מתמטיקה בדידה (03681118; 2021B)

רון מיכלמן

תוכן העניינים

חלק I

לוגיקה

הלוגיקה המתמטית היא ענף במתמטיקה שעוסק בביטוי טענות מתמטיות פשוטות ומורכבות. היא מאפשרת הסרת רב משמעות שקיימת בשפות בני אדם ע"י קביעת כללים מדויקים להצגת טענות שונות באופן שניתן להבנה בצורה אחת בלבד. הלוגיקה גם עוסקת במערכות כללים להסקת מסקנות תקפות מתוך נתונים או הנחות שברשותנו.

דוגמה 0.1 (אי־ודאות בשפה)**.** כשאתם במסעדה ומבקשים קולה המלצרית שואלת "האם תרצה רגיל **או** זירו?" כמובן שהמילה או במקרה זה מתייחסת לבחירה בין אחד מהשניים ולא לשניהם, לעומת זאת כששואלים "האם אתה רעב **או** צמא?" מתכוונים האם אתה אחד מהשניים (ואולי גם שניהם במקביל), כלומר למילה **או** יש דו משמעות על פי הקונטקסט.

הלוגיקה התחילה את דרכה ביוון העתיקה כענף בפילוסופיה, אולם בעקבות התפתחויות רבות ומשמעותיות בכיוונים הפורמאליים שלה היא נחשבת כיום כאמור גם לענף במתמטיקה. הלוגיקה משמשת כבסיס התיאורטי המרכזי למדעי המחשב. היא הכרחית, למשל, כאשר אנו מעוניינים "לדבר" עם מכונה (כמו מחשב), זאת משום שתקשורת עם מחשב חייבת להיות מאוד מדויקת וחד משמעית, ועליה לעמוד בכללים לוגיים שנקבעו מראש. פיתוח חשיבה לוגית נחוץ גם להתמודדות עם בעיות שונות ומגוונות, בעיקר בתחומי המדע והטכנולוגיה, שדורשות ניתוח מדויק ומסודר של תהליכים ורעיונות. בנוסף, היכולת לנמק טענות באופן מדויק תוך הימנעות מכשלים לוגיים שיפגעו בתקפות המסקנות היא כלי מרכזי במתמטיקה ובמדעי המחשב.

הערה 0.1 (הנחות מוצא). כל הלוגיקה בפרק זה מבוסס על מערכת האקסיומות ZF, מעבר לפרק זה נשתמש תמיד במערכת האקסיומות ZFC (אנו מניחים בקורס זה את אקסיומת הבחירה).

1 תחשיב הפסוקים

הגדרה 1.1 (הצרנה)**.** הפיכת פסוק מילולי לשפה של צורות מתמטיות.

דוגמה 1.1. נצרין את הפסוק "היום לא יום שלישי, היום יום שני ומחר יום שלישי", נגדיר שלושה פסוקים

$a=$"היום יום שלישי" $\qquad$ $b=$"היום יום שני" $\qquad$ $c=$"מחר יום שלישי"

לכן ניתן להפוך את הפסוק המקורי שלנו לפסוק "(לא a) וגם (b וגם c)".

הגדרה 1.2 (פסוק יסודי)**.** טענה עצמית שיכולה להיות אמת או שקר.

דוגמה 1.2. "יורד גשם בחוץ" זהו פסוק יסודי מכיוון שזוהי טענה שיכולה להיות אמת או שקר ואינה מורכבת מתת פסוקים שיכולים להיות אמת או שקר.

1.1 קשרים לוגיים

הגדרה 1.3 (קשר הדיסיונקציה)**.** "A או B" ומתמטית $A \vee B$.

הגדרה 1.4 (קשר הקוניונקציה)**.** "A וגם B" ומתמטית $A \wedge B$.

הגדרה 1.5 (קשר האימפליקציה)**.** "A גורר את B" ובצורה המקובלת יותר "אם A אז B" ומתמטית $A \Longrightarrow B$, בביטוי A נקרא הרישא ו־B נקרא הסיפא.

הגדרה 1.6 (קשר השלילה)**.** "לא A" ומתמטית $\neg A$, נהוגים גם הסימונים $\sim A$, $\overline{A}$.

1.1.1 פסוק

הגדרה 1.7 (פסוק)**.** טענה המורכבת מצירופים של פסוקים יסודיים וקשרים ביניהם.

דוגמה 1.3. הביטוי "היום יום שלישי" זהו פסוק, לעומת זאת "מה השעה?", "סגור את הדלת!", "$1+1$" אינם פסוקים.

דוגמה 1.4. נניח כי A, B, C פסוקים יסודיים אזי הבאים פסוקים

- $A \Longrightarrow B$.
- $(A \vee B) \wedge (C \vee B)$.
- $((A \vee B) \Longrightarrow \neg A) \Longrightarrow C$.

הערה 1.1. ביטויים מהצורה

- $A \Longrightarrow$.
- $A \wedge \vee B$.
- $A \wedge B \Longrightarrow C$.

כלומר ביטויים חסרי משמעות או ביטויים עם דו משמעות אינם נחשבים כפסוקים בתחשיב הפסוקים.

1.2 ערכים של פסוקים

הגדרה 1.8 (השׂמה של ערך אמת)**.** עבור פסוק יסודי A נגדיר אם הוא אמת (בסימון T, true) או שקר (בסימון F, false), ונסמן את ערכו בתור $V(A)$.

הערה 1.2. במערכת הלוגית שאנחנו מתעסקים בה טענה היא או שקר או אמת ולא שניהם, ומתמטית $((V(A) = \text{true}) \vee (V(A) = \text{false})) \wedge ((V(A) \neq \text{true}) \vee (V(A) \neq \text{false}))$.

דוגמה 1.5. נראה מספר פסוקים ואת ההשמה של ערך האמת שלהם,

- $V(1 < 3) = \text{true}$.
- $V(1+1=3) = \text{false}$.
- $V((1+1=3) \Longrightarrow (10-1=4)) = \text{true}$.

הערה 1.3 (שקר גורר הכל). יהיו A, B פסוקים יסודיים אזי $(V(A) = \text{false}) \implies (V(A \implies B) = \text{true})$, כלומר "אם שקר אז משהו" זוהי תמיד טענת אמת.

תרגיל 1.1. הצרינו וקבעו האם המשפט הבא הוא פסוק אמת/פסוק שקר/אינו פסוק, "היום יום שלישי וגם מחר יום שלישי".

טענה 1.1. נניח $A_1, \ldots, A_n$ פסוקים יסודיים אזי יש 2^n השמות ערכי אמת לפסוקים.

הוכחה. כל פסוק יסודי A_i (כאשר i מספר בין 1 ל־n) יכול להיות true או false ולא שניהם, לכן לכל A_i יש 2 אפשרויות ואין קשר בין הפסוקים (מהיותם יסודיים ולכן בחירת ערכיהם שרירותית) אז יש $2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ השמות של ערכי אמת. ■

הגדרה 1.9 (טבלת אמת). טבלה אשר מסכמת את ערכו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו (והטבלה הזאת היא סופית בגודל ואף מגודל 2^n).

דוגמה 1.6 (טבלאות אמת). יהיו A, B ערכי אמת

A	B	$A \vee B$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

A	B	$A \wedge B$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

A	B	$A \implies B$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

A	$\neg A$
true	false
false	true

תרגיל 1.2. נסו להבין מה ניתן להסיק מהנתונים בתרגילים הבאים

1. ידוע כי $A \vee (\neg B)$ פסוק שקר, מה ניתן להסיק?
   א) A אמת, B אמת.
   ב) A אמת, B שקר.
   ג) A לא ניתן לקבוע, B אמת.
   ד) A שקר, B אמת.
   ה) A שקר, B לא ניתן לקבוע.
2. נניח כי p, q פסוקי שקר, מה ניתן להסיק על הביטוי $(p \implies q) \wedge (q \implies p)$?
   א) זהו פסוק שקר.
   ב) זהו פסוק אמת.
   ג) לא ניתן לקבוע.
3. אנו יודעים כי "אם לסבתא היו גלגלים אז היא הייתה רכבת". כמו כן ידוע כי "סבתא של אלון מעולם לא הייתה רכבת, אך סבתא של נעם כן הייתה רכבת." איזה אחד מהבאים ניתן להסיק?
   א) לסבתא של נעם לא היו גלגלים, ולא ניתן לקבוע האם לסבתא של אלון היו גלגלים.
   ב) לסבתא של אלון לא היו גלגלים, וגם לסבתא של נעם לא.
   ג) לסבתא של אלון לא היו גלגלים, ולא ניתן לקבוע האם לסבתא של נעם היו גלגלים.

ד) לסבתא של אלון היו גלגלים, ולא ניתן לקבוע האם לסבתא של נעם היו גלגלים.

ה) לסבתא של אלון היו גלגלים, וגם לסבתא של נעם היו.

ו) לסבתא של אלון היו גלגלים, אבל לסבתא של נעם לא.

ז) לסבתא של אלון לא היו גלגלים, אבל לסבתא של נעם כן.

ח) לסבתא של נעם היו גלגלים, ולא ניתן לקבוע האם לסבתא של אלון היו גלגלים.

1.3 שקילות של פסוקים

הגדרה 1.10 (שקילות פסוקים). יהיו C,D פסוקים נגיד שהם שקולים ונסמן $C\equiv D$ אם לכל השמה של ערכי אמת (לפסוקים היסודיים המרכיבים אותם) מתקיים $V\left(C\right)=V\left(D\right)$.

טענה 1.2. יהיו A,B,C פסוקים אזי

1. $A\wedge B\equiv B\wedge A$.
2. $A\vee B\equiv B\vee A$.
3. $A\wedge\left(B\wedge C\right)\equiv\left(A\wedge B\right)\wedge C$.
4. $A\vee\left(B\vee C\right)\equiv\left(A\vee B\right)\vee C$.

הוכחה. יהיו A,B,C פסוקים נבנה עבור כל פסוק טבלת אמת, כאשר שני פסוקים עם אותה טבלת אמת מעידה של שקילותם (כי טבלת אמת מייצגת את ערך הפסוק בכל בחירות השמות ערך האמת)

A	B	$A\wedge B$	$B\wedge A$	$A\vee B$	$B\vee A$
true	true	true	true	true	true
true	false	false	false	true	true
false	true	false	false	true	true
false	false	false	false	false	false

A	B	C	$A\wedge B$	$B\wedge C$	$(A\wedge B)\wedge C$	$A\wedge(B\wedge C)$	$A\vee B$	$B\vee C$	$(A\vee B)\vee C$	$A\vee(B\vee C)$
true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true
true	false	true	false	false	false	false	true	true	true	true
false	true	true	false	true	false	false	true	true	true	true
false	false	true	false	false	false	false	false	true	true	true
true	true	false	true	false	false	false	true	true	true	true
true	false	false	false	false	false	false	true	false	true	true
false	true	false	false	false	false	false	true	true	true	true
false	false	false	false	false	false	false	false	false	false	false

■

טענה 1.3. יהיו A,B,C פסוקים אזי

1. $A\Longrightarrow B\equiv\left(\neg A\right)\vee B$.
2. $A\Longrightarrow B\equiv\left(\neg B\right)\Longrightarrow\left(\neg A\right)$.
3. $\neg\left(\neg A\right)\equiv A$.
4. $A\wedge\left(B\vee C\right)\equiv\left(A\wedge B\right)\vee\left(A\wedge C\right)$.
5. $A\vee\left(B\wedge C\right)\equiv\left(A\vee B\right)\wedge\left(A\vee C\right)$.
6. $\neg\left(A\Longrightarrow B\right)\equiv A\wedge\left(\neg B\right)$.

הוכחה. נוכיח את 2 וכל שאר הטענות ישארו כתרגיל לקורא, יהיו A,B,C פסוקים אזי

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A\Longrightarrow B$	$(\neg B)\Longrightarrow(\neg A)$
true	true	false	false	true	true
true	false	false	true	false	false
false	true	true	false	true	true
false	false	true	true	true	true

. ■

טענה 1.4 (כללי דה מורגן). יהיו A, B פסוקים אזי $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A)\vee(\neg B)$ וכן $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A)\wedge(\neg B)$.

הוכחה. יהיו A, B פסוקים אזי

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg(A\wedge B)$	$(\neg A)\vee(\neg B)$	$\neg(A\vee B)$	$(\neg A)\wedge(\neg B)$
true	true	false	false	true	true	false	false	false	false
true	false	false	true	false	true	true	true	false	false
false	true	true	false	false	true	true	true	false	false
false	false	true	true	false	false	true	true	true	true

■

הגדרה 1.11 (אם ורק אם (אם"ם)). יהיו A, B פסוקים נגדיר $A \Longleftrightarrow B \equiv (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$.

הגדרה 1.12 (טאוטולוגיה). פסוק A שבעבור כל השמת ערכי אמת מקיים $V(A) = \text{true}$.

דוגמה 1.7. יהיו A, B, C פסוקים נוכיח כי הפסוק $\alpha = ((A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \wedge B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$ הינו טאוטולוגיה, נחלק למקרים,

- נניח כי $V((A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \wedge B) = \text{false}$ אז $V(\alpha) = \text{true}$ מטבלאת אמת של גרירה, כנדרש.
- אחרת נניח כי $V((A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \wedge B) = \text{true}$ אזי מטבלאת האמת של "וגם" נקבל כי שני הפסוקים אמת, כלומר $(V(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) = \text{true}) \wedge (V(B) = \text{true})$, כעת נחלק על פי A,
  - אם $V(A) = \text{false}$ אזי $V(A \Longrightarrow C) = \text{true}$ מטבלאת האמת של גרירה, ולכן $V(\alpha) = \text{true}$.
  - אם $V(A) = \text{true}$ אזי $V(B \Longrightarrow C) = \text{true}$ וכן כי $V(B) = \text{true}$ נקבל $V(C) = \text{true}$, לכן $V(A \Longrightarrow C) = \text{true}$ בפרט $V(\alpha) = \text{true}$.

הגדרה 1.13 (סתירה). פסוק A שבעבור כל השמת ערכי אמת מקיים $V(A) = \text{false}$.

תרגיל 1.3. יהי A פסוק אזי (A סתירה)$\Longleftrightarrow$($\neg A$ טאוטולוגיה).

טענה 1.5. יהי P פסוק אזי $P \Longrightarrow P$, $P \vee \neg P$ הן טאוטולוגיות.

הגדרה 1.14 (פסוק נובע סמנטית). פסוק α נובע סמנטית מהפסוקים $\alpha_1 \dots \alpha_n$ אם השמה המקיימת $V(\alpha_i) = \text{true}$ לכל i בין 1 ל־n גוררת כי מתקיים $V(\alpha) = \text{true}$.

דוגמה 1.8. נגדיר $\alpha_1=\neg\left(A\Longrightarrow B\right)$, $\alpha_2=B$ וכן $\alpha=A$. נניח בשלילה כי $V\left(\alpha_1\right)=V\left(\alpha_2\right)=\text{true}$ בפרט $V\left(\neg\left(A\Longrightarrow B\right)\right)=\text{true}$ ולכן $V\left(A\Longrightarrow B\right)=\text{false}$ אך כאמור גם $V\left(B\right)=\text{true}$ ולכן לא אפשרי שמתקיים $V\left(A\right)=\text{true}$ כי אם זה מתקיים אז נקבל $V\left(A\Longrightarrow B\right)=\text{true}$ בסתירה למה שהסקנו כבר, לכן $V\left(A\right)=\text{false}$ ובפרט $V\left(\neg A\right)=\text{true}$ כלומר $V\left(\alpha\right)=\text{true}$, אזי α נובע סמנטית מ־α_1,α_2.

תרגיל 1.4. יהיו A,B,C פסוקים, האם הפסוק $B\Longrightarrow C$ נובע סמנטית מהפסוקים $A\Longrightarrow C$, $A\Longrightarrow B$.

2 תחשיב היחסים

הגדרה 2.1 (פרידיקט n מקומי)**.** טענה ב־n משתנים.

דוגמה 2.1 (פרידיקטים)**.** הטענה "קיים x המקיים $x^2=-1$" זהו פרידיקט חד מקומי (על איזה תחום הוא מוגדר? האם יש לו משמעות לכל אובייקט מתמטי?), הטענה "לכל x,y מתקיים $x>y$" זהו פרידיקט דו מקומי (שוב אנו לא בטוחים מאיזה תחום x,y הגיעו, האם הם מספרים? אולי הם בכלל אובייקט שרירותי?).

2.1 כמתים

הגדרה 2.2 (כמת קיים)**.** מסמל כי קיים אובייקט שמקיים את הפרידיקט, מסומן בעזרת $\exists$.

דוגמה 2.2. הפסוק $\forall x.x\geq-2$ אומר כי "עבור כל x, x גדול שווה -2" שימו לב כי לא נאמר האם הטענה אמת או שקר אלא רק את משמעותה.

הגדרה 2.3 (כמת לכל)**.** מסמל כי לכל אובייקט מתקיים הפרידיקט, מסומן בעזרת $\forall$.

דוגמה 2.3. הפסוק $\forall y.\exists x.x+x=y$ אומר כי "עבור כל y, קיים x, כך שמתקיים x ועוד x שווה y" לדוגמה מעל המספרים (הממשיים) טענה זו נכונה.

הגדרה 2.4 (טענה)**.** טענה בתחשיב היחסים הוא ביטוי מהצורה $\exists x.P\left(x\right)$ או $\forall y.Q\left(y\right)$ כאשר P,Q פרידיקטים או בעצמם טענות בתחשיב היחסים.

דוגמה 2.4 (טענות בתחשיב היחסים)**.** הטענה $\exists x.\forall y.x<y$ מסמלת "קיים x עבורו לכל y מתקיים $x<y$", הטענה $\forall x,y.\left(x<y\right)\Longrightarrow\left(x<y\right)$ מסמלת "לכל x,y אם $x<y$ אז $x<y$".

2.1.1 קיום ויחידות

הגדרה 2.5 (קיים יחיד)**.** מסמל כי קיים ויחיד אובייקט שמקיים את הפרידיקט, מסומן בעזרת $\exists!$. מתמטית תהא ϕ טענה אזי נגדיר $\exists!x.\phi\left(x\right)\equiv\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\wedge\left(\forall x,y.\phi\left(x\right)\wedge\phi\left(y\right)\Longrightarrow x=y\right)$.

דוגמה 2.5. אנו טוענים כי "קיים ויחיד x עבורו לכל y יתקיים $x+y=y$" כמובן אנו יודעים כי אותו ה־x הוא 0 וכן זהו היחיד המקיים את הטענה, לכן נוכל לכתוב את הטענה בצורה הבאה $\exists!x.\forall y.x+y=y$.

הגדרה 2.6 (כתיב יוטא)**.** מסמל את האובייקט היחיד שמקיים את הפרידיקט, יהי ϕ פרידיקט עבורו $\exists!x.\phi\left(x\right)$ אזי נגדיר את $a=\iota x.\phi\left(x\right)$ להיות איבר עבורו $\phi\left(a\right)$ נכון.

דוגמה 2.6. נראה מספר דוגמאות

- בטענה "קיים ויחיד x עבורו לכל y יתקיים $x+y=y$" אמרנו שאותו ה־x היחידני הוא 0 לכן נכתוב $0=\iota x.\left(\forall y.x+y=y\right)$.
- $6=\left(\iota x.x+1=7\right)$ זוהי טענת אמת (ודאו עם הוכחה כי זהו האיבר היחיד המקיים זאת).
- $10=\left(\iota x.x^{3}=27\right)$ זוהי טענת שקר (ודאו עם הוכחה כי זהו אינו האיבר היחיד המקיים זאת או שהאיבר עצמו אינו מקיים את הפרידיקט).
- $\iota x.x^{2}=9$ זוהי אינה טענה חוקית, לא קיים ויחיד איבר המקיים את הפרידיקט $x^{2}=9$.

2.2 תחום הכימות

כפי שהוסבר קודם, קיימת בעיה בכתיבה טענה כללית בתחשיב היחסים, לא ברור מהיכן מגיעים המשתנים בביטוי, לכן נגדיר את תחום הכימות להיות התחום ממנו המשתנים מגיעים. כמו כן כאשר ברור מהו התחום לא נציין אותו (כמו בטענה $\exists x.x=1$ בה ברור כי אנו עובדים מעל מערכת מספרית כלשהי אשר הובהרה לפני).

הגדרה 2.7 (תחום הכימות/עולם הדיון)**.** קבוצת האובייקטים שמהווים את המקור להצבות של משתנים.

הגדרה 2.8 (אינטרפרטציה של פרידיקט)**.** יהי D תחום כימות אזי טענה על אברי D.

הגדרה 2.9 (נכונות בתחשיב היחסים)**.** תהא טענה $P\left(x\right)$, באינטרפרטציה $\exists x.P\left(x\right)$ בתחום D, נאמר כי P נכונה בתחום D אם קיים a כלשהו ב־D עבורו $P\left(a\right)$ מתקיים. תהא טענה $Q\left(x\right)$, באינטרפרטציה $\forall x.Q\left(x\right)$ בתחום D, נאמר כי Q נכונה בתחום D אם לכל a ב־D מתקיים $Q\left(a\right)$. נסמן במקרים אלה $D\models P\left(x\right)$ וכן $D\models Q\left(x\right)$.

דוגמה 2.7 (אינטרפרטציה ונכונות)**.** נגדיר טענה $P\left(x\right)$ עם אינטרפרטציה $\exists x.x=1$ בתחום המספרים הטבעיים (כלומר $0,1,2\ldots$), כמו כן נשים לב כי הטענה כמובן נכונה (היא מתקיימת עבור $x=1$ אשר נמצא בתחום הכימות).

הגדרה 2.10 (טענות שקולות)**.** נאמר כי α,β שקולות ונסמן $\alpha\equiv\beta$ אם לכל תחום כימות D ואינטרפרטציה של α,β מתקיים $D\models\alpha\iff\beta$.

תרגיל 2.1. הראה כי הטענה הבאה אינה בהכרח נכונה (כלומר מצא עולם דיון ואינטרפרטציה עבורם הטענה אינה נכונה)

$$\left(\left(\forall x.\exists y.P\left(x,y\right)\right)\wedge\left(\forall y.\exists x.P\left(x,y\right)\right)\right)\Longrightarrow\exists x.\exists y.\forall z.\left(P\left(x,z\right)\vee P\left(z,y\right)\right)$$

3 הוכחות

בתחשיב הפסוקים הסברנו כיצד טענות מתקשרות אחת אל השנייה בעזרת קשרים לוגיים, בתחשיב היחסים הסברנו כיצד טענות לגבי אובייקטים מוגדרות, כעת כאשר יש בידינו טענות נרצה להוכיח או להפריך אותן.

3.0.1 הוכחת קיים

הערה 3.1 (הוכחת טענת קיים). כדי להוכיח טענה מהצורה $\exists x.P\left(x\right)$ נביא דוגמה ספציפית לאיבר a מתחום הכימות אשר מקיים את $P\left(x\right)$ (כלומר $P\left(a\right)$ מתקיים). בשימוש בטענת קיים כנתונה נשים לב כי כמת קיים מתאר לנו כי קיים איבר a המקיים $P\left(a\right)$ אך אנו לא יודעים מיהו אותו a, לכן נשתמש בו שרירותית בעזרת ההצהרה "יהי a המקיים $P\left(a\right)$" ונמשיך משם.

3.0.2 הוכחת לכל

הערה 3.2 (הוכחת טענת לכל). כדי להוכיח טענה מהצורה $\forall x.P\left(x\right)$ נראה כי עבור a שרירותי (חשוב שהוא לא ספציפי ולא נבחר על פי חוק מסויים!) מתחום הכימות מתקיים $P\left(x\right)$ (כלומר $P\left(a\right)$ מתקיים). רק כאשר עולם הדיון סופי וקטן מספיק ניתן לעבור איבר איבר בו ולהראות שמתקיים $P\left(x\right)$ עבור כל איבר ידנית, אך זה לא מומלץ אלא אם כן תחום הכימות הוא בעל איברים בודדים. בשימוש בטענת לכל כנתונה נשים לב כי כמת לכל מתאר לנו כי כל איבר a מקיים $P\left(a\right)$ ולכן ניתן לבחור כל a בתחום הכימות ולהמשיך משם.

3.1 הוכחת שקילות

טענה 3.1. לכל פרידיקטים ϕ,ψ מתקיים

1. $\neg\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\equiv\forall x.\neg\phi\left(x\right)$.
2. $\neg\left(\forall x.\phi\left(x\right)\right)\equiv\exists x.\neg\phi\left(x\right)$.
3. $\forall x.\forall y.\phi\left(x,y\right)\equiv\forall y.\forall x.\phi\left(x,y\right)$.
4. $\exists x.\exists y.\phi\left(x,y\right)\equiv\exists y.\exists x.\phi\left(x,y\right)$.
5. $\forall x.\left(\phi\left(x\right)\wedge\psi\left(x\right)\right)\equiv\left(\forall x.\phi\left(x\right)\right)\wedge\left(\forall y.\psi\left(y\right)\right)$.
6. $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)\equiv\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\vee\left(\exists y.\psi\left(y\right)\right)$.
7. $\exists x.\forall y.\phi\left(x,y\right)\not\equiv\forall y.\exists x.\phi\left(x,y\right)$.

הוכחה. נוכיח את טענות $6,7$ וכל השאר ישארו כתרגיל לקורא,

6. הטענה $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)\equiv\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\vee\left(\exists y.\psi\left(y\right)\right)$, יהי D תחום כימות כלשהו ותהא אינטרפרטציה כלשהי עבור ϕ,ψ,

- נניח כי אגף ימין נכון, כלומר נניח כי $\left(\exists x.\phi\left(x\right)\right)\vee\left(\exists y.\psi\left(y\right)\right)$ מהגדרת "או" אנו יודעים כי לפחות אחד מהביטויים נכונים,
  - אם הביטוי $\exists x.\phi\left(x\right)$ מתקיים, אזי קיים a בתחום הכימות D עבורו $\phi\left(a\right)$ נכון ובפרט נשים לב כי הוא גם מקיים $\phi\left(a\right)\vee\psi\left(a\right)$ מהגדרת "או" ולכן $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)$ (כי בפרט a מקיים זאת).
  - אם הביטוי $\exists x.\psi\left(x\right)$ מתקיים, אזי קיים a בתחום הכימות D עבורו $\psi\left(a\right)$ נכון ובפרט נשים לב כי הוא גם מקיים $\phi\left(a\right)\vee\psi\left(a\right)$ מהגדרת "או" ולכן $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)$ (כי בפרט a מקיים זאת).
- נניח כי אגף שמאל נכון, כלומר נניח כי $\exists x.\left(\phi\left(x\right)\vee\psi\left(x\right)\right)$ נקבע את a עבורו $\phi\left(a\right)\vee\psi\left(a\right)$ אנו יודעים כי יש a כזה מטענת קיים, כעת מהגדרת "או" לפחות אחד מהביטויים נכונים,

- אם הביטוי $\phi(a)$ מתקיים, אזי גם הביטוי $\exists x.\phi(x)$ מתקיים (בפרט a מקיים זאת) ולכן מהגדרת "או" גם $(\exists x.\phi(x)) \vee (\exists y.\psi(y))$ מתקיים (על ידי אותו a).
- אם הביטוי $\psi(a)$ מתקיים, אזי גם הביטוי $\exists x.\psi(x)$ מתקיים (בפרט a מקיים זאת) ולכן מהגדרת "או" גם $(\exists x.\phi(x)) \vee (\exists y.\psi(y))$ מתקיים (על ידי אותו a).

אזי קיבלנו כי הנחה שאחד הצדדים מתקיים גורר את השני ובפרט השמת ערכי אמת גוררת סמנטית את הצד השני, כלומר הטענות שקולות.

7. הטענה $\forall y.\exists x.\phi(x,y) \not\equiv \exists x.\forall y.\phi(x,y)$, נשים לב כי בתחום הכימות המספרים הטבעיים (כלומר $0,1,2\ldots$) ועם האינטרפריטציה $\phi(x,y) = "y < x"$ נקבל כי האגף הימני נכון אך השמאלי לא, מה שאומר שהטענות אינן שקולות כנדרש (מכיוון שמצאנו אינטרפרטציה ותחום כימות עליו הטענות אינן שקולות)

- הוכחת אגף ימין, צריך להוכיח $\forall y.\exists x.\phi(x,y)$, יהי y מספר טבעי, צריך להוכיח $\exists x.\phi(x,y)$, נגדיר $x = y+1$, נותר להוכיח $\phi(x,y)$, נשים לב כי $\phi(x,y) = \phi(y+1,y) = "y < y+1"$ וזה נכון.
- הפרכת אגף שמאל, צריך להפריך $\exists x.\forall y.\phi(x,y)$, נראה כי לא קיים x המקיים זאת, יהי x מספר טבעי, נשים לב כי עבור $y = x$ מתקיים $\phi(x,y) = \phi(x,x) = "x < x"$ כלומר הביטוי לא נכון, אזי לכל x הטענה לא אפשרית ולכן לא קיים x עבורו הטענה נכונה.

■

תרגיל 3.1. כתבו פסוק שקול לוגית לפסוק הבא ללא סימני שלילה,

$$\neg\left(\exists\varepsilon > 0.\forall\delta > 0.\exists x > 0.\exists y > 0.\left(|x-y| < \delta \wedge |x-y| > \varepsilon\right)\right)$$

חלק II

תורת הקבוצות

בתורת הקבוצות האובייקט המרכזי הוא (באופן מפתיע) קבוצות, למרות היותם האובייקט המרכזי בתחום בקורס זה לא ינתנו הגדרות פורמליות לאובייקט זה, זאת מכיוון שהמתמטיקה כמו כל ענף מבוסס על פני הגדרות ואקסיומות אשר אנו מסכימים שהן נכונות ומשם מתקדמים, לכן כאן נשתמש בקבוצה באופן נאיבי ואינטואיטיבי ללא התעמקות באקסיומות על פיהן הן מתנהגות בגלוי. (אך זה לא תירוץ לנפנופי ידיים! הכל עדיין יהיה פורמלי ומדוייק)

1 קבוצות

הגדרה 1.1 (קבוצה)**.** אוסף של איברים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות, היא מסומנת בעזרת סוגריים מסולסלים $\{\}$ אשר ביניהן כל האיברים השייכים לקבוצה, או אם לא ניתן לרשום את כל האיברים חוק מסויים ליצירת האיברים.

הגדרה 1.2 (שייך)**.** יהי a איבר בקבוצה A אזי נאמר כי a שייך ל־A ונסמן $a \in A$.

הערה 1.1 (לא שייך). $a \notin A \equiv \neg (a \in A)$.

1.1 סימון קבוצה

הגדרה 1.3 (רשימת איברים)**.** נסמן $\{a_1 \dots a_n\}$ את הקבוצה המכילה את האיברים $a_1 \dots a_n$. מתקיים $(a \in \{a_1 \dots a_n\}) \iff (\exists i.a = a_i)$.

דוגמה 1.1 (רשימות איברים)**.** $\{1 \dots n\}$ המספרים השלמים בין 1 עד n, $\{\{1\}, \{2\}\}$ קבוצה המכילה את הקבוצה המכילה את 1 ואת הקבוצה המכילה את 2.

הגדרה 1.4 (עקרון ההפרדה)**.** יהי ϕ פרידיקט אזי $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ קבוצה המכילה את כל אברי A המקיימים את ϕ. מתקיים $(a \in \{x \in A \mid \phi(x)\}) \iff ((a \in A) \wedge \phi(a))$.

הגדרה 1.5 (עקרון ההחלפה)**.** תהא f פעולה הפועלת על אברי A אזי $\{f(x) \mid x \in A\}$ קבוצה המכילה את $f(a)$ עבור כל $a \in A$. מתקיים $(a \in \{f(x) \mid x \in A\}) \iff (\exists b \in A.f(b) = a)$.

הגדרה 1.6 (סינגלטון/יחידון)**.** קבוצה A בעלת איבר יחיד, דהיינו $A = \{a\}$.

דוגמה 1.2 (קבוצות ושייכות)**.** נשים לב כי $\{1,0\} = \{0,0,1\} = \{0,0,1,1,1\} = \{0,1\}$ מכיוון שאין משמעות לסדר האיברים ואין חזרות, כמו כן $1 \in \{1\}$, $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}, 1, 2\}$, $\{2,2\} \in \{\{2\}\}$, $\{3\} \notin \{1,2,3\}$, $\{x \in \{1,2,3\} \mid x^2 = x\} = \{1\}$, $\{2^x \mid x \in \{0,1\}\} = \{2^0, 2^1\}$, ודאו כי אתם מבינים את כל הדוגמאות ומדוע הן נכונות.

1.1.1 פרדוקס ראסל

משפט 1.1 (פרדוקס ראסל)**.** קיים פרידיקט ϕ עבורו $\{x \mid \phi(x)\}$ איננה קבוצה.

הוכחה. נגדיר את הפרידיקט $\phi(x) = "x \notin x"$, נניח בשלילה כי הקבוצה $A = \{x \mid \phi(x)\}$ קיימת, אם $A \in A$ אזי מעקרון ההפרדה מתקיים $\phi(A)$ כלומר $A \notin A$ סתירה, אם $A \notin A$ אזי מתקיים $\phi(A)$ ומעקרון ההפרדה $A \in A$ סתירה. בפרט הקבוצה A איננה אפשרית, ולכן אנו מגבילים את הדרכים ליצירת קבוצה. ■

מסקנה 1.1. לא קיימת קבוצת כל הקבוצות.

הוכחה. נניח כי A קבוצת כל הקבוצות אזי $\{x \in A \mid x \notin x\} = \{x \mid x \notin x\}$ היא קבוצה על פי עקרון ההפרדה סתירה לפרדוקס ראסל. ■

1.1.2 עוצמה סופית

הגדרה 1.7 (עוצמה סופית)**.** תהא A קבוצה בעלת מספר סופי של איברים, אזי $|A|$ מסמל את מספר האיברים בקבוצה.

דוגמה 1.3. מתקיים $|\{1,2,3\}| = 3$, $|\{1,2,1\}| = 2$, ולעומת זאת $|\{0,1,2,3,\ldots\}|$ אינו מוגדר (כרגע לפחות).

1.2 קבוצות מפורסמות

הגדרה 1.8 (מספרים טבעיים)**.** נסמן $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$.

1.2.1 אינדוקציה

משפט 1.2 (אינדוקציה)**.** יהי $P(x)$ פרידיקט אזי
$(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}.P(n) \Longrightarrow P(n+1))) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}.P(n))$.

הוכחה. יהי $P(x)$ פרידיקט ונניח כי $P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}.P(n) \Longrightarrow P(n+1))$, צ"ל $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$, נסמן $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \neg P(n)\}$, נניח בשלילה כי $\exists n \in \mathbb{N}.\neg P(n)$ כלומר $S \neq \varnothing$ אזי קיים $s \in S$ אשר הינו מינימום (עבור הוכחת קיימות המינימום ראה הטבעיים כיחס סדר טוב), מהנתון כי $P(0)$ נסיק כי $s \geq 1$ ולכן $s-1 \in \mathbb{N}$ כמו כן $s-1 \notin S$ (מהיות s המינימום ב־S) ולכן $P(s-1)$ מתקיים מהגדרת S, כעת מהנתון כי מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}.P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ נקבל בפרט עבור $s-1$ כי $P(s)$ מתקיים, סתירה לעובדה כי $s \in S$, ולכן קיבלנו כי $\forall n \in \mathbb{N}.P(n)$ כנדרש. ■

הערה 1.2. במשפט האינדוקציה, הנחת $P(0)$ ניתנת להחלפה בכל הנחת $P(a)$ עבור $a \in \mathbb{N}$ קבוע, וכך הפרידיקט $P(x)$ תקף עבור כל $x \in \mathbb{N}$ אשר מקיים $a \leq x$.

דוגמה 1.4 (אי־שיוויון ברנולי)**.** נרצה להוכיח באינדוקציה את אי־שיוויון ברנולי, עבור $r \in \mathbb{N}$ ועבור $x \in \mathbb{R}$ המקיים $x \geq -1$ מתקיים $(1+x)^r \geq 1 + rx$.

- בסיס האינדוקציה: עבור $r = 0$ יהי $x \in \mathbb{R}$ המקיים $x \geq -1$ נשים לב כי $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$ ובפרט $(1+x)^r \geq 1 + rx$ כנדרש.

- הנחת האינדוקציה: נניח כי עבור $r \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \mathbb{R}$ המקיים $x \geq -1$ מתקיים $(1+x)^r \geq 1+rx$.
- צעד האינדוקציה: כעת עבור $r+1$ יהי $x \in \mathbb{R}$ המקיים $x \geq -1$ נשים לב כי

$$\begin{aligned}(1+x)^{r+1} &= (1+x)^r (1+x) \geq (1+rx)(1+x) \\ &= 1+rx+x+rx^2 \geq 1+rx+x \\ &= 1+(r+1)x\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בהנחה כי $(1+x)^r \geq 1+rx$ במעבר השני וכן בעובדה כי $1+x \geq 0$ ולכן אי בעיה עם החלפות הסימן באי־השיוויון.

הגדרה 1.9 (מספרים חיוביים)**.** נסמן $\mathbb{N}_+ = \{1,2,3,\ldots\}$.

הגדרה 1.10 (מספרים זוגיים ואי־זוגיים)**.** נסמן $\mathbb{N}_{\text{even}} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ וכן $\mathbb{N}_{\text{odd}} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

הגדרה 1.11 (מספרים ראשוניים)**.** נסמן $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N}_+ \mid \text{ראשוני } p\}$.

הגדרה 1.12 (מספרים שלמים)**.** נסמן $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

הגדרה 1.13 (מספרים רציונליים)**.** נסמן $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}_+\right\}$.

הגדרה 1.14 (מספרים ממשיים)**.** נסמן "כל המספרים הממשיים"$= \mathbb{R}$, להגדרה של המספרים הממשיים על פי חתכי דדקינד ראו ... ועל פי סדרות קושי ראו חדו"א2.

הגדרה 1.15 (ערך שלם תחתון)**.** יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $\lfloor x \rfloor = \max(n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x)$.

הגדרה 1.16 (ערך שלם עליון)**.** יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $\lceil x \rceil = \min(n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x)$.

דוגמה 1.5. מתקיים $\lfloor 1.1 \rfloor = 1$, $\lceil 1.1 \rceil = 2$, $\lfloor 10.0 \rfloor = 10$, $\lceil 0 \rceil = 0$.

הגדרה 1.17 (מספרים ממשיים חיוביים)**.** נסמן $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

הגדרה 1.18 (קטע/אינטרוול)**.** יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ נגדיר

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

הגדרה 1.19 (מספרים מרוכבים)**.** נסמן $\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.

הגדרה 1.20 (קבוצה ריקה)**.** נסמן $\varnothing = \{\}$, מתקיים מהגדרתה $\forall x.x \notin \varnothing$.

הערה 1.3. שימו לב כי $|\varnothing| = 0$.

1.3 הכלה ושיוויון

1.3.1 הכלה

הגדרה 1.21 (הכלה)**.** יהיו A,B קבוצות נאמר כי A מוכלת ב־B ונסמן $A\subseteq B$ אם מתקיים $\forall x\left(x\in A\Longrightarrow x\in B\right)$.

הערה 1.4 (לא מוכל). יהיו A,B נסמן $A\nsubseteq B\equiv\neg\left(A\subseteq B\right)$.

הערה 1.5 (מוכל ממש). יהיו A,B נסמן $A\subset B\equiv\left(A\subseteq B\right)\wedge\left(B\nsubseteq A\right)$.

דוגמה 1.6 (הכלה)**.** מתקיים $\mathbb{P}\subseteq\mathbb{N}_{+}\subseteq\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ כמו כן $\{1\}\nsubseteq\{\{1\}\}$ וכן $\{1\}\subset\{1,2\}$.

משפט 1.3. $\forall A.\varnothing\subseteq A$.

הוכחה. תהא A_0 קבוצה, צריך להוכיח $\varnothing\subseteq A_0$, מהגדרת הכלה צריך להוכיח $\forall x\left(x\in\varnothing\Longrightarrow x\in A_0\right)$, יהי x_0, צריך להוכיח $x_0\in\varnothing\Longrightarrow x_0\in A_0$, מהגדרת קבוצה ריקה מתקיים כי $\forall x.x\notin\varnothing$ בפרט עבור x_0 מתקיים $x_0\notin\varnothing$ כלומר הרישא בטענה שצריך להוכיח תמיד שקרית, ומטבלת האמת של גרירה נקבל כי כל הטענה אמת כנדרש. ■

טענה 1.1 (טרניזיטיביות ההכלה). $\forall A,B,C.\left(A\subseteq B\wedge B\subseteq C\right)\Longrightarrow\left(A\subseteq C\right)$.

הוכחה. יהיו A_0,B_0,C_0 קבוצות, נניח כי $\left(A_0\subseteq B_0\right)\wedge\left(B_0\subseteq C_0\right)$, צריך להוכיח $A_0\subseteq C_0$, מהגדרת הכלה צריך להוכיח $\forall x\left(x\in A_0\Longrightarrow x\in C_0\right)$, יהי x_0, צריך להוכיח $x_0\in A_0\Longrightarrow x_0\in C_0$, נניח כי $x_0\in A_0$, צריך להוכיח $x_0\in C_0$, מהגדרת הכלה נסיק כי $\forall x\left(x\in A_0\Longrightarrow x\in B_0\right)$ ובפרט עבור x_0 מתקיים $x_0\in B_0$ כמו כן $\forall x\left(x\in B_0\Longrightarrow x\in C_0\right)$ ובפרט עבור x_0 נקבל $x_0\in C_0$ כנדרש. ■

1.3.2 שיוויון

הגדרה 1.22 (שיוויון/עקרון האקסטנציונליות)**.** $\left(A=B\right)\equiv\left(\forall x.x\in A\Longleftrightarrow x\in B\right)$.

תרגיל 1.1 (הכלה דו כיוונית)**.** יהיו A,B קבוצות אזי $\left(A=B\right)\equiv\left(A\subseteq B\right)\wedge\left(B\subseteq A\right)$.

דוגמה 1.7. מתקיים $\mathbb{N}=\{n\in\mathbb{Z}\mid n\geq0\}$, $[-1,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid|x|\leq1\}$.

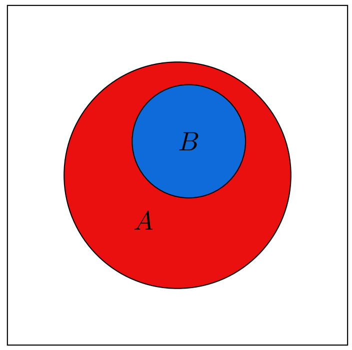
טענה 1.2 (יחידות הקבוצה הריקה). $\forall X\left(\forall y.y\notin X\Longrightarrow X=\varnothing\right)$.

הוכחה. תהא X_0 קבוצה ונניח כי $\forall y.y\notin X_0$, צריך להוכיח $X_0=\varnothing$, מהגדרת שיוויון צריך להוכיח $\left(\varnothing\subseteq X_0\right)\wedge\left(X_0\subseteq\varnothing\right)$, נשים לב כי הוכחנו עבור כל קבוצה שמתקיים $\varnothing\subseteq X_0$ ולכן מהגדרת "וגם" נותר להוכיח $X_0\subseteq\varnothing$, מהגדרת הכלה צריך להוכיח $\forall x\left(x\in X_0\Longrightarrow x\in\varnothing\right)$, יהי x_0 נשים לב כי $x_0\notin X_0$ מתכונת X_0 בפרט הרישא תמיד טענה שקרית לכן הגרירה טענת אמת כנדרש. ■

2 פעולות על קבוצות

הערה 2.1 (דיאגרמת וון). דיאגרמת וון זוהי דיאגרמה אשר מטרתה היא לבטא קשרים בין קבוצות. נשרטט קבוצה בתור עיגול, איבר בקבוצה כנקודה, והחלק עליו מדובר בצבע.

