אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq 2^\Omega$ המקיימת

- $\Omega \in \mathcal{F} \bullet$
- $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \bullet$
- . $\bigcup E \in \mathcal{F}$ סופית מתקיים $E \subseteq \mathcal{F}$ לכל

 $\mathscr{Q} \in \mathcal{F}$ אלגברה אזי \mathcal{F} אלגברה

 $\cap E \in \mathcal{F}$ אזי אזי $E \subset \mathcal{F}$ ותהא אלגברה תהא אלגברה ותהא המקיימת $\mathcal{F}\subseteq 2^\Omega$ המקיימת קבוצה Ω המקיימת σ

- $\Omega \in \mathcal{F} \bullet$
- $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \quad \bullet$
- . $\bigcup E \in \mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים ב $E \subseteq \mathcal{F}$ לכל

 $\varnothing\in\mathcal{F}$ אזי האר האלגברה אזי σ

 $\bigcap E \in \mathcal{F}$ אזי מנייה מנייה בת ברה ותהא למה: תהא σ

 Ω אזי אלגברה מעל $\mathcal F$ הינה אלגברה מעל מעל "הינה אלגברה מעל "הינה אלגברה מעל "הינה אלגברה מעל

מוגות בזוגות פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A} o\mathbb{R}$ זרות בזוגות פונקציה אדטיבית: פונקציה אדטיבית $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}B_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(B_{i}\right)$ מתקיים

. אדטיבית $\mu:\mathcal{F} o[0,\infty]$ אזי אלגברה אזי תהא \mathcal{F} אדטיבית.

 ארות באוגות פונקציה $\{B_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{A}$ אכל המקיימת לכל המקיימת פונקציה פונקציה פונקציה פונקציה פונקציה המקיימת המקיימת המקיימת ו $.\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_{i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B_{i}\right)$ מתקיים

> יאדטיבית. σ $\mu:\mathcal{F} o [0,\infty]$ אזי σ אלגברה: תהא σ אדטיבית. (Ω,\mathcal{F}) אזי אזי Ω אזי הרא σ אזי הרא מרחב מדיד: תהא

> > $E \in \mathcal{F}$ אזי Ω אזי הברה מעל σ תהא תהא קבוצה מדידה: תהא

 $.\mu\left(arnothing
ight)=0$ אזי $\exists E\in\mathcal{F}.\mu\left(E
ight)>0$ המקיימת \mathcal{F} המקיימת μ מידה על

. אדטיבית μ אזי $\mathcal F$ אזי מעל σ ־אלגברה מעל מידה μ אזי μ

 $.\mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right)$ אזי $A\subseteq B$ עבורן $A,B\in\mathcal{F}$ מידה ותהיינה μ מידה תהא למה: (Ω,\mathcal{F},μ) אזי איזי \mathcal{F} מידה על μ מידה מעל Ω ותהא אזי מילגברה אלגברה אלגברה מעל המקיימת $\mathbb{P}:\mathcal{F} o[0,\infty]$ אזי מידה מעל Ω המקיימת הסתברות: תהא σ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

. מידת הסתברות: מרחב מידה μ עבורו (Ω, \mathcal{F}, μ) מידת מרחב מרחב מרחב

 Ω אזי אזי הסתברות אזי ($\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$) מרחב הסתברות אזי

 $E\in\mathcal{F}$ אזי הסתברות מאורע: יהי ($\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$) מרחב מאורע:

 \mathcal{F} יהי הסתברות מרחב ($\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ יהי יהי מרחב מרחב מרחב

ולכל $A\subseteq (0,1]$ לכל עבורו לכל ((0,1], \mathcal{F},\mathbb{P}) אינווריאנטיות מרחב מרחב מרחב מרחב $\mathbb{P}\left(A
ight)=\mathbb{P}\left(A+b
ight)$ מתקיים $A+b\subseteq\left(0,1
ight]$ באשר $b\in\left(0,1
ight]$

. א מתקיימת אינווריאנטיות להזאות $\left(\left(0,1\right],2^{\left(0,1\right]},\mathbb{P}\right)$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזאות לכל $\exists x \in A.\exists arepsilon>0.$ $(x-arepsilon,x+arepsilon)\subseteq A$ עבורה $A\subseteq \mathbb{R}$

קבוצה סגורה: $A\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה.

 $.\Omega$ מעל σ הינה הינה הינה $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ אזי מעל מעל האלגבראות ־ σ $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ היינה מעלה: מענה את כל תהיינה $\mathbb R$ מעל מעל הס־אלגברה כל כל ה $\{\mathcal F_i\}_{i\in I}$ תהיינה וות מעל הברה בורלית מעל יש $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = igcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ אזי הפתוחות התפוחות התפוחות התפוחות התפוחות התפוחות התפוחות התפוחות התפתוחות התפוחות ה

 $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$:קבוצה בורלית

 \mathbb{R} טענה: σ ־אלגברה בורלית הינה σ ־אלגברה מעל

 $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{F}$ אזי הפתוחות הפתוחות כל הקבוצות המכילה מעל המכילה מעל σ $\{E\cap A\mid E\in\mathcal{F}\}$ אזי $A\subset\Omega$ ותהא G אלגברה מעל σ אלגברה תהא G קבוצה תהא GA הינה σ ־אלגברה מעל

 $\mathfrak{B}_{(0,1]}=\{B\cap(0,1]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}:(0,1]$ מעל ברה בורלית מעל σ

 $A(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i-a_i
ight)\mid B\subseteq igcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i,b_i
ight)
ight\}$ אזי איז $B\in\mathfrak{B}$ מידת לבג: תהא . מרחב אינווריאנטי אינווריאנטי מחב הסתברות ($(0,1]\,,\mathfrak{B}_{(0,1]},\lambda)$

 $A(A,\mathfrak{B}_A,\lambda)$ אזי אזי $A\subseteq\mathbb{R}$ עבור ובור אחיד על

 כל ה σ מלגבראות וותהיינה וותהיינה $\mathcal{T}\subseteq 2^\Omega$ תהא קבוצה תהא כל היאלגברה מוצרת: תהא יאלגברה תהא יאלגברה מוצרת: ח $.\sigma\left(\mathcal{T}
ight)=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_{i}$ אזי את המכילות המכילות מעל Ω

 \mathcal{T} אזי σ (\mathcal{T}) אזי $\mathcal{T}\subseteq 2^\Omega$ אזי תהא הנוצרת: תהא ה σ ־אלגברה אזי σ

lpha+1 נסמן, $\mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\}$ נסמן $\mathcal{T}\subseteq 2^\Omega$, לכל סודר עוקב Ω תהא טענה: תהא נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{n}\mid A_{n}\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\{C,C\}$ אזי $\mathcal{F}_{\alpha}=\cup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha}$ הסודר הגבולי הקטן גבול $\mathcal{F}_{\alpha}=\cup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha}$ ביותר שאינו בן מניה.

