פולינום: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$ אזי $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$.

שיוויון פולינומים: יהיו $f(x)=\sum a_ix^i, g(x)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $(f=g)\iff(\forall i.a_i=b_i)$.

חיבור פולינומים: יהיו $f(x)=\sum a_ix^i, g(x)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $(f+g)(x)=\sum(a_i+b_i)x^i$.

כפל פולינומים: יהיו $f(x)=\sum a_ix^i, g(x)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $(fg)(x)=\sum_k\left(\sum_{m=0}^{k}a_mb_{k-m}\right)x^k$.

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}[x]=\left\{\sum_{i=0}^{n}a_ix^i \mid a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{F}\right\}$.

משפט: ($\mathbb{F}[x]$ חוג)$\wedge$($\mathbb{F}[x]$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$).

מחלק: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי $g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ עבורו $\exists h\in\mathbb{F}[x].gh=f$.

סימון: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ ויהי $g\in\mathbb{F}[x]$ מחלק אזי $(g\mid f)\wedge\left(f\vdots g\right)$.

דרגה: יהי $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ פולינום אזי $\deg\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)=\begin{cases}-\infty & f=0\\ \max\{k\mid a_k\neq 0\} & else\end{cases}$.

למה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $(\deg(fg)=\deg(f)+\deg(g))\wedge(\deg(f+g)\leq\max\{\deg(f),\deg(g)\})$.

מסקנה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ אזי $(g\mid f)\implies(\deg(g)\leq\deg(f))$.

מסקנה: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי $(f\in\mathbb{F}\setminus\{0\})\iff\left(\frac{1}{f}\in\mathbb{F}[x]\right)$.

תחום שלמות: חוג קומוטטיבי R המקיים $\forall a,b\in R\setminus\{0\}.ab\neq 0$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}[x]$ תחום שלמות.

משפט: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ עבורם $\deg(g)\leq\deg(f)$ אזי $\exists! q,r\in\mathbb{F}[x].(f=gq+r)\wedge(\deg(r)\leq\deg(r))$.

שארית: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $r\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $(f=gq+r)\wedge(\deg(r)\leq\deg(r))$.

מנה חלקית: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $q\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $(f=gq+r)\wedge(\deg(r)\leq\deg(r))$.

הערה: אם $r=0$ אזי במקום מנה חלקית נאמר מנה שלמה.

אידיאל: יהי R חוג קומוטטיבי אזי $I\subseteq R$ המקיים $\forall a\in I.(\forall b\in I.a+b\in I)\wedge(\forall c\in R.ca\in I)$.

האידיאל הנוצר: יהיו $f_1\ldots f_n\in R$ אזי $\langle f_1\ldots f_n\rangle=\{\sum_{i=1}^{n}f_ig_i\mid g_1\ldots g_n\in R\}$.

טענה: יהי R חוג קומוטטיבי ויהיו $f_1\ldots f_n\in R$ אזי $\langle f_1\ldots f_n\rangle$ אידיאל.

למה: יהיו $f_1\ldots f_n\in R$ ויהי $I\subseteq R$ אידיאל המקיים $f_1,\ldots,f_n\in I$ אזי $\langle f_1\ldots f_n\rangle\subseteq R$.

אידיאל ראשי: אידיאל $I\subseteq R$ המקיים $\exists f\in R.I=\langle f\rangle$.

תחום ראשי: תחום שלמות R עבורו כל אידיאל ראשי.

משפט: יהי $I\subseteq\mathbb{F}[x]$ אידיאל אזי I ראשי.

מחלק משותף: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ המקיים $\forall i.g\mid f_i$.

מחלק משותף מקסימלי: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\max_{\deg}\{g\mid\forall i.(g\mid f_i)\}$.

משפט: מחלק משותף מקסימלי קיים ויחיד עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי המחלק המשותף המקסימלי הינו $\gcd(f_1\ldots f_n)$.

טענה: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ יהי g מחלק משותף אזי $g\mid\gcd(f_1\ldots f_n)$.

משפט: היו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\exists h_1\ldots h_n\in\mathbb{F}[x].\gcd(f_1\ldots f_n)=\sum_{i=1}^{n}h_if_i$.

אלגוריתם אוקלידס: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ עבורם $f=pg+r$ וכן $r\neq 0$ אזי $\gcd(f,g)=\gcd(g,r)$.

פולינומים זרים: $f,g\in\mathbb{F}[x]$ המקיימים $\gcd(f,g)=1$.

מסקנה: יהיו $f,g,h\in\mathbb{F}[x]$ אזי $(h\neq 0)\wedge(h\mid fg)\wedge(\gcd(f,h)=1)\implies(h\mid g)$.

הפיך: יהי R תחום שלמות אזי $u\in R\setminus\{0\}$ המקיים $u\mid 1$.

הגדרה: יהי R תחום שלמות אזי $R^*=\{u\in R\mid(u\mid 1)\}$.

אי־פריק (א"פ): $p\in R\backslash R^*$ המקיים $\forall a,b\in R.(p=ab)\implies(a\in R^*)\vee(b\in R^*)$.

ראשוני: $p\in R\setminus\{0\}$ המקיים $\forall a,b\in R.(p\mid ab)\implies(p\mid a)\vee(p\mid b)$.

למה: יהי $p\in\mathbb{F}[x]$ א"פ אזי p ראשוני.

חברים/שקולים: $f,g\in R$ המקיימים $\exists u\in R^*.fu=g$.

טענה: יהיו $f,g\in R$ אזי (f,g חברים)$\iff$($(f\mid g)\wedge(g\mid f)$).

משפט: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי קיימים ויחידים $p_1\ldots p_n\in\mathbb{F}[x]$ א"פ עבורם $\prod p_i=f$.

כפולה משותפת: יהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ המקיים $\forall i.f_i\mid g$.

כפולה משותפת מינימלית: יהיו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\min_{\deg}\{g\mid\forall i.(f_i\mid g)\}$.

משפט: כפולה משותפת מינימלית קיימת ויחידה עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי הכפולה המשותפת המינימלית הינה $\text{lcm}(f_1\dots f_n)$.

טענה: יהיו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}[x]$ יהי g כפולה משותפת אזי $\text{lcm}(f_1\dots f_n)\mid g$.

שורש: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\alpha\in\mathbb{F}$ המקיים $f(\alpha)=0$.

משפט בז'ו: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$

- נניח כי $f(x)=p(x)(x-\alpha)+r(x)$ אזי $f(\alpha)=r(\alpha)$.
- (α שורש של f)$\Longleftrightarrow((x-\alpha)\mid f)$.

ריבוי שורש: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$ אזי $\max\left\{k\in\mathbb{N}\mid\left((x-\alpha)^k\mid f\right)\right\}$.

משפט: יהי $f\in\mathbb{F}[x]\backslash\{0\}$ ויהיו $r_1\dots r_n\in\mathbb{F}$ ריבוי שורשים שונים אזי $\sum_{i=1}^n r_i\le\deg(f)$.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אינסופי עבורו $\forall\alpha\in\mathbb{F}.f(\alpha)=g(\alpha)$ אזי $f=g$.

שדה סגור אלגברית: שדה $\mathbb{F}$ המקיים $\forall f\in\mathbb{F}_{\ge1}[x].\exists\alpha\in\mathbb{F}.f(\alpha)=0$.

המשפט היסודי של האלגברה: $\mathbb{C}$ שדה סגור אלגברית.

משפט: יהי $f\in\mathbb{R}[x]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{C}$ אזי $(f(\alpha)=0)\Longleftrightarrow(f(\overline{\alpha})=0)$.

מסקנה: יהי $f\in\mathbb{R}[x]$ אזי קיימים $p_1\dots p_n\in\mathbb{R}[x]$ ליניאריים וכן $q_1\dots q_m\in\mathbb{R}[x]$ ממעלה שנייה ללא שורש ממשי המקיימים $f=\prod p_i\prod q_i$.

משפט: יהי $f=\sum a_ix^i\in\mathbb{Z}[x]$ המקיים $\gcd(a_0\dots a_n)=1$ וכן $a_na_0\neq0$ ויהי $\alpha=\frac{p}{q}$ עבור $\gcd(p,q)=1$

- $(f(\alpha)=0)\Longrightarrow(p\mid a_0)\wedge(q\mid a_n)$.
- $(\alpha\neq1)\Longrightarrow((p-q)\mid f(1))$.
- $(\alpha\neq-1)\Longrightarrow((p+q)\mid f(-1))$.

קריטריון אייזנשטיין: יהי $f=\sum a_ix^i\in\mathbb{Z}[x]$ המקיים $\gcd(a_0\dots a_n)=1$ וכן $a_na_0\neq0$ ויהי $p\in\mathbb{P}$ עבורו $(\gcd(a_n,p)=1)\wedge(\forall 0\le i\le n-1.p\mid a_i)\wedge\left(p^2\nmid a_0\right)$ אזי f אינו פריק מעל $\mathbb{Q}[x]$.

