```
. עומק מעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי C מעגל בוליאני אזי מעגל בוליאני אזי מעגל בוליאני מיהי
                                                                        .ee_n\left(x
ight)=igvee_{i=1}^n x_i המוגדרת אזי ee_n:\left\{0,1
ight\}^n	o\left\{0,1
ight\} אזיn\in\mathbb{N}_{\geq 3} הגדרה: יהי
                                                                        .\wedge_n\left(x
ight)=igwedge_{i=1}^nx_i המוגדרת: יהי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} הגדרה: יהי
(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\wedge_n\})\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\vee_n\})\cup\{\wedge,\vee,\neg\} מעגל בוליאני בעל fan-in מעגל בוליאני מעל בסיס הפונקציות מעל בסיס הפונקציות הבוליאני בעל
                                                                                            הערה: אלא אם נאמר אחרת מעגל בוליאני הוא בעל fan-in מוגבל.
      \mathcal{O}\left(n\cdot 2^n
ight) בגודל f בגודל המחשב את fan-in טענה: בעל בוליאני f:\left\{0,1
ight\}^n 	o \left\{0,1\right\} ובעומק f:\left\{0,1\right\}^n
                    n + \log_2{(n)} ובעומק \mathcal{O}\left(n \cdot 2^n\right) ובעומק f אזי קיים מעגל בוליאני f:\left\{0,1\right\}^n 	o \left\{0,1\right\} אחר מענה: תהא
                                 L מסקנה: תהא L שפה אזי קיימת משפחת מעגלים \mathcal C מגודל \mathcal C ומעומק n+\log{(n)} ומעומק
             .Size (C) \geq rac{2^n}{2n} אזי קיימת n \in \mathbb{N} אזי קיימת f: \{0,1\}^n 	o \{0,1\} עבורה לכל מעגל בוליאני n \in \mathbb{N} אזי קיימת
.Size (f)=\min \{ \mathrm{Size}\,(C) \mid (C) \land (f) \land (f) \land (f) \} אזי f:\{0,1\}^n \to \{0,1\} ותהא ותהא n\in \mathbb{N} מחשבת את מעגל)
                                                                            .Size (f) \leq 15 \cdot (2^n - 1) אזי f: \{0,1\}^n \to \{0,1\} ותהא n \in \mathbb{N} יטענה: יהי
                                                                                     .Size (f)=\mathcal{O}\left(\frac{2^n}{n}\right) אזי f:\{0,1\}^n \to \{0,1\} ותהא n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                                     \max\left\{ \mathrm{Size}\left(f
ight)\mid f:\left\{ 0,1
ight\} ^{n}
ightarrow\left\{ 0,1
ight\} 
ight\} =\Theta\left(rac{2^{n}}{n}
ight) אזי n\in\mathbb{N} יהי
f באשר f:\{0,1\}^n 	o \{0,1\} קיים n \leq S < C \cdot rac{2^n}{n} המקיימת S:\mathbb{N} 	o \mathbb{N} ולכל ולכל n \in \mathbb{N} עבורו לכל עבורו לכל
                                                                  S\left(n
ight) וכן f לא חשיבה על ידי מעגל מגודל אודל S\left(n
ight)+10 וכן וכן אחשיבה על ידי מעגל מגודל
           .Size (S\left(n
ight))=\left\{L\subseteq\left\{0,1\right\}^{*}\mid S\left(n
ight) הגדרה: תהא S:\mathbb{N}	o\mathbb{N} אזי S:\mathbb{N}	o\mathbb{N} חשיבה על ידי משפחת מעגלים מגודל לכל היותר
                                                                                                                                          .Size (2^n)=\mathcal{P}\left(\left\{0,1\right\}^*\right) מסקנה:
                                                       .Size (S\left(n
ight))\subsetneq Size (S\left(n
ight)+10n) אזי n\leq S\left(n
ight)\leq rac{2^{n}}{n} עבורה S:\mathbb{N}	o\mathbb{N} אזי S:\mathbb{N}	o\mathbb{N}
                                                                                         . Size (Poly) = \bigcup_{c\in\mathbb{N}} Size (n^c) : הגדרה: \mathbb{E}_{\operatorname{TMN}\ (A,B)}\left[|E\left(A,B\right)|\right]=\frac{|E(G)|}{2} איי היי G גרף איי קיים חתך (A,B) עבורו E\left(A,B\right)\geq\frac{|E(G)|}{2}
                                                     .parity (x)=igoplus_{i=1}^n x_i המוגדרת parity : \{0,1\}^n	o\{0,1\} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי זוגיות: יהי זוגיות:
                                                                                \mathcal{O}\left(\log\left(n
ight)
ight) ועומק ועומק parity_{n} את המחשב את מעגל קיים מעגל
                                              .Size (C) \geq 2^{\Omega\left(n^{\frac{1}{n \cdot d}}\right)} אזי א מעגל המחשב את parity_n בעל parity משפט: יהי מעגל מעגל מעגל המחשב את
                                                                            .1 בעל דרגה p\in\mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight] אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי בעל דרגה בעל בעל פולינום מולטי־לינארי (מ"ל):
  x\in\{0,1\}^n לכל f\left(x
ight)=p\left(x
ight) מ"ל עבורו p\in\mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight] אוי f:\{0,1\}^n	o\{0,1\} לכל
                                                                                           f:\{0,1\}^n 	o \{0,1\} אזי קיים פולינום המחשב את f:\{0,1\}^n 	o \{0,1\}
                               \deg\left(f
ight)=\min\left\{\deg\left(p
ight)\mid\left(p\in\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}
ight]
ight)\wedge\left(f
ight. מחשב את \left.f:\left\{0,1
ight\}^{n}
ightarrow\left\{0,1
ight\} מחשב את \left.f:\left\{0,1
ight\}^{n}
ight.
                                                                                                                                   \deg\left(ee_{n}
ight)=n אזי n\in\mathbb{N} מסקנה: יהי
מ"ל עבורו p\in\mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight] אזי f:\left\{0,1
ight\}^n	o\left\{0,1
ight\} ותהא arepsilon>0 ותהא שניעום מחשב פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה arepsilon: יהי
                                                                                                                                     \mathbb{P}_{x \leftarrow \{0,1\}^n} \left( p\left(x\right) = f\left(x\right) \right) \ge 1 - \varepsilon
                                                                                                            rac{1}{3} טענה: הפולינום 1 מחשב את את בממוצע עם שגיאה
p\in\mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight] אזי לכל arepsilon>0 קיים פולינום מ"ל בוליאני מגודל בוליאני מגודל בוליאני מגודל f:\left\{0,1
ight\}^n	o\left\{0,1
ight\} קיים פולינום מ"ל
                                                                                     arepsilon בממוצע עם שגיאה f המחשב את \mathcal{O}\left(\left(\log\left(n
ight)\cdot\log\left(rac{s}{arepsilon}
ight)
ight)^d
ight) מדרגה
     \deg\left(p
ight)\geq2^{\Omega\left(\delta n
ight)} אזי \mathbb{P}_{x\leftarrow\left\{0,1
ight\}^{n}}\left(p\left(x
ight)=\mathsf{parity}\left(x
ight)
ight)\geqrac{1}{2}+\delta עבורו \delta>0 עבורו \delta>0 מולטי־לינארי ויהי p\in\mathbb{R}\left[x_{1}\dots x_{n}
ight]
התפלגות משפחת פולינומים מחשבת פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה arepsilon > 0 יהי ותהא f: \{0,1\}^n 	o \{0,1\} אזי קבוצת
                                          \mathbb{P}_{p\leftarrow P}\left(p\left(x
ight)=f\left(x
ight)
ight)\geq1-arepsilon מתקיים מ"ל P\subseteq\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}
ight] עבורה לכל P\subseteq\mathbb{R}\left[x_{1}\ldots x_{n}
ight]
טענה: יהי arepsilon>0 אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל P\subseteq\mathbb{R}\left[x_1\dots x_n
ight] מדרגה C\left(\log\left(n
ight)\cdot\log\left(rac{1}{arepsilon}
ight)
ight) מדרגה arepsilon>0 אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל
                                                                                                                                                                               \varepsilon שגיאה
```

.Size (C)=n+m גודל מעגל בוליאני: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ ויהי מעגל בוליאני בעל $n,m\in\mathbb{N}$