פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי $A\times A\to A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית על A אזי $a*b=*\left(a,b\right)$.

חבורה: תהא G קבוצה אזי $*:G\times G\to G$ עבורה קיים $e\in G$ עבורו

- אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in G$ מתקיים $a*\left(b*c\right)=\left(a*b\right)*c$.
- איבר יחידה: לכל $a\in G$ מתקיים $a*e=e*a=a$.
- איבר הופכי: לכל $a\in G$ קיים $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $S\left(X\right)=\left\{ f:X\to X\mid \text{הפיכה } f\right\}$.

חבורת התמורות: תהא X קבוצה אזי $\left(S\left(X\right),\circ\right)$.

טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_{n}=S\left(\left[n\right]\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|S_{n}\right|=n!$.

חבורת המטריצות: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.

החבורות החיבוריות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},+\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ אזי $A^{*}=A^{\times}=A\backslash\left\{ 0\right\}$.

החבורות הכפליות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Q}^{*},\mathbb{R}^{*},\mathbb{C}^{*}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},\cdot\right)$.

החבורה הטריוואלית: יהי x אזי $\left(\left\{ x\right\},\mathrm{Id}\right)$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sim_{n}\subseteq\mathbb{Z}^{2}$ המוגדרת $\left(x\sim_{n}y\right)\Longleftrightarrow\left(n|\left(x-y\right)\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_{n}=\mathbb{Z}_{n}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $+:C_{n}\times C_{n}\to C_{n}$ המוגדרת $\left[x\right]_{\sim_{n}}+\left[y\right]_{\sim_{n}}=\left[x+y\right]_{\sim_{n}}$.

חבורת שאריות החלוקה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|C_{n}\right|=n$.

חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה לכל $g,h\in G$ מתקיים $g*h=h*g$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq3}$ אזי $\left(S_{n},\circ\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$ אבלית.

חבורה סופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\in\mathbb{N}$.

חבורה אינסופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\geq\aleph_{0}$.

סדר של חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה סופית אזי $\mathrm{ord}\left(G\right)=\left|G\right|$.

סדר של חבורה: תהא G חבורה אינסופית אזי $\mathrm{ord}\left(G\right)=\infty$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $o\left(G\right)=\mathrm{ord}\left(G\right)$.

תת־חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי $\left(H,*_{\upharpoonright_{H\times H}}\right)$ עבורה

- סגירות לכפל: לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b\in H$.
- סגירות להופכי: לכל $a\in H$ מתקיים $a^{-1}\in H$.
- איבר יחידה: יהי e איבר היחידה של G אזי $e\in H$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ עבורה $\left(H,*_{\upharpoonright_{H\times H}}\right)$ תת־חבורה אזי $H\leq G$.

למה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\in\mathcal{P}\left(G\right)\backslash\left\{ \varnothing\right\}$ אזי $(H\leq G)\Longleftrightarrow($לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b^{-1}\in H)$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהיינה $A,B\subseteq G$ אזי $A*B=\left\{ a*b\mid\left(a\in A\right)\wedge\left(b\in B\right)\right\}$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה תהא $H\subseteq G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\left\{ g\right\}*H$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(n\mathbb{Z},+\right)\leq\left(\mathbb{Z},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\left(\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)\leq\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $R_{n}=\left\{ z\in\mathbb{C}\mid z^{n}=1\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(R_{n},\cdot\right)\leq\left(\mathbb{C}^{*},\cdot\right)$.

טענה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $G\leq G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $\{e\}\le G$.

איבר פיתול: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $g\in G$ עבורו קיים $n\in\mathbb{N}_+$ המקיים $g^n=e$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $T(G)=\{g\in G\mid g \text{ איבר פיתול}\}$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אבלית אזי $T(G)\le G$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי קיים ויחיד $e\in G$ עבורו $a*e=e*a=a$ לכל $a\in G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a\in G$ אזי קיים ויחיד $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $a\in G$ ויהי $b\in G$ איבר הופכי ל־a אזי $a^{-1}=b$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהיו $a,b\in G$ אזי $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a\in G$ אזי $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$.

מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c\in G$ עבורם $a*b=a*c$ אזי $b=c$.

מסקנה כלל צמצום מימין: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c\in G$ עבורם $b*a=c*a$ אזי $b=c$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $g\in G$ אזי $g^0=e$.

הגדרה: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $g\in G$ אזי $g^n=g*g^{n-1}$.

סימון: תהא G חבורה יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $g\in G$ אזי $g^{-n}=(g^n)^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $g\in G$ אזי $g^{-n}=\left(g^{-1}\right)^n$.

חבורת המכפלה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות נגדיר $(g,h)\cdot(g',h')=(g*g',h\otimes h')$ לכל $g,g'\in G$ ולכל $h,h'\in H$ אזי $(G\times H,\cdot)$.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי חבורת המכפלה הינה חבורה.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי (חבורת המכפלה אבלית)$\Longleftrightarrow$(H,G אבליות).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K\le G$ אזי $(H*K\le G)\Longleftrightarrow(HK=KH)$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K\le G$ אזי $(H\cup K\le G)\Longleftrightarrow(H\cap K\in\{H,K\})$.

הגדרה: תהא X קבוצה ותהא $Y\subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y)=\{\pi\in S(X)\mid \forall y\in Y.\pi(y)=y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ותהא $Y\subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y)\le S(X)$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $\{H_i\}_{I\in I}\subseteq\mathcal{P}(G)$ באשר $H_i\le G$ לכל $i\in I$ אזי $\bigcap_{i\in I}H_i\le G$.

הגדרה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\mathcal{F}(X)=\{H\le G\mid X\subseteq H\}$.

החבורה שנוצרת על ידי תת־קבוצה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי H $\langle X\rangle=\bigcap_{H\in\mathcal{F}(X)}H$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\langle X\rangle\le G$.

טענה מינימליות החבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $X\subseteq G$ ותהא $H\le G$ עבורה $X\subseteq H$ אזי $\langle X\rangle\subseteq H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $X\subseteq G$ אזי $\langle X\rangle=\left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i}\;\middle|\;(k\in\mathbb{N})\wedge\left(x\in X^k\right)\wedge\left(s\in\{\pm1\}^k\right)\right\}$.

קבוצת יוצרים של חבורה: תהא G חבורה אזי $X\subseteq G$ עבורה $\langle X\rangle=G$.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

חבורה ציקלית: חבורה G עבורה קיים $g\in G$ המקיים $\langle g\rangle=G$.

למה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\langle g\rangle=\left\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m\in\mathbb{Z}$ ויהי $g\in G$ אזי $g^{n+m}=g^n*g^m$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m\in\mathbb{Z}$ ויהי $g\in G$ אזי $(g^n)^m=g^{n\cdot m}$.

למה: תהא G חבורה אזי (G ציקלית)$\Longleftrightarrow$(קיים $g\in G$ עבורו $G=\left\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$).

מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.

סדר של איבר: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}(g)=\text{ord}(\langle g\rangle)$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}(g)=\min\{n\in\mathbb{N}_+\mid g^n=e\}$.

הערה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ עבורו $\text{ord}(g)$ לא קיים אזי $\text{ord}(g)=\infty$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $g\in G$ באשר $\text{ord}(g)<\infty$ אזי $(\text{ord}(g)\,|n)\Longleftrightarrow(g^n=e)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $i\in\mathbb{Z}_n$ אזי $(\langle i\rangle=\mathbb{Z}_n)\Longleftrightarrow$($i,n$ זרים).

