מתמטיקה בדידה (03681118; 2021B)

רון מיכלמן

תוכן העניינים

חלק I

לוגיקה

הערה 0.1 (הנחות מוצא). כל הלוגיקה בפרק זה מבוסס על מערכת האקסיומות ZF, מעבר לפרק זה נשתמש תמיד במערכת האקסיומות ZFC (אנו מניחים בקורס זה את אקסיומת הבחירה).

1 תחשיב הפסוקים

הגדרה 1.1 (הצרנה)**.** הפיכת פסוק מילולי לשפה של צורות מתמטיות.

הגדרה 1.2 (פסוק יסודי)**.** טענה עצמית שיכולה להיות אמת או שקר.

דוגמה 1.1. "יורד גשם בחוץ" זהו פסוק יסודי מכיוון שזוהי טענה שיכולה להיות אמת או שקר ואינה מורכבת מתת פסוקים שיכולים להיות אמת או שקר.

1.1 קשרים בין פסוקים

הגדרה 1.3 (קשר הדיסיונקציה)**.** "A או B" ומתמטית $A \lor B$.

הגדרה 1.4 (קשר הקוניונקציה)**.** "A וגם B" ומתמטית $A \land B$.

הגדרה 1.5 (קשר האימפליקציה)**.** "A גורר את B" ובצורה המקובלת יותר "אם A אז B" ומתמטית $A \implies B$, בביטוי A נקרא הרישא ו־B נקרא הסיפא.

הגדרה 1.6 (קשר השלילה)**.** "לא A" ומתמטית $\neg A$, נהוגים גם הסימונים $\sim A$, $\overline{A}$.

הגדרה 1.7 (תחשיב הפסוקים)**.** טענה המורכבת מצירופים של פסוקים יסודיים וקשרים יסודיים.

דוגמה 1.2. נניח כי A, B, C פסוקים יסודיים אזי פסוקים כגון

- $A \implies B$.
- $(A \lor B) \land (C \lor B)$.
- $((A \lor B) \implies \neg A) \implies C$.

הערה 1.1. ביטויים מהצורה

- $A \implies$.
- $A \land \lor B$.
- $A \land B \implies C$.

כלומר ביטויים חסרי משמעות או ביטויים עם דו משמעות אינם נחשבים כפסוקים בתחשיב הפסוקים.

1.2 ערכים של פסוקים

הגדרה 1.8 (השמה של ערך אמת)**.** עבור פסוק יסודי A נגדיר אם הוא אמת (בסימון true, T) או שקר (בסימון false, F), ונסמן את ערכו בתור $V(A)$.

הערה 1.2. במערכת הלוגית שאנחנו מתעסקים בה טענה היא או שקר או אמת ולא שניהם, ומתמטית $((V(A)=T)\vee(V(A)=F))\wedge((V(A)\neq T)\vee(V(A)\neq F))$.

טענה 1.1. נניח $A_1,\ldots,A_n$ פסוקים יסודיים אזי יש 2^n השמות ערכי אמת לפסוקים.

הוכחה. כל פסוק יסודי A_i (כאשר i מספר בין 1 ל־n) יכול להיות true או false ולא שניהם, לכן לכל A_i יש 2 אפשרויות ואין קשר בין הפסוקים (מהיותם יסודיים ולכן בחירת ערכיהם שרירותית) אז יש $2\cdot\ldots\cdot 2=2^n$ השמות של ערכי אמת. ■

הערה 1.3 (שקר גורר הכל). יהיו A,B פסוקים יסודיים אזי $(V(A)=F)\implies(V(A\implies B)=T)$, כלומר "אם שקר אז משהו" זוהי תמיד טענת אמת.

הגדרה 1.9 (טבלת אמת)**.** טבלה אשר מסכמת את ערכו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו (והטבלה הזאת היא סופית בגודל ואף מגודל 2^n מטענה 1.1).

דוגמה 1.3 (טבלאות אמת)**.** יהיו A,B ערכי אמת

A	B	$A\vee B$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

A	B	$A\wedge B$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

A	B	$A\implies B$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

A	$\neg A$
true	false
false	true

1.3 שקילות של פסוקים

הגדרה 1.10 (שקילות פסוקים)**.** יהיו C,D פסוקים נגיד שהם שקולים ונסמן $C\equiv D$ אם לכל השמה של ערכי אמת (לפסוקים היסודיים המרכיבים אותם) מתקיים $V(C)=V(D)$.

טענה 1.2. יהיו A,B,C פסוקים אזי

- $A\wedge B\equiv B\wedge A$.
- $A\vee B\equiv B\vee A$.
- $A\wedge(B\wedge C)\equiv(A\wedge B)\wedge C$.
- $A\vee(B\vee C)\equiv(A\vee B)\vee C$.