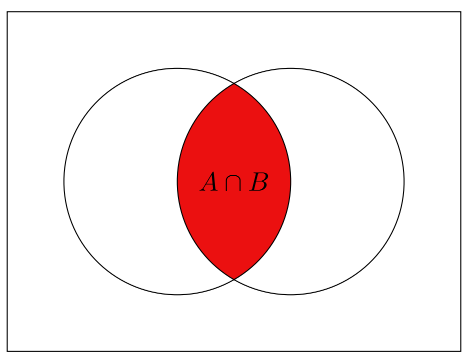
דוגמה 2.1 (דיאגרמת וון של הכלה)**.** בכדי לייצג קבוצות $A \subseteq B$ נשרטט



2.1 חיתוך

הגדרה 2.1 (חיתוך)**.** תהיינה A, B קבוצות אזי $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$.

הערה 2.2 (דיאגרמת וון של חיתוך). בכדי לייצג את הפעולה $A \cap B$ נשרטט, שימו לב כי החלק האדום הוא החלק המדובר,



דוגמה 2.2. מתקיים $\{3\} = \{3,4,5,6\} \cap \{1,2,3\}$, $\varnothing = \{1\} \cap \{\{1\}\}$, $\{3,4\} = \{3,4,5\} \cap \{3,4\}$.

טענה 2.1 (אסוציאטיביות חיתוך). תהיינה A, B, C קבוצות אזי $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

הוכחה. תהיינה A, B, C קבוצות, נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית

- צ"ל: $(A\cap B)\cap C\subseteq A\cap(B\cap C)$, יהי $x\in(A\cap B)\cap C$ נשתמש בהגדרת חיתוך ועיקרון ההפרדה ונקבל

$$\begin{aligned}x\in(A\cap B)\cap C&\equiv(x\in A\cap B)\wedge(x\in C)\equiv((x\in A)\wedge(x\in B))\wedge(x\in C)\\&\equiv(x\in A)\wedge((x\in B)\wedge(x\in C))\equiv(x\in A)\wedge(x\in B\cap C)\\&\equiv x\in A\cap(B\cap C)\end{aligned}$$

באשר השתמשנו באסוציאטיביות הקשר הלוגי "וגם".

- צ"ל: $(A\cap B)\cap C\supseteq A\cap(B\cap C)$ יהי $x\in A\cap(B\cap C)$ נשתמש בהגדרת חיתוך ועיקרון ההפרדה ונקבל

$$\begin{aligned}x\in A\cap(B\cap C)&\equiv(x\in A)\wedge(x\in B\cap C)\equiv(x\in A)\wedge((x\in B)\wedge(x\in C))\\&\equiv((x\in A)\wedge(x\in B))\wedge(x\in C)\equiv(x\in A\cap B)\wedge(x\in C)\\&\equiv x\in(A\cap B)\cap C\end{aligned}$$

באשר השתמשנו באסוציאטיביות הקשר הלוגי "וגם".

■

הערה 2.3 (סימטריות והנחות בהוכחה). שימו לב כי בהוכחה הטענה מלעיל ההוכחות כמעט זהות, במצב זה אנו מרשים לעצמנו להשתמש במשפטים כמו "מטעמי סימטריה" ובקיצור "בה"כ" (בלי הגבלת הכלליות) אשר מאפשרות להניח כי חלקים מההוכחה ניתנים לדילוג עקב דימיון ברור או טריוואליות. שימו לב כי שימוש במשפטים כאלו יגיעו עם הזמן ועם בשלות מתמטית מתאימה, ובסיכום זה ישתמשו על מנת להראות כיצד מוכיחים טענות אלו בחיים האמיתיים.

טענה 2.2 (חילופיות חיתוך). תהיינה A,B קבוצות אזי $A\cap B=B\cap A$.

הוכחה. יהי $x\in A\cap B$ מהגדרת חיתוך ועיקרון ההפרדה מתקיים $(x\in A)\wedge(x\in B)$ כעת מחילופיות הקשר הלוגי "וגם" מתקיים $(x\in B)\wedge(x\in A)$ ולכן $x\in B\cap A$ מהגדרת חיתוך ועיקרון ההפרדה כלומר $A\cap B\subseteq B\cap A$, כעת משיקולי סימטריה בין הקבוצות A,B (ניתן להחליף ביניהן סה"כ על ידי החלפת סימוני שמות הקבוצות) נקבל גם כי $B\cap A\subseteq A\cap B$ ולכן $A\cap B=B\cap A$. ■

טענה 2.3. תהא A קבוצה אזי $A\cap\varnothing=\varnothing$ וכן $A\cap A=A$.

הוכחה. תהא A קבוצה, נוכיח את שתי הטענות בנפרד ■

- צ"ל: $A\cap\varnothing=\varnothing$, נשים לב כי $\varnothing\subseteq B$ עבור כל קבוצה B ובפרט יתקיים $\varnothing\subseteq A\cap\varnothing$, נניח בשלילה כי $A\cap\varnothing\neq\varnothing$ אזי יהי $x\in A\cap\varnothing$ (מהיות הקבוצה הריקה היחידה המקיימת $\forall y.y\notin\varnothing$ נקבל כי לכל קבוצה אחרת מתקיים $\exists y.y\in B$) אזי מהגדרת חיתוך ועיקרון ההפרדה מתקיים $(x\in A)\wedge(x\in\varnothing)$ אך מתכונת הקבוצה הריקה לא קיים אוביקט עבורו $x\in\varnothing$ סתירה, בפרט $A\cap\varnothing=\varnothing$.

- צ"ל: $A\cap A=A$, יהי $x\in A$ נשים לב כי $(x\in A)\wedge(x\in A)$ ולכן ממהגדרת חיתוך ועיקרון ההפרדה מתקיים $x\in A\cap A$, כעת יהי $y\in A\cap A$ אזי מהגדרת חיתוך ועיקרון ההפרדה מתקיים $(y\in A)\wedge(y\in A)$ ובפרט $y\in A$, כלומר קיבלנו כי $A\subseteq A\cap A$ וכן $A\cap A\subseteq A$ כלומר $A\cap A=A$ כנדרש.

2.1.1 חיתוך מוכלל

הגדרה 2.2 (חיתוך מוכלל)**.** תהא F קבוצה של קבוצות אזי $\bigcap F=\{x\mid\forall A\in F.x\in A\}$. תהא I קבוצה ותהא $\{A_i\mid i\in I\}$ קבוצה של קבוצות אזי $\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid\forall i\in I.x\in A_i\}$. כמו כן נהוג לסמן $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i$.

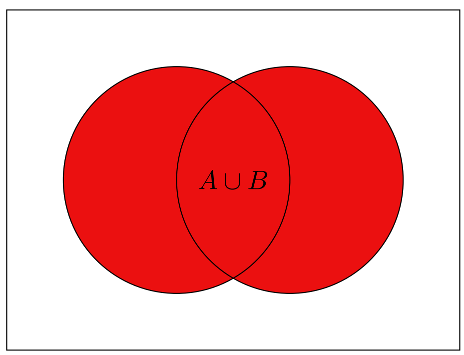
דוגמה 2.3. מתקיים $\bigcap_{i=0}^{\infty}\{n\in\mathbb{N}\mid n\geq i\}=\varnothing$, $\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}_+}[0,\varepsilon)=\{0\}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$.

תרגיל 2.1. תהא B קבוצה ותהא F קבוצה של קבוצות אזי $(\forall X\in F.X\supseteq B)\iff(\bigcap F\supseteq B)$.

2.2 איחוד

הגדרה 2.3 (איחוד)**.** תהיינה A,B קבוצות אזי $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$.

הערה 2.4 (דיאגרמת וון של איחוד). בכדי לייצג את הפעולה $A\cup B$ נשרטט, שימו לב כי החלק האדום הוא החלק המדובר,



דוגמה 2.4. מתקיים $\{1,2,3,4,5,6\}=\{1,2,3\}\cup\{3,4,5,6\}$, $\{\{1\}\}\cup\{1\}=\{1,\{1\}\}$, $\mathbb{N}\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}$, $\mathbb{N}_{\text{even}}\cup\mathbb{N}_{\text{odd}}=\mathbb{N}$.

טענה 2.4 (אסוציאטיביות איחוד). תהיינה A,B,C קבוצות אזי $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

הוכחה. תהיינה A,B,C קבוצות, נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית,

- יהי $x\in(A\cup B)\cup C$, צריך להוכיח $x\in A\cup(B\cup C)$, נשים לב כי מהגדרת איחוד והגדרת קבוצה מתקיים $x\in A\cup B\vee x\in C$,
  - נניח כי $x\in C$, צריך להוכיח $x\in A\vee x\in B\cup C$, מהגדרת איחוד נקבל כי $x\in B\cup C$ ובפרט $x\in A\vee x\in B\cup C$ כלומר $x\in A\cup(B\cup C)$.
  - נניח $x\in A\cup B$,
    * אם $x\in A$, אזי $x\in A\cup(B\cup C)$ מהגדרת איחוד והגדרת קבוצה.

* אם $x \in B$, צריך להוכיח $x \in A \vee x \in B \cup C$, מהגדרת איחוד נקבל כי $x \in B \cup C$ ובפרט $x \in A \vee x \in B \cup C$ כלומר $x \in A \cup (B \cup C)$.

- יהי $x \in A \cup (B \cup C)$, צריך להוכיח $x \in (A \cup B) \cup C$, נשים לב כי מהגדרת איחוד והגדרת קבוצה מתקיים $x \in A \vee x \in B \cup C$,
  - נניח כי $x \in A$, צריך להוכיח $x \in A \cup B \vee x \in C$, מהגדרת איחוד נקבל כי $x \in A \cup B$ ובפרט $x \in A \cup B \vee x \in C$ כלומר $x \in (A \cup B) \cup C$.
  - נניח $x \in B \cup C$,
    * אם $x \in C$, אזי $x \in (A \cup B) \cup C$ מהגדרת איחוד והגדרת קבוצה.
    * אם $x \in B$, צריך להוכיח $x \in A \cup B \vee x \in C$, מהגדרת איחוד נקבל כי $x \in A \cup B$ ובפרט $x \in A \cup B \vee x \in C$ כלומר $x \in (A \cup B) \cup C$.

■

טענה 2.5 (חילופיות איחוד). תהיינה A, B קבוצות אזי $A \cup B = B \cup A$.

הוכחה. תהיינה A, B קבוצות

- יהי $x \in A \cup B$, מתקיים $x \in A \vee x \in B$ אשר שקול לטענה $x \in B \vee x \in A$ כלומר $x \in B \cup A$.
- יהי $x \in B \cup A$, מתקיים $x \in B \vee x \in A$ אשר שקול לטענה $x \in A \vee x \in B$ כלומר $x \in A \cup B$.

■

טענה 2.6. תהא A קבוצה אזי $A \cup \varnothing = A$ וכן $A \cup A = A$.

הוכחה. תהא A קבוצה

- צ"ל $A = A \cup \varnothing$, יהי $x \in A$ אזי $x \in A \cup \varnothing$ מהגדרת איחוד, יהי $y \in A \cup \varnothing$ אזי $y \in A \vee y \in \varnothing$ אך מתכונות קבוצה ריקה מתקיים $\forall z. z \notin \varnothing$ בפרט $y \in A$ כנדרש.
- צ"ל $A \cup A = A$, יהי $x \in A$ אזי $x \in A \cup A$ מהגדרת איחוד, יהי $y \in A \cup A$ אזי $y \in A \vee y \in A$ אך טענה זו שקולה לטענה $y \in A$ כנדרש.

■

טענה 2.7 (חוק הפילוג). תהיינה A, B, C קבוצות אזי

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

הוכחה. נוכיח את 1 וטענה 2 תישאר כתרגיל לקורא, צ"ל: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית

- יהי $x \in A \cap (B \cup C)$ מהגדרת חיתוך מתקיים $(x \in A) \wedge (x \in B \cup C)$ בפרט $x \in B \cup C$ כעת מהגדרת איחוד מתקיים $(x \in B) \vee (x \in C)$, בה"כ מתקיים $x \in B$ (כי המקרה $x \in C$ סימטרי לחלוטין בעזרת שינוי שמות הקבוצות), לכן נניח כי $x \in B$ אזי $(x \in A) \wedge (x \in B)$ כמו כן $((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee (\phi(x))$

לכל פרידיקט ϕ מהגדרת קשר לוגי "או" בפרט נקבל כי

$$\begin{aligned}((x\in A)\wedge(x\in B))\vee((x\in A)\wedge(x\in C))\equiv&(x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)\\ \equiv&x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\end{aligned}$$

כנדרש.

- יהי $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ מהגדרת איחוד מתקיים $(x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)$, בה"כ מתקיים $x\in A\cap B$ (כי המקרה $x\in A\cap C$ סימטרי לחלוטין בעזרת שינוי שמות הקבוצות B,C), לכן נניח כי $x\in A\cap B$ בפרט $x\in B$ אזי נשים לב כי $(x\in B)\vee(\phi(x))$ לכל פרידיקט ϕ מהגדרת קשר לוגי "או" ובפרט נקבל כי $(x\in B)\vee(x\in C)$ כלומר מהגדרת איחוד $x\in B\cup C$ וכעת כי כאמור $x\in A\cap B$ ולכן בפרט $x\in A$ מהגדרת חיתוך נקבל כי $x\in A\cap(B\cup C)$.

■

2.2.1 איחוד מוכלל

הגדרה 2.4 (איחוד מוכלל)**.** תהא F קבוצה של קבוצות אזי $\bigcup F=\{x\mid\exists A\in F.x\in A\}$. תהא I קבוצה ותהא $\{A_i\mid i\in I\}$ קבוצה של קבוצות אזי $\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid\exists i\in I.x\in A_i\}$. כמו כן נהוג לסמן $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$.

דוגמה 2.5. מתקיים $\bigcup_{i=0}^{\infty}[i,i+1]=\mathbb{N}$, $\bigcup_{i=0}^{\infty}(i,i+1)=\mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}$, יהי $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$ אזי $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(q-\varepsilon,q+\varepsilon)=\mathbb{R}$.

תרגיל 2.2. תהא B קבוצה ותהא F קבוצה של קבוצות אזי $(\forall X\in F.X\subseteq B)\iff(\bigcup F\subseteq B)$.

תרגיל 2.3 (אתגר)**.** תרגיל זה דורש ידע על הרציונליים והממשיים, הוכח את השיוויונים הבאים,

1. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+}\left(\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\left(q-\frac{1}{n},q+\frac{1}{n}\right)\right)=\mathbb{R}$.
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}\left(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}}\left(q-\frac{1}{n},q+\frac{1}{n}\right)\right)=\mathbb{Q}$.

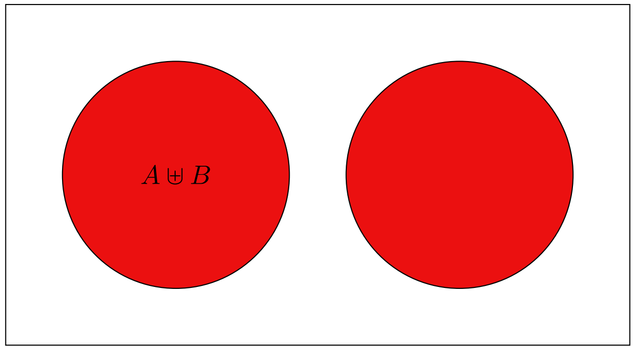
2.2.2 איחוד זר

הגדרה 2.5 (קבוצות זרות)**.** קבוצות A,B נקראות זרות אם מתקיים $A\cap B=\varnothing$. קבוצות A_i באשר $i\in I$ נקראות זרות אם מתקיים $\forall J\subseteq I.\bigcap_{j\in J}A_j=\varnothing$. קבוצות A_i באשר $i\in I$ נקראות זרות בזוגות אם מתקיים $\forall i,j\in I.(i\neq j)\Longrightarrow(A_i\cap A_j=\varnothing)$.

תרגיל 2.4 (זרות גוררת זרות בזוגות)**.** תהיינה A_i קבוצות באשר $i\in I$ זרות, הוכיחו כי הקבוצות A_i באשר $i\in I$ זרות בזוגות.

הגדרה 2.6 (איחוד זר)**.** תהא I קבוצה ותהא $\{A_i\mid i\in I\}$ קבוצה של קבוצות זרות בזוגות אזי נסמן $\biguplus_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}A_i$.

הערה 2.5 (דיאגרמת וון של איחוד זר)**.** בכדי לייצג את הפעולה $A\uplus B$ נשרטט, שימו לב כי החלק האדום הוא החלק המדובר,



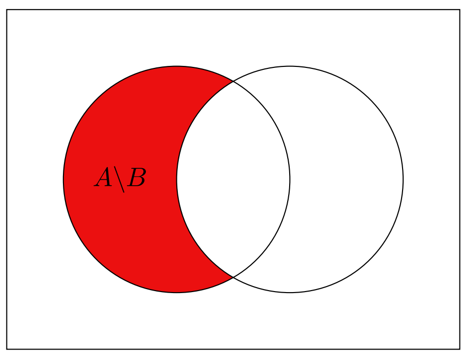
דוגמה 2.6. מתקיים $\biguplus_{z\in\mathbb{Z}}(z,z+1)=\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\{1\}\uplus\{2\}=\{1,2\}$, $\{\{1\}\}\uplus\{1\}=\{1,\{1\}\}$.

הערה 2.6. יהיו A,B קבוצות סופיות וזרות אזי $|A\uplus B|=|A|+|B|$.

2.3 הפרש

הגדרה 2.7 (הפרש/חיסור). תהיינה A,B קבוצות אזי $A\backslash B=\{x\in A\mid x\notin B\}$.

הערה 2.7 (דיאגרמת וון של הפרש). בכדי לייצג את הפעולה $A\backslash B$ נשרטט, שימו לב כי החלק האדום הוא החלק המדובר,



דוגמה 2.7. מתקיים $\{1,2\}=\{1,2,3\}\backslash\{3,4,5,6\}$, $\{\{1\}\}\backslash\{1\}=\{\{1\}\}$, $\{3,4\}\backslash\{3,4,5\}=\varnothing$, $\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_+=\{0\}$.

תרגיל 2.5. תהא A קבוצה אזי $A\backslash\varnothing=A$ וכן $A\backslash A=\varnothing$.

טענה 2.8. תהיינה A,B קבוצות אזי התנאים הבאים שקולים (התב"ש)

1. $A\subseteq B$.
2. $A\cap B=A$.
3. $A\backslash B=\varnothing$.
4. $A\cup B=B$.

הוכחה. בשביל להוכיח שקילות של מספר רב של תנאים נבצע "שרשרת הוכחות" כלומר נוכיח כי כל טענה גוררת את עוקבה, תהיינה A,B קבוצות

1⟸2: נניח כי $B \subseteq A$ צ"ל: $A \cap B = A$, יהי $x \in A \cap B$ מתקיים $(x \in A) \wedge (x \in B)$ ובפרט $x \in A$, כעת יהי $y \in A$ נשים לב כי $y \in B$ מהנתון כי $B \subseteq A$ והגדרת הכלה בפרט $y \in A \cap B$ מהגדרת חיתוך.

2⟸3: נניח כי $A \cap B = A$ צ"ל: $A \backslash B = \varnothing$, נניח בשלילה כי $A \backslash B \neq \varnothing$ אזי $\exists x.x \in A \backslash B$ נסמנו x_0 בפרט $x_0 \in A \backslash B$ כלומר $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \notin B)$ אך אם $x_0 \in A$ אזי מהנתון והגדרת חיתוך יתקיים $(x_0 \in A) \wedge (x_0 \in B)$ בפרט $x_0 \in B$ סתירה, בפרט $A \backslash B = \varnothing$ כנדרש.

3⟸4: נניח כי $A \backslash B = \varnothing$ צ"ל: $A \cup B = B$, יהי $x \in B$ נשים לב כי $(x \in A) \vee (x \in B)$ ובפרט $x \in A \cup B$ מהגדרת איחוד אזי $B \subseteq A \cup B$, כעת יהי $y \in A \cup B$ מתקיים $(y \in A) \vee (y \in B)$ מהגדרת איחוד,

- נניח כי $y \in B$ אזי סיימנו.
- נניח כי $y \in A$, נניח בשלילה כי $y \notin B$ אזי $y \in A \backslash B$ סתירה להיות $A \backslash B = \varnothing$ ותכונת הקבוצה הריקה, בפרט $y \in B$.

בפרט קיבלנו כי $y \in B$ כלומר $A \cup B \subseteq B$. ובסה"כ קיבלנו כי $A \cup B = B$ מהגדרת שיוויון כהכלה דו כיוונית.

4⟸1: נניח כי $A \cup B = B$ צ"ל: $A \subseteq B$, יהי $x \in A$ מתקיים $(x \in A) \vee (x \in B)$ מהגדרת "או" ולכן $x \in A \cup B$ בפרט מהנתון והגדרת שיוויון קבוצות $x \in B$ כנדרש.

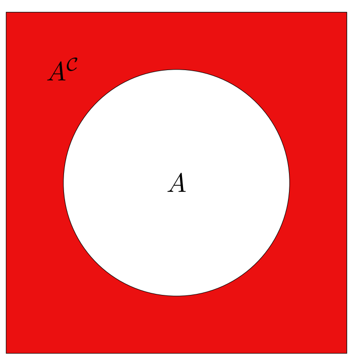
■

הערה 2.8. יהיו $B \subseteq A$ קבוצות סופיות אזי $|A \backslash B| = |A| - |B|$.

2.3.1 משלים

הגדרה 2.8 (משלים)**.** תהיינה $A, \mathcal{U}$ קבוצות המקיימות $A \subseteq \mathcal{U}$ אזי $A^{\mathcal{C}} = \mathcal{U} \backslash A$. שימו לב כי במהלך הקורס גם הסימון $\overline{A}$ משומש.

הערה 2.9 (דיאגרמת וון של משלים). בכדי לייצג את הפעולה $A^{\mathcal{C}}$ נשרטט, שימו לב כי החלק האדום הוא החלק המדובר,



טענה 2.9 (כללי דה מורגן). תהיינה A, B, C קבוצות אזי

1. $(A \cup B)^{\mathcal{C}} = A^{\mathcal{C}} \cap B^{\mathcal{C}}$.
2. $(A \cap B)^{\mathcal{C}} = A^{\mathcal{C}} \cup B^{\mathcal{C}}$.
3. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

4. $A\backslash(B\cap C)=(A\backslash B)\cup(A\backslash C)$.

הוכחה. טענות $2,4$ ישארו כתרגיל לקורא

1. נניח כי עולם הדיון שלנו הינו $\mathcal{U}$ ותהיינה A,B קבוצות, נוכיח בעזרת שקילויות לוגיות, ודאו כי אתם ידועים לנמק כל אחד מהמעברים

$$\begin{aligned}x\in A^{\mathcal{C}}\cap B^{\mathcal{C}} &\iff \left(x\in A^{\mathcal{C}}\right)\wedge\left(x\in B^{\mathcal{C}}\right)\iff(x\in\mathcal{U}\backslash A)\wedge(x\in\mathcal{U}\backslash B)\\ &\iff((x\notin A)\wedge(x\in\mathcal{U}))\wedge((x\notin B)\wedge(x\in\mathcal{U}))\\ &\iff(x\in\mathcal{U})\wedge((x\notin A)\wedge(x\notin B))\\ &\iff(x\in\mathcal{U})\wedge\neg((x\in A)\vee(x\in B))\\ &\iff(x\in\mathcal{U})\wedge\neg(x\in A\cup B)\\ &\iff(x\in\mathcal{U})\wedge(x\notin A\cup B)\iff(x\in\mathcal{U}\backslash A\cup B)\\ &\iff x\in(A\cup B)^{\mathcal{C}}\end{aligned}$$

3. תהיינה A,B,C קבוצות אזי

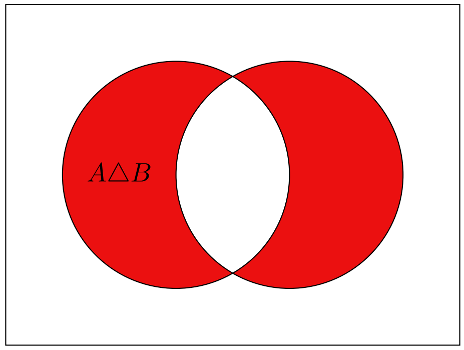
$$\begin{aligned}x\in A\backslash(B\cup C) &\iff((x\in A)\wedge(x\notin B\cup C))\iff((x\in A)\wedge\neg(x\in B\cup C))\\ &\iff(x\in A)\wedge(\neg((x\in B)\vee(x\in C)))\\ &\iff(x\in A)\wedge((x\notin B)\wedge(x\notin C))\\ &\iff((x\in A)\wedge(x\notin B))\wedge((x\in A)\wedge(x\notin C))\\ &\iff(x\in A\backslash B)\wedge(x\in A\backslash C)\\ &\iff x\in(A\backslash B)\cap(A\backslash C)\end{aligned}$$

■

2.4 הפרש סימטרי

הגדרה 2.9 (הפרש סימטרי)**.** תהיינה A,B קבוצות אזי $A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

הערה 2.10 (דיאגרמת וון של הפרש סימטרי). בכדי לייצג את הפעולה $A\triangle B$ נשרטט, שימו לב כי החלק האדום הוא החלק המדובר,



דוגמה 2.8. מתקיים $\{1,2,5,6\} = \{1,2,3\}\triangle\{3,4,5,6\}$, $\{\{1\},1\} = \{\{1\}\}\triangle\{1\}$, $\{3,4\}\triangle\{3,4,5\} = \{5\}$.

תרגיל 2.6 (אסוציאטיביות הפרש סימטרי)**.** תהיינה A,B,C קבוצות אזי $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

טענה 2.10 (חילופיות הפרש סימטרי). תהיינה A,B קבוצות אזי $A\triangle B = B\triangle A$.

הוכחה. תהיינה A,B קבוצות,

- $\subseteq$: יהי $x\in A\triangle B$ כלומר $x\in(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ נשים לב כי מתכונות איחוד $x\in(B\backslash A)\cup(A\backslash B)$ בפרט $x\in B\triangle A$.
- $\supseteq$: יהי $x\in B\triangle A$ כלומר $x\in(B\backslash A)\cup(A\backslash B)$ נשים לב כי מתכונות איחוד $x\in(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ בפרט $x\in A\triangle B$.

■

תרגיל 2.7. תהא A קבוצה אזי $A\triangle\varnothing = A$ וכן $A\triangle A = \varnothing$.

תרגיל 2.8. תהיינה A,B,C קבוצות אזי $(A\triangle B = B\triangle C) \Longrightarrow A = B$.

2.5 קבוצת החזקה

הגדרה 2.10 (קבוצת החזקה)**.** תהא A קבוצה אזי $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B\subseteq A\}$.

דוגמה 2.9. מתקיים $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

תרגיל 2.9. תהיינה A,B קבוצות אזי $(A\subseteq B) \iff (\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B))$.

משפט 2.1. תהא A קבוצה סופית אזי $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

הוכחה. תהא A קבוצה סופית אזי נסמן $|A| = n\in\mathbb{N}$ ולכן מתקיים $A = \{a_1\ldots a_n\}$ נשים לב כי כל תת קבוצה של A ניתנת לתיאור בצורה הבאה "כל איבר ב־A יספר לנו האם הוא נמצא בתת קבוצה או לא", לדוגמה הקבוצה $\varnothing$ מתארת את המקרה בו אף איבר של A נכנס לקבוצה, לעומת זאת $\{a_2,a_7\}$ מתארת את המקרה בו a_2,a_7 נכנסו לקבוצה ושאר האיברים לא (ודאו כי אתם מבינים מדוע תהליך זה מחזיר את כל תתי הקבוצות של A), כעת נשים לב כי בכל תת קבוצה כזאת לכל איבר יש שתי אפשרויות, לבחור להיכנס או לא, ולכן כמות תתי הקבוצות הינן $2^n = \underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n\text{ איברים}}$ בפרט נקבל כי $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. ■

תרגיל 2.10. חשב את הקבוצות הבאות (כלומר מצא צורה מצומצמת לכתיבתן) והוכח את מציאתך,

1. $\{X\setminus\{0\} \mid X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.
2. $\{\{0\}\setminus X \mid X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})\}$.
3. תהא A קבוצה, $\bigcup\mathcal{P}(A)$.
4. תהא A קבוצה, $\bigcap\mathcal{P}(A)$.

3 יחסים

3.1 זוג סדור

הגדרה 3.1 (זוג סדור)**.** יהיו x,y נגדיר $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$.

טענה 3.1. יהיו a,b,c,d אזי $(a=c)\wedge(b=d)\Longleftrightarrow\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$.

הוכחה. יהיו a,b,c,d כיוון הגרירה $\Longleftarrow$ נשאר כתרגיל לקורא, כעת נניח כי $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$ אזי מהגדרת זוג סדור מתקיים $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$,

- נניח כי $\{a\}=\{c\}$, אזי $a=c$ וכן $\{a,b\}=\{c,d\}$ ומהיות $a=c$ נקבל כי $b=d$.
- נניח כי $\{a\}=\{c,d\}$, אזי $a=c=d$ וכן $\{a,b\}=\{c\}$ ולכן $a=b=c$ כלומר $a=c$ וכן $b=d$.

■

הערה 3.1 (הגדרת הזוג הסדור). מה שמעניין אותנו בהגדרת הזוג הסדור היא התכונה הנובעת מטענה 3.1 בלבד, כל דרך נוספת להגדרת זוג סדור אשר מקיימת את טענה 3.1 מתקבלת באופן שקול.

3.1.1 מכפלה קרטזית

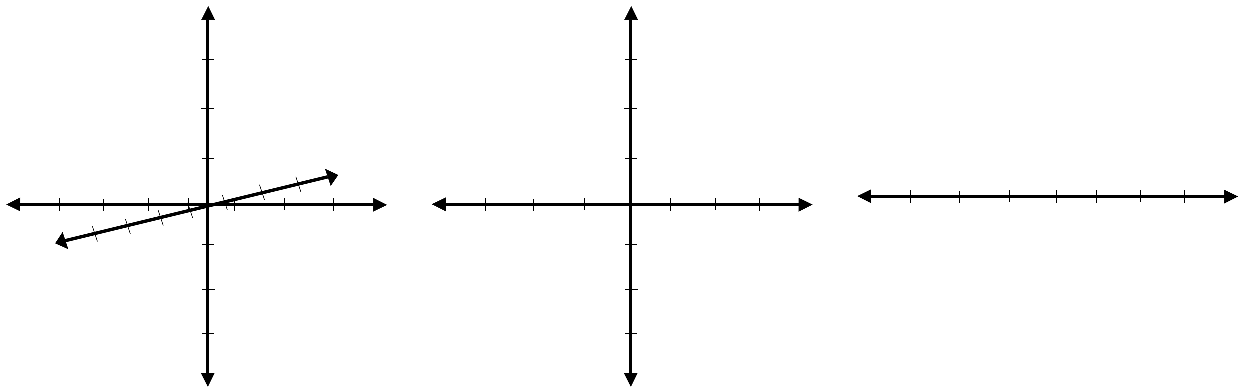
הגדרה 3.2 (מכפלה קרטזית)**.** תהיינה A,B קבוצות אזי $A\times B=\{\langle a,b\rangle \mid a\in A\wedge b\in B\}$. ונגדיר רקורסיבית $A^1=A$ וכן $A^{n+1}=A^n\times A$ לכל $n\in\mathbb{N}_+$.

הערה 3.2. נשתמש בקונבנציה $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle=\langle\langle a_1,\ldots,a_{n-1}\rangle,a_n\rangle$ עבור nיה סדורה.

דוגמה 3.1. מתקיים $\{1,2\}\times\{3,4\}=\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$, $\{1\}^3=\{\langle 1,1,1\rangle\}$, $\{1,2\}\times\{3,4\}\times\{5,6\}=\{\langle 1,3,5\rangle,\langle 1,4,5\rangle,\langle 2,3,5\rangle,\langle 2,4,5\rangle,\langle 1,3,6\rangle,\langle 1,4,6\rangle,\langle 2,3,6\rangle,\langle 2,4,6\rangle\}$.

הגדרה 3.3 (המישור הממשי)**.** עבור $n\in\mathbb{N}$ המישור הממשי ה־n מימדי הינו $\mathbb{R}^n$. הישר הממשי (ציר המספרים) זהו $\mathbb{R}$, המישור הממשי (ציר xy) הינו $\mathbb{R}^2$, והמרחב בו אנו חיים (ציר xyz) הינו $\mathbb{R}^3$.

הערה 3.3 (המישור הממשי). נשים לב לייצוג הגיאומטרי של הציר הממשי, אותו המציא רנה דקראט,



טענה 3.2. תהיינה A,B קבוצות אזי $A\times B=\biguplus_{b\in B}A\times\{b\}$.

הוכחה. תחילה נצדיק את השימוש באיחוד זר, יהיו $b_1,b_2\in B$ שונים נניח בשלילה כי $x\in(A\times\{b_2\})\cap(A\times\{b_1\})$ אזי $(x\in A\times\{b_1\})\wedge(x\in A\times\{b_2\})$ ובפרט מהגדרת מכפלה קרטזית נקבל כי קיים $a_1\in A$ עבורו $x=\langle a_1,b_1\rangle$ וכן קיים $a_2\in A$ עבורו $x=\langle a_2,b_2\rangle$ אזי $\langle a_1,b_1\rangle=\langle a_2,b_2\rangle$ ומתכונות זוג סדור נקבל $b_1=b_2$ סתירה בפרט מיחידות הקבוצה עם תכונת הקבוצה הריקה נקבל כי $(A\times\{b_2\})\cap(A\times\{b_1\})=\varnothing$ כנדרש. כעת נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית את הטענה,

- $\subseteq$: יהי $x\in A\times B$, אזי קיימים $a'\in A$ וכן $b'\in B$ עבורם $x=\langle a',b'\rangle$, אזי נשים לב כי מתקיים $x\in A\times\{b'\}$ מהגדרת מכפלה קרטזית ולכן מהגדרת איחוד מוכלל נקבל כי $x\in\biguplus_{b\in B}A\times\{b\}$ כי טענה זו מתקיימת עבור $b=b'$.
- $\supseteq$: יהי $x\in\biguplus_{b\in B}A\times\{b\}$, אזי קיים $b'\in B$ עבורו $x\in A\times\{b'\}$ ומהגדרת מכפלה קרטזית קיים $a'\in A$ עבורו $x=\langle a',b'\rangle$, כעת נשים לב כי גם בהכרח $a'\in A$ וכן $b'\in B$ ולכן מהגדרת מכפלה קרטזית מתקיים $x\in A\times B$ עבור האיברים a',b' בקבוצות בהתאמה.

■

מסקנה 3.1. תהיינה A,B קבוצות סופיות אזי $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

הוכחה. תהיינה A,B קבוצות סופיות אזי מהטענה הקודמת וכן עוצמה סופית עבור איחוד זר נקבל כי

$$|A\times B|=\left|\biguplus_{b\in B}A\times\{b\}\right|=\sum_{b\in B}|A\times\{b\}|=\sum_{b\in B}|A|=|A|\cdot|B|$$

כאשר השתמשנו בעובדה כי $|A\times\{b\}|=|A|$ וזאת כי קיימת התאמה בין אברי A לאברי $A\times\{b\}$ בצורה הבאה $\langle a,b\rangle\mapsto a$ לכל $a\in A$. ■

דוגמה 3.2. נגדיר $A=\{0,1\}$ וכן $B=\{2,3,4\}$ אזי

$$A\times B=\{\langle0,2\rangle,\langle0,3\rangle,\langle0,4\rangle,\langle1,2\rangle,\langle1,3\rangle,\langle1,4\rangle\}$$

ולכן נקבל כי $|A\times B|=6$ וכן $|A|\cdot|B|=2\cdot3=6$.

טענה 3.3. תהיינה A, B, C קבוצות אזי
1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

הוכחה. טענה 2 תישאר כתרגיל לקורא, נוכיח את טענה 1 בלבד
1. נשתמש בהכלה דו כיוונית,

$\subseteq$: יהי $x \in A \times (B \cap C)$ אזי קיים $a' \in A$ וכן $d' \in B \cap C$ המקיימים $x = \langle a', d' \rangle$, כמו כן מתקיים $(d' \in B) \wedge (d' \in C)$ ולכן $\langle a', d' \rangle \in A \times B$ וכן $\langle a', d' \rangle \in A \times C$ מהגדרת מכפלה קרטזית ולכן מהגדרת חיתוך מתקיים $\langle a', d' \rangle \in (A \times C) \cap (A \times B)$ כלומר $x \in (A \times C) \cap (A \times B)$.

$\supseteq$: יהי $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$, אזי $(x \in A \times B) \wedge (x \in A \times C)$ אזי קיימים $a_1, a_2 \in A$, $b' \in B$ וכן $c' \in C$ עבורם $x = \langle a_1, b' \rangle$ וכן $x = \langle a_2, c' \rangle$, מתכונת זוג סדור נקבל כי $a_1 = a_2$ וכן $c' = b'$ בפרט $b' \in C$ ולכן $b' \in B \cap C$ כמו כן כאמור $a_1 \in A$ ולכן מהגדרת מכפלה קרטזית מתקיים $\langle a_1, b' \rangle \in A \times (B \cap C)$ כלומר $x \in A \times (B \cap C)$.

■

טענה 3.4. תהיינה A, B קבוצות זרות אזי לכל קבוצה C מתקיים $(A \times C) \cap (B \times C) = \varnothing$.

הוכחה. תהיינה A, B קבוצות זרות ותהא C קבוצה, צ"ל: $(A \times C) \cap (B \times C) = \varnothing$, נניח בשלילה כי $x \in (A \times C) \cap (B \times C)$ אזי מהגדרת חיתוך $(x \in A \times C) \wedge (x \in B \times C)$ בפרט קיימים $a' \in A$, $b' \in B$ וכן $c_1, c_2 \in C$ עבורם $x = \langle a', c_1 \rangle$ וכן $x = \langle b', c_2 \rangle$, מתכונת הזוג הסדור מתקיים $b' = a'$ סתירה להיות A, B זרות (כי $a' \in A$ אך $a' = b' \in B$). ■

3.2 יחס

עד כה הגדרנו קבוצות וזוגות סדורים, אובייקטים אשר נועדו לתאר מקבץ אובייקטים נוספים, אך לא קיימת לנו דרך להשוואת או להתייחס להבדל בין אובייקט אחד למשנהו, לדוגמה אנו לא יודעים כיצד לבטא את הטענה $2 < 1$ או f היא פונקציה אשר מקבלת $x \in \mathbb{R}$ ופולטת $x \in \mathbb{R}$ על פי הכלל $f(x) = x^2$. (ובפרט מהי הגדרת פונקציה)

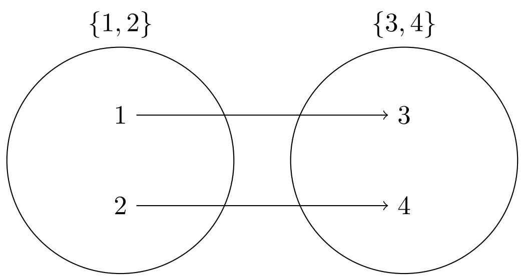
הגדרה 3.4 (יחס). תהיינה A, B קבוצות אזי R יחס מעל A, B אם מתקיים $R \subseteq A \times B$.

הערה 3.4. אם R יחס מעל A, A נאמר כי R יחס מעל A.

הגדרה 3.5. יהי R יחס מעל A, B ויהיו $\langle a, b \rangle \in A \times B$ אם מתקיים $\langle a, b \rangle \in R$ נסמן aRb, ונאמר כי a מתייחס R אל b.

דוגמה 3.3. $\{\langle 1,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle\}$ יחס מעל $\{1,2\}, \{3,4\}$ אך גם יחס מעל $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ וכן מעל $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$.

הערה 3.5 (דיאגרמת וון של יחס). בהמשך לדיאגרמות וון עבור קבוצות ופעולות ביניהן, נוכל לייחס עבור יחס דיאגרמת וון באשר הפעולה אשר יחס עושה על איבר הינה חץ מקבוצה אחת לקבוצה אחרת. הדוגמה מלעיל כיחס ניתנת לתיאור על ידי הדיאגרמה



הגדרה 3.6 (אי שיוויונות טבעיים)**.** נגדיר את היחס $<_{\mathbb{N}}$ מעל $\mathbb{N}$ כך $<_{\mathbb{N}}=\{\langle n,m\rangle\in\mathbb{N}^2\mid\exists k\in\mathbb{N}_+.n+k=m\}$ ונגדיר את היחס $\leq_{\mathbb{N}}$ מעל $\mathbb{N}$ כך $\leq_{\mathbb{N}}=\{\langle n,m\rangle\in\mathbb{N}^2\mid\exists k\in\mathbb{N}.n+k=m\}$, באותה מידה נגדיר עבור $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$.

הגדרה 3.7 (יחס הזהות)**.** תהא A קבוצה אזי $\mathrm{Id}_A=\{\langle a,a\rangle\mid a\in A\}$.

טענה 3.5. מתקיים $\leq_{\mathbb{N}}=<_{\mathbb{N}}\cup\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. (שימו לב כי זהו שיוויון בין קבוצות)

הוכחה. נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית

- $\subseteq$: יהי $\langle n,m\rangle\in\leq_{\mathbb{N}}$, אם $n=m$ אזי $\langle n,m\rangle\in\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ ולכן $\langle n,m\rangle\in<_{\mathbb{N}}\cup\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, אחרת אם $n\neq m$ מתקיים $\exists k\in\mathbb{N}.n+k=m$ מהגדרת $\leq_{\mathbb{N}}$ אך בהכרח $k\neq 0$ כי אחרת $n=m$ ולכן $\exists k\in\mathbb{N}_+.n+k=m$ בפרט מעיקרון ההפרדה $\langle n,m\rangle\in<_{\mathbb{N}}$ ולכן $\langle n,m\rangle\in<_{\mathbb{N}}\cup\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.
- $\supseteq$: יהי $\langle n,m\rangle\in<_{\mathbb{N}}\cup\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$
  - אם $\langle n,m\rangle\in<_{\mathbb{N}}$ אזי $\exists k\in\mathbb{N}_+.n+k=m$ נסמנו k_0, נשים לב כי $k_0\in\mathbb{N}$ ובפרט גם יתקיים $\exists k\in\mathbb{N}.n+k=m$ ולכן $\langle n,m\rangle\in\leq_{\mathbb{N}}$.
  - אם $\langle n,m\rangle\in\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ אזי $n=m$ ולכן $n+0=m$ כלומר מתקיים $\exists k\in\mathbb{N}.n+k=m$ ולכן $\langle n,m\rangle\in\leq_{\mathbb{N}}$.

■

3.2.1 תחום ותמונה

הגדרה 3.8 (מקור/תחום של יחס)**.** יהי R יחס מעל A,B אזי $\mathrm{Dom}\left(R\right)=\{a\in A\mid\exists b\in B.aRb\}$, כלומר $\mathrm{Dom}\left(R\right)$ קבוצת כל האיברים ב־A אשר מתייחסים לאיבר כלשהו דרך R.

דוגמה 3.4. $\mathrm{Dom}\left(\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}\right)=\{1,2\}$, $\mathrm{Dom}\left(\{\langle X,x\rangle\in\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\times\mathbb{N}\mid x\in X\}\right)=\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\setminus\{\varnothing\}$.

הגדרה 3.9 (תמונה של יחס)**.** יהי R יחס מעל A,B אזי $\mathrm{Im}\left(R\right)=\{b\in B\mid\exists a\in A.aRb\}$, כלומר $\mathrm{Im}\left(R\right)$ קבוצת כל האיברים ב־B אשר מתייחסים אליהם דרך R.