עבורן $\omega,\kappa\in\Omega$ ויהיו $\mathcal{T}\subset 2^\Omega$ עבורן עבורן Ω עבורן

 $. \forall A \in \sigma \left(\mathcal{T} \right). \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A$ אזי $\forall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A$

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות מקרי/פונקציה מדידה: יהי $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$

 $A : orall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.arphi^{-1}\left[B
ight] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ המקיימת $arphi: \mathbb{R} o \mathbb{R}$ בונקציה מדידה בורל:

כך $\mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_\mathbb{R} o\mathbb{R}$ מ"מ נגדיר מ"מ נגדיר ויהי מרחב הסתברות מרחב ($\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$) יהי $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}\left(X^{-1}[B]\right)$

מרחב $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_\mathbb{R},\mathbb{P}_X)$ אזי מ"מ מ"מ $X:\Omega o \mathbb{R}$ מרחב הסתברות מרחב ($\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$) מרחב

טענה: תהא $A,B\subseteq\mathbb{R}$ ותהיינה $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ אזי

- $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \bullet$
- $.f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \bullet$ $.f^{-1}[A^{\mathcal{C}}] = f^{-1}[A]^{\mathcal{C}} \bullet$

 $\{E\subset\mathbb{R}\mid X^{-1}\left[E
ight]\in\mathcal{F}\}$ אזי $X:\Omega o\mathbb{R}$ מרחב מדיד ותהא מענה: יהי (Ω,\mathcal{F}) יהי \mathbb{R} הינה σ ־אלגברה מעל

X) אזי אזי : $\Omega \to \mathbb{R}$ אזי ותהא X : $\Omega \to \mathbb{R}$ משפט: יהי משפט $.ig(orall t\in\mathbb{R}.X^{-1}\left[(-\infty,t)
ight]\in\mathcal{F}ig)$ איימי

אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי משתנה מרחב מ"מ על מיחי מהרי: יהי משתנה מקרי מדי משתנה מדי משתנה מקרי $.\sigma\left(X\right)=\sigma\left(\left\{ X^{-1}\left[B\right]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\right\}\right)$

 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי מימ על מרחב הסתברות מ"מ X,Y יהיי

- . יהיcX אזי מ"מ $c\in\mathbb{R}$ מ"מ \bullet
 - .מ"מ X+Y
 - מ"מ. $XY \bullet$

. מ"מ $f\circ X$ אזי ($\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$ מ"מ Zיהי יהי יהי

. פתוחה $f^{-1}\left[\mathcal{U}
ight]$ פתוחה אזי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ ותהא ותהא $f\in C\left(\mathbb{R}
ight)$

 $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$ מסקנה: תהא $f\in C\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי $f\in f$

 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי מים על מרחב הסתברות (פה"מ): איי יהי מצטברת מצטברת מצטברת מיהי $.F_{X}\left(t
ight) =\mathbb{P}\left(X\leq t
ight)$ המקיימת $F:\mathbb{R}
ightarrow \left[0,1
ight]$

אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי מימ על מרחב הסתברות מ"מ מ"מ אזי יהי

- $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$ •
- $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$
 - . מונוטונית עולה F_X
- $.{\lim }_{t\rightarrow a^{+}}F_{X}\left(t\right) =F_{X}\left(a\right) \ \bullet$

 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מיים מקריים שווי התפלגות

ותהא $\Omega\in\mathcal{F}_0$ עבורה סופיים סופיים סגורה סגורה פ $\mathcal{F}_0\subseteq 2^\Omega$ עהא קבוצה תהא למה: תהא $\sigma(\mathcal{F}_0)\subseteq\mathcal{F}$ אזי $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}$ סגורה להפרשים וסגורה לגבולות אינסופיים עבורה סגורה סגורה להפרשים סגורה אינסופיים $.(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)\Longleftrightarrow (F_X=F_Y)$ איי מ"מ איי X,Y יהיו איי יהיי

תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי

 $.supp (X) = \{ t \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0. \mathbb{P} (t - \varepsilon < X < t + \varepsilon) > 0 \}$

עבורה \mathbb{R} ר מ"מ אזי אזי (אונר הקבוצה הסגורה המינימלית ב־ \mathbb{R} $\mathbb{P}(X \in \text{supp}(X)) = 1$

 $\mathbb{P}\left(X=t
ight)>0$ המקיים $t\in\mathbb{R}$ מ"מ אזי X מ"מ מקרי: יהי

 $A_X = \{t \in \mathbb{R} \mid X$ קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי קבוצת האטומים:

 $|A_X| \leq leph_0$ טענה: יהי א מ"מ מ"מ אזי

 $\mathbb{P}\left(X\in A_X
ight)=1$ משתנה מקרי X המקיים משתנה מקרי בדיד:

 $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x
ight)\mathrm{d}x=1$ וכן $f\geq0$ רציפה למקוטעין רציפה למקוטעין המקיימת לוכן לוכן לוכן פונקציית אפיפות: משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי X עבורו קיימת $f:\mathbb{R} o \mathbb{R}$ משתנה מקרי צפיפות עבורה $\mathbb{P}\left(a < X < b\right) = \int_a^b f\left(x\right) dx$ מתקיים a < b

X פונקציית הצפיפות של מ"מ רציף אזי לימון: יהי מ"מ מ"מ רציף אזי לימון: יהי מ

.($\mathbb{P}\left(X\in A_X\right)=0$) \Longleftrightarrow סענה: יהי X מ"מ אזי (X רציף)

 $0 < \mathbb{P}\left(X \in A_X
ight) < 1$ זה ובמקרה או רציף, וביד או מקרה מקרה משתנה מקרה לא כל טענה: יהי X מ"מ רציף אזי

- $\mathbb{P}\left(X=t
 ight)=0$ אזי $t\in\mathbb{R}$ יהי
 - $.F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) \, \mathrm{d}x \quad \bullet$

 $.F_{X}^{\prime}\left(a
ight)=f_{X}\left(a
ight)$ איזי $f_{X}\in C\left(a
ight)$ עבורה $a\in\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathbb{R}$ משנה: יהי Xאזי $p \in (0,1)$ ויהי $F_X = 1$ אשר עולה ממש עד עבורו אזינ מ"מ עבורו F_X יהי יהי יהי יהי $.F_{X}\left(x_{p}
ight) =p$ המקיים $x_{p}\in\mathbb{R}$