טענה: תהא G חבורה ציקלית ותהא $H\le G$ אזי H ציקלית.

טענה: $(\mathbb{Q},+)$ אינה נ"ס.

קוסט ימני: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $H * g$.
קוסט שמאלי: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $g * H$.
נציג של קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי Hg קוסט ימני אזי g.
נציג של קוסט שמאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי אזי g.
מסקנה: תהא G חבורה אבלית תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $Hg = gH$.
מסקנה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$.
טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H) \Longleftrightarrow (gH = H)$.
טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $(g \in H) \Longleftrightarrow (Hg = H)$
סימון: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי ${}^{G}/_{H} = \{gH \mid g \in G\}$.
סימון: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי ${}_{H}\backslash^{G} = \{Hg \mid g \in G\}$.
משפט: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי ${}^{G}/_{H}$ חלוקה של G.
טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי $\left(g_2^{-1} g_1 \in H\right) \Longleftrightarrow (g_1 H = g_2 H)$.
הקוסט הטריוואלית: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי eH.
אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $[G : H] = |{}^{G}/_{H}|$.
טענה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $[G : H] = |{}_{H}\backslash^{G}|$.
טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H \le G$ אזי $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot [G : H]$.
משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא $H \le G$ אזי $\text{ord}(H) \mid \text{ord}(G)$.
מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G)$.
טענה: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ותהא $K \le H$ אזי $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.
מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי לכל $g \in G \backslash \{e\}$ מתקיים $G = \langle g \rangle$.
מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי G ציקלית.
מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(n, p) = 1$ אזי $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
למה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \le G$ חבורות סופיות אזי $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.
טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p > q$ ותהא G חבורה באשר $|G| = pq$ אזי לכל $H, K \le G$ באשר $\text{ord}(H) = p$ וכן $\text{ord}(K) = p$ מתקיים $K = H$.
טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 3}$ אזי $\left({}^{S_n}/_{\text{Stab}(1)}\right) \cap \left({}_{\text{Stab}(1)}\backslash^{S_n}\right) = \{\text{Stab}(1)\}$.
קוסט כפול: תהא G חבורה תהיינה $H, K \le G$ ויהי $g \in G$ אזי HgK.
טענה: תהא G חבורה ותהיינה $H, K \le G$ אזי $\{HgK \mid g \in G\}$ חלוקה של G.
הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי $\varphi : G \to H$ המקיימת
- שימור איבר יחידה: $\varphi(e_G) = e_H$.
- שימור כפל: לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
- שימור הופכי: לכל $g \in G$ מתקיים $\varphi\left(g^{-1}\right) = \varphi(g)^{-1}$.

טענה: תהיינה G, H חבורות ותהא $\varphi : G \to H$ אזי (φ הומומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi\left(a \cdot b^{-1}\right) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1}$).
גרעין של הומומורפיזם: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.
למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם אזי
- $\text{Im}(\varphi) \le H$.
- $\ker(\varphi) \le G$.
- (φ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\ker(\varphi) = \{e_G\}$).

טענה: תהיינה G, H, K חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $\psi : H \to K$ הומומורפיזם אזי $\psi \circ \varphi$ הומומורפיזם.
טענה: תהיינה G, H חבורות יהי $\varphi : G \to H$ הומומורפיזם ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(\varphi(g)) \mid \text{ord}(g)$.
טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם.
טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא G חבורה אזי $\varphi : G \to \{e\}$ המוגדרת $\varphi(g) = e$ לכל $g \in G$ הינה הומומורפיזם.
טענה ההומומורפיזם ההכלה: תהא G חבורה ותהא $H \le G$ אזי $\text{Id} : H \to G$ הינו הומומורפיזם.
טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $\det : \text{GL}(V) \to \mathbb{F}^*$ הינו הומומורפיזם.
מטריצת תמורה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \to \text{GL}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(\rho(\sigma))_{i,j} = \begin{cases} 1 & j = \sigma(i) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ לכל $i, j \in [n]$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ תהא $\sigma\in S_n$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\rho\left(\sigma\right)\cdot v=\begin{pmatrix}v_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ v_{\sigma(n)}\end{pmatrix}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\rho:S_n\to\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\det\left(\rho\left(\sigma\right)\right)\in\left\{\pm1\right\}$.

סימן של תמורה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathrm{sign}:S_n\to\left\{\pm1\right\}$ המוגדרת $\mathrm{sign}=\det\circ\rho$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי sign הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}\left(\sigma\right)=\frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}\left(\sigma\right)=\left(-1\right)^{\left|\left\{(i,j)\in[n]^2\mid(i<j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))\right\}\right|}$.

חבורת התמורות הזוגיות: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n=\ker\left(\mathrm{sign}\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n\leq S_n$.

איזומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם הפיך $\varphi:G\to H$.

סימון: תהיינה G,H חבורות איזומורפיות אזי $G\cong H$.

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם אזי φ^{-1} איזומורפיזם.

למה: תהיינה G,H,K חבורות יהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם ויהי $\psi:H\to K$ איזומורפיזם אזי $\psi\circ\varphi$ איזומורפיזם.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה של חבורות אזי $\cong$ יחס שקילות על $\mathcal{A}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong R_n$.

טענה: תהיינה G,H חבורות תהא $S\subseteq G$ באשר $\left\langle S\right\rangle=G$ ויהיו $\varphi,\psi:G\to H$ הומומורפיזמים באשר $\varphi_{\restriction_S}=\psi_{\restriction_S}$ אזי $\varphi=\psi$.

מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם חח"ע $\varphi:G\to H$.

אפימורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם על $\varphi:G\to H$.

אוטומורפיזם: תהא G חבורה אזי איזומורפיזם $\varphi:G\to G$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Aut}\left(G\right)=\left\{\varphi:G\to G\mid\text{אוטומורפיזם }\varphi\right\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\left(\mathrm{Aut}\left(G\right),\circ\right)$ חבורה.

חבורת קליין: $K=C_2\times C_2$.

טענה: חבורת קליין הינה אבלית.

טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.

טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־C_4.

פונקציית הצמדה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי $c_g:G\to G$ המוגדרת $c_g\left(x\right)=gxg^{-1}$ לכל $x\in G$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g\in G$ אזי c_g אוטומורפיזם.

אוטומורפיזם פנימי: תהא G חבורה אזי אוטומורפיזם $\varphi:G\to G$ עבורו קיים $g\in G$ המקיים $\varphi=c_g$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Inn}\left(G\right)=\left\{c_g\mid g\in G\right\}$.

תת־חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי חבורה $H\leq G$ עבורה לכל $g\in G$ מתקיים $c_g\left(H\right)=H$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ נורמלית אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ התב"ש

- $H\trianglelefteq G$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gHg^{-1}=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gH=Hg$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg\subseteq H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $H\subseteq g^{-1}Hg$.
- $\left.G\middle/H\right.=\left.H\middle\backslash G\right.$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H\leq G$ באשר $\left[G:H\right]=2$ אזי $H\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathrm{Inn}\left(G\right)\trianglelefteq\mathrm{Aut}\left(G\right)$.

