טופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X, \varnothing \in \mathcal{T}$.
- תהיינה $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ אזי $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.
- תהיינה $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}$ אזי $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

מרחב טופולוגי (מ"ט): תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ טופולוגיה על X אזי $(X, \mathcal{T})$.

קבוצה פתוחה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי אזי $U \subseteq X$ המקיימת $U \in \mathcal{T}$.

קבוצה סגורה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי אזי $E \subseteq X$ המקיימת $X \backslash E \in \mathcal{T}$.

טענה: תהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $X, \varnothing \in \mathcal{T}$ וכן $(\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T})$ $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}.$ אזי ($\mathcal{T}$ טופולוגיה)$\iff$(לכל $U, V \in \mathcal{T}$ מתקיים $U \cap V \in \mathcal{T}$).

הטופולוגיה הטריוואלית: תהא X קבוצה אזי $\{X, \varnothing\}$.

הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X)$.

הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: יהי (X, ρ) מרחב מטרי אזי $\mathcal{T}(X, \rho) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists r > 0. B_r(x) \subseteq U\}$.

טופולוגיה מטריזבילית: מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T}_X)$ עבורו קיים (X, ρ) מרחב מטרי המקיים $\mathcal{T}(X, \rho) = \mathcal{T}_X$.

הטופולוגיה הקו־סופית: תהא X קבוצה אזי $\{A \subseteq X \mid |X \backslash A| < \aleph_0\} \cup \{\varnothing\}$.

משפט: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{C} = \{E \subseteq X \mid X \backslash E \in \mathcal{T}\}$ אזי
- $X, \varnothing \in \mathcal{C}$.
- תהיינה $\{E\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ אזי $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \in \mathcal{C}$.
- תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{C}$ אזי $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{C}$.

בסיס לטופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $\bigcup \mathcal{B} = X$.
- תהיינה $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ עבורן $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ ותהא $x \in B_1 \cap B_2$ אזי קיימת $B_3 \in \mathcal{B}$ עבורה $x \in B_3$ וכן $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי
$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists B \in \mathcal{B}. (x \in B) \wedge (B \subseteq U)\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ טופולוגיה על X.

סימון: $\mathcal{B}_E = \{(a, b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_{\text{Sorg}} = \{[a, b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_E \cup \left\{(a, b) \backslash \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\} \mid a < b\right\}$.

טענה: $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{\text{Sorg}}, \mathcal{B}_K$ בסיסים של $\mathbb{R}$.

הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית: $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_E))$.

הישר של זורגנפריי: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{Sorg}}))$.

טופולוגיית־K: $\mathbb{R}_K = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$.

משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \exists A \subseteq \mathcal{B}. U = \bigcup A\}$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיסים עבורם $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$ וכן $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_1)$ אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$.

טופולוגיה עדינה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_2$.

טופולוגיה גסה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_1$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ עבורו $\forall U \in \mathcal{T}. \forall x \in U. \exists A \in \mathcal{A}. (x \in A) \wedge (A \subseteq U)$ אזי $\mathcal{A}$ בסיס של $\mathcal{T}$.

טענה: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי $\{(a, b) \mid a < b\} \cup \{[a, b) \mid \forall x \in X. a \leq x\} \cup \{(a, b] \mid \forall x \in X. x \leq b\}$ בסיס.

טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי
$\mathcal{T}(\{(a, b) \mid a < b\} \cup \{[a, b) \mid \forall x \in X. a \leq x\} \cup \{(a, b] \mid \forall x \in X. x \leq b\})$.

טענה: $\mathbb{R}$ מצוייד בטופולוגיית הסדר זהה ל־$\mathbb{R}$ מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

תת בסיס: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $\bigcup \mathcal{S} = X$.

הטופולוגיה הנוצרת מתת־בסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי
$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \left\{U \subseteq X \mid \exists A_1 \ldots A_k \subseteq \mathcal{S}. U = \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^k A\right)\right\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ טופולוגיה על X.

טופולוגיית זריצקי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{T}(\{\{a \in \mathbb{F}^n \mid f(a) \neq 0\} \mid f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]\})$.

סביבה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ויהי $x \in X$ אזי $U \in \mathcal{T}$ עבורה $x \in U$.

פנים של קבוצה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}(A) = \mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$.

סגור של קבוצה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{cl}(A) = \overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq E \\ E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{T}}} E$.

שפה של קבוצה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\partial A=\overline{A}\backslash\text{int}\left(A\right)$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\text{int}\left(A\right)\subseteq A\subseteq\overline{A}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי

- $\text{int}\left(A\right)=\max_{\subseteq}\left\{ \mathcal{U}\in\mathcal{T}\mid\mathcal{U}\subseteq A\right\}$.
- $\overline{A}=\min_{\subseteq}\left\{ E\mid\left(A\subseteq E\right)\wedge\left(E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{T}\right)\right\}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $A\subseteq X$ ויהי $x\in X$ התב"ש

- $x\in\overline{A}$.
- לכל $U\in\mathcal{T}$ המקיים $x\in U$ מתקיים $U\cap A\neq\varnothing$.
- יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי לכל $B\in\mathcal{B}$ המקיים $x\in B$ מתקיים $B\cap A\neq\varnothing$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\partial A=\overline{A}\cap\left(\overline{X\backslash A}\right)$.