דוגמה 3.5. מתקיים $\mathrm{Im}\left(\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}\right)=\{3,4\}$, $\mathrm{Im}\left(\{\langle x,\lceil x\rceil\rangle\mid x\in\mathbb{R}\}\right)=\mathbb{Z}$.

3.2.2 יחס הופכי

הגדרה 3.10 (יחס הופכי)**.** יהי R יחס מעל A,B נגדיר יחס R^{-1} על B,A כך $R^{-1}=\{\langle b,a\rangle \mid aRb\}$.

דוגמה 3.6. נגדיר $R=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$ מעל $\mathbb{N}$ אזי $R^{-1}=\{\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$ מוגדר על $\mathbb{N}$.

תרגיל 3.1. יהי R יחס מעל A,B ויהי $\langle a,b\rangle\in A\times B$ אזי $(bR^{-1}a)\Longleftrightarrow(aRb)$.

מסקנה 3.2. יהי R יחס מעל A,B אזי $\mathrm{Dom}\left(R\right)=\mathrm{Im}\left(R^{-1}\right)$.

הוכחה. ההכלה $\supseteq$ תישאר כתרגיל לקורא. ובכיוון הנגדי, יהי $a'\in\mathrm{Dom}\left(R\right)$ אזי $\exists b\in B.a'Rb$ נסמנו b' כלומר $a'Rb'$ מהגדרת R^{-1} מתקיים $b'Ra'$ ולכן $\exists a\in A.b'R^{-1}a$ אזי $a\in\mathrm{Im}\left(R^{-1}\right)$. ■

טענה 3.6. יהי R יחס מעל A,B אזי $R=\left(R^{-1}\right)^{-1}$.

הוכחה. נוכיח בעזרת שרשרת השקילויות הבאה

$$\langle a,b\rangle\in R\Longleftrightarrow aRb\Longleftrightarrow bR^{-1}a\Longleftrightarrow a\left(R^{-1}\right)^{-1}b\Longleftrightarrow\langle a,b\rangle\in\left(R^{-1}\right)^{-1}$$

ולכן $\langle a,b\rangle\in\left(R^{-1}\right)^{-1}\Longleftrightarrow\langle a,b\rangle\in R$ אשר זהו תנאי שקול לשיוויון קבוצות בפרט $R=\left(R^{-1}\right)^{-1}$. ■

3.2.3 הרכבה

הגדרה 3.11 (הרכבת יחסים)**.** יהי R יחס מעל A,B ויהי S יחס מעל B,C נגדיר יחס $S\circ R$ מעל A,C כך $S\circ R=\{\langle a,c\rangle\in A\times C\mid\exists b\in B.\left(aRb\right)\wedge\left(bSc\right)\}$. ואם T יחס מעל A נסמן עבורו רקורסיבית $T^{(0)}=\mathrm{Id}_A$ וכן $T^{(i)}=T^{(i-1)}\circ T$.

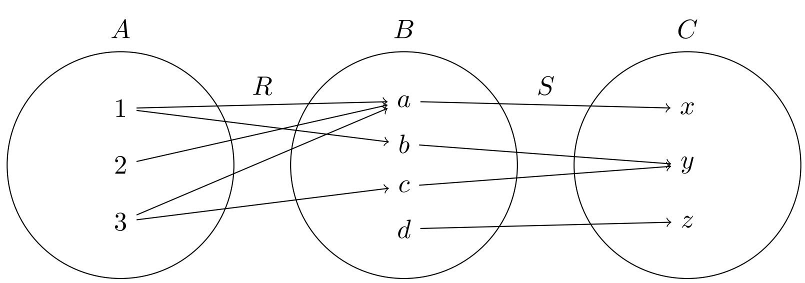
דוגמה 3.7. מתקיים

- $\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}\circ\{\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}=\{\langle 4,3\rangle,\langle 3,4\rangle\}$.
- $\{\langle\{n\},n+1\rangle\mid n\in\mathbb{N}\}\circ\{\langle n,\{n\}\rangle\mid n\in\mathbb{N}\}=\{\langle n,n+1\rangle\mid n\in\mathbb{N}\}$.

דוגמה 3.8 (דיאגרמת וון של הרכבת יחסים)**.** נגדיר קבוצות $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c,d\}$, $C=\{x,y,z\}$ ונגדיר יחסים R על A,B וכן S על B,C כך

$$\begin{aligned}R&=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,c\rangle\}\\S&=\{\langle a,x\rangle,\langle b,y\rangle,\langle c,y\rangle,\langle d,z\rangle\}\end{aligned}$$

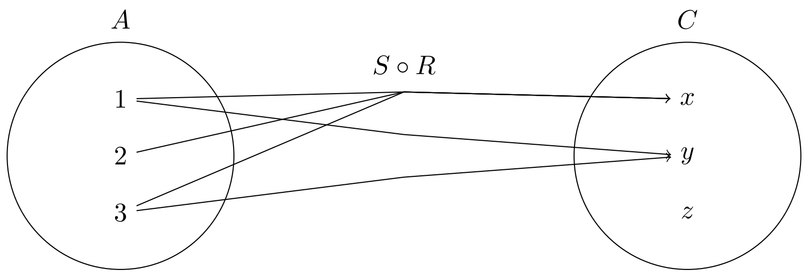
ובדיאגרמת וון נקבל את האיור



כמו כן מתקיים

$$S\circ R=\{\langle 1,x\rangle,\langle 1,y\rangle,\langle 2,x\rangle,\langle 3,x\rangle,\langle 3,y\rangle\}$$

וכאמור מהגדרת הרכבה זוהי בעצם הפעולה אשר הולכת על הקווים מהקבוצה A לקבוצה C דרך B כלומר



טענה 3.7 (אסוציאטיביות הרכבה). יהי R יחס מעל A,B יהי S יחס מעל B,C ויהי T יחס מעל C,D אזי $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$.

הוכחה. יהי R יחס מעל A,B יהי S יחס מעל B,C ויהי T יחס מעל C,D

$\subseteq$: יהי $\langle x,y\rangle\in T\circ(S\circ R)$ מהגדרת הרכבה קיים $z\in C$ עבורו $(zTy)\wedge(\langle x,z\rangle\in S\circ R)$ וכן מאותו הנימוק קיים $w\in B$ המקיים $(xRw)\wedge(wSz)$, נשים לב כי

$$((xRw)\wedge(wSz))\wedge(zTy)\equiv(xRw)\wedge((wSz)\wedge(zTy))$$

וכעת על פי הגדרת הרכבה $\langle w,y\rangle\in T\circ S$ ולכן $(xRw)\wedge(\langle w,y\rangle\in T\circ S)$ כמו כן מהגדרת הרכבה יתקיים $\langle x,y\rangle\in(T\circ S)\circ R$.

$\supseteq$: יהי $\langle x,y\rangle\in(T\circ S)\circ R$ מהגדרת הרכבה קיים $z\in B$ עבורו $(xRz)\wedge(\langle z,y\rangle\in T\circ S)$ וכן מאותו הנימוק קיים $w\in C$ המקיים $(zSw)\wedge(wTy)$, נשים לב כי

$$(xRz)\wedge((zSw)\wedge(wTy))\equiv((xRz)\wedge(zSw))\wedge(wTy)$$

וכעת על פי הגדרת הרכבה $\langle x,w\rangle\in S\circ R$ ולכן $(\langle x,w\rangle\in S\circ R)\wedge(wTy)$ כמו כן מהגדרת הרכבה יתקיים $\langle x,y\rangle\in T\circ(S\circ R)$.

■

טענה 3.8. יהי S יחס מעל A,B ויהי R יחס מעל B,C אזי $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

הוכחה. יהי S יחס מעל A,B ויהי R יחס מעל B,C

$\subseteq$: יהי $\langle y,x\rangle\in(R\circ S)^{-1}$ מהגדרת יחס הופכי מתקיים $\langle x,y\rangle\in R\circ S$ וכן מהגדרת הרכבה קיים $z\in B$ עבורו $(xSz)\wedge(zRy)$ בפרט מהגדרת יחס הופכי נקבל

$$(xSz)\wedge(zRy)\equiv\left(zS^{-1}x\right)\wedge\left(yR^{-1}z\right)\equiv\left(yR^{-1}z\right)\wedge\left(zS^{-1}x\right)$$

כעת מהגדרת הרכבה נקבל כי $\langle y,x\rangle\in S^{-1}\circ R^{-1}$.

$\supseteq$: יהי $\langle y,x\rangle \in S^{-1}\circ R^{-1}$ מהגדרת הרכבה קיים $z\in B$ עבורו $(yR^{-1}z)\wedge(zS^{-1}x)$ כעת מהגדרת יחס הופכי נקבל כי

$$\left(yR^{-1}z\right)\wedge\left(zS^{-1}x\right)\equiv(zRy)\wedge(xSz)\equiv(xSz)\wedge(zRy)$$

כעת מהגדרת הרכבה נקבל כי $\langle x,y\rangle\in R\circ S$ ומהגדרת יחס הופכי נקבל כי $\langle y,x\rangle\in(R\circ S)^{-1}$.

■

טענה 3.9. יהי R יחס מעל A,B אזי מתקיים $(R=R\circ \mathrm{Id}_A)\wedge(R=\mathrm{Id}_B\circ R)$.

הוכחה. יהי R יחס מעל A,B

- נוכיח כי $R=R\circ\mathrm{Id}_A$,
  - $\subseteq$: יהי $\langle x,y\rangle\in R$ מהגדרת Id_A מתקיים $x\mathrm{Id}_A x$ ולכן $(xRy)\wedge(x\mathrm{Id}_A x)$ בפרט מהגדרת הרכבה $\langle x,y\rangle\in R\circ\mathrm{Id}_A$.
  - $\supseteq$: יהי $\langle x,y\rangle\in R\circ\mathrm{Id}_A$ מהגדרת הרכבה קיים $z\in A$ עבורו $(zRy)\wedge(x\mathrm{Id}_A z)$ כעת מהגדרת Id_A מתקיים $x=z$ כלומר $(xRy)\wedge(x\mathrm{Id}_A x)$ ובפרט $\langle x,y\rangle\in R$.
- נוכיח כי $R=\mathrm{Id}_B\circ R$,
  - $\subseteq$: יהי $\langle x,y\rangle\in R$ מהגדרת Id_B מתקיים $y\mathrm{Id}_B y$ ולכן $(y\mathrm{Id}_B y)\wedge(xRy)$ בפרט מהגדרת הרכבה $\langle x,y\rangle\in\mathrm{Id}_B\circ R$.
  - $\supseteq$: יהי $\langle x,y\rangle\in\mathrm{Id}_B\circ R$ מהגדרת הרכבה קיים $z\in B$ עבורו $(z\mathrm{Id}_B y)\wedge(xRz)$ כעת מהגדרת Id_B מתקיים $z=y$ כלומר $(y\mathrm{Id}_B y)\wedge(xRy)$ ובפרט $\langle x,y\rangle\in R$.

■

תרגיל 3.2. יהיו $m,n\in\mathbb{N}$ ויהי R יחס מעל A אזי $R^{(m)}\circ R^{(n)}=R^{(n)}\circ R^{(m)}$.

טענה 3.10. יהיו $m,n\in\mathbb{N}$ ויהי R יחס מעל A אזי $R^{(m)}\circ R^{(n)}=R^{(m+n)}$.

הוכחה. יהיו $m,n\in\mathbb{N}$ ויהי R יחס מעל A,

- עבור $m=0$, נשים לב כי מהגדרת הרכבה ומהמשפט מלעיל מתקיים

$$R^{(0)}\circ R^{(n)}=\mathrm{Id}_A\circ R^{(n)}=R^{(n)}$$

- נניח כי עבור m הטענה נכונה לכל $n\in\mathbb{N}_+$.
- עבור $m+1$, נשים לב כי מתקיים

$$R^{(m+1)}\circ R^{(n)}=R\circ R^{(m)}\circ R^{(n)}=R\circ R^{(m+n)}=R^{(m+1+n)}$$

■

4 יחסי שקילות

4.0.1 יחס רפלקסיבי

הגדרה 4.1 (יחס רפלקסיבי)**.** יחס R מעל A המקיים $\forall a \in A.aRa$.

דוגמה 4.1. היחס $\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ מעל $\{1,2\}$ הינו יחס רפלקסיבי, לעומת זאת אותו היחס מעל $\mathbb{N}$ אינו יחס רפלקסיבי.

טענה 4.1. יהי R יחס מעל A אזי R רפלקסיבי אם"ם $\mathrm{Id}_A \subseteq R$.

הוכחה. יהי R יחס מעל A,

- $\Longleftarrow$: נניח כי R רפלקסיבי ויהי $\langle a,b\rangle \in \mathrm{Id}_A$ מהגדרת Id_A מתקיים $a = b$, כעת מהעובדה כי R רפלקסיבי ומהיות $a \in A$ נקבל כי aRa בפרט $\mathrm{Id}_A \subseteq R$.
- $\Longrightarrow$: נניח כי $\mathrm{Id}_A \subseteq R$ ויהי $a \in A$ מהגדרת Id_A מתקיים $\langle a,a\rangle \in \mathrm{Id}_A$ ולכן מהגדרת הכלה $\langle a,a\rangle \in R$ כלומר R רפלקסיבי.

■

4.0.2 יחס סימטרי

הגדרה 4.2 (יחס סימטרי)**.** יחס R מעל A המקיים $\forall a,b \in A.aRb \Longrightarrow bRa$.

דוגמה 4.2. היחס $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$ מעל $\{1,2,3\}$ הינו יחס סימטרי, לעומת זאת $\{\langle 1,2\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ יחס לא סימטרי מעל $\{1,2\}$ כי $\langle 2,1\rangle$ לא ביחס.

טענה 4.2. יהי R יחס מעל A אזי R סימטרי אם"ם $R^{-1} = R$.

הוכחה. יהי R יחס מעל A,

- $\Longleftarrow$: נניח כי R סימטרי, יהי $\langle a,b\rangle \in R$ מסימטריות R מתקיים $\langle b,a\rangle \in R$ ומהגדרת היחס ההופכי $\langle a,b\rangle \in R^{-1}$, לכן $R \subseteq R^{-1}$, משיקולי סימטריה (כי $R = \left(R^{-1}\right)^{-1}$) נקבל כי $R = R^{-1}$.
- $\Longrightarrow$: נניח כי $R = R^{-1}$, יהיו $a,b \in A$ עבורם aRb מתקיים מההנחה $aR^{-1}b$, כמו כן מהגדרת היחס ההופכי $bR^{-1}a$ ושוב מההנחה bRa אזי $aRb \Longrightarrow bRa$ כנדרש.

■

הגדרה 4.3 (סגור סימטרי)**.** יהי R יחס מעל A נגדיר $\mathrm{Sym}(R) = R \cup R^{-1}$.

הערה 4.1. ודאו כי $\mathrm{Sym}(R)$ תמיד יחס סימטרי.

תרגיל 4.1 (מינימליות הסגור הסימטרי)**.** יהי R יחס מעל A ויהי S יחס סימטרי מעל A עבורו $R \subseteq S$ אזי $\mathrm{Sym}(R) \subseteq S$.

4.0.3 יחס טרנזיטיבי

הגדרה 4.4 (יחס טרנזיטיבי)**.** יחס R מעל A המקיים $\forall a,b,c \in A. (aRb \wedge bRc) \implies aRc$.

דוגמה 4.3. היחס $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ מעל $\{1,2\}$ הינו יחס טרנזיטיבי, לעומת זאת $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ יחס לא טרנזיטיבי מעל $\{1,2,3\}$ כי $\langle 1,3\rangle$ אינו ביחס.

טענה 4.3. יהי R יחס מעל A אזי R טרנזיטיבי אם"ם $R\circ R \subseteq R$.

הוכחה. יהי R יחס מעל A,

- $\Longleftarrow$: נניח כי R טרנזיטיבי, יהי $\langle a,c\rangle \in R\circ R$ מהגדרת הרכבה קיים $b \in A$ עבורו $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in R$ ומטרנזיטיביות יתקיים $\langle a,c\rangle \in R$ כנדרש.
- $\Longrightarrow$: נניח כי $R\circ R \subseteq R$, יהיו $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in R$ מהגדרת הרכבה $\langle a,c\rangle \in R\circ R$ ומההנחה יתקיים $\langle a,c\rangle \in R$ כנדרש.

■

הגדרה 4.5 (סגור טרנזיטיבי)**.** יהי R יחס מעל A נגדיר $R^\star = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)}$.

הערה 4.2. ודאו כי $R^\star$ תמיד יחס טרנזיטיבי.

תרגיל 4.2 (מינימליות הסגור הטרנזיטיבי)**.** יהי R יחס מעל A ויהי S יחס טרנזיטיבי מעל A עבורו $R \subseteq S$ אזי $R^\star \subseteq S$.

דוגמה 4.4. נגדיר יחס $R = \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ מעל $\mathbb{N}$, ונרצה למצוא את $R^\star$. נראה באינדוקציה כי

$$R^{(m)} = \{\langle n, n+m\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

עבור $m=1$ מתקיים $R^{(1)} = R$ כנדרש, נניח עבור $m \in \mathbb{N}_+$, נשים לב כי מתקיים $R^{(m+1)} = R^{(m)} \circ R$, אזי עבור $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\left.\begin{smallmatrix}\langle n,n+1\rangle \in R\\ \langle n+1,n+1+m\rangle \in R^{(m)}\end{smallmatrix}\right\} \implies \langle n, n+m+1\rangle \in R^{(m+1)}$$

כמו כן יהי $\langle x,y\rangle \in R^{(m+1)}$ אזי קיים $z \in \mathbb{N}$ עבורו

$$\langle z,y\rangle \in R^{(m)} \qquad\qquad \langle x,z\rangle \in R$$

בפרט מהנחת האינדוקציה והגדרת R נקבל $z = x+1$ וכן $y = z+m$ כלומר $y = x+m+1$, בפרט קיבלנו כי

$$R^{(m)} = \{\langle n, n+m\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$$

לכן מהגדרת הסגור הטרנזיטיבי

$$R^\star = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{(i)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\langle n, n+i\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} = <_{\mathbb{N}}$$

הגדרה 4.6 (יחס שקילות)**.** יחס R מעל A רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמה 4.5. תהא A קבוצה אזי $A \times A$ יחס שקילות, Id_A יחס שקילות, $\varnothing$ יחס שקילות, כמו כן $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$ יחס שקילות מעל $\{1,2,3\}$.

4.1 מחלקת שקילות

הגדרה 4.7 (מחלקת שקילות)**.** יהי R יחס שקילות מעל A ויהי $a \in A$ אזי $[a]_R = \{b \in A \mid aRb\}$.

דוגמה 4.6. מתקיים $[n]_{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}} = \{n\}$, $[n]_{\mathbb{N}^2} = \mathbb{N}$.

הגדרה 4.8 (מדולו/קבוצת המנה)**.** יהי R יחס שקילות מעל A אזי $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$.

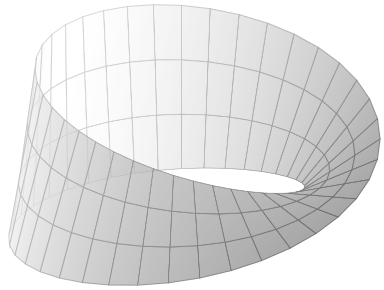
דוגמה 4.7. מתקיים $\mathbb{N}/\mathrm{Id}_{\mathbb{N}} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}/\mathbb{N}^2 = \{\mathbb{N}\}$.

טענה 4.4. יהי R יחס שקילות מעל A ויהיו $a,b \in A$ אזי
1. $(aRb) \iff ([a]_R = [b]_R)$.
2. $(\neg aRb) \iff ([a]_R \cap [b]_R = \varnothing)$.

הוכחה. יהי R יחס שקילות מעל A ויהיו $a,b \in A$.
1. $\Longleftarrow$: נניח כי $[a]_R = [b]_R$, נשים לב כי מרפלקסיביות $a \in [a]_R$ ולכן $a \in [b]_R$ אזי מהגדרת מחלקת שקילות bRa ומסימטריות aRb כנדרש.
$\Longrightarrow$: נניח כי aRb, יהי $x \in [a]_R$ מהגדרת מחלקת שקילות aRx מסימטריות יחס שקילות xRa ומטרנזיטיביות יחס שקילות xRb ושוב מסימטריות bRx כלומר $x \in [b]_R$. משיקולי סימטריה בין a,b ההכלה הנגדית מתקיימת כלומר $[a]_R = [b]_R$.
2. $\Longleftarrow$: נניח כי $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$, נניח בשלילה כי aRb אזי מטענה 1 מתקיים $[a]_R = [b]_R$ וכן מרפלקסיביות $a \in [a]_R$ בפרט $\{a\} \subseteq [a]_R \cap [b]_R$ כלומר $[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$ סתירה.
$\Longrightarrow$: נניח כי $\neg aRb$, נניח בשלילה כי $[a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing$ אזי קיים $x \in A$ המקיים $x \in [a]_R$ וכן $x \in [b]_R$ כלומר $(bRx) \wedge (aRx)$ ומסימטריות וטרנזיטיביות יתקיים aRb סתירה.

■

דוגמה 4.8 (טבעת מוביוס)**.** נסתכל על המרחב $A = [0,1]^2$ ונגדיר יחס עליו $R = \mathrm{Id}_A \cup \{\langle\langle 0,x\rangle, \langle 1,1-x\rangle\rangle \mid x \in [0,1]\}$ (ודאו כי זהו יחס שקילות!) כעת נסתכל על A/R נשים לב כי בקבוצה זו הנקודות מהצורה $\langle 0,x\rangle, \langle 1,1-x\rangle$ עבור $x \in [0,1]$ מודבקות, ולכן נקבל את הצורה הבאה



4.1.1 מערכת נציגים

הגדרה 4.9 (מערכת נציגים)**.** יהי R יחס שקילות מעל A אזי $B \subseteq A$ נקראת מערכת נציגים של R אם היא מקיימת

- יחידות איבר מכל מחלקת שקילות: $\forall a, b \in B. (a \neq b \implies \neg aRb)$.
- קיום איבר מכל מחלקת שקילות: $\forall a \in A. \exists b \in B. aRb$.

דוגמה 4.9. נגדיר את היחס $S = \{\langle 1,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,5 \rangle, \langle 2,5 \rangle\}$ מעל $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ונגדיר את יחס השקילות $R = \text{Id}_A \cup S \cup S^{-1}$ נשים לב כי מתקיים

$$[1]_R = \{1,4\} \qquad [2]_R = \{2,3,5\} \qquad [3]_R = \{2,3,5\}$$
$$[4]_R = \{1,4\} \qquad [5]_R = \{2,3,5\} \qquad [6]_R = \{6\}$$

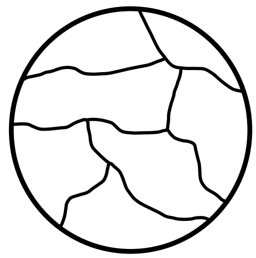
ולכן נקבל כי $A/R = \{\{1,4\}, \{2,3,5\}, \{6\}\}$ אזי $\{1,2,6\}$ מערכת נציגים, באותה מידה גם $\{4,5,6\}$ מערכת נציגים.

4.2 חלוקה

הגדרה 4.10 (חלוקה)**.** תהא A קבוצה אזי $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ המקיימת

- $\forall X, Y \in \Pi. (X \neq Y) \implies (X \cap Y = \varnothing)$.
- $\biguplus_{X \in \Pi} X = A$.

דוגמה 4.10 (דיאגרמת וון של חלוקה)**.** תהא A קבוצה ותהא Π חלוקה, נייצג חלוקה בצורה הבאה



בצורה זאת כל "שבר" בקבוצה A מתאר תת־קבוצה $X \subseteq A$ אשר נמצאת בחלוקה, כלומר $X \in \Pi$.

דוגמה 4.11. מתקיים כי $\{\mathbb{N}_{\text{even}}, \mathbb{N}_{\text{odd}}\}$ חלוקה של $\mathbb{N}$, באותה מידה גם $\{\{0\}, \mathbb{N}_+\}$ חלוקה של $\mathbb{N}$, כמו כן $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\} \uplus \{\mathbb{Z}\}$ חלוקה של $\mathbb{R}$.

טענה 4.5. יהיו Π_1, Π_2 חלוקות של A המקיימות $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ אזי $\Pi_1 = \Pi_2$.

הוכחה. יהיו Π_1, Π_2 חלוקות של A ונניח כי $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$, תהא $X \in \Pi_2$ ונניח בשלילה כי $X \notin \Pi_1$ מהגדרת חלוקה קיים $a \in X$ וכן $A = \biguplus \Pi_1$ אזי קיימת $Y \in \Pi_1$ עבורה $a \in Y$, מההנחה יתקיים $Y \in \Pi_2$ ומהגדרת חלוקה וההנחה כי $X \notin \Pi_2$ נקבל כי מתקיים $Y \neq X$ ובפרט $X \cap Y = \varnothing$ סתירה לעובדה כי $a \in X$ וכן $a \in Y$, אזי $X \in \Pi_1$ כלומר $\Pi_2 \subseteq \Pi_1$ אזי מההנחה $\Pi_1 = \Pi_2$. ■

4.2.1 יחס מושרה וחלוקה מושרית

טענה 4.6 (יחס וחלוקה מושרים). תהא A קבוצה

1. תהא Π חלוקה של A אזי $R_\Pi = \biguplus_{X \in \Pi} X^2$ יחס שקילות מעל A. נקרא ל־R_Π היחס המושרה מעל A מהחלוקה Π.
2. יהי R יחס שקילות מעל A אזי A/R חלוקה. נקרא ל־A/R החלוקה המושרת של A מהיחס R.

הוכחה. תהא A קבוצה

1. תהא Π חלוקה של A ונגדיר $R_\Pi = \bigcup_{X \in \Pi} X^2$,
   - צ"ל: איחוד זר מוצדק, יהיו $X, Y \in \Pi$ שונות אזי מהגדרת חלוקה $X \cap Y = \varnothing$ בפרט $X^2 \cap Y^2 = \varnothing$ אזי איחוד זר ניתן לשימוש.
   - צ"ל: R_Π רפלקסיבי, יהי $a \in A$ מהגדרת חלוקה קיים $X \in \Pi$ עבורו $a \in X$ בפרט $\langle a, a \rangle \in X^2$ ולכן $\langle a, a \rangle \in R_\Pi$.
   - צ"ל: R_Π סימטרי, יהיו $a, b \in A$ ונניח כי aRb מהגדרת R_Π קיים $X \in \Pi$ עבורו $a, b \in X$ כמו כן $\langle b, a \rangle \in X^2$ ולכן $bR_\Pi a$.
   - צ"ל: R_Π טרנזיטיבי, יהיו $a, b, c \in A$ עבורם $(aR_\Pi b) \wedge (bR_\Pi c)$ מהגדרת R_Π קיימים $X, Y \in \Pi$ עבורם $a, b \in X$ וכן $b, c \in Y$ נניח בשלילה כי $X \neq Y$ אזי מהגדרת חלוקה $X \cap Y = \varnothing$ סתירה לעובדה כי $b \in X \cap Y$ בפרט $X = Y$ אזי $a, b, c \in X$, כעת יתקיים $\langle a, c \rangle \in X^2$ ולכן $aR_\Pi c$.
2. יהי R יחס שקילות מעל A,

- צ"ל: $\varnothing \notin {}^{A}/_{R}$, נניח בשלילה כי $\varnothing \in {}^{A}/_{R}$ אזי מהגדרת קבוצת המנה קיים $a \in A$ עבורו $[a]_R = \varnothing$ סתירה להיות R יחס שקילות ובפרט רפלקסיבי aRa כלומר $a \in [a]_R$.
- צ"ל: זרות הקבוצות, יהיו $X, Y \in {}^{A}/_{R}$ ונניח כי $X \neq Y$ מהגדרת קבוצת מנה קיימים $a, b \in A$ עבורם $[a]_R = X$ וכן $[b]_R = Y$ נניח בשלילה כי $c \in X \cap Y$ אזי $(aRc) \wedge (bRc)$ בפרט מהיות R יחס שקילות נקבל כי aRb ולכן $[a]_R = [b]_R$ כלומר $X = Y$ סתירה, אזי $X \cap Y = \varnothing$ כנדרש.
- צ"ל: איחוד הקבוצות הוא כל המרחב, יהי $a \in A$ נשים לב כי $[a]_R \in {}^{A}/_{R}$ ולכן $[a]_R \subseteq \bigcup {}^{A}/_{R}$ כלומר $a \in \bigcup {}^{A}/_{R}$, כעת יהי $b \in \bigcup {}^{A}/_{R}$ אזי מהגדרת איחוד מוכלל קיימת $X \in {}^{A}/_{R}$ עבורה $b \in X$ מהגדרת קבוצת מנה קיימת $x \in A$ עבורה $[x]_R = X$ בפרט $b \in [x]_R$ ולכן xRb אך $R \subseteq A^2$ ולכן $b \in A$ כנדרש, בסך הכל קיבלנו כי $\bigcup {}^{A}/_{R} = A$.

■

משפט 4.1. תהא A קבוצה יהי S יחס שקילות מעל A ותהא Π חלוקה של A אזי $R_{A/S} = S$ וכן ${}^{A}/_{R_\Pi} = \Pi$.

הוכחה. תהא A קבוצה יהי S יחס שקילות מעל A ותהא Π חלוקה של A, נחלק את ההוכחה לשתי הטענות

- צ"ל: $R_{A/S} = S$, נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית
  - $\subseteq$: יהי $\langle a, b\rangle \in R_{A/S}$ מהגדרת יחס מושרה מתקיים $\langle a, b\rangle \in \biguplus_{X \in A/S} X^2$ בפרט קיים $X \in {}^{A}/_{S}$ עבורו $a, b \in X$ כמו כן מהגדרת קבוצת המנה נקבל כי קיים $x \in A$ עבורו $X = [x]_S$ ולכן $a, b \in [x]_S$ אזי $[a]_S = [b]_S$ ולכן aSb.
  - $\supseteq$: יהי $\langle a, b\rangle \in S$ נשים לב כי $[a]_S = [b]_S$ ולכן $\langle a, b\rangle \in [a]_S^2$ כמו כן מהגדרת קבוצת מנה $[a]_S \in {}^{A}/_{S}$ ולכן $\langle a, b\rangle \in \bigcup_{X \in A/S} X^2$ ומהגדרת יחס מושרה מהחלוקה נקבל $\langle a, b\rangle \in R_{A/S}$.
- צ"ל: $\Pi = {}^{A}/_{R_\Pi}$, נוכיח תחילה כי $\Pi \supseteq {}^{A}/_{R_\Pi}$, תהא $X \in \Pi$ מהגדרת חלוקה $X \neq \varnothing$ בפרט קיים $a \in X$, יהי $b \in A$ עבורו $aR_\Pi b$ מהגדרת R_Π נובע כי קיימת $Y \in \Pi$ עבורה $a, b \in Y$ אך נשים לב כי $Y \cap X \neq \varnothing$ ולכן מהגדרת חלוקה $X = Y$, כמו כן נשים לב כי מהגדרת R_Π כל $c \in X$ מקיים $aR_\Pi c$, אזי קיבלנו כי

$$\forall d \in A. (aR_\Pi d) \iff (d \in X)$$

ולכן מהגדרת מחלקת שקילות ומהגדרת שיוויון קבוצות נקבל כי $X = [a]_{R_\Pi}$ בפרט מהגדרת קבוצת המנה $X \in {}^{A}/_{R_\Pi}$. כעת נשים לב כי ${}^{A}/_{R_\Pi}, \Pi$ חלוקות וכן $\Pi \subseteq {}^{A}/_{R_\Pi}$ בפרט ממשפט מלעיל נקבל כי $\Pi = {}^{A}/_{R_\Pi}$.

■

דוגמה 4.12. תהא A קבוצה אזי ${}^{R}/_{A^2} = \{A\}$ חלוקה, ${}^{R}/_{\mathrm{Id}_R} = \{\{a\} \mid a \in A\}$ חלוקה.

דוגמה 4.13. נגדיר חלוקה $\Pi = \{[n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ של $\mathbb{R}$ אזי $R_\Pi = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor\}$.

5 פונקציות

הערה 5.1 (שימוש באקסיומת הבחירה). מכאן ועד סוף החלק נשתמש באקסיומת הבחירה, כל משפט/טענה/מסקנה וכדומה אשר משתמשת באקסיומת הבחירה יכתב על ידה כך (אקסיומת בחירה). על מנת לקרוא עוד ראה פרק אקסיומת הבחירה.

5.0.1 יחס חד־ערכי

הגדרה 5.1 (יחס חד־ערכי/פונקציה חלקית)**.** יחס R מעל A,B המקיים $\forall a\in A.\forall b_1,b_2\in B.\left(aRb_1\wedge aRb_2\right)\Longrightarrow\left(b_1=b_2\right)$.

דוגמה 5.1. הוכח או הפרך האם היחסים הבאים חד־ערכיים,

- היחס $R=\left\{\langle n,y\rangle\in\mathbb{N}_+\times\mathbb{R}\mid n^2+y^2=5\right\}$, ...
- היחס $R=\left\{\langle n,y\rangle\in\mathbb{N}_+\times\mathbb{R}\mid n^2+y^2=1\right\}$, ...
- היחס $R=\left\{\langle A,B\rangle\in\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)^2\mid B=A\cup\{1\}\right\}$, ...
- היחס $R=\left\{\langle A,B\rangle\in\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)^2\mid A=B\backslash\{1\}\right\}$, ...

5.0.2 יחס מלא

הגדרה 5.2 (יחס מלא)**.** יחס R מעל A,B המקיים $\forall a\in A.\exists b\in B.aRb$.

הגדרה 5.3 (פונקציה)**.** יחס f מעל A,B יקרא פונקציה אם הינו חד־ערכי ומלא.

- נסמן $A\to B=A^B={}^BA=\left\{f\subseteq A\times B\mid \text{פונקציה } f\right\}$.
- תהא $f\in A\to B$ נסמן $f:A\to B$.
- תהא $f:A\to B$ ויהיו $a,b\in A\times B$ המקיימים afb נסמן $f\left(a\right)=b$.

הערה 5.2. שימו לב כי הסימון $f\left(a\right)=b$ אפשרי עבור פונקציות לעומת יחסים מהיות פונקציה חד־ערכית.

דוגמה 5.2. נגדיר פונקציות,

- נגדיר פונקציה $f\in\{a,b,c\}^{\{1,2,3\}}$ כך $f=\left\{\langle1,a\rangle,\langle2,a\rangle,\langle3,b\rangle\right\}$.
- נגדיר פונקציה $F:\left(\mathbb{R}\to\mathbb{R}\right)\to\mathbb{R}$ כך $F=\left\{\langle g,x\rangle\in{}^{\mathbb{R}}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid g\left(2\right)=x\right\}$.
- נגדיר פונקציה $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך $g=\left\{\langle x,x^2\rangle\mid x\in\mathbb{R}^2\right\}$.

הערה 5.3. יהיו A,B קבוצות סופיות אזי $\left|A^B\right|=|A|^{|B|}$.

תרגיל 5.1. תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(A\right)\backslash\{\varnothing\}$ נגדיר $F_\Pi=\left\{\langle x,X\rangle\in A\times\Pi\mid x\in X\right\}$, אזי ($F_\Pi$ פונקציה)$\Longleftrightarrow$(Π חלוקה של A).

5.0.3 טווח

הגדרה 5.4 (טווח)**.** תהא $f\in B^A$ אזי $\text{Range}\left(R\right)=B$.

הערה 5.4. שימו לב כי $\text{Im}\left(f\right)\subseteq\text{Range}\left(f\right)$ אך לא תמיד מתקיים $\text{Im}\left(f\right)=\text{Range}\left(f\right)$, נגדיר $f\in\{a,b,c\}^{\{1,2,3\}}$ כך $f=\left\{\langle1,a\rangle,\langle2,a\rangle,\langle3,b\rangle\right\}$ נשים לב כי $\text{Range}\left(f\right)=\{a,b,c\}$ אך $\text{Im}\left(f\right)=\{a,b\}$. בפרט אנו מחוייבים להוכיח כי הפונקציות אשר אנו מגדירים הן **מוגדרות היטב**, כלומר שמתקיים $\text{Im}\left(f\right)\subseteq\text{Range}\left(f\right)$.

5.1 כתיב למבדא

מטרת כתיב λ היא לתת לנו יכולת ודרך לכתיבת פונקציות עם פירוט לגבי תחומה, במקום לכתוב $f : A \to B$ המקיימת $f(x) = \dots$ נוכל להצהיר כי f מקבלת קלט x מהקבוצה A ומחזירה פלט $f(x)$. כתיב זה שימושי בעיקר כעקרון פורמלי וכן כאשר יש אי ודאות ברורה בתחום הפונקציה (נגיד תחום $f(n) = n^2$ עלול להיות $\mathbb{N}$ או $\mathbb{N}_+$ או $\mathbb{Z}$ ועוד).

הגדרה 5.5 (כתיב λ)**.** תהא $f : A \to B$ נגדיר $f = \lambda x \in A.f(x)$. נראה דוגמה על מנת להבין את מבנה הכתיב, נסתכל על $f = \lambda x \in \mathbb{R}.x^2$ נרחיב על כל חלק בביטוי

$$\underbrace{f}_{\text{שם הפונקציה}} = \lambda \underbrace{x \in \mathbb{R}}_{\text{הצהרה כי קלט הפונקציה הוא } x \text{ ממשי}} . \underbrace{x^2}_{\text{פלט הפונקציה}}$$

וכעת ניתן לכתוב $f(3) = 3^2 = 9$.

הערה 5.5. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך $f = \lambda x \in \mathbb{R}. \int_0^x xydy$ אזי נשים לב כי אם נשתמש בהצבה פשוטה יתקיים

$$f(y+1) = \int_0^{y+1} (y+1)\, ydy$$

אשר לא נכון, במקרה בו המשתנה אשר אותו מציבים נמצא בביטוי הלאמבדא נאלץ לשנות את שמות המשתנים בכתיב הלמבדא כך

$$f(y+1) = \int_0^{y+1} (y+1)\, zdz$$

דוגמה 5.3 (כתיב λ)**.** מתקיים

- תהא A קבוצה אזי $\mathrm{Id}_A = \lambda a \in A.a$. (בפרט Id_A פונקציה)
- נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ כך $f = \lambda \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2.x + y$, פונקציית החיבור הממשית.
- נגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כך $f = \lambda n \in \mathbb{N}. \{x \in \mathbb{N} \mid x \le n\}$.
- נגדיר $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך $F = \lambda f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.\lambda n \in \mathbb{N}.f(n) + 1$, שימו לב לדוגמה לשימוש

$$\begin{aligned} F\left(\lambda x \in \mathbb{N}.x^2\right)(3) &= \left(\lambda n \in \mathbb{N}. \left(\lambda x \in \mathbb{N}.x^2\right)(n) + 1\right)(3) \\ &= \left(\lambda n \in \mathbb{N}.n^2 + 1\right)(3) = 3^2 + 1 = 10 \end{aligned}$$

הערה 5.6. נסמן $f(a_1 \dots a_n) = f(\langle a_1 \dots a_n \rangle)$.

הגדרה 5.6 (פונקציית curry)**.** תהיינה A, B, C קבוצות נגדיר $\mathrm{curry}_{A,B,C} : C^{A \times B} \to \left(C^B\right)^A$ כך $\mathrm{curry}_{A,B,C} = \lambda f \in C^{A \times B}.\lambda a \in A.\lambda b \in B.f(a, b)$.

דוגמה 5.4 (פונקציית curry)**.** נסתכל על

$$\begin{aligned}\text{curry}_{\mathbb{R},\mathbb{N},\mathbb{R}}\left(\lambda\left\langle x,n\right\rangle \in\mathbb{R}\times\mathbb{N}.x^{n}\right)\left(\pi\right)\left(3\right)= & \left(\lambda a\in A.\lambda b\in B.\left(\lambda\left\langle x,n\right\rangle \in\mathbb{R}\times\mathbb{N}.x^{n}\right)\left(a,b\right)\right)\left(\pi\right)\left(3\right)\\
= & \left(\lambda b\in B.\left(\lambda\left\langle x,n\right\rangle \in\mathbb{R}\times\mathbb{N}.x^{n}\right)\left(\pi,b\right)\right)\left(3\right)\\
= & \left(\lambda\left\langle x,n\right\rangle \in\mathbb{R}\times\mathbb{N}.x^{n}\right)\left(\pi,3\right)\\
= & \pi^{3}
\end{aligned}$$

5.1.1 חלוקה למקרים

נרצה להגדיר פונקציה אשר מקיימת חוקים שונים על פי הקלט, לדוגמה פונקצייה הערך המוחלט, עד כה אין בידינו דרך לכתיבתה ללא איחוד פונקציות.

הגדרה 5.7 (חלוקה למקרים)**.** יהיו $g_1 : A_1 \to B$ וכן $g_2 : A_2 \to B$ באשר $A_1 \uplus A_2 = A$ אזי נגדיר $f : A \to B$ כך $f = g_1 \uplus g_2$, ובכתיב למבדא נסמנה

$$f=\lambda a\in A.\begin{cases}
g_{1}\left(a\right) & a\in A_{1}\\
g_{2}\left(a\right) & a\in A_{2}
\end{cases}$$

הערה 5.7. כאשר ברור מהם התנאים עבור החלוקה למקרים נרשה לעצמינו לקרוא לתנאי האחרון else, כמו כן במקום לכתוב בתנאי $a \in A_1$ נרשה לעצמינו לכתוב פרידיקט, **בתנאי שכל החלוקות למקרים מכסות את תחום הפונקציה!**, לדוגמה הפונקציה $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ המוגדרת

$$f=\lambda x\in\left\{ 0,1\right\} .\begin{cases}
0 & x\in\left\{ 0\right\} \\
1 & x\in\left\{ 1\right\}
\end{cases}$$

ניתן לכתיבתה גם כך

$$f=\lambda x\in\left\{ 0,1\right\} .\begin{cases}
0 & x=0\\
1 & \text{else}
\end{cases}$$

5.2 שיוויון

הגדרה 5.8 (שיוויון פונקציות)**.** יהיו f,g פונקציות נאמר כי $f = g$ אם"ם מתקיים $(\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)) \wedge (\forall x \in \text{Dom}(f).f(x) = g(x))$.

דוגמה 5.5. נגדיר שלוש פונקציות

$$f=\lambda x\in\mathbb{R}.x^{2}\qquad g=\lambda x\in\mathbb{C}.x^{2}\qquad h=\lambda x\in\mathbb{R}.\frac{x^{4}+x^{2}}{x^{2}+1}$$

נשים לב כי $f\neq g$ למרות שהן בעלות אותה הגדרה מכיוון ומתקיים $\mathrm{Dom}\left(f\right)\neq\mathrm{Dom}\left(g\right)$, מאותה סיבה גם כמובן $h\neq g$, לעומת זאת $f=h$ כי $\mathrm{Dom}\left(f\right)=\mathrm{Dom}\left(h\right)$ וכן יהי $a\in\mathbb{R}$ אזי

$$f\left(a\right)=a^{2}=a^{2}\left(\frac{a^{2}+1}{a^{2}+1}\right)=\frac{a^{4}+a^{2}}{a^{2}+1}=h\left(a\right)$$

שימו לב כי ניתן לחלק והכפיל בגורם $a^{2}+1$ מכיוון שמתקיים $\forall x\in\mathbb{R}.x^{2}+1\neq0$.

5.3 מקור תמונה וצמצום

5.3.1 תמונה איבר איבר

הגדרה 5.9 (תמונה איבר איבר)**.** תהא $f:A\to B$ ותהא $X\subseteq A$ אזי $f\left[X\right]=\left\{ f\left(a\right)\mid a\in X\right\}$.

