עבורה Vol $_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
ight)
ightarrow [0,\infty]$  עבורה אזי לא קיימת  $n\in\mathbb{N}$  יהי

- $.Vol_n([0,1]^n) = 1 \bullet$
- . $\operatorname{Vol}_n\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Vol}_n\left(A_i\right)$  אזי  $\left\{A_i
  ight\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
  ight)$  תהיינה
- . $\mathrm{Vol}_n\left(arphi\left(A
  ight)
  ight)=\mathrm{Vol}_n\left(A
  ight)$  אזי  $A\subseteq\mathbb{R}^n$  איזומטריה ותהא  $arphi:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$  תהא

קבוצות חופפות בחלקים:  $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$  עבורן קיים  $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$  קיימות עבורן איזומטריות איזומטריות איזומטריות  $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$  איזומטריות איזומטריות איזומטריות  $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$  וכן  $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$  איזומטריות איזומטריות  $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$  וכן  $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$  איזומטריות המקיימות  $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$  וכן  $X,Y\subseteq\mathbb{H}^n$  איזומטריות א

 $X \equiv Y$  אזי בחלקים חופפות  $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$  סימון: תהיינה

 $X \equiv Y$  אזי  $(Y) \neq \varnothing$  וכן  $(X) \neq \varnothing$  וחסומות עבורן אוינה  $X,Y \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהיינה ווהיינה  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$  יהי היי  $(Y) \neq \emptyset$  ותהיינה ווהיינה  $(Y) \neq \emptyset$  ותהיינה אזי לא קיימת  $(Y) \neq \emptyset$  ווהיינה אזי לא קיימת  $(Y) \neq \emptyset$  ווהיינה אזי לא קיימת ווהיינה ווהיינה ווהיינה  $(Y) \neq \emptyset$  אזי לא קיימת ווהיינה וו

- $.Vol_n([0,1]^n)=1 \bullet$
- . $\mathrm{Vol}_n\left(A \uplus B\right) = \mathrm{Vol}_n\left(A\right) + \mathrm{Vol}_n\left(B\right)$  אזי  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  תהיינה
- . $\mathrm{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\mathrm{Vol}_n\left(A\right)$  אזי  $A\subseteq\mathbb{R}^n$  איזומטריה ותהא  $\varphi:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$  ההא

עבורה  $\operatorname{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
ight) o [0,\infty]$  אזי קיימת  $n\in\{1,2\}$  יהי יהי

- $.Vol_n([0,1]^n)=1 \bullet$
- $\operatorname{Vol}_n\left(A \uplus B\right) = \operatorname{Vol}_n\left(A\right) + \operatorname{Vol}_n\left(B\right)$  אזי  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  תהיינה
- . $\mathrm{Vol}_n\left(arphi\left(A
  ight)
  ight)=\mathrm{Vol}_n\left(A
  ight)$  אזי  $A\subseteq\mathbb{R}^n$  איזומטריה ותהא  $arphi:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}^n$  אהא

אלגברה: תהא א קבוצה אזי תהא אלגברה: אלגברה אלגברה

- $X \in \mathcal{A} \bullet$
- $\forall E \in \mathcal{A}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A} \bullet$
- . | או סופית מתקיים בכל  $E\subseteq\mathcal{A}$

 $A\cap B\in\mathcal{A}$  אזי א $A,B\in\mathcal{A}$  טענה: תהא

אידיאל: תהא X קבוצה אזי  $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$  המקיימת

- $X \notin \mathcal{I} \bullet$
- $\forall A \in \mathcal{I}. \forall B \subseteq A.B \in \mathcal{I} \bullet$
- $\bigcup E \in \mathcal{A}$  סופית מתקיים  $E \subseteq \mathcal{A}$  לכל •

המקיימת  $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$  אזי קבוצה X המקיימת  $\sigma$ 

- $X \in \mathcal{A} \bullet$
- $\forall E \in \mathcal{A}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A} \bullet$
- . ( אבת בת מניים מתקיים  $E\subseteq\mathcal{A}$  לכל •

מסקנה: תהא  $\mathcal A$  אלגברה אזי $\sigma$  אלגברה.

