חוג: תהא R קבוצה ותהיינה $+,*$ פעולות בינאריות אזי $(R,+,*)$ המקיים
- $(R,+)$ חבורה אבלית.
- אסוציאטיביות כפל: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $(a*b)*c=a*(b*c)$.
- חוג הפילוג משמאל: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$.
- חוק הפילוג מימין: לכל $a,b,c\in R$ מתקיים $(b+c)*a=(b*a)+(c*a)$.

סימון: יהי $(R,+,*)$ חוג ויהי e איבר היחידה של $(R,+)$ אזי $0_R=e$.

חוג אבלי/קומוטטיבי/חילופי: חוג $(R,+,*)$ המקיים $a*b=b*a$ לכל $a,b\in R$.

חוג בעל יחידה: חוג $(R,+,*)$ עבורו $(R,*)$ בעל איבר יחידה m וכן $m\neq 0_R$.

סימון: יהי $(R,+,*)$ חוג ויהי m איבר היחידה של $(R,*)$ אזי $1_R=m$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{Z}_n$ חוג אבלי בעל יחידה וכן $\mathbb{Z}$ חוג אבלי בעל יחידה.

טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $R[x_1\dots x_n]$ חוג אבלי בעל יחידה.

תחום שלמות: חוג אבלי R עבורו לכל $a,b\in R$ המקיימים $ab=0$ מתקיים $(a=0)\vee(b=0)$.

טענה: יהי R תחום שלמות ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $R[x_1\dots x_n]$ תחום שלמות.

הגדרה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי $R^\times=\{a\in R\mid \exists h\in R.ah=ha=1\}$.

למה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי $(R^\times,*)$ חבורה.

טענה: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי $(R[x])^\times=R^\times$.

שדה: חוג אבלי בעל יחידה $\mathbb{F}$ המקיים $\mathbb{F}^\times=\mathbb{F}\backslash\{0\}$.

הגדרה: יהי R תחום שלמות באשר $R\neq\{0\}$ אזי $\sim_{\text{Frac}}=\left\{((a,b),(c,d))\in(R\times(R\backslash\{0\}))^2\mid ad=bc\right\}$.

סימון: יהי R תחום שלמות באשר $R\neq\{0\}$ אזי $\text{Frac}(R)={}^{R}/_{\sim_{\text{Frac}}}$.

הגדרה: יהי R תחום שלמות באשר $R\neq\{0\}$ ויהיו $(a,b),(c,d)\in R\times(R\backslash\{0\})$ אזי $[(a,b)]_{\text{Frac}}+[(c,d)]_{\text{Frac}}=[(ad+cb,bd)]_{\text{Frac}}$ וכן $[(a,b)]_{\text{Frac}}\cdot[(c,d)]_{\text{Frac}}=[(ac,bd)]_{\text{Frac}}$.

טענה שדה השברים: יהי R תחום שלמות באשר $R\neq\{0\}$ אזי $\text{Frac}(R)$ שדה.

טענה: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי $\mathbb{K}[x]$ תחום שלמות.

פונקציות רציונליות: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי $\mathbb{K}(x)=\text{Frac}(\mathbb{K}[x])$.

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי $\mathbb{K}(x)$ שדה.

הומומורפיזם בין חוגים: יהיו R,S חוגים אזי $\nu:R\to S$ המקיימת
- משמרת כפל: לכל $a,b\in R$ מתקיים $\nu(ab)=\nu(a)\nu(b)$.
- משמרת חיבור: לכל $a,b\in R$ מתקיים $\nu(a+b)=\nu(a)+\nu(b)$.

גרעין: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי $\ker(\nu)=\nu^{-1}[\{0\}]$.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי $\ker(\nu),\text{Im}(\nu)$ חוגים.

מונומורפיזם: יהיו R,S חוגים אזי הומומורפיזם $\nu:R\to S$ באשר ν חח"ע.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי (ν מונומורפיזם)$\Longleftrightarrow$($\ker(\nu)=0$).

אפימורפיזם: יהיו R,S חוגים אזי הומומורפיזם $\nu:R\to S$ באשר ν על.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי (ν אפימורפיזם)$\Longleftrightarrow$($\text{Im}(\nu)=S$).