5.3.2 מקור איבר איבר

הגדרה 5.10 (קבוצת המקורות)**.** תהא $f:A\to B$ ותהא $Y\subseteq B$ אזי $f^{-1}\left[Y\right]=\left\{ a\in A\mid f\left(a\right)\in Y\right\}$.

טענה 5.1. תהא $f:A\to B$ אזי $A=\biguplus_{b\in B}f^{-1}\left[\left\{ b\right\} \right]$.

הוכחה. תהא $f:A\to B$ נוכיח תחילה את ההצדקה בשימוש באיחוד זר ולאחר מכן בעזרת הכלה דו כיוונית

- צ"ל: איחוד זר, יהיו $b_{1},b_{2}\in B$ באשר $b_{1}\neq b_{2}$ נניח בשלילה כי $f^{-1}\left[\left\{ b_{1}\right\} \right]\cap f^{-1}\left[\left\{ b_{2}\right\} \right]\neq\varnothing$ אזי קיים $a\in A$ עבורו $a\in f^{-1}\left[\left\{ b_{1}\right\} \right]$ וכן $a\in f^{-1}\left[\left\{ b_{2}\right\} \right]$ מהגדרת מקור איבר איבר נובע כי $f\left(a\right)\in\left\{ b_{1}\right\}$ וכן $f\left(a\right)\in\left\{ b_{2}\right\}$ אך מהגדרת כתיבת קבוצה כרשימת איברים נובע כי $f\left(a\right)=b_{1}$ וגם $f\left(a\right)=b_{2}$ אזי מטרנזיטיביות השיוויון יתקיים $b_{1}=b_{2}$ סתירה בפרט $f^{-1}\left[\left\{ b_{1}\right\} \right]\cap f^{-1}\left[\left\{ b_{2}\right\} \right]=\varnothing$.
- $\subseteq$: יהי $a\in\bigcup_{b\in B}f^{-1}\left[\left\{ b\right\} \right]$ מהגדרת איחוד מוכלל קיים $b'\in B$ עבורו $a\in f^{-1}\left[\left\{ b'\right\} \right]$ ומהגדרת מקור איבר איבר נקבל כי מתקיים $f\left(a\right)=b'$ כעת מהגדרת פונקציה כיחס נקבל כי $f\subseteq A\times B$ וכן afb' ולכן $a\in A$.
- $\supseteq$: יהי $a\in A$ נשים לב כי f פונקציה ולכן מלאה כלומר קיים $b'\in B$ עבורו $f\left(a\right)=b'$ בפרט מהגדרת מקור איבר איבר יתקיים $a\in f^{-1}\left[\left\{ b'\right\} \right]$ ולכן $a\in\bigcup_{b\in B}f^{-1}\left[\left\{ b\right\} \right]$.

■

דוגמה 5.6. נגדיר $f=\lambda x\in\mathbb{Z}.\left|x\right|$, עבור מי שלא מכיר הסימון $\left|x\right|$ מסמל את הערך המוחלט של x המוגדר כך

$$\lambda x\in\mathbb{R}.\begin{cases} x & x\geq0\\ -x & \text{else} \end{cases}$$

נשים לב $\mathrm{Im}\left(f\right)=\mathbb{N}$ כי מתקיים

$$\forall n\in\mathbb{N}_{+}.f^{-1}\left[\left\{ n\right\} \right]=\left\{ \pm n\right\}$$

אזי

$$\biguplus_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}\left[\left\{ n\right\} \right]=\biguplus_{n\in\mathbb{N}}\left\{ \pm n\right\} =\mathbb{Z}$$

5.3.3 צמצום

הגדרה 5.11 (צמצום)**.** תהא $f : A \to B$ ותהא $X \subseteq A$ אזי $f_{\restriction X} = \lambda x \in X.f(x)$.

טענה 5.2. תהא $f : A \to B$ ותהא $X \subseteq A$ אזי $f_{\restriction X} = f \cap (X \times B)$.

הוכחה. תהא $f : A \to B$ ותהא $X \subseteq A$

- $\subseteq$: יהי $\langle a,b\rangle \in f_{\restriction X}$ מהגדרת צמצום וכתיב למבדא מתקיים $a \in X$ וכן $b = f(a) \in B$ בפרט $\langle a,b\rangle \in X \times B$ וכן $\langle a,b\rangle \in f$ אזי $\langle a,b\rangle \in f \cap (X \times B)$.
- $\supseteq$: יהי $\langle a,b\rangle \in f \cap (X \times B)$ אזי $\langle a,b\rangle \in f$ וכן $\langle a,b\rangle \in X \times B$ בפרט נקבל כי $b = f(a)$ וכן $a \in X$ אזי $f_{\restriction X}(a) = f(a) = b$ כלומר $\langle a,b\rangle \in f_{\restriction X}$.

■

5.4 הרכבה

משפט 5.1 (הרכבת פונקציות היא פונקציה)**.** תהא $f : A \to B$ ותהא $g : B \to C$ אזי $g \circ f : A \to C$.

הוכחה. תהיינה A, B, C קבוצות, תהא $f : A \to B$ ותהא $g : B \to C$, נשים לב כי על מנת להוכיח כי $g \circ f : A \to C$ יש להוכיח כי $g \circ f$ הינה פונקציה, כלומר חד־ערכית ומלאה,

- g חד־ערכית, יהי $a \in A$ ויהיו $c_1, c_2 \in C$ עבורם $\langle a,c_1\rangle, \langle a,c_2\rangle \in g \circ f$ מהגדרת הרכבה קיימים $b_1, b_2 \in B$ עבורם

$$\langle a,b_1\rangle, \langle a,b_2\rangle \in f \qquad\qquad \langle b_1,c_1\rangle, \langle b_2,c_2\rangle \in g$$

מהיות f פונקציה ובפרט חד־ערכית נקבל כי $b_1 = b_2$ בפרט יתקיים

$$\langle b_1,c_1\rangle, \langle b_1,c_2\rangle \in f$$

כמו כן מהיות g פונקציה ובפרט חד־ערכית נקבל כי $c_1 = c_2$ כנדרש.

- g מלאה, יהי $a \in A$ מהיות f פונקציה קיים $b \in B$ עבורו $f(a) = b$ כמו כן מהיות g פונקציה קיים $c \in C$ עבורו $g(b) = c$ מהגדרת הרכבה נקבל כי

$$(\langle a,b\rangle \in f) \wedge (\langle b,c\rangle \in g) \Longrightarrow \langle a,c\rangle \in g \circ f$$

■

משפט 5.2 (משמעות ההרכבה)**.** תהא $f : A \to B$ תהא $g : B \to C$ ויהי $x \in A$ אזי $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
כלומר פעולת ההרכבה מדמה הפעלת סדרת פונקציות אחת אחרי השנייה מהפנימית אל החיצונית.

הוכחה. תהיינה A,B,C קבוצות, תהא $f:A\to B$ תהא $g:B\to C$ ויהי $a\in A$, נשים לב כי מהגדרת פונקציה והיותה מלאה מתקיים

$$\langle a,f\left(a\right)\rangle\in f\qquad\qquad\langle f\left(a\right),g\left(f\left(a\right)\right)\rangle\in g$$

בפרט מהגדרת הרכבה $\langle a,g\left(f\left(a\right)\right)\rangle\in g\circ f$ ולכן

$$\left(g\circ f\right)\left(a\right)=g\left(f\left(a\right)\right)$$

■

דוגמה 5.7. נגדיר $f=\lambda x\in\mathbb{R}.x^{2}$ וכן $g=\lambda x\in\mathbb{R}.2^{x}$ אזי

$$\left(g\circ f\right)\left(x\right)=g\left(f\left(x\right)\right)=g\left(x^{2}\right)=2^{x^{2}}$$

ולכן $g\circ f=\lambda x\in\mathbb{R}.2^{x^{2}}$.

טענה 5.3. תהא f פונקציה אזי $f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)}$.

הוכחה. תהא $f:A\to B$ נשים לב כי $f^{-1}\subseteq B\times A$ ולכן $f\circ f^{-1}\subseteq B\times B$ נוכיח הכלה דו כיוונית,

- $\subseteq$: יהי $\langle b_{1},b_{2}\rangle\in f\circ f^{-1}$ מהגדרת הרכבה קיים $a\in A$ עבורו $\langle b_{1},a\rangle\in f^{-1}$ וכן $\langle a,b_{2}\rangle\in f$ בפרט מהגדרת יחס הופכי נקבל כי $\langle a,b_{1}\rangle\in f$ כעת מהיות f פונקציה ובפרט חד־ערכית נקבל כי $b_{1}=b_{2}$ כמו כן $b_{1}\in\mathrm{Im}\left(f\right)$ כי $\langle a,b_{1}\rangle\in f$ בפרט מהגדרת Id נקבל כי $\langle b_{1},b_{2}\rangle\in\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)}$.
- $\supseteq$: יהי $\langle b,b_{1}\rangle\in\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)}$ מהגדרת Id מתקיים $b=b_{1}$ כמו כן יתקיים $b\in\mathrm{Im}\left(f\right)$ ולכן מהגדרת Im קיים $a\in A$ עבורו $f\left(a\right)=b$ אזי מהגדרת יחס הופכי $\langle b,a\rangle\in f^{-1}$ ולכן מהגדרת הרכבה

$$\left(\langle b,a\rangle\in f^{-1}\right)\wedge\left(\langle a,b\rangle\in f\right)\Longrightarrow\left(\langle b,b_{1}\rangle\in f\circ f^{-1}\right)$$

■

5.5 זיווג

5.5.1 יחס חד־חד־ערכי

הגדרה 5.12 (יחס חד־חד־ערכי (חח"ע))**.** יחס R מעל A,B המקיים $\forall a_{1},a_{2}\in A.\forall b\in B.\left(a_{1}Rb\wedge a_{2}Rb\right)\Longrightarrow\left(a_{1}=a_{2}\right)$.

דוגמה 5.8. ...

טענה 5.4. תהא f חח"ע אזי $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}(f)}$.

הוכחה. יהי $f \subseteq A \times B$ יחס חח"ע נשים לב כי $f^{-1} \subseteq B \times A$ ולכן $f^{-1} \circ f \subseteq A \times A$, נוכיח בעזרת הכלה דו כיוונית,

- $\subseteq$: יהי $\langle a_1, a_2 \rangle \in f^{-1} \circ f$ מהגדרת הרכבה קיים $b \in A$ עבורו $\langle a_1, b \rangle \in f$ וכן $\langle b, a_2 \rangle \in f^{-1}$ בפרט מהגדרת יחס הופכי נקבל כי $\langle a_2, b \rangle \in f$ כעת מהיות f חח"ע נקבל כי $a_1 = a_2$ כמו כן $a_1 \in \mathrm{Dom}(f)$ כי $\langle a_1, b \rangle \in f$ בפרט מהגדרת Id נקבל כי $\langle a_1, a_2 \rangle \in \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}(f)}$.
- $\supseteq$: יהי $\langle a, a_1 \rangle \in \mathrm{Id}_{\mathrm{Dom}(f)}$ מהגדרת Id מתקיים $a = a_1$ כמו כן יתקיים $a \in \mathrm{Dom}(f)$ ולכן מהגדרת Dom קיים $b \in B$ עבורו afb אזי מהגדרת יחס הופכי $\langle b, a \rangle \in f^{-1}$ ולכן מהגדרת הרכבה

$$(\langle a, b \rangle \in f) \wedge \left(\langle b, a \rangle \in f^{-1}\right) \implies \left(\langle a, a_1 \rangle \in f^{-1} \circ f\right)$$

■

הגדרה 5.13 (פונקציה n־ערכית)**.** פונקציה $f : A \to B$ המקיימת $\forall b \in B. \left|f^{-1}[\{b\}]\right| = n$.

טענה 5.5 (הרכבת יחסים חח"ע). יהיו f, g חח"ע אזי $g \circ f$ חח"ע.

הוכחה. יהי f יחס חח"ע מעל A, B ויהי g יחס חח"ע מעל B, C, יהיו $a_1, a_2 \in A$ ויהי $c \in C$ המקיימים $\langle a_1, c \rangle, \langle a_2, c \rangle \in g \circ f$, מהגדרת הרכבה קיימים $b_1, b_2 \in B$ עבורם $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle \in f$ וכן $\langle b_1, c \rangle, \langle b_2, c \rangle \in g$ נשים לב כי מהיות g חח"ע נקבל כי $b_1 = b_2$ ולכן מהיות f חח"ע נקבל כי $a_1 = a_2$ כנדרש. ■

5.5.2 יחס על

הגדרה 5.14 (יחס על)**.** יחס R מעל A, B המקיים $\forall b \in B. \exists a \in A. aRb$.

דוגמה 5.9. ...

טענה 5.6 (הרכבת פונקציות על). יהיו פונקציות f, g על אזי $g \circ f$ על.

הוכחה. תהא $f : A \to B$ על ותהא $g : B \to C$ על, יהי $c \in C$ מהיות g על קיים $b \in B$ עבורו $g(b) = c$ כמו כן מהיות f על קיים $a \in A$ עבורו $f(a) = b$ בפרט ממשפט משמעות ההרכבה מתקיים

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

ולכן $\langle a, c \rangle \in g \circ f$ כנדרש. ■

5.5.3 פונקציה הפיכה

משפט 5.3. יהי f יחס מעל A, B אזי

1. (f חח"ע)$\iff$(f^{-1} חד־ערכית).
2. (f על)$\iff$(f^{-1} מלאה).

הוכחה. יהי f יחס מעל A, B,

1. נוכיח גרירה דו כיוונית,

$\Longleftarrow$: נניח כי f חח"ע, יהי $b\in B$ ויהיו $a_1,a_2\in A$ עבורם $\langle b,a_1\rangle,\langle b,a_2\rangle\in f^{-1}$ אזי מהגדרת יחס הופכי מתקיים $\langle a_1,b\rangle,\langle a_2,b\rangle\in f$ כעת מהיות f חח"ע מתקיים $a_1=a_2$.

$\Longrightarrow$: נניח כי f^{-1} חד־ערכית, יהיו $a_1,a_2\in A$ ויהי $b\in B$ עבורם $\langle a_1,b\rangle,\langle a_2,b\rangle\in f$ מהגדרת יחס הופכי מתקיים $\langle b,a_1\rangle,\langle b,a_2\rangle\in f^{-1}$ כעת מהיות f^{-1} חד ערכית מתקיים $a_1=a_2$.

2. נוכיח גרירה דו כיוונית,

$\Longleftarrow$: נניח כי f על, יהי $b\in B$ מהיות f על קיים $a\in A$ עבורו $\langle a,b\rangle\in f$ אזי מהגדרת יחס הופכי מתקיים $\langle b,a\rangle\in f^{-1}$.

$\Longrightarrow$: נניח כי f^{-1} מלאה, יהי $b\in B$ מהיות f^{-1} מלאה קיים $a\in A$ עבורו $\langle b,a\rangle\in f^{-1}$ אזי מהגדרת יחס הופכי מתקיים $\langle a,b\rangle\in f$.

■

מסקנה 5.1. יהי f יחס מעל A,B אזי (f חח"ע ועל)$\Longleftrightarrow$($f^{-1}:B\to A$).

הוכחה. יהי f יחס מעל A,B, נוכיח גרירה דו כיוונית,

$\Longleftarrow$: נניח כי f חח"ע ועל, מהמשפט מלעיל מתקיים f^{-1} מלאה וחד־ערכית בפרט f^{-1} פונקציה.

$\Longrightarrow$: נניח כי f^{-1} פונקציה, בפרט f^{-1} מלאה וחד־ערכית אזי ממשפט מלעיל $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ חח"ע ועל, כמו כן ממשפט מפרק היחסים מתקיים $f=\left(f^{-1}\right)^{-1}$ ולכן f חח"ע ועל.

■

הגדרה 5.15 (פונקציה הפיכה/זיווג)**.** תהא $f:A\to B$ אם קיימת $g:B\to A$ המקיימת $(g\circ f=\mathrm{Id}_A)\wedge(f\circ g=\mathrm{Id}_B)$ אזי נקרא לפונקציה g ההופכית של f.

משפט 5.4. תהא $f:A\to B$ אזי

1. (f חח"ע)$\Longleftrightarrow$(קיימת $g:B\to A$ המקיימת $g\circ f=\mathrm{Id}_A$). (ונאמר כי f הפיכה משמאל) (אקסיומת בחירה)
2. (f על)$\Longleftrightarrow$(קיימת $g:B\to A$ המקיימת $f\circ g=\mathrm{Id}_B$). (ונאמר כי f הפיכה מימין) (אקסיומת בחירה)

הוכחה. תהא $f:A\to B$

1. נוכיח בעזרת גרירה דו כיוונית,

א) נניח כי f חח"ע, מטענה מלעיל נובע כי f^{-1} חד־ערכית בפרט גם $f^{-1}_{\restriction_{\mathrm{Im}(f)}}$ חד־ערכית כמו כן מהגדרת יחס הופכי $f^{-1}_{\restriction_{\mathrm{Im}(f)}}$ מלאה (ודאו את שתי התכונות!) אזי $f^{-1}_{\restriction_{\mathrm{Im}(f)}}:\mathrm{Im}\left(f\right)\to A$ כעת תהא $h:B\backslash\mathrm{Im}\left(f\right)\to A$ ונגדיר $g=f^{-1}_{\restriction_{\mathrm{Im}(f)}}\uplus h$ ודאו כי $g:B\to A$, כעת ...

ב) ...

■

מסקנה 5.2. תהא $f:A\to B$ אזי (f חח"ע ועל)$\Longleftrightarrow$(f הפיכה). (אקסיומת בחירה)

הוכחה. תהא $f:A\to B$,

$\Longrightarrow$: נניח כי f הפיכה, אזי קיימת $g : B \to A$ המקיימת $(g \circ f = \mathrm{Id}_A) \wedge (f \circ g = \mathrm{Id}_B)$ אזי ממשפט מלעיל מתקיים f חח"ע ועל.

$\Longleftarrow$: נניח כי f חח"ע ועל, מהמשפט מלעיל קיימות $g, h : B \to A$ עבורן $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ וכן $f \circ h = \mathrm{Id}_B$

$$() \circ f = \mathrm{Id}_A$$

$$f \circ () = \mathrm{Id}_B$$

...

■

דוגמה 5.10. ...

תרגיל 5.2 (יחידות ההופכית)**.** תהא $f : A \to B$ הפיכה ויהיו $g, h : B \to A$ הופכיות של f אזי $g = h$.

משפט 5.5. תהא $f : A \to B$ הפיכה אזי $f^{-1} : B \to A$ ההופכית של f.

הוכחה. תהא $f : A \to B$ הפיכה, ממשפט מלעיל נובע כי f חח"ע ועל בפרט מתקיים f^{-1} פונקציה, כמו כן ממשפט מפרק היחסים מתקיים

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$$

לכן מהגדרת פונקציה הפיכה וכן מיחידותה נקבל כי f^{-1} ההופכית של f. ■

מסקנה 5.3. תהא $f : A \to B$ חח"ע ועל אזי $f^{-1} : B \to A$ חח"ע ועל.

הוכחה. ... ■

6 עוצמות

בחיים האמיתיים כאשר מנסים למדוד גודל של קבוצה נוכל לדוגמה לספור איבר איבר את האיברים בקבוצה, דבר אשר אפשרי עבור קבוצות סופיות $\{a_1 \ldots a_n\}$ (כמובן שמספר האיברים בקבוצה זו הוא n), בתחילת הקורס הגדרנו את העוצמה הסופית של קבוצה סופית להיות מספר האיברים בה, אך עבור קבוצות אינסופיות נתקלנו בבעיה, כיצד נדע האם שתי קבוצות אינסופיות בעלות מספר שווה של איברים? מה הדבר אומר עבור קבוצה אינסופית בכלל? לכן מתמטיקאים מצאו הגדרה נוספת לסימון הגודל, עוצמה $|A|$, כדי לבדוק האם שתי קבוצות באותו הגודל במקום לחשב את מספר האיברים בכל אחת נרצה לתאם לכל איבר מהקבוצה הראשונה איבר מתאים מהקבוצה השנייה בצורה יחידנית (כלומר פונקציה הופכית!), נראה זאת בהגדרות הבאות ונשתכנע כי הדבר מסתכרן עם האינטואיציה שלנו על עוצמות סופיות. שימו לב, לא תינתן בחלק זה הגדרה פורמלית עבור עוצמה.

הגדרה 6.1 (יחסי עוצמות)**.** יהיו A, B קבוצות אזי

- עוצמות שוות: נסמן $|A|=|B|$ ונאמר כי העוצמה של A ושל B שווה אם קיימת $f:A\to B$ הפיכה.
- עוצמה קטנה שווה: נסמן $|A|\le|B|$ ונאמר כי העוצמה של A קטנה שווה מהעוצמה של B אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע.

הערה 6.1. ההגדרות עבור $\neq,\geq,<,>$ נובעות ישירות כמו עבור מספרים.

דוגמה 6.1. נראה את הקשרים בין קבוצות מוכרות לנו
- נשים לב כי $|\mathbb{N}|=|\mathbb{N}_{\text{even}}|$ משום שהפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_{\text{even}}$ המוגדרת $f=\lambda n\in\mathbb{N}.2n$ הינה הפיכה, באותה מידה גם $|\mathbb{N}_{\text{odd}}|=|\mathbb{N}_{\text{even}}|$. (מצאו את הפונקציה ההפיכה המתאימה)
- תהא A קבוצה מתקיים $|A|\le|\mathcal{P}(A)|$, נשים לב כי הפונקציה $f:A\to\mathcal{P}(A)$ המוגדרת $f=\lambda a\in A.\{a\}$ הינה חח"ע.
- נשים לב כי $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|\le|\mathbb{N}|$, נגדיר $f:\mathbb{N}\to(\mathbb{N}\to\{0,1\})$ חח"ע כך

$$f=\lambda n\in\mathbb{N}.\lambda m\in\mathbb{N}.\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

טענה 6.1. עוצמה מקיימת את כל התכונות אשר היינו מצפים מ"שיוויון גדלים",
1. רפלקסיביות: תהא A קבוצה אזי $|A|=|A|$.
2. סימטריות: תהיינה A,B קבוצות המקיימות $|B|=|A|$ אזי $|A|=|B|$.
3. טרנזיטיביות: תהיינה A,B,C קבוצות המקיימות $|A|=|B|$ וכן $|B|=|C|$ אזי $|A|=|C|$.
4. תהיינה $A\subseteq B$ קבוצות אזי $|A|\le|B|$.
5. טרנזיטיביות: תהיינה A,B,C קבוצות המקיימות $|A|\le|B|$ וכן $|B|\le|C|$ אזי $|A|\le|C|$.
6. תהיינה A,B קבוצות המקיימות $|A|=|B|$ אזי $|A|\le|B|$.
7. תהיינה A,B,C קבוצות המקיימות $|A|<|B|$ וכן $|B|=|C|$ אזי $|A|<|C|$.

הוכחה. תהיינה A,B,C קבוצות,
1. נשים לב כי $\mathrm{Id}_A:A\to A$ חח"ע ועל.
2. מהיות $|A|=|B|$ קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל בפרט $f^{-1}:B\to A$ חח"ע ועל לכן $|B|=|A|$.
3. מהיות $(|A|=|B|)\wedge(|B|=|C|)$ קיימות $f:A\to B$, $g:B\to C$ חח"ע ועל, נשים לב כי ממשפט $g\circ f:A\to C$ חח"ע ועל ובפרט $|A|=|C|$.
4. נניח כי $A\subseteq B$ נשים לב כי $\mathrm{Id}_A:A\to B$ חח"ע ועל ולכן $|A|\le|B|$.
5. מהיות $(|A|\le|B|)\wedge(|B|\le|C|)$ קיימות $f:A\to B$, $g:B\to C$ חח"ע, נשים לב כי ממשפט $g\circ f:A\to C$ חח"ע ובפרט $|A|\le|C|$.
6. מהיות $|A|=|B|$ קיימת $f:A\to B$ חח"ע ועל בפרט f חח"ע ולכן $|A|\le|B|$.
7. נניח בשלילה כי $|A|=|C|$ אזי קיימת $f:A\to C$ חח"ע ועל כמו כן מהיות $|B|=|C|$ קיימת $g:C\to B$ חח"ע ועל ולכן $g\circ f:A\to B$ חח"ע ועל כלומר $|A|=|B|$ סתירה לעובדה כי $|A|<|B|$, כמו כן מהיות $|A|<|B|$ ובפרט $|A|\le|B|$ קיימת $h:A\to B$ חח"ע וכן מהיות $|B|=|C|$ קיימת $d:B\to C$

חח"ע ועל אזי $d \circ h : A \to C$ חח"ע ולכן $|A| \le |C|$, לכן מתקיים $(|A| \le |C|) \wedge (|A| \ne |C|)$ כלומר $|A| < |C|$.

■

הערה 6.2 (עוצמה כיחס שקילות). ודאי שמתם לב כי תכונות $1, 2, 3$ מהטענה מלעיל שקולה להגדרת יחס שקילות, אז מדוע עוצמה אינה יחס שקילות? מכיוון שעוצמה מוגדרת על פני "קבוצת כל הקבוצות" אשר איננה מוגדרת ולכן איננה יחס על קבוצה בפרט גם לא יחס שקילות.

משפט 6.1. תהיינה A, B קבוצות אזי $(|A| \le |B|) \Longleftrightarrow$(קיימת $f : B \to A$ על). (אקסיומת בחירה)

הוכחה. ... ■

דוגמה 6.2. מתקיים $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| \le |\mathbb{Q}|$, נגדיר $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Q}$ כך

$$f = \lambda \langle n, m \rangle \in \mathbb{Z}. \begin{cases} \frac{n}{m} & m \ne 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כמובן על פי הגדרת $\mathbb{Q}$ נקבל כי f על ובפרט על פי משפט מלעיל הטענה מתקיימת.

6.1 קנטור שרדר ברנשטיין

נשים לב לשקילות הקיימת עבור קבוצות סופיות (ומספרים), אם $(n \le m) \wedge (m \le n)$ אזי $n = m$, אך האם הדבר עדיין תקף עבור קבוצות אינסופיות? האם הוא תקף עבור עוצמה? מטרת משפט קנטור שרדר ברנשטיין הוא להראות זאת בדיוק.

תרגיל 6.1. נשאיר שני תרגילים לקורא על מנת להשלים את ההוכחה של המשפט הבא. תהיינה A, B, C, D קבוצות עבורן A, C זרות וכן B, D זרות, תהיינה $f : A \to B$ וכן $g : C \to D$,

1. נניח כי f, g חח"ע אזי $f \uplus g$ חח"ע.
2. נניח כי f, g על אזי $f \uplus g$ על.

משפט 6.2 (קנטור שרדר ברנשטיין (קש"ב)). תהיינה A, B קבוצות המקיימות $|A| \le |B|$ וכן $|B| \le |A|$ אזי $|A| = |B|$.

הוכחה. תהיינה A, B קבוצות המקיימות $|A| \le |B|$ וכן $|B| \le |A|$ אזי תהיינה $f : A \to B$ חח"ע וכן $g : B \to A$ חח"ע, נסמן לכל $n \in \mathbb{N}_+$

$$B_0 = B \qquad A_0 = A$$

$$B_{n+1} = f[A_n] \qquad A_{n+1} = A \backslash g[B \backslash B_{n+1}]$$

... (ויזואלי כמו על הלוח), כמו כן נשים לב כי מתקיים $A_1 \subseteq A_0$ מהגדרת A_n, נניח עבור $n \in \mathbb{N}_+$ כי $A_n \subseteq A_{n-1}$ אזי

$$\begin{aligned} A_n \subseteq A_{n-1} &\Longrightarrow f\left[A_n\right] \subseteq f\left[A_{n-1}\right] \Longrightarrow B \backslash B_n \subseteq B \backslash B_{n+1} \\ &\Longrightarrow g\left[B \backslash B_n\right] \subseteq g\left[B \backslash B_{n+1}\right] \Longrightarrow A \backslash g\left[B \backslash B_{n+1}\right] \subseteq A \backslash g\left[B \backslash B_n\right] \\ &\Longrightarrow A_{n+1} \subseteq A_n \end{aligned}$$

ולכן יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי

$$B_{n+1} = f\left[A_n\right] \subseteq f\left[A_{n-1}\right] = B_n$$

נסמן

$$B_\omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \qquad A_\omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

אזי נשים לב כי

הפונקציה $f_{\restriction A_\omega} : A_\omega \to B_\omega$ היא חח"ע ועל,

- מוגדרת היטב, תהא $a \in A_\omega$ מהגדרת A_ω לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a \in A_n$ לכן $f\left(a\right) \in f\left[A_n\right]$ לכל $n \in \mathbb{N}$ כלומר $a \in B_\omega$.
- חח"ע, יהיו $a_1, a_2 \in A_\omega$ נניח כי $f_{\restriction A_\omega}\left(a_1\right) = f_{\restriction A_\omega}\left(a_2\right)$ אזי מהגדרת צמצום $f\left(a_1\right) = f\left(a_2\right)$ ומהגדרת f היא חח"ע ולכן $a_1 = a_2$.
- על, יהי $b \in B_\omega$ אזי מהגדרת B_ω מתקיים $b \in B_n$ לכל $n \in \mathbb{N}_+$ כלומר $b \in f\left[A_{n-1}\right]$ בפרט לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A_n$ עבורו $f\left(a_n\right) = b$ מהיות f חח"ע קיים $a \in A$ עבורו $a_n = a$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נשים לב כי $f\left(a\right) = b$ כמו כן $a \in A_\omega$ מכיוון והוא מקיים $a \in A_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ בפרט $f_{\restriction A_\omega}\left(a\right) = b$.

הפונקציה $g_{\restriction B \backslash B_\omega} : B \backslash B_\omega \to A \backslash A_\omega$ היא חח"ע ועל,

- מוגדרת היטב, תהא $b \in B \backslash B_\omega$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $b \notin B_{n+1}$ אזי $g\left(b\right) \in g\left[B \backslash B_{n+1}\right]$ ולכן $A_{n+1} \notin b$ בפרט $b \notin A_\omega$ כלומר $b \in A \backslash A_\omega$.
- חח"ע, יהיו $b_1, b_2 \in B \backslash B_\omega$ נניח כי $g_{\restriction B \backslash B_\omega}\left(b_1\right) = g_{\restriction B \backslash B_\omega}\left(b_2\right)$ אזי מהגדרת צמצום $g\left(b_1\right) = g\left(b_2\right)$ ומהגדרת g היא חח"ע ולכן $b_1 = b_2$.
- על, יהי $a \in A \backslash A_\omega$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $a \notin A_{n+1}$ בפרט $a \in g\left[B \backslash B_{n+1}\right]$ ולכן קיים $b \in B \backslash B_{n+1}$ עבורו $g\left(b\right) = a$ כמו כן מתקיים $b \in B \backslash B_\omega$.

כעת נגדיר $h : A \to B$ חח"ע ועל בתור $h = f_{\restriction A_\omega} \uplus \left(g_{\restriction B \backslash B_\omega}\right)^{-1}$ ובכתיב לאמבדא

$$h = \lambda a \in A. \begin{cases} f\left(a\right) & a \in A_\omega \\ g^{-1}\left(a\right) & a \notin A_\omega \end{cases}$$

כעת מהתרגיל מלעיל נובע כי h חח"ע ועל, כלומר $|A| = |B|$. ■

דוגמה 6.3 (שימוש במשפט קש"ב). נראה כי $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$,

- נגדיר $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ כך $f = \lambda n \in \mathbb{N}. \langle n, 0 \rangle$ כמובן כי f חח"ע ולכן $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$.

- נגדיר $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך $g=\lambda\langle n,m\rangle\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}.2^n3^m$, מתקיים כי g חח"ע ולכן $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\le|\mathbb{N}|$. (עבור הוכחה לחח"ע של g קראו עוד על המשפט היסודי של האריתמטיקה בפרק השונות)

מסקנה 6.1. תהיינה A,B,C קבוצות עבורן $(|A|\le|B|<|C|)\vee(|A|<|B|\le|C|)$ אזי $|A|<|C|$.

הוכחה. ... ■

6.2 אי תלות בבחירת נציגים

טענה 6.2. תהיינה A_1,A_2,B_1,B_2 קבוצות כך שמתקיים $|A_2|=|A_1|\wedge|B_2|=|B_1|$ אזי

1. $|A_1\times B_1|=|A_2\times B_2|$.
2. $|\mathcal{P}(A_1)|=|\mathcal{P}(A_2)|$.
3. $\left|A_1^{B_1}\right|=\left|A_2^{B_2}\right|$.
4. נניח כי A_1,B_1 זרות וכן A_2,B_2 זרות אזי $|A_1\uplus B_1|=|A_2\uplus B_2|$.

הוכחה. תהיינה A_1,A_2,B_1,B_2 קבוצות המקיימות $|A_2|=|A_1|\wedge|B_2|=|B_1|$ נשים לב כי מהגדרת שיוויון עוצמות קיימת $f:A_1\to A_2$ חח"ע ועל וכן $g:B_1\to B_2$ חח"ע ועל,

1. נגדיר פונקציה $h:A_1\times B_1\to A_2\times B_2$ כך

$$h=\lambda\langle a,b\rangle\in A_1\times B_1.\,\langle f(a),g(b)\rangle$$

נראה כי h הפיכה ולכן $|A_1\times B_1|=|A_2\times B_2|$,

- h חח"ע, יהיו $\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\in A_1\times B_1$ עבורן $h(a,b)=h(c,d)$ כלומר מהגדרת פונקציית למדא יתקיים

$$\langle f(a),g(b)\rangle=h(a,b)=h(c,d)=\langle f(c),g(d)\rangle$$

אזי מתכונת זוג סדור יתקיים $(f(a)=f(c))\wedge(g(b)=g(d))$, כעת מהגדרת f,g כחח"ע נקבל כי $(a=c)\wedge(b=d)$ ולכן $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$.

- h על, יהי $\langle a,b\rangle\in A_2\times B_2$ מהיות f,g חח"ע ועל נקבל כי f^{-1},g^{-1} פונקציות ולכן $f^{-1}(a),g^{-1}(b)$ מוגדרים היטב בפרט נשים לב כי

$$h\left(f^{-1}(a),g^{-1}(b)\right)=\left\langle f\left(f^{-1}(a)\right),g\left(g^{-1}(b)\right)\right\rangle=\langle a,b\rangle$$

2. נגדיר פונקציה $h:\mathcal{P}(A_1)\to\mathcal{P}(A_2)$ כך

$$h=\lambda S\in\mathcal{P}(A_1).\,\{f(a)\mid a\in S\}$$

נראה כי h הפיכה ולכן $|\mathcal{P}(A_1)|=|\mathcal{P}(A_2)|$,

- h חח"ע, תהיינה $S,R\in\mathcal{P}(A_1)$ עבורן $h(S)=h(R)$ אזי מהגדרת h

$$\{f(x)\mid x\in S\}=h(S)=h(R)=\{f(x)\mid x\in R\}$$

נניח בשלילה כי $S \neq R$ אזי קיים $a \in S\triangle R$ בה"כ $a \in S$ אזי יתקיים $f(a) \in \{f(x) \mid x \in S\}$ מעיקרון ההחלפה ולכן $f(a) \in \{f(x) \mid x \in R\}$ בפרט קיים $b \in R$ עבורו $f(a) = f(b)$ אך f חח"ע ולכן $a = b$ כלומר $a \in R$ סתירה להיות $(a \in S) \wedge (a \in S\triangle R)$, אזי $S = R$.

- h על, תהא $A \in \mathcal{P}(A_2)$ מהיות f חח"ע ועל נקבל כי f^{-1} פונקציה בפרט

$$h\left(\left\{f^{-1}(a) \mid a \in A\right\}\right) = \left\{f(a) \mid a \in \left\{f^{-1}(a) \mid a \in A\right\}\right\}$$

מוגדרת היטב, כעת יהי

$$x \in \left\{f(a) \mid a \in \left\{f^{-1}(a) \mid a \in A\right\}\right\}$$

מעיקרון ההחלפה נקבל כי

$$\exists b \in \left\{f^{-1}(a) \mid a \in A\right\}.f(b) = x$$

נסמנו b אזי $\left(b \in \{f^{-1}(a) \mid a \in A\}\right) \wedge (f(b) = x)$ ושוב מעיקרון ההחלפה

$$\exists c \in A.f^{-1}(c) = b$$

נסמנו c אזי $(c \in A) \wedge (f^{-1}(c) = b)$ לכן נציב ונקבל

$$x = f(b) = f\left(f^{-1}(c)\right) = c$$

כלומר $x \in A$. יהי $y \in A$ אזי $f^{-1}(y) \in \{f^{-1}(a) \mid a \in A\}$ ולכן

$$y = f\left(f^{-1}(y)\right) \in \left\{f(a) \mid a \in \left\{f^{-1}(a) \mid a \in A\right\}\right\} = h\left(\left\{f^{-1}(a) \mid a \in A\right\}\right)$$

אזי קיבלנו כי

$$\left(h\left(\left\{f^{-1}(a) \mid a \in A\right\}\right) \subseteq A\right) \wedge \left(A \subseteq h\left(\left\{f^{-1}(a) \mid a \in A\right\}\right)\right)$$

ולכן $A = h\left(\{f^{-1}(a) \mid a \in A\}\right)$ כנדרש.

3. נגדיר פונקציה $h : A_1^{B_1} \to A_2^{B_2}$ כך

$$h = \lambda G \in A_1^{B_1}.f \circ G \circ g^{-1}$$

נראה דיאגרמה המתארת את הפונקציה h גרפית

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] & A_2 \\ {} \arrow[r, "h"] & {} \\ B_1 \arrow[uu, "G"] \arrow[r, "g"'] & B_2 \arrow[uu, bend right, "f\circ G\circ g^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

כעת נראה כי h הפיכה ולכן $\left|A_1^{B_1}\right| = \left|A_2^{B_2}\right|$,

- h חח"ע, יהיו $G,F\in A_1^{B_1}$ עבורן $h\left(G\right)=h\left(F\right)$ אזי

$$f\circ G\circ g^{-1}=h\left(G\right)=h\left(F\right)=f\circ F\circ g^{-1}$$

יהי $a\in B_1$, משיוויון פונקציות וכן כי

$$\text{Dom}\left(f\circ G\circ g^{-1}\right)=B_2=\text{Dom}\left(f\circ F\circ g^{-1}\right)$$

נקבל כי

$$\forall b\in B_2.\left(f\circ G\circ g^{-1}\right)\left(b\right)=\left(f\circ F\circ g^{-1}\right)\left(b\right)$$

בפרט ממשפט שראינו נקבל כי

$$f\left(G\left(a\right)\right)=\left(f\circ G\circ g^{-1}\right)\left(g\left(a\right)\right)=\left(f\circ F\circ g^{-1}\right)\left(g\left(a\right)\right)=f\left(F\left(a\right)\right)$$

אזי מחח"ע של f נקבל כי $F\left(a\right)=G\left(a\right)$, כמו כן מתקיים $\text{Dom}\left(F\right)=\text{Dom}\left(G\right)$ ולכן משיוויון פונקציות $F=G$.

- h על, יהי $F\in A_2^{B_2}$ נגדיר $G=f^{-1}\circ F\circ g$ נשים לב כי $G:B_1\to A_1$ ולכן $h\left(G\right)$ מוגדרת היטב ובפרט מאסוציאטיביות הרכבה נקבל

$$h\left(G\right)=f\circ G\circ g^{-1}=f\circ\left(f^{-1}\circ F\circ g\right)\circ g^{-1}=F$$

4. נניח כי A_1,B_1 זרות וכן A_2,B_2 זרות, נגדיר פונקציה $h:A_1\uplus B_1\to A_2\uplus B_2$ כך

$$h=\lambda x\in A_1\uplus B_1.\begin{cases} f\left(x\right) & x\in A_1\\ g\left(x\right) & x\in B_1\end{cases}$$

נראה כי h הפיכה ולכן $\left|A_1\uplus B_1\right|=\left|A_2\uplus B_2\right|$,

- h חח"ע, יהיו $x,y\in A_1\uplus B_1$ עבורם $h\left(x\right)=h\left(y\right)$, נניח בשלילה כי x,y מקבוצות שונות בה"כ

אזי $(x \in A_1) \wedge (y \in B_1)$ יתקיים

$$B_2 \ni g(y) = h(y) = h(x) = f(x) \in B_1$$

סתירה לזרות B_1, B_2, בפרט x, y מאותה קבוצה בה"כ $x, y \in A_1$ אזי

$$f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$$

ומהיות f חח"ע נקבל כי $x = y$.

- h על, תהא $x \in A_2 \uplus B_2$ בה"כ $x \in A_2$, נשים לב כי

$$h\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

■

דוגמה 6.4. נשים לב כי מתקיים

- $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$, נשים לב כי $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ מכיוון והפונקציה $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ המוגדרת

$$f = \lambda n \in \mathbb{Z}. \begin{cases} 2n & n \geq 0 \\ 2|n| - 1 & \text{else} \end{cases}$$

הינה הפיכה (ודאו זאת) ולכן על פי משפט קודם מתקיים הדרוש.

- $|\mathcal{P}(\mathbb{N}_{\text{even}})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, כפי שכבר הודגם מתקיים $|\mathbb{N}_{\text{even}}| = |\mathbb{N}|$ ולכן מתקיים הדרוש.
- $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$, מתקיים $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}|$ וכן $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ ולכן הדרוש נובע.

טענה 6.3. תהיינה A_1, A_2, B קבוצות עבורן $|A_2| \leq |A_1|$ אזי

1. $|A_1 \times B| \leq |A_2 \times B|$.
2. $|\mathcal{P}(A_1)| \leq |\mathcal{P}(A_2)|$.
3. $\left|A_1^B\right| \leq \left|A_2^B\right|$.
4. $\left|B^{A_1}\right| \leq \left|B^{A_2}\right|$.

הוכחה. ... ■

6.3 עוצמות סופיות

הגדרה 6.2. נסמן $[0] = \varnothing$ וכן $[n] = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$.

הגדרה 6.3 (קבוצה סופית)**.** קבוצה A הינה קבוצה סופית אם $\exists n \in \mathbb{N}. |A| = |[n]|$.

הערה 6.3. באותה מידה קבוצה אינסופית הינה קבוצה אשר אינה סופית.

דוגמה 6.5. ...

טענה 6.4. תהא A קבוצה סופית המקיימת $|A|=|[n]|$ עבור $n\in\mathbb{N}$ אזי
1. יהי $b\notin A$ אזי $|A\uplus\{b\}|=|[n+1]|$.
2. יהי $a\in A$ אזי $|A\backslash\{a\}|=|[n-1]|$.

הוכחה. ... ■

טענה 6.5. מתקיים
1. יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ אזי $(|[m]|<|[n]|)\Longrightarrow(m<n)$.
2. תהא X קבוצה סופית ותהא $Y\subseteq X$ אזי Y קבוצה סופית.
3. תהא X קבוצה סופית ותהא $Y\subsetneq X$ אזי $|Y|<|X|$.

הוכחה. ... ■

מסקנה 6.2. מתקיים
1. תהא A קבוצה סופית אזי $\exists!n\in\mathbb{N}.\,|A|=|[n]|$.
2. תהא $X\subsetneq[n]$ אזי $|X|<|[n]|$.
3. תהיינה X,Y קבוצות סופיות באשר $|X|=|Y|$ ותהא $f:X\to Y$ אזי (f חח"ע)$\Longleftrightarrow$(f על).

הוכחה. ... ■

הגדרה 6.4. יהי $n\in\mathbb{N}$ נסמן $n=|[n]|$, תהא A קבוצה סופית המקיימת $|A|=|[n]|$ נסמן $|A|=n$.

דוגמה 6.6. ...

מסקנה 6.3. תהיינה A,B קבוצות סופיות באשר $|A|=n$ וכן $|B|=m$
1. $n\le_{\mathbb{N}}m\Longleftrightarrow|A|\le|B|$.
2. $n=_{\mathbb{N}}m\Longleftrightarrow|A|=|B|$.
3. $n<_{\mathbb{N}}m\Longleftrightarrow|A|<|B|$.