נגזרת: יהי $f=\sum_{i=0}^n a_ix^i\in\mathbb{F}[x]$ אזי $f'=\sum_{i=1}^n ia_ix^{i-1}$.

סימון: נגדיר $\mathcal{D}:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]$ כך $\mathcal{D}(f)=f'$.

טענה: ($\mathcal{D}$ ט"ל)$\wedge(\mathcal{D}(fg)=g\mathcal{D}(f)+f\mathcal{D}(g))$.

שורש פשוט: שורש שהריבוי שלו 1.

שורש מרובה: שורש שהריבוי שלו גדול מ־1.

משפט: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$ שורש אזי (α שורש מרובה)$\Longleftrightarrow$(α שורש של f').

מאפיין שדה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\text{char}(\mathbb{F})=\min\{m\in\mathbb{N}\mid m\cdot1=0\}$ ואם אינו מוגדר אזי $\text{char}(\mathbb{F})=0$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה המקיים $\text{char}(\mathbb{F})=0$ אזי (α שורש מריבוי r של f)$\Longleftarrow$(α שורש מריבוי $r-1$ של f').

סימון: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי הצורה הקנונית היא $A_{\text{can}}^{\mathbb{F}}$.

אופרטור ליניארי/closed loop: $\varphi\in\text{Hom}(L)$.

open loop: $\varphi\in\text{Hom}(\mathcal{L},\mathcal{M})$.

סימון: $\text{GL}(n,\mathbb{F})=\{A\in M_n(\mathbb{F})\mid|A|\neq0\}$.

מטריצות דומות: $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $\exists C\in\text{GL}(n,\mathbb{F}).B=C^{-1}AC$.

ערך עצמי (ע"ע): יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי $\lambda\in\mathbb{F}$ עבורו $\exists v\in L\backslash\{0\}.\varphi(v)=\lambda v$.

הספקטרום: יהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{Spec}_{\mathbb{F}}(A)=\{\lambda\in\mathbb{F}\mid$ ע"ע של A $\lambda\}$.

וקטור עצמי (ו"ע): יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי $V\ni v\neq0$ עבורו $\exists\lambda\in\mathbb{F}.\varphi(v)=\lambda v$.

תת מרחב עצמי (מ"ע): יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע אזי $L_\lambda=\{v\in L\mid\varphi(v)=\lambda v\}$.

למה: ($L_\lambda\subseteq L$ תמ"ו)$\wedge(L_\lambda=\ker(\varphi-\lambda I))$.

בסיס עצמי: יהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי בסיס $\mathcal{B}$ המורכב מוקטורים עצמיים של φ.

העתקה לכסינה: $\varphi\in\text{Hom}(L)$ עבורה קיים בסיס $\mathcal{B}$ המקיים $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ אלכסונית.

משפט: יהי L מ"ו נ"ס ויהי $\varphi\in\text{Hom}(L)$ אזי (φ ניתן ללכסון)$\Longleftrightarrow$(קיים בסיס עצמי ל־L).

הערה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה אזי A_{can} צורה אלכסונית.

למה: יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ שונים אזי $\bigoplus_{i=1}^n L_{\lambda_i}$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ בעל $\lambda_1,\ldots,\lambda_{\dim(L)}$ ע"ע שונים אזי φ ניתן ללכסון.

פולינום אופייני: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A(x)=\det(xI-A)$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A\in\mathbb{F}[x]$.

למה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהיו $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ בסיסים אזי $p_{[\varphi]_{\mathcal{B}_1}}(x)=p_{[\varphi]_{\mathcal{B}_2}}(x)$.

פולינום אופייני: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $p_\varphi(x)=p_{[\varphi]_{\mathcal{B}}}(x)$.

פולינום מתוקן: $\sum_{i=0}^n a_ix^i\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $a_n=1$.

משפט: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי (p_φ פולינום מתוקן)$\wedge(\deg(p_\varphi)=\dim(L))$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ עבורו $p_\varphi=\sum_{i=0}^n a_ix^i$ אזי

- $a_{n-1}=-\text{trace}(A)$.
- $a_0=(-1)^n\det(A)$

למה: תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $(p_A=p_{A^t})\wedge(p_{AB}=p_{BA})$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{trace}(AB)=\text{trace}(BA)$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $(\lambda\in\text{Spec}(A))\iff(p_A(\lambda)=0)$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ יהי $x\in\mathbb{F}^n$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי (x ו"ע של ע"ע λ)$\iff(x\in\ker(\lambda I-A))$.

חיבור מרוכב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,c,d\in L$ אזי $\langle a,b\rangle+_{\mathbb{C}}\langle c,d\rangle=\langle a+c,b+d\rangle$.

כפל מרוכב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,c,d\in L$ אזי $\langle a,b\rangle\cdot_{\mathbb{C}}\langle c,d\rangle=\langle ac-bd,ad+bc\rangle$.

מירכוב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $L_{\mathbb{C}}=\left\langle L^2,+_{\mathbb{C}},*_{\mathbb{C}}\right\rangle$.

סימון: יהי $\langle a,b\rangle\in L_{\mathbb{C}}$ אזי $a+ib=\langle a,b\rangle$.

טענה: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $L_{\mathbb{C}}$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $\alpha+i\beta$ ע"ע עבור ו"ע $u+iv$ אזי $(Au=\alpha u-\beta v)\wedge(Av=\beta u+\alpha v)$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ באשר $A^{\mathbb{C}}_{\text{can}}=\text{Diag}(\lambda_1\ldots\lambda_m,\alpha_1+i\beta_1\ldots\alpha_\ell+i\beta_\ell)$ אזי

$$A^{\mathbb{R}}_{\text{can}}=\text{Diag}\left(\lambda_1\ldots\lambda_m,\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\-\beta_1&\alpha_1\end{pmatrix}\ldots\begin{pmatrix}\alpha_\ell&\beta_\ell\\-\beta_\ell&\alpha_\ell\end{pmatrix}\right)$$

מסקנה: תהא $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עם ו"ע $u_1+iv_1,\ldots,u_\ell+iv_\ell$ אזי $u_1\ldots u_\ell,v_1\ldots v_\ell$ בסיס קנוני מעל $\mathbb{R}$.

ריבוי גאומטרי: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_g(\lambda)=\dim(L_\lambda)$.

ריבוי אלגברי: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_a(\lambda)=\max\left(n\in\mathbb{N}\mid((x-\lambda)^n\,|f_A(x))\right)$.

למה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_g(\lambda)\le r_a(\lambda)$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי (φ לכסין מעל $\mathbb{F}$)$\iff$($p_\varphi(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים)$\wedge$(לכל ע"ע $r_g(\lambda)=r_a(\lambda)$).

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ לכסין ויהיו $\lambda_1\ldots\lambda_n$ ע"ע אזי בצורה הקנונית כל λ_i מופיע $r_a(\lambda)$ פעמים.

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ לכסין אזי הצורה האלכסונית יחידה עד כדי תמורת האיברים על האלכסון.

הגדרה: יהי $p(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$ ותהא $A\in M_m(\mathbb{F})$ אזי $p(A)=\sum_{i=0}^n a_iA^i$.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס של L ויהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $[f(\varphi)]_{\mathcal{B}}=f([\varphi]_{\mathcal{B}})$.

פולינום מינימלי: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $m_\varphi=\min_{\deg}(p\in\mathbb{F}[x]\mid p(\varphi)=0)$.

הערה: הפולינום המינימלי הינו מתוקן.

משפט: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $m_\varphi(x)$ קיים ויחיד.

משפט: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי $p\in\mathbb{F}[x]$ המקיים $p(\varphi)=0$ אזי $m_\varphi|p$.

טענה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $\{p\in\mathbb{F}[x]\mid p(\varphi)=0\}$ אידיאל של $\mathbb{F}[x]$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $\langle m_\varphi\rangle=\{p\in\mathbb{F}[x]\mid p(\varphi)=0\}$.

משפט קיילי המילטון: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A(A)=0$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $m_A|p_A$.

למה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $m_\varphi(\lambda)=0$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A\mid m_A^n$.

משפט הפירוק הפרימרי: תהא $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ זרים אזי $\ker((f\circ g)(\varphi))=\ker(f(\varphi))\oplus\ker(g(\varphi))$.

מסקנה: תהא $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ זרים בזוגות אזי $\ker\left(\prod f_i(\varphi)\right)=\bigoplus\ker(f_i(\varphi))$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $\lambda_1\neq\ldots\neq\lambda_k$ כל הע"ע אזי (A לכסינה) $\Longleftrightarrow$ $(m_A(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i))$.