הוכחה. יהיו A,B,C פסוקים נבנה עבור כל פסוק טבלת אמת, כאשר שני פסוקים עם אותה טבלת אמת מעידה של שקילותם (כי טבלת אמת מייצגת את ערך הפסוק בכל בחירות השמות ערך האמת)

A	B	C	$A\wedge B$	$B\wedge C$	$(A\wedge B)\wedge C$	$A\wedge(B\wedge C)$	$A\vee B$	$B\vee C$	$(A\vee B)\vee C$	$A\vee(B\vee C)$
true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true
true	false	true	false	false	false	false	true	true	true	true
false	true	true	false	true	false	false	true	true	true	true
false	false	true	false	false	false	false	false	true	true	true
true	true	false	true	false	false	false	true	true	true	true
true	false	false	false	false	false	false	true	false	true	true
false	true	false	false	false	false	false	true	true	true	true
false	false	false	false	false	false	false	false	false	false	false

A	B	$A\wedge B$	$B\wedge A$	$A\vee B$	$B\vee A$
true	true	true	true	true	true
true	false	false	false	true	true
false	true	false	false	true	true
false	false	false	false	false	false

■

טענה 1.3. יהיו A, B, C פסוקים אזי

- $A \implies B \equiv (\neg A) \vee B$.
- $A \implies B \equiv (\neg B) \implies (\neg A)$.
- $\neg(\neg A) \equiv A$.
- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
- $\neg(A \implies B) \equiv A \wedge (\neg B)$.

הוכחה. יהיו A, B, C פסוקים

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A\implies B$	$(\neg B)\implies(\neg A)$
true	true	false	false	true	true
true	false	false	true	false	false
false	true	true	false	true	true
false	false	true	true	true	true

וכל שאר הטענות ישארו כתרגיל לקורא. ■

טענה 1.4 (כללי דה מורגן)**.** יהיו A, B פסוקים אזי $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.

הוכחה. יהיו A, B פסוקים אזי

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg(A\wedge B)$	$(\neg A)\vee(\neg B)$	$\neg(A\vee B)$	$(\neg A)\wedge(\neg B)$
true	true	false	false	true	true	false	false	false	false
true	false	false	true	false	true	true	true	false	false
false	true	true	false	false	true	true	true	false	false
false	false	true	true	false	false	true	true	true	true

■

הגדרה 1.11 (אם ורק אם (אם"ם)). יהיו A,B פסוקים נגדיר $A \iff B \equiv (A \implies B) \wedge (B \implies A)$.

הגדרה 1.12 (טאוטולוגיה). פסוק A שבעבור כל השמת ערכי אמת מקיים $V(A) = \text{true}$.

הגדרה 1.13 (סתירה). פסוק A שבעבור כל השמת ערכי אמת מקיים $V(A) = \text{false}$.

תרגיל 1.1. יהי A פסוק אזי (A סתירה)$\iff$($\neg A$ טאוטולוגיה).

טענה 1.5. יהי P פסוק אזי $P \implies P$, $P \vee \neg P$ הן טאוטולוגיות.

הגדרה 1.14 (פסוק נובע סמנטית). פסוק α נובע סמנטית מהפסוקים $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ אם השמה המקיימת $V(\alpha_i) = \text{true}$ לכל i בין 1 ל־n גוררת כי מתקיים $V(\alpha) = T$.

דוגמה 1.4. נגדיר $\alpha_1 = \neg(A \implies B)$, $\alpha_2 = B$ וכן $\alpha = A$. נשים לב כי אם $V(\alpha_1) = V(\alpha_2) = \text{true}$ אזי $V(\neg(A \implies B)) = \text{true}$ ולכן $V(A \implies B) = \text{false}$ כמו כן $V(B) = \text{true}$ ולכן לא אפשרי שמתקיים $V(A) = \text{true}$ כי אם זה מתקיים אז נקבל $V(A \implies B) = \text{true}$ בסתירה למה שהסקנו כבר, לכן $V(A) = \text{false}$ ובפרט $V(\neg A) = \text{true}$ כלומר $V(\alpha) = \text{true}$, אזי α נובע סמנטית מ־α_1, α_2.

2 תחשיב היחסים

הגדרה 2.1 (פרידיקט n מקומי). טענה ב־n משתנים.

דוגמה 2.1 (פרידיקטים). הטענה "קיים x המקיים $x^2 = -1$" זהו פרידיקט חד מקומי (על איזה תחום הוא מוגדר? האם יש לו משמעות לכל אובייקט מתמטי?), הטענה "לכל x,y מתקיים $x > y$" זהו פרידיקט דו מקומי (שוב אנו לא בטוחים מאיזה תחום x,y הגיעו, האם הם מספרים? אולי הם בכלל אובייקט שרירותי?).

2.1 כמתים

הגדרה 2.2 (כמת קיים). מסמל כי קיים אובייקט שמקיים את הפרידיקט, מסומן בעזרת $\exists$.

הגדרה 2.3 (כמת לכל). מסמל כי לכל אובייקט מתקיים הפרידיקט, מסומן בעזרת $\forall$.