הוכחה. ... ■

הערה 6.4. בעקבות שתי המסקנות וההגדרה הקודמת נוכל לסמן $|A|<m$ וכן $|A|\le m$ וכדומה בדיוק כמו האי־שיוונים הרגילים עבור $\mathbb{N}$.

6.4 קבוצות בנות מנייה

הגדרה 6.5 (קבוצה בת מנייה)**.** קבוצה A המקיימת $|A|=|\mathbb{N}|$, נסמן $|A|=\aleph_0$.

דוגמה 6.7. הקבוצות $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{N}^2$ וכדומה הן בנות מנייה, נסמן לדוגמה $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

משפט 6.3. מתקיים

1. תהא A סופית אזי $|A| < \aleph_0$.
2. תהא A אינסופית אזי $\aleph_0 \le |A|$. (אקסיומת בחירה)
3. תהא A קבוצה אזי (A אינסופית)$\Longleftrightarrow (\exists B \subsetneq A. |A| = |B|)$. (אקסיומת בחירה)

הוכחה. ... ■

מסקנה 6.4. $\aleph_0$ היא העוצמה האינסופית המינימלית. (אקסיומת בחירה)

הוכחה. ... ■

משפט 6.4 (איחוד לכל היותר בן־מנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה הוא לכל היותר בן מנייה)**.** תהא $\mathcal{A}$ המקיימת $|\mathcal{A}| \le \aleph_0$ וכן $\forall X \in \mathcal{A}. |X| \le \aleph_0$ אזי $|\bigcup \mathcal{A}| \le \aleph_0$. (אקסיומת בחירה)

הוכחה. תהא $\mathcal{A}$ המקיימת $|\mathcal{A}| \le \aleph_0$ וכן $\forall X \in \mathcal{A}. |X| \le \aleph_0$, מהיות $|\mathcal{A}| \le \aleph_0$ קיימת $f : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ חח"ע אזי נגדיר פונקציה $C : \bigcup \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ כך

$$C = \lambda a \in \bigcup \mathcal{A}. \min \{f(X) \mid (X \in \mathcal{A}) \wedge (a \in X)\}$$

כמו כן לכל $X \in A$ קיימת $g_X : X \to \mathbb{N}$ חח"ע, אזי נגדיר פונקציה $h : \bigcup \mathcal{A} \to \mathbb{N}^2$ כך

$$h = \lambda a \in \bigcup \mathcal{A}. \left\langle C(a), g_{(f^{-1} \circ C)(a)}(a) \right\rangle$$

נשים לב כי אם h חח"ע אזי $|\bigcup \mathcal{A}| \le |\mathbb{N}^2| = \aleph_0$,

- h חח"ע, יהיו $a, b \in \bigcup \mathcal{A}$ עבורן $h(a) = h(b)$ מהגדרת h מתקיים

$$\left\langle C(a), g_{(f^{-1} \circ C)(a)}(a) \right\rangle = \left\langle C(b), g_{(f^{-1} \circ C)(b)}(b) \right\rangle$$

אזי מתכונת זוג סדור יתקיים

$$(C(a) = C(b)) \wedge \left(g_{(f^{-1} \circ C)(a)}(a) = g_{(f^{-1} \circ C)(b)}(b)\right)$$

בפרט נקבל כי

$$g_{f^{-1}(C(b))}(a) = g_{f^{-1}(C(a))}(a) = g_{f^{-1}(C(b))}(b)$$

ולכן מחח"ע של g_X נקבל כי $a = b$.

■

דוגמה 6.8. יהי $n \in \mathbb{N}_+$ נראה כי $|\mathbb{N}^n| = \aleph_0$, נוכיח באינדוקציה על n, עבור $n = 1$ ברור, נניח נכונות עבור $n - 1$ נשים לב כי

- נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ כך $f = \lambda m \in \mathbb{N}. \langle m, 0, \ldots, 0 \rangle$ נשים לב כי זוהי פונקציה חח"ע ולכן $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{N}^n|$, כלומר $\aleph_0 \le |\mathbb{N}^n|$.

- נגדיר $I=\mathbb{N}$ וכן $A_i=\{i\}\times\mathbb{N}^{n-1}$ לכל $i\in I$ נשים לב כי $|I|\leq\aleph_0$ וכן $|A_i|=|\mathbb{N}^{n-1}|=\aleph_0$ בפרט $|A_i|\leq\aleph_0$ אזי ממשפט איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה מתקיים

$$|\mathbb{N}^n|=\left|\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\left(\{i\}\times\mathbb{N}^{n-1}\right)\right|=\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|\leq\aleph_0$$

ודאו כי אתם מבינים את המעברים והוכיחו במידת הצורך את המעבר השמאלי.

אזי קיבלנו כי $(|\mathbb{N}^n|\leq\aleph_0)\wedge(\aleph_0\leq|\mathbb{N}^n|)$ וממשפט קש"ב נקבל כי $|\mathbb{N}^n|=\aleph_0$ כנדרש.

6.5 אינסופיים בגדלים שונים

6.5.1 שיטת הלכסון

שיטת הלכסון הינה השיטה בה קנטור השתמש על מנת להוכיח כי קיים יותר מאינסוף יחיד, עד כה כל הקבוצות שנתקלנו בהן היו מעוצמה $\aleph_0$. קנטור הוכיח כי $|\mathbb{N}|<|(0,1)|$ בעזרת שינוי האלכסון של טבלת מספרים, בצורה הבאה

הערה 6.5. שימו לב כי זוהי אינה הוכחה פורמלית של הטענה, וכזאת תינתן בהמשך. נניח כי קיימת פונקציה חח"ע ועל $F:\mathbb{N}\to(0,1)$ אזי ניתן למספר את כל המספרים בין 0 ל־1, נניח כי זוהי רשימת המספרים

0	0.1234561498...
1	0.7165159819...
2	0.1879741981...
3	0.9491000000...
4	0.4198419818...
5	0.7777777777...
6	0.1235896857...
7	0.8888888888...
8	0.3141592653...
9	0.2718281828...
$\vdots$	$\vdots$

אזי נגדיר מספר חדש על ידי הוספת 1 לכל מספר על האלכסון כך

0	$0.1234561498\ldots$
1	$0.7165159819\ldots$
2	$0.1879741981\ldots$
3	$0.9491000000\ldots$
4	$0.4198419818\ldots$
5	$0.7777777777\ldots$
6	$0.1235896857\ldots$
7	$0.9288878869\ldots$
8	$0.3141592653\ldots$
9	$0.2718281828\ldots$
$\vdots$	$\vdots$
	$0.2282587969\ldots$

מספר זה בהכרח אינו בתמונה של F מכיוון והוא שונה מכל מספר בטבלה בלכל הפחות מקום אחד (הוא שונה מהמספר ה־n בטבלה במקום ה־n) בפרט F לא על סתירה, ולכן $|\mathbb{N}| < |(0,1)|$.

משפט 6.5 (האלכסון של קנטור)**.** $|\mathbb{N}| < \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$.

הוכחה. נגדיר $p : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ חח"ע (ודאו זאת) כך

$$p = \lambda n \in \mathbb{N}.\lambda m \in \mathbb{N}.\begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

לכן $\left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right| \le |\mathbb{N}|$, נניח בשלילה כי $|\mathbb{N}| = \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$ אזי קיימת פונקציה חח"ע ועל $F : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ כך

$$f = \lambda n \in \mathbb{N}.1 - F(n)(n)$$

מכיוון שהפונקציה F על קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $F(n) = f$ אך אז משיוויון פונקציות

$$F(n)(n) = f(n) = 1 - F(n)(n)$$

בפרט $F(n)(n) = \frac{1}{2}$ סתירה להנחה כי $F : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, בפרט מתקיים $|\mathbb{N}| \ne \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$ ולכן $|\mathbb{N}| < \left|\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right|$. ■

דוגמה 6.9. ...

6.5.2 עוצמת קבוצת החזקה

הגדרה 6.6. תהא A קבוצה אזי $2^{|A|} = \left|\{0,1\}^{A}\right|$.

הגדרה 6.7 (פונקציית האינדיקטור)**.** תהא A קבוצה נגדיר

$$\mathbb{1} = \lambda B \in \mathcal{P}\left(A\right).\lambda a \in A.\begin{cases}1 & a \in B\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

ונסמן בעזרת $\mathbb{1}_B^A$ את פונקציית האינדיקטור.

הערה 6.6. הסימון χ_B^A גם מוכר עבור פונקציית האינדיקטור, כלומר $\chi_B^A = \mathbb{1}_B^A$.

משפט 6.6. תהא A קבוצה אזי $|\mathcal{P}\left(A\right)| = 2^{|A|}$.

הוכחה. ... ■

משפט 6.7 (קנטור)**.** תהא A קבוצה אזי $|A| < |\mathcal{P}\left(A\right)|$.

הוכחה. ... ■

דוגמה 6.10. ...

מסקנה 6.5. תהא A קבוצה אזי$|A| < 2^{|A|}$.

הוכחה. ... ■

מסקנה 6.6. לא קיימת עוצמה גדולה ביותר.

הוכחה. ... ■

6.6 עוצמת הרצף

הגדרה 6.8 (עוצמת הרצף)**.** נגדיר $\aleph = |\mathbb{R}|$.

הערה 6.7. הסימון $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$ הינו הסימון המקובל יותר, אך אנו נשתמש בסימון $\aleph$ מכיוון ואנחנו דוברי עברית ולא באמת בגלל סיבה מוצדקת אחרת.

משפט 6.8. $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

הוכחה. ... ■

מסקנה 6.7. יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $|\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$.

הוכחה. ... ■

משפט 6.9. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ באשר $a < b$ אזי

$$|(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = |[a,b]| = \aleph$$

הוכחה. ... ■

דוגמה 6.11. ...

6.6.1 השערת הרצף

השערת הרצף (CH) הייתה בעבר השערה לגבי אי־קיומם של אינסופיים שונים בין $\aleph_0, \aleph$, פורמלית השערת הרצף הינה הטענה

$$\forall A. \left(|A| \le \aleph_0\right) \vee \left(\aleph \le |A|\right)$$

וכמובן באופן שקול

$$\neg\left(\exists A. \aleph_0 < |A| < \aleph\right)$$

טענה 6.6. אי אפשר להוכיח את CH וכן אי אפשר להוכיח את $\neg$CH במערכת האקסיומות ZFC.

כלומר הטענה CH לא ניתנת להוכחה או להפרכה, זוהי הטענה הראשונה אשר הצליחו להוכיח כי היא אינה ניתנת להוכחה וכן להפרכה ובעצם נמצאת בשלב ביניים אשר לא ניתן לפתירה.

הערה 6.8. בקורס אנו לא מניחים את השערת הרצף וגם לא מניחים את שלילת השארת הרצף.

הערה 6.9. נשים לב כי בכדי להוכיח כי $|A| = \aleph$ עבור איזשהי קבוצה A לא מספיק לדעת כי $\aleph \le |A|$ וכן $\aleph_0 \le |A|$ עקב השערת הרצף, אלא יש לדעת בוודאות כי $\aleph \ge |A|$ וכן $\aleph \le |A|$.

6.7 חשבון עוצמות

הגדרה 6.9 (חשבון עוצמות)**.** תהיינה A, B קבוצות אזי

- חיבור: $|A| + |B| = |A \times \{0\} \uplus B \times \{1\}|$.
- כפל: $|A| \cdot |B| = |A \times B|$.
- חזקה: $|A|^{|B|} = \left|A^B\right|$.

הערה 6.10. חיסור וחילוק של עוצמות אינו מוגדר עבור עוצמות כלליות ולכן השימוש בהן אסור.

דוגמה 6.12. ...

משפט 6.10. תהיינה κ, α, β עוצמות

1. חילופיות: $\kappa + \alpha = \alpha + \kappa$, $\kappa \cdot \alpha = \alpha \cdot \kappa$.
2. אסוציאטיביות: $\kappa + \alpha = \alpha + \kappa$, $\kappa \cdot \alpha = \alpha \cdot \kappa$.
3. חוק הפילוג: $\kappa \cdot (\alpha + \beta) = \kappa \cdot \alpha + \kappa \cdot \beta$.
4. איבר ניטרלי ומאפס: $\kappa + 0 = \kappa$, $\kappa \cdot 0 = 0$, $\kappa \cdot 1 = \kappa$, $\kappa^1 = \kappa$.

הוכחה. ... ■

דוגמה 6.13. ...

טענה 6.7. יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא A קבוצה אזי

1. $n \cdot |A| = \left|\biguplus_{i=1}^{n} A \times \{i\}\right|$.
2. $|A|^n = |A^n|$.

הוכחה. יהי $n\in\mathbb{N}_+$ ותהא A קבוצה

1. מתקיים $n=|\{1\ldots n\}|$ אזי מהגדרת כפל, מהטענה הקודמת ואי תלות בנציגים יתקיים $n\cdot|A|=|A\times\{1\ldots n\}|$, כמו כן מטענה שראינו

$$A\times\{1\ldots n\}=\biguplus_{i\in\{1\ldots n\}}A\times\{i\}=\biguplus_{i=1}^{n}A\times\{i\}$$

ולכן $|\biguplus_{i=1}^{n}A\times\{i\}|=n\cdot|A|$.

2. כאמור מתקיים $n=|\{1\ldots n\}|$ אזי מהגדרת חזקה ואי תלות בנציגים נקבל כי

$$|A|^n=|A|^{|\{1\ldots n\}|}=\left|A^{\{1\ldots n\}}\right|$$

לכן נגדיר $F:A^n\to A^{\{1\ldots n\}}$ כך

$$F=\lambda\langle a_1\ldots a_n\rangle\in A^n.\left(\lambda i\in\{1\ldots n\}.a_i\right)$$

נשים לב כי

- F חח"ע, תהיינה $\langle a_1\ldots a_n\rangle,\langle b_1\ldots b_n\rangle\in A^n$ עבורן $F(a_1\ldots a_n)=F(b_1\ldots b_n)$ אזי מהגדרת F מתקיים

$$\left(\lambda i\in\{1\ldots n\}.a_i\right)=\left(\lambda i\in\{1\ldots n\}.b_i\right)$$

בפרט מהגדרת שיוויון פונקציות וכן כי התחום של הפונקציות מלעיל זהה נקבל כי

$$\forall j\in\{1\ldots n\}.\left(\lambda i\in\{1\ldots n\}.a_i\right)(j)=\left(\lambda i\in\{1\ldots n\}.b_i\right)(j)$$

ומהגדרת יחס וכתיב לאמבדא נקבל כי

$$\forall j\in\{1\ldots n\}.a_j=b_j$$

וזהו התנאי לשיוויון זוגות סדורים, בפרט $\langle a_1\ldots a_n\rangle=\langle b_1\ldots b_n\rangle$.

- F על, תהא $f\in A^{\{1\ldots n\}}$ נשים לב כי מהגדרת F יתקיים

$$F\left(f(1)\ldots f(n)\right)=\lambda i\in\{1\ldots n\}.f(i)$$

כעת נשים לב כי מהגדרת הפונקציות

$$\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}\left(F\left(f(1)\ldots f(n)\right)\right)$$

כמו כן יהי $j\in\{1\ldots n\}$ אזי $F\left(f(1)\ldots f(n)\right)(j)=f(j)$ מהגדרת F, בפרט מהגדרת שיוויון

פונקציות יתקיים $f=F\left(f\left(1\right)\dots f\left(n\right)\right)$ כנדרש.

בפרט קיבלנו כי

$$|A|^n=|A|^{|\{1\dots n\}|}=|\{1\dots n\}\to A|=|A^n|$$

■

משפט 6.11 (מונוטוניות)**.** תהיינה $\kappa,\alpha,\beta,\delta$ עוצמות באשר $(\kappa\le\alpha)\wedge(\beta\le\delta)$ אזי

1. $\kappa+\beta\le\alpha+\delta$.
2. $\kappa\cdot\beta\le\alpha\cdot\delta$.
3. $\kappa^\beta\le\alpha^\beta$.
4. $\kappa^\beta\le\kappa^\delta$.

הוכחה. ... ■

דוגמה 6.14. ...

משפט 6.12 (חשבון בין $\aleph_0,\aleph$)**.** מתקיים

1. $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$, $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.
2. $\aleph=\aleph\cdot\aleph$, $\aleph=\aleph+\aleph$.
3. $\aleph=\aleph_0\cdot\aleph$, $\aleph=\aleph_0+\aleph$.

הוכחה. ... ■

משפט 6.13 (חוקי חזקות)**.** תהיינה κ,α,β עוצמות אזי

1. $(\kappa^\alpha)^\beta=\kappa^{\alpha\cdot\beta}$.
2. $(\kappa\cdot\alpha)^\beta=\kappa^\beta\cdot\alpha^\beta$.
3. $\kappa^{\alpha+\beta}=\kappa^\alpha\cdot\kappa^\beta$.

הוכחה. ... ■

דוגמה 6.15. ...

משפט 6.14. תהא κ עוצמה אינסופית אזי $\kappa+\aleph_0=\kappa$. (אקסיומת בחירה)

הוכחה. תהא κ עוצמה אינסופית, ממשפט המונוטוניות מתקיים $\kappa\le\kappa+\aleph_0$ כמו כן תהא A קבוצה עבורה $|A|=\kappa$... ■

מסקנה 6.8. תהא κ עוצמה אינסופית ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\kappa+n=\kappa$.

הוכחה. תהא κ עוצמה אינסופית ויהי $n\in\mathbb{N}$ נשים לב כי ממונוטוניות מתקיים

$$\kappa=\kappa+0\le\kappa+n\le\kappa+\aleph_0=\kappa$$

וממשפט קש"ב נקבל $\kappa+n=\kappa$. ■

דוגמה 6.16. ...

7 יחסי סדר

7.0.1 יחס סדר חלש

הגדרה 7.1 (יחס אנטי סימטרי חלש)**.** יחס R מעל A המקיים $\forall a,b\in A.\left(aRb\wedge bRa\right)\Longrightarrow\left(a=b\right)$.

הגדרה 7.2 (יחס סדר חלש)**.** יחס R מעל A רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי חלש.

דוגמה 7.1. היחס $\leq_{\mathbb{N}}$ הינו יחס אנטי סימטרי חלש, היחסים $\subseteq,=$ על קבוצה קונקרטית הינם יחסים אנטי סימטריים חלשים.

הגדרה 7.3 (יחס השליטה בכל מקום)**.** נגדיר יחס $\leq$ מעל $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך $f\leq g\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}.f\left(n\right)\leq g\left(n\right)$.

תרגיל 7.1. היחס $\leq$ מעל $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ הינו יחס סדר חלש.

7.0.2 יחס סדר חזק

הגדרה 7.4 (יחס אנטי סימטרי חזק)**.** יחס R מעל A המקיים $\forall a,b\in A.\left(aRb\right)\Longrightarrow\left(\neg bRa\right)$.

הגדרה 7.5 (יחס סדר חזק)**.** יחס R מעל A טרנזיטיבי ואנטי סימטרי חזק.

דוגמה 7.2. היחס $<_{\mathbb{N}}$ הינו יחס אנטי סימטרי חלש.

הגדרה 7.6 (יחס אנטי רפלקסיבי)**.** יחס R מעל A המקיים $\forall a\in A.\neg aRa$.

טענה 7.1. יהי R יחס מעל A אזי (R אנטי סימטרי חזק)$\Longleftrightarrow$(R אנטי סימטרי חלש)$\wedge$(R אנטי רפלקסיבי).

הוכחה. ... ■

דוגמה 7.3. ...

מסקנה 7.1. יהי R יחס סדר חזק מעל A אזי $R\cup\mathrm{Id}_{A}$ יחס סדר חלש.

הוכחה. ... ■

מסקנה 7.2. יהי R יחס סדר חלש מעל A אזי $R\backslash\mathrm{Id}_{A}$ יחס סדר חזק.

הוכחה. ... ■

הערה 7.1. בעקבות המסקנות והטענות הקודמות, מקובל לסמן יחס סדר חלש בעזרת $\preceq,\leqslant,\leq$ וכדומה בעוד יחס סדר חזק בעזרת $\prec,\subset,<$, כלומר יחס סדר חזק יהיה ללא סימן שיוויון מתחתיו מהיותו אנטי רפלקסיבי.

הגדרה 7.7 (יחס השליטה כמעט בכל מקום)**.** נגדיר יחס $<^{*}$ מעל $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך $f<^{*}g\Longleftrightarrow\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.f\left(n\right)<g\left(n\right)$.

תרגיל 7.2. היחס $<^{*}$ מעל $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ הינו יחס סדר חזק.

הגדרה 7.8 (יחס לקסיקוגרפי)**.** נגדיר יחס $<_{\text{lex}}$ מעל $\mathbb{N}^{2}$ כך $\left\langle n,m\right\rangle <_{\text{lex}}\left\langle k,\ell\right\rangle \Longleftrightarrow\left(\left(n<k\right)\vee\left(n=k\wedge m<\ell\right)\right)$.

טענה 7.2. היחס $<_{\text{lex}}$ הינו יחס סדר חזק.

הוכחה. ... ■

7.0.3 יחס קווי

הגדרה 7.9 (איברים ברי השוואה)**.** יהי R יחס סדר מעל A שני איברים $x,y \in A$ יקראו ברי השוואה אם $(xRy) \vee (yRx) \vee (x=y)$.

הגדרה 7.10 (יחס קווי/טוטאלי/לינארי)**.** יחס R מעל A נקרא קווי אם $\forall a,b \in A. (aRb) \vee (bRa) \vee (a=b)$. כלומר אם כל שני איברים ברי השוואה על ידי R.

דוגמה 7.4. ...

תרגיל 7.3. היחס $<_{\text{lex}}$ הינו יחס קווי.

7.1 נקודות קיצון

7.1.1 איבר מקסימום, מינימום, מקסימלי ומינימלי

הגדרה 7.11 (איבר מקסימלי)**.** יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, איבר $x \in X$ יקרא איבר מקסימלי של X אם $\forall y \in X. (y=x) \vee \neg(xRy)$.

הגדרה 7.12 (איבר מינימלי)**.** יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, איבר $x \in X$ יקרא איבר מינימלי של X אם $\forall y \in X. (y=x) \vee \neg(yRx)$.

דוגמה 7.5. ... אי יחידות האיבר

הגדרה 7.13 (מקסימום)**.** יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, איבר $x \in X$ יקרא מקסימום של X אם $\forall y \in X. (yRx) \vee (x=y)$, במקרה כזה נסמן $\max_R(X)=x$.

הערה 7.2. בסימון $\max_R(X)=x$ אנו מניחים את יחידות המקסימום, אותה נראה עוד מעט.

הגדרה 7.14 (מינימום)**.** יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, איבר $x \in X$ יקרא מינימום של X אם $\forall y \in X. (xRy) \vee (x=y)$, במקרה כזה נסמן $\min_R(X)=x$.

טענה 7.3. יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, יהי $x \in X$ איבר מקסימום אזי x האיבר המקסימלי היחיד בהתאמה.

הוכחה. ... ■

תרגיל 7.4. יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, יהי $x \in X$ איבר מינימום אזי x האיבר המינימלי היחיד בהתאמה.

דוגמה 7.6. ...

טענה 7.4. יהי R יחס סדר קווי מעל A ותהא $X \subseteq A$, יהי $x \in X$ אזי (x מקסימום)$\Longleftrightarrow$(x מקסימלי).

הוכחה. ... ■

תרגיל 7.5. יהי R יחס סדר קווי מעל A ותהא $X \subseteq A$, יהי $x \in X$ אזי (x מינימום)$\Longleftrightarrow$(x מינימלי).

7.1.2 חסם מלעיל ומלרע, סופרמום ואינפימום

הגדרה 7.15 (חסם עליון/מלעיל). יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, איבר $x \in A$ יקרא חסם מלעיל של X אם $\forall y \in X. (y = x) \vee (yRx)$, נסמן את קבוצת החסמים מלעיל בעזרת $\overline{B}_X$.

הגדרה 7.16 (חסם תחתון/מלרע). יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, איבר $x \in A$ יקרא חסם מלרע של X אם $\forall y \in X. (xRy) \vee (y = x)$, נסמן את קבוצת החסמים מלרע בעזרת $\underline{B}_X$.

דוגמה 7.7. ...

הגדרה 7.17 (סופרמום). יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, אזי המינימום של קבוצת החסמים מלעיל של X, כלומר $\sup_R (X) = \min_R \left(\overline{B}_X\right)$.

הגדרה 7.18 (אינפימום). יהי R יחס סדר מעל A ותהא $X \subseteq A$, אזי המקסימום של קבוצת החסמים מלרע של X, כלומר $\inf_R (X) = \max_R (\underline{B}_X)$.

דוגמה 7.8. ...

תרגיל 7.6. תהא $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ אזי קיימים $\sup_{\subseteq}(X), \inf_{\subseteq}(X)$.

7.2 איזומורפיזם של יחסי סדר

הגדרה 7.19 (פונקציה שומרת סדר). יהי R יחס סדר מעל A ויהי S יחס סדר מעל B, פונקציה שומרת סדר הינה פונקציה $f : A \to B$ המקיימת $\forall a, b \in A. (aRb) \iff (f(a) S f(b))$.

דוגמה 7.9. ...

הגדרה 7.20 (איזומורפיזם של יחסי סדר). יהי R יחס סדר מעל A ויהי S יחס סדר מעל B, איזומורפיזם הינו פונקציה $f : A \to B$ אשר שומרת סדר חח"ע ועל. במקרה של קיום איזומורפיזם בין $\langle A, R\rangle$ וכן $\langle B, S\rangle$ נסמן $\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle$ ונגיד כי היחסים הם איזומורפיים.

דוגמה 7.10. ...

טענה 7.5 (הרכבת איזומורפיזמים הוא איזומורפיזם). יהי R יחס סדר מעל A יהי S יחס סדר מעל B ויהי T יחס סדר מעל C, יהי $f : A \to B$ איזומורפיזם ויהי $g : B \to C$ איזומורפיזם אזי $g \circ f$ איזומורפיזם.

הוכחה. ... ■

טענה 7.6 (ההופכי של איזומורפיזם הוא איזומורפיזם). יהי R יחס סדר מעל A ויהי S יחס סדר מעל B, יהי $f : A \to B$ איזומורפיזם אזי $f^{-1} : B \to A$ איזומורפיזם.

הוכחה. ... ■

7.3 יחס סדר טוב

נרצה להכליל את מונח האינדוקציה והרקורסיה מעבר לקבוצת הטבעיים, לכן נדרוש יחס על קבוצות הדומה ליחס $\leq_{\mathbb{N}}$, בהוכחה של משפט האינדוקציה הנקודה המרכזית הייתה המינימליות של איבר בקבוצה S לכן ההגדרה הבאה,

הגדרה 7.21 (יחס סדר טוב). יחס סדר חזק וקווי R מעל A יקרא יחס סדר טוב אם לכל $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ קיים מינימום ביחס ליחס R.

הערה 7.3. ראה הטבעיים כיחס סדר טוב.

דוגמה 7.11. ...

הערה 7.4 (הגדרת יחס סדר טוב על קבוצות בנות מנייה). תהא A קבוצה בת מנייה, מהיותה בת מנייה קיימת $f : \mathbb{N} \to A$ הפיכה לכן נגדיר $\prec$ יחס מעל A כך

$$a \prec b \Longleftrightarrow f^{-1}(a) <_{\mathbb{N}} f^{-1}(b)$$

ודאו כי זהו סדר טוב ובטאו את המינימום של $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ בעזרת f.

7.3.1 אינדוקציה טרנספיניטית

משפט 7.1 (אינדוקציה טרנספיניטית). יהי R יחס סדר טוב מעל A ויהי $P(x)$ פרידיקט אזי $(P(\min_R(A)) \wedge (\forall a, b \in A. (P(a) \wedge aRb) \Longrightarrow P(b))) \Longrightarrow (\forall a \in A. P(a))$.

הוכחה. ... ■

דוגמה 7.12. ...

8 אקסיומת הבחירה

למערכת האקסיומות בה אנו משתמשים קוראים ZFC, צרמלו־פרנקל־בחירה, שני השמות הראשונים הינם שני אנשים בעוד המילה השלישית היא בחירה אשר מתייחסת להכללת אקסיומת הבחירה במערכת האקסיומות (לעומת ZFC קיימת מערכת ZF אשר אינה משתמשת באקסיומת הבחירה). בחירה בכלליות היא היכולת לבחור איבר ללא חוקיות ואו שיטתיות מסויימת בבחירתו, לדוגמה יהי $x \in X$ הינה בחירה (למרות זאת היא אינה משתמשת באקסיומת הבחירה, נראה עוד מעט).

הגדרה 8.1 (אקסיומת הבחירה). תהא $\mathcal{A}$ קבוצה של קבוצות כך שמתקיים $\forall B \in \mathcal{A}. B \neq \varnothing$ אזי קיימת $F : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ המקיימת $\forall B \in \mathcal{A}. F(B) \in B$.

הערה 8.1. אקסיומת הבחירה נכנסת לפעולה **רק** כאשר הבחירה נעשית אינסוף פעמים, לדוגמה "יהי $x \in A$" איננה משתמשת באקסיומת הבחירה, לעומת זאת "יהיו $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{N}$" משתמשת באקסיומת הבחירה.

הערה 8.2. חזרו לכל הטענות אשר מסומנות בעזרת (אקסיומת בחירה) ונסו למצוא מתי השתמשנו באקסיומת הבחירה.

דוגמה 8.1 (שימוש באקסיומת הבחירה בהוכחת משפט)**.** במשפט איחוד לכל היותר בן־מנייה של קבוצות לכל היותר בנות מנייה הוא לכל היותר בן מנייה השתמשנו באקסיומת הבחירה באופן מוסתר, ...

הערה 8.3. קיימים טיעונים רבים בעד ונגד השימוש באקסיומת הבחירה, חלקם הם

בעד:
1. לא יהיה ניתן להוכיח כי אם A אינסופית אזי $\aleph_0 \leq |A|$.
2. לא יהיה ניתן להוכיח כי איחוד בן־מנייה של קבוצות בנות מנייה הוא בן־מנייה.
3. לא יהיה ניתן להוכיח כי כל שדה סדור מוכל בשדה סגור אלגברית.
4. לא לכל מרחב וקטורי אינסופי יהיה בסיס.

נגד:
1. אקסיומת הבחירה איננה עקרון טבעי, מאי יכולתינו הממשית לבחור אינסוף פעמים.
2. נובע כי קיים סדר טוב על $\mathbb{R}$.
3. נובע פרדוקס טרסקי־בנך.

8.0.1 עיקרון הסדר הטוב

הגדרה 8.2 (עיקרון הסדר הטוב)**.** עיקרון הסדר הטוב קובע כי לכל קבוצה A קיים יחס סדר טוב R מעל A. שימו לב כי איננו אומרים כי הינו נכון או לא רק מה העיקרון אומר.

דוגמה 8.2. ...

טענה 8.1. (עיקרון הסדר הטוב)$\Longleftrightarrow$(אקסיומת הבחירה). כלומר אם אנו מניחים אחד מהם השני נובע כנכון.

הוכחה. ... ■

8.0.2 הלמה של צורן

הגדרה 8.3 (שרשרת)**.** יהי R יחס סדר חזק מעל A, קבוצה $B \subseteq A$ תיקרא שרשרת אם כל $x, y \in B$ ברי השוואה.

דוגמה 8.3. ...

הגדרה 8.4 (הלמה של צורן)**.** תהא $\Sigma \neq \varnothing$ קבוצה ויהי S יחס סדר על Σ, נניח כי לכל שרשרת $X \subseteq \Sigma$ קיים חסם עליון אזי קיים איבר מקסימלי ב־Σ.

דוגמה 8.4. ...

טענה 8.2. (הלמה של צורן)$\Longleftrightarrow$(אקסיומת הבחירה). כלומר אם אנו מניחים אחד מהם השני נובע כנכון.

הוכחה. ... ■

8.0.3 עוצמה כיחס קווי

הערה 8.4. נזכיר כי פונקציה חלקית זהו יחס חד ערכי וחח"ע, ונסמן
$A \xrightarrow{\text{p}} B = \{f \subseteq A \times B \mid R \text{ פונקציה חלקית}\}$. (האות p עבור המילה partial)

למה 8.1. תהא $X \subseteq A \xrightarrow{\text{p}} B$ שרשרת ביחס ההכלה אזי $\bigcup X \in A \xrightarrow{\text{p}} B$.

הוכחה. תהיינה A, B קבוצות ותהא X שרשרת ביחס ההכלה, נסמן $\sigma = \bigcup X$ אזי
- צ"ל: σ חד ערכית, יהי $a \in A$ ויהיו $b_1, b_2 \in B$ עבורם $\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle \in \sigma$ מהגדרת σ קיימים $\alpha, \beta \in X$ עבורם

$$\langle a, b_1\rangle \in \alpha \qquad\qquad \langle a, b_2\rangle \in \beta$$

כעת מהיות X שרשרת מתקיים $(\alpha \subseteq \beta) \vee (\beta \subseteq \alpha)$ בה"כ $\beta \subseteq \alpha$ אזי $\langle a, b_1\rangle, \langle a, b_2\rangle \in \beta$ כמו כן $\beta \in A \xrightarrow{\text{p}} B$ ולכן β חד ערכית אזי $b_1 = b_2$.
- צ"ל: σ חח"ע, ...

■

מסקנה 8.1. תהיינה A, B קבוצות אזי $(|A| \le |B|) \vee (|A| \ge |B|)$.

הוכחה. תהיינה A, B קבוצות, נשים לב כי $\varnothing \in A \xrightarrow{\text{p}} B$ מהיותו יחס חד ערכי וחח"ע באופן ריק. כעת תהא $X \subseteq A \xrightarrow{\text{p}} B$ שרשרת ביחס ההכלה, נגדיר $\sigma = \bigcup X$ נשים לב כי $\sigma \in A \xrightarrow{\text{p}} B$ מהלמה מלעיל, יהי $f \in X$ אזי $f \subseteq \sigma$ מהגדרת σ בפרט σ חסם עליון של X. מהלמה של צורן נובע כי קיים איבר מקסימלי ביחס ההכלה ב־$A \xrightarrow{\text{p}} B$, נסמן $F = \max_{\subseteq}\left(A \xrightarrow{\text{p}} B\right)$ נשים לב כי מהגדרת $A \xrightarrow{\text{p}} B$ נקבל כי F חד ערכית וכן חח"ע, כעת נניח כי

$$(\text{Im}(F) \neq B) \wedge (\text{Dom}(F) \neq A)$$

אזי מכיוון ומתקיים

$$(\text{Im}(F) \subseteq B) \wedge (\text{Dom}(F) \subseteq A)$$

נקבל כי קיים $a \in A \backslash \text{Dom}(F)$ וכן $b \in B \backslash \text{Im}(F)$ כלומר $F \uplus \{\langle a, b\rangle\}$ יחס חד ערכי וחח"ע המקיים $F \subseteq F \uplus \{\langle a, b\rangle\}$ בסתירה למקסימליות F.
- נניח כי $\text{Dom}(F) = A$ אזי $F : A \to B$ חח"ע בפרט $|A| \le |B|$.
- נניח כי $\text{Im}(F) = B$ כלומר $F : \text{Dom}(F) \to B$ חח"ע ועל ובפרט הפיכה אזי $F^{-1} : B \to A$ חח"ע ולכן $|B| \le |A|$.

■

למה 8.2. תהא κ עוצמה אינסופית אזי $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

הוכחה. ... ■

דוגמה 8.5. ...

משפט 8.1. יהיו κ, λ עוצמות אינסופיות אזי $\lambda \cdot \kappa = \max(\lambda, \kappa) = \lambda + \kappa$.

הוכחה. נשתמש בחשבון עוצמות ונשאיר את ההסבר של כל מעבר לקורא, בה"כ $\kappa = \max(\lambda, \kappa)$

$$\kappa \leq \kappa + \lambda \leq \kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa \leq \kappa \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

ולכן נקבל מקש"ב כי $\lambda \cdot \kappa = \kappa = \lambda + \kappa$ ועל פי ההנחה $\lambda \cdot \kappa = \max(\lambda, \kappa) = \lambda + \kappa$. ■

דוגמה 8.6. ...

חלק III

קומבינטוריקה

קומבינטוריקה הינה הענף המתמטי אשר מתעסק בעוצמות סופיות ובקשרים ביניהן, בתורת הקבוצות נלמד כיצד לתאר קבוצה וכן על עוצמתה באופן כללי בעוד שבקומבינטוריקה ניצור כלים המיועדים לעבודה עם עוצמות סופיות בלבד. הענף עצמו קשור עד כדי התאמה להסתברות בדידה ומטרתו העיקרית הינה למספר אובייקטים ביקום המתמטי ולמצוא שיטות לנתח אותן.

1 קומבינטוריקה בסיסית

1.1 עקרונות ספירה

נרצה להשתמש באינטואיציה שיש לנו לגבי כיצד ספירה, סימטריה, חלוקה למקרים, מקרים משלימים פועלים בחיים האמיתיים גם במתמטיקה, לכן נפרמל את העקרונות הללו.

1.1.1 עקרון החיבור

משפט 1.1 (עיקרון החיבור)**.** תהיינה $A_1 \ldots A_n$ קבוצות סופיות וזרות בזוגות אזי $|\biguplus_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

הוכחה. עבור $n=1$ טריוויאלי, נניח עבור $n-1$ אזי מהגדרת חיבור

$$\left|\biguplus_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\left(\biguplus_{i=1}^{n-1} A_i\right) \uplus A_n\right| = \left|\biguplus_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} |A_i|\right) + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

■

טענה 1.1 (עיקרון המשלים). תהיינה A, B קבוצות סופיות באשר $A \subseteq B$ אזי $|A| + |B \backslash A| = |B|$.

הוכחה. תהיינה A, B קבוצות סופיות באשר $A \subseteq B$ נשים לב כי $A \uplus (B \backslash A) = B$ (ודאו זאת) ולכן מעיקרון החיבור

$$|A| + |B \backslash A| = |A \uplus (B \backslash A)| = |B|$$

■

הגדרה 1.1 (חיסור עוצמות סופיות)**.** תהיינה A, B קבוצות סופיות באשר $A \subseteq B$ אזי $|A| = |B| - |B \backslash A|$.

דוגמה 1.1. כמה מספרים טבעיים בין 1000 ל־9999 ישנם המתחלקים ב־5 וכן הספרה 5 מופיע בהם לפחות פעם אחת. נפרמל את הבעיה בצורה מתמטית

$$a = |\{n \in \mathbb{N} \cap [1000, 9999] \mid (5|n) \wedge (\text{מופיע } 5)\}|$$

כעת נשים לב כי מספר $n \in \mathbb{N} \cap [1000, 9999]$ ניתן לייצוג באופן חח"ע ועל על ידי הקבוצה $\{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2 \times \{0 \ldots 9\}$ ולכן השאלה המקורית שקולה לעוצמה של

$$a = \left|\left\{x \in \{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2 \times \{0, 5\} \mid (\text{מופיע } 5)\right\}\right|$$

אזי על פי עיקרון החיבור נפצל על פי הספרה האחרונה ונקבל כי מתקיים

$$a = \left|\{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2\right| + \left|\left\{x \in \{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2 \mid (\text{מופיע } 5)\right\}\right|$$

נסמן $b = \left|\left\{x \in \{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2 \mid (\text{מופיע } 5)\right\}\right|$ מתקיים $\left|\{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2\right| = 9 \cdot 10^2$, ומעיקרון המשלים נקבל

$$b = \left|\{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2\right| - \left|\left\{x \in \{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2 \mid (\text{לא מופיע } 5)\right\}\right|$$

נשים לב כי

$$\left|\left\{x \in \{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2 \mid (\text{לא מופיע } 5)\right\}\right| = \left|(\{1 \ldots 9\} \setminus \{5\}) \times (\{0 \ldots 9\} \setminus \{5\})^2\right|$$

ולכן נקבל כי

$$\left|\left\{x \in \{1 \ldots 9\} \times \{0 \ldots 9\}^2 \mid (\text{מופיע } 5)\right\}\right| = 9 \cdot 10^2 - 8 \cdot 9^2$$

סה"כ קיבלנו

$$a = 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^2 - 8 \cdot 9^2$$

1.1.2 עיקרון הכפל

משפט 1.2 (עיקרון הכפל)**.** תהיינה $A_1 \ldots A_n$ קבוצות סופיות וזרות בזוגות המקיימות $\forall i, j \in \{1 \ldots n\} . |A_i| = |A_j|$ אזי $\left|\biguplus_{i=1}^n A_i\right| = |A_1| \cdot n$.

הוכחה. תהיינה $A_1 \ldots A_n$ קבוצות סופיות וזרות בזוגות המקיימות $\forall i, j \in \{1 \ldots n\} . |A_i| = |A_j|$, נשים לב כי מההנחה נקבל בפרט שמתקיים $\forall i \in \{1 \ldots n\} . |A_1| = |A_i|$ ולכן מהגדרת שיוויון עוצמות קיימת פונקציה הפיכה $f_i : A_1 \to A_i$ לכל $i \in \{1 \ldots n\}$ אזי נגדיר פונקציה הפיכה $f_i' : A_1 \times \{i\} \to A_i$ לכל $i \in \{1 \ldots n\}$ כך

$$f_i' = \lambda \langle a, b \rangle \in A_1 \times \{i\} . f_i(a)$$

לכן קיבלנו כי $|A_1 \times \{i\}| = |A_i|$, כעת מהטענה הזאת מפרק תורת הקבוצות ומעיקרון החיבור נקבל כי מתקיים

$$n \cdot |A_1| = \left|\biguplus_{i=1}^n A_1 \times \{i\}\right| = \sum_{i=1}^n |A_1 \times \{i\}| = \sum_{i=1}^n |A_i| = \left|\biguplus_{i=1}^n A_i\right|$$

■

דוגמה 1.2. כמה מחרוזות יש באורך 2 מעל הא"ב $\{0,\ldots,9\}$ כאשר כל האיברים במחרוזת שונים זה מזה. נמדל את הבעיה לכדי עוצמה של קבוצה A כך

$$A=\left\{\langle a,b\rangle\in\{0,\ldots,9\}^2\mid a\neq b\right\}$$

כעת עבור $i\in\{0,\ldots,9\}$ נסמן

$$A_i=\{\langle a,b\rangle\in\{i\}\times\{0,\ldots,9\}\mid a\neq b\}$$

כלומר A_i אלה המחרוזות התקינות אשר מתחילות באיבר i, נשים לב כי לכל $i,j\in\{0,\ldots,9\}$ מתקיים $|A_i|=|A_j|$ (ודאו זאת) כמו כן הקבוצות A_i זרות (ודאו גם זאת), כעת נסמן עבור $i\in\{1,\ldots,9\}$ את הקבוצה

$$A_{0,i}=\{\langle a,b\rangle\in\{0\}\times\{i\}\mid a\neq b\}$$

אשר מסמלת את המחרוזות התקינות אשר מתחילות באיברים $0,i$, נשים לב כי לכל $i,j\in\{1,\ldots,9\}$ מתקיים $|A_{0,i}|=|A_{0,j}|$ (ודאו זאת), הקבוצות $A_{0,j}$ זרות (ודאו גם זאת), וכן $|A_{0,i}|=1$. סה"כ מעיקרון הכפל נקבל כי מתקיים

$$\begin{aligned}|A|&=\left|\biguplus_{i=0}^{9}A_i\right|=10\cdot|A_0|=10\cdot\left|\biguplus_{i=1}^{9}A_{0,i}\right|\\&=10\cdot9\cdot|A_{0,1}|=10\cdot9\cdot1=90\end{aligned}$$

הערה 1.1 (ניסוחים נוספים לעיקרון הכפל). קיימים שני ניסוחים נוספים וכלליים יותר לעיקרון הכפל

- יהי R יחס שקילות מעל A ויהי $x\in A$ נניח כי מתקיים $\forall y\in A.\,|[x]_R|=|[y]_R|$ אזי $|A|=|[x]_R|\cdot|A/R|$.
- תהא Π חלוקה של A ויהי $X\in\Pi$ נניח כי מתקיים $\forall Y\in\Pi.\,|X|=|Y|$ אזי $|A|=|X|\cdot|\Pi|$.

