פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי $A\times A\to A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית על A אזי $a*b=*\left(a,b\right)$.

חבורה: תהא G קבוצה אזי $*:G\times G\to G$ עבורה קיים $e\in G$ עבורו

- אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in G$ מתקיים $a*\left(b*c\right)=\left(a*b\right)*c$.
- איבר יחידה: לכל $a\in G$ מתקיים $a*e=e*a=a$.
- איבר הופכי: לכל $a\in G$ קיים $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $S\left(X\right)=\left\{ f:X\to X\mid f\text{ הפיכה}\right\}$.

חבורת התמורות: תהא X קבוצה אזי $\left(S\left(X\right),\circ\right)$.

טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_{n}=S\left(\left[n\right]\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|S_{n}\right|=n!$.

חבורת המטריצות: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.

החבורות החיבוריות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},+\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ אזי $A^{*}=A^{\times}=A\backslash\left\{ 0\right\}$.

החבורות הכפליות: יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Q}^{*},\mathbb{R}^{*},\mathbb{C}^{*}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},\cdot\right)$.

החבורה הטריוואלית: יהי x אזי $\left(\left\{ x\right\},\mathrm{Id}\right)$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sim_{n}\subseteq\mathbb{Z}^{2}$ המוגדרת $\left(x\sim_{n}y\right)\Longleftrightarrow\left(n|\left(x-y\right)\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_{n}=\mathbb{Z}_{n}=\mathbb{Z}/\sim_{n}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $+:C_{n}\times C_{n}\to C_{n}$ המוגדרת $\left[x\right]_{\sim_{n}}+\left[y\right]_{\sim_{n}}=\left[x+y\right]_{\sim_{n}}$.

חבורת שאריות החלוקה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|C_{n}\right|=n$.

חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה לכל $g,h\in G$ מתקיים $g*h=h*g$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge3}$ אזי $\left(S_{n},\circ\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$ אבלית.

חבורה סופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\in\mathbb{N}$.

חבורה אינסופית: חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\ge\aleph_{0}$.

סדר של חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה סופית אזי $\mathrm{ord}\left(G\right)=\left|G\right|$.

סדר של חבורה: תהא G חבורה אינסופית אזי $\mathrm{ord}\left(G\right)=\infty$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $o\left(G\right)=\mathrm{ord}\left(G\right)$.

תת־חבורה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי $\left(H,*_{\restriction_{H\times H}}\right)$ עבורה

- סגירות לכפל: לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b\in H$.
- סגירות להופכי: לכל $a\in H$ מתקיים $a^{-1}\in H$.
- איבר יחידה: יהי e איבר היחידה של G אזי $e\in H$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ עבורה $\left(H,*_{\restriction_{H\times H}}\right)$ תת־חבורה אזי $H\le G$.

למה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\in\mathcal{P}\left(G\right)\backslash\left\{ \varnothing\right\}$ אזי $(H\le G)\Longleftrightarrow($לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b^{-1}\in H)$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהיינה $A,B\subseteq G$ אזי $A*B=\left\{ a*b\mid\left(a\in A\right)\wedge\left(b\in B\right)\right\}$.

סימון: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה תהא $H\subseteq G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\left\{ g\right\}*H$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(n\mathbb{Z},+\right)\le\left(\mathbb{Z},+\right)$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\left(\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)\le\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $R_{n}=\left\{ z\in\mathbb{C}\mid z^{n}=1\right\}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(R_{n},\cdot\right)\le\left(\mathbb{C}^{*},\cdot\right)$.

טענה: תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $G\le G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי $\{e\} \le G$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה אזי קיים ויחיד $e \in G$ עבורו $a*e=e*a=a$ לכל $a \in G$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי קיים ויחיד $b \in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $a \in G$ ויהי $b \in G$ איבר הופכי ל־a אזי $a^{-1}=b$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהיו $a,b \in G$ אזי $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$.

מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c \in G$ עבורם $a*b=a*c$ אזי $b=c$.

מסקנה כלל צמצום מימין: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c \in G$ עבורם $b*a=c*a$ אזי $b=c$.

סימון: תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $g \in G$ אזי $g^0=e$.

הגדרה: תהא $(G,*)$ חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ אזי $g^n=g*g^{n-1}$.