אזי $p\in(0,1)$ ויהי עולה עבורו עבורו מ"מ מ"מ Xיהי יהי האחוזון האחוזון הי

 $.x_p = \sup \{t \mid F_X(t) \le p\}$

וכן $\lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 0$ בינה מימין עבורה אונוטונית עולה $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $.F_X=F$ אזי עבורו ($\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$) אזי מרחב מיים ש"מ אי $\lim_{x \to \infty} F\left(x\right)=1$ $\lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 0$ סימון עבורה רציפה מונוטונית עולה א מונוטונית די מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה א

 $.X^{\star}\left(s
ight)=\sup\left\{ t\mid F\left(t
ight)\leq s
ight\}$ איי $\lim_{x
ightarrow\infty}F\left(x
ight)=1$ איי וכן $\lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 0$ בורה מימין עבורה עולה מונוטונית עולה $F: \mathbb{R} o \mathbb{R}$ הא

 $.\left(\left(0,1\right),\mathfrak{B}_{\left(0,1\right)},\lambda\right)$ מ"מ על מ" X^{\star} איז $\lim_{\longrightarrow}F\left(x\right)=1$

 $\lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 0$ מונוטונית עולה רציפה מימין עולה א מונוטונית דונוטונית משפט: תהא $.F_{X^{\star}}=F$ אזי $\lim_{x
ightarrow\infty}F\left(x
ight) =1$ וכן

טענה: יהי $k\in\mathbb{N}$ יהיי אויה אויה אויה מ"מ היה מ"מ מ"מ ויהי אויה אויהי $\mathbb{P}\left(X_n = k\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{P}\left(X = k\right)$

. ממוצע האירועים ליחידת λ

 $\mathbb{P}\left(X>a+b\mid X>a
ight)=X$ אזי איזי a,b>0 ויהיו איזי באך איזי $\lambda>0$ יהי איזי איזי איזי איזי $\mathbb{P}(X > b)$

טענה: יהי $\forall a,b>0.\mathbb{P}(X>a+b\mid X>a)=\mathbb{P}(X>b)$ אזי מ"מ המקיים ענה: יהי איז מ"מ המקיים $X \sim \operatorname{Exp}\left(\lambda\right)$ עבורו $\lambda > 0$ קיים

.Exp (λ) אמן מתפלג ליחידת מופעים עם קצב λ מופעים של תהליך פואסון של תהליך פואסון איז הזמן הבינמופעי של האיד פואסון איז פואסון איז מופעים איז היום מופעים איז מופעים איז מופעים איז פואסון פואסון איז פואסון איז פואסון איז מופעים איז מופעים איז פואסון אייי איז פואסון איז איז פואסון אייי איז פואסון אייי אי טענה: יהי ממש וגזירה אזי $\varphi:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא ממש וגזירה אזי יהי לענה: יהי מ"מ רציף ותהא

 $f_{\varphi \circ X}(t) = \frac{f_X(\varphi^{-1}(t))}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$

```
טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא \varphi:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} על, יורדת ממש וגזירה אזי
                                                                    f_{\varphi \circ X}(t) = -\frac{f_X(\varphi^{-1}(t))}{f_X(\varphi^{-1}(t))}
               X^{-}=\min\left\{ X,0
ight\} ,X^{+}=\max\left\{ X,0
ight\} מ"מ אזי מ"מ אזי הגדרה: יהי א
                   \mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{c \in A_X} c \cdot \mathbb{P}\left(X = c
ight) אזי בדיד אזי מ"מ בדיד אזי תוחלת: יהי
                           \mathbb{E}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[X^{+}
ight]+\mathbb{E}\left[X^{-}
ight] טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי
                                 משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו \mathbb{E}\left[X
ight] סופי.
                                          עבורו X משתנה מקרי יהי a\in\mathbb{R} יהי יהי עבורו
                                             \forall b \in \mathbb{R}.\mathbb{P}(X \ge a + k) = \mathbb{P}(X \le a - k)
\mathbb{E}\left[X
ight]=a אזי א מ"מ בדיד אינטגרבילי סימטרי מביב a\in\mathbb{R} ויהי אינט מ"מ מ"מ בדיד אינטגרבילי מימטרי
            טענה לינאריות התוחלת: יהיו a,b\in\mathbb{R} יהי אינטגרבילי אזי אינטגרבילי אזי
                                                                         \mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\mathbb{E}\left[X\right] + b
```

X < X אם Y אם שולט על X משתנה מקרי שולט: יהיו אוי X,Y יהיו $\mathbb{E}\left[X
ight] \geq \mathbb{E}\left[Y
ight]$ אזי בדידים אזי אינ מינוטוניות התוחלת: יהיו אינ אינ מינוטוניות התוחלת: אינ אינ מינוטוניות התוחלת: יהיו תוחלת: יהי X מ"מ אזי

- $\mathbb{E}\left[X^{+}\right] = \sup\left\{\mathbb{E}\left[Y\right] \mid \left(0 \le Y \le X^{+}\right) \land \left(\mathbb{E}\left[Y\right]\right\}\right\}$
- $\mathbb{E}\left[X^{-}\right]=-\sup\left\{ \mathbb{E}\left[Y\right]\mid\left(0\leq Y\leq -X^{-}\right)\wedge\left($ מ"מ בדיד $Y\right)\right\}$
 - $\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^{+}\right] + \mathbb{E}\left[X^{-}\right] \bullet$

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו $\mathbb{E}\left[X
ight]$ סופי.

טענה אינטגרבילי מ"מ מ"מ $a,b\in\mathbb{R}$ יהיו יהיו מענה לינאריות מי"מ אינטגרבילי יהיו $.\mathbb{E}\left[aX + b\right] = a\mathbb{E}\left[X\right] + b$

 $\mathbb{E}\left[X
ight] \geq \mathbb{E}\left[Y
ight]$ מ"מ אזי $X \geq Y$ יהיו התוחלת: טענה מונוטוניות התוחלת: טענה נוסחת הזנב: יהי X מ"מ אזי

. $\mathbb{E}\left[X\right] = \int_{0}^{\infty} \left(1 - F_X\left(t\right)\right) \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} \left(0 - F_X\left(t\right)\right) \mathrm{d}t$ $\mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{-\infty}^{\infty}tf_{X}\left(t
ight)\mathrm{d}t$ מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי

משתנה מקרי שולט סטוכסטית: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט סטוכסטית על X אם $F_Y \geq F_X$