תת־חבורה אופיינית: תהא G חבורה אזי $K\leq G$ עבורה לכל $\varphi\in\mathrm{Aut}\left(G\right)$ מתקיים $\varphi\left(K\right)=K$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $K\leq G$ אופיינית אזי $K\ \mathrm{char}\ G$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $K\ \mathrm{char}\ G$ אזי $K\trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H\trianglelefteq G$ ותהא H char K אזי $K\trianglelefteq G$.

מרכז של חבורה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)=\left\{ g\in G\mid\forall h\in G.gh=hg\right\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)\trianglelefteq G$.

חבורת הייזנברג: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}\right)=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}1 & a & b\\ & 1 & c\\ & & 1\end{smallmatrix}\right)\mid a,b,c\in\mathbb{F}\right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}\right)$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{Z}\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{F}\right)\right)\cong\left(\mathbb{F},+\right)$.

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי $\ker\left(\varphi\right)\trianglelefteq G$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_{n}\trianglelefteq S_{n}$.

חבורה פשוטה: חבורה G עבורה לכל $H\trianglelefteq G$ מתקיים $H\in\left\{ \left\{ e\right\} ,G\right\}$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי C_{p} פשוטה.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ פשוטה.

הגדרה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ נגדיר $*:{}^{G}/_{N}\times{}^{G}/_{N}\to{}^{G}/_{N}$ כך $\left(gN\right)*\left(hN\right)=\left(g*h\right)N$.

חבורת המנה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי $\left({}^{G}/_{N},*\right)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי חבורת המנה הינה חבורה.

העתקת המנה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי $q:G\to{}^{G}/_{N}$ המוגדרת $q\left(g\right)=gN$.

טענה: תהא G חבורה תהא $N\trianglelefteq G$ ותהא q העתקת המנה אזי

- q הינה הומומורפיזם.
- $\ker\left(q\right)=N$.
- q על.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי $\left(H\trianglelefteq G\right)\Longleftrightarrow$(קיים אוטומורפיזם $\varphi:G\to G$ עבורו $H=\ker\left(\varphi\right)$).

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_{n}$.

משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי ${}^{G}/_{\ker\left(\varphi\right)}\cong\mathrm{Im}\left(\varphi\right)$.

טענה: תהא G חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $G\cong\mathbb{Z}$.
- קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $G\cong\mathbb{Z}_{n}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\left|{}^{G}/_{\mathcal{Z}\left(G\right)}\right|\notin\mathbb{P}$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $H,K\trianglelefteq G$ באשר $HK=G$ וכן $H\cap K=\left\{ e\right\}$ אזי $G\cong H\times K$.

מסקנה משפט השאריות הסיני: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ זרים אזי $\mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_{n}\times\mathbb{Z}_{m}$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית תהא $H\le G$ מאינדקס p ותהא $N\trianglelefteq G$ מאינדקס p באשר $N\ne H$ אזי $G=HN$ וכן $p^{2}|\mathrm{ord}\left(G\right)$.

חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H,K חבורות ויהי $\varphi:K\to\mathrm{Aut}\left(H\right)$ הומומורפיזם נגדיר $\left(h,k\right)\cdot\left(h',k'\right)=\left(h\cdot\varphi\left(k\right)\left(h'\right),k\cdot k'\right)$ לכל $h,h'\in H$ ולכל $k,k'\in K$ אזי $\left(H\times K,\cdot\right)$.

סימון: תהיינה H,K חבורות ויהי $\varphi:K\to\mathrm{Aut}\left(H\right)$ אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה $H\rtimes_{\varphi}K$.

טענה: תהיינה H,K חבורות ויהי $\varphi:K\to\mathrm{Aut}\left(H\right)$ אזי $H\rtimes_{\varphi}K$ הינה חבורה.

טענה: תהיינה H,K חבורות נגדיר $\varphi:K\to\mathrm{Aut}\left(H\right)$ כך $\varphi\left(k\right)=\mathrm{Id}_{H}$ לכל $k\in K$ אזי $H\rtimes_{\varphi}K\cong H\times K$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathrm{Aff}\left(\mathbb{F}\right)=\left\{ f:\mathbb{F}\to\mathbb{F}\mid\exists a\in\mathbb{F}^{\times}\left(\exists b\in\mathbb{F}\left(\forall x\in\mathbb{F}\left(f\left(x\right)=ax+b\right)\right)\right)\right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\left(\mathrm{Aff}\left(\mathbb{F}\right),\circ\right)$ חבורה.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה נגדיר $\varphi:\mathbb{F}^{\times}\to\mathrm{Aut}\left(\mathbb{F}\right)$ כך $\varphi\left(a\right)\left(b\right)=ab$ לכל $a\in\mathbb{F}^{\times}$ ולכל $b\in\mathbb{F}$ אזי $\mathrm{Aff}\left(\mathbb{F}\right)\cong\mathbb{F}\rtimes_{\varphi}\mathbb{F}^{\times}$.

סימון: יהי $P\subseteq\mathbb{R}^{2}$ מצולע משוכלל אזי $\mathrm{Iso}\left(P\right)=\left\{ \varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}\mid\left(\text{איזומטריה }\varphi\right)\wedge\left(\varphi\left(P\right)=P\right)\right\}$.

החבורה הדיהדרלית: יהי $P\subseteq\mathbb{R}^{2}$ מצולע משוכלל בעל n קודקודים אזי $D_{n}=\mathrm{Iso}\left(P\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\left(D_{n},\circ\right)$ חבורה.

סימון: תהא X קבוצה ויהיו $\varphi_{1}\ldots\varphi_{n}$ פרידיקטים על X אזי $\left\langle X\mid\varphi_{1}\ldots\varphi_{n}\right\rangle =\left\{ x\in\left\langle X\right\rangle \mid\bigwedge_{i=1}^{n}\varphi_{i}\left(x\right)\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $D_{n}\cong\left\langle r,s\mid s^{2}=e,r^{n}=e,srs=r^{-1}\right\rangle$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי

- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\left\{ D_{n},\left\langle sr,r^{2}\right\rangle ,\left\langle s,r^{2}\right\rangle \right\} \cup\left\{ H\le\left\langle r\right\rangle \right\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_{n}.

- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\{D_n\}\cup\{H\le\langle r\rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n.

טענה: $\mathcal{H}(\mathbb{F}_2)\cong D_4$.

טענה: תהא G חבורה יהי $K\le G$ יהי $H\trianglelefteq G$ באשר $HK=G$ וכן $H\cap K=\{e\}$ ונגדיר $\varphi:K\to\text{Aut}(H)$ כך $\varphi(k)=c_k$ לכל $k\in K$ אזי $G\cong H\rtimes_{\varphi}K$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ ונגדיר $\varphi:C_2\to\text{Aut}(C_n)$ כך $\varphi(k)=c_k$ לכל $k\in K$ אזי $D_n\cong C_n\rtimes_{\varphi}C_2$.

טענה: $K\trianglelefteq A_4$.

חבורה פתירה: חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0\ldots G_n\le G$ המקיימות

- $G_0=\{e\}$ וכן $G_n=G$.
- $G_{i-1}\trianglelefteq G_i$ לכל $i\in[n]$.
- G_i/G_{i-1} אבלית לכל $i\in[n]$.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי G פתירה.

טענה: תהא G חבורה פשוטה באשר G אינה אבלית אזי G אינה פתירה.

משפט: יהי $n\in[4]$ אזי S_n פתירה.

