text{BFS}(G,s).\text{color}[v] = \text{Black}\} = [s]_{\rightarrow}$.

סימון: יהי G גרף ויהיו $u,v \in V$ אזי $\delta(v,u) = \min(\{\text{len}(\sigma) \mid v,u \text{ טיול בין } \sigma\})$.

טענה: יהי G גרף ויהיו $v,u,w \in V$ באשר $(w,u) \in E$ אזי $\delta(v,u) \le \delta(v,w)+1$.

למה: יהי G גרף ויהיו $s,v \in V$ אזי בכל שלב בהרצת $\text{BFS}(G,s)$ מתקיים $d[v] \ge \delta(v)$.

למה: יהי G גרף יהי שלב בהרצת $\text{BFS}(G,s)$ בו $Q = (v_1 \ldots v_n)$ אזי מתקיים $d[v_i] \le d[v_{i+1}]$ וכן $d[v_i] \le d[v_1]+1$.

משפט נכונות מרחקים: יהי G גרף ויהיו $s,v \in V$ אזי $d[v] = \delta(v,s)$.$\text{BFS}(G,s)$.

עץ BFS: יהי G גרף ויהי $s \in V$ נגדיר $V_\pi = \{v \in V \mid \text{BFS}(G,s).\pi[v] \ne \text{Null}\} \cup \{s\}$ וכן $E_\pi = \{(\pi[v], v) \mid v \in V_\pi \backslash \{s\}\}$ אזי $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$.

טענה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי

- מתקיים $\deg^-_{G_\pi}(s) = 0$.
- לכל $v \in V(G_\pi)$ מתקיים $\deg^-_{G_\pi}(v) = 1$.
- לכל $v \in V(G_\pi)$ קיים מסלול ב־G_π בין s,v.
- G_π הינו עץ.
- יהי $v \in V(G_\pi)$ ויהי σ מסלול ב־G_π בין s,v אזי σ המסלול הקצר ביותר בין s,v ב־G.

מסלול אוילר: מסלול העובר על כל הקשתות בגרף.

מעגל אוילר: מסלול אוילר שהינו מעגל.

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מעגל אוילר ב־G)$\Longleftrightarrow$(לכל $v \in V$ מתקיים $\deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$).

אלגוריתם למציאת מעגל אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $u \in V$ מתקיים $\deg(u) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי

```
function EulerCircle(G, v):
    σ ← List(E(G))
    u ← Neighbor(v)
    while u ≠ v do
        σ.append({v, u})
        G = G\{{v, u}}
        u ← Neighbor(u)
    end
    if length(σ) = |E(G)| then
        return σ
    end
    else
        w ← {x ∈ V(G) | (∃y ∈ V(G).(x, y) ∈ σ) ∧ (deg(x) > 0)}
        σ[w] = EulerCircle(G, w)
    end
    return σ
```

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $u \in V$ מתקיים $\deg(u) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ ויהי $v \in V(G)$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{EulerCircle}(G, v)$ הינה $\mathcal{O}(|E|)$.

טענה: באלגוריתם EulerCircle כל עוד לולאת ה־while פעילה מתקיים $|\text{Neighbor}(u)| \neq \varnothing$.

משפט: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל $v \in V$ מתקיים $\deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\text{EulerCircle}(G)$ הינו מעגל אוילר.

טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מסלול אוילר שאינו מעגל ב־G)$\Longleftrightarrow$($|\{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}| = 2$).

אלגוריתם למציאת מסלול אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו $|\{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}| = 2$ אזי

```
function EulerPath(G):
    {v, u} ← {v ∈ V(G) | deg(v) ∈ N_odd}
    G = G + {{v, u}}
    σ = EulerCircle(G, v)
    return σ\{v, u}
```

טענה: יהי G גרף לא מכוון אזי (G דו־צדדי)$\Longleftrightarrow$(לא קיים ב־G מעגל באורך אי־זוגי).

אלגוריתם זיהוי גרפים דו־צדדיים: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי

```
function IsBipartite(G):
    (d, π, color) ← BFS(G)
    for (v, u) ∈ V do
        if d(v) = d(u) then
            return false
        end
    end
    return true
```

טענה: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי (G דו צדדי)$\Longleftrightarrow$($\text{IsBipartite}(G) = \text{true}$).

מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ויהיו $s, t \in V$ אזי מסלול σ מ־s ל־t עבורו $|\sigma| = \min\{|\tau| \mid t\text{־}s \text{ מסלול מ־} \tau\}$.

גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד (גרף מק"ב): יהי G גרף ויהי $s \in V$ נגדיר $E' = \{e \in E \mid s\text{־חלק ממסלול קצר ביותר היוצא מ} e\}$ אזי (V, E').

