כדור פתוח: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x-a\| < r\}$.

כדור סגור: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x-a\| \leq r\}$.

ספירה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x-a\| = r\}$.

תיבה פתוחה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n] .a_j < x_j < b_j\}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\overline{\Pi}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n] .a_j \leq x_j \leq b_j\}$.

נקודה פנימית: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in M$ המקיימת $\exists r > 0.B_r(x) \subseteq M$ אזי x נקודה פנימית.

פנים של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\text{int}(M) = \overset{\circ}{M} = \{x \in M \mid M$ נקודה פנימית של $x\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $M = \overset{\circ}{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r > 0.B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in M$ המקיימת $\exists r > 0.B_r(x) \cap M = \{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\partial M = \{x \in M \mid M$ נקודת שפה של $x\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M \subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $\overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (x נקודה חיצונית של M)$\Longleftrightarrow$(x נקודה פנימית של $\mathbb{R}^n \backslash M$).

מסקנה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (M פתוחה)$\Longleftrightarrow$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r > 0.M \subseteq B_r(0)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A \subseteq \bigcup_{n\in\Lambda} I_n$ מתקיים $\exists \mathcal{B} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda) .A \subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{B}} I_n$).

סימון: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{(k)} = a(k)$.

גבול: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L \in \mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k\to\infty} \left\|a^{(k)} - L\right\| = 0$ אזי $\lim_{k\to\infty} a^{(k)} = L$.

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x\to a}$ וכן $\xrightarrow[x\to a]{}$.

משפט: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b \in \mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} b\right) \Longleftrightarrow \left(\forall j \in [n] .a_j^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} b_j\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0.\exists k \in \mathbb{N}.\forall m, p > k. \left\|a^{(m)} - a^{(p)}\right\| < \varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow \left(\forall j \in [n] .\forall \varepsilon > 0.\exists k \in \mathbb{N}.\forall m, p > k. \left\|a_j^{(m)} - a_j^{(p)}\right\| < \varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $a \in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_i)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty} a^{(k_i)} \in K$).

הערה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \to \mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f = \langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ כאשר $f_i : A \to \mathbb{R}$.

גבול: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \to \mathbb{R}^m$ תהא $a \in \mathbb{R}^n$ ותהא $L \in \mathbb{R}^m$ אזי

- היינה: אם $\forall x \in A^{\mathbb{N}}. \left(x^{(k)} \to a\right) \Longrightarrow \left(f\left(x^{(k)}\right) \to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a} f(x) = L$.
- קושי: אם $\forall \varepsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in A\backslash\{a\} . \|x-a\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \to \mathbb{R}^m$ אזי $a \in A$ עבורה $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$.

סימון: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \to \mathbb{R}^m$ ותהא $B \subseteq A$ אזי (f רציפה נקודתית עבור כל $b \in B$)$\Longleftrightarrow (f \in C(B))$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \to \mathbb{R}^m$ ותהא $B \subseteq A$ אזי $(f \in C(b)) \Longleftrightarrow (f_1, \ldots, f_m \in C(b))$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהיינה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ וכן $B \subseteq \mathbb{R}^m$ אזי $f : A \to B$ הפיכה עבורה f, f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$.

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ כך $\gamma(t) = (1-t)a + tb$.

טענה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a,b \in \mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b] = \text{Im}(\gamma)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a,b\in M.\left[a,b\right]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r\left(a\right),\overline{B}_r\left(a\right)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:\left[0,1\right]\to M$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\gamma\left(1\right)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_0}\left(\mathbb{R}^n\right)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\biguplus\mathcal{A}=M$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f\left(a\right)<f\left(b\right)$ מתקיים $\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]\subseteq f\left(\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ קשירה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ווירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f\left(\mathcal{K}\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\left\Vert x-y\right\Vert<\delta\Longrightarrow\left\Vert f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\Vert<\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^m\right)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $\left(\upsilon\left(a\right)\geq0\right)\wedge\left(\left(\upsilon\left(a\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(a=0\right)\right)$.
- הומוגניות: $\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon\left(a+b\right)\leq\upsilon\left(a\right)+\upsilon\left(b\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.\upsilon\left(x\right)\leq c\left\Vert x\right\Vert$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon\in C\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.c\left\Vert x\right\Vert\leq\upsilon\left(x\right)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\leq\upsilon\leq b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon,\left\Vert\cdot\right\Vert$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\upsilon\left(x^{(k)}\right)\to0\right)\Longleftrightarrow\left(\rho\left(x^{(k)}\right)\to0\right)$.