X טענה: יהיו X,Y שולט סטוכסטית על $\mathbb{P}\left(Y\leq X\right)=1$ מ"מ עבורם מי"מ אזי יהיו טענה: יהיו X,Y מ"מ

- $\mathbb{E}\left[Y\right] \leq \mathbb{E}\left[X\right]$ אזי Y אט סטוכסטית שולט אולט אולט X
 - $\mathbb{E}\left[Y
 ight] \leq \mathbb{E}\left[X
 ight]$ אזי $\mathbb{P}\left(Y \leq X
 ight) = 1$ אם •
 - $\mathbb{E}\left[X+Y
 ight]=\mathbb{E}\left[X
 ight]+\mathbb{E}\left[Y
 ight]$ חיבוריות: ullet

 $\mathbb{P}\left(X\geq b
ight)\leq rac{\mathbb{E}[X]}{b}$ אזי b>0 אזי מ"מ אינטגרבילי מ"מ אינטגרבילי יהי מרקוב: יהי מיהי איז מ"מ אינטגרבילי ויהי

. $\mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\sum_{c\in A_{X}}\varphi\left(c\right)\cdot\mathbb{P}\left(X=c\right)$

טענה: יהי א מ"מ רציף ותהא $\widetilde{\varphi}$ רציפה מ"מ מ"מ אזי טענה: יהי מ"מ רציף אזי . $\mathbb{E}\left[\varphi\circ X\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(t\right)f_{X}\left(t\right)\mathrm{d}t$

 $\mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{0}^{1}X^{\star}\left(t
ight)\mathrm{d}t$ איי חסום איי מ"מ מיימ מיימ איי מענה: יהי

 $\mathbb{E}\left[X
ight]=\lim_{arepsilon o 0}\int_0^{1-arepsilon}X^\star(t)\,\mathrm{d}t$ ענה: יהי X מ"מ חסום מלרע אזי אל מ"מ מ"מ חסום מלעיל אזי אל $\mathbb{E}\left[X
ight]=\lim_{arepsilon o 0}\int_{0+arepsilon}^1X^\star(t)\,\mathrm{d}t$ עטענה: יהי X מ"מ חסום מלעיל אזי ל

.Var $(X)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left[X
ight])^2
ight]$ אינטגרבילי איX יהי אינטגרבילי אי $\sigma\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{Var}\left(X\right)}$ סטיית תקן: יהי אינטגרבילי אינטגרבילי מ"מ מי"מ אינטגרבילי יהי

. Var $(X)=\mathbb{E}\left[X^2\right]-\mathbb{E}^2\left[X\right]$ אזי אינטגרבילי איזי מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ אינטגרבילי איזי

. $\operatorname{Var}\left(aX+b
ight)=a^{2}\operatorname{Var}\left(X
ight)$ אזי $a,b\in\mathbb{R}$ ויהיו מ"מ אינטגרבילי ויהיו מ"ג $a,b\in\mathbb{R}$

טענה אי־שיוויון צ'בישב: יהי X מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי a > 0 אזי $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \ge a) \le \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$

 $M_{X}\left(t
ight)=\mathbb{E}\left[e^{tX}
ight]$ המוגדרת $M_{X}:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R}$ מינקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0 \in I$ וכן $M_X \in C^n$ מ"מ יהי X טענה: $.M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}\left[X^n\right]$

 $\mathbb{E}\left[|X|^n
ight]$ אזי אזי וסופי על I אזי אזי אזי ויהי א מענה: יהי א מ"מ ויהי ויהי I קטע עבורו וכן $0\in I$ וכן $n\in\mathbb{N}$ מתכנס לכל

> אזי (-arepsilon,arepsilon) אזי אוויהי $M_{X}\left(t
> ight)$ עבורו arepsilon>0 קיים וסופי על מ"מ מ"מ ויהי $M_X(t) = \sum_{n=0}^{n} \frac{t^n \mathbb{E}[X^n]}{n!}$

את המכילות מעל \mathbb{R}^n מעל מעל הס־אלגברה כל ה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ תהיינה וורלית מעל הברה בורלית מעל המכילות היינה יונה $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} = igcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ כל הקבוצות הפתוחות אזי

משתנה מקרי $X:\Omega o \mathbb{R}^n$ אזי הסתברות מרחב ($\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$) יהי יהי מקרי מקרי מקרי $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} . X^{-1} [B] \in \mathcal{F}$

X) אזי אזי : $\Omega \to \mathbb{R}^n$ אזי ותהא הסתברות משפט: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי משפט $.\left(orall t \in \mathbb{R}^n. orall i \in [n]. X_i^{-1} \left[(-\infty,t)
ight] \in \mathcal{F}
ight) \Longleftrightarrow$ מ"מ

 $\mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} o\mathbb{R}^n$ מרחב הסתברות ויהי $X:\Omega o\mathbb{R}^n$ מיימון: יהי מרחב הסתברות מחב הסתברות ויהי $\mathbb{P}_{X}\left(B
ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B
ight]
ight)$ כך

 $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n},\mathbb{P}_X)$ אזי מ"מ אזי $X:\Omega o\mathbb{R}^n$ ויהי הסתברות מענה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי

אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ אזי מ"מ n מ"מ משותפת: אזי משותפת מצטברת משותפת: אזי $F_X(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n)$ המקיימת $F: \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ טענה: יהי (X,Y) מ"מ דו־ערכי אזי

 $\lim_{k\to -\infty} F_{X,Y}\left(k,\ell
ight)=0$ יהי $\ell\in\mathbb{R}$ יהי

 $\lim_{\ell \to -\infty} F_{X,Y}\left(k,\ell
ight) = 0$ יהי $k \in \mathbb{R}$ יהי

 $\lim_{\ell \to \infty} \lim_{k \to \infty} F_{X,Y}(k,\ell) = 1 \bullet$

אזי $p,q\in\mathbb{R}$ אזי רציפות מימין: יהיו

 $.\mathrm{lim}_{k\rightarrow p^{+}}\;\mathrm{lim}_{\ell\rightarrow q^{+}}\;F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=F_{X,Y}\left(p,q\right)$ טענה: יהי $\ell_1 < \ell_2$ וכן ואזי אזי דו־ערכי ויהיו מ"מ (X,Y) אזי טענה: יהי $.F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{2}\right)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{1}\right)\geq F_{X,Y}\left(k_{2},\ell_{1}\right)+F_{X,Y}\left(k_{1},\ell_{2}\right)$

 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ מ"מ מקריים שווי התפלגות: $(\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)\Longleftrightarrow (F_X=F_Y)$ אזי X,Y טענה: יהיו מ"מ n מ"מ מימדיים אזי X,Y