הגדרה 2.4 (טענה). טענה בתחשיב היחסים הוא ביטוי מהצורה $\exists x.P(x)$ או $\forall y.Q(y)$ כאשר P,Q פרידיקטים או בעצמם טענות בתחשיב היחסים.

דוגמה 2.2 (טענות בתחשיב היחסים). הטענה $\exists x.\forall y.x < y$ מסמלת "קיים x עבורו לכל y מתקיים $x < y$", הטענה $\forall x,y.(x < y) \implies (x < y)$ מסמלת "לכל x,y אם $x < y$ אז $x < y$".

2.1.1 קיום ויחידות

הגדרה 2.5 (קיים יחיד)**.** מסמל כי קיים ויחיד אובייקט שמקיים את הפרידיקט, מסומן בעזרת $\exists!$. מתמטית תהא ϕ טענה אזי נגדיר $\exists!x.\phi\left(x\right)\equiv\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\wedge\left(\forall x,y.\phi\left(x\right)\wedge\phi\left(y\right)\Longrightarrow x=y\right)$.

הגדרה 2.6 (כתיב יוטא)**.** מסמל את האובייקט היחיד שמקיים את הפרידיקט, יהי ϕ פרידיקט עבורו $\exists!x.\phi\left(x\right)$ אזי נגדיר את $a=\iota x.\phi\left(x\right)$ להיות איבר עבורו $\phi\left(a\right)$ נכון.

2.2 תחום הכימות

כפי שהוסבר קודם, קיימת בעיה בכתיבה טענה כללית בתחשיב היחסים, לא ברור מהיכן מגיעים המשתנים בביטוי, לכן נגדיר את תחום הכימות להיות התחום ממנו המשתנים מגיעים. כמו כן כאשר ברור מהו התחום לא נציין אותו (כמו בטענה $\exists x.x=1$ בה ברור כי אנו עובדים מעל מערכת מספרית כלשהי אשר הובהרה לפני).

הגדרה 2.7 (תחום הכימות/עולם הדיון)**.** קבוצת האובייקטים שמהווים את המקור להצבות של משתנים.

הגדרה 2.8 (אינטרפרטציה של פרידיקט)**.** יהי D תחום כימות אזי טענה על אברי D.

הגדרה 2.9 (נכונות בתחשיב היחסים)**.** תהא טענה $P\left(x\right)$, באינטרפרטציה $\exists x.P\left(x\right)$ בתחום D, נאמר כי P נכונה בתחום D אם קיים a כלשהו ב־D עבורו $P\left(a\right)$ מתקיים. תהא טענה $Q\left(x\right)$, באינטרפרטציה $\forall x.Q\left(x\right)$ בתחום D, נאמר כי Q נכונה בתחום D אם לכל a ב־D מתקיים $Q\left(a\right)$. נסמן במקרים אלה $D\vDash P\left(x\right)$ וכן $D\vDash Q\left(x\right)$.

דוגמה 2.3 (אינטרפרטציה ונכונות)**.** נגדיר טענה $P\left(x\right)$ עם אינטרפרטציה $\exists x.x=1$ בתחום המספרים הטבעיים (כלומר $0,1,2\ldots$), כמו כן נשים לב כי הטענה כמובן נכונה (היא מתקיימת עבור $x=1$ אשר נמצא בתחום הכימות).

הגדרה 2.10 (טענות שקולות)**.** נאמר כי α,β שקולות ונסמן $\alpha\equiv\beta$ אם לכל תחום כימות D ואינטרפרטציה של α,β מתקיים $D\vDash\alpha\Longleftrightarrow\beta$.

3 הוכחות

בתחשיב הפסוקים הסברנו כיצד טענות מתקשרות אחת אל השנייה בעזרת קשרים לוגיים, בתחשיב היחסים הסברנו כיצד טענות לגבי אובייקטים מוגדרות, כעת כאשר יש בידינו טענות נרצה להוכיח או להפריך אותן.

הערה 3.1 (הוכחת טענת קיים). כדי להוכיח טענה מהצורה $\exists x.P\left(x\right)$ נביא דוגמה ספציפית לאיבר a מתחום הכימות אשר מקיים את $P\left(x\right)$ (כלומר $P\left(a\right)$ מתקיים). בשימוש בטענת קיים כנתונה נשים לב כי כמת קיים מתאר לנו כי קיים איבר a המקיים $P\left(a\right)$ אך אנו לא יודעים מיהו אותו a, לכן נשתמש בו בשרירותיות בעזרת ההצהרה "יהי a המקיים $P\left(a\right)$" ונמשיך משם.

הערה 3.2 (הוכחת טענת לכל). כדי להוכיח טענה מהצורה $\forall x.P\left(x\right)$ נראה כי עבור a שרירותי (חשוב שהוא לא ספציפי ולא נבחר על פי חוק מסויים!) מתחום הכימות מתקיים $P\left(x\right)$ (כלומר $P\left(a\right)$ מתקיים). רק כאשר עולם הדיון סופי וקטן מספיק ניתן לעבור איבר איבר בו ולהראות שמתקיים $P\left(x\right)$ עבור כל איבר יזנית, אך זה לא מומלץ אלא אם כן תחום הכימות הוא בעל איברים בודדים. בשימוש בטענת לכל כנתונה נשים לב כי כמת לכל מתאר לנו כי כל איבר a מקיים $P\left(a\right)$ ולכן ניתן לבחור כל a בתחום הכימות ולהמשיך משם.