נורמה ℓ_p: עבור $p\in\mathbb{N}_+$ נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_p=\left(\sum_{i=1}^n\left|v_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמה ℓ_∞: נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\left|v_i\right|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(a)\\ \vdots\\ \gamma_m'(a)\end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert\right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)\Longrightarrow f\in C\left(a\right)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\text{grad}f\left(a\right)=\left[L\right]_{\text{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f\left(a\right)=\text{grad}f\left(a\right)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hx_i)-f(a)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $f'_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)=\left(\nabla f\left(a\right)\right)_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(a\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(a\right)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי ($\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)$ קיימת לכל i)$\not\Longleftarrow\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left\{1\ldots m\right\}.f_i\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\mathcal{D}_f\left(a\right)=\begin{pmatrix}-\nabla f_1(a)-\\ \vdots\\ -\nabla f_m(a)-\end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_f\left(a\right)\right)_{i,j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי
- אם $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $f\in C\left(a\right)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}\left(a\right)$.
- $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.
- תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$ וכן $\mathcal{D}_{f}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ גזירה ברציפות אזי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(a+hv\right)-f\left(a\right)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\nabla f\left(a\right)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ קשירה מסילתית)$\Longleftrightarrow$($\mathcal{U}$ קשירה פוליגונלית).

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longleftarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.

טענה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

סימון: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in\left\{1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}^{2}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)}{\partial x_{i}}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\left\{1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{j}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\right)}{\partial x_{i}}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^{k}f}{\partial x_{i_{1}}\ldots\partial x_{i_{k}}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהיו $i,j\in\left\{1\ldots n\right\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_{i}},\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}\left(a\right)=\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{j}\partial x_{i}}\left(a\right)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ אזי $\left|K\right|=\sum_{i=1}^{n}K_{i}$ וכן $\partial x^{K}=\partial x_{1}^{K_{1}}\ldots\partial x_{n}^{K_{n}}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\in C^{k}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{\left|K\right|}f}{\partial x^{K}}\left(a\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert Av\right\Vert _{\text{st}}\le\left\Vert A\right\Vert _{\text{st}}\cdot\left\Vert v\right\Vert _{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^{k}$ עבורן $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $g\in D\left(f\left(a\right)\right)$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}\left(a\right)=\mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right)\cdot\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\Gamma_{f}=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}\mid\left(x\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(f\left(x\right)=y\right)\right\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $\Pi_{c}=\left\{x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)=c\right\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $y-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $N_{a}=\left(-\nabla f\left(a\right),1\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)\perp\Pi_{f\left(a\right)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\ge f\left(a\right)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\le f\left(a\right)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f\left(a\right)=0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_{i}.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_{i}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $\mathcal{D}_{\left(a,b\right)}^{k}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^{n}\\ \left|V\right|=k}}\binom{k!}{V_{1},\ldots,V_{n}}\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)^{V_{i}}\frac{\partial^{k}}{\partial x^{V}}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\left(\sum_{i=1}^n\left(a_i-b_i\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^k$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה $f\in C^{k+1}\left(a\right)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in[x,a]$ עבורו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^k\frac{1}{i!}\mathcal{D}^i_{(x,a)}f\left(a\right)+\frac{1}{(k+1)!}\mathcal{D}^{k+1}_{(x,a)}f\left(c\right)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_f\right)_{i,j}=f''_{x_i,x_j}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in[x,a]$ עבורו $f\left(x\right)=f\left(a\right)+\left(x-a\right)^t H_f\left(c\right)\left(x-a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- ($H_f\left(a\right)$ חיובית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מינימום).
- ($H_f\left(a\right)$ שלילית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)>0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)<0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_f\left(a\right)\right)\neq0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ וקיימת $f\in C^1\left(I_x,I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(I_x,I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f'\left(x\right)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ על I_x.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(I_x,I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f\left(x\right)\in C^k\left(I_x,I_y\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1}\in I_y$ וקיימת $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1}\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי לכל $i\in[n]$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right)-=\frac{F'_{x_i}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ על $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times(n+m)}{\mathcal{D}_f\left(a\right)}=\left(\underset{m\times n}{F'_x\left(a\right)},\underset{m\times m}{F'_y\left(a\right)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ וקיימת $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)$ הפיכה יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ ותהא $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $\mathcal{D}_f\left(x\right)=-F'_y\left(x,f\left(x\right)\right)^{-1}\cdot F'_x\left(x,f\left(x\right)\right)$ על $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $\nabla F\left(a\right)\neq0$ אזי משוואת המשטח המשיק לגרף ב־a הינו $\sum_{i=1}^n F'_{x_i}\left(a\right)\left(x_i-a_i\right)=0$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)$ הפיכה אזי משוואת המשטח המשיק לגרף ב־a הינו $\sum_{i=1}^n F'_{x_i}\left(a\right)\left(x_i-a_i\right)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^1\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