מסקנה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $A\subseteq X$ ויהי $x\in X$ אזי $(x\in\partial A)\Longleftrightarrow$(לכל $U\in\mathcal{T}$ המקיימת $x\in U$ מתקיים $U\cap A\neq\varnothing$ וכן $U\cap A^{\mathcal{C}}\neq\varnothing$).

קבוצה צפופה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט אזי $A\subseteq X$ המקיימת $X=\overline{A}$.

טופולוגיית הנקודה הייחודית: תהא X קבוצה ותהא $p\in X$ אזי $\mathcal{T}_{p}=\left\{ \mathcal{U}\subseteq X\mid p\in\mathcal{U}\right\} \cup\left\{ \varnothing\right\}$.

נקודת הצטברות: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $x\in X$ עבורו לכל סביבה U של x מתקיים $U\cap A\backslash\left\{ x\right\} \neq\varnothing$.

גבול: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $x\in X^{\mathbb{N}}$ אזי $y\in X$ עבורו לכל סביבה U של y החל ממקום מסוים $x_{n}\in U$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\overline{A}\supseteq\left\{ x\in X\mid x\text{ קיימת }a\in A^{\mathbb{N}}\text{ המתכנסת אל }\right\}\supseteq A$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\overline{A}=\left\{ x\in X\mid A\text{ נקודת הצטברות של }x\right\}\cup A$.

מסקנה: תהא $A\subseteq X$ אזי (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($\left\{ x\in X\mid A\text{ נקודת הצטברות של }x\right\}\subseteq A$).

פונקציה רציפה בנקודה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $x\in X$ אזי $f:X\to Y$ עבורה לכל $\mathcal{V}\subseteq Y$ סביבה של $f\left(x\right)$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq X$ של x עבורה $f\left(\mathcal{U}\right)\subseteq\mathcal{V}$.

פונקציה רציפה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים אזי $f:X\to Y$ עבורה $\forall U\in\mathcal{S}.f^{-1}\left(U\right)\in\mathcal{T}$.

משפט: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f:X\to Y$ התב"ש

- f רציפה.
- לכל $U\subseteq Y$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה.
- לכל $E\subseteq Y$ סגורה מתקיים כי $f^{-1}\left(E\right)$ סגורה.
- לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f\left(A\right)}$.
- לכל $x\in X$ הפונקציה f רציפה ב־x.

הומיאומורפיזם: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים אזי $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל עבורה f^{-1} רציפה.

טענה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ועל התב"ש

- f הומיאומורפיזם.
- תהא $U\subseteq Y$ אזי (U פתוחה)$\Longleftrightarrow$($f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה).
- תהא $E\subseteq Y$ אזי (E סגורה)$\Longleftrightarrow$($f^{-1}\left(E\right)$ סגורה).
- לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right)=\overline{f\left(A\right)}$.

הטופולוגיה המושרית על קבוצה מפונקציה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי $\mathcal{T}_{f}=\left\{ f^{-1}\left(U\right)\mid U\in\mathcal{S}\right\}$.

טענה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי $(X,\mathcal{T}_{f})$ מ"ט.

מסקנה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי f רציפה על $(X,\mathcal{T}_{f}),(Y,\mathcal{S})$.

תת מרחב טופולוגי (ת"מ): יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_{A}=\left\{ U\subseteq A\mid\exists V\in\mathcal{T}.U=\text{Id}^{-1}\left(V\right)\right\}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $(A,\mathcal{T}_{A})$ מ"ט.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_{A}=\left\{ A\cap U\mid U\in\mathcal{T}\right\}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי $\mathcal{B}_{A}=\left\{ A\cap B\mid B\in\mathcal{B}\right\}$ בסיס של $\mathcal{T}_{A}$.

טענה: יהי $A\subseteq X$ אזי

- תהא $U\subseteq A$ אזי (U פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}_{A}$)$\Longleftrightarrow$(קיימת V פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}$ עבורה $V\cap A=U$).
- תהא $E\subseteq A$ אזי (E סגורה ביחס ל־$\mathcal{T}_{A}$)$\Longleftrightarrow$(קיימת F פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}$ עבורה $F\cap A=E$).
- תהא $D\subseteq A$ אזי $\text{cl}_{X}\left(D\right)\cap A=\text{cl}_{A}\left(D\right)$.

- תהא $A \subseteq D$ אזי $\operatorname{int}_X(D) \cap A \subseteq \operatorname{int}_A(D)$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T}_X)$ מ"ט ויהי $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ת"מ אזי

- נניח כי Y פתוחה ב־X, תהא $A \subseteq Y$ פתוחה ב־Y אזי A פתוחה ב־X.
- נניח כי Y סגורה ב־X, תהא $A \subseteq Y$ סגורה ב־Y אזי A סגורה ב־X.

טענה: יהיו X,Z מ"ט יהי $Y \subseteq Z$ ת"מ ותהא $f: X \to Y$ רציפה אזי $f: X \to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X,Y מ"ט יהי $A \subseteq X$ ת"מ ותהא $f: X \to Y$ רציפה אזי $f_{\restriction_A}: A \to Y$ רציפה.

טענה: יהיו X,Z מ"ט יהי $Z \subseteq Y$ ת"מ ותהא $f: X \to Y$ רציפה עבורה $f(X) \subseteq Z$ אזי $f: X \to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X,Z מ"ט ותהא $f: X \to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(קיימות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ פתוחות עבורן $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = X$ וכן $f_{\restriction_{U_\alpha}}$ רציפה לכל $\alpha \in \Lambda$).