טענה 3.1.

- $\neg\left(\exists x.P\left(x\right)\right)\equiv\forall x.\neg P\left(x\right)$.
- $\neg\left(\forall x.P\left(x\right)\right)\equiv\exists x.\neg P\left(x\right)$.
- $\forall x.\forall y.\phi\left(x,y\right)\equiv\forall y.\forall x.\phi\left(x,y\right)$.
- $\exists x.\exists y.\phi\left(x,y\right)\equiv\exists y.\exists x.\phi\left(x,y\right)$.
- $\forall x.\left(\phi\left(x\right)\wedge\psi\left(x\right)\right)\equiv\left(\forall x.\phi\left(x\right)\right)\wedge\left(\forall y.\psi\left(y\right)\right)$.
- $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)\equiv\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\vee\left(\exists y.\psi\left(y\right)\right)$.
- $\exists x.\forall y.\phi\left(x,y\right)\not\equiv\forall y.\exists x.\phi\left(x,y\right)$.

הוכחה. נוכיח את שתי הטענות האחרונות וכל השאר ישארו כתרגיל לקורא,

- הטענה $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)\equiv\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\vee\left(\exists y.\psi\left(y\right)\right)$, יהי D תחום כימות כלשהו ותהא אינטרפרטציה כלשהי עבור ϕ,ψ,
  - נניח כי אגף ימין נכון, כלומר נניח כי $\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\vee\left(\exists y.\psi\left(y\right)\right)$ מהגדרת "או" אנו יודעים כי לפחות אחד מהביטויים נכונים,
    * אם הביטוי $\exists x.\phi\left(x\right)$ מתקיים, אזי קיים a בתחום הכימות D עבורו $\phi\left(a\right)$ נכון ובפרט נשים לב כי הוא גם מקיים $\phi\left(a\right)\vee\psi\left(a\right)$ מהגדרת "או" ולכן $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)$ (כי בפרט a מקיים זאת).
    * אם הביטוי $\exists x.\psi\left(x\right)$ מתקיים, אזי קיים a בתחום הכימות D עבורו $\psi\left(a\right)$ נכון ובפרט נשים לב כי הוא גם מקיים $\phi\left(a\right)\vee\psi\left(a\right)$ מהגדרת "או" ולכן $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)$ (כי בפרט a מקיים זאת).
  - נניח כי אגף שמאל נכון, כלומר נניח כי $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)$ נקבע את a עבורו $\phi\left(a\right)\vee\psi\left(a\right)$ אנו יודעים כי יש a כזה מטענת קיים, כעת מהגדרת "או" לפחות אחד מהביטויים נכונים,
    * אם הביטוי $\phi\left(a\right)$ מתקיים, אזי גם הביטוי $\exists x.\phi\left(x\right)$ מתקיים (בפרט a מקיים זאת) ולכן מהגדרת "או" גם $\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\vee\left(\exists y.\psi\left(y\right)\right)$ מתקיים (על ידי אותו a).
    * אם הביטוי $\psi\left(a\right)$ מתקיים, אזי גם הביטוי $\exists x.\psi\left(x\right)$ מתקיים (בפרט a מקיים זאת) ולכן מהגדרת "או" גם $\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\vee\left(\exists y.\psi\left(y\right)\right)$ מתקיים (על ידי אותו a).

  אזי קיבלנו כי הנחה שאחד הצדדים מתקיים גורר את השני ובפרט השמת ערכי אמת גוררת סמנטית את הצד השני, כלומר הטענות שקולות.
- הטענה $\exists x.\forall y.\phi\left(x,y\right)\not\equiv\forall y.\exists x.\phi\left(x,y\right)$, נשים לב כי בתחום הכימות המספרים הטבעיים (כלומר $0,1,2\ldots$) ועם האינטרפריטציה $\phi\left(x,y\right)="y<x"$ נקבל כי האגף הימני נכון אך השמאלי לא, מה שאומר שהטענות אינן שקולות כנדרש (מכיוון שמצאנו אינטרפרטציה ותחום כימות עליו הטענות אינן שקולות)

- הוכחת אגף ימין, צריך להוכיח $\forall y.\exists x.\phi\left(x,y\right)$, יהי y מספר טבעי, צריך להוכיח $\exists x.\phi\left(x,y\right)$, נגדיר $x=y+1$, נותר להוכיח $\phi\left(x,y\right)$, נשים לב כי $\phi\left(x,y\right)=\phi\left(y+1,y\right)=$ "$y<y+1$" וזה נכון.
- הפרכת אגף שמאל, צריך להפריך $\exists x.\forall y.\phi\left(x,y\right)$, נראה כי לא קיים x המקיים זאת, יהי x מספר טבעי, נשים לב כי עבור $y=x$ מתקיים $\phi\left(x,y\right)=\phi\left(x,x\right)=$ "$x<x$" כלומר הביטוי לא נכון, אזי לכל x הטענה לא אפשרית ולכן לא קיים x עבורו הטענה נכונה.