אלגוריתם למציאת גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי

```
function ShortestPathGraph(G, s):
    (d, π, color) ← BFS(G)
    E' ← E(G_π)
    for (u, v) ∈ E(G) do
        if |height_{G_π}(u) − height_{G_π(v)}| = 1 then
            E'.append((u, v))
        end
    end
    return (V(G), E')
```

טענה: תהא $e \in E$ אזי (e מחברת בין רמות עוקבות ביער BFS G_π)$\Longleftrightarrow$(e קשת במק"ב).

מסקנה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי $\text{ShortestPathGraph}\left(G,s\right)$ הינו גרף מק"ב מ־s.

גרף המסלולים הקצרים ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ויהיו $s,t \in V$ נגדיר $E' = \{e \in E \mid$ חלק ממסלול קצר ביותר היוצא מ־s ל־t $e\}$ אזי (V,E').

טענה: יהי G גרף מכוון ויהיו $s,t \in V$ אזי קיים אלגוריתם לחישוב גרף המסלולים הקצרים ביותר מ־s ל־t בסיבוכיות $\mathcal{O}\left(|V|+|E|\right)$.

אלגוריתם DFS: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי

```
function DFS(G, s):
    (k, π) ← dict(V)
    color ← dict(E)
    k[s] ← 1
    π[s] ← Null
    for u ∈ V\s do
        k[u] ← 0
        π[u] ← Null
    end
    for e ∈ E do
        color[e] ← White
    end
    i ← 2
    v ← s
    while (∃u ∈ Adj(v).color[(v, u)] = White) ∨ (π[v] ≠ Null) do
        if {u ∈ Adj(v) | color[(v, u)] = White} ≠ ∅ then
            w ← {u ∈ Adj(v) | color[(v, u)] = White}
            color[(v, w)] ← Black
            if k[w] = 0 then
                k[w] ← i
                π[w] ← v
                v ← w
                i ← i + 1
            end
        else
            v ← π[v]
        end
    end
    return (k, π)
```

טענה: יהי G גרף ויהי $s \in V$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של $\text{DFS}\left(G,s\right)$ הינה $\mathcal{O}\left(|V|+|E|\right)$.

זמן גילוי: יהי G גרף ויהי $s \in V\left(G\right)$ אזי k בהרצת $\text{DFS}\left(G,s\right)$.

טענה: יהי G גרף ויהיו $s,v \in V$ באשר $v \in [s]_{\to}$ אזי בהרצת $\text{DFS}\left(G,s\right)$ מתקיים $k\left[v\right] > 0$.

עץ DFS: יהי G גרף ויהי $s \in V$ נגדיר $V_\pi = \{v \in V \mid \text{DFS}\left(G,s\right).\pi\left[v\right] \neq \text{Null}\} \cup \{s\}$ וכן $E_\pi = \{(\pi\left[v\right],v) \mid v \in V_\pi \backslash \{s\}\}$ אזי $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$.

טענה: עץ DFS הינו עץ.

קשתות ביחס לריצת DFS: יהי G גרף ויהי G_π יער DFS אזי

- קשתות עץ: קשת $e \in E(G)$ עבורה $e \in E(G_\pi)$.
- קשתות קדמיות: קשת $(u,v) \in E(G)$ עבורה $(u,v) \notin E(G_\pi)$ וכן u הינו אב של v.
- קשתות אחוריות: קשת $(u,v) \in E(G)$ עבורה $(u,v) \notin E(G_\pi)$ וכן v הינו אב של u.
- קשתות חוצות: קשת $e \in E(G)$ שאינה קשת עץ או קדמית או אחורית.

טענה: יהי G גרף לא מכוון ותהא (u,v) קשת עץ אזי u צאצא של v בגרף G_π או v צאצא של u בגרף G_π.

מסקנה: יהי G גרף לא מכוון אזי לא קיימות קשתות חוצות.

אלגוריתם DFS בעל זמני נסיגה: יהי G גרף אזי

```
function DFS(G):
    (k, f, π) ← dict(V)
    for u ∈ V do
        k[u] ← 0
        π[u] ← Null
    end
    i ← 0 for s ∈ V do
        if k[s] = 0 then
            DFS-VISIT(s, k, f, π, i)
        end
    end
    return (k, f, π)
```

```
function DFS-VISIT(v, k, f, π, i):
    i ← i + 1
    k[v] ← i
    for w ∈ Adj(v) do
        π[w] ← v
        DFS-VISIT(w, k, f, π, i)
    end
    i ← i + 1
    f[v] ← i
```

זמן נסיגה: יהי G גרף ויהי $s \in V(G)$ אזי f בהרצת $\text{DFS}(G)$.

טענה Gray Path Lemma: יהיו $v,u \in V$ אזי (v צאצא של u ביער G_π)$\Longleftrightarrow$($k[u] < k[v] < f[u]$).