> . טענה: יהי א מ"מ חד־מימדי אזי אזי מ"מ חד־מימדי. מענה: יהי א מ"מ מ X_i אזי אזי משתנה מקרי שולי: יהי א מ"מ T משתנה מקרי שולי: יהי

מיים דו־מימדי אזי מונקציית התפלגות מצטברת שולית: יהי מצטברת מצטברת פונקציית התפלגות מצטברת אולית:

 $.F_{X}\left(t\right) =\lim_{y\rightarrow\infty}F_{X,Y}\left(t,y\right)$ •

 $.F_{Y}\left(t\right) =\lim_{x\rightarrow\infty}F_{X,Y}\left(x,t\right)$ •

 $\mathbb{P}\left(X=a
ight)>0$ עבורו $a\in\mathbb{R}^n$ אטום: יהי X מ"מ n־מימדי אזי $a\in\mathbb{R}^n$ $A_X = \{t \in \mathbb{R}^n \mid X$ קבוצת האטומים: יהי X מ"מ n־מימדי אזי קבוצת האטומים: יהי א

 $|A_X| \leq \aleph_0$ טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי יהי

 $\mathbb{P}\left(X\in A_X
ight)=1$ משתנה מקרי בדיד: X מ"מ משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי בדיד

. $orall a \in A_X. \mathbb{P}_X \left(a
ight) = \mathbb{P} \left(X = a
ight)$ טענה: יהי יהי מ"מ n מימדי בדיד אזי מ $(i\in[n]$ טענה: יהי X מ"מ בדיד לכל מ"מ בדיד אזי (X מ"מ בדיד לכל מ"מ מ"מ מימדי אזי (X מ"מ בדיד לכל

וכן $f \geq 0$ וכן המקיימת צפיפות משותפת: $f:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ וכן

 $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$ משתנה מקרי רציף: X מ"מ n־מימדי עבורו קיימת $f:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה משתנה מקרי רציף:

לכל $a_i < b_i$ מתקיים $a,b \in \mathbb{R}^n$ לכל

 $.\mathbb{P}(a_1 \!<\! X_1 \!<\! b_1, \ldots, a_n \!<\! X_n \!<\! b_n) \!=\! \int_{a_n}^{b_n} \ldots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d} x_1 \ldots \mathrm{d} x_n$ $\mathbb{P}(X \in A_X) = 0$ טענה: יהי X מ"מ n־מימדי אזי (X רציף)

 $\mathbb{P}\left(X=a
ight)=0$ אזי $a\in\mathbb{R}^n$ טענה: היX מ"מ n־מימדי ויהי

 $F_X(a)=\int_{-\infty}^{a_n}\dots\int_{-\infty}^{a_1}f_X(x_1\dots x_n)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$ איי מ"מ T מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ איי מיים מענה: יהי

טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא [n] o [n] מורה אזי p:[n] o [n] מיים המימדי רציף ותהא $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a_p(n)} \dots \int_{-\infty}^{a_p(n)} f_X(x_1\dots x_n)\,\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n$ טענה: יהי X מ"מ n־מימדי רציף ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ עבורה רציף אזי מ"מ X יהי טענה: יהי אזי

 $\frac{\partial^{2} F_{X}}{\partial x \partial y} (a) = \frac{\partial^{2} F_{X}}{\partial y \partial x} (a) = f_{X} (a)$

 $i \in [n]$ טענה: יהי X מ"מ ח"מימדי רציף אזי אזי מ"מ מ"מ מ"מ מ"מ אזי יהי א טענה: יהי א

פונקציית צפיפות שולית: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי

 $.f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,y) \, \mathrm{d}y \quad \bullet$ $.f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t) \, \mathrm{d}x \quad \bullet$

 $\mathbb{P}\left(X\in B
ight)=\int_{B}f_{X}$ אזי $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^{n}}$ ותהא רציף ותהא Bמענה: יהי X מ"מ מ"מ מ"מדי חביף ותהא $A : orall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.arphi^{-1}\left[B
ight] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ המקיימת $arphi: \mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ בורל:

 $.f_{X+Y}\left(s
ight)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}\left(x,s-x
ight)\mathrm{d}x$ מסקנה: יהי (X,Y) מיים דו־מימדי אזי

טענה: יהי מ"מ ה"מימדי ותהא $\varphi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ותהא ותהא מ"מ מ"מ מ"מ מימדי יהי אזיי מענה: יהי מימדי ותהא

 $\mathbb{E}\left[arphi\left(X
ight)
ight]=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}arphi\left(x_{1}\ldots x_{n}
ight)f_{X}\left(x_{1}\ldots x_{n}
ight)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}$ שונות משותפת: יהיו X,Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות אזי

.Cov $[X, Y] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)\left(Y - \mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right]$

. Cov [X,Y]=0 משתנים בלתי מרחב אותו על מ"מ על מ"מ אותו מרחב מחואמים: X,Y $.
ho_{X,Y}=rac{ ext{Cov}[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ מקדם מתאם: יהיו X,Y מידי מתאם: יהיו

משפט אי־שיוויון קושי־שוורץ: יהיו $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי משפט אי־שיוויון איי

 $\mathbb{E}\left[XY\right]^{2} \leq \mathbb{E}\left[X^{2}\right] \mathbb{E}\left[Y^{2}\right]$ משקנה: יהיו X,Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי

 $(\mathbb{E}[XY]^2 = \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]) \iff (\exists c \in \mathbb{R}.\mathbb{P}(Y = cX) = 1)$

 $.
ho_{X,Y}\in [-1,1]$ מסקנה: יהיו X,Y מים מסקנה: מסקנה: יהיו X,Y מ"מ אזי

 $(\rho_{X,Y} = 1) \iff (\exists a > 0. \exists b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet$ $(\rho_{X,Y} = -1) \iff (\exists a < 0.\exists b \in \mathbb{R}.\mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet$

.Cov $[X,Y]=\mathbb{E}\left[XY
ight]-\mathbb{E}\left[X
ight]\mathbb{E}\left[Y
ight]$ מ"מ אזי X,Y יהיו אינה: יהיו $oldsymbol{u}$ טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי

- .Cov [X, X] = Var[X] •
- $. \text{Cov}\left[X,Y\right] = \text{Cov}\left[Y,X\right] \ \bullet$
- $. \text{Cov}\left[aX+b,Y\right] = a \text{Cov}\left[X,Y\right] \ \bullet$
- .Cov $\left[\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^m Y_i\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m \mathrm{Cov}\left[X_i, Y_i\right]$ \bullet