$\blacksquare$

חלק II

תורת הקבוצות

בתורת הקבוצות האובייקט המרכזי הוא (באופן מפתיע) קבוצות, למרות היותם האובייקט המרכזי בתחום בקורס זה לא ינתנו הגדרות פורמליות לאובייקט זה, זאת מכיוון שהמתמטיקה כמו כל ענף מבוסס על פני הגדרות ואקסיומות אשר אנו מסכימים שהן נכונות ומשם מתקדמים, לכן כאן נשתמש בקבוצה באופן נאיבי ואינטואיטיבי. (אך זה לא תירוץ לנפנופי ידיים! הכל עדיין יהיה פורמלי ומדוייק)

1 הגדרת קבוצה

הגדרה 1.1 (קבוצה)**.** אוסף של איברים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות, היא מסומנת בעזרת סוגריים מסולסלים $\{\}$ אשר ביניהן כל האיברים השייכים לקבוצה, או אם לא ניתן לרשום את כל האיברים חוק מסויים ליצירת האיברים.

הגדרה 1.2 (שייך)**.** יהי a איבר בקבוצה A אזי נאמר כי a שייך ל־A ונסמן $a \in A$.

הערה 1.1 (לא שייך). $a \notin A \equiv \neg (a \in A)$.

1.1 דרכים לסימון קבוצות

הגדרה 1.3 (רשימת איברים)**.** נסמן $\{a_1 \dots a_n\}$ את הקבוצה המכילה את האיברים $a_1 \dots a_n$. מתקיים $(a \in \{a_1 \dots a_n\}) \iff (\exists i.a = a_i)$.

דוגמה 1.1 (רשימות איברים)**.** $\{1 \dots n\}$ המספרים בין 1 עד n, $\{\{1\}, \{2\}\}$ קבוצה המכילה את הקבוצה המכילה את 1 ואת הקבוצה המכילה את 2.

הגדרה 1.4 (עקרון ההפרדה)**.** יהי ϕ פרידיקט אזי $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ קבוצה המכילה את כל אברי A המקיימים את ϕ. מתקיים $(a \in \{x \in A \mid \phi(x)\}) \iff ((a \in A) \wedge \phi(a))$.

הגדרה 1.5 (עקרון ההחלפה)**.** תהא f פעולה הפועלת על אברי A אזי $\{f(x) \mid x \in A\}$ קבוצה המכילה את $f(a)$ עבור כל $a \in A$. מתקיים $(a \in \{f(x) \mid x \in A\}) \iff (\exists b \in A.f(b) = a)$.

הגדרה 1.6 (סינגלטון/יחידון)**.** קבוצה A בעלת איבר יחיד, דהיינו $A = \{a\}$.

דוגמה 1.2 (קבוצות ושייכות)**.** נשים לב כי $\{1,0\} = \{0,0,1\} = \{0,0,1,1,1\} = \{0,1\}$ מכיוון שאין משמעות לסדר האיברים ואין חזרות, כמו כן $1 \in \{1\}$, $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, 1, 2\}$, $\{2,2\} \in \{\{2\}\}$, $\{3\} \notin \{1,2,3\}$, $\{x \in \{1,2,3\} \mid x^2 = x\} = \{1\}$, $\{2^x \mid x \in \{0,1\}\} = \{2^0, 2^1\}$, ודאו כי אתם מבינים את כל הדוגמאות ומדוע הן נכונות.

1.1.1 פרדוקס ראסל

משפט 1.1. קיים פרידיקט ϕ עבורו $\{x \mid \phi(x)\}$ איננה קבוצה.

הוכחה. נגדיר את הפרידיקט $\phi(x) = "x \notin x"$, נניח בשלילה כי הקבוצה $A = \{x \mid \phi(x)\}$ קיימת, אם $A \in A$ אזי מעקרון ההפרדה מתקיים $\phi(A)$ כלומר $A \notin A$ סתירה, אם $A \notin A$ אזי מתקיים $\phi(A)$ ומעקרון ההפרדה $A \in A$ סתירה. בפרט הקבוצה A איננה אפשרית, ולכן אנו מגבילים את הדרכים ליצירת קבוצה. ■

מסקנה 1.1. לא קיימת קבוצת כל הקבוצות.

הוכחה. נניח כי A קבוצת כל הקבוצות אזי $\{x \in A \mid x \notin x\} = \{x \mid x \notin x\}$ היא קבוצה על פי עקרון ההפרדה סתירה ל 1.1. ■

1.2 קבוצות מפורסמות

הגדרה 1.7 (מספרים טבעיים)**.** נסמן $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

הגדרה 1.8 (מספרים חיוביים)**.** נסמן $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, ...\}$.