למה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה עבורה $p_A(x)=\prod(x-\lambda_i)$ ויהי $g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $p_{g(A)}(x)=\prod(x-g(\lambda))$.

הגדרה: תהא $G(x)$ אנליטית עבורה $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ מתכנס בתחום $|x|<R$ אזי $G(A)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$.

למה: תהא $G(x)$ אנליטית עבורה $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ מתכנס בתחום $|x|<R$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה עם ע"ע $\lambda_1\ldots\lambda_n$ המקיימים $\forall i\in[n]\,.\,|\lambda_i|<R$

- הטור $G(A)$ מתכנס.
- $\mathrm{Spec}(F(A))=\{F(\lambda)\mid\lambda\in\mathrm{Spec}(A)\}$.
- $\left(A_{\text{can}}=C^{-1}AC\right)\Longrightarrow\left(F(A)_{\text{can}}=C^{-1}F(A)C=F(A_{\text{can}})\right)$.

לכסון סימולטני: $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}(L)$ לכסינות המקיימות קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_\mathcal{B},[\psi]_\mathcal{B}$ אלכסוניות.

למה: תהא A מטריצת בלוקים אלכסונית לכסינה אזי כל בלוק לכסין.

משפט: יהיו $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}(L)$ לכסינות אזי (φ,ψ לכסינות סימולטנית)$\Longleftrightarrow(\varphi\psi=\psi\varphi)$.

תת מרחב אינווריאנטי/שמור: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ אזי תמ"ו $M\subseteq L$ המקיים $\varphi(M)\subseteq M$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהי $M\subseteq L$ תת מרחב איווריאנטי אזי $\varphi_{\restriction M}$ ט"ל.

למה: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ אזי $\{0\},L,\ker(\varphi),\mathrm{Im}(\varphi)$ איווריאנטים.

משפט: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי L_λ איווריאנטי.

למה: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהי M איווריאנטי אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_\mathcal{B}=\begin{pmatrix}[\varphi_{\restriction M}]_\mathcal{B} & P\\ & A\end{pmatrix}$.

משפט: יהי $L=\bigoplus_{i=1}^{k}L_i$ איווריאנטים אזי קיים בסיס $\mathcal{B}_1\ldots\mathcal{B}_k$ עבורו $[\varphi]_\mathcal{B}=\mathrm{Diag}\left([\varphi_{\restriction L_1}]_{\mathcal{B}_1},\ldots,[\varphi_{\restriction L_k}]_{\mathcal{B}_k}\right)$.

מטריצה דו אלכסונית: $A\in M_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mu_{n-1}\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

תיבת/בלוק ג'ורדן: יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $\in M_n(\mathbb{F})$ $J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

צורת/מטריצת ג'ורדן: יהיו $\lambda_1\ldots\lambda_n\in\mathbb{F}$ וכן $k_1\ldots k_n$ אזי $\mathrm{Diag}(J_{k_1}(\lambda_1)\ldots J_{k_n}(\lambda_n))$.

משפט ג'ורדן: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ עבורו $p_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_\mathcal{B}$ מטריצת ג'ורדן.

טענה: צורת ג'ורדן מוגדרת באופן יחיד עדי כדי תמורת תיבות ג'ורדן.

הערה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ בעלת צורת ג'ורדן אזי A_{can} צורת ג'ורדן.

מסקנה: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A,B דומות)$\Longleftrightarrow(A_{\text{can}}=B_{\text{can}})$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי A^t דומה אל A.

דרגת נילפוטנטיות: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\eta(A)=\min(n\in\mathbb{N}\mid A^n=0)$.

טענה: יהי $n\geq 2$ אזי ($J_n(\lambda)$ אינה לכסינה)$\wedge(\eta(J_n(\lambda))=n)$.

מסקנה: יהי $n\geq 2$ אזי $m_{J_n(\lambda)}=(x-\lambda)^n=p_{J_n(\lambda)}(x)$.

מרחב עצמי מוכלל: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהי μ ע"ע אזי $L_\mu^{(k)}=\ker(\varphi-\mu I)^k$.

למה: $L_\mu=L_\mu^{(1)}\subseteq\ldots\subseteq L_\mu^{(r_g(\lambda))}=L$.

למה: $L_\mu^{(i)}$ אינבריאנטי ביחס אל φ.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\dim\left(L_\mu^{(k)}\right)\leq r_a(\mu)$.

למה: נניח כי $p_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)^{k_i}$ עבור $\lambda_1\neq\ldots\neq\lambda_n$ אזי $L=\bigoplus_{i=1}^{n}L_{\lambda_i}^{(k_i)}$.

בלתי תלויה ביחס לתת מרחב: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ אזי $v_1\ldots v_k\in L$ המקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^k.\left(\sum\alpha_iv_i\in M\Longrightarrow\alpha=0\right)$.

קו־בסיס: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ אזי $\max_{|A|}\{A\subseteq L\mid M \text{ בלתי תלויה ביחס אל } A\}$.

טענה: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ עם בסיס $\mathcal{B}$ אזי קו־בסיס $\mathcal{C}$ הוא השלמה לבסיס של L.

למה: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ יהי μ ע"ע יהי $k\in\mathbb{N}_+$ ויהי $e_1\ldots e_m$ קו־בסיס של $L_\mu^{(k)}$ ביחס אל $L_\mu^{(k-1)}$

- $(\varphi-\mu I)(e_1)\ldots(\varphi-\mu I)(e_m)\in L_\mu^{(k-1)}$.

- $(\varphi-\mu I)(e_m)\dots(\varphi-\mu I)(e_1)$ בלתי תלויים ביחס אל $L_\mu^{(k-2)}$.

למה: תהא $\varphi\in\text{Hom}(L)$ עבורה $[\varphi]_B=\text{Diag}(I(\lambda_1)\dots I(\lambda_k))$ באשר $I(\lambda_i)=\text{Diag}\left(J_{k_1^i}(\lambda_i)\dots J_{k_{n_i}^i}(\lambda_i)\right)$

- כל הע"ע של φ הם $\lambda_1,\dots,\lambda_k$.
- $r_a(\lambda_i)=\sum_{j=1}^{n_i}k_j^i$.
- $r_g(\lambda_i)=n_i$.
- הריבוי של λ_i בפולינום המינימלי הוא $\max\left(k_1^i,\dots,k_{n_i}^i\right)$.
- $\left|\left\{j\mid k_j^i\geq r\right\}\right|=\dim\left(\ker\left((T-\lambda_iI)^r\right)\right)-\dim\left(\ker\left((T-\lambda_iI)^{r-1}\right)\right)$.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $J_n(a+ib,a-ib)_{\text{can}}^{\mathbb{R}}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}&&&\\&\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}&\ddots&&\\&&\ddots&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&&&\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{2k\times2k}$.

למה: יהי $n,m\in\mathbb{N}$ וכן $\mu\in\mathbb{F}$ אזי $J_n(\mu)^m=\begin{pmatrix}\mu^m&n\mu^{m-1}&\binom{m}{2}\mu^{m-2}&&\\&\mu^m&&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\binom{m}{2}\mu^{m-2}\\&&&\mu^m&m\mu^{m-1}\\&&&&\mu^m\end{pmatrix}$.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ וכן $\mu\neq0$ אזי $J_n(\mu)^{-1}=\begin{pmatrix}\mu^{-1}&-\mu^{-2}&\mu^{-3}&&\\&\mu^{-1}&-\mu^{-2}&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\mu^{-3}\\&&&\mu^{-1}&-\mu^{-2}\\&&&&\mu^{-1}\end{pmatrix}$.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ וכן $\mu\in\mathbb{F}$ אזי $\exp(J_n(\mu))=e^\mu\begin{pmatrix}1&\frac{1}{1!}&\frac{1}{2!}&\cdots&\frac{1}{(n-1)!}\\&1&\frac{1}{1!}&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&\frac{1}{2!}\\&&&1&\frac{1}{1!}\\&&&&1\end{pmatrix}$.

מכפלה פנימית ממשית (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $(\cdot,\cdot):L^2\to\mathbb{R}$ המקיימת

- סימטריות: $\forall a,b\in L.\,(a,b)=(b,a)$.
- דו־לינאריות: $\forall a,b,c\in L.\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.\,(\alpha a+\beta b,c)=\alpha(a,c)+\beta(b,c)$.
- חיוביות: $\forall a\in L.\,(a,a)\geq0$.
- חיוביות ממש: $\forall a\in L.\,((a,a)=0)\Longleftrightarrow(a=0)$.