דיפאומורפיזם C^k: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^k\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x\right)\right)=\mathcal{D}_{f}\left(x\right)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $A\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

- (A פתוחה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ קומפקטית).
- אם $\partial A\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\partial\left(f\left(A\right)\right)=f\left(\partial A\right)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ עבורה $\text{rank}\left(\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\right)=m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g\left(a\right)=0$ וכן $\nabla f\left(a\right)\in\text{span}\left\{\nabla g_{i}\left(a\right)\right\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g\left(a\right)=0$ וכן $\left\{\nabla g_{i}\left(a\right)\right\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\text{sols}\left(g\right)\cap\mathcal{O}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ נגדיר $L\in C^{1}\left(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^{m},\mathbb{R}\right)$ כך $L\left(x_{1}\ldots x_{n},\lambda_{1},\ldots\lambda_{m}\right)=f\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_{i}g_{i}\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\lambda\in\mathbb{R}^{m}$ עבורה $\left(a,\lambda\right)$ נקודה קריטית של L).

דרגה של פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי $\text{rank}\left(f\left(a\right)\right)=\text{rank}\left(\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ עבורה $\forall x\in\mathcal{U}.\text{rank}\left(f\left(x\right)\right)=k$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a קיימת $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של $f\left(a\right)$ קיימים דיפאומורפיזמים $\varphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n}$ וכן $\psi:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^{m}$ וקיימת $\mathcal{W}\subseteq\varphi\left(\mathcal{O}\right)$ סביבה של $\varphi\left(a\right)$ עבורם $\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)=\left(x_{1},\ldots,x_{k},0,\ldots,0\right)$ על $\mathcal{W}$.

הלמה של הדמר: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה קמורה של 0 יהי $p\geq1$ ותהא $f\in C^{p}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ עבורה $f\left(0\right)=0$ אזי קיימת $g\in C^{p-1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $g\left(0\right)=\nabla f\left(0\right)$ וכן $f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}x_{i}g\left(x\right)$.

הלמה של מורס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{3}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a וגם $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של 0 וכן דפיאומורפיזם $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n}$ המקיים $\left(f\circ g\right)\left(x\right)-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^{k}x_{i}^{2}-\sum_{i=k+1}^{n}x_{i}^{2}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $P_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^{n}\mid\forall j\in\left[n\right].a_{j}\leq x_{j}\leq b_{j}\right\}$.

תיבה מנוונת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ עבורם $\exists i\in\left[n\right].a_{i}=b_{i}$ אזי $P_{a,b}$.

חלוקה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ לכל $i\in\left[n\right]$ תהיינה $\left\{t_{i}^{0},\ldots,t_{i}^{\ell_{i}}\right\}$ חלוקה של $\left[a_{i}.b_{i}\right]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[t_{i}^{m_{i}},t_{i}^{m_{i}+1}\right]\mid\forall i\in\left[n\right].m_{i}\in\left[\ell_{i}-1\right]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $V\left(P\right)=\text{Vol}\left(P\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_{i}-a_{i}\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $\left\{A_{1},\ldots,A_{k}\right\}$ חלוקה של P אזי $\text{Vol}\left(P\right)=\sum_{i=1}^{k}\text{Vol}\left(A_{i}\right)$.