הגדרה 1.9 (מספרים זוגיים ואי־זוגיים)**.** נסמן $\mathbb{N}_{\text{even}} = \{0, 2, 4, 6 ...\}$ וכן $\mathbb{N}_{\text{odd}} = \{1, 3, 5, 7 ...\}$.

הגדרה 1.10 (מספרים ראשוניים)**.** נסמן $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N}_+ \mid \text{ראשוני } p\}$.

הגדרה 1.11 (מספרים שלמים)**.** נסמן $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

הגדרה 1.12 (מספרים רציונליים)**.** נסמן $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}_+\right\}$.

הגדרה 1.13 (מספרים ממשיים)**.** נסמן $\mathbb{R} =$"כל המספרים הממשיים", להגדרה של המספרים הממשיים על פי חתכי דדקינד ראו קורסA ועל פי סדרות קושי ראו חדו"א.

הגדרה 1.14 (מספרים ממשיים חיוביים)**.** נסמן $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

הגדרה 1.15 (קטע/אינטרוול)**.** יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ נגדיר

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

הגדרה 1.16 (מספרים מרוכבים)**.** נסמן $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

הגדרה 1.17 (קבוצה ריקה)**.** נסמן $\emptyset = \{\}$, מתקיים מהגדרתה $\forall x. x \notin \emptyset$.

1.3 הכלה ושיוויון קבוצות

1.3.1 הכלה

הגדרה 1.18 (הכלה). יהיו A, B קבוצות נאמר כי A מוכלת ב־B ונסמן $A \subseteq B$ אם מתקיים $\forall x\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)$.

הערה 1.2 (לא מוכל). יהיו A, B נסמן $A \nsubseteq B \equiv \neg(A \subseteq B)$.

הערה 1.3 (מוכל ממש). יהיו A, B נסמן $A \subset B \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \nsubseteq A)$.

דוגמה 1.3 (הכלה). מתקיים $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_{+} \subseteq \mathbb{P}$ כמו כן $\{\{1\}\} \nsubseteq \{1\}$ וכן $\{1\} \subset \{1,2\}$.

משפט 1.2. $\forall A.\emptyset \subseteq A$.

הוכחה. תהא A_0 קבוצה, צריך להוכיח $\emptyset \subseteq A_0$, מהגדרת הכלה צריך להוכיח $\forall x\,(x \in \emptyset \Longrightarrow x \in A_0)$, יהי x_0, צריך להוכיח $x_0 \in \emptyset \Longrightarrow x_0 \in A_0$, מהגדרת קבוצה ריקה מתקיים כי $\forall x.x \notin \emptyset$ בפרט עבור x_0 מתקיים $x_0 \notin \emptyset$ כלומר הרישא בטענה שצריך להוכיח תמיד שקרית, ומטבלת האמת של גרירה נקבל כי כל הטענה אמת כנדרש. ■

טענה 1.1 (טרנזיטיביות ההכלה). $\forall A, B, C.\,(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Longrightarrow (A \subseteq C)$.

הוכחה. יהיו A_0, B_0, C_0 קבוצות, נניח כי $(A_0 \subseteq B_0) \wedge (B_0 \subseteq C_0)$, צריך להוכיח $A_0 \subseteq C_0$, מהגדרת הכלה צריך להוכיח $\forall x\,(x \in A_0 \Longrightarrow x \in C_0)$, יהי x_0, צריך להוכיח $x_0 \in A_0 \Longrightarrow x_0 \in C_0$, נניח כי $x_0 \in A_0$, צריך להוכיח $x_0 \in C_0$, מהגדרת הכלה נסיק כי $\forall x\,(x \in A_0 \Longrightarrow x \in B_0)$ ובפרט עבור x_0 מתקיים $x_0 \in B_0$ כמו כן $\forall x\,(x \in B_0 \Longrightarrow x \in C_0)$ ובפרט עבור x_0 נקבל $x_0 \in C_0$ כנדרש. ■

1.3.2 שיוויון

הגדרה 1.19 (שיוויון/עקרון האקסטנציונליות). $(A = B) \equiv (\forall x.x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$.

הערה 1.4 (הכלה דו כיוונית). יהיו A, B קבוצות אזי $(A = B) \equiv (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$.

טענה 1.2 (יחידות הקבוצה הריקה). $\forall X\,(\forall y.y \notin X \Longrightarrow X = \emptyset)$.