סימון: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n}=(g^n)^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n}=\left(g^{-1}\right)^n$.

חבורת המכפלה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות נגדיר $(g,h)\cdot(g',h')=(g*g',h\otimes h')$ לכל $g,g' \in G$ ולכל $h,h' \in H$ אזי $(G\times H,\cdot)$.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי חבורת המכפלה הינה חבורה.

טענה: תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי (חבורת המכפלה אבלית)$\Longleftrightarrow$(H,G אבליות).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K \le G$ אזי ($H*K \le G$)$\Longleftrightarrow$($HK=KH$).

טענה: תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K \le G$ אזי ($H\cup K \le G$)$\Longleftrightarrow$($H\cap K \in \{H,K\}$).

הגדרה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y)=\{\pi \in S(X) \mid \forall y \in Y.\pi(y)=y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y) \le S(X)$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $\{H_i\}_{I\in I} \subseteq \mathcal{P}(G)$ באשר $H_i \le G$ לכל $i \in I$ אזי $\bigcap_{i\in I} H_i \le G$.

הגדרה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\mathcal{F}(X)=\{H \le G \mid X \subseteq H\}$.

החבורה שנוצרת על ידי תת־קבוצה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X\rangle=\bigcap_{H\in\mathcal{F}(X)} H$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X\rangle \le G$.

טענה מינימליות החבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $X \subseteq G$ ותהא $H \le G$ עבורה $X \subseteq H$ אזי $\langle X\rangle \subseteq H$.

קבוצת יוצרים של חבורה: תהא G חבורה אזי $X \subseteq G$ עבורה $\langle X\rangle=G$.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

חבורה ציקלית: חבורה G עבורה קיים $g \in G$ המקיים $\langle g\rangle=G$.

למה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\langle g\rangle=\left\{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{n+m}=g^n*g^m$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n,m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $(g^n)^m=g^{n\cdot m}$.

למה: תהא G חבורה אזי (G ציקלית)$\Longleftrightarrow$(קיים $g \in G$ עבורו $G=\left\{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$).

מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.

סדר של איבר: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g)=\text{ord}(\langle g\rangle)$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g)=\min\{n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n=e\}$.

הערה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g)$ לא קיים אזי $\text{ord}(g)=\infty$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ באשר $\text{ord}(g)<\infty$ אזי $(\text{ord}(g)\,|n) \Longleftrightarrow (g^n=e)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $i \in \mathbb{Z}_n$ אזי ($\langle i\rangle=\mathbb{Z}_n$)$\Longleftrightarrow$($i,n$ זרים).

טענה: תהא G חבורה ציקלית ותהא $H \le G$ אזי H ציקלית.

טענה: $(\mathbb{Q},+)$ אינה נ"ס.

קוסט ימני: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $H*g$.

קוסט שמאלי: תהא G חבורה תהא $H \le G$ ויהי $g \in G$ אזי $g*H$.

נציג של קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי Hg קוסט ימני אזי g.

נציג של קוסט שמאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי אזי g.