חבורה נילפוטנטית: חבורה G עבורה קיים $n\in\mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0\ldots G_n\le G$ המקיימות

- $G_0=\{e\}$ וכן $G_n=G$.
- $G_{i-1}\trianglelefteq G$ לכל $i\in[n]$.
- $G_i/G_{i-1}\le\mathcal{Z}(G/G_{i-1})$ לכל $i\in[n]$.

טענה: תהא G חבורה נילפוטנטית אזי G פתירה.

משפט האיזומורפיזם השני: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי $H/(H\cap N)\cong(HN)/N$.

טענה: תהא G חבורה ותהיינה $N,K\trianglelefteq G$ באשר $K\le N$ אזי $N/K\trianglelefteq G/N$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה $N,K\trianglelefteq G$ באשר $K\le N$ אזי $G/N\cong(G/K)/(N/K)$.

משפט ההתאמה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי קיימת $\Phi:\{H\le G\mid N\le H\}\to\{H\mid H\le G/N\}$ חח"ע ועל המקיימת

- לכל $K\trianglelefteq G$ המקיימת $K\le N$ מתקיים $\Phi(K)\trianglelefteq G/N$.
- משמרת מנות: לכל $K\trianglelefteq G$ המקיימת $K\le N$ מתקיים $G/K\cong\Phi(G)/\Phi(K)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי (N נורמלית מקסימלית)$\Longleftrightarrow$(G/N פשוטה).

פעולה שמאלית של חבורה על קבוצה: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי פונקציה $f:G\times X\to X$ המקיימת

- לכל $x\in X$ מתקיים $f(e,x)=x$.
- לכל $g,h\in G$ ולכל $x\in X$ מתקיים $f(g\cdot h,x)=f(g,f(h,x))$.

הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.

סימון: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $f:G\times X\to X$ פעולה על G אזי $f(g,x)=g.x$.

סימון: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $G\curvearrowright X=\{f:G\times X\to X\mid \text{פעולה } f\}$.

הפעולה השמאלית: תהא G חבורה נגדיר $f\in G\curvearrowright G$ כך $f(g,x)=gx$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.

הפעולה הימנית: תהא G חבורה נגדיר $f\in G\curvearrowright G$ כך $f(g,x)=xg^{-1}$ אזי f.

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.

הערה: מכאן והלאה נאמר כי G פועלת על X ונסמן $g.x$ את הפעולה.

מסלולים: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ ויהי $x\in X$ אזי $\text{orb}_{\alpha}(x)=\{g.x\mid g\in G\}$.

סימון: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $o(x)=\text{orb}(x)$.

פעולה טרנזיטיבית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f\in G\curvearrowright X$ עבורה קיים $x\in X$ המקיים $o(x)=X$.

מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $\text{Stab}_G(x)=\{g\in G\mid g.x=x\}$.

אוסף נקודות השבת: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $g\in G$ אזי $\text{Fix}_X(g)=\{x\in X\mid g.x=x\}$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x\in X$ אזי $\text{Stab}_G(x)\le G$.

פעולה חופשית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f\in G\curvearrowright X$ עבורה לכל $x\in X$ מתקיים $\text{Stab}_G(x)=\{e\}$.

למה: תהא G חבורה תהא X קבוצה תהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ ויהי $g\in G$ אזי $\alpha(g)\in S(X)$.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha\in G\curvearrowright X$ אזי $\varphi_{\alpha}:G\to S(X)$ המוגדרת $\varphi_{\alpha}(g)(x)=\alpha(g,x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי φ_α הומומורפיזם.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \to S(X)$ הומומורפיזם אזי $\alpha_\varphi : G \times X \to X$ המוגדרת $\alpha_\varphi(g,x) = \varphi(g)(x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \to S(X)$ הומומורפיזם אזי α_φ פעולה.

למה מסלול מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $|o(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$.

למה של ברנסייד: תהא X קבוצה ותהא G חבורה סופית הפועלת על X אזי $|\{o(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}_X(g)|$.

הפעולה על הקוסטים השמאליים: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $\alpha \in G \curvearrowright {}^{G}/_{H}$ המוגדרת $\alpha(g, g'H) = gg'H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.

פעולות אקוואריאנטיות/שקולות: תהיינה X, Y קבוצות ותהא G חבורה אזי $(\alpha, \beta) \in (G \curvearrowright X) \times (G \curvearrowright Y)$ עבורן קיימת $F : X \to Y$ חח"ע ועל המקיימת $F(\alpha(g,x)) = \beta(g, F(x))$ לכל $g \in G$ ולכל $x \in X$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית ויהי $x \in X$ עבורו $o(x) = X$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים של ${}^{G}/_{\text{Stab}_G(x)}$ אקוואריאנטית ל־α.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי קיימת $H \leq G$ עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים אקוואריאנטית ל־α.

טענה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $\{o(x) \mid x \in X\}$ חלוקה של X.

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי לכל $x \in X$ מתקיים $o(x) = X$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ איזומטריות של $\mathbb{R}^3$ ותהא $p \in \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(P \times \{0\})$ אזי $\text{Poly}(p) = |\{\varphi_i(P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i(P \times \{0\})\}|$.

גוף אפלטוני: קבוצה קמורה לא זניחה $K \subseteq \mathbb{R}^3$ עבורה קיים מצולע משוכלל $P \subseteq \mathbb{R}^2$ וקיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן

- פאות איזומטריות: $\partial K = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(P \times \{0\})$.
- קודקוד משותף זהה כמות: לכל קודקודים $v_1, v_2 \in K$ מתקיים $\text{Poly}(v_1) = \text{Poly}(v_2)$.

מספר פאות של גוף אפלטוני: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $n \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו קיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן $\partial K = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(P \times \{0\})$ באשר $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}(P) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid (\text{איזומטריה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\right\}$.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}_+(P) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid (\text{איזומטריה משמרת אוריינטציה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\right\}$.

הגדרה סימון שלפלי: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני בעל $n \in \mathbb{N}$ פאות ויהי $v \in K$ קודקוד אזי $\{n, \text{Poly}(k)\}$.

הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.

דודקהדרון: גוף אפלטוני $K \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל סימון שלפלי $\{5, 3\}$.

טענה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{Iso}_+(D) \cong A_5$.

מסקנה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{ord}(\text{Iso}_+(D)) = 60$.

משפט קיילי: תהא G חבורה אזי קיימת קבוצה X וקיימת $H \leq S(X)$ עבורה $G \cong H$.

מסקנה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = \aleph_0$ אזי קיימת $H \leq S(\mathbb{N})$ עבורה $G \cong H$.

משפט קושי: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p \mid \text{ord}(G)$ אזי קיים $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g) = p$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p \mid \text{ord}(G)$ אזי קיימת $H \leq G$ ציקלית עבורה $\text{ord}(H) = p$.

טענה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = 6$ אזי $G \cong \mathbb{Z}_6$ או $G \cong S_3$.

פעולת ההצמדה: תהא G חבורה אזי $\alpha \in G \curvearrowright G$ המוגדרת $\alpha(g,h) = c_g(h)$.

סימון: תהא G חבורה ויהיו $h, g \in G$ אזי $h^g = g^{-1}hg$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $g, h, k \in G$ אזי $h^{g \cdot k} = (h^g)^k$.

מחלקת הצמידות: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = \left\{ghg^{-1} \mid g \in G\right\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = o(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי $\{[h] \mid h \in G\}$ חלוקה של G.