הוכחה. תהא X_0 קבוצה ונניח כי $\forall y.y \notin X$, צריך להוכיח $X = \emptyset$, מהגדרת שיוויון צריך להוכיח $(\emptyset \subseteq X) \wedge (X \subseteq \emptyset)$, נשים לב כי מ 1.2 מתקיים $X \supseteq \emptyset$ ולכן מהגדרת "וגם" נותר להוכיח $X \subseteq \emptyset$, מהגדרת הכלה צריך להוכיח $\forall x\,(x \in X \Longrightarrow x \in \emptyset)$, יהי x נשים לב כי $x \notin X$ מתכונת X בפרט הרישא תמיד טענה שקרית לכן הגרירה טענת אמת כנדרש. ■

2 פעולות על קבוצות

2.1 איחוד

הגדרה 2.1 (איחוד). תהיינה A, B קבוצות אזי $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

דוגמה 2.1. מתקיים $\{1,2,3\}\cup\{3,4,5,6\}=\{1,2,3,4,5,6\}$ וכן $\{\{1\}\}\cup\{1\}=\{1,\{1\}\}$.

טענה 2.1 (אסוציאטיביות איחוד)**.** תהיינה A,B,C קבוצות אזי $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

הוכחה. תהיינה A,B,C קבוצות, נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית,

- יהי $x\in(A\cup B)\cup C$, צריך להוכיח $x\in A\cup(B\cup C)$, נשים לב כי מהגדרת איחוד והגדרת קבוצה מתקיים $x\in A\cup B\vee x\in C$,
  - נניח כי $x\in C$, צריך להוכיח $x\in A\vee x\in B\cup C$, מהגדרת איחוד נקבל כי $x\in B\cup C$ ובפרט $x\in A\vee x\in B\cup C$ כלומר $x\in A\cup(B\cup C)$.
  - נניח $x\in A\cup B$,
    * אם $x\in A$, אזי $x\in A\cup(B\cup C)$ מהגדרת איחוד והגדרת קבוצה.
    * אם $x\in B$, צריך להוכיח $x\in A\vee x\in B\cup C$, מהגדרת איחוד נקבל כי $x\in B\cup C$ ובפרט $x\in A\vee x\in B\cup C$ כלומר $x\in A\cup(B\cup C)$.
- יהי $x\in A\cup(B\cup C)$, צריך להוכיח $x\in(A\cup B)\cup C$, נשים לב כי מהגדרת איחוד והגדרת קבוצה מתקיים $x\in A\vee x\in B\cup C$,
  - נניח כי $x\in A$, צריך להוכיח $x\in A\cup B\vee x\in C$, מהגדרת איחוד נקבל כי $x\in A\cup B$ ובפרט $x\in A\cup B\vee x\in C$ כלומר $x\in(A\cup B)\cup C$.
  - נניח $x\in B\cup C$,
    * אם $x\in C$, אזי $x\in(A\cup B)\cup C$ מהגדרת איחוד והגדרת קבוצה.
    * אם $x\in B$, צריך להוכיח $x\in A\cup B\vee x\in C$, מהגדרת איחוד נקבל כי $x\in A\cup B$ ובפרט $x\in A\cup B\vee x\in C$ כלומר $x\in(A\cup B)\cup C$.

■

טענה 2.2 (חילופיות איחוד)**.** תהיינה A,B קבוצות אזי $A\cup B=B\cup A$.

הוכחה. תהיינה A,B קבוצות

- יהי $x\in A\cup B$, מתקיים $x\in A\vee x\in B$ אשר שקול לטענה $x\in B\vee x\in A$ כלומר $x\in B\cup A$.
- יהי $x\in B\cup A$, מתקיים $x\in B\vee x\in A$ אשר שקול לטענה $x\in A\vee x\in B$ כלומר $x\in A\cup B$.

■

טענה 2.3. תהא A קבוצה אזי $A\cup\emptyset=A$ וכן $A\cup A=A$.

הוכחה. תהא A קבוצה

- צ"ל $A=A\cup\emptyset$, יהי $x\in A$ אזי $x\in A\cup\emptyset$ מהגדרת איחוד, יהי $x\in A\cup\emptyset$ אזי $x\in A\vee x\in\emptyset$ אך מתכונות קבוצה ריקה מתקיים $\forall x.x\notin\emptyset$ בפרט $x\in A$ כנדרש.
- צ"ל $A\cup A=A$, יהי $x\in A$ אזי $x\in A\cup A$ מהגדרת איחוד, יהי $x\in A\cup A$ אזי $x\in A\vee x\in A$ אך טענה זו שקולה לטענה $x\in A$ כנדרש.

■

2.1.1 איחוד מוכלל

הגדרה 2.2 (איחוד מוכלל)**.** תהא I קבוצה ותהא $\{A_i \mid i \in I\}$ קבוצה של קבוצות אזי $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I . x \in A_i\}$.
כמו כן נהוג לסמן $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

דוגמה 2.2. מתקיים $\mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{\infty} [i, i+1]$, $\mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N} = \bigcup_{i=0}^{\infty} (i, i+1)$, יהי $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ אזי $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (q-\varepsilon, q+\varepsilon) = \mathbb{R}$.

2.1.2 איחוד זר

הגדרה 2.3 (איחוד זר)**.** תהא I קבוצה ותהא $\{A_i \mid i \in I\}$ קבוצה של קבוצות המקיימת $\forall i, j \in I . (i \neq j) \implies (A_i \cap A_j = \emptyset)$ אזי נסמן $\bigcup_{i\in I} A_i = \biguplus_{i\in I} A_i$.