טענה: יהיו $v,u \in V$ אזי ((u,v) קשת חוצה)$\Longleftrightarrow$($f[v] < k[u]$).

משפט הסוגריים: יהי G גרף ויהיו $u,v \in V$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- מתקיים $[k(u), f(u)] \cap [k(v), f(v)] = \varnothing$ וכן u,v אינם צאצא־אב ביער G_π.
- מתקיים $[k(u), f(u)] \subset [k(v), f(v)]$ וכן u צאצא של v ביער G_π.
- מתקיים $[k(u), f(u)] \supset [k(v), f(v)]$ וכן v צאצא של u ביער G_π.

משפט המסלול הלבן: יהי G גרף ויהיו $u,v \in V$ אזי (v צאצא של u ביער G_π)$\Longleftrightarrow$(בזמן $k(u)$ באלגוריתם $\text{DFS}(G)$ יש מסלול לבן מ־u ל־v).

גרף מכוון אציקלי: גרף מכוון G בו לא קיים מעגל.

מיון טופולוגי: יהי G גרף מכוון אזי יחס סדר $\prec$ על V המקיים לכל $u,v \in V$ אם $(u,v) \in E$ אזי $u \prec v$.

משפט: יהי G גרף מכוון אזי (G אציקלי)$\Longleftrightarrow$(קיים מיון טופולוגי על G).

טענה אלגוריתם קנות': יהי G גרף מכוון אזי קיים אלגוריתם לבדיקת קיום מיון טופולוגי בסיבוכיות $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

משפט: יהי G גרף מכוון אזי (G רציקלי)$\Longleftrightarrow$(אין קשתות אחוריות ב־G).

טענה: יהי G גרף מכוון אציקלי אזי f המתקבלת מהרצת $\text{DFS}(G)$ משרה מיון טופולוגי על G.

רכיב קשיר היטב (רק"ה): יהי G גרף מכוון אזי קבוצה $C \subseteq V$ מקסימלית בגודלה עבורה לכל $u, v \in C$ קיים מסלול מ־u ל־v וכן מ־v ל־u.

גרף הופכי/משוחלף: יהי G גרף מכוון נגדיר $E' = \{(v, u) \mid (u, v) \in E\}$ אזי $G^T = (V, E')$.

טענה: יהי G גרף מכוון ותהא $C \subseteq V$ אזי (C רק"ה של G)$\Longleftrightarrow$(C רק"ה של G^T).

אלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב: יהי G גרף מכוון אזי

function `SCC`(G):
  $(k, f, \pi) \leftarrow \text{DFS}(G)$
  `/* In the next line, in the main loop of DFS we go through the vertices in decreasing order of f[u] */`
  $(k', f', \pi') \leftarrow \text{DFS}(G^T)$
  $A \leftarrow \text{set}(\text{set}(V))$
  for $v \in V$ **do**
    $A.\text{append}\left([v]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}\right)$
  end
  return A

גרף הרכיבים: יהי G גרף מכוון נגדיר $E^* = \left\{(A, B) \in \text{SCC}(G)^2 \mid \exists u \in A. \exists v \in B. (u, v) \in E\right\}$ אזי $G^* = (\text{SCC}(G), E^*)$.

אלגוריתם למציאת גרף הרכיבים: יהי G גרף מכוון אזי

function `ComponentGraph`(G):
  $V^* \leftarrow \text{SCC}(G)$
  $E^* \leftarrow \text{set}((V^*)^2)$
  for $(u, v) \in E$ **do**
    if $[v]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}} \neq [u]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}$ **then**
      $E^*.\text{append}\left(\left([v]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}, [u]_{\xrightarrow[G_\pi^T]{}}\right)\right)$
    end
  end
  return (V^*, E^*)

למה: יהי G גרף מכוון אזי G^* אציקלי.

הגדרה: יהי G גרף ותהא $U \subseteq V$ אזי
- זמן גילוי: $k(U) = \min_{u \in U}(k[u])$.
- זמן נסיגה: $f(U) = \max_{u \in U}(f[u])$.

למה: יהי G גרף מכוון ויהיו $C_1, C_2 \subseteq V$ רק"ה באשר $(C_1, C_2) \in E(G^*)$ אזי $f(C_2) < f(C_1)$.

מסקנה: יהי G גרף מכוון ויהיו $C_1, C_2 \subseteq V$ רק"ה באשר $(C_1, C_2) \in E\left(\left(G^T\right)^*\right)$ אזי $f(C_2) > f(C_1)$.

משפט: יהי G גרף מכוון ויהי $C \subseteq V$ אזי (C רק"ה)$\Longleftrightarrow$($C \in \text{SCC}(G)$).