

גודל מעגל בוליאני: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ ויהי C מעגל בוליאני בעל n חוטים וכן m קלטים אזי $\text{Size}(C) = n + m$.

עומק מעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $\text{depth}(C)$ הינו אורך המסלול המקסימלי מקלט לפלט.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ אזי $\vee_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ המוגדרת $\vee_n(x) = \bigvee_{i=1}^n x_i$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ אזי $\wedge_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ המוגדרת $\wedge_n(x) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$.

מעגל בוליאני בעל fan-in לא מוגבל: מעגל בוליאני מעל בסיס הפונקציות הבוליאניות $\{\wedge, \vee, \neg\}$ $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\wedge_n\}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\vee_n\})$ הערה: אלא אם נאמר אחרת מעגל בוליאני הוא בעל fan-in מוגבל.

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C בעל fan-in לא מוגבל המחשב את f בגודל $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ ובעומק 2.

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיים מעגל בוליאני C המחשב את f בגודל $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ ובעומק $n + \log_2(n)$.

מסקנה: תהא L שפה אזי קיימת משפחת מעגלים \mathcal{C} מגודל $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$ ומעומק $n + \log(n)$ המחשבת את L .

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי קיימת $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ עבורה לכל מעגל בוליאני C המחשב אותה מתקיים $\text{Size}(C) \geq \frac{2^n}{2n}$.

הגודל של פונקציה בוליאנית: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $\text{Size}(f) = \min \{\text{Size}(C) \mid (C \text{ מחשבת את } f) \wedge (C \text{ מעגל})\}$.

משפט: קיים $C \in \mathbb{R}_+$ עבורו לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המקיימת $n \leq S < C \cdot \frac{2^n}{n}$ קיימת $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ באשר f חשיבה על ידי מעגל מגודל $S(n) + 10n$ וכן f לא חשיבה על ידי מעגל מגודל $S(n)$.

הגדרה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $L \subseteq \{0, 1\}^*$ $\{L \subseteq \{0, 1\}^* \mid S(n) \text{ חשיבה על ידי משפחת מעגלים מגודל לכל היותר } S(n)\}$ $\text{Size}(S(n)) = \{L \subseteq \{0, 1\}^* \mid S(n) \text{ חשיבה על ידי משפחת מעגלים מגודל לכל היותר } S(n)\}$.

מסקנה: $\text{Size}(2^n) = \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$.

מסקנה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה $n \leq S(n) \leq \frac{2^n}{n}$ אזי $\text{Size}(S(n)) \subsetneq \text{Size}(S(n) + 10n)$.

הגדרה: $\text{Size}(\text{Poly}) = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{Size}(n^c)$.

למה: יהי G גרף אזי $\mathbb{E}_{\text{חיד}(A, B)}[|E(A, B)|] = \frac{|E(G)|}{2}$.

טענה: יהי G גרף אזי קיים חתך (A, B) עבורו $|E(A, B)| \geq \frac{|E(G)|}{2}$.

פונקציית זוגיות: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{parity} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ המוגדרת $\text{parity}(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$.

טענה: קיים מעגל C המחשב את parity_n מגודל $\mathcal{O}(n)$ ועומק $\mathcal{O}(\log(n))$.

משפט: יהי C מעגל המחשב את parity_n בעל fan-in לא מוגבל ועומק d אזי $\text{Size}(C) \geq 2^{\Omega(n^{\frac{1}{n-d}})}$.

פולינום מולטי-לינארי (מ"ל): יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ בעל דרגה 1.

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל עבורו $f(x) = p(x)$ לכל $x \in \{0, 1\}^n$.

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיים פולינום המחשב את f .

סימון: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $\deg(f) = \min \{\deg(p) \mid (p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]) \wedge (f \text{ מחשב את } p)\}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\deg(\vee_n) = n$.

פולינום מחשב פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה ε : יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מ"ל עבורו

$$\mathbb{P}_{x \leftarrow \{0, 1\}^n} (p(x) = f(x)) \geq 1 - \varepsilon$$

טענה: הפולינום 1 מחשב את \vee_n בממוצע עם שגיאה $\frac{1}{3}$.

טענה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל s ועומק d אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים פולינום מ"ל $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}\left((\log(n) \cdot \log(\frac{s}{\varepsilon}))^d\right)$ בממוצע עם שגיאה ε .

טענה: יהי $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מולטי-לינארי ויהי $\delta > 0$ עבורו $\mathbb{P}_{x \leftarrow \{0, 1\}^n} (p(x) = \text{parity}(x)) \geq \frac{1}{2} + \delta$ אזי $\deg(p) \geq 2^{\Omega(\delta n)}$.

התפלגות משפחת פולינומים מחשבת פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה ε : יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קבוצת

פולינומים מ"ל $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ עבורה לכל $x \in \{0, 1\}^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{p \leftarrow P} (p(x) = f(x)) \geq 1 - \varepsilon$

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ מדרגה $\mathcal{O}(\log(n) \cdot \log(\frac{1}{\varepsilon}))$ שמחשבת את \vee_n בממוצע עם שגיאה ε .