דוגמה 2.3. מתקיים $\mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N} = \biguplus_{i=0}^{\infty} (i, i+1)$, $\{1, 2\} = \{1\} \uplus \{2\}$.

2.2 חיתוך

הגדרה 2.4 (חיתוך)**.** תהיינה A, B קבוצות אזי $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$.

דוגמה 2.4. מתקיים $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{3\}$, $\{\{1\}\} \cap \{1\} = \emptyset$, $\{3, 4\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3, 4\}$.

טענה 2.4 (אסוציאטיביות חיתוך)**.** תהיינה A, B, C קבוצות אזי $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

הוכחה. נשאר כתרגיל לקורא. ■

טענה 2.5 (חילופיות חיתוך)**.** תהיינה A, B קבוצות אזי $A \cap B = B \cap A$.

הוכחה. נשאר כתרגיל לקורא. ■

טענה 2.6. תהא A קבוצה אזי $A \cap \emptyset = \emptyset$ וכן $A \cap A = A$.

הוכחה. נשאר כתרגיל לקורא. ■

טענה 2.7 (חוק הפילוג)**.** תהיינה A, B, C קבוצות אזי $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ וכן $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

הוכחה. ... ■

2.2.1 חיתוך מוכלל

הגדרה 2.5 (חיתוך מוכלל)**.** תהא I קבוצה ותהא $\{A_i \mid i \in I\}$ קבוצה של קבוצות אזי $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I . x \in A_i\}$.
כמו כן נהוג לסמן $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

דוגמה 2.5. מתקיים $\bigcap_{i=0}^{\infty} \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq i\} = \emptyset$, $\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+} [0, \varepsilon) = \{0\}$.

2.3 הפרש

הגדרה 2.6 (הפרש/חיסור)**.** תהיינה A, B קבוצות אזי $A\backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

דוגמה 2.6. מתקיים $\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5,6\} = \{1,2\}$, $\{\{1\}\} \setminus \{1\} = \{\{1\}\}$, $\{3,4\} \setminus \{3,4,5\} = \emptyset$.

טענה 2.8. תהא A קבוצה אזי $A\backslash\emptyset = A$ וכן $A\backslash A = \emptyset$.

הוכחה. נשאר כתרגיל לקורא. ■

טענה 2.9. תהיינה A, B קבוצות אזי התנאים הבאים שקולים (התב"ש)

- $A \subseteq B$.
- $A \cap B = A$.
- $A\backslash B = \emptyset$.
- $A \cup B = B$.

הוכחה. ... ■

2.3.1 משלים

הגדרה 2.7 (משלים)**.** תהיינה A, U קבוצות המקיימות $A \subseteq U$ אזי $A^C = U\backslash A$.

טענה 2.10 (כללי דה מורגן)**.** תהיינה A, B, C קבוצות אזי

1. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.
2. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.
3. $A\backslash (B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$.
4. $A\backslash (B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$.

הוכחה. ... ■

2.4 הפרש סימטרי

הגדרה 2.8 (הפרש סימטרי)**.** תהיינה A, B קבוצות אזי $A\triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

דוגמה 2.7. מתקיים $\{1,2,3\} \triangle \{3,4,5,6\} = \{1,2,5,6\}$, $\{\{1\}\} \triangle \{1\} = \{\{1\}, 1\}$, $\{3,4\} \triangle \{3,4,5\} = \{5\}$.

טענה 2.11 (אסוציאטיביות הפרש סימטרי)**.** תהיינה A, B, C קבוצות אזי $(A\triangle B) \triangle C = A\triangle (B\triangle C)$.

הוכחה. נשאר כתרגיל לקורא. ■

טענה 2.12 (חילופיות הפרש סימטרי)**.** תהיינה A, B קבוצות אזי $A\triangle B = B\triangle A$.

הוכחה. נשאר כתרגיל לקורא. ■

טענה 2.13. תהא A קבוצה אזי $A\triangle\emptyset = A$ וכן $A\triangle A = \emptyset$.

הוכחה. נשאר כתרגיל לקורא. ■

2.5 קבוצת החזקה

הגדרה 2.9 (קבוצת החזקה)**.** תהא A קבוצה אזי $P\left(A\right)=\left\{ B\mid B\subseteq A\right\}$.

דוגמה 2.8. מתקיים $P\left(\emptyset\right)=\left\{ \emptyset\right\}$, $P\left(\left\{ 1,2\right\} \right)=\left\{ \emptyset,\left\{ 1\right\} ,\left\{ 2\right\} ,\left\{ 1,2\right\} \right\}$.

טענה 2.14. תהיינה A,B קבוצות אזי $\left(P\left(A\right)\subseteq P\left(B\right)\right)\iff\left(A\subseteq B\right)$.

הוכחה. נשאר כתרגיל לקורא. ■