פונקציה קדומה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F' = f$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G' = f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}.G = F + c)$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ המקיימות $a = x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

סימון: תהא $\{x_0, \ldots, x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi = \{x_0, \ldots, x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi) = \max_{i=1}^n |\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2) \le \lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0, \ldots, x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1 \ldots t_n\}$ המקיימות $\forall i \in \{1 \ldots n\} .t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

סכום רימן: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum f(t_i) \Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L \in \mathbb{R}$ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f, \Pi, \{t_i\}) - L| < \varepsilon$.

אינטגרל מסוים: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f$.

סימון: $R([a,b]) = \left\{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \mid \text{אינטגרבילית רימן } f\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\lambda(\Pi)\to 0} S(f, \Pi, \{t_i\})$.

טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c \cdot dt = c(b-a)$.

טענה: $D(x) \notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f \in R([a,b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_i, x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_i, x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$.

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f, \Pi) = \sup_{\text{נקודות מתאימות}\{t_i\}} S(f, \Pi, \{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f, \Pi) = \inf_{\text{נקודות מתאימות}\{t_i\}} S(f, \Pi, \{t_i\})$.

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f, \Pi_1) \ge \overline{\Sigma}(f, \Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \le \underline{\Sigma}(f, \Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1, Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \le \overline{\Sigma}(f, \Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f) = \inf_{\text{חלוקה }\Pi} \overline{\Sigma}(f, \Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f) = \sup_{\text{חלוקה }\Pi} \underline{\Sigma}(f, \Pi)$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi) \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le \overline{\Sigma}(f, \Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f \in R([a,b])) \iff$ (לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi) < \varepsilon$).

תנודה: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f, J) = \sup_{x,y\in J}(f(x) - f(y))$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0 \in J$ אזי (f רציפה על x_0) $\iff (\lim_{\delta\to 0} \omega(f, [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = 0)$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש) $\iff (\forall I \subseteq J.\forall\varepsilon > 0.\exists\delta > \text{len}(I).\omega(f, I) < \varepsilon)$.

תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f, \Pi) = \overline{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_2=\Pi_1\cup\{p\}$ חלוקות
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)+\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)-\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_2=\Pi_1\cup\{p_1\ldots p_m\}$ חלוקות
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)+m\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)-m\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\ge\overline{I}\left(f\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: $C\left([a,b]\right)\subseteq R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $f_{\restriction_{[a,b]}}\in R\left([a,b]\right)$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $\left(f\in R\left([a,b]\right)\right)\wedge\left(f\in R\left([b,c]\right)\right)$ אזי $f\in R\left([a,c]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in[a,d]$ עבורה $f\in R\left([a,d]\right)$ אזי $f\in R\left([b,c]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $f\in R\left([a,c]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left([b,c]\right)$ אזי $f\in R\left([a,c]\right)$.

טענה: תהא $f\in R\left([a,c]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g\in R\left([a,c]\right)$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$ אזי $f\in R\left([-1,1]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left([a,b]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$
- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left([a,b]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left([a,b]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\left\{ \left(a_i,b_i\right)\right\} _{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_i,b_i\right)$ וכן $\sum\left(b_i-a_i\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\left|A\right|\le\aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left([a,b]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_A}=g_{\restriction_A}$ אזי $\int_a^bf\left(x\right)dx=\int_a^bg\left(x\right)dx$.

מסקנה: תהא $f\in R\left([a,c]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_i & x\in\left\{ b_1\ldots b_m\right\} \\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_a^cf\left(x\right)dx=\int_a^cg\left(x\right)dx$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left([a,b]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b\alpha f+\beta g=\alpha\int_a^bf+\beta\int_a^bg$.

משפט לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left([a,c]\right)$ ויהי $b\in\left(a,c\right)$ אזי $\int_a^bf+\int_b^cf=\int_a^cf$.

הגדרה: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $\int_a^bf=-\int_b^af$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ המקיימת $f\ge0$ אזי $\int_a^bf\left(x\right)dx\ge0$.

מונוטוניות האינטגרל : תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $g\ge f$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\ge\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

טענה : תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m\left(b-a\right)\le\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\le M\left(b-a\right)$.

מסקנה : תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_{a}^{b}f\right|\le\int_{a}^{b}\left|f\right|\le\sup_{\left[a,b\right]}\left(\left|f\right|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים : תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ אזי $F\in C\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון : תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $0\le g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(x_{0}\right)\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

הלמה של בונה : תהא f מונוטונית ותהא $0\le g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_{a}^{x_{0}}g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_{0}}^{b}g\left(x\right)dx$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי : תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ אזי $F'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ : תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

מסקנה : תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ יהיו $x_{1}\ldots x_{n}\in\left[a,b\right]$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]\backslash\left\{ x_{1}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

סימון : תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $\left[f\right]|_{a}^{b}=f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים : תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f'g=\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}fg'$.

הלמה של בונה : תהא $\substack{f\in C\left(\left[a,b\right]\right)\\ f\in C^{1}\left(\left(a,b\right)\right)}$ עבורה $\left(f'\ge0\right)\vee\left(f'\le0\right)$ ותהא $g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_{a}^{x_{0}}g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_{0}}^{b}g\left(x\right)dx$.

טענה : תהא $f\in C^{n+1}\left(\left[a,b\right]\right)$ עם פיתוח טיילור P_{n} סביב a אזי $R_{n}\left(x\right)=\frac{1}{n!}\int_{a}^{x}f^{\left(n+1\right)}\left(t\right)\left(x-t\right)^{n}dt$.

משפט שינוי משתנה : תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $\substack{\varphi\in\left[a,b\right]^{\left[\alpha,\beta\right]}\\ \varphi\in C^{1}\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)}$ המקיימת $\substack{\varphi\left(\alpha\right)=a\\ \varphi\left(\beta\right)=b}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

למה : תהא $f\in C^{1}\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx=-\int_{0}^{2\pi}f'\left(x\right)\frac{\sin\left(nx\right)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות : תהא $f\in C^{1}\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)dx\right|\le\frac{2\pi\sup\left(\left|f'\right|\right)}{n}$.

סימון : יהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2}\right\rfloor -1}\left(k-2n\right)$.

למה : יהי $m\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x\right)^{m}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x\right)^{m}dx=\begin{cases} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\left(m-1\right)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{\left(m-1\right)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס : $\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots\left(2n-2\right)\cdot\left(2n-2\right)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots\left(2n-1\right)\cdot\left(2n-1\right)}$.