מכפלה פנימית מרוכבת (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $(\cdot,\cdot):L^2\to\mathbb{C}$ המקיימת

- הרמיטיות: $\forall a,b\in L.\,(a,b)=\overline{(b,a)}$.
- לינאריות: $\forall a,b,c\in L.\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.\,(\alpha a+\beta b,c)=\alpha(a,c)+\beta(b,c)$.
- חיוביות: $\forall a\in L.\,(a,a)\in\mathbb{R}_+$.
- חיוביות ממש: $\forall a\in L.\,((a,a)=0)\Longleftrightarrow(a=0)$.

מרחב אוקלידי: $(L,+,*,(\cdot,\cdot))$ באשר ($(L,+,*)$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$)$\wedge$($(\cdot,\cdot)$ מכפלה פנימית ממשית).

מרחב אוניטרי: $(L,+,*,(\cdot,\cdot))$ באשר ($(L,+,*)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$)$\wedge$($(\cdot,\cdot)$ מכפלה פנימית מרוכבת).

מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ): (מרחב אוניטרי)$\vee$(מרחב אוקלידי).

מימוש: יהי $\langle L,+,\cdot\rangle$ מרחב אוניטרי אזי $\langle L_{\mathbb{R}},+,\cdot\rangle$.

משפט: יהי L מרחב אוניטרי אזי ($L_{\mathbb{R}}$ מ"ו)$\wedge$($(a,b)_{\mathbb{R}}=\text{Re}(a,b)$ מ"פ על $L_{\mathbb{R}}$).

למה: יהי L מרחב אוניטרי אזי $\dim_{\mathbb{R}}(L_{\mathbb{R}})=2\dim_{\mathbb{C}}(L)$.

הגדרה: יהיו $a,b\in\mathbb{C}^n$ נגדיר $(a,b)_{\text{st}}=\sum_{i=1}^n a_i\overline{b_i}$.

הגדרה: יהיו $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ נגדיר $(A,B)_{\text{st}}=\text{trace}\left(A^t\overline{B}\right)$.

הגדרה: יהיו $f,g\in C_{\mathbb{C}}([\alpha,\beta])$ נגדיר $(f,g)_{\text{st}}=\int_\alpha^\beta f(x)\overline{g(x)}dx$.

משפט קושי שוורץ: יהי L ממ"פ ויהיו $a,b\in L$ אזי $(a,b)^2\leq(a,a)\cdot(b,b)$.

טענה: יהיו $a,b\in L$ אזי $(a\in\text{span}(b))\Longleftrightarrow\left((a,b)^2=(a,a)\cdot(b,b)\right)$.

נורמה/אורך: יהי $a\in L$ אזי $\|a\|=\sqrt{(a,a)}$.

זווית: יהיו $a,b\in L\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\alpha\in\left[0,\pi\right]$ עבורה $\cos\left(\alpha\right)=\frac{\left(a,b\right)}{\left\Vert a\right\Vert \left\Vert b\right\Vert }$.

סימון: יהיו $a,b\in L\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\widehat{ab}$ הזווית בין a,b.

מרחק: יהיו $a,b\in L$ אזי $\text{dist}\left(a,b\right)=\left\Vert a-b\right\Vert$.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $a,b\in L$ ויהי λ סקלר
- $\left(\left\Vert a\right\Vert \geq0\right)\wedge\left(\left(\left\Vert a\right\Vert =0\right)\iff\left(a=0\right)\right)$.
- $\left\Vert \lambda a\right\Vert =\left|\lambda\right|\cdot\left\Vert a\right\Vert$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\left|\left\Vert a\right\Vert -\left\Vert b\right\Vert \right|\leq\left\Vert a+b\right\Vert \leq\left\Vert a\right\Vert +\left\Vert b\right\Vert$.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $a,b\in L\backslash\left\{0\right\}$
- $-1\leq\cos\left(\widehat{ab}\right)\leq1$.
- $\left(\cos\left(\widehat{ab}\right)=1\right)\iff\left(\exists t>0.b=ta\right)$.
- $\left(\cos\left(\widehat{ab}\right)=-1\right)\iff\left(\exists t<0.b=ta\right)$.

וקטורים ניצבים/אורתוגונליים (א"ג): $a,b\in L$ המקיימים $\left(a,b\right)=0$.

סימון: יהיו a,b ניצבים אזי $a\perp b$.

משפט פיתגורס: יהיו $a,b\in L$ אזי $\left\Vert a+b\right\Vert ^{2}=\left\Vert a\right\Vert ^{2}+\left\Vert b\right\Vert ^{2}\iff a\perp b$.

למה: יהי L ממ"פ ויהיו $a,b,c\in L$
- סימטריות: $\text{dist}\left(a,b\right)=\text{dist}\left(b,a\right)$.
- חיוביות: $\text{dist}\left(a,b\right)\geq0$.
- חיוביות ממש: $\left(\text{dist}\left(a,b\right)=0\right)\iff\left(a=b\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\text{dist}\left(a,b\right)\leq\text{dist}\left(a,c\right)+\text{dist}\left(c,b\right)$.

שחזור מכפלה פנימית מנורמה: יהי L ממ"פ ויהיו $a,b\in L$
- L מרחב אוקלידי אזי $\left(a,b\right)=\frac{\left\Vert a+b\right\Vert ^{2}-\left\Vert a-b\right\Vert ^{2}}{4}$.
- L מרחב אוניטרי אזי $\left(a,b\right)=\frac{\left\Vert a+b\right\Vert ^{2}-\left\Vert a-b\right\Vert ^{2}}{4}+i\frac{\left\Vert a+ib\right\Vert ^{2}-\left\Vert a-ib\right\Vert ^{2}}{4}$.

מרחב בעל נורמה: יהי L מ"ו נ"ס אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ המקיימת
- $\left(\upsilon\left(a\right)\geq0\right)\wedge\left(\left(\upsilon\left(a\right)=0\right)\iff\left(a=0\right)\right)$.
- $\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon\left(a+b\right)\leq\upsilon\left(a\right)+\upsilon\left(b\right)$.

טענה: יהי L ממ"פ אזי L מרחב בעל נורמה.

שיוויון המקבילית: נורמה υ המקיימת $\forall a,b\in L.\upsilon\left(a+b\right)^{2}+\upsilon\left(a-b\right)^{2}=2\left(\upsilon\left(a\right)^{2}+\upsilon\left(b\right)^{2}\right)$.

משפט: יהי L מרחב בעל נורמה υ אזי (υ מקיימת שיוויון המקבילית)$\iff$(υ משרה מכפלה פנימית).

טענה: מעל $C\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)$ הנורמה $\upsilon\left(f\right)=\max_{x\in\left[\alpha,\beta\right]}\left|f\left(x\right)\right|$ אינה מושרת ממכפלה פנימית.

מטריצת גראם: יהי L ממ"פ ויהיו $a_{1}\ldots a_{k}\in L$ אזי $G\left(a_{1}\ldots a_{k}\right)\in M_{k}\left(\mathbb{C}\right)$ כך $\left(G\left(a_{1}\ldots a_{k}\right)\right)_{i,j}=\left(a_{i},a_{j}\right)$.

מטריצה הרמיטית: $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ המקיימת $A^{t}=\overline{A}$.

טענה: יהי L ממ"פ ויהיו $a_{1}\ldots a_{k}\in L$ אזי $G\left(a_{1}\ldots a_{k}\right)^{t}=\overline{G\left(a_{1}\ldots a_{k}\right)}$.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_{1}\ldots a_{k}\in L$ אזי $G\left(a_{1}\ldots a_{k}\right)^{t}=G\left(a_{1}\ldots a_{k}\right)$.

משפט: יהיו $a_{1}\ldots a_{k}\in L$ אזי ($a_{1}\ldots a_{k}$ בת"ל)$\iff\left(\det\left(G\left(a_{1}\ldots a_{k}\right)\right)\neq0\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{B}\subseteq L$ בסיס אזי $\det G\left(\mathcal{B}\right)\neq0$.

וקטורים אורתונורמלים (א"נ): $a_{1}\ldots a_{n}\in L$ המקיימים $\left(a_{i},a_{j}\right)=\delta_{i,j}$.

מסקנה: יהיו $a_{1}\ldots a_{n}\in L$ אורתונורמלים אזי $G\left(a_{1}\ldots a_{n}\right)=I_{n}$.

מסקנה: יהיו $a_{1}\ldots a_{n}\in L$ אורתונורמליים אזי $a_{1}\ldots a_{n}$ בת"ל.

משפט: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהיו $a,b\in L$ אזי $\left(a,b\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i}\overline{\left(\left[b\right]_{\mathcal{B}}\right)_{j}}\left(\mathcal{B}_{i},\mathcal{B}_{j}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהיו $a,b\in L$ אזי $\left(a,b\right)=\left[a\right]_{\mathcal{B}}^{t}G\left(\mathcal{B}\right)\overline{\left[b\right]_{\mathcal{B}}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{B},\mathcal{D}$ בסיסים ותהא C מטריצת מעבר בין הבסיסים אזי $G\left(\mathcal{D}\right)=C^{t}G\left(\mathcal{B}\right)\overline{C}$.