מסקנה: תהא G חבורה אבלית תהא $H\le G$ ויהי $g\in G$ אזי $Hg=gH$.
מסקנה: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ויהי $g\in G$ אזי $(gH)^{-1}=Hg^{-1}$.
טענה: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ויהי $g\in G$ אזי $(g\in H)\Longleftrightarrow(gH=H)$.
טענה: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ויהי $g\in G$ אזי $(g\in H)\Longleftrightarrow(Hg=H)$
סימון: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי $G/H=\{gH\mid g\in G\}$.
סימון: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי $H\backslash G=\{Hg\mid g\in G\}$.
משפט: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי G/H חלוקה של G.
טענה: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ויהיו $g_1,g_2\in G$ אזי $\left(g_2^{-1}g_1\in H\right)\iff(g_1H=g_2H)$.
הקוסט הטריוואלית: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי eH.
אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי $[G:H]=|G/H|$.
טענה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי $[G:H]=|H\backslash G|$.
טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H\le G$ אזי $\text{ord}(G)=\text{ord}(H)\cdot[G:H]$.
משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא $H\le G$ אזי $\text{ord}(H)\,|\text{ord}(G)$.
מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}(g)\,|\text{ord}(G)$.
טענה: תהא G חבורה תהא $H\le G$ ותהא $K\le H$ אזי $[G:K]=[G:H]\cdot[H:K]$.
מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G)=p$ אזי לכל $g\in G\backslash\{e\}$ מתקיים $G=\langle g\rangle$.
מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G)=p$ אזי G ציקלית.
מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd(n,p)=1$ אזי $n^{p-1}\equiv 1 \mod p$.
למה: תהא G חבורה ותהיינה $H,K\le G$ חבורות סופיות אזי $|HK|=\frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$.
טענה: יהיו $p,q\in\mathbb{P}$ באשר $p>q$ ותהא G חבורה באשר $|G|=pq$ אזי לכל $H,K\le G$ באשר $\text{ord}(H)=p$ וכן $\text{ord}(K)=p$ מתקיים $K=H$.
טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge3}$ אזי $(S_n/\text{Stab}(1))\cap(\text{Stab}(1)\backslash S_n)=\{\text{Stab}(1)\}$.
קוסט כפול: תהא G חבורה תהיינה $H,K\le G$ ויהי $g\in G$ אזי HgK.
טענה: תהא G חבורה ותהיינה $H,K\le G$ אזי $\{HgK\mid g\in G\}$ חלוקה של G.
הומומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי $\varphi:G\to H$ המקיימת
- שימור איבר יחידה: $\varphi(e_G)=e_H$.
- שימור כפל: לכל $a,b\in G$ מתקיים $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$.
- שימור הופכי: לכל $g\in G$ מתקיים $\varphi\left(g^{-1}\right)=\varphi(g)^{-1}$.

טענה: תהיינה G,H חבורות ותהא $\varphi:G\to H$ אזי (φ הומומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(לכל $a,b\in G$ מתקיים $\varphi\left(a\cdot b^{-1}\right)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)^{-1}$).
גרעין של הומומורפיזם: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi)=\{g\in G\mid\varphi(g)=e_H\}$.
למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי
- $\text{Im}(\varphi)\le H$.
- $\ker(\varphi)\le G$.
- (φ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\ker(\varphi)=\{e_G\}$).

טענה: תהיינה G,H,K חבורות יהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם ויהי $\psi:H\to K$ הומומורפיזם אזי $\psi\circ\varphi$ הומומורפיזם.
טענה: תהיינה G,H חבורות יהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}(\varphi(g))\,|\text{ord}(g)$.
טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם.
טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא G חבורה אזי $\varphi:G\to\{e\}$ המוגדרת $\varphi(g)=e$ לכל $g\in G$ הינה הומומורפיזם.
טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא G חבורה ותהא $H\le G$ אזי $\text{Id}:H\to G$ הינו הומומורפיזם.
טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $\det:\text{GL}(V)\to\mathbb{F}^*$ הינו הומומורפיזם.
מטריצת תמורה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\rho:S_n\to\text{GL}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(\rho(\sigma))_{i,j}=\left\{\begin{smallmatrix}1 & j=\sigma(i)\\0 & \text{else}\end{smallmatrix}\right.$ לכל $i,j\in[n]$.
מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ תהא $\sigma\in S_n$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\rho(\sigma)\cdot v=\begin{pmatrix}v_{\sigma(1)}\\\vdots\\v_{\sigma(n)}\end{pmatrix}$.
טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\rho:S_n\to\text{GL}_n(\mathbb{R})$ הינה הומומורפיזם.
טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\det(\rho(\sigma))\in\{\pm1\}$.

סימן של תמורה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\text{sign}:S_n\to\{\pm1\}$ המוגדרת $\text{sign}=\det\circ\rho$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי sign הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\text{sign}\left(\sigma\right)=\frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\text{sign}\left(\sigma\right)=\left(-1\right)^{\left|\left\{(i,j)\in[n]^2\;\middle|\;(i<j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))\right\}\right|}$.

איזומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם הפיך $\varphi:G\to H$.

סימון: תהיינה G,H חבורות איזומורפיות אזי $G\cong H$.

למה: תהיינה G,H חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם אזי φ^{-1} איזומורפיזם.

למה: תהיינה G,H,K חבורות יהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם ויהי $\psi:H\to K$ איזומורפיזם אזי $\psi\circ\varphi$ איזומורפיזם.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה של חבורות אזי $\cong$ יחס שקילות על $\mathcal{A}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong R_n$.