הממרכז של איבר: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$.

טענה: תהא G חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \text{Stab}_G(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) \leq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)$ אופיינית.

טענה: תהא G חבורה אזי $G/\mathcal{Z}(G) \cong \text{Inn}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $|[g]| = [G : C_G(g)]$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו g,h,k באשר $k = ghg^{-1}$ אזי $|C_G(k)| = |C_G(h)|$.

משפט משוואת מחלקות הצמידות: תהא G חבורה סופית ותהא $C \subseteq G$ קבוצת נציגים של $\{[h] \mid h \in G\}$ אזי $\sum_{g\in C} \frac{1}{|C_G(g)|} = 1$.

טענה: תהא G חבורה סופית אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcup \{[g] \mid (g \in G) \wedge (|[g]| = 1)\}$.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ תהיינה $\alpha, \beta \in S_n$ באשר $\beta = (\, m_{1,1} \, \dots \, m_{1,\ell_1} \,) \circ \ldots \circ (\, m_{b,1} \, \dots \, m_{b,\ell_b} \,)$ פירוק למעגלים זרים אזי $\alpha\beta\alpha^{-1} = (\, \alpha(m_{1,1}) \, \dots \, \alpha(m_{1,\ell_1}) \,) \circ \ldots \circ (\, \alpha(m_{b,1}) \, \dots \, \alpha(m_{b,\ell_b}) \,)$.

למה: A_5 פשוטה.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ ותהא $H \trianglelefteq A_n$ עבורה קיים מעגל π בגודל שלוש המקיים $\pi \in H$ אזי $H = A_n$.

למה: A_6 פשוטה.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ אזי A_n פשוטה ואינה אבלית.

הישר הפרויקטיבי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ונגדיר $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{F}^2 \backslash \{0\} \mid \exists \lambda \in \mathbb{F}^\times \, (x = \lambda y)\right\}$ אזי $\mathbb{FP} = {}^{(\mathbb{F}^2 \backslash \{0\})}/_{R}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\mathcal{Z}(\text{GL}_n(\mathbb{F})) = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\}$.

סימון: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\text{PGL}_n(\mathbb{F}) = {}^{\text{GL}_n(\mathbb{F})}/_{\mathcal{Z}(\text{GL}_n(\mathbb{F}))}$.

חבורת־p: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה קיים $n \in \mathbb{N}$ המקיים $|G| = p^n$.

משפט: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורת־p אזי $\mathcal{Z}(G) \neq \{e\}$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה מסדר p^2 אזי G אבלית.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורת־p אזי G נילפוטנטית.

תת־חבורת־p סילו: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהיו $m,k \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(p,m) = 1$ ותהא G חבורה באשר $|G| = p^k \cdot m$ אזי $H \leq G$ באשר $|H| = p^k$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\Longleftrightarrow$(H חבורת־p וכן לכל $K \leq G$ חבורה־p מתקיים $|K| \leq |H|$).

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי (H תת־חבורה־p סילו)$\Longleftrightarrow$(H חבורת־p וכן $p \not| [G : H]$).

סימון: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $\text{Syl}_p(G) = \{H \leq G \mid G \text{ של סילו } p\text{־תת־חבורה } H\}$.

סימון: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p = \left|\text{Syl}_p(G)\right|$.

למה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהיו $n,m \in \mathbb{N}_+$ באשר $\gcd(p,m) = 1$ אזי $p \not| \binom{p^n \cdot m}{p^n}$.

משפט סילו הראשון: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי קיימת $H \leq G$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p \geq 1$.

המנרמל של חבורה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $N_G(H) = \left\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\right\}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $N_G(H) \leq G$ וכן $H \trianglelefteq N_G(H)$.

למה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהיו $m,k \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(p,m) = 1$ תהא G חבורה באשר $|G| = p^k \cdot m$ ותהיינה $H,K \leq G$ חבורות־p־סילו באשר $H \neq K$ אזי $H \nsubseteq N_G(K)$.

משפט סילו השני: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהיינה H,K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g \in G$ עבורו $gHg^{-1} = K$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ותהא H תת־חבורה־p סילו של G אזי $(H \trianglelefteq G) \iff (n_p = 1)$.

קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $Y \subseteq X$ עבורה לכל $g \in G$ ולכל $y \in Y$ מתקיים $g.y \in Y$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ותהא $Y \subseteq X$ אזי (Y הינה G־שמורה)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\mathcal{O} \subseteq X$ עבורה $Y = \bigcup_{x\in\mathcal{O}} o(x)$).

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית ונגדיר $\alpha \in G \curvearrowright \text{Syl}_p(G)$ כך $\alpha(g,H) = gHg^{-1}$ אזי α טרנזיטיבית.

למה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה תהא $H \leq G$ תת־חבורת־p סילו תהא $R \subseteq \text{Syl}_p(G)$ באשר $H \in R$ וכן R הינה H־שמורה אזי $|R| \equiv 1 \mod p$.

משפט סילו השלישי: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p \equiv 1 \mod p$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהיו $m,k \in \mathbb{N}$ באשר $\gcd(p,m) = 1$ ותהא G חבורה באשר $|G| = p^k \cdot m$ אזי $n_p | m$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי $n_p | \text{ord}(G)$.

מסקנה משפטי סילו: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה סופית אזי

1. קיימת $G \leq H$ באשר H תת־חבורה־p סילו של G.
2. תהיינה H,K תת־חבורות־p סילו של G אזי קיים $g\in G$ עבורו $gHg^{-1}=K$.
3. $n_p\equiv 1 \mod p$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $H\leq S_p$ באשר $|H|=p$ אזי קיים p־מעגל $\pi\in S_p$ עבורו $H=\langle\pi\rangle$.

מסקנה משפט ווילסון: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $(p-1)!\equiv -1 \mod p$.

טענה: יהיו $p,q\in\mathbb{P}$ באשר $p<q$ וכן $q\not\equiv 1 \mod p$ ותהא G חבורה מסדר pq אזי G ציקלית.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}_{>2}$ ותהא G חבורה מסדר $2p$ אזי $G\cong C_{2p}$ או $G\cong D_p$.

טענה: תהא G חבורה סופית יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $P\leq G$ תת־חבורת־p אזי $N_G\left(N_G\left(P\right)\right)=N_G\left(P\right)$.

סימון: תהא $(A,+)$ חבורה אזי $e_A=0$ וכן $-x=x^{-1}$ לכל $x\in A$ וכן $g^n=ng$ לכל $n\in\mathbb{Z}$ ולכל $g\in A$.

חבורת המכפלה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i\mid i\in I\}$ חבורות נגדיר $(g\cdot h)_i=g_i\cdot h_i$ לכל $g,h\in\prod_{i\in I}G_i$ ולכל $i\in I$ אזי $(\prod_{i\in I}G_i,\cdot)$.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i\mid i\in I\}$ חבורות אזי $\prod_{i\in I}G_i$ חבורה.

חבורת הסכום הישר החיצוני: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i\mid i\in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i\in I}G_n=\left\{g\in\prod_{i\in I}G_i \;\middle|\; |\{i\in I\mid g_i\neq e_{G_i}\}|\in\mathbb{N}\right\}$.