הערה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ עבורם $P_{a,b}$ תיבה מנוונת אזי $\text{Vol}\left(P_{a,b}\right)=0$.

סכום רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ תהא $\Pi=\left\{A_{1},\ldots,A_{k}\right\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)}\in A_{j}$ אזי $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)=\sum_{j=1}^{k}f\left(x^{(j)}\right)\text{Vol}\left(A_{j}\right)$.

קוטר קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $d\left(M\right)=\sup_{x,y\in M}\left\Vert x-y\right\Vert$.

מדד העדינות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $\Pi=\left\{A_{1},\ldots,A_{k}\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i\leq i\leq k}d\left(A_{i}\right)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אזי $\int_{P}f\left(x\right)\text{d}x=\lim_{\lambda\left(\Pi\right)\to0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f\in R\left(P\right)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\left\{A_{1},\ldots,A_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\overline{S}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{P_{j}}\left(f\right)\text{Vol}\left(P_{j}\right)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\left\{A_{1},\ldots,A_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\underline{S}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{P_{j}}\left(f\right)\text{Vol}\left(P_{j}\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi\right)\leq S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$ חלוקות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi_{1}\right)\leq\underline{S}\left(f,\Pi_{2}\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_{2}\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_{1}\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi_1\right)\le\overline{S}\left(f,\Pi_2\right)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}\left(f\right)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{S}\left(f,\Pi\right)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\text{חלוקה }\Pi}\underline{S}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\overline{I}\left(f\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(P\right)\right)\iff\left(\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ חסומה אזי $\int_P f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\text{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^n\text{Vol}\left(P_{a,b}\right)$.

טענה: יהיו $P_1\dots P_n$ תיבות עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}\left(P_i\right)\cap\text{int}\left(P_j\right)=\varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right)=\sum_{i=1}^n\text{Vol}\left(P_i\right)$.

מסקנה: יהיו $P_1\dots P_n$ תיבות ותהא $P\subseteq\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\right)\le\sum_{i=1}^n\text{Vol}\left(P_i\right)$.

טענה: יהיו P_1,P_2 תיבות אזי $P_1\cap P_2$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\backslash\text{int}\left(P\right)\right)=0$.

קבוצה זניחה: $E\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{P_i\right\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty P_i$ וכן $\sum_{i=0}^\infty\text{Vol}\left(P_i\right)<\varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{E\subseteq\mathbb{R}^n\mid \text{זניחה } E\right\}$.

טענה: $\varnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$, יהי $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left\{a\right\}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהיינה $\left\{E_i\right\}_{i=0}^\infty$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^\infty E_i\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{P_i\right\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty\text{int}\left(P_i\right)$ וכן $\sum_{i=0}^\infty\text{Vol}\left(P_i\right)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{P_i\right\}_{i=0}^n$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^n\text{int}\left(P_i\right)$ וכן $\sum_{i=0}^n\text{Vol}\left(P_i\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ותהא $A\subseteq E$ אזי $A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$, תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה לא מנוונת אזי $P\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

מסקנה: תהא $M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\text{int}\left(M\right)=\varnothing$.

טענה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה ותהא $f\in C\left(P,\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\left\{C_i\right\}_{i=0}^\infty$ בעלות אורך צלע 2^{-e_i} עבור $e_i\in\mathbb{N}$ עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}\left(P_i\right)\cap\text{int}\left(P_j\right)=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^\infty C_i$.

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$, קבוצת קנטור זניחה.

תנודה של פונקציה בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי $\omega\left(f,a\right)=\lim_{\delta\to0^+}\omega\left(f,B_\delta\left(a\right)\cap A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\iff$($\omega\left(f,a\right)=0$).

למה של קנטור: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית יהי $M>0$ ותהא $f:K\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall k\in K.\omega\left(f,k\right)\le M$ אזי $\forall x\in K.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\omega\left(f,B_\delta\left(x\right)\cap K\right)<\omega_0+\varepsilon$.

כמעט לכל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E\subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A\backslash E$.

קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\iff$($f\in R\left(P\right)$).