מטריצות חופפות: $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימות $\exists C\in\text{GL}\left(n,\mathbb{F}\right).C^{t}BC=A$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B},\mathcal{D}$ בסיסים למרחב אוקלידי אזי $G\left(\mathcal{B}\right),G\left(\mathcal{D}\right)$ חופפות.

בסיס דואלי: יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי בסיס $\mathcal{D}$ המקיים $\left(\mathcal{D}_{i},\mathcal{B}_{j}\right)=\delta_{i,j}$.

סימון: יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $\mathcal{B}^*$ בסיס דואלי.

משפט: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהי $a \in L$

- $\mathcal{B}^*$ קיים ויחיד.
- $\mathcal{B}^{**} = \mathcal{B}$.
- $a = \sum_{i=1}^{n} (a, \mathcal{B}_i^*) \mathcal{B}_i$.

למה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי קיימים $e_1 \dots e_m \in L$ אורתונורמליים עבורם $\text{span}\{e_1 \dots e_m\} = \text{span}\{a_1 \dots a_k\}$.

אורתונורמליזציית גראם שמידט: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל נגדיר $\text{GS}(a_1 \dots a_k) = \{e_1 \dots e_k\}$ כך

- $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$.
- לכל $2 \le i \le k$
  - $a_i' = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i, e_j) e_j$.
  - $e_i = \frac{a_i'}{\|a_i'\|}$.

טענה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $(\text{GS}(a_1 \dots a_k)$ אורתונורמליים$) \wedge (\text{span}\{\text{GS}(a_1 \dots a_k)\} = \text{span}\{a_1 \dots a_k\})$.

מסקנה: יהי L ממ"פ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ אורתונורמלי.

למה: יהי L ממ"פ יהי $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי ויהיו $a, b \in L$

- $a = \sum_{i=1}^{n} (a, \mathcal{B}_i) \mathcal{B}_i$.
- $\|a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left([a]_{\mathcal{B}}\right)_i^2}$.
- $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left([a]_{\mathcal{B}}\right)_i \overline{\left([b]_{\mathcal{B}}\right)_i}$.
- $\text{dist}(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left([a]_{\mathcal{B}}\right)_i - \left([b]_{\mathcal{B}}\right)_i\right)^2}$.
- $\cos\left(\widehat{ab}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left([a]_{\mathcal{B}}\right)_i \left([b]_{\mathcal{B}}\right)_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left([a]_{\mathcal{B}}\right)_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left([b]_{\mathcal{B}}\right)_i^2}}$.

מסקנה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אזי $\det(G(a_1 \dots a_k)) \ge 0$.

מסקנה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $\det(G(a_1 \dots a_k)) > 0$.

מקבילון: יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $P(a_1 \dots a_k) = \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \mid \forall i \in [k] . \lambda_i \in [0,1]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ בת"ל אזי $\text{Vol}(P(a_1 \dots a_k)) = \sqrt{\det(G(a_1 \dots a_k))}$.

למה: יהיו $a_1 \dots a_k \in L$ אורתוגונליים אזי $\text{Vol}(P(a_1 \dots a_k)) = \prod_{i=1}^{k} \|a_i\|$.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי יהי $\mathcal{D}$ בסיס ותהא C מטריצת מעבר אזי $\text{Vol}(P(\mathcal{D})) = |\det(C)|$.

אורנטציה: יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים ותהא C מטריצת מעבר אזי $\text{sign}(\det(C))$.

מטריצה אורתוגונלית: יהיו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים אורתונורמליים במרחב אוקלידי אזי מטריצת המעבר C.

מטריצה אוניטרית: היו $\mathcal{B}, \mathcal{D}$ בסיסים אורתונורמליים במרחב אוניטרי אזי מטריצת המעבר C.

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $(C$ אורתוגונלית$) \iff (C^t C = I)$.

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{C})$ אזי $(C$ אוניטרית$) \iff \left(C^t \overline{C} = I\right)$.

סימון: $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$.

סימון: $U(n) = \left\{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^t \overline{A} = I\right\}$.

משפט: תהא $C \in O(n) \cup U(n)$ אזי $|\det(C)| = 1$.

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $($עמודות C בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n) \iff (C \in O(n))$.

משפט: תהא $C \in M_n(\mathbb{C})$ אזי $($עמודות C בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n) \iff (C \in U(n))$.

מטריצות אורתוגונליות מיוחדות: $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$.

מטריצות אוניטריות מיוחדות: $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}$.

משפט: $(\langle O(n), \cdot\rangle$ חבורה$) \wedge (\langle SO(n), \cdot\rangle$ חבורה$) \wedge (\langle U(n), \cdot\rangle$ חבורה$) \wedge (\langle SU(n), \cdot\rangle$ חבורה$)$.

משלים ניצב: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו אזי $M^{\perp} = \{a \in L \mid \forall b \in M . (a, b) = 0\}$.

משפט: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו אזי $(M^{\perp}$ תמ"ו$) \wedge \left(M \oplus M^{\perp} = L\right)$.

למה: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו

- $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M$.
- $\dim\left(M^{\perp}\right) = \dim(L) - \dim(M)$.
- $(M + U)^{\perp} = M^{\perp} \cap U^{\perp}$.

- $(M\cap U)^{\perp}=M^{\perp}+U^{\perp}$.

מרחק: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו ויהי $a\in L$ אזי $\text{dist}\left(a,M\right)=\inf\left\{\text{dist}\left(a,b\right)\mid b\in M\right\}$.

סימון: יהי $a\in L$ אזי $a_M\in M$,$a_\perp\in M^\perp$ היחידים שמקיימים $a=a_\perp+a_M$.

הטלה אורתוגונלית: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו אזי $\text{pr}_M\in\text{Hom}\left(L,M\right)$ המוגדרת $\text{pr}_M\left(a\right)=a_M$.

משפט: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו ויהי $a\in L$

- $\text{dist}\left(a,M\right)=\|a_\perp\|$.
- $\text{dist}\left(a,a_M\right)=\min\left\{\text{dist}\left(a,b\right)\mid b\in M\right\}$.
- $\forall b\in M\backslash\left\{a_M\right\}.\text{dist}\left(a,b\right)>\text{dist}\left(a,a_M\right)$.
- $\text{dist}\left(a,M\right)=\sqrt{\frac{\det(G(a,\mathcal{B}))}{\det(G(\mathcal{B}))}}$.

משפט: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו ויהיו $a,b\in L$ אזי $(a,b)=(a_M,b_M)+(a_\perp,b_\perp)$.

למה: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\dim_{\mathbb{R}}\left(L\right)=\dim_{\mathbb{C}}\left(L_{\mathbb{C}}\right)$.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\left(\cdot,\cdot\right)_{\mathbb{C}}$ מכפלה פנימית מעל $L_{\mathbb{C}}$.

משפט אוילר־פורייה־פרסבל: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

פונקציונל ליניארי: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f\in\text{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$.

המרחב הדואלי: $V^*=\text{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$.

הגדרה: יהי L ממ"פ על $\mathbb{F}$ ויהי $a\in L$ אזי $\varphi_a:L\to\mathbb{F}$ המוגדרת $\varphi_a\left(b\right)=\left(b,a\right)$.

למה: יהי L ממ"פ ויהי $a\in L$ אזי $\varphi_a\in L^*$.

משפט: יהי L ממ"פ נ"ס אזי $f:L\to L^*$ המוגדרת $f\left(a\right)=\varphi_a$ חח"ע ועל.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי נ"ס אזי $f:L\to L^*$ המוגדרת $f\left(a\right)=\varphi_a$ העתקה הפיכה.

איזומטריה: איזומורפיזם $\varphi\in\text{Hom}\left(L_1,L_2\right)$ המקיים $\forall a,b\in L_1.\left(\varphi\left(a\right),\varphi\left(b\right)\right)=\left(a,b\right)$.

משפט: יהיו $\varphi,\phi\in\text{Hom}\left(L_1,L_2\right)$ איזומטריות יהיו $a,b\in L_1$ ותהא $\mathcal{D}\subseteq L_1$ בת"ל

- ($\varphi\circ\phi$ איזומטריה)$\wedge$(φ^{-1} איזומטריה).
- $\left(\|\varphi\left(a\right)\|=\|a\|\right)\wedge\left(\text{dist}\left(\varphi\left(a\right),\varphi\left(b\right)\right)=\text{dist}\left(a,b\right)\right)$.
- $\left(\widehat{a,b}=\widehat{\varphi\left(a\right),\varphi\left(b\right)}\right)\wedge\left(a\perp b\iff\varphi\left(a\right)\perp\varphi\left(b\right)\right)$.
- $\text{Vol}\left(P\left(\mathcal{D}\right)\right)=\text{Vol}\left(P\left(\varphi\left(\mathcal{D}\right)\right)\right)$.