תרגיל 1.1. הוכח כי שלושת הניסוחים של עקרון הכפל שקולים.

הגדרה 1.2 (עיקרון החלוקה)**.** תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות סופיות וזרות בזוגות המקיימות $\forall i,j\in\{1\ldots n\}.\,|A_i|=|A_j|$ אזי $|A_1|=\frac{\left|\biguplus_{i=1}^{n}A_i\right|}{n}$.

הגדרה 1.3 (חילוק עוצמות סופיות)**.** תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות סופיות וזרות בזוגות המקיימות $\forall i,j\in\{1\ldots n\}.\,|A_i|=|A_j|$ אזי $n=\frac{\left|\biguplus_{i=1}^{n}A_i\right|}{|A_1|}$.

1.2 בעיות קומבינטוריות

בקומבינטוריקה לעומת תחומים מתמטיים רבים השאלות שנקבל יהיו כתובות בשפה לשונית ומטרתינו תהיה למצוא דרך מתמטית לייצג אותה וכן לפתור אותה.

דוגמה 1.3 (שאלה קומבינטורית)**.** "בכיתה קיימים n ילדים, מהו מספר הדרכים לסדרם בשורה?"

בעת פתירת בעיות קומבינטוריות נשאל עצמינו שתי שאלות מנחות, "האם ספרנו את כל האפשרויות?", "האם כל אפשרות נספרה בדיוק פעם אחת?". באופן כללי, קיימות שתי תכונות של בעיות קומבינטוריות, האם יש חשיבות לסדר והאם יש חזרה.

הגדרה 1.4 (חשיבות לסדר)**.** בעיה קומבינטורית נחשבת כבעלת חשיבות לסדר אם סידורים שונים של אותם אובייקטים נספרים כאפשרויות שונות.

הגדרה 1.5 (חזרות)**.** בעיה קומבינטורית נחשבת כבעלת חזרות ניתן להשתמש באותם אובייקטים מספר פעמים באותה השאלה.

על מנת לזכור מהן האפשרויות לשימוש נשתמש בטבלה בסיסית (אשר תכולותיה יוסברו בהמשך),

	ללא חזרות	עם חזרות
הסדר חשוב	$P(n,k)$	n^k
הסדר לא חשוב	$C(n,k)$	$S(n,k)$

הגדרה 1.6 (עצרת)**.** יהי $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $0!=1$ וכן $n!=(n-1)!\cdot n$. כלומר עצרת של n זוהי מכפלת כל המספרים הטבעיים (ללא אפס) הקטנים שווים ל־n.

דוגמה 1.4. תחילה נראה חישוב בפועל של עצרת,

$$\begin{aligned}5! =&5\cdot 4! = 5\cdot 4\cdot 3! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1!\\ =&5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 0! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 120\end{aligned}$$

אך הפיתוח הרקורסיבי הזה ארוך ובפועל פשוט נשתמש בעובדה כי $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ ללא פיתוח נוסף. מעבר לזאת נשים לב לתכונת הביטול של העצרת בחילוק, כלומר

$$\frac{n!}{k!}=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

תכונה זאת שימושית על מנת לכתוב בקצרה כפל של מספרים עוקבים, לדוגמה $10\cdot 9\cdot 8=\frac{10!}{7!}$.

הגדרה 1.7 (מעל א"ב)**.** הביטוי מעל א"ב מתאר לנו מהו עולם הדיון של השאלה.

דוגמה 1.5. לדוגמה בשאלה "כמה מחרוזות באורך 2 מעל א"ב $\{0\ldots 9\}$ יש" הכוונה היא מחרוזות באורך 2 כאשר האיברים החוקיים הם $0\ldots 9$.

1.2.1 עם חשיבות לסדר וללא חזרה - חליפות

הגדרה 1.8 (חליפות)**.** יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ נסמן $P(n,k)=|\{f\in\{1\ldots k\}\to\{1\ldots n\}\mid f \text{ חח"ע}\}|$.

משפט 1.3. יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ עבורם $k\le n$ אזי מתקיים $P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$.

הוכחה. יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ עבורם $k\le n$ אזי על פי עקרון הכפל מתקיים

$$\begin{aligned}
P(n,k) &= \left|\left\{f\in\{1\ldots k\}\to\{1\ldots n\}\mid \text{חח"ע } f\right\}\right| \\
&= \left|\biguplus_{i=1}^{n}\left\{f\in\{1\ldots k\}\to\{1\ldots n\}\mid (\text{חח"ע } f)\wedge(f(k)=i)\right\}\right| \\
&= n\cdot\left|\left\{f\in\{1\ldots k\}\to\{1\ldots n\}\mid (\text{חח"ע } f)\wedge(f(k)=n)\right\}\right| \\
&= n\cdot\left|\left\{f\in\{1\ldots k-1\}\to\{1\ldots n-1\}\mid \text{חח"ע } f\right\}\right| \\
&= n\cdot P(n-1,k-1)
\end{aligned}$$

ודאו מדוע המעברים נכונים על ידי מציאת פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות השונות, כעת נקבל כי

$$\begin{aligned}
P(n,k) &= n\cdot P(n-1,k-1) = n(n-1)\cdot P(n-2,k-2) \\
&= n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot P(n-k,k-k) \\
&= n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}$$

גם חלק זה עליכם לפרמל ולהוכיח בעזרת אינדוקציה. רמז: הוכיחו באינדוקציה על i כי

$$P(n,k) = n\cdot\ldots\cdot(n-i+1)\cdot P(n-i,k-1)$$

■

הגדרה 1.9 (תמורה/פרמוטציה)**.** תהא A קבוצה תמורה של A הינה $f:A\to A$ חח"ע ועל.

מסקנה 1.1. יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\left|\left\{f\in\{1\ldots n\}\to\{1\ldots n\}\mid \text{תמורה } f\right\}\right| = n!$.

הוכחה. יהי $n\in\mathbb{N}_+$, נשים לב כי מתקיים

$$\left\{f\in\{1\ldots n\}\to\{1\ldots n\}\mid \text{תמורה } f\right\} = \left\{f\in\{1\ldots n\}\to\{1\ldots n\}\mid \text{חח"ע } f\right\}$$

ולכן ממשפט מלעיל מתקיים

$$\left|\left\{f\in\{1\ldots n\}\to\{1\ldots n\}\mid \text{תמורה } f\right\}\right| = P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

■

הערה 1.2. מהמסקנה מלעיל נובעת הגדרה אלטרנטיבית לעצרת של מספר טבעי, כך ניתן להכליל את משמעות העצרת לכל קבוצה,

$$A! = \left|\left\{f\in A\to A\mid \text{תמורה } A\right\}\right|$$

תרגיל 1.2. תהיינה A,B קבוצות עבורן $|B|=|A|$ אזי $A!=B!$.

הערה 1.3. מכיוון ופעולת העצרת מוגדרת היטב, כלומר לא תלויה בבחירת הנציג לעוצמה, נוכל לסמן $\aleph_0!$ וכדומה כאשר הפירוש הוא $A!$ עבור $A=\aleph_0$.

טענה 1.2. $\aleph_0! = \aleph$.

הוכחה. נסמן במהלך ההוכחה $\mathcal{N}=\{f\in A\to A\mid \mathbb{N}\text{ תמורה}\}$. נשים לב כי ברור שמתקיים $|\mathcal{N}|\le\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|$ מכיוון ומתקיים $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. כמו כן לכל $A\subseteq\mathbb{N}$ נבחר ונסמן בעזרת $f_A:A\to A$ תמורה כלשהי של A המקיימת $\forall a\in A.F_A(a)\ne a$ (הצדיקו את הפעולה הזאת בעזרת אקסיומת הבחירה) כעת נגדיר פונקציה $F:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathcal{N}$ כך

$$F=\lambda A\in\mathcal{P}(\mathbb{N}).\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}f_A(n) & n\in A\\ n & \text{else}\end{cases}$$

- $\operatorname{Im}(F)\subseteq\mathcal{N}$, נראה כי הפונקציה אשר הגדרנו מוגדרת היטב, יהי $f\in\operatorname{Im}(F)$ אזי קיימת $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ עבורה $F(A)=f$, כלומר

$$f=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}f_A(n) & n\in A\\ n & \text{else}\end{cases}$$

  - f חח"ע, יהיו $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ עבורם $f(n_1)=f(n_2)$ נניח בשלילה כי $n_1\in A$ אך $n_2\notin A$ אזי $f(n_2)=n_2$ אך $f(n_1)=f_A(n_1)\in A$ מהגדרת f_A ולכן

$$n_2=f(n_2)=f(n_1)=f_A(n_1)\in A$$

    סתירה, באותה מידה גם לא יתכן כי $n_1\notin A$ וכן $n_2\in A$,
    * נניח כי $n_1,n_2\in A$ אזי מהגדרת תמורה ובפרט העובדה כי היא חח"ע נקבל כי

$$f_A(n_1)=f(n_1)=f(n_2)=f_A(n_2)$$

      גורר כי $n_1=n_2$.
    * נניח כי $n_1,n_2\notin A$ אזי מהגדרת f נקבל כי $n_1=f(n_1)=f(n_2)=n_2$.
  - f על, יהי $n\in\mathbb{N}$ אם $n\notin A$ אזי $f(n)=n$ כנדרש, אחרת אם $n\in A$ אזי מהגדרת תמורה ובפרט מהעובדה כי היא על נקבל כי קיים $a\in A$ עבורו $f_A(a)=n$ בפרט $f(a)=f_A(a)=n$.

  אזי קיבלנו כי f חח"ע ועל לכן $f\in\mathcal{N}$ כנדרש.
- F חח"ע, יהיו $A,B\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ עבורן $F(A)=F(B)$ אזי מהגדרת F יתקיים

$$\left(\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}f_A(n) & n\in A\\ n & \text{else}\end{cases}\right)=F(A)=F(B)=\left(\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}f_B(n) & n\in B\\ n & \text{else}\end{cases}\right)$$

יהי $a\in A$ משיוויון פונקציות וכן מהגדרת f_A יתקיים

$$\left(\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}f_B\left(n\right) & n\in B\\ n & \text{else}\end{cases}\right)\left(a\right)=\left(\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}f_A\left(n\right) & n\in A\\ n & \text{else}\end{cases}\right)\left(a\right)=f_A\left(a\right)\neq a$$

בפרט נניח כי $a\notin B$ אזי

$$\left(\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}f_B\left(n\right) & n\in B\\ n & \text{else}\end{cases}\right)\left(a\right)=a$$

בסתירה לעובדה כי האגף השמאלי שונה מ־a בפרט $a\in B$, כלומר $A\subseteq B$, מסימטריה בין A,B נסיק כי גם $B\subseteq A$ ולכן $A=B$.

בפרט הסקנו כי F פונקציה חח"ע ולכן $\left|\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\right|\leq\left|\mathcal{N}\right|$ אזי

$$\aleph=\left|\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\right|\leq\left|\mathcal{N}\right|=\aleph_0!\leq\left|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right|=\aleph$$

ולכן מקש"ב ומהתרגיל מלעיל נקבל $\aleph_0!=\aleph$.

■

הערה 1.4 (שימוש בחליפות). לחליפות מספר שימושים מרכזיים,

- **הגדרה חלופית**: מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים עם חשיבות לסדר וללא חזרה הינו $P\left(n,k\right)=\frac{n!}{(n-k)!}$.
- **סידור בשורה**: מספר האפשרויות לסדר n איברים בשורה הינה $P\left(n,n\right)=n!$. סידור בשורה הינה פרמוטציה של כל הילדים, נמספר את הילדים $1,\ldots,n$ כעת יש לבחור לכל ילד מקום בשורה, לילד הראשון יש n אפשרויות, לילד השני $n-1$ אפשרויות (כי הראשון תפס מקום) וכן הלאה, בסה"כ יש $n!=n\cdot\left(n-1\right)\cdot\ldots\cdot1$ סידורים בשורה.
- **סידור במעגל**: מספר האפשרויות לסדר n איברים במעגל הינה $\left(n-1\right)!$. סידור במעגל זהה לסידור בשורה אך כאשר "הזזה" של כל הילדים מספר קבוע של כיסאות לכיוון מסויים נספר כמה פעמים, לדוגמה הסידור $\langle1,2,3\rangle$ זהה לסידור $\langle3,1,2\rangle$ במעגל, מספר הפעמים שספרנו כל כפילות הינה n (כי כל כפילות נבדלת רק במי האיבר ה"ראשון" במעגל) ולכן מספר הסידורים במעגל הוא $\frac{P(n,n)}{n}$.
- **ביטול חשיבות לסדר**: מספר האפשרויות לסדר n אובייקטים בשורה כאשר יש n_1 איברים מסוג אחד, n_2 איברים מסוג שני, ..., n_ℓ איברים מסוג ℓ־לי, באשר $\sum_{i=1}^{\ell}n_i=n$ הוא $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_\ell!}$.
- **ילד שמן**: מספר האפשרויות לסדר n אובייקטים בשורה כאשר אובייקטים $i\neq j$ נמצאים זה ליד זה, נשים לב כי אם האובייקטים i,j אחד ליד השני בסידור ניתן לצוות אותם ולקרוא להם בשם משותף "ij" כך להוריד את מספר האיברים שאנו מסדרים ל־$n-1$, לכן כמות האפשורויות לסידור הינה $2\left(n-1\right)$ כאשר ההכפלה ב־2 זהו הסידור הפנימי של i,j.

דוגמה 1.6. כמה מחרוזות יש באורך 5 מעל א"ב $\left\{1,\ldots,100\right\}$ כך שכל התווים במחזורית שונים? נשים לב כי מחזורת באורך 5 בשאלה זו פורמלית היא פונקציה $\left\{1\ldots100\right\}^{\left\{1\ldots5\right\}}$ והעובדה כי כל התווים שונים גוררת כי

היא חח"ע בפרט הכמות שקולה לכמות

$$\begin{aligned}|\{f\in\{1\ldots5\}\to\{1\ldots100\}\mid \text{חח"ע } f\}| =& P\left(100,5\right)=\frac{100!}{(100-5)!}\\ =&100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot96\end{aligned}$$

1.2.2 עם חשיבות לסדר ועם חזרה

הגדרה 1.10 (חליפות עם חזרות)**.** יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי מספר החליפות עם חזרות הינו $n^{k}=|\{1\ldots k\}\to\{1\ldots n\}|$.

הערה 1.5 (שימוש בחליפות עם חזרות). לחליפות מספר שימושים מרכזיים,

- **הגדרה חלופית**: מספר האפשרויות לבחור k איברים מתוך n איברים עם חשיבות לסדר ועם חזרה הינו n^{k}. מכיוון ולכל איבר יש n אפשרויות בחירה ואנו בוחרים k איברים.
- **מחרוזות בעולם דיון**: מספר האפשרויות להרכיב מ־n תווים מחרוזת באורך k הוא n^{k}.
- **פונקציות**: כמות הפונקציות מקבוצה בגודל k לקבוצה בגודל n הוא n^{k}.
- **חלוקת כדורים לתאים**: מספר האפשרויות לחלק k כדורים שונים ל־n תאים שונים הוא n^{k}. כל אחד מתוך k הכדורים בוחר אחד מ־n התאים לשהות בו.

דוגמה 1.7. ...

1.2.3 ללא חשיבות לסדר וללא חזרה - צירופים

הגדרה 1.11. יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $\mathcal{P}_{k}\left(n\right)=\left\{X\in\mathcal{P}\left(\{1\ldots n\}\right)\mid |X|=k\right\}$.

הגדרה 1.12 (מקדם בינומי)**.** יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ עבורם $k\leq n$ נסמן $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

דוגמה 1.8. נשים לב כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

הגדרה 1.13 (צירופים)**.** יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ נסמן $C\left(n,k\right)=|\mathcal{P}_{k}\left(n\right)|$.

משפט 1.4. יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ עבורם $k\leq n$ אזי $C\left(n,k\right)=\binom{n}{k}$.

הוכחה. יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ עבורם $k\leq n$, נסמן

$$A=\{f\in\{1\ldots k\}\to\{1\ldots n\}\mid \text{חח"ע } f\}$$

יהי $X\in\mathcal{P}_{k}\left(n\right)$ נסמן $A_{X}=\{f\in A\mid \operatorname{Im}\left(f\right)=X\}$ מהיות $|X|=k$ נשים לב כי אם $\operatorname{Im}\left(f\right)=X$ אזי $f:\{1\ldots k\}\to X$ חח"ע ולכן גם על בפרט

$$|A_{X}|=|\{f\in\{1\ldots k\}\to X\mid \text{חח"ע ועל } f\}|=k!$$

כמו כן יתקיים A_X $A=\biguplus_{X\in\mathcal{P}_k(n)}$ מכיוון ומתקיים $\left|\operatorname{Im}(f)\right|=k$ לכל $f\in A$ מהיותה חח"ע ופונקציה אזי נקבל מעקרון הכפל כי

$$P(n,k)=|A|=\left|\biguplus_{X\in\mathcal{P}_k(n)}A_X\right|=\left|\mathcal{P}_k(n)\right|\cdot k!$$

ולכן

$$C(n,k)=\left|\mathcal{P}_k(n)\right|=\frac{P(n,k)}{k!}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

■

הערה 1.6 (שימוש בצירופים). לחליפות מספר שימושים מרכזיים,

- **הגדרה חלופית**: מספר האפשרויות לבחור k איברים ללא n איברים מתוך ללא חשיבות לסדר וללא חזרה הינו $C(n,k)=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. נשים לב כי זה שקול לבחירת k איברים מתוך n עם חשיבות לסדר וללא חזרה כלומר $P(n,k)$ ולאחר מכן חילוק בכל הספירה המיותרת הנובעת מהסידור הפנימי של k האיברים כלומר $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{P(n,k)}{k!}$.
- **תת קבוצה בגודל מסוים**: כמות תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה מגודל n הינה $C(n,k)=\binom{n}{k}$.
- **בחירת מקומות**: כמות המחרוזות באורך 9 עם בדיוק שלושה A שני B וארבעה C הינה $\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{4}$. כלומר בחירת 3 מקומות עבור A ולאחר מכן בחירת 4 מקומות עבור C.

דוגמה 1.9. ...

1.2.4 ללא חשיבות לסדר ועם חזרה - חלוקות

הגדרה 1.14 (חלוקות)**.** יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי מספר החלוקות הינו $S(n,k)=\binom{n+k-1}{k}$.

הגדרה 1.15 (מולטי קבוצה)**.** מולטי קבוצה הינו אובייקט שאין בו חשיבות לסדר ומותרת בו חזרה, זוהי קבוצה בעזרת חזרות.

הערה 1.7 (שימוש בחלוקות). לחליפות מספר שימושים מרכזיים,

- **הגדרה חלופית**: מספר האפשרויות לחלק k כדורים זהים ל־n תאים שונים הינו $S(n,k)$. כל חלוקה של כדורים לתאים ניתן לאפיין באופן חח"ע ועל בעזרת מחזורת בינארית (כלומר של $0,1$) המתארת את החלוקה בצורה הבאה

$$\lfloor OOO\rfloor\lfloor O\rfloor\lfloor\rfloor\lfloor OO\rfloor\lfloor OO\rfloor\lfloor\rfloor\to 0001011001001$$

כלומר כל כדור יהיה 0 במחזורת וכן כל חוצץ בין תאים יהווה 1, אורך המחרוזת הוא כמספר החוצצים ועוד מספר הכדורים $n+k-1$ וכן אנו בוחרים k מקומות במחזורת בהם יהיה 1 (מה שאנלוגי לבחירת תאים לכדורים) לכן הכמות הינה $\binom{n+k-1}{k}$.

- **כמות פתרונות למשוואה:** כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + \ldots + x_n = k$ (כאשר כל המשתנים ב־$\mathbb{N}$). נניח כי קיים לנו פתרון $\langle a_1 \ldots a_n \rangle$ ניצור ממנו חלוקה של k כדורים ל־n תאים כך

$$\left\lfloor \underbrace{O \ldots O}_{a_1} \right\rfloor \left\lfloor \underbrace{O \ldots O}_{a_2} \right\rfloor \ldots \left\lfloor \underbrace{O \ldots O}_{a_n} \right\rfloor$$

אנו יודעים כי $a_1 + \ldots + a_n = k$ ולכן מספר הכדורים הוא באמת k ולכן יש לבעיה $S(n,k)$ פתרונות, בפרט יש גם למשוואה $S(n,k)$ פתרונות.

- **מולטי קבוצה:** כמות המולטי קבוצות בגודל k מתוך האיברים $\{1 \ldots n\}$. בהינתן מולטי קבוצה A מגודל k של האיברים $\{1 \ldots n\}$ ניצור ממנה משוואה בצורה הבאה, נסמן בעזרת a_i את כמות הפעמים בה i מופיע במולטי קבוצה A, מהיות גודל A נקבל כי $a_1 + \ldots + a_n = k$ בפרט קיבלנו כי מספר מולטי הקבוצות הוא כמספר הפתרונות למשוואה כלומר $S(n,k)$.

דוגמה 1.10. ...

2 טכניקות קומבינטוריות

2.1 הוכחות קומבינטוריות

הוכחה קומבינטורית הינה שיטת הוכחה בה אנו משייכים לשני ביטויים מספריים את אותה הבעיה בשני אופנים שונים על ידי ספירה שונה, מהיות שני האגפים סופרים את אותה הכמות הם בהכרח שווים.

דוגמה 2.1 (הוכחה קומבינטורית)**.** נוכיח שתי טענות בעזרת הוכחות קומבינטוריות,

- יהי $n \in \mathbb{N}$ נוכיח כי $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, נשים לב כי אגף שמאל מתאר את כמות תתי הקבוצות של $\{1 \ldots n\}$, בצד ימין נשים לב כי $\binom{n}{k}$ מתאר את מספר תתי הקבוצות של $\{1 \ldots n\}$ מגודל k ולכן אם נוסיף את כמות תתי הקבוצות מכל גודל k נקבל את מספר כל תתי הקבוצות, כנדרש.
- יהי $n \in \mathbb{N}$ נוכיח כי $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, ...

טענה 2.1. יהיו $k,n \in \mathbb{N}$ עבורם $k \le n$ אזי $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

הוכחה. יהיו $n \in \mathbb{N}$ ילדים נבחר מתוכם $k \in \mathbb{N}$ ילדים, נשים לב כי מספר האפשרויות לבחירת הילדים הינה $\binom{n}{k}$, כמו כן נשים לב כי בעת בחירת k הילדים נשארו לנו $n-k$ ילדים אשר לא בחרנו, לכן באופן שקול יכלנו להחליט מי הם $n-k$ הילדים שלא יבחרו אזי $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. ■

משפט 2.1 (זהות פסקל)**.** יהיו $n,k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

הוכחה. ... קומבינטוריקה ■

הערה 2.1 (משולש פסקל). ...

טענה 2.2. יהיו $n,k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} \le \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

הוכחה. ... אלגברה ■

טענה 2.3. יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ באשר $k \geq 1$ אזי $k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} \cdot n$.

הוכחה. ... אלגברה ■

2.2 הבינום של ניוטון

הבינום של ניוטון הינו הקשר היסודי ביותר בין אלגברה לקומבינטוריקה, נראה בהמשך בפרק על פונקציות יוצרות כיצד הוא מאפשר לנו לספור, נשים לב כי

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ פעמים}}$$

כעת באגף ימין של המשוואה אנו נדרשים לפתוח סוגריים, מפתיחת סוגריים בבית הספר אנו יודעים כי נקבל איזשהו סכום של $a^j b^i$ כאשר i, j חזקות כלשהן ועם מקדם כלשהו,

דוגמה 2.2 (פתיחת סוגריים). נשים לב כי

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ובכתיבה פורמלית נקבל

$$1 \cdot a^3b^0 + 3 \cdot a^2b^1 + 3 \cdot a^1b^2 + 1 \cdot a^0b^3$$

כלומר כאמור פתיחת סוגריים היא סכום של איברים מהצורה $a^j b^i$ עם מקדמים כלשהם.

והשאלה המתבקשת היא מהיכן נובע המקדם של כל גורם $a^j b^i$ כזה, על מנת להבין זאת נשים לב כי בעת פתיחת הסוגריים קבלת a^j נובעת מבחירת ב־j סוגריים את a בפתיחה וכן i פעמים את b, מכך נובע כי $i + j = n$ וכן המקדם הוא כמות הדרכים לבחור j פעמים a מתוך n סוגריים, וזה אנו יודעים לחשב בתור $\binom{n}{j}$ ולכן זהו גם המקדם של $a^j b^i$,

דוגמה 2.3. בפיתוח מלעיל קיבלנו כי

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3b^0 + 3 \cdot a^2b^1 + 3 \cdot a^1b^2 + 1 \cdot a^0b^3$$

אך נשים לב כי זה גם שווה

$$(a+b)^3 = \binom{3}{3} a^3b^0 + \binom{3}{2} a^2b^1 + \binom{3}{1} a^1b^2 + \binom{3}{0} a^0b^3$$

מכך נסיק צורת כתיבה מקוצרת עבור פתיחת סוגריים,

משפט 2.2 (הבינום של ניוטון)**.** יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

הוכחה. בהסבר על המקור של הבינום ניתנה הוכחה קומבינטורית למשפט, בכל זאת אתן הוכחה אלגברית בעזרת אינדוקציה. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$(a+b)^0=1=\binom{n}{0}a^0b^{0-0}=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}$$

נניח עבור $n-1$ שהטענה נכונה, לכן

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)^{n-1}(a+b)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^kb^{n-1-k}\right)(a+b)\\
&=\left(a\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^kb^{n-1-k}\right)+\left(b\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^kb^{n-1-k}\right)\\
&=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{k+1}b^{n-1-k}\right)+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^kb^{n-k}\right)\\
&=\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}a^kb^{n-k}\right)+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^kb^{n-k}\right)\\
&=\left(\binom{n-1}{n-1}a^nb^{n-n}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}a^kb^{n-k}\right)+\left(\binom{n-1}{0}a^0b^{n-0}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^kb^{n-k}\right)\\
&=a^n+b^n+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}a^kb^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^kb^{n-k}\right)\\
&=a^n+b^n+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right)a^kb^{n-k}=a^n+b^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}
\end{aligned}$$

■

דוגמה 2.4. נראה מספר טענות בסיסיות, יהי $n\in\mathbb{N}$,

- נשים לב כי

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

- נשים לב כי

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\cdot((n-1)-(k-1))!} = \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}\end{aligned}$$

טענה 2.4. יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ עבורם $k\le\frac{n-1}{2}$ אזי $\binom{n}{2k+1}=\sum_{m=k+1}^{n}\binom{m-1}{k}\binom{n-m}{k}$.

הוכחה. ... קומבינטוריקה ■

הערה 2.2. נסמן בעזרת $\mathcal{P}_{\text{even}}(A),\mathcal{P}_{\text{odd}}(A)$ תתי קבוצות בעוצמה זוגית ואי זוגית בהתאמה, בכללי כאשר יש כיתוב מתחת ל־$\mathcal{P}$ נתכוון לקבוצות המקיימות זאת, וכיתוב זה יהיה אינטואיטיבי להבנה.

משפט 2.3. תהא $A\neq\varnothing$ קבוצה סופית אזי $|\mathcal{P}_{\text{even}}(A)|=|\mathcal{P}_{\text{odd}}(A)|$.

הוכחה. תהא $A\neq\varnothing$ קבוצה סופית ויהי $a\in A$ נגדיר פונקציה חח"ע ועל $f:\mathcal{P}_{\text{even}}(A)\to\mathcal{P}_{\text{odd}}(A)$ כך

$$f=\lambda S\in\mathcal{P}_{\text{even}}(A).\begin{cases}S\backslash\{a\} & a\in S\\ S\uplus\{a\} & a\notin S\end{cases}$$

- f חח"ע, יהיו $S_1,S_2\in\mathcal{P}_{\text{even}}(A)$ עבורן $f(S_1)=f(S_2)$,
  - אם $a\notin S_1\cup S_2$ או אם $a\in S_1\cap S_2$ נשאר לקורא להוכיח כי במקרים אלו $S_1=S_2$.
  - אם $a\in S_1\triangle S_2$, בה"כ $a\in S_1$ ולכן $a\notin S_2$ אזי

$$S_1\backslash\{a\}=f(S_1)=f(S_2)=S_2\uplus\{a\}$$

אך אז $a\in f(S_2)$ וכן $a\notin f(S_1)$ סתירה להגדרת שיוויון קבוצות.

- f על, תהא $S\in\mathcal{P}_{\text{odd}}(A)$ נשים לב כי

$$\begin{aligned}a\in S &\Longrightarrow & f(S\backslash\{a\})=(S\backslash\{a\})\uplus\{a\}=S\\ a\notin S &\Longrightarrow & f(S\uplus\{a\})=(S\uplus\{a\})\backslash\{a\}=S\end{aligned}$$

אזי מהגדרת שיוויון עוצמות קיבלנו כי $|\mathcal{P}_{\text{even}}(A)|=|\mathcal{P}_{\text{odd}}(A)|$. ■

מסקנה 2.1. תהא A קבוצה סופית אזי $|\mathcal{P}_{\text{even}}(A)|=2^{|A|-1}$.

הוכחה. תהא A קבוצה סופית אזי

$$\begin{aligned}2^{|A|} &= |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}_{\text{even}}(A) \uplus \mathcal{P}_{\text{odd}}(A)| = |\mathcal{P}_{\text{even}}(A)| + |\mathcal{P}_{\text{odd}}(A)| = 2\,|\mathcal{P}_{\text{even}}(A)| \\ &\implies |\mathcal{P}_{\text{even}}(A)| = 2^{|A|-1}\end{aligned}$$

■

2.2.1 נוסחאת המולטינום

הגדרה 2.1 (המקדם המולטינומי)**.** יהי $n \in \mathbb{N}$ יהי $\ell \in \mathbb{N}$ ויהיו $k_1 \ldots k_\ell \in \mathbb{N}$ עבורם $\sum_{i=1}^{\ell} k_i = n$ אזי

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_\ell} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{\ell}(k_i!)}$$

דוגמה 2.5. ...

משפט 2.4 (נוסחאת המולטינום)**.** יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $\ell \in \mathbb{N}$ אזי

$$\left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i\right)^n = \sum_{\substack{\langle k_1,\ldots,k_\ell\rangle \in \mathbb{N}^\ell \\ \sum_{i=1}^{\ell} k_i = n}} \left(\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} x_i^{k_\ell}\right)$$

הוכחה. ... ■

דוגמה 2.6. ...

תרגיל 2.1. יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $\ell \in \mathbb{N}$ אזי

$$\ell^n = \sum_{\substack{\langle k_1,\ldots,k_\ell\rangle \in \mathbb{N}^\ell \\ \sum_{i=1}^{\ell} k_i = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_\ell}$$

2.2.2 נוסחאת הבינום השלילי

הגדרה 2.2 (עצרת נופלת)**.** יהי $r \in \mathbb{R}$ ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי נסמן

$$r^{\underline{k}} = r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-k+1)$$

.

הערה 2.3. שימו לב כי לעומת עצרת ההגדרה מלעיל מוגדרת עבור הממשיים ולא הטבעיים.

הגדרה 2.3 (המקדם הבינומי המוכלל)**.** יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}$ ועבור $k = 0$ נגדיר $\binom{\alpha}{0} = 1$. נשים לב כי זוהי באמת הכללה של המקדם הבינומי, אם $\alpha \in \mathbb{N}$ אנו מקבלים את ההגדרה הסטנדרטית של מקדם בינומי עם עצרת.

משפט 2.5 (נוסחאת הבינום השלילי)**.** יהיו $x,y,\alpha\in\mathbb{R}$ אזי

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}y^{\alpha-k}$$

הוכחה. ... ∎

דוגמה 2.7. נשים לב כי

$$\sqrt{2}=(1+1)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\approx 1.41421$$

2.3 הכלה והדחה

הכלה והדחה זוהי נוסחה אשר בעזרתה ניתן לחשב עוצמה של חיתוך או איחוד על ידי השני מביניהם, שימו לב כי עיקרון זה נקרא גם עיקרון ההכלה וההדרה על ידי סופרים מסויימים.

טענה 2.5 (הכלה והדחה). תהיינה A,B קבוצות אזי $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

הוכחה. תהיינה A,B קבוצות סופיות

$$|A\cup B|=|A\uplus(B\backslash A)|=|A|+|B\backslash A|=|A|+|B\backslash(A\cap B)|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

∎

דוגמה 2.8. ...

הערה 2.4 (הכלה והדחה אינטואיטיבית). ...

משפט 2.6 (הכלה וההדחה)**.** תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות אזי

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|\right)$$

הוכחה. עבור $n=2$ הוכחנו מלעיל, נניח עבור $A_1 \dots A_{n-1}$ קבוצות סופיות, אזי ...

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + \left|A_n \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right| \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}_k(n-1)} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\right)\right) + \left|A_n \backslash \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right)\right| \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}_k(n-1)} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\right)\right) + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right| \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}_k(n-1)} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\right)\right) + |A_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right| \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}_k(n-1)} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\right)\right) + |A_n| - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}_k(n-1)} \left|\bigcap_{i \in I} (A_i \cap A_n)\right|\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}_k(n-1)} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\right)\right) + |A_n| - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{I \in \mathcal{P}_k(n-1)} \left|\bigcap_{i \in I \cup \{n\}} A_i\right|\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{P}_k(n) \\ n \notin I}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\right)\right) + |A_n| + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+2} \left(\sum_{\substack{I \in \mathcal{P}_k(n) \\ n \in I}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\right)
\end{aligned}$$

■

דוגמה 2.9. ...

מסקנה 2.2 (הכלה והדחה סימטרית)**.** תהיינה $A_1 \dots A_n$ קבוצות עבורן

$$\forall k \in \{1 \dots n\} . \forall I, J \in \mathcal{P}_k(n) . \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \left|\bigcap_{j \in J} A_J\right|$$

אזי

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right|$$

הוכחה. תהיינה $A_1 \dots A_n$ קבוצות סופיות ונניח כי

$$\forall k \in \{1 \dots n\} . \forall I, J \in \mathcal{P}_k(n) . \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \left|\bigcap_{j \in J} A_J\right|$$

ממשפט מלעיל מתקיים

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_k(n)}\left|\bigcap_{i\in\{1\dots k\}}A_i\right|\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\left|\mathcal{P}_k(n)\right|\cdot\left|\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right|\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\left|\bigcap_{i=1}^{k}A_i\right|\end{aligned}$$

■

דוגמה 2.10. ...

2.3.1 נקודות שבת

הגדרה 2.4 (נקודת שבת)**.** יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $f:\{1\dots n\}\to\{1\dots n\}$, נקרא לאיבר $a\in\{1\dots n\}$ נקודת שבת של f אם מתקיים עבורה $f(a)=a$.

דוגמה 2.11. ...

משפט 2.7. יהי $n\in\mathbb{N}$ כמות התמורות בקבוצה $\{1\dots n\}\to\{1\dots n\}$ ללא נקודת שבת הינה $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}$.

הוכחה. ... ■

הערה 2.5. מהמשפט מלעיל נובע כי כמות התמורות בקבוצה $\{1\dots n\}$ ללא נקודת שבת הוא בקירוב טוב $\frac{n!}{e}$, בפרט ההסתברות של תמורה אקראית להיות ללא נקודת שבת שואף ל-$\frac{1}{e}$.

2.4 שובך היונים

עיקרון שובך היונים הפשוט אומר כי, אם מחלקים n יונים לתוך $n+1$ שובכים אזי קיים שובך עם לפחות 2 יונים.

עיקרון שובך היונים המוכלל אומר כי, אם מחלקים m יונים לתוך n שובכים אז קיים שובך עם לכל הפחות $\lceil\frac{m}{n}\rceil$ יונים.

דוגמה 2.12. ...

דוגמה 2.13 (עיקרון שובך היונים הגאומטרי)**.** נניח כי בידינו μ פונקציית מידה (אינטואיטיבית פונקציה "מודדת שטח" של צורות, ונניח כי היא מקיימת את התכונות הטבעיות אשר היינו מצפים מפונקצייה אשר מודדת שטח של צורות) ותהיינה קבוצות $A_1\dots A_m\subseteq A\subseteq\mathbb{R}^2$ המקיימות $\mu(A)<\sum_{i=1}^{m}\mu(A_m)$ אזי קיימים $i\neq j$ עבורם $A_i\cap A_j\neq\varnothing$.

2.5 מספרי קטלן

הגדרה 2.5 (מספרי קטלן)**.** יהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את מספר קטלן ה־n כך $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

דוגמה 2.14. ...

טענה 2.6. יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.

הוכחה. יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי

$$\begin{aligned} C_n =& \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!} \\ =& \frac{(2n)!}{(n-1)! \cdot n!} \cdot \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{(2n)!}{(n-1)! \cdot n!} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ =& \frac{(2n)!}{(n-1)! \cdot n!} \cdot \frac{1}{n} - \frac{(2n)!}{(n-1)! \cdot n!} \cdot \frac{1}{n+1} \\ =& \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)! \cdot (n+1)!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \end{aligned}$$

■

2.5.1 הילוכי שריג

נניח כי אנו עומדים על הסריג $\mathbb{N}^2$ בנקודה $\langle 0,0 \rangle$ ואנו רוצים להגיע לנקודה $\langle n,n \rangle$ עבור $n \in \mathbb{N}$,

הערה 2.6 (הליכה על סריג). הליכה על הסריג $\mathbb{N}^2$ היא הפעולה של התקדמות צעד אחד ימינה או צעד אחד למעלה על הסריג, כאשר נדבר על הליכה על סריג זוהי תמיד ההליכה אלא אם כן צויין אחרת. לדוגמה ...

נשים לב כי כמות המסלולים אשר אנו יכולים לקחת בכדי להגיע לנקודה הרצויה הוא $\binom{2n}{n}$ זאת מכיוון ובכדי להגיע לנקודה אנו בוחרים n צעדים בהם אנו הולכים ימינה ובשאר הצעדים אנו הולכים למעלה. בין היתר נרצה למצוא את מספר המסלולים האפשריים תחת מגבלות על ההליכה,

הערה 2.7 (חצייה של ישר). בעת הליכה על הסריג נאמר כי המסלול חוצה את הישר $y = mx + b$ אם מסלול ההליכה עובר מלעיל לישר. לדוגמה ...

למה 2.1. מספר המסלולים להליכה על סריג מהנקודה $\langle 0,0 \rangle$ לנקודה $\langle n,n \rangle$ עם חצייה של הישר $y = x$ שווה למספר המסלולים להליכה על סריג מהנקודה $\langle 0,0 \rangle$ לנקודה $\langle n-1,n+1 \rangle$.

הוכחה. ... ■

משפט 2.8. מספר המסלולים להליכה על סריג מהנקודה $\langle 0,0 \rangle$ לנקודה $\langle n,n \rangle$ בלי לחצות את הישר $y = x$ הוא C_n.

הוכחה. ... ■

משפט 2.9. מתקיים $C_0 = 1$ וכן עבור $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} \cdot C_{n-i}$.

הוכחה. ... ■

2.5.2 סדרה מאוזנת

הגדרה 2.6 (סדרה מאוזנת)**.** עבור $n \in \mathbb{N}$ סדרה מאוזנת היא סדרה בת $2n$ איברים מעל הא"ב $\{0,1\}$ בעלת מספר שווה של אפסים ואחדות וכן לכל $k \leq 2n$ כמות האפסים עד המקום ה־k בסדרה קטן שווה מכמות האחדות עד המקום ה־k.

דוגמה 2.15. ...

משפט 2.10. יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי מספר הסדרות המאוזנות באורך $2n$ הינו C_n.

הוכחה. ... ■

הגדרה 2.7 (ביטוי סוגריים חוקי)**.** עבור $n \in \mathbb{N}$ ביטוי סוגריים חוקי הוא סדרה בת $2n$ איברים מעל הא"ב $\{(,)\}$ כך שלכל סוגריים ")" קיים בסדרה סוגריים אשר סוגרים אותם "(".

טענה 2.7. יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי מספר ביטוי הסוגריים החוקיים באורך $2n$ הינו C_n.

הוכחה. ... ■

3 פונקציות יוצרות

פתיחת סוגריים הינו הקשר היסודי ביותר בין אלגברה לקומבינטוריקה, בפרק הקודם ראינו כיצד ניתן לפרמל את הקשר בעזרת הבינום של ניוטון, כאמור השאלה המתבקשת היא מהיכן נובע המקדם של כל גורם $a^j b^i$ בפתיחת סוגריים, על מנת להבין זאת נשים לב כי בעת פתיחת הסוגריים קבלת a^j נובעת מבחירת ב־j סוגריים את a בפתיחה וכן i פעמים את b, מכך נובע כי $i+j=n$ וכן המקדם הוא כמות הדרכים לבחור j פעמים a מתוך n סוגריים, וזה אנו יודעים לחשב בתור $\binom{n}{j}$ ולכן זהו גם המקדם של $a^j b^i$. בדיוק באותה צורה המקדם של x^i בפתיחת הסוגריים

$$\left(x^0+\ldots+x^{n_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^0+\ldots+x^{n_\ell}\right)$$

מתאימה באופן חח"ע ועל לבחירת איבר מכל סוג ככמות הפעמים כחזקת הגורם, וזאת מכיוון ובפתיחה נקבל כי $x^i = x^{i_1}\cdot\ldots x^{i_\ell}$ באשר x^{i_j} הגיע מהסוגריים ה־j והמקדם של x^i יהיה כמות הדרכים אשר הגענו אל x^i בפתיחת הסוגריים.

דוגמה 3.1. בכמה דרכים ניתן להרכיב סלט בעל 7 ירקות כאשר יש מספר זוגי של עגבניות, מספר המלפפונים קטן ממש מ־5 וכן מספר פקעות הבצל הוא לכל הפחות 1. נשים לב כי הבעיה שקולה לפתירת המשוואה

$$x_{\text{tomato}}+x_{\text{cucumber}}+x_{\text{onion}}=7$$

מעל $\mathbb{N}$ עם המגבלות שנתנו לכל כמות, ובעיה זו שקולה לבעיה האלגברית, מהו המקדם של x^7 בפתיחת הסוגריים הבאה

$$\underbrace{\left(x^0+x^2+x^4+x^6\right)}_{\text{tomato}}\underbrace{\left(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4\right)}_{\text{cucumber}}\underbrace{\left(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7\right)}_{\text{onion}}$$

כעת בעזרת פתיחת סוגריים פשוטה נקבל כי המקדם של x^7 הוא 14 וזהו גם כמות הסלטים אשר ניתן להרכיב מהרכיבים.

המטרה המרכזית בפונקציות יוצרות הינה לספור כמות האפשרויות לפתירת בעיה בעזרת התאמה לה בעיה אלגברית של מציאת מקדם בפתיחת סוגריים, אך מה נעשה כאשר לא ידוע לנו מהו המקדם המעניין אותנו,

דוגמה 3.2. בכמה דרכים ניתן להרכיב סלט בעל n ירקות כאשר יש מספר זוגי של עגבניות, מספר המלפפונים מתחלק בשלוש וכן מספר פקעות הבצל הוא לכל הפחות 100. נשים לב כי הבעיה שקולה לפתירת המשוואה

$$x_{\text{tomato}}+x_{\text{cucumber}}+x_{\text{onion}}=n$$

מעל $\mathbb{N}$ עם המגבלות שנתנו לכל כמות, ובעיה זו שקולה לבעיה האלגברית, מהו המקדם של x^n בפתיחת הסוגריים הבאה

$$\underbrace{\left(x^0+x^2+x^4+x^6+\ldots\right)}_{\text{tomato}}\underbrace{\left(x^0+x^3+x^6+x^9+\ldots\right)}_{\text{cucumber}}\underbrace{\left(x^{100}+x^{101}+x^{102}+x^{103}+\ldots\right)}_{\text{onion}}$$

כעת פתיחת סוגריים פשוטה לא תעזור יותר כי אנו מחפשים ביטוי עבור n כללי ולא ספציפי, לכן נרצה למצוא דרך לייצג את פתיחת הסוגריים בצורה הנוחה ביותר להוצאת המקדם.