טענה: יהיו X,Y,Z מ"ט תהא $f: X \to Y$ רציפה ותהא $g: Y \to Z$ רציפה $g \circ f: X \to Z$ רציפה.

משפט למת ההדבקה: יהיו X,Y מ"ט תהיינה $A,B \subseteq X$ סגורות עבורן $X = A \cup B$ תהא $f: A \to Y$ רציפה ותהא $g: B \to Y$ רציפה עבורן $f = g$ על $A \cap B$ אזי $f \cup g: X \to Y$ רציפה.

סימון: יהיו X,Y מ"ט ותהא $f: X \to Y$ חח"ע ורציפה נגדיר $\hat{f}: X \to f(X)$ כך $\hat{f} = f$.

שיכון: יהיו X,Y מ"ט אזי $f: X \to Y$ חח"ע ורציפה עבורה $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

העתקת מנה: יהיו X,Y מ"ט אזי $f: Y \to X$ פונקציה על המקיימת $\left(f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_Y\right) \Longleftrightarrow (\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X)$ $.\forall \mathcal{U} \subseteq X$.

הערה: יהיו X,Y מ"ט ותהא $f: Y \to X$ העתקת מנה אזי f רציפה.

טענה: יהיו X,Y,Z מ"ט תהא $f: X \to Y$ העתקת מנה ותהא $g: Y \to Z$ העתקת מנה אזי $g \circ f: X \to Z$ העתקת מנה.

משפט: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f: X \to A$ על אזי קיימת ויחידה טופולוגיה $\mathcal{T}_A$ על A עבורה f העתקת מנה.

טופולוגיית המנה המושרית: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f: X \to A$ על אזי טופולוגיה $\mathcal{T}_A$ על A עבורה f העתקת מנה.

העתקת נסג: יהי X מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $r: X \to A$ רציפה עבורה $r(a) = a$ לכל $a \in A$.

מרחב המנה: יהי X מ"ט יהי $\sim$ יחס שקילות מעל X ונגדיר $f: X \to {}^{X}\!/\!_\sim$ כך $f(x) = [x]_\sim$ אזי ${}^{X}\!/\!_\sim$ מצויידת עם טופולוגיית המנה.

משפט התכונה האוניברסילית: תהא $f: X \to Y$ העתקת מנה ותהא $g: X \to Z$ עבורה $g_{\restriction_{f^{-1}(\{y\})}}$ קבועה לכל $y \in Y$ אזי קיימת $h: Y \to Z$ עבורה

- $g = h \circ f$.
- (h רציפה)$\Longleftrightarrow$(g רציפה).
- (h העתקת מנה)$\Longleftrightarrow$(g העתקת מנה).

מסקנה: תהא $f: X \to Y$ העתקת מנה ותהא $g: X \to Z$ עבורה $g_{\restriction_{f^{-1}(\{y\})}}$ קבועה לכל $y \in Y$ אזי

- ($g \circ f^{-1}$ רציפה)$\Longleftrightarrow$(g רציפה).
- ($g \circ f^{-1}$ העתקת מנה)$\Longleftrightarrow$(g העתקת מנה).

מסקנה: תהא $g: X \to Z$ רציפה ועל ותהא $f: X \to \left\{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\right\}$ העתקת מנה אזי ($g \circ f^{-1}$ הומיאומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(g העתקת מנה).

קבוצה רוויה: תהא $f: X \to Y$ אזי $A \subseteq X$ עבורה לכל $y \in Y$ אם $A \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$ אז $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$.

טענה: תהא $f: X \to Y$ רציפה אזי (f העתקת מנה)$\Longleftrightarrow$(f על ולכל $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$ מתקיים כי $f(\mathcal{U})$ פתוחה ורוויה).

העתקה פתוחה: העתקה $f: X \to Y$ עבורה לכל $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$ מתקיים כי $f(\mathcal{U})$ פתוחה.

העתקה סגורה: העתקה $f: X \to Y$ עבורה לכל $E \subseteq X$ סגורה מתקיים כי $f(E)$ סגורה.

טענה: תהא $f: X \to Y$ חח"ע ועל התב"ש

- f פתוחה.
- f סגורה.
- f^{-1} רציפה.

טענה: תהא $f: X \to Y$ חח"ע ועל התב"ש

- f הומיאומורפיזם.
- f רציפה ופתוחה.
- f^{-1} רציפה וסגורה.

טענה: תהא $f: X \to Y$ רציפה פתוחה ועל אזי f העתקת מנה.

טענה: תהא $f: X \to Y$ רציפה סגורה ועל אזי f העתקת מנה.

המרחב הפרויקטיבי הממשי: נגדיר $\sim=\left\{(x,y)\in\left(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}\right)^{2}\;\middle|\;\exists\lambda\in\mathbb{R}\,(x=\lambda y)\right\}$ אזי $\mathbb{RP}^{n}=\left(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}\right)/\sim$.

מכפלה של קבוצות: תהיינה $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ קבוצות אזי $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha=\left\{f:\Lambda\to\bigcup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\mid f(\alpha)\in X_\alpha\right\}$.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{B}_{\text{box}}=\left\{\prod_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha\mid\mathcal{U}_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha\right\}$ בסיס של $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$.

טופולוגיית התיבה: יהיו $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{box}}=\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{box}})$.

הטלה: תהיינה $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ קבוצות אזי $\pi_\beta:\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\to X_\beta$ המוגדרת $\pi_\beta(f)=f(\beta)$.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{S}_{\text{prod}}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\left\{\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\mid\mathcal{U}_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha\right\}$ תת־בסיס של $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$.