מסקנה: יהי L ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $L,\mathbb{F}^{\dim L}$ איזומטריים.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ איזומטריה)$\iff$(קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}\cdot\overline{\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}}^t=I$).

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ התב"ש

- φ איזומטריה.
- $\forall a\in L.\|\varphi\left(a\right)\|=\|a\|$.
- קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $\varphi\left(\mathcal{B}\right)$ בסיס א"נ.

העתקה קונפורמית: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיים $\forall a,b\in L.\widehat{a,b}=\widehat{\varphi\left(a\right),\varphi\left(b\right)}$.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ העתקה קונפורמית)$\iff$(קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $\left(\exists\lambda\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}.\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}\in O\left(n\right)\right)$).

דטרמיננטה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L_1,L_2\right)$ איזומורפיזם ויהיו $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ בסיסים א"נ בהתאמה אזי $\det\left(\varphi\right)=\det\left(\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}\right)$.

למה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L_1,L_2\right)$ אזי $\det\left(\varphi\right)$ מוגדר היטב עד כדי אוריינטציה.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L_1,L_2\right)$ איזומורפיזם ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של L_1 אזי $\text{Vol}\left(P\left(\varphi\left(\mathcal{B}\right)\right)\right)=\left|\det\left(\varphi\right)\right|\text{Vol}\left(P\left(\mathcal{B}\right)\right)$.

העתקה שומרת נפח: יהיו L_1,L_2 מרחבים אוקלידיים אזי איזומורפיזם $\varphi\in\text{Hom}\left(L_1,L_2\right)$ עבורו לכל בסיס $\mathcal{B}$ של L_1 מתקיים $\text{Vol}\left(P\left(\varphi\left(\mathcal{B}\right)\right)\right)=\text{Vol}\left(P\left(\mathcal{B}\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L_1,L_2\right)$ איזומורפיזם אזי (φ שומרת על נפח)$\iff\left(\det\left(\varphi\right)=1\right)$.

העתקה צמודה: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\phi\in\text{Hom}\left(L\right)$ עבורו $\forall a,b\in L.\left(\varphi\left(a\right),b\right)=\left(a,\phi\left(b\right)\right)$.

משפט: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי העתקה צמודה קיימת ויחידה.

סימון: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי ההעתקה הצמודה ל־φ היא φ^*.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $\varphi,\psi\in\text{Hom}\left(L\right)$ יהי λ סקלר ויהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ

- $\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}^*=\overline{\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}}^t$.
- $\left(\varphi^*\right)^*=\varphi$.

- $\left(\varphi+\psi\right)^{*}=\varphi^{*}+\psi^{*}$.
- $\left(\lambda\varphi\right)^{*}=\overline{\lambda}\varphi^{*}$.
- $\left(\varphi\psi\right)^{*}=\psi^{*}\varphi^{*}$.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי אזי $f\in L^{L}$ המוגדרת $f\left(\varphi\right)=\varphi^{*}$ היא אוטומורפיזם.

משפט: $\left(\ker\left(\varphi\right)=\left(\text{Im}\left(\varphi^{*}\right)\right)^{\perp}\right)\wedge\left(\text{Im}\left(\varphi\right)=\left(\ker\left(\varphi^{*}\right)\right)^{\perp}\right)$.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ איזומטריה)$\iff\left(\varphi\varphi^{*}=I\right)$.

העתקה צמודה לעצמה: יהי L ממ"פ אזי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיימת $\varphi=\varphi^{*}$.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ אזי $\left(\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}=\overline{\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}}^{t}\right)\iff\left(\varphi=\varphi^{*}\right)$.

משפט: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left(\forall a\in L.\left(\varphi\left(a\right),a\right)\in\mathbb{R}\right)\iff\left(\varphi=\varphi^{*}\right)$.

למה: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיים $\forall a\in L.\left(\varphi\left(a\right),a\right)=0$ אזי $\varphi=0$.

למה: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי קיימים ויחידים $\varphi_{1},\varphi_{2}\in\text{Hom}\left(L\right)$ צמודים לעצמם המקיימים $\varphi=\varphi_{1}+i\varphi_{2}$.

העתקה נורמלית: יהי L ממ"פ אזי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיים $\varphi\varphi^{*}=\varphi^{*}\varphi$.

טענה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלית אזי (λ ע"ע של φ עם ו"ע a)$\Longleftarrow$($\overline{\lambda}$ ע"ע של φ^{*} עם ו"ע a).

טענה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלית ויהיו $\lambda\neq\mu$ אזי $L_{\lambda}\perp L_{\mu}$.

טענה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלית אזי (M תמ"ו φ שמור)$\Longleftarrow$($M^{\perp}$ תמ"ו φ שמור).

משפט הפירוק הספקטרלי: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ לכסין בבסיס א"נ)$\iff\left(\varphi\varphi^{*}=\varphi^{*}\varphi\right)$.

משפט שור: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}$ משולשית עליונה.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ לכסין בבסיס א"נ)$\iff\left(\varphi=\varphi^{t}\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ הרמיטית אזי קיימת $U\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אוניטרית עבורה $U^{-1}AU$ אלכסונית ממשית.

למה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אוניטרית ויהי λ ע"ע אזי $\left\Vert \lambda\right\Vert =1$.

משפט: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלי אזי (φ איזומטריה)$\iff\left(\forall\lambda\in\text{Spec}\left(\varphi\right).\left\Vert \lambda\right\Vert =1\right)$.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ איזומטריה אזי קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ המקיים

$$\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}\left(1\ldots1,-1\ldots-1,\left(\begin{smallmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{smallmatrix}\right)\ldots\left(\begin{smallmatrix}\cos(\beta) & \sin(\beta)\\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\end{smallmatrix}\right)\right)$$

מסקנה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ איזומטריה

- $L=\mathbb{R}$, אזי (φ שיקוף ביחס לראשית)$\vee\left(\varphi=I\right)$.
- $L=\mathbb{R}^{2}$, אזי (φ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית)$\vee$(φ סיבוב סביב הראשית).
- $L=\mathbb{R}^{3}$, אזי (φ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית)$\vee$ (φ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית)$\vee$(φ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית ושיקוף ביחס לקו ישר שאנך למישור ועובר דרך הראשית).

תבנית בילינארית (ת"ב): יהיו L,M מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ אזי $\Phi:L\times M\to\mathbb{F}$

- לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v,u\in L$ ויהי $w\in M$ אזי $\Phi\left(\alpha v+\beta u,w\right)=\alpha\Phi\left(v,w\right)+\beta\Phi\left(u,w\right)$.
- לינאריות ברכיב שני: יהי $v\in L$ ויהיו $u,w\in M$ אזי $\Phi\left(v,\alpha u+\beta w\right)=\alpha\Phi\left(v,u\right)+\beta\Phi\left(v,w\right)$.

סימון: יהיו L,M מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $B\left(L,M\right)=\left\{ \Phi:L\times M\to\mathbb{F}\mid\text{תבנית בילינארית }\Phi\right\}$.

סימון: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $B\left(L\right)=B\left(L,L\right)$.

מטריצה מייצגת: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ ויהיו $\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}$ בסיסים אזי $\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\right)_{i,j}=\Phi\left(\left(\mathcal{B}_{L}\right)_{i},\left(\mathcal{B}_{M}\right)_{j}\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ יהיו $\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}$ בסיסים יהי $a\in L$ ויהי $b\in M$ אזי $\Phi\left(a,b\right)=\left[a\right]_{\mathcal{B}_{L}}^{t}\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\left[b\right]_{\mathcal{B}_{M}}$.

משפט: ($B\left(L,M\right)$ מ"ו על $\mathbb{F}$)$\wedge\left(\dim\left(B\left(L,M\right)\right)=\dim\left(L\right)\dim\left(M\right)\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ ויהיו $\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{L}',\mathcal{B}_{M},\mathcal{B}_{M}'$ בסיסים אזי $\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L}',\mathcal{B}_{M}'}=\left(\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}_{L}'}^{\mathcal{B}_{L}}\right)^{t}\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}_{M}'}^{\mathcal{B}_{M}}$.

דרגה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ אזי $\text{rank}\left(\Phi\right)=\text{rank}\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\right)$.

למה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ אזי $\text{rank}\left(\Phi\right)$ מוגדרת היטב.

הגדרה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ נגדיר $\Phi_{1}\in\text{Hom}\left(L,M^{*}\right)$ כך $\Phi_{1}\left(a\right)\left(b\right)=\Phi\left(a,b\right)$.