איזומורפיזם: יהיו R,S חוגים אזי הומומורפיזם $\nu:R\to S$ באשר ν חח"ע ועל.

סימון: יהיו R,S חוגים איזומורפיים אזי $R\simeq S$.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי (ν איזומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(ν מונומורפיזם וכן ν אפימורפיזם).

אידאל: יהי R חוג אבלי אזי $I\subseteq R$ המקיימת $I\cdot R\subseteq I$ וכן $I+I\subseteq I$.

טענה: יהי R חוג אבלי ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי $(I,+)\leq(R,+)$.

טענה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם אזי $\ker(\nu)$ אידאל.

משפט: יהי R חוג אבלי בעל יחידה אזי (R שדה)$\Longleftrightarrow$(לכל אידאל $I\subseteq R$ מתקיים $I\in\{\{0\},R\}$).

מסקנה: יהיו $\mathbb{F},\mathbb{K}$ שדות ויהי $\nu:\mathbb{F}\to\mathbb{K}$ הומומורפיזם אזי (ν מונומורפיזם)$\vee$($\nu=0$).

הגדרה: יהי R חוג אבלי ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי ${}^{R}/_{I}=\{a+I\mid a\in R\}$.

טענה: יהי R חוג אבלי יהי $I\subseteq R$ אידאל ויהיו $a,b,c,d\in R$ באשר $a+I=c+I$ וכן $b+I=d+I$ אזי $(ab)+I=(cd)+I$.

הגדרה: יהי R חוג אבלי יהי $I\subseteq R$ אידאל ויהיו $a,b\in R$ אזי $(a+I)(b+I)=(ab)+I$.

משפט חוג מנה: יהי R חוג אבלי ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי R/I חוג אבלי.

טענה: יהי R חוג אבלי יהי $I\subseteq R$ אידאל ונגדיר $p:R\to R/I$ כך $p\left(a\right)=a+I$ אזי p הינו אפימורפיזם חוגים וכן $\ker\left(p\right)=I$.

למה: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם חוגים אזי $R/\ker\left(\nu\right)$ חוג.

משפט: יהיו R,S חוגים ויהי $\nu:R\to S$ הומומורפיזם חוגים אזי $R/\ker\left(\nu\right)\simeq\mathrm{Im}\left(\nu\right)$.

אידאל ראשי: יהי R חוג אבלי אזי אידאל $I\subseteq R$ עבורו קיים $a\in R$ המקיים $I=aR$.

אידאל ראשוני: יהי R חוג אבלי אזי אידאל $I\subseteq R$ עבורו לכל $a,b\in R$ המקיימים $ab\in I$ מתקיים $\left(a\in I\right)\vee\left(b\in I\right)$.

אידאל מקסימלי: יהי R חוג אבלי אזי אידאל $I\subseteq R$ עבורו לכל אידאל $J\subseteq R$ לא מתקיים $I\subseteq J$.

משפט: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי

- (I אידאל ראשוני)$\Longleftrightarrow$(R/I תחום שלמות).
- (I אידאל מקסימלי)$\Longleftrightarrow$(R/I שדה).

משפט: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי

- לכל אידאל $I\subseteq\mathbb{K}\left[x\right]$ מתקיים כי I אידאל ראשי.
- יהי $f\in\mathbb{K}\left[x\right]$ אזי ($f\cdot\mathbb{K}\left[x\right]$ מקסימלי)$\Longleftrightarrow$($f\cdot\mathbb{K}\left[x\right]$ ראשוני)$\Longleftrightarrow$(f אי־פריק ב־$\mathbb{K}\left[x\right]$).

משפט: יהי R חוג אבלי בעל יחידה ויהי $I\subseteq R$ אידאל אזי קיים אידאל מקסימלי $M\subseteq R$ עבורו $I\subseteq M$. דורש AC

משפט: יהי $f\in\mathbb{Z}\left[x\right]\backslash\left\{0\right\}$ ויהיו $g,h\in\mathbb{Q}\left[x\right]$ באשר $f=gh$ אזי קיימים $r,s\in\mathbb{Q}$ המקיימים $sh,rg\in\mathbb{Z}\left[x\right]$ וכן $f=\left(rg\right)\left(sh\right)$.