חבורת סכום ישר פנימי: חבורה G עבורה קיימת קבוצה I באשר $|I|\geq 2$ וקיימות $\{G_i\trianglelefteq G\mid i\in I\}$ באשר $G_i\cap\left(\bigoplus_{j\neq i}G_i\right)=\{e\}$ לכל $i\in I$ וכן $G=\bigoplus_{i\in I}G_n$.

הערה: נקרא לחבורת סכום ישר חיצוני חבורת סכום ישר.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\{G_i\mid i\in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i\in I}G_n\leq\prod_{i\in I}G_i$.

חבורת פיתול: חבורה G עבורה $T\left(G\right)=G$.

חבורה חסרת פיתול: חבורה G עבורה לכל $T\left(G\right)=\{e\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית אזי ${}^{A}/{}_{T(A)}$ חסרת פיתול.

טענה: תהא G חבורה נ"ס ותהא $H\trianglelefteq G$ אזי ${}^{G}/{}_{H}$ נ"ס.

מסקנה: תהיינה G,H,K חבורות באשר $G\cong H\times K$ אזי (G נ"ס)$\Longleftrightarrow$(H,K נ"ס).

חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה אזי $\bigoplus_X\mathbb{Z}$.

בסיס של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X\mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי X.

דרגה של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא $\bigoplus_X\mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי $|X|$.

הערה: תהא X קבוצה אזי נשכן בצורה טבעית את X בתוך החבורה האבלית החופשית עם בסיס X כך $x\mapsto e_x$.

משפט התכונה האוניברסלית: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $f:X\to G$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi:\bigoplus_X\mathbb{Z}\to G$ עבורו $\varphi\left(x\right)=f\left(x\right)$ לכל $x\in X$.

משפט תכונת ההרמה: תהא F חבורה אבלית חופשית תהיינה A,B חבורות אבליות יהי $\varphi:A\to B$ אפימורפיזם ויהי $\psi:F\to B$ הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם $\hat{\psi}:F\to A$ עבורו $\varphi\circ\hat{\psi}=\psi$.

טענת תכונת הפיצול: תהא A חבורה אבלית ותהא $B\leq A$ באשר ${}^{A}/{}_{B}$ אבלית חופשית אזי $A\cong B\oplus {}^{A}/{}_{B}$.

משפט: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי A אבלית חופשית עם בסיס סופי.

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי קיים $k\in\mathbb{N}$ עבורו $A\cong\mathbb{Z}^k$.

למה: תהא A חבורת פיתול אבלית נ"ס אזי A סופית.

משפט: תהא A אבלית נ"ס אזי

- $A\cong {}^{A}/{}_{T(A)}\oplus T\left(A\right)$.
- קיים $k\in\mathbb{N}$ עבורו ${}^{A}/{}_{T(A)}\cong\mathbb{Z}^k$.
- $T\left(A\right)$ סופית.

מסקנה: תהא A אבלית נ"ס אזי קיימת חבורה אבלית סופית B וקיים $k\in\mathbb{N}$ עבורם $A\cong\mathbb{Z}^k\oplus B$.

סימון: תהא G חבורה ויהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $G_p=\{x\in G\mid p|\mathrm{ord}\left(x\right)\}$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $A_p\leq A$.

טענה: תהא A חבורה אבלית ויהי $p\in\mathbb{P}$ אזי A_p חבורת־p.

משפט גאוס: תהא A אבלית סופית אזי $A\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}}A_p$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית ויהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $n_p=1$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי $A=\bigoplus\left\{P\le A\mid\exists p\in\mathbb{P}\left(P\in\mathrm{Syl}_p\left(A\right)\right)\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא A חבורה אבלית מסדר p^n ויהיו $x_1\ldots x_{n+1}\in A$ אזי קיימים $a_1\ldots a_{n+1}\in\mathbb{N}$ עבורם $\sum_{i=1}^{n+1}a_ix_i=0$ וכן קיים $i\in[n+1]$ עבורו $a_i\not\equiv 0\mod p$.

הומומורפיזם נשג: תהיינה G,H חבורות באשר $H\le G$ אזי הומומורפיזם $\pi:G\to H$ עבורו $\pi_{\restriction_H}=\mathrm{Id}_H$.

טענה: תהא G אבלית ותהא $A\le G$ התב"ש

- קיימת $B\le G$ עבורה $B\cap A=\{e\}$ וכן $A+B=G$.
- קיימת $B\le G$ עבורה לכל $g\in G$ קיים ויחיד $a\in A$ וקיים ויחיד $b\in B$ עבורם $g=a+b$.
- קיים הומומורפיזם $\varphi:{}^{G}/_{A}\to G$ עבורו $\nu\circ\varphi=\mathrm{Id}_{G/A}$ באשר $\nu:G\to{}^{G}/_{A}$ העתקת המנה.
- קיימת נשג $\pi:G\to A$.

טענה: תהא A אבלית אזי (A נ"ס)$\iff$(קיים $k\in\mathbb{N}$ וקיימת $G\le\mathbb{Z}^k$ עבורם $A\cong{}^{\mathbb{Z}^k}/_{G}$).

חבורה p־אלמנטרית: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה לכל $g\in G$ מתקיים $\mathrm{ord}\left(g\right)\in\{1,p\}$.

משפט המבנה לחבורות־p אבליות סופיות: יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא A אבלית סופית בעלת סדר p^n אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $n_1\ldots n_k\in\mathbb{N}_+$ באשר $n_{i+1}\le n_i$ לכל $i\in[k-1]$ וכן $\sum_{i=1}^k n_i=n$ עבורם $A\cong\bigoplus_{i=1}^k C_{p^{n_i}}$.

מסקנה משפט המיון לחבורות אבליות סופיות: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ וקיימים ויחידים $m_1\ldots m_k\in\mathbb{N}_+$ באשר $m_i|m_{i+1}$ לכל $i\in[k-1]$ עבורם $A\cong\bigoplus_{i=1}^k C_{m_i}$.

מסקנה: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ קיימים ויחידים $p_1\ldots p_k\in\mathbb{P}$ באשר $p_i\le p_{i+1}$ לכל $i\in[k-1]$ וקיימים ויחידים $t_1\ldots t_k\in\mathbb{N}$ עבורם $A\cong\bigoplus_{i=1}^k C_{p_i^{t_i}}$.

מסקנה: תהיינה A,B,C אבליות סופיות באשר $A\oplus C\cong B\oplus C$ אזי $A\cong B$.

מסקנה: תהיינה A,B אבליות סופיות באשר $A\oplus A\cong B\oplus B$ אזי $A\cong B$.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A\le\mathbb{F}^\times$ סופית אזי A ציקלית.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}_p^\times$ ציקלית.

טענה: תהא A אבלית סופית ותהא $B\le A$ אזי קיימת $C\le A$ עבורה $C\cong{}^{A}/_{B}$.

קרקטר: תהא A אבלית אזי הומומורפיזם $\chi:A\to\mathbb{S}^1$.

החבורה הדואלית: תהא A חבורה אבלית אזי $\hat{A}=\left\{\chi:A\to\mathbb{S}^1\mid \text{קרקטר } \chi\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong\widehat{C_n}$.

טענה: תהיינה A,B אבליות סופיות אזי $\widehat{A\times B}=\hat{A}\times\hat{B}$.

מסקנה: תהא A אלבית סופית אזי $A\cong\hat{A}$.