הגדרה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ נגדיר $\Phi_{2}\in\text{Hom}\left(M,L^{*}\right)$ כך $\Phi_{2}\left(b\right)\left(a\right)=\Phi\left(a,b\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ אזי $\text{rank}\left(\Phi\right)=\text{rank}\left(\Phi_{1}\right)=\text{rank}\left(\Phi_{2}\right)$.

תבנית אי־מנוונת: $\Phi \in B\left(L,M\right)$ עבורה $\left[\Phi\right]$ הפיכה.

משפט: תהא $\Phi \in B\left(L,M\right)$ התב"ש

- Φ אי־מנוונת.
- Φ_1, Φ_2 איזומורפיזמים.
- $\operatorname{rank}\left(\Phi\right) = \dim\left(M\right) = \dim\left(L\right)$.

משפט: תהא $\Phi \in B\left(L\right)$ אזי (Φ אי־מנוונת)$\iff\left(\forall a \in L\backslash\left\{0\right\}.\exists b \in L.\Phi\left(a,b\right) \neq 0\right)$.

משפט: יהיו $L \neq M$ ותהא $\Phi \in B\left(L,M\right)$ באשר $\operatorname{rank}\left(\Phi\right) = r$ אזי $\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_L,\mathcal{B}_M} = \operatorname{Diag}\left(I_r, 0\right)$.

מסקנה: יהיו $L \neq M$ ותהא $\Phi \in B\left(L,M\right)$ באשר $\operatorname{rank}\left(\Phi\right) = r$ אזי קיימים $\varphi_1 \ldots \varphi_r \in L^*$ וכן $\psi_1 \ldots \psi_r \in M^*$ עבורם $\Phi = \varphi_1\psi_1 + \ldots + \varphi_r\psi_r$.

למה: יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_r, \psi_1 \ldots \psi_r \in L^*$ אזי $\operatorname{rank}\left(\varphi_1\psi_1 + \ldots + \varphi_r\psi_r\right) \leq r$.

משפט: תהא $\Phi \in B\left(L\right)$ באשר $\operatorname{rank}\left(\Phi\right) = r$ אזי קיימים $\varphi_1 \ldots \varphi_r, \psi_1 \ldots \psi_r \in L^*$ עבורם $\Phi = \varphi_1\psi_1 + \ldots + \varphi_r\psi_r$.

תבנית ריבועית: תהא $\Phi \in B\left(L\right)$ אזי $Q : L \to \mathbb{F}$ המוגדרת $Q\left(a\right) = \Phi\left(a,a\right)$.

למה: תהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית עבור ת"ב $\Phi \in B\left(L\right)$ ויהי $a \in L$

- יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ אזי $Q\left(\lambda a\right) = \lambda^2 Q\left(a\right)$.
- יהי $b \in L$ אזי $Q\left(a+b\right) = Q\left(a\right) + Q\left(b\right) + \Phi\left(a,b\right) + \Phi\left(b,a\right)$.
- יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $Q\left(a\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,i}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,j} + \left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{j,i}\right)\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_j$.

למה: יהי $\operatorname{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיימת ויחידה $\Phi \in B\left(L\right)$ סימטרית מתאימה לתבנית.

מסקנה: יהי $\operatorname{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\Phi\left(a,b\right) = \frac{Q(a+b)-Q(a)-Q(b)}{2}$.

הגדרה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\left[Q\right]_{\mathcal{B}} = \left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}$.

מסקנה: תהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\left[Q\right]^t = \left[Q\right]$.

מסקנה: יהי $\operatorname{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $Q\left(a\right) = \left[a\right]_{\mathcal{B}}^t\left[Q\right]_{\mathcal{B}}\left[a\right]_{\mathcal{B}}$.

למה: תהא $Q : L \to \mathbb{F}$ ויהיו $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ בסיסים אזי $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'} = \left(\left[\operatorname{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^t\left[Q\right]_{\mathcal{B}}\left(\left[\operatorname{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^t$.

מטריצות חופפות: $A, B \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימות $\exists C \in \operatorname{GL}\left(n,\mathbb{F}\right).B = C^tAC$.

משפט לגראנז': יהי $\operatorname{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ ותהא $Q : L \to \mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rank}(Q)}\alpha_i x_i^2$.

משפט: תהא $Q : L \to \mathbb{C}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right) = \sum_{i=1}^{\operatorname{rank}(Q)} x_i^2$.

מסקנה: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C \in \operatorname{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ עבורה $C^tAC = \operatorname{Diag}\left(I_{\operatorname{rank}(A)}, 0\right)$.

משפט: תהא $Q : L \to \mathbb{R}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{\operatorname{rank}(Q)} x_i^2$.

מסקנה: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C \in \operatorname{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ עבורה $C^tAC = \operatorname{Diag}\left(I_p, -I_q, 0\right)$.

סיגנטורה: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי $\left(p,q\right)$ עבורם $\operatorname{Diag}\left(I_p, -I_q, 0\right) \underset{\text{חופפת}}{\sim} A$.

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית עם סיגנטורה $\left(p,q\right)$ אזי p.

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית עם סיגנטורה $\left(p,q\right)$ אזי q.

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא $Q : L \to \mathbb{R}$ תבנית ריבועית עבורה $\left[Q\right]_{\mathcal{B}} = \operatorname{Diag}\left(I_p, -I_q, 0\right)$ וכן $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'} = \operatorname{Diag}\left(I_{p'}, -I_{q'}, 0\right)$ אזי $\left(p,q\right) = \left(p',q'\right)$.

מינור ראשי: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ יהי $k < n$ ויהי $B \in M_k\left(\mathbb{F}\right)$ המקיים $\left(B\right)_{i,j} = \left(A\right)_{i,j}$ אזי $\Delta_k^A = \det\left(B\right)$.

מטריצה יחידה משולשית עליונה (unitriangular upper): $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת $A = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

טענה: תהא $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ותהא $C \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה משולשית עליונה אזי $\Delta_k^{C^tAC} = \Delta_k^A$.

משפט: יהי $\operatorname{char}\left(\mathbb{F}\right) \neq 2$ תהא $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ סימטרית עבורה $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\operatorname{rank}(A)} \neq 0$ וכן $\Delta_{\operatorname{rank}(A)+1}, \ldots, \Delta_n = 0$ אזי קיימת $C \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה משולשית עליונה עבורה $C^tAC = \operatorname{Diag}\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \ldots \frac{\Delta_{\operatorname{rank}(A)}}{\Delta_{\operatorname{rank}(A)-1}}, 0 \ldots 0\right)$.

הגדרה: תהא $Q : L \to \mathbb{R}$ תבנית ריבועית

- תבנית חיובית לחלוטין (תחל"ח): $\forall v \in L\backslash\left\{0\right\}.Q\left(v\right) > 0$.
- תבנית אי־שלילית: $\forall v \in L\backslash\left\{0\right\}.Q\left(v\right) \geq 0$.
- תבנית אי־חיובית: $\forall v \in L\backslash\left\{0\right\}.Q\left(v\right) \leq 0$.
- תבנית שלילית לחלוטין: $\forall v \in L\backslash\left\{0\right\}.Q\left(v\right) < 0$.

הגדרה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית
- חיובית לחלוטין (חל"ח): $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{0\right\}.x^tAx>0$.
- אי־שלילית: $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{0\right\}.x^tAx\geq0$.
- אי־חיובית: $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{0\right\}.x^tAx\leq0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\left\{0\right\}.x^tAx<0$.

משפט סילבסטר: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי (A חל"ח)$\iff\left(\forall i\in\left[n\right].\Delta_i>0\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי (A שלילית לחלוטין)$\iff\left(\forall i\in\left[n\right].\left(-1\right)^i\Delta_i>0\right)$.

משפט: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי (A חל"ח)$\iff$(כל הע"ע של A חיוביים).

למה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית חל"ח אזי $\exists!B\in M_n\left(\mathbb{R}\right).B^2=A$.

פירוק פולרי: תהא $D\in\mathrm{GL}\left(n,\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים ויחידים $R\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית חל"ח וכן $Q\in O\left(n\right)$ עבורם $D=QR$.

משפט: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C\in O\left(n\right)$ עבורה C^tAC אלכסונית.

מסקנה: תהא $Q_1:L\to\mathbb{R}$ תחל"ח ותהא $Q_2:L\to\mathbb{R}$ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $\left[Q_1\right]_{\mathcal{B}},\left[Q_2\right]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

תבנית אחד־וחצי־לינארית: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ אזי $\Psi:L\times L\to\mathbb{C}$
- לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v,u,w\in L$ אזי $\Psi\left(\alpha v+\beta u,w\right)=\alpha\Psi\left(v,w\right)+\beta\Psi\left(u,w\right)$.
- יהיו $v,u,w\in L$ אזי $\Psi\left(v,\alpha u+\beta w\right)=\overline{\alpha}\Psi\left(v,u\right)+\overline{\beta}\Psi\left(v,w\right)$.