מסקנה גאוס: יהי $f\in\mathbb{Z}\left[x\right]$ מתוקן ויהי $d\in\mathbb{Q}\left[x\right]$ אי־פריק מתוקן באשר $d|f$ אזי $d\in\mathbb{Z}\left[x\right]$.

שורש של פולינום: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}\left[x\right]\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\alpha\in\mathbb{K}$ המקיים $f\left(\alpha\right)=0$.

משפט בז'ו: יהי $\mathbb{K}$ שדה יהי $f\in\mathbb{K}\left[x\right]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{K}$ אזי (α שורש של f)$\Longleftrightarrow$($\left(x-\alpha\right)|f$).

מסקנה: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}\left[x\right]\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\left|\left\{\alpha\in\mathbb{K}\mid f\left(\alpha\right)=0\right\}\right|\le\deg\left(f\right)$.

שורש פשוט: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}\left[x\right]\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\alpha\in\mathbb{K}$ באשר α שורש של f וכן $\left(x-\alpha\right)^{2}\nmid f$.

שורש מרובה: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}\left[x\right]\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\alpha\in\mathbb{K}$ באשר α שורש של f וכן $\left(x-\alpha\right)^{2}|f$.

נגזרת של פולינום: יהי $\mathbb{K}$ שדה יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהיו $a_{0}\ldots a_{n}\in\mathbb{K}$ אזי $\left(\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}\right)'=\sum_{i=1}^{n}a_{i}x^{i-1}$.

משפט: יהי $\mathbb{K}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{K}\left[x\right]\backslash\left\{0\right\}$ אזי (כל השורשים של f הם פשוטים)$\Longleftrightarrow$($\gcd\left(f,f'\right)=1$).

סימון: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{F}_{p}=\mathbb{Z}_{p}$.

שדה הרחבה: יהי $\mathbb{K}$ שדה אזי שדה $\mathbb{L}$ המקיים $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{L}$.

סימון: יהיו $\mathbb{K},\mathbb{L}$ שדות באשר $\mathbb{L}$ הרחבה של $\mathbb{K}$ אזי $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

הערה: יהיו $\mathbb{K},\mathbb{L}$ שדות באשר $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ אזי נתייחס לביטוי $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ כאובייקט.

הומומורפיזם הרחבות: יהיו $\mathbb{K},\mathbb{F},\mathbb{L}$ שדות באשר $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ הרחבה וכן $\mathbb{L}/\mathbb{F}$ הרחבה אזי שיכון $\nu:\mathbb{K}/\mathbb{F}\to\mathbb{L}/\mathbb{F}$ המקיים $\nu_{\restriction_{\mathbb{F}}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{F}}$.

שדה פשוט: שדה $\mathbb{F}$ עבורו לא קיים שדה $\mathbb{K}$ המקיים $\mathbb{K}\subset\mathbb{F}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\bigcap\left\{\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}\mid\text{שדה }\mathbb{K}\right\}$ שדה פשוט.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי קיים ויחיד שדה פשוט $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה פשוט אזי $\left(\mathbb{F}\simeq\mathbb{Q}\right)\vee\left(\exists p\in\mathbb{P}.\mathbb{F}\simeq\mathbb{F}_{p}\right)$.

מציין של שדה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{F}$ שדה פשוט אזי

- אם $\mathbb{K}\simeq\mathbb{Q}$ אז $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)=0$.
- אם קיים $p\in\mathbb{P}$ עבורו $\mathbb{K}\simeq\mathbb{F}_{p}$ אז $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)=p$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה המקיים $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)>0$ אזי לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)\cdot a=0$.

מורפיזם פרובניוס: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהי $\mathbb{K}$ שדה המקיים $\mathrm{char}\left(\mathbb{K}\right)=p$ אזי נגדיר $\mathrm{Fr}_{p}:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ כך $\mathrm{Fr}_{p}\left(a\right)=a^{p}$.

משפט: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהי $\mathbb{K}$ שדה המקיים $\mathrm{char}\left(\mathbb{K}\right)=p$ אזי Fr_{p} מונומורפיזם.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה באשר $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq2$ ויהיו $a,b,c\in\mathbb{F}$ באשר $a\neq0$ אזי $\mathrm{sols}\left(ax^{2}+bx+c\right)=\left\{\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}\right\}$.