טופולוגיית המכפלה: יהיו $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}}=\mathcal{T}(\mathcal{S}_{\text{prod}})$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים באשר $|\Lambda|<\aleph_0$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}}=\mathcal{T}_{\text{box}}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים באשר $|\Lambda|\geq\aleph_0$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}}\subseteq\mathcal{T}_{\text{box}}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים ותהא $\left(\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha,\mathcal{T}\right)$ טופולוגיה עבורה π_α רציפה לכל $\alpha\in\Lambda$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}}\subseteq\mathcal{T}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}}=\left\{\prod_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_\alpha\mid(\forall\alpha\in\Lambda.\mathcal{U}_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha)\wedge(|\{\alpha\in\Lambda\mid\pi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)=X_\alpha\}|\in\mathbb{N})\right\}$.

משפט: תהא $f:Y\to\left(\prod_\alpha X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$($\pi_\alpha\circ f$ רציפה לכל α).

טענה: תהא $|\Lambda|\geq\aleph_0$ אזי $\left(\mathbb{R}^\Lambda,\mathcal{T}_{\text{box}}\right)$ אינה מטריזבילית.

טענה: תהא $|\Lambda|\geq\aleph_0$ אזי $\left(\mathbb{R}^\Lambda,\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ אינה מטריזבילית.

תכונה טופולוגית: תכונה P של מ"ט באשר לכל X,Y מ"ט עבורן קיים $f:X\to Y$ הומיאומורפיזם מתקיים (X מקיים P)$\Longleftrightarrow$(Y מקיים P).

טענה: מטריזביליות הינה תכונה טופולוגית.

הפרדה של מרחב טופולוגי: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט אזי $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ באשר $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}\cup\mathcal{V}=X$ וכן $\mathcal{U},\mathcal{V}\neq\varnothing$.

מרחב טופולוגי קשיר: מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ עבורו לא קיימת הפרדה.

מרחב טופולוגי אי־קשיר: מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ עבורו קיימת הפרדה.

משפט: יהי $f:X\to Y$ הומיאומורפיזם אזי (X קשיר)$\Longleftrightarrow$(Y קשיר).

מסקנה: קשירות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מרחב מטרי התב"ש

- X אי־קשיר.
- קיימות $E,F\subseteq X$ סגורות זרות לא ריקות עבורן $X=E\cup F$.
- קיימת $D\in\mathcal{P}(X)\setminus\{X,\varnothing\}$ סגורה ופתוחה.

טענה: יהי X מ"ט קשיר ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קשירה.

טענה: יהי X מ"ט ויהי $Y\subseteq X$ תת־מרחב אזי (Y אי־קשיר)$\Longleftrightarrow$(קיימות $H,K\in\mathcal{P}(X)\setminus\{X,\varnothing\}$ עבורן $Y=H\cup K$ וכן $\overline{H}\cap K=H\cap\overline{K}=\varnothing$).

טענה: תהא $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ הפרדה של X ויהי $Y\subseteq X$ תת־מרחב קשיר אזי $(Y\subseteq U)\oplus(Y\subseteq\mathcal{V})$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq X$ באשר A קשירה וכן $A\subseteq B\subseteq\overline{A}$ אזי B קשירה.

מסקנה: תהא $A\subseteq X$ קשירה אזי $\overline{A}$ קשירה.

טענה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A\in\mathcal{A}$ מתקיים כי A קשירה וכן $\bigcap\mathcal{A}\neq\varnothing$ וכן $\bigcup\mathcal{A}=X$ אזי X קשיר.

מסקנה: תהיינה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(X)\setminus\{\varnothing\}$ באשר X_n קשיר וכן $X_n\cap X_{n+1}\neq\varnothing$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי X קשיר.

מסקנה: $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית קשיר.

מסקנה: $(-1,1)$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ סטנדרטי הינו קשיר.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ באשר $a<b$ אזי $(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)$ קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ סטנדרטי.

מסקנה: יהי $a\in\mathbb{R}$ אזי $(-\infty,a),(-\infty,a],(-\infty,\infty),[a,\infty),(a,\infty)$ קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ סטנדרטי.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ איננה קשירה.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α קשיר לכל $\alpha\in\Lambda$)$\Longleftrightarrow$($\left(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קשיר).

טענה: $\left(\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{box}}\right)$ איננה קשירה.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{R}^n$ קשיר עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

מסילה: יהי X מ"ט ויהיו $x,y\in X$ אזי $\gamma:[0,1]\to X$ רציפה עבורה $f(0)=x$ וכן $f(1)=y$.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית: מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ עבורו לכל $x,y\in X$ קיימת מסילה מ־x ל־y.

טענה: יהי X מ"ט קשיר מסילתית אזי X קשיר.

מסקנה: יהי $n>1$ אזי $\mathbb{R}^n$ איננו הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}$.

למה: יהי X מ"ט קשיר מסילתית ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קשיר מסילתית.

מסקנה: קשירות מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי $\mathbb{C}^n$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^{2n}$ ויהי $p:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ אזי $\mathbb{C}^n\backslash\{x\in\mathbb{C}^n\mid p(x)=0\}$ קשירה מסילתית.

מסקנה: יהי $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית על $\mathbb{C}^{n^2}$ אזי $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ תת־מרחב קשיר מסילתית.