 $\{B_i\}_{i=1}^n$ משתנים מקריים בלתי מה"מ חד־מימדיים מ"מ מ"מ אורעות משתנים מקריים בלתי מקריים מקריים מקריים משתנים משתנים מים מיים מיים משתנים משתני $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}B_{i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(B_{i}\right)$ מתקיים $\forall k\in\left[n\right].B_{k}\in\sigma\left(X_{k}\right)$ המקיימים טענה: יהיו מדידות מדידות ווהיינה והיינה מהיינה ב"ת ותהיינה מ"מ ב"ת מ"מ ב"ת מ"מ ב"ת ותהיינה $\{x_i\}_{i=1}^n$. מ"מ ב"ת $\{g_i\left(X_i\right)\}_{i=1}^n$

 \Longleftrightarrow ענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ אזי מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^n$ ב"ת)

 $(F_{X_1...X_n}(x_1...x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i))$

 \Longleftrightarrow טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ רציפים אזי מ $\{X_i\}_{i=1}^n$ טענה: יהיו

 $(f_{X_1...X_n}(x_1...x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i))$

המקיימות $\{X_i\}_{i=1}^n$ אזי אזי $f_{X_1\dots X_n}\left(x_1\dots x_n
ight)=\prod_{i=1}^ng_i\left(x_i
ight)$ מ"מ ב"ת. $\mathbb{E}\left[XY
ight]=\mathbb{E}\left[X
ight]\mathbb{E}\left[Y
ight]$ אינטגרביליים אזי X,Y מ"מ ב"ת אינטגרביליים אזי אינטגרביליים אזי

. Cov [X,Y]=0 מ"מ ב"ת אזי X,Y יהיו

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי $. \operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_{i}\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}\left[X_{i}\right]$

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי מסקנה

 $.M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$

סטטיסטיי הסדר: יהיו $X_{(k)}$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי איי $X_{(k)}$ הערך ה־x בגודלו מ"ט $\{X_i\}_{i=1}^n$ באוסף

טענה: יהיו אזי $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי

 $.F_{X_{(k)}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i} \cdot F_{F_{X_1}}(t)^i \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-i} \right) \bullet$

 $f_{X_{(k)}}(t) = n \cdot f_{X_1}(t) \cdot F_{X_1}(t)^{k-1} \cdot \left(1 - F_{X_1}(t)\right)^{n-k} \bullet$

 $\overline{X_n} = rac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ איי אווי התפלגות מדגמי: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ ממוצע מדגמי: יהיו $\mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight]=\mathbb{E}\left[X_1
ight]$ איי התפלגות אזי $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ טענה: יהיו .Var $\left \lceil \overline{X_n}
ight
ceil$ איז איז $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ טענה: יהיו איז מ"מ ב"ת שווי התפלגות איז איז איז איז איז איז מיים מענה: Xהתכנסות משתנים מקריים: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ אזי התכנסות משתנים מקריים: יהיו

אם מתקיים אס אתכנסות בהתפלגות: נסמן עס בהתפלגות: \bullet $\forall t \in \mathbb{R}. (F_X \in C(\{t\})) \Longrightarrow \left(F_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} F_X(t)\right)$

אם מתקיים $X_n \xrightarrow{p} X$ אם מתקיים • $\forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

 $n o \infty$ התכנסות כמעט תמיד: נסמן $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אם מתקיים lacktriangle $\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega\mid X_{n}\left(\omega\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}X\left(\omega\right)\right\}\right)=1$ טענה: יהיו $\left\{X_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי

 $(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \Longrightarrow (X_n \xrightarrow{p} X) \Longrightarrow (X_n \xrightarrow{D} X)$

 $\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight]\stackrel{p}{ o}0$ עבורם $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ מ"מ הגדולים: מ"מ $\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight]\stackrel{p}{ o}0$ אזי אזי מומנט שני אווי התפלגות בי"ת שווי התפלגות מ"מ ב"ת אזי $\{X_i\}_{i=1}^\infty$

טענה: ייהיו $\frac{\sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k]}{2} o 0$ סענה: ייהיו איי מ"מ ב"ל מ"מ ב"ל מומנט שני עבורם איים ל $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ אזיי $.\overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] \xrightarrow{p} 0$

למה הלמה של קרונקר: תהיינה a_n,b_n סדרות עבורן $a_n\geq 0$ וכן $b_n\uparrow\infty$ וכן למה הלמה של קרונקר: תהיינה $\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{b_n}\to 0$ אזי $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{b_n}<\infty$

אזי $\sum_{n=1}^\infty \frac{\mathrm{Var}[X_n]}{n^2} < \infty$ שני עבורם שני בעלי מומנט מ"מ ב"ת מ"מ ה"מ אימ איים $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ אזי $.\overline{X_n} - \mathbb{E}\left[\overline{X_n}\right] \xrightarrow{p} 0$

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A:\mathbb{N} o \mathcal{A}$ אזי

 $\forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1}$ שונוטונית עולה חלש: •

 $\forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n$ מונוטונית יורדת חלש: •

 $\mathrm{sup}\,(A)=igcup_{i=0}^\infty A_i$ אזי $A:\mathbb{N} o\mathcal{A}$ קבוצה ותהא קבוצה מופרמום: תהא $\inf{(A)}=igcap_{i=0}^\infty{A_i}$ איזי $A:\mathbb{N} o\mathcal{A}$ קבוצה ותהא קבוצה תהא $A:\mathbb{N} o\mathcal{A}$

אזי $A:\mathbb{N} o\mathcal{A}$ אזי קבוצה ותהא אוני תהא $A:\mathbb{N} o\mathcal{A}$

.lim $\sup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$

אזי $A:\mathbb{N} o\mathcal{A}$ אזי אזי $A:\mathbb{N} o\mathcal{A}$ אזי

.lim inf $_{n\to\infty}$ $A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$

עבורה $A:\mathbb{N} o\mathcal{A}$ עבורה עבול: תהא א קבוצה ותהא

 $\lim_{n \to \infty} A_n = \liminf_{n \to \infty} A_n$ איי וו
m $\inf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n$ $\lim_{n o\infty}A_n=B$ עבורה $A:\mathbb{N} o\mathcal{F}$ ותהא ותהא לגברה מעל מידה מעל מידה מעל ענה: $\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_n\right)=\mu\left(B\right)$ אזי

. $\limsup A_n = \{A_n$ פעמים אינסוף אינסוף $A: \mathbb{N} o \mathcal{A}$ ותהא קבוצה תהא אינסוף מענה: . $\liminf A_n = \{A_n \text{ מסענ$ **ה** $}: תהא <math>A: \mathbb{N} o \mathcal{A}$ אזי החל ממקום מסויים Aטענה: יהיו X מ"מ ויהי מ"מ אזי $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ טענה: יהיו