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}\backslash\{2\}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $U\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\right)=\left\{a\in{}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\mid\exists b\in{}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\left(a\cdot b=1\right)\right\}$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}\backslash\{2\}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $U\left({}^{\mathbb{Z}}/_{p^n\mathbb{Z}}\right)$ ציקלית.

משפט גאוס: תהא T חבורת פיתול אזי $T\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}}T_p$.

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)=\left\{\frac{k}{p^n}\;\middle|\;\left(n\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(k\in\{0,\ldots,p^n-1\}\right)\right\}$.

חבורת פרופר: יהי $p\in\mathbb{P}$ נגדיר $\star:\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)\times\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)\to\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)$ כך $a\star b=(a+b)-\lfloor a+b\rfloor$ אזי $\left(\mathbb{Z}\left(p^\infty\right),\star\right)$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)$ חבורה.

טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)\cong\left\{2^{\pi i\cdot\frac{k}{p^n}}\;\middle|\;\left(n\in\mathbb{N}\right)\wedge\left(k\in\{0,\ldots,p^n-1\}\right)\right\}$.

טענה: ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}\cong\bigoplus_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)$.

איבר מתחלק במספר: תהא G חבורה אבלית ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $a\in G$ עבורו קיים $b\in G$ המקיים $n\cdot b=a$.

חבורה חליקה: חבורה אבלית G עבורה לכל $a\in G$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי a מתחלק ב־n.

מסקנה: ${}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$ חליקה.

טענה: תהיינה D,G חבורות אבליות באשר D חליקה ויהי $\varphi:D\to G$ הומומורפיזם אזי $\mathrm{Im}\left(\varphi\right)$ חליקה.

טענה: תהא I קבוצה ותהא A_i חבורה אבלית לכל $i\in I$ אזי ($\bigoplus_{i\in I}A_i$ חליקה)$\iff$(A_i חליקה לכל $i\in I$).

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{Z}\left(p^\infty\right)$ חליקה.

חבורה מצומצמת: חבורה G עבורה לכל $H\le G$ מתקיים כי H אינה חליקה.

טענה: תהא A אבלית תהא $B\le A$ אבלית ויהי $f:A\to B$ הומומורפיזם נשג אזי קיימת $C\le A$ באשר $B\cap C=\{0\}$ וכן $A=C\oplus B$.

מסקנה: תהא A אבלית ותהא $D\le A$ חליקה אזי קיימת $K\le A$ באשר $D\cap K=\{0\}$ וכן $A=D\oplus K$.

טענה: תהא A אבלית אזי קיימת $D \le A$ חליקה וקיימת $R \le A$ מצומצמת באשר $D \cap R = \{0\}$ וכן $A = D \oplus R$.

טענה: תהא D אבלית חליקה אזי $T(D)$ חליקה.

מסקנה: תהא A אבלית אזי קיימת $R \le A$ מצומצמת קיימת $D \le A$ חליקה וקיימת $F \le D$ חסרת פיתול באשר $D \cap R = \{0\}$ וכן $A = D \oplus R$ וכן $T(D) \cap F = \{0\}$ וכן $D = T(D) \oplus F$ וכן $A = T(D) \oplus F \oplus R$.

משפט: תהא F חבורה אבלית חליקה חסרת פיתול אזי קיימת קבוצה I עבורה $F \cong \bigoplus_I \mathbb{Q}$.

משפט: תהא T חבורת פיתול חליקה אבלית אזי קיים $p \in \mathbb{P}$ וקיימת קבוצה I עבורה $T \cong \bigoplus_I \mathbb{Z}(p^\infty)$.

משפט ארדש־טוראן: תהא G חבורה סופית לא אבלית אזי $\mathbb{P}(xy = yx) \le \frac{5}{8}$.

טענה: קיימת חבורה סופית לא אבלית G עבורה $\mathbb{P}(xy = yx) = \frac{5}{8}$.

קומוטטור: תהא G חבורה ויהיו $g, h \in G$ אזי $[g, h] = g^{-1} h^{-1} g h$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהיו $g, h \in G$ אזי $([g, h] = e) \iff (gh = hg)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $i, j, k \in [n]$ אזי $[I + e_{i,j}, I + e_{j,k}] = e_{i,k}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $i, j, k, \ell \in [n]$ שונים אזי $[I + e_{i,j}, I + e_{j,\ell}] = I$.

משפט הסיבובים של אוילר: תהא $A \in \mathrm{SO}(3)$ אזי קיים ויחיד $v \in \mathbb{S}^2_+$ עבורו $Av = v$.

למה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהיו $g, h \in G$ באשר $[g, h] = e$ אזי $g \cdot \mathrm{Fix}(h) = \mathrm{Fix}(h)$.

הגדרה: תהא G חבורה אזי $[G, G] = \{[g, h] \mid g, h \in G\}$.

חבורת הנגזרת: תהא G חבורה אזי $G' = \langle [G, G] \rangle$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ עבורה $\varphi(X) = X$ לכל $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ אזי $\langle X \rangle \ \mathrm{char}\ G$.

למה: תהא G חבורה אזי $G' \ \mathrm{char}\ G$.

אבליזציה של חבורה: תהא G חבורה אזי $G^{ab} = {}^{G}/_{G'}$.

חבורה מושלמת: חבורה G עבורה $G = G'$.

טענה: תהא G חבורה פשוטה לא אבלית אזי G מושלמת.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 5}$ אזי A_n מושלמת.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ אזי $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ מושלמת.

טענה אור: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 5}$ ויהי $x \in A_n$ אזי קיימות $\pi, \sigma \in S_n$ עבורן $x = [\pi, \sigma]$.

למה אבליזציה: תהא G חבורה אזי

- G^{ab} אבלית.
- לכל חבורה H ולכל אפימורפיזם $\varphi : G \to H$ מתקיים (H אבלית)$\iff$($G' \le \ker(\varphi)$).
- לכל $N \trianglelefteq G$ מתקיים (${}^{N}/_{G}$ אבלית)$\iff$($G' \le N$).

מסקנה: תהא G חבורה מושלמת תהא A חבורה אבלית ויהי $\varphi : G \to A$ הומומורפיזם אזי φ טריוואלי.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $S_n' = A_n$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $S_n^{ab} \cong \{\pm 1\}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ אזי $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))' = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ אזי $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^{ab} = \mathbb{R}^\times$.

סדרת הנגזרת: תהא G חבורה אזי $G^{(0)} = G$ וכן $G^{(n+1)} = \left(G^{(n)}\right)'$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

מסקנה: תהא G חבורה עבורה קיים $n \in \mathbb{N}$ המקיים $G^{(n)} = \{e\}$ אזי G פתירה.

סדרה נורמלית: תהא G חבורה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $G_0 \ldots G_n \le G$ המקיימות

- $G_n = G$ וכן $G_0 = \{e\}$.
- $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$ לכל $i \in [n]$.

משפט: תהא G חבורה אזי (G פתירה)$\iff$(קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $G^{(n)} = \{e\}$).

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ אזי D_n פתירה.

חבורה מטאבלית: חבורה G עבורה $G^{(2)} = \{e\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי (G מטאבלית)$\iff$(קיימת $N \trianglelefteq G$ אבלית עבורה ${}^{G}/_{N}$ אבלית).

תת־חבורה מקסימלית: תהא G חבורה אזי $M \lneq G$ עבורה לכל $N \le G$ מתקיים $M \not\lneq N$.

תת־חבורת פרטיני: תהא G חבורה אזי $\Phi(G) = \bigcap_{\substack{M \le G \\ \text{מקסימלית } M}} M$.