סימון: יהי X מ"ט ויהיו $x,y\in X$ אזי $(x\sim_{\text{קשיר}}y)\Longleftrightarrow$(קיימת $D\subseteq X$ קשירה עבורה $x,y\in D$).

טענה: יהי X מ"ט אזי $\sim_{\text{קשיר}}$ יחס שקילות מעל X.

רכיבי קשירות: יהי X מ"ט אזי $X/\sim_{\text{קשיר}}$.

סימון: יהי X מ"ט ויהיו $x,y\in X$ אזי $(x\sim_{\text{קשיר מסילתית}}y)\Longleftrightarrow$(קיימת מסילה מ־$x$ ל־y).

טענה: יהי X מ"ט אזי $\sim_{\text{קשיר מסילתית}}$ יחס שקילות מעל X.

רכיבי קשירות מסילתית: יהי X מ"ט אזי $X/\sim_{\text{קשיר מסילתית}}$.

משפט: יהיו $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ רכיבי הקשירות של X אזי
- לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי D_α קשירה.
- יהיו $\alpha,\beta\in\Lambda$ באשר $\alpha\neq\beta$ אזי $D_\alpha\cap D_\beta=\varnothing$.
- מתקיים $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}D_\alpha$.
- לכל $Y\subseteq X$ תת־מרחב קשיר קיים ויחיד $\alpha\in\Lambda$ עבורו $Y\subseteq D_\alpha$.

משפט: יהיו $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ רכיבי הקשירות המסילתית של X אזי
- לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי D_α קשירה.
- יהיו $\alpha,\beta\in\Lambda$ באשר $\alpha\neq\beta$ אזי $D_\alpha\cap D_\beta=\varnothing$.
- מתקיים $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}D_\alpha$.
- לכל $Y\subseteq X$ תת־מרחב קשיר קיים ויחיד $\alpha\in\Lambda$ עבורו $Y\subseteq D_\alpha$.

מסקנה: יהי D רכיב קשירות של X אזי D סגור.

מרחב טופולוגי קשיר מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x\in X$ המקיים לכל סביבה $\mathcal{U}\subseteq X$ של x קיימת סביבה $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ קשירה עבורה $x\in\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי קשיר מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ מתקיים כי X קשיר מקומית ב־x.

טענה: קשירות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x\in X$ המקיים לכל סביבה $\mathcal{U}\subseteq X$ של x קיימת סביבה $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ קשירה מסילתית עבורה $x\in\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ מתקיים כי X קשיר מסילתית מקומית ב־x.

טענה: קשירות מקומית מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ איננו קשיר מקומית.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X קשיר מקומית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\mathcal{U}\in\mathcal{T}$ ולכל D רכיב קשירות של $\mathcal{U}$ מתקיים $D\in\mathcal{T}$).

טענה: יהי X מ"ט אזי (X קשיר מסילתית מקומית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\mathcal{U}\in\mathcal{T}$ ולכל D רכיב קשירות מסילתית של $\mathcal{U}$ מתקיים $D\in\mathcal{T}$).

טענה: יהי X מ"ט קשיר וקשיר מסילתית מקומית אזי X קשיר מסילתית.

בסיס סביבות בן מנייה בנקודה: יהי X מ"ט אזי $x\in X$ עבורו קיימות $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$ סביבות של x עבורן לכל סביבה $\mathcal{V}$ של x קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $\mathcal{U}_n\subseteq\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה הראשונה: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ קיים בסיס סביבות בן מנייה ב־x.

מסקנה: יהי X מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי X מניה I.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ מניה I.

טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה מניה I.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד עם הטופולוגיה הקו־בת־מניה אינו מניה I.

משפט: יהי X מ"ט מניה I ותהא $A\subseteq X$ תת־קבוצה אזי $\overline{A}=\left\{x\in X\mid\text{קיימת }a\in A^{\mathbb{N}}\text{ המתכנסת אל }x\right\}$.

משפט: יהיו X,Y מ"טים באשר X מניה I ותהא $f:X\to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{x_n\}\subseteq X$ המתכנסת ל־a עבור $a\in X$ מתקיים כי $\{f(x_n)\}$ מתכנסת ל־$f(a)$).

מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה השנייה: מרחב טופולוגי X עבורו קיים בסיס לכל היותר בן מנייה היוצר את $\mathcal{T}$.

מסקנה: יהי X מ"ט מניה II אזי X מניה I.

טענה: $\mathbb{R}^n$ מניה II.

סימון: $\mathbb{R}^{\aleph_0}=\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{R}$.

טענה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0},\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מניה II.

טענה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0},\mathcal{T}_{\text{box}}\right)$ אינו מניה I.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ אינו מניה II.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X מניה II)$\Longleftrightarrow$($\aleph_0\geq|X|$).

טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית מניה II.

טענה: נגדיר $d_u:\mathbb{R}^{\aleph_0}\times\mathbb{R}^{\aleph_0}\to\mathbb{R}$ כך $d_u\left(\left(a_k\right)_{k=1}^{\infty},\left(b_k\right)_{k=1}^{\infty}\right)=\min\left\{\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|a_k-b_k\right|,1\right\}$ אזי d_u מטריקה.

הטופולוגיה האחידה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0},\mathcal{T}\left(d_u\right)\right)$ הינו מניה I וכן אינו מניה II.

טענה: יהי X מ"ט מניה I ויהי $A\subseteq X$ תת־מרחב אזי A מניה I.

טענה: יהי X מ"ט מניה II ויהי $A\subseteq X$ תת־מרחב אזי A מניה II.