 $(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \iff (\forall \varepsilon > 0. \mathbb{P} (\limsup \{|X_n - X| \ge \varepsilon\}) = 0)$

מאורעות בלתי תלויים: מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ המקיימים כי לכל לכל חופית מתקיים מאורעות בלתי מאורעות האורעות בלתי חופית מתקיים $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_{i}\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(A_{i}\right)$

טענה הלמה של בורל־קנטלי: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות אזי $(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \longleftarrow (\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty) = (\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty)$

 \longleftarrow ($\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(A_{n}\right)=\infty$) \land (תאורעות ב"ת) $\{A_{n}\}_{n=1}^{\infty}$)) \bullet $.(\mathbb{P}(\limsup A_n)=1)$

מתקיים $arepsilon \ > \ 0$ לכל עבורם מ"מ אים ויהי ויהי א"מ $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מתקיים $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אז $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$

 $.\overline{X_n}-\mathbb{E}\left[\overline{X_n}
ight] \xrightarrow{a.s.} 0$ עבורם $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ החזק של המספרים הגדולים: מ"מ טענה: יהיו במידה אחידה עבורם מומנט רביעי מומנט מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ יהיו $.\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ אזי $orall i \in \mathbb{N}.\mathbb{E}\left[X_i
ight] = 0$

 $\sum_{n=1}^\infty rac{ ext{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$ וכן $orall i\in \mathbb{N}.\mathbb{E}\left[X_i
ight]=0$ משקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ יהיו $\overline{X_n} \xrightarrow{a.s.} 0$ אא

 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma\left(\bigcup_{i=n}^{\infty}\sigma\left(X_{i}\right)\right)$ מ"מ אזי $\{X_{i}\}_{i=1}^{\infty}$ יהיו הזגב: יהיו יהיו $A\in\mathcal{F}$ אוי אונב אוי האנב מאורע אנב: יהיו מ"מ ותהא א מ"מ ותהא אוי היו מאורע מאורע יהיו

 $\mathbb{P}\left(A
ight)\in\{0,1\}$ של קולמוגורוב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת ויהי A מאורע זנב אזי יהיו מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות ב"ת אזי

 $(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \iff \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty\right) \bullet$ $(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1) \iff \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty\right) \bullet$

 $Z\sim\mathcal{N}\left(0,1
ight)$ עבורו Z מ"מ שטנדרטית: סטנדרטית: מרפלגות נורמלית

 $M_{Z}\left(t
ight)=e^{rac{t^{2}}{2}}$ אזי $Z\sim\mathcal{N}\left(0,1
ight)$ טענה: יהי

 $\sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2
ight)$ אזיי $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ויהי $\sigma \in \mathbb{R}_+$ יהי $\sigma \in \mathbb{R}_+$ אזיי $\sigma \in \mathbb{R}_+$ יהי

 $M_{Z}\left(t
ight)=e^{rac{\sigma^{2}t^{2}}{2}+\mu t}$ אזי $Z\sim\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^{2}
ight)$ מסקנה: יהי

טענה: יהיו $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu_i, \sigma_i^2
ight)$ שנה: מ"מ ב"ת עבורם $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ אזי $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

 \sim $\mathcal{N}\left(\mu_i,\sigma_i^2
ight)$ מסקנה: $\left\{X_i
ight\}_{i=1}^\infty$ מיים יהיו יהיי $\left\{X_i
ight\}_{i=1}^\infty$ מסקנה: $\frac{1}{N^i} = \frac{1}{2} \frac{1}{i-1} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} + \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} + \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^i} \frac{1}$

 $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mathbb{E}[X_1]}_{D} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$

תוחלת מותנית: יהי $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}$ מרחב הסתברות יהי מ"מ ותהא מ"מ ($\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$) יהי תוחלת מותנית: יהי מתקיים $A \in \mathcal{F}_0$ אזי עבורו לכל שמ"מ על מ"מ וו $\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_0
ight]$ אזי

 $\mathbb{E}\left[\chi_A \cdot X\right] = \mathbb{E}\left[\chi_A \cdot \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{F}_0\right]\right]$

 $\mathbb{E}\left[X\mid Y
ight] \ = \$ מ"מ אזי X,Y ויהיו הסתברות מרחב $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ יהי

משתנה מקרי מותנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי בדיד אזי אזי א מ"מ עבורו משתנה מקרי מותנה: יהי $\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$

מסקנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי בדיד אזי מסקנה:

 $\mathbb{E}[X \mid Y = y] = \sum x \cdot \mathbb{P}(X = x \mid Y = y)$ משתנה מקרי מותנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי רציף אזי X|Y מ"מ עבורו

 $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_{Y}(y)}$ $\mathbb{E}\left[X|Y=y
ight]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y=y}\left(x
ight)\mathrm{d}x$ אזי רציף אזי רציף משקנה: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי רציף אזי טענה: יהי $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2\subseteq\mathcal{F}$ מרחב הסתברות יהי X מ"מ הסתברות מרחב ($\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$) אלגברות יהי

 $\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_1
ight]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{F}_2
ight]|\mathcal{F}_1
ight]$ איז מסקנה נוסחאת ההחלקה: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ יהי יהי מסקנה נוסחאת מסקנה יהי יהי יהי יהי מסקנה מסקנה יהי יהי יהי יהי $\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|Y\right]\right]$

מסקנה: יהי X מ"מ רציף ויהי $A \in \mathcal{F}$ מאורע אזי $\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid X = x) f_X(x) dx$

אזי $p \in [0,1]$ אזי ברנולי: יהי

- וסיכוי סיכוי p המקרי: בעל המיסוי בניסוי הצלחה אינדיקטור אינדיקטור אינדיקטור אינדיקטור אינדיקטור אינדיקטור $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$
 - $\mathbb{P}\left(X=0
 ight)=1-p$, $\mathbb{P}\left(X=1
 ight)=p$ פונקציית הסתברות: lacktriangle
 - $.X\sim \mathrm{Ber}\left(p
 ight)$ סימון: lacktriangle
 - $\mathbb{E}\left[X
 ight] =p$:תוחלת ullet
 - .Var (X) = p(1-p) שונות:

אזי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $p\in[0,1]$ אזי יהי התפלגות בינומית:

- המשתנה המקרי: X מספר הניסויים שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p לניסוי.
 - אזי אזי הסתברות: יהי הסתברות: \bullet

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- $X\sim \mathrm{Bin}\left(n,p
 ight)$ סימון: lacktriangle
 - $\mathbb{E}\left[X\right]=np$:תוחלת
- .Var (X) = np(1-p) שונות:

אזי $r \in \mathbb{N}$ ויהי $p \in [0,1]$ אזי יהי שלילית: התפלגות בינומית

- המשתנה המקרי: X מספר הניסויי ברנולי שנדרשו עד שלראשונה התחרשה ההצלחה
 - אזי $k \in \mathbb{N} ackslash \{0 \dots r-1\}$ יהי הסתברות: הסתברות: $\mathbb{P}(X = k) = {\binom{k-1}{r-1}} p^r (1-p)^{k-r}$
 - $X\sim \mathrm{NB}\left(n,p
 ight)$ סימון: \bullet

$X \sim \mathsf{NB}\left(n,p\right)$ (תוחלת: $\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{r}{p}$ תוחלת: $\mathsf{Var}\left(X\right) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ שונות: \bullet התפלגות גאומטרית: יהי $p \in [0,1]$ אזי

- עד שנדרשו עד בסיכוי הצלחה על מספר מספר ניסויי ברנולי בלתי מספר מספר מספר מספר ליסויי ברנולי בלתי מספר שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל.
 - $\mathbb{.P}\left(X=k\right)=(1-p)^{k-1}\,p$ אזי אזי א הסתברות: יהי הסתברות:
 - $.X\sim \mathrm{Geo}\left(p
 ight)$ סימון: lacktriangle

 - $\mathbb{E}\left[X
 ight] = rac{1}{p}$:תוחלת: \bullet .Var $(X) = rac{1-p}{p^2}$:שונות: \bullet

אזי $D,n\in\{0\ldots N\}$ ויהיו $N\in\mathbb{N}$ יהי יהי אזיפרגאומטרית: התפלגות הייפרגאומטרית:

- עניסויים כאשר יש N ניסויים מתוך מספר המשרנה מספר מספר א מספר המשרנה המקרי: Xפריטים מיוחדים ו־n פריטים רגילים.
- איי א איי $k\in\{\max\{0,n+D-N\}\ldots\min(n,D)\}$ יהי הסתברות: איי פונקציית הסתברות: איי איי $\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $.X\sim\operatorname{HG}\left(N,D,n\right)$

 - $\mathbb{E}\left[X
 ight]=rac{nD}{N}$: תוחלת: $\mathbf{\Phi}$.Var $(X)=rac{nD}{N}\left(1-rac{D}{N}
 ight)\left(rac{N-n}{N-1}
 ight)$ שונות: ullet

ויהי $K \in \{0,\dots,N\}$ יהי $N \in \mathbb{N}$ ויהי ויהי אומטרית שלילית: אא $r \in \{0,\ldots,N-K\}$

- אוי אוי אוי אוי אוי אוי אוי אוי פונקציית הסתברות: יהי פונקציית הסתברות: יהי $k\in\{0,\ldots,K\}$ אוי $\mathbb{P}\left(X=k\right)=\frac{\binom{k+r-1}{k}\binom{N-r-k}{K-k}}{\binom{N}{K}}$ $X\sim \mathrm{NHG}\left(N,K,r\right)$

- $\mathbb{E}\left[X
 ight] = rac{rK}{N-K+1}$. תוחלת: $\mathbf{\Phi}$. Var $(X) = \left(rac{r(N+1)K}{(N-K+1)(N-K+2)}
 ight)\left(1-rac{r}{N-K+1}
 ight)$. אזי אונות: יהי 0 < k > 0 אזי התפלגות פואסונית: יהי k > 0
- בפרק אירועים בעל זמן נתון בפרק מספר האירועים האירועים מספר X מספר המשתנה המשתנה שקרו λ זמן זה
 - $\mathbb{P}\left(X=k
 ight)=e^{-\lambda}rac{\lambda^{k}}{k!}$ אזי איזי הסתברות: יהי פונקציית הסתברות: יהי
 - $.X\sim\operatorname{Poi}\left(\lambda
 ight)$ סימון: ullet
 - $\mathbb{E}\left[X
 ight] =\lambda$:תוחלת:
 - .Var $(X) = \lambda$:שונות

אזי $a < b \in \mathbb{Z}$ יהיו בדידה אחידה אחידה התפלגות

- $\{a \dots b\}$ המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקבוצה lacktriangle
- $\mathbb{P}\left(X=k
 ight)=\left\{egin{array}{ll} rac{1}{b-a+1} & k\in[a,b]\cap\mathbb{Z} \end{array}
 ight.$ אזי אי $k\in\mathbb{R}$ איזי הסתברות: יהי
 - $X \sim \mathrm{Uni}\left(\{a \dots b\}\right)$ סימון: ullet

אזיa < b התפלגות אחידה רציפה: יהיו

- (a,b) בחירה אקראית של נקודה בקטע אברינ: X בחירה בחירה בקטע ולב המשתנה המקרי: X
- (a,b) אייה של נקודה בקטע (a,b) פונקציית התפלגות מצטברת: $t \le a$ $t \le a$ $t \le a$ פונקציית התפלגות מצטברת: $t \ge b$ $f_X(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a,b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
 - - $\mathbb{E}\left[X
 ight]=rac{a+b}{2}$:תוחלת: ullet .Var $(X)=rac{(b-a)^2}{12}$:שונות: ullet

התפלגות מעריכית: יהי $\lambda>0$ אזי

- . משך אמן זמן יחידות אנמשך הנמשך של משך משך משך משך המקרי: $\boldsymbol{\lambda}$ משך חיים של משך משרנה המקרי: $\boldsymbol{\lambda}$
 - - - $\mathbb{E}\left[X
 ight]=rac{1}{\lambda}$:תוחלת:
 - .Var $(X)=rac{1}{\lambda^2}$ שונות: lacktriangle

התפלגות גאמא: יהיו $n,\lambda>0$ אזי

- $F_X\left(t
 ight) = \left\{egin{array}{ll} rac{1}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{array}
 ight.$ פונקציית התפלגות מצטברת: $f_X\left(t
 ight) = \left\{egin{array}{ll} rac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{array}
 ight.$ $f_X\left(t
 ight) = \left\{egin{array}{ll} rac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{array}
 ight.$ $f_X\left(t
 ight) = \left\{egin{array}{ll} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t} & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{array}
 ight.$
 - - - $\mathbb{E}\left[X
 ight] = rac{n}{\lambda}$:תוחלת:

- $. Var(X) = \frac{1}{n^2} : Nar(X) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac$
 - - $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2
 ight)$:סימון
 - $\mathbb{E}\left[X
 ight] =\mu$:תוחלת ullet
 - .Var $(X) = \sigma^2$:שונות