איבר לא־יוצר: תהא G חבורה אזי $g \in G$ עבורו לכל $X \subseteq G$ המקיימת $\langle X \cup \{g\} \rangle = G$ מתקיים $\langle X \rangle = G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\Phi\left(G\right)=\left\{ g\in G\mid g\text{ לא־יוצר}\right\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\Phi\left(G\right)\ \text{char}\ G$.

טענה: תהא G חבורה באשר $G/\mathcal{Z}(G)$ ציקלית אזי G אבלית.

הרחבה של חבורה אבלית בחבורה אבלית: תהא K חבורה אבלית ותהא L חבורה אבלית אזי חבורה G עבורה קיים אפימורפיזם $\varphi:G\to K$ המקיים $\ker\left(\varphi\right)\cong L$.

הרחבה של חבורה בחבורה: תהא Q חבורה ותהא N חבורה אזי חבורה G עבורה $N\trianglelefteq G$ וכן $G/N\cong Q$.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי

- לכל $H\le G$ מתקיים כי H סופית.
- לכל $N\trianglelefteq G$ מתקיים כי G/N סופית.
- לכל הרחבה H של G ב־N מתקיים כי H סופית.

משפט: תהא G חבורת פיתול אזי

- לכל $H\le G$ מתקיים כי H פיתול.
- לכל $N\trianglelefteq G$ מתקיים כי G/N פיתול.
- לכל הרחבה H של G ב־N מתקיים כי H פיתול.

משפט: תהא G חבורה פתירה אזי

- לכל $H\le G$ מתקיים כי H פתירה.
- לכל $N\trianglelefteq G$ מתקיים כי G/N פתירה.
- לכל הרחבה H של G ב־N מתקיים כי H פתירה.

סדרת הרכב: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי סדרה נורמלית $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ עבורה G_{i}/G_{i-1} פשוטה לכל $i\in[n]$.

גורמי הרכב: תהא G חבורה ותהא $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ סדרת הרכב אזי $\left\{ G_{1}/G_{0},\ldots,G_{n}/G_{n-1}\right\}$.

סדרה מקסימלית: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי סדרה נורמלית $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ עבורה לכל $i\in[n]$ לא קיים $H\le G$ עבורו $G_{i}\triangleleft H\triangleleft G_{i-1}$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ סדרה נורמלית אזי ($G_{0}\ldots G_{n}$ סדרת הרכב)$\Longleftrightarrow$($G_{0}\ldots G_{n}$ סדרה מקסימלית).

סדרות הרכב שקולות: תהא G חבורה אזי סדרות הרכב $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ וכן $H_{0}\ldots H_{m}\le G$ עבורן קיימת הפיכה $\pi:[n]\to[m]$ המקיימת $G_{i}/G_{i-1}\cong H_{\pi(i)}/H_{\pi(i-1)}$ לכל $i\in[n]$.

עידון של סדרה נורמלית: תהא G חבורה ותהא $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ סדרה נורמלית אזי סדרה נורמלית $\tilde{G}_{0}\ldots\tilde{G}_{m}\le G$ עבורה $m\ge n$ וכן קיימת סדרה עולה ממש $i:\left\{ 0\ldots n\right\} \to\left\{ 0\ldots m\right\}$ באשר $i_{0}=0$ וכן $i_{n}=m$ וכן $\tilde{G}_{i_{j}}=G_{j}$ לכל $j\in\left\{ 0\ldots n\right\}$.

למה למת הפרפר של זסנאוס: תהא G חבורה תהיינה $A,B,A^{\star},B^{\star}\le G$ באשר $A\trianglelefteq A^{\star}$ וכן $B\trianglelefteq B^{\star}$ אזי

- $A\left(B\cap A^{\star}\right)\trianglelefteq A\left(B^{\star}\cap A^{\star}\right)$ וכן $B\left(A\cap B^{\star}\right)\trianglelefteq B\left(A^{\star}\cap B^{\star}\right)$.
- $\left(A(B^{\star}\cap A^{\star})\right)/\left(A(B\cap A^{\star})\right)\cong\left(B(A^{\star}\cap B^{\star})\right)/\left(B(A\cap B^{\star})\right)$.

משפט העידון של שרייר: תהא G חבורה תהיינה $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ וכן $H_{0}\ldots H_{m}\le G$ סדרות הרכב אזי קיים עידון $\tilde{G}_{0}\ldots\tilde{G}_{N}\le G$ של $G_{0}\ldots G_{n}$ וקיים עידון $\tilde{H}_{0}\ldots\tilde{H}_{M}\le G$ של $H_{0}\ldots H_{m}$ באשר $\tilde{G}_{0}\ldots\tilde{G}_{N}$ שקולה ל־$\tilde{H}_{0}\ldots\tilde{H}_{M}$.

משפט ז'ורדן־הולדר: תהא G חבורה אזי

- אם G סופית אזי G בעלת סדרת הרכב.
- לכל סדרות הרכב $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ וכן $H_{0}\ldots H_{m}\le G$ מתקיים כי $G_{0}\ldots G_{n}$ שקולה ל־$H_{0}\ldots H_{m}$.

טענה: תהא G פתירה אזי (G בעלת סדרת הרכב)$\Longleftrightarrow$(G סופית).

טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H\trianglelefteq G$ אזי קיימת סדרת הרכב $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ עבורה קיים $i\in\left\{ 0\ldots n\right\}$ המקיים $G_{i}=H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $G_{0}\ldots G_{n}\le G$ סדרת הרכב באשר קיים $i\in[n]$ עבורו G_{i}/G_{i-1} אינה אבלית אזי G אינה פתירה.

הסדרה המרכזית העולה: תהא G חבורה אזי $G^{0}=\left\{ e\right\}$ וכן $G^{i+1}\le G$ מקיימת $G^{i+1}/G^{i}\cong\mathcal{Z}\left(G/G^{i}\right)$ לכל $i\in\mathbb{N}$.

טענה: תהא G חבורה אזי הסדרה המרכזית העולה יחידה.

הסדרה המרכזית היורדת: תהא G חבורה אזי $G_{0}=G$ וכן $G_{i+1}=\left\langle [G,G_{i}]\right\rangle$ לכל $i\in\mathbb{N}$.

טענה: תהא G חבורה אזי (G נילפוטנטית)$\Longleftrightarrow$(קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $G^{n}=G$).

טענה: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(G_{n}=\left\{ e\right\} \right)\Longleftrightarrow\left(G^{n}=G\right)$.

טענה: תהא G נילפוטנטית ונגדיר $n=\min\left\{ m\in\mathbb{N}\mid G^{m}=G\right\}$ אזי $G_{i}\le G^{n-i}$ לכל $i\in\left\{ 0\ldots n\right\}$.

טענה: תהיינה N,Q חבורות תהא G הרחבה של Q ב־N ותהא K פשוטה אזי (K גורם הרכב של G)$\Longleftrightarrow$(K גורם הרכב של Q או N).

טענה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}_+$ ותהיינה $H_1\dots H_n,K_1\dots K_m$ פשוטות לא טריוואליות באשר $\prod_{i=1}^{n}H_i\cong\prod_{i=1}^{m}K_i$ אזי $n=m$ וכן קיימת $\pi\in S_n$ עבורה $H_i\cong K_{\pi(i)}$ לכל $i\in[n]$.