טענה: יהי X מ"ט מניה I ותהא $f:X\to Y$ רציפה ופתוחה אזי $f\left(X\right)$ מניה I.

מסקנה: מניה I הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט מניה II ותהא $f:X\to Y$ רציפה ופתוחה אזי $f\left(X\right)$ מניה II.

מסקנה: מניה II הינה תכונה טופולוגית.

מרחב טופולוגי ספרבילי: מרחב טופולוגי X עבורו קיימת $A\subseteq X$ צפופה בת מנייה.

מרחב טופולוגי לינדלוף: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{T}$ המקיימים $X=\bigcup\mathcal{U}_\alpha$ קיימת $f:\mathbb{N}\to\Lambda$ עבורה $X=\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{U}_{f(i)}$.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ ספרבילי.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X ספרבילי)$\Longleftrightarrow$($\aleph_0\geq|X|$).

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית אזי X ספרבילי.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד בטופולוגיה הקו־בת־מנייה אינו ספרבילי.

טענה: יהי X מ"ט מניה II אזי X לינדלוף וספרבילי.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית אינו מניה I.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $(X,\mathcal{T})$ אזי (X לינדלוף)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{B}$ המקיימים $X=\bigcup\mathcal{B}_\alpha$ קיימת $f:\mathbb{N}\to\Lambda$ עבורה $X=\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{B}_{f(i)}$).

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ לינדולף.

טענה: יהי X מ"ט ספרבילי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f\left(X\right)$ ספרבילי.

מסקנה: ספרביליות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט לינדלוף ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f\left(X\right)$ לינדלוף.

מסקנה: לינדלוף הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט ספרבילי ותהא $A\subseteq X$ פתוחה אזי A ספרבילי.

טענה: יהי X מ"ט לינדלוף ותהא $E\subseteq X$ סגורה אזי E לינדלוף.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים מניה I באשר $|\Lambda|\leq\aleph_0$ אזי $\left(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מניה I.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים מניה II באשר $|\Lambda|\leq\aleph_0$ אזי $\left(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מניה II.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים ספרבילים באשר $|\Lambda|\leq\aleph_0$ אזי $\left(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ ספרבילי.

טענה: יהי X מרחב מטרי התב"ש

- X מניה II.
- X ספרבילי.
- X לינדלוף.

מרחב טופולוגי T_0: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x,y\in X$ שונים קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $y\notin\mathcal{U}$ או קיימת סביבה $\mathcal{V}$ של y עבורה $x\notin\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי T_1: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x,y\in X$ שונים קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $y\notin\mathcal{U}$ וגם קיימת סביבה $\mathcal{V}$ של y עבורה $x\notin\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי T_2/האוסדורף: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x,y \in X$ שונים קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x וכן סביבה $\mathcal{V}$ של y עבורן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$

מסקנה: T_0, T_1, T_2 הינן תכונות טופולוגיות.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_1 אזי X מרחב טופולוגי T_0.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_2 אזי X מרחב טופולוגי T_1.

טענה: יהי X מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי X מרחב T_2.

טענה: תהיינה $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ טופולוגיות על X באשר $\mathcal{S}$ עדינה מ־$\mathcal{T}$ וכן $(X, \mathcal{T})$ מרחב T_i אזי $(X, \mathcal{S})$ מרחב T_i.

מסקנה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ האוסדורף.

טענה: $\mathbb{Q}$ המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית הינו T_1 וכן אינו T_2.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד בטופולוגיה הקו־בת־מניה הינו T_1 וכן אינו T_2.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי $(X, \mathcal{T}(d))$ הינו T_2.

טענה: תהא $(X, \mathcal{T})$ מ"ט T_i ותהא $(Y, \mathcal{S})$ מ"ט באשר $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ אזי (Y, S) הינה T_i.

טענה: יהי X מ"ט T_i ויהי $A \subseteq X$ תת־מרחב אזי A מרחב T_i.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי (X_α מרחב T_i לכל $\alpha \in \Lambda$)$\iff$($(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ מרחב T_i).

הישר עם הראשית הכפולה: תהא $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}^2$ הסטנדרטית ויהי $\sim = \text{Id} \cup \{((\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix})) \mid a \neq 0\}$ יחס שקילות על $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ אזי ${}^{\mathbb{R}\times\{0,1\}}/_{\sim}$ עם טופולוגיית המנה.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט אזי ($\mathcal{T}$ הוא T_1)$\iff$($\{x\}$ קבוצה סגורה לכל $x \in X$).

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט אזי ($\mathcal{T}$ הוא T_1)$\iff$(לכל $A \subseteq X$ מתקיים $A = \bigcap_{\substack{A \subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{U} \in \mathcal{T}}} \mathcal{U}$).

טענה: יהי X מ"ט האוסדורף ותהא $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה מתכנסת אזי קיים ויחיד $y \in X$ עבורו $\{x_n\}$ מתכנסת ל־y.

מרחב טופולוגי T_i מקומית: מ"ט X עבורו לכל $x \in X$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $\mathcal{U}$ הינה T_i.

טענה: יהי X מ"ט T_0 מקומית אזי X הינו T_0.

טענה: יהי X מ"ט T_1 מקומית אזי X הינו T_1.

טענה: הישר עם הראשית הכפולה הינו T_2 מקומית וכן אינו T_2.

קבוצה מסוג G_δ: יהי X מ"ט אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימת $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{T}$ המקיימת $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$.