3.1 טורי חזקות

הגדרה 3.1 (סדרה)**.** סדרה היא פונקציה a עבורה $\mathrm{Dom}\left(a\right)=\mathbb{N}$. מקובל לדבר על סדרות ממשיות $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ או מרוכבות $a:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, בפרק זה נתעסק רק עם סדרות ממשיות, כמו כן נסמן $a_n=a\left(n\right)$.

דוגמה 3.3. נגדיר סדרה a כך $a_n=2n+1$, שימו לב כי אנו מרשים לעצמינו לכתוב לא בכתיב למבדא את הסדרה מנוחות העניין וכן היות $\mathrm{Dom}\left(a\right)=\mathbb{N}$ תמיד, אך פורמלית הסדרה היא $a=\lambda n\in\mathbb{N}.2n+1$.

הגדרה 3.2 (טור חזקה)**.** תהא a סדרה אזי ביטוי פורמלי מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

הערה 3.1. בקורס זה, לעומת קורסי החשבון הדיפרנציאלי ואינטגרלי, כל טורי החזקות אשר נעסוק בהם מוגדרים ומתכנסים.

דוגמה 3.4. נראה מספר דוגמאות עבור טורים, שימו לב כי טור הוא פונקציה במשתנה x לכל דבר,
- הביטויים הבאים הינם טורים, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$.
- מתקיים $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$.
- כמו כן נשים לב כי כל פולינום הוא טור חזקה עבורו הכל ממקום מסויים $a_n=0$, לדוגמה עבור הפולינום x^2+x+1 נגדיר

$$a_n=\begin{cases}1 & n\le 2\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

ואז נקבל כי מתקיים

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{2} a_n x^n + \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{2} x^n + \sum_{n=3}^{\infty} 0 \cdot x^n = x^2 + x + 1$$

טענה 3.1 (סכום סדרה הנדסית)**.** יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ אזי $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

הוכחה. עבור $n=0$ לכל $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ מתקיים $\sum_{k=0}^{0} x^k = 1 = \frac{1-x^{0+1}}{1-x}$ נניח עבור $n-1$ כעת יהי $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ מתקיים

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k &= x^n + \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n + \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^n (1-x)}{1-x} + \frac{1-x^n}{1-x} \\ &= \frac{x^n - x^{n+1} + 1 - x^n}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\end{aligned}$$

■

טענה 3.2 (סכום טור הנדסי)**.** יהי $x \in \mathbb{R}$ באשר $|x| < 1$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

הוכחה. יהי $x \in \mathbb{R}$ המקיים $|x| < 1$ נשים לב כי

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

עבור הוכחה פורמלית כי $\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ ראו את קורסי החשבון האינטגרלי והדיפרנציאלי. ■

דוגמה 3.5. ...

טענה 3.3. יהי $m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} S(m,n) x^n = \frac{1}{(1-x)^m}$.

הוכחה. ... ■

3.1.1 גזירה ואינטגרציה של טורים

כאמור מלעיל בהערה בקורס זה לא נתעסק בנכונות הפעולות ונניח כי ניתן לבצעם, נגדיר שתי פעולות נוספות אשר ניתן לעשות עם טורים,

הגדרה 3.3 (גזירת טור)**.** יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור אזי $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

דוגמה 3.6. ...

הגדרה 3.4 (אינטגרצית טור)**.** יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור אזי $\int f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

דוגמה 3.7. ...

3.2 פונקציה יוצרת

הגדרה 3.5 (פונקציה יוצרת)**.** תהא a סדרה הפונקציה היוצרת אותה היא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$. כמו כן נאמר כי a נוצרת על ידי f בעזרת אותו התנאי.

דוגמה 3.8. ...

משפט 3.1. תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היוצרת את $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ותהא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היוצרת את $b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, יהיו $\alpha,\beta,c\in\mathbb{R}$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי

	פונקציה יוצרת	סדרה נוצרת
(1)	$\lambda x\in\mathbb{R}.\alpha f\left(x\right)+\beta g\left(x\right)$	$\lambda n\in\mathbb{N}.\alpha a_{n}+\beta b_{n}$
(2)	$\lambda x\in\mathbb{R}.x^{m}f\left(x\right)$	$\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}0 & n<m\\ a_{n-m} & n\geq m\end{cases}$
(3)	$\lambda x\in\mathbb{R}.\frac{F(x)-\sum_{i=0}^{m-1}a_{i}x^{i}}{x^{m}}$	$\lambda n\in\mathbb{N}.a_{n+m}$
(4)	$\lambda x\in\mathbb{R}.f\left(cx\right)$	$\lambda n\in\mathbb{N}.c^{n}a_{n}$
(5)	$\lambda x\in\mathbb{R}.f\left(x^{m}\right)$	$\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}a_{\frac{n}{m}} & m\|n\\ 0 & \text{else}\end{cases}$
(6)	$\lambda x\in\mathbb{R}.f\left(x\right)g\left(x\right)$	$\lambda n\in\mathbb{N}.\sum_{k=0}^{n}a_{k}b_{n-k}$
(7)	$\lambda x\in\mathbb{R}\backslash\left\{1\right\}.\frac{f(x)}{1-x}$	$\lambda n\in\mathbb{N}.\sum_{k=0}^{n}a_{k}$
(8)	$\lambda x\in\mathbb{R}.f'\left(x\right)$	$\lambda n\in\mathbb{N}.\left(n+1\right)a_{n+1}$
(9)	$\lambda x\in\mathbb{R}.xf'\left(x\right)$	$\lambda n\in\mathbb{N}.na_{n}$
(10)	$\lambda x\in\mathbb{R}.\int_{0}^{x}f\left(t\right)dt$	$\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}0 & n=0\\ \frac{a_{n-1}}{n} & n>0\end{cases}$

הוכחה. ... ■

טענה 3.4. יהיו $\alpha,a,c\in\mathbb{R}$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי

	סדרה נוצרת	פונקציה יוצרת
(1)	$\lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases}1 & n=m\\0 & n\neq m\end{cases}$	$\lambda x \in \mathbb{R}.x^m$
(2)	$\lambda n \in \mathbb{N}.1$	$\lambda x \in \mathbb{R}.\frac{1}{1-x}$
(3)	$\lambda n \in \mathbb{N}.\left(-1\right)^n$	$\lambda x \in \mathbb{R}.\frac{1}{1+x}$
(4)	$\lambda n \in \mathbb{N}.c^n$	$\lambda x \in \mathbb{R}.\frac{1}{1-cx}$
(5)	$\lambda n \in \mathbb{N}.\binom{\alpha}{n}$	$\lambda x \in \mathbb{R}.\left(1+x\right)^\alpha$
(6)	$\lambda n \in \mathbb{N}.\binom{\alpha+n-1}{n}$	$\lambda x \in \mathbb{R}.\frac{1}{(1-x)^\alpha}$
(7)	$\lambda n \in \mathbb{N}.n$	$\lambda x \in \mathbb{R}.\frac{x}{(1-x)^2}$
(8)	$\lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases}0 & n=0\\\frac{1}{n} & \text{else}\end{cases}$	$\lambda x \in \mathbb{R}.-\ln\left(1-x\right)$
(9)	$\lambda n \in \mathbb{N}.\frac{a^n}{n!}$	$\lambda x \in \mathbb{R}.xe^{ax}$
(10)	$\lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases}\frac{a^n}{n!} & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\0 & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$	$\lambda x \in \mathbb{R}.\cosh\left(\alpha x\right)$
(11)	$\lambda n \in \mathbb{N}.\begin{cases}0 & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\\frac{a^n}{n!} & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$	$\lambda x \in \mathbb{R}.\sinh\left(x\right)$

הוכחה. ... ■

דוגמה 3.9. ...

3.2.1 פירוק לשברים חלקיים

הגדרה 3.6 (פונקציה רציונלית)**.** פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים שני פולינומים P,Q עבורם $f=\frac{P}{Q}$, כלומר יחס בין פולינומים.

דוגמה 3.10. הפונקציות הבאות הן רציונליות $\frac{x^5+8x}{(x+1)(x^3+1)}$, $\frac{x}{1}$, $\frac{-3x+x^2}{x}$, $\frac{1}{x^8+x^7+1}$.

פירוק לשברים חלקיים זוהי שיטה בה אנו הופכים פונקציה רציונלית מורכבת, כלומר בעלת מכנה "מורכב" למכנה "פשוט", בכדי להשתמש בפונקציות יוצרות נרצה שהפונקציה הרציונלית תהיה מהצורה $\frac{1}{(1-x)^m}$ או דומה לכך, לכן נפרק פונקציות רציונליות לפונקציות כאלו, ...

4 נוסחאות נסיגה

הגדרה 4.1 (נוסחת נסיגה/רקורסיה)**.** נוסחת נסיגה היא ביטוי לאיבר בסדרה כתלות באברים הקודמים לו.

הערה 4.1. בכתיב למבדא לפונקציות לא ניתן לכתוב רקורסיה, כלומר ביטוי מהצורה

$$f=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}1 & n\in\{0,1\}\\ f(n-1)+f(n-2) & \text{else}\end{cases}$$

אינו מוגדר מהיות השימוש בשם f בתוך הפונקציה לפני שהשמנו אותה לשם הזה (אנלוגי לשפת תכנות).

הגדרה 4.2 (עומק הנסיגה)**.** מספר האיברים הנדרשים על מנת לייצג את האיבר הבא בסדרה.

דוגמה 4.1. ...

הגדרה 4.3 (תנאיי התחלה)**.** בהינתן נוסחאת נסיגה מעומק k נקבע מהם k האיברים הראשונים בסדרה באופן ידני, זאת מכיוון והביטוי לסדרה משתמש ב־k האיברים הקודמים בסדרה אשר אינם מוגדרים עבור ה־k הראשונים.

הגדרה 4.4 (פתרון לנוסחת נסיגה)**.** בהינתן נוסחאת נסיגה מעומק k וכן תנאי התחלה, נקרא לסדרה פתרון לנוסחת הנסיגה אם היא מקיימת אותה.

דוגמה 4.2. ...

4.1 נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית

הגדרה 4.5 (נוסחת נסיגה לינארית)**.** נוסחאת נסיגה מהצורה $a_n=b+\sum_{i=1}^{k}c_ia_{n-i}$ עבור $b,c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{R}$ קבועים (כלומר ללא תלות בn).

הגדרה 4.6 (נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית)**.** נוסחאת נסיגה לינארית עבורה $b=0$. כלומר מהצורה $a_n=\sum_{i=1}^{k}c_ia_{n-i}$ עבור $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{R}$ קבועים.

משפט 4.1. תהא נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית עם תנאי התחלה אזי קיים ויחיד פתרון לנוסחת הנסיגה.

הערה 4.2. ההוכחה של המשפט נמצאת בקורסי אלגברה לינארית.

4.1.1 שיטת הפולינום האופייני

משפט 4.2. קבוצת הפתרונות של נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית הינה מרחב וקטורי ממימד הזהה לעומק הנסיגה.

הוכחה. ההוכחה תינתן בקורס אלגברה לינארית, עבור ההוכחה עצמה ראה ... ■

השיטה עצמה כעת נציג את השיטה עצמה, תהא נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית a מעומק k ויהיו תנאי התחלה, מההגדרות נובע כי $a_n=\sum_{i=1}^{k}c_ia_{n-i}$ עבור $c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{R}$ קבועים,

- **מציאת פולינום אופייני:** ננחש כי הפתרונות של נוסחת הנסיגה הם מהצורה $\lambda n \in \mathbb{N}.x^n$ כאשר x הינו משתנה לא ידוע, אזי ממשוואת הרקורסיה נקבל כי מתקיים

$$x^n = \sum_{i=1}^{k} c_i x^{n-i}$$

זהו הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה.

- **מציאת שורשים לפולינום האופייני:** נמצא את הפתרונות של הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה, נניח כי הם $\mu_1, \dots \mu_k$ אזי נקבל כי בסיס מרחב הפתרונות של הפולינום האופייני הינם $\lambda n \in \mathbb{N}.\mu_i^n$. כאשר יש ריבוי פתרונות לפולינום האופייני, לדוגמה נניח כי ω פתרון מריבוי ℓ אזי הפתרונות היסודיים של אותו הפתרון הינם

$$\left(\lambda n \in \mathbb{N}.\omega^n\right), \left(\lambda n \in \mathbb{N}.n \cdot \omega^n\right), \dots, \left(\lambda n \in \mathbb{N}.n^\ell \cdot \omega^n\right)$$

כך שבסופו של דבר יהיו k פתרונות בסיסיים לנוסחת הנסיגה, מכאן והלאה נניח כי לא קיים ריבוי אך בדוגמאות ינתן מקרה כזה.

- **פתרון לתנאי ההתחלה:** מהיות מרחב הפתרונות של נוסחת הנסיגה מרחב וקטורי הפתרון הכללי של הנוסחה הוא מהצורה

$$a_n = A_1 \mu_1^n + \dots A_k \mu_k^n$$

כאשר $A_1 \dots A_k \in \mathbb{R}$ לכן נציב את k תנאי ההתחלה שלנו,

$$\begin{aligned} a_0 &= A_1 \mu_1^0 + \dots A_k \mu_k^0 \\ a_1 &= A_1 \mu_1^1 + \dots A_k \mu_k^1 \\ &\vdots \\ a_k &= A_1 \mu_1^k + \dots A_k \mu_k^k \end{aligned}$$

ונפתור עבור $A_1 \dots A_k$, בסופו של דבר נקבל ביטוי סגור עבור a_n.

דוגמה 4.3. נסתכל על נוסחת הנסיגה $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ עם מקרי הבסיס $a_0 = 0$ וכן $a_1 = 3$. ננחש כי הפתרון הוא $\lambda n \in \mathbb{N}.x^n$ אזי $x^n = x^{n-1} + 6x^{n-2}$ ולכן $x^2 - x - 6 = 0$, שימו לב כי הצמצום מותר רק כי $\lambda n \in \mathbb{N}.0$ אינו פתרון אפשרי, זהו הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה. נפתור בעזרת נוסחת השורשים ונקבל כי הפתרונות של הפולינום האופייני הינם $x \in \{3, -2\}$ ושניהם ללא ריבוי לכן הפתרונות הבסיסיים של נוסחת הנסיגה הם $\lambda n \in \mathbb{N}.3^n$ וכן $\lambda n \in \mathbb{N}.\left(-2\right)^n$. כעת יתקיים

$$a_n = A\left(-2\right)^n + B3^n$$

נציב את תנאי ההתחלה שלנו ונקבל

$$\left.\begin{smallmatrix} 0=a_0=A(-2)^0+B3^0 \\ 3=a_1=A(-2)^1+B3^1 \end{smallmatrix}\right\} \implies \left\{\begin{smallmatrix} A=-\frac{3}{5} \\ B=\frac{3}{5} \end{smallmatrix}\right.$$

בפרט הנוסחה הסגורה הסופית היא $a_n = -\frac{3}{5}\left(-2\right)^n + \frac{3}{5}\cdot 3^n$.

דוגמה 4.4 (ריבוי שורשים)**.** נסתכל על נוסחת הנסיגה

$$a_n = 10a_{n-1} - 40a_{n-2} + 82a_{n-3} - 91a_{n-4} + 52a_{n-5} - 12a_{n-6}$$

עם תנאי ההתחלה $a_i = 0$ עבור $i \in \{0\ldots4\}$ וכן $a_5 = 1$. ננחש כי הפתרון הוא $\lambda n \in \mathbb{N}.x^n$ אזי

$$x^n = 10x^{n-1} - 40x^{n-2} + 82x^{n-3} - 91x^{n-4} + 52x^{n-5} - 12x^{n-6}$$

נשים לב כי $\lambda n \in \mathbb{N}.0$ אינו פתרון ולכן הפולינום האופייני הוא

$$x^6 - 10x^5 + 40x^4 - 82x^3 + 91x^2 - 52x + 12 = 0$$

על מנת למצוא שורשים נשים לב כי בפירוק לגורמים נקבל

$$\left(x-1\right)^3\left(x-2\right)^2\left(x-3\right) = 0$$

ולכן השורשים הם $1,2,3$ אך שניים מהם בעלי ריבוי, לכן הפתרונות הבסיסיים של נוסחת הנסיגה הם

$$\left(\lambda n \in \mathbb{N}.1^n\right), \left(\lambda n \in \mathbb{N}.n1^n\right), \left(\lambda n \in \mathbb{N}.n^21^n\right), \left(\lambda n \in \mathbb{N}.2^n\right), \left(\lambda n \in \mathbb{N}.n2^n\right), \left(\lambda n \in \mathbb{N}.3^n\right)$$

בפרט הפתרון של נוסחת הנסיגה שלנו היא

$$a_n = A\cdot 1^n + B\cdot n1^n + C\cdot n^21^n + D\cdot 2^n + E\cdot n2^n + F\cdot 3^n$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל את המשוואות

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 = A + D + F & 0 &= a_1 = A + B + C + 2D + 2E + 3F \\ 0 &= a_2 = A + 2B + 4C + 4D + 8E + 9F & 0 &= a_3 = A + 3B + 9C + 8D + 24E + 27F \\ 0 &= a_4 = A + 4B + 16C + 16D + 64E + 81F & 1 &= a_5 = A + 5B + 25C + 32D + 160E + 243F \end{aligned}$$

סה"כ נקבל את הצורה

$$a_n = -\frac{17}{8} - n - \frac{1}{4}\cdot n^2 + 2\cdot 2^n - \frac{1}{2}\cdot n2^n + \frac{1}{8}\cdot 3^n$$

4.1.2 סדרת פיבונאצ'י

דוגמה קלאסית לשימוש בשיטת הפולינום האופייני היא סדרה פיבונאצ'י הידועה,

הגדרה 4.7 (סדרת פיבונאצ'י)**.** נגדיר את נוסחת הנסיגה $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ עם תנאי ההתחלה $\left(a_0 = 0\right) \wedge \left(a_1 = 1\right)$.

דוגמה 4.5 (נוסחה סגורה לסדרת פיבונאצ'י). ננחש כי הפתרון הוא מהצורה $\lambda n \in \mathbb{N}.x^n$ כלומר הוא מקיים את המשוואה

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 = x + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$$

ולכן $\lambda n \in \mathbb{N}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $\lambda n \in \mathbb{N}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ פתרונות בלתי תלויים של המשוואה, לכן הפתרון הכללי של נוסחת הנסיגה הוא

$$\lambda n \in \mathbb{N}.A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

נציב את תנאי ההתחלה שלנו ונקבל

$$\begin{aligned} 0 = a_0 =& A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = A + B \\ 1 = a_1 =& A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

לאחר חישוב נקבל כי

$$A = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad\qquad B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ולכן הפתרון של נוסחת הנסיגה עם תנאי ההתחלה הוא

$$\lambda n \in \mathbb{N}.\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

הגדרה 4.8 (יחס הזהב). נסמן כמו מלעיל a_n את סדרת פיבונאצ'י אזי יחס הזהב מוגדר להיות $\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, ובעזרת שיקולי חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי נסיק כי $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.2 פתרון נוסחאות נסיגה בעזרת פונקציות יוצרות

...

חלק IV

תורת הגרפים

גרף באופן כללי זהו תרשים בו מתואר הקשר בין אובייקטים מסויימים, אובייקט זה חשוב במתמטיקה מכיוון ובעזרתו ניתן לייצג יחסים בין אובייקטים בצורה ויזואלית. בפרט גרפים מאוד חשובים למדעי המחשב ממגוון רחב של סיבות, האחת מביניהן היא ניתוח ומידול רשתות חברתיות, נניח כי אנו מייצרים גרף שבו כל שני חברים בפייסבוק מחוברים, לדוגמה ... אז עולות הרבה שאלות כגון, מה המספר המקסימלי של צעדים שצריך לעשות בכדי להגיע לכל אדם מכל אדם, או כמה קבוצות של n אנשים קיימים כך שכולם חברים אחד של השני. באותה צורה ניתן בעזרת גרפים לתאר יחסים על קבוצות, לדוגמה ...

1 גרפים

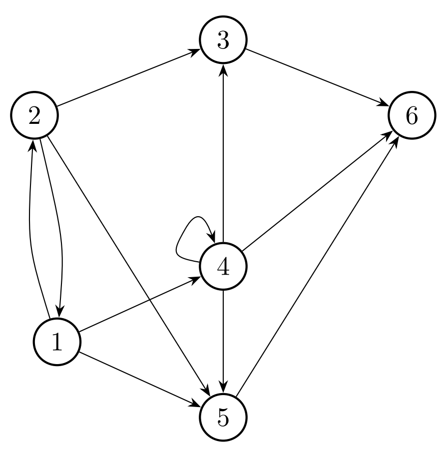
1.0.1 גרף מכוון

הגדרה 1.1 (גרף מכוון)**.** תהא V קבוצה ויהי $E \subseteq V^2$ אזי הזוג הסדור $\langle V, E\rangle$ מתאר גרף, לאיברים ב־V קוראים הצמתים/הקודקודים ולאיברים ב־E קוראים הקשתות/הצלעות.

דוגמה 1.1. נשים לב כי הגרף הבא

$$\langle\{1,2,3,4,5,6\},\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 5,6\rangle\}\rangle$$

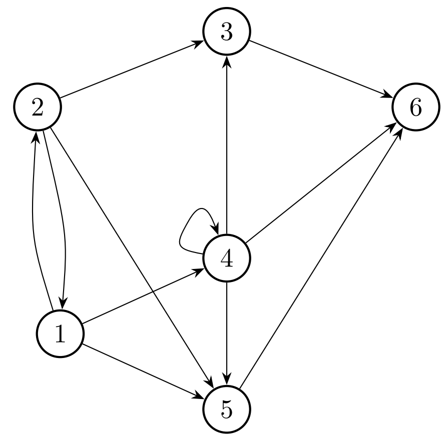
ניתן לייצוג על ידי הדיאגרמה



נשים לב כי החיבורים בין הקודקודים בעלי ראש על מנת לייצג מאיזה צומת לאיזה צומת הקשת.

הגדרה 1.2 (לולאה)**.** יהי $\langle V, E\rangle$ גרף מכוון, צומת $v \in V$ יקרא לולאה אם $\langle v, v\rangle \in E$.

דוגמה 1.2. בגרף בדוגמה מלעיל



הצומת 4 היא לולאה מכיוון ומתקיים $\langle 4,4\rangle \in E$, שימו לב כי בגרף זה אומר כי קיימת קשת היוצאת מ־4 וחוזרת אל 4.

הגדרה 1.3 (גרף מכוון פשוט)**.** גרף מכוון $\langle V,E\rangle$ יקרא פשוט אם אין בו לולאות.

1.0.2 גרף לא מכוון

הגדרה 1.4 (גרף לא מכוון)**.** תהא V קבוצה ויהי $E \in \mathcal{P}_2\left(V\right)$ אזי הזוג הסדור $\langle V,E\rangle$ מתאר גרף, לאיברים ב־V קוראים הצמתים/הקודקודים ולאיברים ב־E קוראים הקשתות/הצלעות. בהינתן גרף לא מכוון $G = \langle V',E'\rangle$ נסמן את קבוצת הקודקודים $V\left(G\right)$ ואת קבוצת הקשתות $E\left(G\right)$.

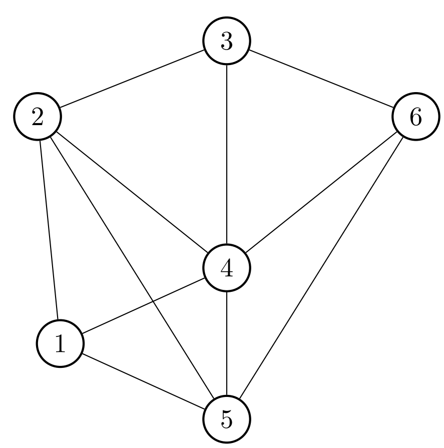
הערה 1.1. בקורס זה נשתמש אך ורק בגרפים לא מכוונים וסופיים (כלומר גרפים עבורם $|V| \in \mathbb{N}$) אלא אם כן נאמר אחרת, שימו לב כי רוב הטענות תקפות גם לסוגי גרפים אחרים ורוב הזמן הטרמינולוגיה זהה.

דוגמה 1.3. נראה מספר גרפים,

- נגדיר גרף

$$\langle\{1,2,3,4,5,6\},\{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}\rangle$$

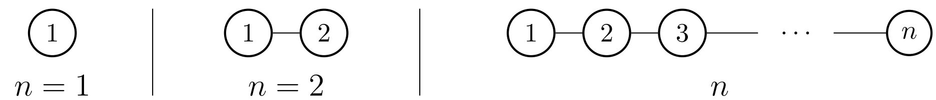
נשים לב כי הוא ניתן לייצוג על ידי הדיאגרמה



- **גרף שרוך**: עבור $n \in \mathbb{N}_+$ נגדיר גרף מעגל כך

$$\left\langle \{1 \ldots n\}, \{\{k, k+1\} \mid k \in \{1 \ldots n-1\}\} \right\rangle$$

ובציור הגרף יראה כך (שימו לב כי אלו שלושה גרפים אחד ליד השני)

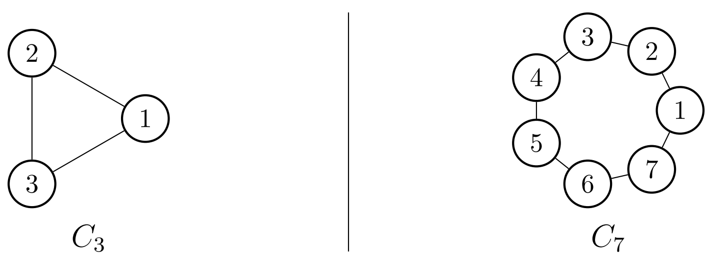


$n = 1$ | $n = 2$ | n

- **גרף מעגל**: עבור $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ נגדיר גרף מעגל כך

$$C_n = \left\langle \{1 \ldots n\}, \{\{k, k+1\} \mid k \in \{1 \ldots n-1\}\} \cup \{\{1, n\}\} \right\rangle$$

ובציור הגרף יראה כך (שימו לב כי אלו שני גרפים אחד ליד השני)

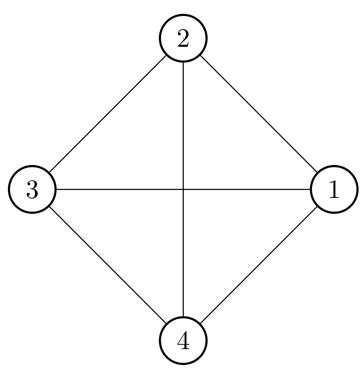


C_3 | C_7

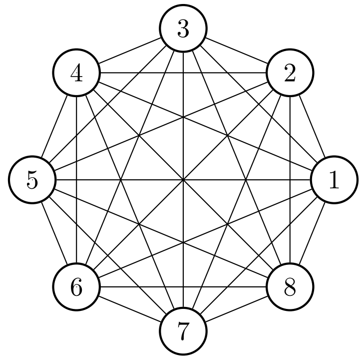
הגדרה 1.5 (גרף ריק)**.** גרף G יקרא ריק אם $E(G) = \varnothing$. שימו לב כי הגרף הריק אינו יחיד.

הגדרה 1.6 (קליקה/גרף מלא)**.** יהי $n \in \mathbb{N}$ נגדיר קליקה מגודל n להיות הגרף $K_n = \left\langle \{1 \ldots n\}, \mathcal{P}_2(\{1 \ldots n\}) \right\rangle$.

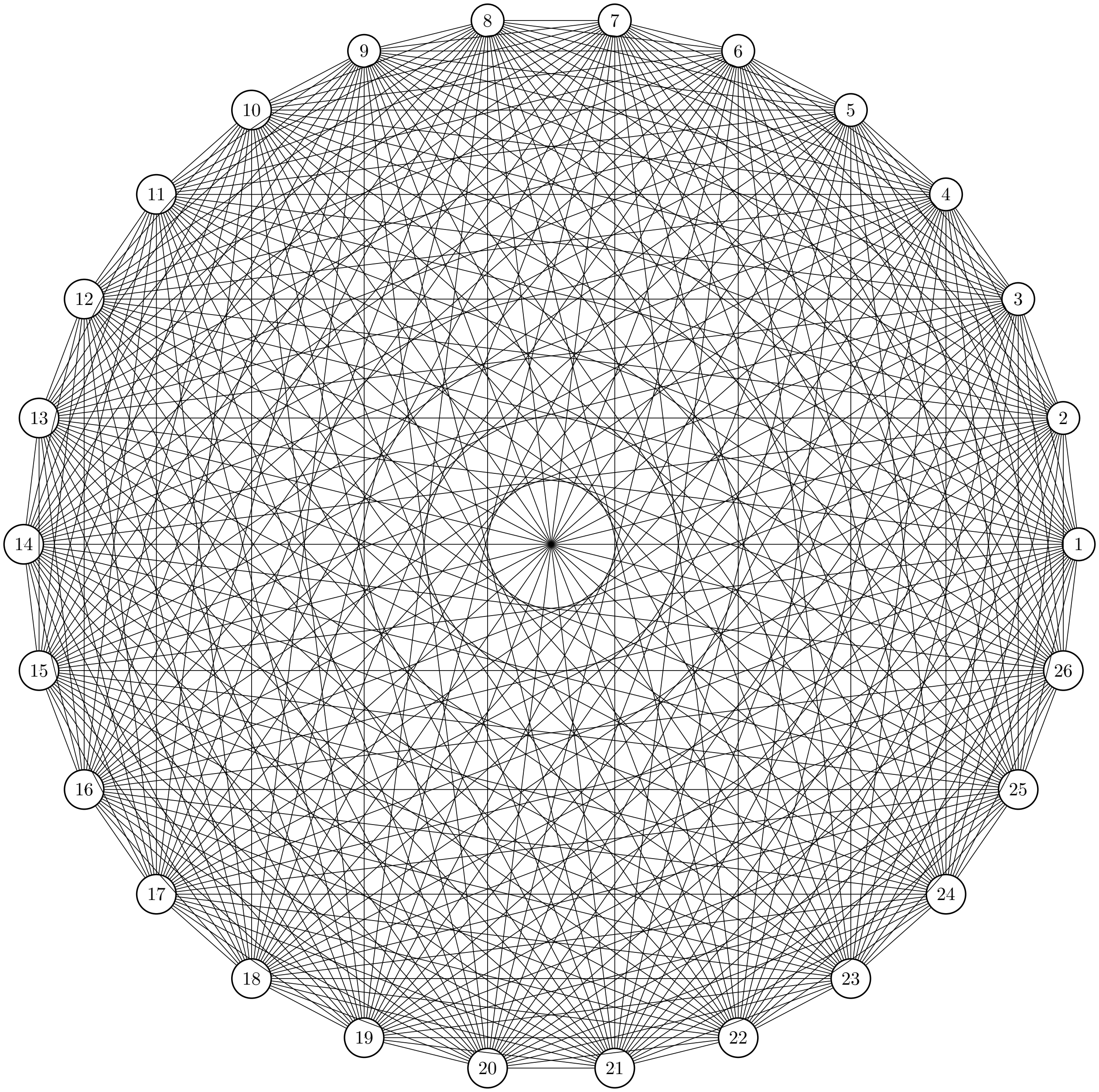
דוגמה 1.4. מבחינת ציור כך נראות קליקות



K_4



K_8

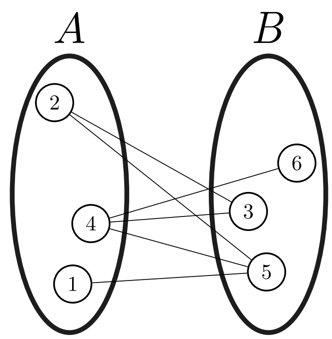


K_{26}

הערה 1.2. באופן כללי יותר, עבור קבוצה A נגדיר את הקליקה של A להיות $K_A = \langle A, \mathcal{P}_2(A) \rangle$.

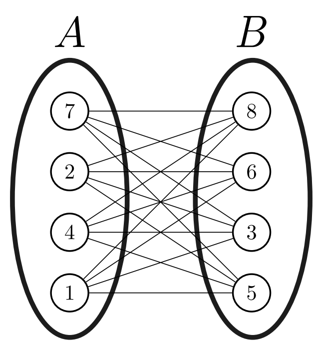
הגדרה 1.7 (גרף דו צדדי). גרף G עבורו קיימות A, B עבורן $V(G) = A \uplus B$ וכן אם $\{a, b\} \in E(G)$ אזי $a \in A$ וכן $b \in B$.

דוגמה 1.5. כך נראה גרף דו צדדי בדיאגרמה



הגדרה 1.8 (גרף דו צדדי מלא)**.** יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ נגדיר גרף מלא מגודל n,m להיות גרף דו צדדי G עבורו $V\left(G\right)=A\uplus B$ וכן $\left(\left|B\right|=n\right)\wedge\left(\left|A\right|=m\right)$ כך שלכל $a\in A$ וכן $b\in B$ מתקיים $\left\{ a,b\right\} \in E\left(G\right)$.

דוגמה 1.6. כך נראה גרף דו צדדי מלא מסדר $4,4$ בדיאגרמה

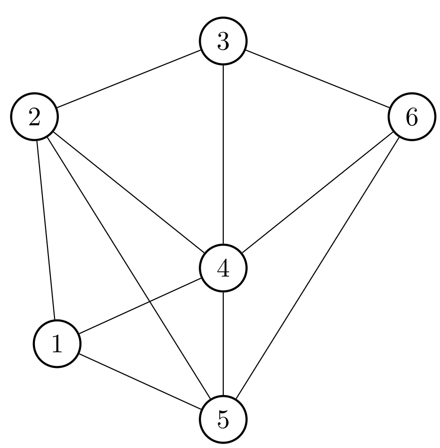


1.1 דרגה

הגדרה 1.9 (קבוצת השכנים)**.** יהי G גרף ויהי צומת $v\in V\left(G\right)$ אזי $N\left(v\right)=\left\{ u\in V\left(G\right)\mid\left\{ v,u\right\} \in E\left(G\right)\right\}$.

הערה 1.3. באותה מידה, נקרא לשני צמתים המחוברים בעזרת קשת שכנים.

דוגמה 1.7. בגרף הבא



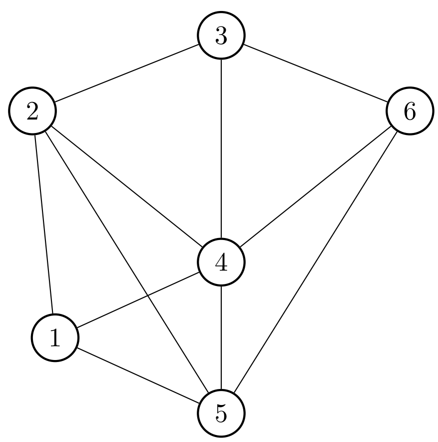
קבוצות השכנים הן

$$N(1)=\{2,4,5\} \qquad N(2)=\{1,3,4,5\} \qquad N(3)=\{2,4,6\}$$
$$N(4)=\{1,2,3,5,6\} \qquad N(5)=\{1,2,4,6\} \qquad N(6)=\{3,4,5\}$$

הגדרה 1.10 (דרגה של צומת)**.** יהי G גרף ויהי צומת $v\in V(G)$ אזי נגדיר את דרגת הצומת להיות $\deg(v)=|N(v)|$. צומת יקרא עלה אם $\deg(v)=1$, וצומת יקרא קודקוד מבודד אם $d(v)=0$.

הערה 1.4 (סימון הדרגה). שימו לב כי אם יש מספר גרפים מקובל לסמן $\deg_G(v)$ עבור גרף G כמו כן מקובל לסמן בקיצור $d(v)$.

דוגמה 1.8. בגרף הבא



דרגות הצמתים הן

$$\deg(1)=3 \qquad \deg(2)=4 \qquad \deg(3)=3$$
$$\deg(4)=5 \qquad \deg(5)=4 \qquad \deg(6)=3$$

טענה 1.1. יהי G גרף ויהי צומת $v\in V(G)$ אזי $0\le\deg(v)\le|V(G)|-1$.

הוכחה. יהי G גרף ויהי צומת $v\in V(G)$ נשים לב כי מהגדרת $\deg$ וכן מהגדרת עוצמה מתקיים $0\le\deg(v)$, כעת נניח בשלילה כי $\deg(v)>|V(G)|-1$ אזי

$$|N(v)|>|V(G)|-1$$

ולכן מהיות $N(v)\subseteq V(G)$ נקבל כי

$$|V(G)|\ge|N(v)|>|V(G)|-1$$

סתירה. ■

משפט 1.1 (נוסחת לחיצות הידיים)**.** יהי G גרף אזי $\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=2\left|E(G)\right|$.

הערה 1.5. הוכחה לא פורמלית תהיה מהצורה, נשים לב כי בסכימה באגף הימני כל קשת $\{u,v\}$ בגרף נספרת פעמיים, פעם אחת על ידי הדרגה של v ופעם אחת על ידי הדרגה של u, לכן הסכום יהיה פי שתיים ממספר הקשתות. נשתמש בסקיצה הזאת בהוכחת המשפט (בעצם לכל קשת נצוות מספר סידורי של כמה פעמים ראינו אותה).

הוכחה. יהי G גרף מכיוון ומתקיים $\left|V(G)\right|\in\mathbb{N}$ נסמן $n=\left|V(G)\right|$ ותהא $f:V(G)\to\{1\ldots n\}$ חח"ע ועל, נשים לב כי

$$\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=\sum_{v\in V(G)}\left|N(v)\right|=\left|\biguplus_{v\in V(G)}N(v)\times\{v\}\right|=\left|\biguplus_{v\in V(G)}\{u\in V(G)\mid\{v,u\}\in E(G)\}\times\{v\}\right|$$
$$=\left|\biguplus_{v\in V(G)}\{\langle u,v\rangle\mid u\in V(G)\wedge\{v,u\}\in E\}\right|=\left|\left\{\langle u,v\rangle\in V(G)^2\mid\{v,u\}\in E\right\}\right|$$

לכן נסמן

$$A=\left\{\langle u,v\rangle\in V(G)^2\mid\{v,u\}\in E\right\}$$

כמו כן מתקיים $2\left|E(G)\right|=\left|(E(G)\times\{0\})\uplus(E(G)\times\{1\})\right|$ ונסמן

$$B=(E(G)\times\{0\})\uplus(E(G)\times\{1\})$$

ולכן נגדיר פונקציה $g:A\to B$ חח"ע ועל כך

$$g=\lambda\langle u,v\rangle\in A.\begin{cases}\{u,v\}\times\{0\} & f(u)<f(v)\\ \{u,v\}\times\{1\} & f(v)<f(u)\end{cases}$$

- g מוגדרת היטב, נשאר לקורא.
- g חח"ע, יהיו $\langle u_1,v_1\rangle,\langle u_2,v_2\rangle\in A$ עבורם $g(u_1,v_1)=g(u_2,v_2)$ בה"כ

$$g(u_1,v_1)=\{u_1,v_1\}\times\{0\}$$

אזי

$$\{u_1,v_1\}\times\{0\}=g(u_1,v_1)=g(u_2,v_2)=\{u_2,v_2\}\times\{i\}$$

כמובן $i=0$ ולכן $\{u_1,v_1\}\times\{0\}=\{u_2,v_2\}\times\{0\}$ כעת מתכונת הזוג הסדור

$$\{u_1,v_1\}=\{u_2,v_2\}$$

נניח בשלילה כי $u_1 = v_2$ אזי $v_1 = u_2$, אך אז מתקיים מההנחה

$$f(u_2) < f(v_2) \qquad f(u_1) < f(v_1) \qquad f(v_2) < f(u_2)$$

סתירה ולכן $(v_1 = v_2) \wedge (u_1 = u_2)$.

- g על, יהי $\{v,u\} \times \{i\} \in B$ נשים לב כי $\{v,u\} \in E(G)$ ולכן $\langle u,v\rangle, \langle v,u\rangle \in A$ בפרט

$$g(u,v) = \{v,u\} \times \{1-j\} \qquad g(v,u) = \{v,u\} \times \{j\}$$

ולכן כי $i \in \{j, 1-j\}$ נקבל כי אחד מהם שווה לדרוש.

ולכן מתקיים

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = |A| = |B| = 2|E(G)|$$

■

1.2 טיולים ומסלולים

הגדרה 1.11 (טיול)**.** יהי G גרף אזי סדרה $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle \in V(G)^n$ עבורה לכל $i \in \{1 \ldots n\}$ מתקיים $\{a_{i-1}, a_i\} \in E(G)$. עבור טיול $\sigma = \langle a_0, \ldots, a_n\rangle$ נסמן את אורך הטיול כך $\ell(\sigma) = n$.

דוגמה 1.9. ...

הגדרה 1.12 (מסלול)**.** יהי G גרף אזי טיול $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle \in V(G)^n$ עבורו לכל $i, j \in \{1 \ldots n\}$ שונים מתקיים $\{a_{i-1}, a_i\} \neq \{a_{j-1}, a_j\}$.

הגדרה 1.13 (מעגל)**.** יהי G גרף אזי מסלול $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle \in V(G)^n$ עבורו $a_0 = a_n$.

תרגיל 1.1. יהי G גרף ויהי $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle \in V(G)^n$ מסלול אזי לכל $i \in \{1 \ldots n\}$ נקבל כי $\langle a_0, \ldots, a_i\rangle$ מסלול.

הגדרה 1.14 (מסלול פשוט)**.** יהי G גרף אזי מסלול $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle \in V(G)^n$ עבורו לכל $i \in \{1 \ldots n\}$ המסלול $\langle a_0 \ldots a_i\rangle$ חסר מעגלים.

הגדרה 1.15 (מעגל פשוט)**.** יהי G גרף אזי מעגל $\langle a_0, \ldots, a_n\rangle \in V(G)^n$ עבורו המסלול $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ הינו מסלול פשוט.

דוגמה 1.10. ...

טענה 1.2. יהי G גרף ויהיו $v_1, v_2 \in V(G)$ צמתים שונים אזי (קיים מסלול פשוט בין v_1 ל־v_2)$\Longleftrightarrow$(קיים טיול בין v_1 ל־v_2).

הוכחה. יהי G גרף ויהיו $v_1, v_2 \in V(G)$ צמתים שונים

$\Longleftarrow$: נניח כי קיים מסלול פשוט בין v_1 ל־v_2 נשים לב כי מסלול פשוט הינו טיול ולכן קיים טיול בין v_1 ל־v_2.

$\Longleftarrow$: נניח כי קיים טיול בין v_1 ל־v_2 נסמנו σ, אם $\ell(\sigma) = 1$ כלומר הטיול הוא $\langle v_1, v_2 \rangle$ אזי זהו גם מסלול פשוט וסיימנו, נניח כי עבור $\ell(\sigma) < n$ הטענה נכונה, כעת עבור טיול $\ell(\sigma) = n$ נסמן $\sigma = \langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ באשר $a_0 = v_1$ וכן $a_n = v_2$,

- אם σ אינו מסלול, אזי קיימים $i, j \in \{1 \ldots n\}$ שונים בה"כ $i < j$ עבורם $\{a_{i-1}, a_i\} = \{a_{j-1}, a_j\}$
  * אם $a_i = a_j$, נסתכל על המסלול

$$\mu = \langle a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n \rangle$$

כלומר החסרנו מהטיול את הקטע $\langle a_{i+1} \ldots a_j \rangle$, נשים לב כי μ הינו טיול מכיוון ו־σ טיול וכן כי מתקיים

$$\{a_i, a_{j+1}\} = \{a_j, a_{j+1}\} \in E(G)$$

אזי μ טיול בין v_1 ל־v_2 המקיים $\sigma(\mu) < n$ ולכן מהנחת האינדוקציה קיים מסלול פשוט בין v_1 ל־v_2.