מטריצה מייצגת: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $\left(\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,j}=\Psi\left(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j\right)$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית יהי $\mathcal{B}$ בסיס יהי $a\in L$ ויהי $b\in M$ אזי $\Psi\left(a,b\right)=\left[a\right]_{\mathcal{B}}^t\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\overline{\left[b\right]_{\mathcal{B}}}$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית ויהיו $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ בסיסים אזי $\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}'}=\left(\left[\mathrm{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^t\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}\overline{\left[\mathrm{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}$.

דרגה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי $\mathrm{rank}\left(\Psi\right)=\mathrm{rank}\left(\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}\right)$.

למה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי $\mathrm{rank}\left(\Psi\right)$ מוגדרת היטב.

תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית: Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית המקיימת $\forall a,b\in L.\Psi\left(a,b\right)=\overline{\Psi\left(b,a\right)}$.

למה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי (Ψ הרמיטית)$\iff$($\left[\Psi\right]$ הרמיטית).

מסקנה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(I_p,-I_q,0\right)$.

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עם $\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(I_p,-I_q,0\right)$ אזי p.

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עם $\left[\Psi\right]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(I_p,-I_q,0\right)$ אזי q.

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עבורה $\left[Q\right]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(I_p,-I_q,0\right)$ וכן $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'}=\mathrm{Diag}\left(I_{p'},-I_{q'},0\right)$ אזי $\left(p,q\right)=\left(p',q'\right)$.

למה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ הרמיטית אזי $\Delta_1\ldots\Delta_n\in\mathbb{R}$.

משפט: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ הרמיטית עבורה $\Delta_1,\ldots,\Delta_{\mathrm{rank}(A)}\neq0$ וכן $\Delta_{\mathrm{rank}(A)+1},\ldots,\Delta_n=0$ אזי קיימת $C\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ יחידה משולשית עליונה עבורה $C^tA\overline{C}=\mathrm{Diag}\left(\Delta_1,\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\ldots\frac{\Delta_{\mathrm{rank}(A)}}{\Delta_{\mathrm{rank}(A)-1}},0\ldots0\right)$.

הגדרה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית
- חיובית לחלוטין (חל"ח): $\forall v\in L\setminus\left\{0\right\}.\Psi\left(v,v\right)>0$.
- אי־שלילית: $\forall v\in L\setminus\left\{0\right\}.\Psi\left(v,v\right)\geq0$.
- אי־חיובית: $\forall v\in L\setminus\left\{0\right\}.\Psi\left(v,v\right)\leq0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v\in L\setminus\left\{0\right\}.\Psi\left(v,v\right)<0$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית אזי (Ψ חל"ח)$\iff\left(\forall i\in\left[n\right].\Delta_i>0\right)$.

מסקנה: תהנה Ψ_1,Ψ_2 תבניות אחד־וחצי־לינאריות עבורן Ψ_1 חל"ח אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $\left[\Psi_1\right]_{\mathcal{B}},\left[\Psi_2\right]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

תבנית אנטי סימטרית: יהי $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq2$ אזי $\Phi\in B\left(L\right)$ המקיימת $\forall a,b\in L.\Phi\left(a,b\right)=-\Phi\left(b,a\right)$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $\forall a\in L.\Phi\left(a,a\right)=0$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $\left[\Phi\right]$ אנטי סימטרית.

משפט: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)\ldots\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right),0\ldots0\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אנטי סימטרית אזי $\mathrm{rank}\left(A\right)\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}}$.

פולינום Pfaff: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אנטי סימטרית אי־מנוונת אזי $p\in\mathbb{F}\left[x_1\ldots x_{n^2}\right]$ המקיים $\det\left(A\right)=p\left(\left(A\right)_{1,1}\ldots\left(A\right)_{n,n}\right)^2$.

מסקנה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אנטי סימטרית אי־מנוונת אזי קיים פולינום pfaff.

הגדרה: $\mathbb{R}_2\left[x,y\right]=\left\{f\in\mathbb{R}\left[x,y\right]\mid\deg\left(f\right)=2\right\}$.

הגדרה: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2\left[x,y\right]$ אזי $q=\alpha p$. $p\sim q\iff\exists\alpha\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$.

קבוצת העקומות האלגבריות המישוריות ממעלה 2: $C_2\left(\mathbb{R}\right)={}^{\mathbb{R}_2[x,y]}/_{\sim}$.

עקומה גאומטרית מישורית ממשית ממעלה 2: יהי $p\in\mathbb{R}_2\left[x,y\right]$ אזי $\text{sols}\left(p\right)$.

למה: עקומה אלגברית מישורית ממעלה 2 מגדירה עקומה גאומטרית מישורית ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור $\mathbb{R}^2$: תהא $Q\in O\left(2\right)$ וכן $v\in\mathbb{R}^2$ אזי פונקציה $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת $f\left(u\right)=Qu+v$.

למה: תהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $p\in\mathbb{R}_2\left[x,y\right]$ המוגדרת $p\left(x,y\right)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$

- המטריצה המצומצמת: $A_p=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right)$.
- המטריצה המורחבת: $\widehat{A_p}=\left(\begin{smallmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{smallmatrix}\right)$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2\left[x,y\right]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי $\text{Spec}\left(A_p\right)=\text{Spec}\left(A_{p\circ f}\right)$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2\left[x,y\right]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_{p\circ f}}\right)$.

משפט: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2\left[x,y\right]$ עבורן A_p,A_q דומות וכן $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)$ וכן $\left(\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)\neq0\right)\vee\left(\det\left(A_p\right)=\det\left(A_q\right)\neq0\right)$ אזי קיימת T תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ עבורה $p=q\circ T$.

מסקנה: תהא $C\in C_2\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\det\left(\widehat{A_p}\right)\neq0$ אזי קיימת תנועה ב־$\mathbb{R}^2$ עבורה C הינה אחת מהבאות

- קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$.
- אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- היפרבולה: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- פרבולה: $y^2=2px$.

הגדרה: $\mathbb{R}_2\left[x,y,z\right]=\left\{f\in\mathbb{R}\left[x,y,z\right]\mid\deg\left(f\right)=2\right\}$.

הגדרה: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2\left[x,y,z\right]$ אזי $q=\alpha p$. $p\sim q\iff\exists\alpha\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$.

קבוצת המשטחים האלגבריים ממעלה 2: $S_2\left(\mathbb{R}\right)={}^{\mathbb{R}_2[x,y,z]}/_{\sim}$.

משטח גאומטרי ממעלה 2: יהי $p\in\mathbb{R}_2\left[x,y,z\right]$ אזי $\text{sols}\left(p\right)$.

למה: משטח אלגברי ממעלה 2 מגדיר משטח גאומטרי ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור $\mathbb{R}^3$: תהא $Q\in O\left(3\right)$ וכן $v\in\mathbb{R}^3$ אזי פונקציה $f\in\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f\left(u\right)=Qu+v$.

למה: תהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $A\in M_3\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית תהא $B\in M_{3\times1}\left(\mathbb{R}\right)$ ותהא $p\in\mathbb{R}_2\left[x,y,z\right]$ המוגדרת $p\left(v\right)=v^tAv+2B^tv+c$

- המטריצה המצומצמת: $A_p=A$.
- המטריצה המורחבת: $\widehat{A_p}=\left(\begin{smallmatrix}A&B\\B^t&c\end{smallmatrix}\right)$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2\left[x,y,z\right]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי $\text{Spec}\left(A_p\right)=\text{Spec}\left(A_{p\circ f}\right)$.

משפט: תהא $p\in\mathbb{R}_2\left[x,y,z\right]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_{p\circ f}}\right)$.

משפט: יהיו $p,q\in\mathbb{R}_2\left[x,y,z\right]$ עבורן A_p,A_q דומות וכן $\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)$ וכן $\left(\det\left(\widehat{A_p}\right)=\det\left(\widehat{A_q}\right)\neq0\right)\vee\left(\det\left(A_p\right)=\det\left(A_q\right)\neq0\right)$ אזי קיימת T תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ עבורה $p=q\circ T$.

מסקנה: תהא $S\in S_2\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\det\left(\widehat{A_p}\right)\neq0$ אזי קיימת תנועה ב־$\mathbb{R}^3$ עבורה S הינה אחת מהבאות

- קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.
- אליפסויד: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- היפרבולויד חד־יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
- היפרבולויד דו־יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.
- פרבולויד אליפטי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$.
- פרבולויד היפרבולי: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$.