טענה: יהי X מ"ט T_1 מניה I ויהי $x \in X$ אזי $\{x\}$ הינו G_δ.

טענה: יהי X מ"ט T_1 תהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ אזי (x נקודת הצטברות של A)$\iff$(לכל $\mathcal{U}$ סביבה של x מתקיים $|A \cap \mathcal{U}| \geq \aleph_0$).

טענה: יהי X מ"ט אזי (X מרחב האוסדורף)$\iff$($\{(a,a) \mid a \in X\}$ קבוצה סגורה).

מרחב טופולוגי רגולרי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ ולכל $E \subseteq X$ סגורה באשר $x \notin E$ קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ עבורן $x \in \mathcal{U}$ וכן $E \subseteq \mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

מרחב טופולוגי נורמלי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $E, F \subseteq X$ סגורות באשר $E \cap F = \varnothing$ קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ עבורן $E \subseteq \mathcal{U}$ וכן $F \subseteq \mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

מרחב טופולוגי T_3: מרחב טופולוגי X רגולרי וכן T_1.

מרחב טופולוגי T_4: מרחב טופולוגי X נורמלי וכן T_1.

מסקנה: T_3, T_4 הינן תכונות טופולוגיות.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_3 אזי X מרחב טופולוגי T_2.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_4 אזי X מרחב טופולוגי T_3.

טענה: $\mathbb{R}_K$ הינו T_2 וכן אינו רגולרי.

טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף: נגדיר $\mathcal{T} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ אזי $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד עם טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף הינו T_0 וכן אינו T_1 וכן אינו רגולרי וכן הינו נורמלי.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ הינו T_4.

סימון: תהיינה $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq X$ עבורן $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ וכן $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{U}$ אזי $\mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X רגולרי)$\iff$(לכל $x \in X$ ולכל $\mathcal{U} \subseteq X$ סביבה של x קיימת סביבה $\mathcal{V}$ של x עבורה $\mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$).

טענה: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי)$\iff$(לכל $E \subseteq X$ סגורה ולכל $\mathcal{U} \subseteq X$ פתוחה באשר $E \subseteq \mathcal{U}$ קיימת $\mathcal{V} \subseteq X$ פתוחה עבורה $E \subseteq \mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$).

משפט הלמה של אוריסון: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי)$\iff$(לכל $A,B\subseteq X$ סגורות וזרות ולכל $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ קיימת $f:X\to[a,b]$ רציפה עבורה $f_{\upharpoonright_A}=a$ וכן $f_{\upharpoonright_B}=a$).

טענה: יהי X מ"ט רגולרי ויהי $A\subseteq X$ אזי A רגולרי.

טענה: יהי X מ"ט נורמלי ויהי $E\subseteq X$ סגור אזי E נורמלי.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α רגולרי לכל $\alpha\in\Lambda$)$\iff$($(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}})$ רגולרי).

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α הינו T_3 לכל $\alpha\in\Lambda$)$\iff$($(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}})$ הינו T_3).

מסקנה: $\mathbb{R}^2_{\text{Sorg}}$ הינו רגולרי וכן אינו נורמלי.

טענה: יהי X מ"ט מטריזבילי אזי X נורמלי.

טענה: יהי $(X,\prec)$ יחס סדר טוב אזי X המצוייד עם טופולוגיית הסדר נורמלי.

מרחב טופולוגי נורמלי לחלוטין: מ"ט X עבורו לכל $A\subseteq X$ מתקיים כי A נורמלי.

קבוצות מופרדות: יהי X מ"ט אזי $A,B\subseteq X$ עבורן $A\cap\overline{B}=\varnothing$ וכן $\overline{A}\cap B=\varnothing$.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי לחלוטין)$\iff$(לכל $A,B\subseteq X$ מופרדות קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ זרות עבורן $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן $B\subseteq\mathcal{V}$).

סימון: $\mathcal{B}_{\text{moore},1}=\{B_r(p)\mid(p\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq0})\wedge(p_2>r>0)\}$.

סימון: $\mathcal{B}_{\text{moore},2}=\{B_r(p)\cup\{(p_1,0)\}\mid(p\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq0})\wedge(p_2=r>0)\}$.

המישור של מור: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq0}$ מצוייד עם הטופולוגיה $\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{moore},1}\cup\mathcal{B}_{\text{moore},2})$.

טענה: המישור של מור הינו קשיר האוסדורף רגולרי וכן אינו נורמלי.

טענה: יהי X מ"ט רגולרי ומניה II אזי X נורמלי.

מסקנה: יהי X מ"ט רגולרי לינדלוף אזי X נורמלי.

למה: יהי X מ"ט באשר $\mathcal{T}_X$ מושרית מהמטריקה d אזי קיימת מטריקה d' של X עבורה $d'\leq1$ וכן d' משרה את $\mathcal{T}_X$.

למה: יהיו $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מ"טים אזי (X_n מטריזבילי לכל $n\in\mathbb{N}$)$\iff$($(\prod X_n,\mathcal{T}_{\text{prod}})$ מטריזבילי).

מסקנה: $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ מטריזבילי.

משפט המטריזציה של אוריסון: יהי X מ"ט T_0 רגולרי ומניה II אזי X מטריזבילי.

מרחב טופולוגי מטריזבילי מקומית: מ"ט X עבורו לכל $x\in X$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $\mathcal{U}$ הינה מטריזבילית.