  * אם $a_i = a_{j-1}$, נסתכל על המסלול

$$\zeta = \langle a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n \rangle$$

כלומר החסרנו מהטיול את הקטע $\langle a_i \ldots a_j \rangle$, נשים לב כי ζ הינו טיול מכיוון ו־σ טיול וכן כי מתקיים

$$\{a_{i-1}, a_{j+1}\} = \{a_j, a_{j+1}\} \in E(G)$$

אזי ζ טיול בין v_1 ל־v_2 המקיים $\sigma(\zeta) < n$ ולכן מהנחת האינדוקציה קיים מסלול פשוט בין v_1 ל־v_2.

- אם σ הינו מסלול, אם σ מסלול פשוט סיימנו אחרת נניח כי σ מסלול לא פשוט אזי קיים $i \in \{1 \ldots n\}$ עבורו $\langle a_0 \ldots a_i \rangle$ בעל מעגל, כלומר קיימים $j, k \in \{1 \ldots i\}$ בה"כ $j < k$ עבורם $a_j = a_k$, נגדיר את הטיול

$$\eta = \langle a_0, \ldots, a_j, a_{k+1}, \ldots a_n \rangle$$

נשים לב כי η טיול בין v_1 ל־v_2 מכיוון ומתקיים $v_1 \neq v_2$ ולכן σ אינו מעגל וכן כי

$$\{a_k, a_{k+1}\} = \{a_j, a_{k+1}\} \in E(G)$$

מהיות σ טיול, כמו כן $\ell(\eta) < n$ ולכן מהנחת האינדוקציה קיים מסלול פשוט בין v_1 ל־v_2.

■

טענה 1.3. יהי G גרף ויהי $v \in V(G)$ צומת אזי (קיים מעגל פשוט סביב v)$\Longleftrightarrow$(קיים מעגל סביב v).

הוכחה. יהי G גרף ויהי $v \in V(G)$ צומת

$\Longrightarrow$: נניח כי קיים מעגל פשוט סביב v נשים לב כי מעגל פשוט הינו מעגל ולכן קיים מעגל סביב v.

$\Longleftarrow$: נניח כי קיים מעגל סביב v נסמנו σ, נסמן $n=\ell\left(\sigma\right)$ וכן $\sigma=\left\langle a_{0},\ldots,a_{n}\right\rangle$ באשר $a_{0}=a_{n}=v$, נשים לב כי $\left\langle a_{0},\ldots,a_{n-1}\right\rangle$ מסלול ובפרט טיול ולכן מהטענה מלעיל קיים מסלול פשוט μ בין a_{0} ל־a_{n-1} בפרט המעגל $\left\langle \mu,a_{n}\right\rangle$ סביב v הינו מעגל פשוט.

■

1.2.1 אלגוריתם דייקסטרא

...

1.2.2 מסלול המילטון

הגדרה 1.16. יהי G גרף נסמן

$$\delta\left(G\right)=\min_{v\in V\left(G\right)}\deg_{G}\left(v\right)\qquad\qquad\Delta\left(G\right)=\max_{v\in V\left(G\right)}\deg_{G}\left(v\right)$$

דוגמה 1.11. ...

הגדרה 1.17 (מסלול המילטון)**.** יהי G גרף, מסלול המילטון הינו מסלול אשר עובר דרך כל הצמתים.

הגדרה 1.18 (מעגל המילטון)**.** יהי G גרף, מעגל המילטון הינו מסלול המילטון אשר גם מעגל.

דוגמה 1.12. ...

טענה 1.4. יהי G גרף אזי קיים מסלול σ המקיים $\ell\left(\sigma\right)=\delta\left(G\right)$.

הוכחה. יהי G גרף, אם $\delta\left(G\right)=0$ אזי נקח את המסלול הריק, אחרת יהי $v_{0}\in V\left(G\right)$ מהגדרת $\delta\left(G\right)$ מתקיים

$$\delta\left(G\right)\leq\deg\left(v_{0}\right)\Longrightarrow\delta\left(G\right)\leq\left|N\left(v_{0}\right)\right|$$

ולכן קיים $v_{1}\in V\left(G\right)\backslash\left\{ v_{0}\right\}$ שכן של v_{0} כעת מהגדרת $\delta\left(G\right)$ מתקיים

$$\delta\left(G\right)\leq\left|N\left(v_{1}\right)\right|\Longrightarrow\delta\left(G\right)-1\leq\left|N\left(v_{1}\right)\backslash\left\{ v_{0}\right\} \right|$$

אזי נבחר $v_{2}\in V\left(G\right)\backslash\left\{ v_{0},v_{1}\right\}$ שכן של v_{1}, נמשיך כך כאשר נבחר $v_{i+1}\in V\left(G\right)\backslash\left\{ v_{0},\ldots,v_{i}\right\}$ שכן של v_{i} המקיים

$$\delta\left(G\right)\leq\left|N\left(v_{i+1}\right)\right|\Longrightarrow\delta\left(G\right)-\left(i+1\right)\leq\left|N\left(v_{i+1}\right)\backslash\left\{ v_{0},\ldots,v_{i}\right\} \right|$$

בפרט בצורה זו ניתן לבחור $v_{0},v_{1},\ldots,v_{\delta\left(G\right)}$ שונים, לכן $\sigma=\left\langle v_{0},v_{1},\ldots,v_{\delta\left(G\right)}\right\rangle$ הינו מסלול המקיים $\ell\left(\sigma\right)=\delta\left(G\right)$. ■

משפט 1.2 (משפט דיראק)**.** יהי G גרף המקיים $\delta\left(G\right)\geq\frac{\left|V\left(G\right)\right|}{2}$ אזי קיים מעגל המילטון בגרף.

הוכחה. ... ■

1.3 תת גרף

הגדרה 1.19 (תת גרף)**.** יהי G גרף, גרף G' יקרא תת גרף של G אם הוא מקיים

$$\left(V\left(G'\right)\subseteq V\left(G\right)\right)\wedge\left(E\left(G'\right)\subseteq E\left(G\right)\cap\mathcal{P}_2\left(V\left(G'\right)\right)\right)$$

הערה 1.6 (סימון תת גרף). בחלק מהמקומות תראו סימונים כמו $G'\leq G$ או $G'\lhd G$ עבור העובדה כי G' תת גרף של G.

דוגמה 1.13. ...

הגדרה 1.20 (תת גרף נפרש)**.** יהי G גרף ותהא $A\subseteq V\left(G\right)$ התת גרף הנפרש על ידי A הוא הגרף $G\left[A\right]=\left\langle A,\mathcal{P}_2\left(A\right)\cap E\left(G\right)\right\rangle$.

דוגמה 1.14. ...

הגדרה 1.21 (הגרף המשלים)**.** יהי G גרף אזי הגרף המשלים ל־G הינו הגרף $\overline{G}=\left\langle V\left(G\right),\mathcal{P}_2\left(V\left(G\right)\right)\backslash E\left(G\right)\right\rangle$.

דוגמה 1.15. ...

משפט 1.3. יהי G גרף ויהי צומת $v\in V\left(G\right)$ אזי $\deg_G\left(v\right)+\deg_{\overline{G}}\left(v\right)=\left|V\left(G\right)\right|-1$.

הוכחה. יהי G גרף ויהי צומת $v\in V\left(G\right)$, נניח בשלילה כי $N_G\left(v\right)\cap N_{\overline{G}}\left(v\right)\neq\varnothing$ אזי יהי $u\in N_G\left(v\right)\cap N_{\overline{G}}\left(v\right)$ מהגדרת קבוצת השכנים מתקיים

$$\{v,u\}\in E\left(\overline{G}\right)\qquad\qquad\{v,u\}\in E\left(G\right)$$

ומהגדרת הגרף המשלים

$$\{v,u\}\in\mathcal{P}_2\left(V\left(G\right)\right)\backslash E\left(G\right)\qquad\qquad\{v,u\}\in E\left(G\right)$$

סתירה להגדרת הפרש קבוצות, אזי מתקיים

$$\begin{aligned}\deg_G\left(v\right)+\deg_{\overline{G}}\left(v\right)&=\left|N_G\left(v\right)\right|+\left|N_{\overline{G}}\left(v\right)\right|\\&=\left|\left\{u\in V\left(G\right)\mid\{v,u\}\in E\left(G\right)\right\}\right|+\left|\left\{u\in V\left(\overline{G}\right)\mid\{v,u\}\in E\left(\overline{G}\right)\right\}\right|\\&=\left|\left\{u\in V\left(G\right)\mid\{v,u\}\in E\left(G\right)\right\}\right|+\left|\left\{u\in V\left(G\right)\mid\{v,u\}\in\mathcal{P}_2\left(V\left(G\right)\right)\backslash E\left(G\right)\right\}\right|\\&=\left|\left\{u\in V\left(G\right)\mid\{v,u\}\in E\left(G\right)\right\}\uplus\left\{u\in V\left(G\right)\mid\{v,u\}\in\mathcal{P}_2\left(V\left(G\right)\right)\backslash E\left(G\right)\right\}\right|\\&=\left|\left\{u\in V\left(G\right)\mid\left(\{v,u\}\in E\left(G\right)\right)\vee\left(\{v,u\}\in\mathcal{P}_2\left(V\left(G\right)\right)\backslash E\left(G\right)\right)\right\}\right|\\&=\left|\left\{u\in V\left(G\right)\mid\{v,u\}\in\left(\mathcal{P}_2\left(V\left(G\right)\right)\backslash E\left(G\right)\right)\uplus E\left(G\right)\right\}\right|\\&=\left|\left\{u\in V\left(G\right)\mid\{v,u\}\in\mathcal{P}_2\left(V\left(G\right)\right)\right\}\right|\end{aligned}$$

נשים לב כי לכל $u\in V\left(G\right)$ שונה מ־v מתקיים $\left\{ v,u\right\} \in\mathcal{P}_{2}\left(V\left(G\right)\right)$ מהגדרת $\mathcal{P}_{2}$ ולכן

$$\deg_{G}\left(v\right)+\deg_{\overline{G}}\left(v\right)=\left|\left\{ u\in V\left(G\right)\mid\left\{ v,u\right\} \in\mathcal{P}_{2}\left(V\left(G\right)\right)\right\} \right|=\left|V\left(G\right)\backslash\left\{ v\right\} \right|=\left|V\left(G\right)\right|-1$$

■

1.4 קשירות

הגדרה 1.22 (יחס הקשירות)**.** יהי G גרף נגדיר יחס $\underset{G}{\to}$ מעל $V\left(G\right)$ כך, יהיו $v,u\in V\left(G\right)$ אזי $\left(v\underset{G}{\to}u\right)\Longleftrightarrow$(קיים טיול מ־$v$ ל־u בגרף G).

תרגיל 1.2. יהי G גרף אזי יחס הקשירות הינו יחס שקילות.

הגדרה 1.23 (רכיב קשירות)**.** יהי G גרף אזי מחלקת שקילות ביחס $\underset{G}{\to}$ נקראת רכיב קשירות, זאת מכיוון וכל הצמתים באותה מחלקת שקילות מקושרים אחד לשני בגרף.

דוגמה 1.16. ...

טענה 1.5. יהי G גרף יהי K רכיב קשירות של G ויהי $v\in K$ אזי $\deg_{G\left[K\right]}\left(v\right)=\deg_{G}\left(v\right)$.

הוכחה. יהי G גרף יהי K רכיב קשירות של G ויהי $v\in K$, נשים לב כי

$$\deg_{G\left[K\right]}\left(v\right)=\left|N_{G\left[K\right]}\left(v\right)\right|\qquad\qquad\deg_{G}\left(v\right)=\left|N_{G}\left(v\right)\right|$$

נוכיח כי $N_{G}\left(v\right)=N_{G\left[K\right]}\left(v\right)$,

- $\subseteq$: יהי $u\in N_{G}\left(v\right)$ אזי $u\in V\left(G\right)$ וכן $\left\{ v,u\right\} \in E\left(G\right)$ נשים לב כי $u\underset{G}{\to}v$ מכיוון ו־$\left\langle v,u\right\rangle$ טיול בין שניהם אזי כי $v\in K$ נקבל $v,u\in K$ בפרט גם

$$\left\{ v,u\right\} \in\mathcal{P}_{2}\left(K\right)\cap E\left(G\right)$$

ולכן $\left\{ v,u\right\} \in E\left(G\left[K\right]\right)$ אזי $u\in N_{G\left[K\right]}\left(v\right)$.

- $\supseteq$: יהי $u\in N_{G\left[K\right]}\left(v\right)$ אזי $u\in V\left(G\left[K\right]\right)$ וכן $\left\{ v,u\right\} \in E\left(G\left[K\right]\right)$ לכן מהגדרת תת גרף נפרש מתקיים

$$\left\{ v,u\right\} \in\mathcal{P}_{2}\left(K\right)\cap E\left(G\right)\qquad\qquad u\in K$$

בפרט גם מתקיים

$$\left\{ v,u\right\} \in E\left(G\right)\qquad\qquad u\in V\left(G\right)$$

ולכן $u\in N_{G}\left(v\right)$.

■

הגדרה 1.24 (גרף קשיר). גרף G יקרא קשיר אם קיים בו רכיב קשירות יחיד, כלומר $\left|V(G)/\underset{G}{\rightarrow}\right| = 1$.

טענה 1.6. יהי G גרף ויהי K רכיב קשירות אזי $G[K]$ גרף קשיר.

הוכחה. יהי G גרף ויהי K רכיב קשירות, נניח בשלילה כי $G[K]$ אינו גרף קשיר,

- נניח כי $\left|V(G[K])/\underset{G[K]}{\xrightarrow{]}}\right| = 0$, מהיות K רכיב קשירות קיים $v \in V(G)$ עבורו $K = [v]_{\underset{G}{\rightarrow}}$ בפרט $v \in K$ אזי מהגדרת גרף פורש $v \in V(G[K])$ ולכן $[v]_{\underset{G[K]}{\xrightarrow{]}}} \in V(G[K])/\underset{G[K]}{\xrightarrow{]}}$ סתירה.
- נניח כי $\left|V(G[K])/\underset{G[K]}{\xrightarrow{]}}\right| \geq 1$, אזי בהכרח קיימים $u,v \in V(G[K])$ עבורם $[u]_{\underset{G[K]}{\xrightarrow{]}}} \neq [v]_{\underset{G[K]}{\xrightarrow{]}}}$ לכן לא קיים טיול בין u ל־v בגרף $G[K]$ אך מהגרת גרף פורש $u,v \in K$ ולכן קיים טיול בין u ל־v בגרף G, נסמנו $\langle u, a_1 \ldots, a_n, v\rangle$ נשים לב כי קיים טיול בין u לבין a_i בגרף G לכל $i \in \{1 \ldots n\}$ אזי $a_i \in [u]_{\underset{G}{\rightarrow}}$

...

■

הגדרה 1.25. יהי G גרף ויהי $E' \subseteq \mathcal{P}_2(V(G))$ אזי

$$G - E' = \langle V(G), E(G) \backslash E'\rangle \qquad\qquad G + E' = \langle V(G), E(G) \cup E'\rangle$$

דוגמה 1.17. ...

טענה 1.7. יהי G גרף ויהיו צמתים $v,u \in V(G)$ אזי $\left(v \underset{G}{\rightarrow} u\right) \Longrightarrow \left([v]_{\underset{G}{\rightarrow}} = [v]_{\underset{G+\{\{v,u\}\}}{\xrightarrow{\qquad}}}\right)$.

הוכחה. ... ■

טענה 1.8. יהי G גרף ויהיו צמתים $v,u \in V(G)$ אזי $\neg\left(v \underset{G}{\rightarrow} u\right) \Longrightarrow \left([v]_{\underset{G}{\rightarrow}} \uplus [u]_{\underset{G}{\rightarrow}} = [v]_{\underset{G+\{\{v,u\}\}}{\xrightarrow{\qquad}}}\right)$.

הוכחה. ... ■

מסקנה 1.1. יהי G גרף אזי $\left|V(G)/\underset{G}{\rightarrow}\right| \geq |V(G)| - |E(G)|$.

הוכחה. ... ■

1.4.1 מסלול אוילר

הגדרה 1.26 (מסלול אוילר). יהי G גרף, מסלול אוילר הינו מסלול אשר עובר דרך כל הקשתות.

הגדרה 1.27 (מעגל אוילר). יהי G גרף, מעגל אוילר הינו מסלול אוילר אשר גם מעגל.

דוגמה 1.18. ...

משפט 1.4 (משפט אוילר). יהי G גרף קשיר אזי

- (קיים מעגל אוילר ב־G)$\Longleftrightarrow$($\forall v \in V(G) . \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{even}}$).
- (קיים מסלול אוילר ב־G)$\Longleftrightarrow$($|\{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{even}}\}| \in \{0,2\}$).

הוכחה. ... ■

2 עצים

למה 2.1. יהי G גרף לא ריק וחסר מעגלים אזי קיימים לפחות שני עלים ב־G.

הוכחה. ... ■

טענה 2.1. יהי G גרף לא ריק וחסר מעגלים אזי $|E(G)| \le |V(G)| - 1$.

הוכחה. ... ■

הגדרה 2.1 (עץ)**.** גרף G יקרא עץ אם הינו קשיר וחסר מעגלים.

דוגמה 2.1. ...

מסקנה 2.1. יהי T עץ אזי $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

הוכחה. ... ■

הגדרה 2.2 (יער)**.** גרף G יקרא עץ אם הינו חסר מעגלים, כלומר הגרף מורכב ממספר רכיבי קשירות אשר הינם עצים.

דוגמה 2.2. ...

משפט 2.1 (משפט העצים)**.** יהי G גרף התב"ש

1. G עץ.
2. $(G$ חסר מעגלים$)\wedge(|E(G) = |V(G)|| - 1)$.
3. $(G$ קשיר$)\wedge(|E(G) = |V(G)|| - 1)$.
4. G קשיר מינימלי. כלומר החסרה של כל קשת תהפוך את G ללא קשיר.
5. G חסר מעגלים מקסימלי. כלומר הוספה של כל קשת תהפוך את G לבעל מעגל.
6. יהיו $v, u \in V(G)$ צמתים אזי קיים ויחיד מסלול ביניהם.

הוכחה. ... ■

2.1 עץ פורש

הגדרה 2.3 (עץ פורש)**.** יהי G גרף, תת גרף T יקרא עץ פורש ב־G אם הינו עץ וכן $V(T) = V(G)$. כלומר זהו עץ המורכב מאותם הצמתים וכן תת קבוצה של הקשתות.

דוגמה 2.3. ...

משפט 2.2. יהי G גרף קשיר אזי קיים עץ פורש ב־G.

הוכחה. ... ■

2.1.1 אלגוריתם קרוסקל

...

2.1.2 אלגוריתם פרים

...

2.2 קידוד פרופר

הגדרה 2.4. יהי G גרף ויהי $v \in V(G)$ אזי

$$G - \{v\} = \langle V(G) \setminus \{v\}, E(G) \setminus \{\{v,u\} \mid u \in V(G)\}\rangle$$

טענה 2.2. יהי T עץ ויהי צומת $v \in V(T)$ אזי $T - \{v\}$ עץ.

הוכחה. ... ■

משפט 2.3 (משפט קיילי)**.** מספר העצים על הצמתים $\{1 \ldots n\}$ הינו n^{n-2}.

הוכחה. ... ■

3 צביעת גרפים

3.1 איזומורפיזם של גרפים

הגדרה 3.1 (איזומורפיזם של גרפים)**.** יהיו G_1, G_2 גרפים, איזומורפיזם הינו פונקציה $f : V(G_1) \to V(G_2)$ חח"ע ועל המקיימת

$$\forall v,u \in V(G_1) . (\{v,u\} \in E(G_1)) \iff (\{f(v), f(u)\} \in E(G_1))$$

במקרה של קיום איזומורפיזם בין G_1 וכן G_2 נסמן $G_1 \cong G_2$ ונגיד כי הגרפים איזומורפיים.

דוגמה 3.1. ...

טענה 3.1. יהיו G_1, G_2 גרפים ויהי $f : V(G_1) \to V(G_2)$ איזומורפיזם אזי

1. $|V(G_1)| = |V(G_2)|$.
2. $|E(G_1)| = |E(G_2)|$.
3. $\forall v \in V(G_1) . \deg_{G_1}(v) = \deg_{G_2}(f(v))$.
4. תהא $\sigma \in V(G_1)^n$ אזי (σ טיול ב־G_1)$\iff$($f(\sigma)$ טיול ב־G_2).
5. (G_1 קשיר)$\iff$(G_2 קשיר).

הוכחה. ... ■

תרגיל 3.1. הוכיחו את ההכללה של שני הסעיפים האחרונים של הטענה מלעיל, יהיו G_1, G_2 גרפים ויהי $f : V(G_1) \to V(G_2)$ איזומורפיזם

4. תהא $\sigma \in V(G_1)^n$ אזי
   א) (σ מסלול ב־G_1)$\Longleftrightarrow$($f(\sigma)$ מסלול ב־G_2).
   ב) (σ מסלול פשוט ב־G_1)$\Longleftrightarrow$($f(\sigma)$ מסלול פשוט ב־G_2).
   ג) (σ מעגל ב־G_1)$\Longleftrightarrow$($f(\sigma)$ מעגל ב־G_2).
   ד) (σ מעגל פשוט ב־G_1)$\Longleftrightarrow$($f(\sigma)$ מעגל פשוט ב־G_2).
   ה) (σ מסלול אוילר ב־G_1)$\Longleftrightarrow$($f(\sigma)$ מסלול אוילר ב־G_2).
   ו) (σ מעגל אוילר ב־G_1)$\Longleftrightarrow$($f(\sigma)$ מעגל אוילר ב־G_2).
   ז) (σ מסלול המילטון ב־G_1)$\Longleftrightarrow$($f(\sigma)$ מסלול המילטון ב־G_2).
   ח) (σ מעגל המילטון ב־G_1)$\Longleftrightarrow$($f(\sigma)$ מעגל המילטון ב־G_2).
5. א) (G_1 חסר מעגלים)$\Longleftrightarrow$(G_2 חסר מעגלים).
   ב) (G_1 עץ)$\Longleftrightarrow$(G_2 עץ).

3.1.1 גרף לא מסומן

טענה 3.2. יהי G גרף אזי $\mathrm{Id}_{V(G)}$ איזומורפיזם של גרפים.

הוכחה. ... ■

טענה 3.3 (ההופכי של איזומורפיזם הוא איזומורפיזם). יהיו G_1, G_2 גרפים ויהי $f : V(G_1) \to V(G_2)$ איזומורפיזם אזי f^{-1} איזומורפיזם.

הוכחה. ... ■

טענה 3.4 (הרכבת איזומורפיזמים הוא איזומורפיזם). יהיו G_1, G_2, G_3 גרפים יהי $f : V(G_1) \to V(G_2)$ איזומורפיזם ויהי $g : V(G_2) \to V(G_3)$ איזומורפיזם אזי $g \circ f$ איזומורפיזם.

הגדרה 3.2. תהא V קבוצה אזי $\mathrm{Graph}(V) = \{\langle V, E\rangle \mid E \subseteq \mathcal{P}_2(V)\}$. כלומר קבוצת כל הגרפים על הצמתים V.

מסקנה 3.1. תהא V קבוצה אזי $\cong$ יחס שקילות על $\mathrm{Graph}(V)$.

הוכחה. ... ■

הערה 3.1. נשים לב כי מאיזומורפיזם של גרפים מסיקים כי שני הגרפים "נראים" אותו הדבר, כלומר ציור שלהם הינו זהה עד כדי שינוי שמות הצמתים, לכן ניתן לתאר גרף באופן מספק ללא קבוצת הצמתים, מכאן עולה ההגדרה הבאה,

הגדרה 3.3 (גרף לא מסומן). תהא V קבוצה אזי איבר בקבוצה $^{\mathrm{Graph}(V)}/_{\cong}$.

דוגמה 3.2. ...

משפט 3.1. יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $2^{\binom{n}{2}} \le \left|{}^{\mathrm{Graph}(\{1\dots n\})}/_{\cong}\right| \le \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$.

הוכחה. ... ■

3.2 צביעת קשתות

הגדרה 3.4 (צביעת קשתות)**.** יהי G גרף, צביעת קשתות של G היא פונקציה $f : E\left(G\right) \to A$. במקרה זה נגיד כי קשתות G נצבעו ב־$|A|$ צבעים.

הערה 3.2. נאמר כי צביעה או גרף הוא מונוכרומטי אם הוא נצבע בצבע יחיד, מונוכרומטי פירושו "צבע אחד" ביוונית.

דוגמה 3.3. ...

משפט 3.2. תהא צביעת קשתות של K_6 בשני צבעים אזי קיים תת גרף K_3 מונוכרומטי.

הוכחה. ... ■

3.2.1 מספרי רמזי

הגדרה 3.5 (מספר רמזי)**.** יהיו $s,t \ge 2$ נגדיר את $R\left(s,t\right)$ להיות ה־$n \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך שלכל צביעת קשתות של K_n בשני צבעים ניתן למצוא קליקה מונוכרומטית K_s אדומה או קליקה מונוכרומטית K_t כחולה.

מסקנה 3.2. $R\left(3,3\right) = 6$.

הוכחה. ... ■

טענה 3.5. יהיו $s,t \ge 2$ אזי $R\left(s,t\right) = R\left(t,s\right)$.

הוכחה. ... ■

משפט 3.3 (משפט רמזי)**.** יהיו $s,t \ge 2$ אזי $R\left(s,t\right)$ קיים וסופי.

הוכחה. ... ■

הערה 3.3 (מספרי רמזי ידועים). מספרי רמזי הם דבר קשה מאוד לחישוב, לכן במקום לחשב את מספר רמזי המדוייק מקובל להסתכל על האסימפטוטיקה של מספרי רמזי, האסימפטוטיקה לא תוצג כאן וגם לא תוכח, לעומת זאת נראה טבלה עבור חלק ממספרי רמזי ידועים או טווחים ידועים עבור מספרי רמזי, שימו לב כי הטבלה היא רק עבור $r \le s$ מהיות מספרי רמזי סימטריים בקלט,

s \ r	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3		6	9	14	18	23	28	36	40-42
4			18	25	36-40	49-58	59-79	73-106	92-136
5				43-48	58-85	80-133	101–194	133–282	149–381
6					102–161	115–273	134–427	183–656	204–949
7						205–497	219–840	252–1379	292–2134
8							282–1532	329–2683	343–4432
9								565–6588	581–12677
10									798–23556

3.2.2 צביעה אינסופית

משפט 3.4 (משפט קוניג). תהא צביעת קשתות של $K_{\mathbb{N}}$ לשני צבעים אזי קיימת $H \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית מונוכרומטית.

הוכחה. תהא צביעת קשתות של $K_{\mathbb{N}}$ לשני צבעים $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ מתקיים

$$f^{-1}[\{0\}] \uplus f^{-1}[\{1\}] = \mathbb{N}$$

לכן מתקיים

$$\left|f^{-1}[\{1\}]\right| \leq \aleph_0 \qquad \left|f^{-1}[\{0\}]\right| \leq \aleph_0$$

נניח בשלילה כי $\left|f^{-1}[\{0\}]\right|, \left|f^{-1}[\{1\}]\right| \in \mathbb{N}$ אזי

$$\aleph_0 = \left|f^{-1}[\{0\}] \uplus f^{-1}[\{1\}]\right| \in \mathbb{N}$$

סתירה, לכן בהכרח מתקיים

$$\left(\left|f^{-1}[\{0\}]\right| = \aleph_0\right) \vee \left(\left|f^{-1}[\{1\}]\right| = \aleph_0\right)$$

בה"כ $\left|f^{-1}[\{0\}]\right| = \aleph_0$ אזי $K_{\mathbb{N}}[f^{-1}[\{0\}]]$ קליקה מונוכרומטית אינסופית מכיוון ומתקיים $f[f^{-1}[\{0\}]] = \{0\}$. ■

משפט 3.5 (משפט ארדש־ראדו). תהא A קבוצה עבורה $|A| > 2^{\aleph_0}$ ותהא צביעת קשתות של K_A ל־$\aleph_0$ צבעים אזי קיימת $B \subseteq A$ מונוכרומטית המקיימת $|B| > \aleph_0$.

הוכחה. ... ■

3.3 צביעת קודקודים

הגדרה 3.6 (צביעת קודקודים). יהי G גרף, צביעת קודקודים של G היא פונקציה $f : V(G) \to A$. במקרה זה נגיד כי קודקודי G נצבעו ב־$|A|$ צבעים.

הגדרה 3.7 (צביעת קודקודים חוקית)**.** יהי G גרף ותהא f צביעת קודקודים, f תיקרא צביעת קודקודים חוקית אם

$$\forall v,u\in V\left(G\right).\left(\left\{v,u\right\}\in E\left(G\right)\right)\Longrightarrow\left(f\left(u\right)\neq f\left(v\right)\right)$$

כלומר אם לכל שכנים יש צבע אחר בצביעה.

דוגמה 3.4. ...

טענה 3.6. כמות הצביעות החוקיות ב־n צבעים של K_n היא $n!$.

הוכחה. ... ∎

3.3.1 מספר הצביעה

הגדרה 3.8 (גרף k־צביע)**.** יהי G גרף ויהי $k\in\mathbb{N}$, הגרף G יקרא k־צביע אם קיימת צביעת קודקודים חוקית של G ב־k צבעים.

דוגמה 3.5. ...

טענה 3.7. יהי G גרף אזי (G גרף 1־צביע)$\Longleftrightarrow$(G גרף ריק).

הוכחה. ... ∎

טענה 3.8. יהי G גרף אזי (G גרף 2־צביע)$\Longleftrightarrow$(G גרף דו צדדי).

הוכחה. ... ∎

הערה 3.4. כעת ניתן להכליל את הגדרת גרף דו צדדי לגרף n צדדי כך, גרף G יקרא n צדדי אם G הוא n־צביע.

משפט 3.6. יהי G גרף אזי (G גרף דו צדדי)$\Longleftrightarrow$(אין ב־G מעגלים באורך אי־זוגי).

הוכחה. ... ∎

הגדרה 3.9 (מספר הצביעה)**.** יהי G גרף, נגדיר את מספר הצביעה של G להיות ה־k המינימלי עבורו G הינו k־צביע ונסמנו בעזרת $\chi\left(G\right)$.

דוגמה 3.6. ...

טענה 3.9. יהי G גרף לא ריק אזי $2\leq\chi\left(G\right)\leq\left|V\left(G\right)\right|$.

הוכחה. ... ∎

חלק V

שונות

1 הגדרת המספרים

1.1 הגדרת הטבעיים

1.1.1 מערכת פאנו

הגדרה 1.1 (מערכת פאנו)**.** תהא ω קבוצה ותהא $S:\omega\to\omega$ המקיימות

- קיים איבר $a\in\omega$ עבורו מתקיים $\forall x\in\omega.S\left(x\right)\neq a$.
- חד־חד־ערכיות: $\forall x,y\in\omega.\left(S\left(x\right)=S\left(y\right)\right)\Longrightarrow\left(x=y\right)$.
- תהא $K\subseteq\omega$ המקיימת $a\in K$ וכן $\forall x\in\omega.\left(x\in K\right)\Longrightarrow\left(S\left(x\right)\in K\right)$ אזי $K=\omega$.

הערה 1.1. תהא ω,S מערכת פאנו אזי S נקראת פעולת העוקב, ונסמן בעזרת 0 את a מההגדרה הקודמת.

הגדרה 1.2 (חיבור)**.** תהא ω,S מערכת פאנו נגדיר

- איבר נטרלי: $\forall x\in\omega.x+0=x$.
- יהיו $x,y\in\omega$ אזי $x+S\left(y\right)=S\left(x+y\right)$.

הגדרה 1.3 (כפל)**.** תהא ω,S מערכת פאנו נגדיר

- איבר מאפס: $\forall x\in\omega.x\cdot0=0$.
- יהיו $x,y\in\omega$ אזי $x\cdot S\left(y\right)=x+\left(x\cdot y\right)$.

הגדרה 1.4 (המספרים הטבעיים)**.** נגדיר $0=\varnothing$ וכן $S\left(a\right)=a\cup\left\{ a\right\}$, נסמן $1=S\left(0\right)$, $2=S\left(1\right)$, $3=S\left(2\right)$ והלאה. נסמן $\mathbb{N}=\left\{ 0,1,2\ldots\right\}$.

טענה 1.1. $\mathbb{N},S$ היא מערכת פאנו.

הוכחה. נוכיח את שלושת הגדרות מערכת פאנו

- נניח בשלילה כי $S\left(a\right)=0$ אזי $a\cup\left\{ a\right\} =\varnothing$ בפרט נקבל סתירה כי $\left|a\cup\left\{ a\right\} \right|\geq1$.
- יהיו $x,y\in\mathbb{N}$ המקיימים $S\left(x\right)=S\left(y\right)$ אזי $x\cup\left\{ x\right\} =y\cup\left\{ y\right\}$, נניח בשלילה כי $x\neq y$ אזי בה"כ קיים $z\in x$ המקיים $z\notin y$ ולכן $z\in x\cup\left\{ x\right\}$ כלומר $z\in y\cup\left\{ y\right\}$, אם $z\in y$ סתירה, אחרת אם $z\in\left\{ y\right\}$ אזי $z=y$ בפרט $y\in x$, כמו כן $x\in x\cup\left\{ x\right\}$ ולכן $x\in y\cup\left\{ y\right\}$, אם $x\in\left\{ y\right\}$ אזי $x=y$ סתירה, אחרת אם $x\in y$ נקבל כי $\left(x\in y\right)\wedge\left(y\in x\right)$ סתירה לאקסיומת היסוד ב־ZFC.
- תהא $K\subseteq\mathbb{N}$ המקיימת $0\in K$ וכן $\forall x\in\mathbb{N}.\left(x\in K\right)\Longrightarrow\left(S\left(x\right)\in K\right)$, נניח בשלילה כי $K\neq\mathbb{N}$ אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ מינימלי המקיים $n\notin K$, מההנחה מתקיים $n\neq0$ בפרט קיים $a\in\mathbb{N}$ עבורו $S\left(a\right)=n$ אזי מהעובדה כי n מינימלי המקיים $n\notin K$ מתקיים $a\in K$ ולכן מהגדרת K יתקיים $n=S\left(a\right)\in K$ סתירה, בפרט $K=\mathbb{N}$.

■

1.1.2 אינדוקציה

טענה 1.2. $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ הינו יחס סדר טוב.

הוכחה. ... ■

1.2 הגדרת הממשיים

1.2.1 חתכי דדקינד

הגדרה 1.5 (חתך דדקינד)**.** ...

1.2.2 תכונות הממשיים

טענה 1.3 (שלמות הממשיים). תהא $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}$ ונניח כי קיימים ל־X חסם עליון ותחתון אזי קיימים ל־X סופרמום ואינפימום.

הוכחה. ... ■

2 מספרים אלגבריים

הגדרה 2.1 (פולינום בעל מקדמים שלמים)**.** יהיו $a_0 \dots a_n \in \mathbb{Z}$ אזי $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, כמו כן נסמן את מעלתו של f להיות $\deg(f) = n$. כמו כן נסמן את קבוצת כל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים בעזרת $\mathbb{Z}[x]$, ונסמן את כל הפולינומים בעלי דרגה מסויימת $\mathbb{Z}_{\leq n}[x] = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg(f) = n\}$.

הערה 2.1 (מעלה של פולינום). נשים לב כי מעלה של פולינום קבוע (כלומר $f(x) = a$) הינה 0, לעומת זאת נגדיר $\deg(0) = -\infty$.

למה 2.1. $\forall n \in \mathbb{N}. \left|\mathbb{Z}_{\leq n}[x]\right| = \aleph_0$.

הוכחה. עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר פונקציה $F : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}_{\leq n}[x]$ כך

$$F = \lambda \langle a_0 \dots a_{n-1} \rangle \in \mathbb{Z}^n . \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

נראה תחילה כי הפונקציה הינה הפיכה באינדוקציה, המקרה $n = 1$ נשאר לקורא, נניח עבור $n - 1$ כעת יהי $n \in \mathbb{N}$

- על, יהי $f \in \mathbb{Z}_{\leq n}[x]$ אזי קיימים $a_0 \dots a_n \in \mathbb{Z}$ עבורם $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, נשים לב כי

$$F(\langle a_0 \dots a_n \rangle) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = f$$

בפרט F על.

- חח"ע, יהיו $\langle a_0 \ldots a_{n-1}\rangle , \langle b_0 \ldots b_{n-1}\rangle \in \mathbb{Z}^n$ נניח כי

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = F\left(\langle a_0 \ldots a_{n-1}\rangle\right) = F\left(\langle b_0 \ldots b_{n-1}\rangle\right) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

נשים לב כי מהגדרת שיוויון פונקציות מתקיים

$$a_0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right)(0) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right)(0) = b_0$$

ולכן יתקיים

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-2} b_{i+1} x^i =& \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^{i-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} b_i x^i}{x} = \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right) - b_0}{x} \\ =& \frac{\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right) - a_0}{x} = \sum_{i=0}^{n-2} a_{i+1} x^i\end{aligned}$$

כעת מהנחת האינדוקציה נקבל כי $\langle b_1 \ldots b_{n-1}\rangle = \langle a_1 \ldots a_{n-1}\rangle$ מתכונת חח"ע ולכן $\langle a_0 \ldots a_{n-1}\rangle = \langle b_0 \ldots b_{n-1}\rangle$ כנדרש.

■

טענה 2.1. $|\mathbb{Z}[x]| = \aleph_0$.

הוכחה. נשים לב כי $\forall n \in \mathbb{N}. |\mathbb{Z}_{\leq n}[x]| = \aleph_0$ ולכן ממשפט איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה נקבל כי

$$|\mathbb{Z}[x]| = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{\leq n}[x]\right| \leq \aleph_0$$

כמו כן $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[x]$ ולכן $\aleph_0 = |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Z}[x]|$ אזי מקש"ב מתקיים $|\mathbb{Z}[x]| = \aleph_0$. ■

הגדרה 2.2 (מספר אלגברי)**.** $a \in \mathbb{R}$ יקרא אלגברי אם $\exists f \in \mathbb{Z}[x] . f(a) = 0$. נסמן את קבוצת האלגבריים בתור $\mathbb{A}$.

הערה 2.2. נשים לב כי $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ (ודאו מדוע).

משפט 2.1 (המשפט היסודי של האלגברה)**.** יהי $f \in \mathbb{Z}[x]$ באשר $\deg(f) = n$ אזי $|\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}| \leq n$.

הוכחה. ... ■

מסקנה 2.1. $|\mathbb{A}| = \aleph_0$.

הוכחה. נשים לב כי $|\mathbb{Z}[x]|=\aleph_0$ וכן $\forall f\in\mathbb{Z}[x].\left|\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}\right|\le\aleph_0$ אזי נקבל כי

$$|\mathbb{A}|=\left|\bigcup_{f\in\mathbb{Z}[x]}\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}\right|\le\aleph_0$$

כמו כן $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{A}$ ולכן $\aleph_0=|\mathbb{Q}|\le|\mathbb{A}|$ אזי מקש"ב מתקיים $|\mathbb{A}|=\aleph_0$. ■

3 מספרים קונגואנטים

הגדרה 3.1 (מחלק). יהיו $m,n\in\mathbb{Z}$ נאמר כי m מחלק את n ונסמן $m|n$ אם מתקיים $\exists k\in\mathbb{Z}.m\cdot k=n$.

הגדרה 3.2 (מספרים קונגואנטים). יהי $n\in\mathbb{Z}$ נאמר כי $m,k\in\mathbb{Z}$ קואונגרואנטים מודולו n ונסמן $m\equiv k \mod n$ אם מתקיים $n|m-k$.

הגדרה 3.3. יהי $n\in\mathbb{Z}$ נסמן $n\mathbb{Z}=\{\langle m,k\rangle\in\mathbb{Z}^2\mid m\equiv k\mod n\}$.

טענה 3.1. יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $n\mathbb{Z}$ יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$.

הוכחה. ... ■

הגדרה 3.4. יהי $n\in\mathbb{Z}$ נסמן $\mathbb{Z}_n={}^{\mathbb{Z}}/{}_{n\mathbb{Z}}$.

3.1 חלוקה עם שארית

משפט 3.1 (חלוקה עם שארית). יהי $n\in\mathbb{Z}$ ויהי $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ אזי קיימים ויחידים $r,q\in\mathbb{Z}$ כך שמתקיים $0\le r\le k$ עבורם $n=qk+r$. נקרא במצב כזה ל־r שארית החלוקה של n ב־k ונסמן $r=n\%k$.

הוכחה. ... ■

טענה 3.2. יהיו $z,w\in\mathbb{Z}$ ויהי $n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ אזי $z\,(n\mathbb{Z})\,w\iff(z\%n=w\%n)$. (כאשר $z\,(n\mathbb{Z})\,w$ אומר כי z,w עומדים ביחס $n\mathbb{Z}$)

הוכחה. ... ■

4 פירוק לראשוניים

משפט 4.1 (המשפט היסודי של האריתמטיקה). יהי $n\in\mathbb{N}_+\backslash\{1\}$ אזי קיימים ויחידים $p_1\ldots p_m\in\mathbb{P}$ וכן $k_1\ldots k_m\in\mathbb{N}_+$ עבורם $n=\prod_{i=1}^m p_i^{k_i}$.

הוכחה. ... ■

מסקנה 4.1. יהי $n\in\mathbb{N}_+\backslash\{1\}$ אזי $\exists p\in\mathbb{P}.p|n$.

הוכחה. יהי $n \in \mathbb{N}_+ \backslash \{1\}$ מהמשפט היסודי של האריתמטיקה מתקיים $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$ עבור $p_1 \dots p_m \in \mathbb{P}$ וכן $k_1 \dots k_m \in \mathbb{N}_+$, נשים לב כי $m \geq 1$ וכן $k_1 \geq 1$ ולכן $p_1 \cdot \left(p_1^{k_1 - 1} \cdot \prod_{i=2}^{m} p_i^{k_i}\right) = n$ כלומר $p_1 | n$ כמו כן כנאמר $p_1 \in \mathbb{P}$ ובפרט קיבלנו את הנדרש. ■

משפט 4.2 (קיום אינסוף ראשוניים)**.** קיימים אינסוף ראשוניים.

הוכחה. נניח בשלילה כי קיים מספר סופי של ראשוניים, נקרא למספר זה $n \in \mathbb{N}$, כלומר $\mathbb{P} = \{p_1 \dots p_n\}$, נגדיר $q = 1 + \prod_{i=1}^{n} p_i$ נשים לב כי $q > p_i$ ולכן $q \neq p_i$ עבור כל $i \in \{1 \dots n\}$ בפרט $q \notin \mathbb{P}$, מהמסקנה הקודמת נובע כי קיים $p_j \in \mathbb{P}$ עבורו $p_j | q$ כלומר $p_j | \left(1 + \prod_{i=1}^{n} p_i\right)$, מתכונות המחלק נקבל כי מתקיים $(p_j | 1) \wedge (p_j \mid \prod_{i=1}^{n} p_i)$ אך אם $p_j | 1$ אזי $p_j \cdot n = 1$ עבור $n \in \mathbb{N}$ וזה אפשרי אם"ם $p_j = 1$ סתירה לעובדה כי $p_j \in \mathbb{P}$, בפרט קיימים אינסוף ראשוניים. ■