טענה: יהי X מ"ט T_0 רגולרי לינדלוף ומטריזבילי מקומית אזי X מטריזבילי.

מרחב טופולוגי קומפקטי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{T}$ המקיימים $X=\bigcup\mathcal{U}_\alpha$ קיים $n\in\mathbb{N}$ וקיימת $f:[n]\to\Lambda$ עבורה $X=\bigcup_{i=0}^{n}\mathcal{U}_{f(i)}$.

טענה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $(X,\mathcal{T})$ אזי (X קומפקטי)$\iff$(לכל $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{B}$ המקיימים $X=\bigcup\mathcal{B}_\alpha$ קיים $n\in\mathbb{N}$ וקיימת $f:[n]\to\Lambda$ עבורה $X=\bigcup_{i=0}^{n}\mathcal{B}_{f(i)}$).

טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית קופקטי.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X קומפקטי)$\iff$(X סופי).

טענה: תהא X קבוצה סגורה ותהא $\mathcal{T}$ טופולוגיה על X אזי $(X,\mathcal{T})$ קומפקטי.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד עם הטופולוגיה הקו־סופית קומפקטי.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי (a,b) המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $[a,b]$ המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי.

טענה: יהי X מ"ט ויהי $Y\subseteq X$ אזי (Y קומפקטי)$\iff$(לכל $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{T}_X$ המקיימים $Y\subseteq\bigcup\mathcal{U}_\alpha$ קיים $n\in\mathbb{N}$ וקיימת $f:[n]\to\Lambda$ עבורה $Y\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}\mathcal{U}_{f(i)}$).

טענה: יהי X מ"ט קומפקטי ותהא $Y\subseteq X$ סגורה אזי Y קומפקטי.

טענה: יהי X האוסדורף תהא $Y\subseteq X$ קומפקטי ויהי $x\notin Y$ אזי קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}_X$ עבורן $x\in\mathcal{U}$ וכן $Y\subseteq\mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

טענה: יהי X האוסדורף ותהא $Y\subseteq X$ קומפקטי אזי Y סגורה.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי אזי X רגולרי.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי אזי X נורמלי.

טענה: יהי X קומפקטי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קומפקטי.

מסקנה: קומפקטיות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X קומפקטי יהי Y האוסדורף ותהא $f:X\to Y$ רציפה והפיכה אזי f הומיאומורפיזם.

מסקנה: יהי X קומפקטי יהי Y האוסדורף ותהא $f: X \to Y$ רציפה וחח"ע אזי f שיכון.

תכונת החיתוך הסופי: יהי X מ"ט אזי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $f: [n] \to \Lambda$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n} A_{f(i)} \neq \varnothing$.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X קומקפטי)$\Longleftrightarrow$(לכל $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ משפחה של קבוצות סגורות המקיימת את תכונת החיתוך הסופי מתקיים $\bigcap \mathcal{A} = \varnothing$).

למה: יהי X קומפקטי יהי Y מ"ט ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ כיסוי פתוח של $X \times Y$ ללא תת־כיסוי סופי אזי קיימת $x \in X$ עבורה לכל $\mathcal{U}$ סביבה של x מתקיים כי $\mathcal{U} \times Y$ אינה ניתנת לכיסוי סופי על ידי אברי $\mathcal{A}$.

למה: יהיו X, Z מ"טים יהי Y קומפקטי יהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y \times Z)$ כיסוי פתוח של $X \times Y \times Z$ ללא תת־כיסוי סופי ותהא $x \in X$ עבורה לכל $\mathcal{U}$ סביבה של x מתקיים כי $\mathcal{U} \times Y \times Z$ אינה ניתנת לכיסוי סופי על ידי אברי $\mathcal{A}$ אזי קיימת $y \in Y$ עבורה לכל $\mathcal{U}$ סביבה של x ולכל $\mathcal{V}$ סביבה של y מתקיים כי $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times Z$ אינה ניתנת לכיסוי סופי.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"טים אזי (X_i קומפקטי לכל $i \in [n]$)$\Longleftrightarrow$($\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי).

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"טים אזי (X_i קומפקטי לכל $i \in \mathbb{N}$)$\Longleftrightarrow$($\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי).

טענה: (אקסיומת הבחירה)$\Longleftrightarrow$(לכל $|\Lambda| > \aleph_0$ ולכל $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים מתקיים (X_α קומפקטי לכל $\alpha \in \Lambda$)$\Longleftrightarrow$($\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי)).

מסקנה משפט טיכונוב: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α קומפקטי לכל $\alpha \in \Lambda$)$\Longleftrightarrow$($\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי).

טענה: יהי $\{0,1\}$ המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי $\{0,1\}$ קומפקטי וכן $\left(\prod_{n=1}^{\infty} \{0,1\}, \mathcal{T}_{\text{box}}\right)$ אינו קומפקטי.

טענה: יהי X קומפקטי יהי Y מ"ט מצוייד עם טופולוגיית הסדר $\prec$ ותהא $f: X \to Y$ רציפה אזי קיימים $a, b \in X$ עבורם $f(a) \le f(x) \le f(b)$ לכל $x \in X$.

מספר לבג: יהי X קומפקטי ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ כיסוי פתוח של X אזי $\delta > 0$ עבורו לכל $A \subseteq X$ אם $\operatorname{diam}(A) < \delta$ אז קיימת $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ עבורה $A \subseteq \mathcal{U}$.

טענה: יהי X קומפקטי ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ כיסוי פתוח של X אזי קיים מספר לבג.