המקיימת  $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$  אזי קבוצה אזי תהא X המקיימת  $\sigma$ 

- $X \notin \mathcal{I} \bullet$
- $\forall A \in \mathcal{I}. \forall B \subseteq A.B \in \mathcal{I} \bullet$
- $\bigcup E \in \mathcal{A}$  בת מנייה מתקיים  $E \subseteq \mathcal{A}$  לכל

טענה: תהיינה  $G \cap_{\alpha \in I} A_{\alpha}$  אזי אזי  $\sigma \in A_{\alpha}$ אלגברה  $G \cap_{\alpha \in I} G \cap_{\alpha \in I} G$ 

אזי A אזי מעל X המכילות מעל כל ה $\sigma$ ־אלגברה נוצרת: תהא א ותהיינה ותהיינה  $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$  המכילות את א אזי  $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$  המכילות את  $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$  המכילות את  $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$  המכילות את א אזי  $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$  המכילות את א אזי המכילות את א וערכה א ותהיינה ווצרת: חברה אוני המכילות את א אזי המכילות את א ווערכה א וו

 $\mathcal{B}\left(X
ight)=\sigma\left(\left\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}\left(X
ight)\mid$  פתוחה  $\mathcal{O}
ight\}$  פתרי אזי מרחב מטרי אזי יהי מרחב מטרי אזי מרחב מטרי אזי

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות

- .X אלגברה בורל על  $\sigma$
- $.\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r>0\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$  •
- $.\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_+\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$  •
- $.\sigma\left(\left\{B_{r}\left(a
  ight)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_{+}
  ight)\wedge\left(a\in Y
  ight)
  ight\}
  ight)$  צפופה אזי  $Y\subseteq X$  תהא ullet

 $A=igcap_{i=1}^\infty \mathcal{O}_i$  עבורה קיימות פתוחות פתוחות איימות  $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^\infty$  עבורה קיימות עבורה איימות  $A\subseteq X:G_\delta$ 

```
A=igcup_{i=1}^\infty \mathcal{O}_i סגורות המקיימות \{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^\infty עבורה קיימות A\subseteq X:F_\delta אזי מסקנה: תהא A קבוצה G_\delta ותהא B קבוצה B אזי B ותהא B קבוצה הקבוצות הבאות שוות \mathbb{R}^n טענה: הקבוצות הבאות שוות \sigma \bullet \mathcal{O}(\{\prod_{i=1}^n [a_i,b_i)\mid a_1,b_1\dots a_n,b_n\in\mathbb{R}\}) \bullet \mathcal{O}(\{\prod_{i=1}^n [a_i,b_i)\mid a_1,b_1\dots a_n,b_n\in\mathbb{R}\}) \bullet \mathcal{O}(\{\prod_{i=1}^n [a_i,b_i)\mid a_1,b_1\dots a_n,b_n\in\mathbb{R}\}) משפט: תהא \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\} ותהא \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\} אזי \mathcal{O}(f)\in G_\delta \bullet \mathcal{O}(f) אזי \mathcal{O}(f)=\{f\in \mathcal{O}(f)\}
```

.int  $(\overline{A})=\varnothing$  המקיימת  $A\subseteq X$  המקיימת מרחב מטרי אזי  $A\subseteq X$  המקיימת מרחב מטרי אזי  $A=\bigcup_{i=1}^\infty B_i$  דלילות עבורן  $\{B_i\}_{i=1}^\infty$  דלילות עבורן מטרי אזי  $A\subseteq X$  עבורה קיימות מקטגוריה ראשונה. קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי A מרחב מטרי אזי  $A\subseteq X$  שאינה מקטגוריה ראשונה.  $A^{\mathcal{C}}$  מקטגוריה ראשונה אזי  $A\subseteq X$  מקטגוריה ראשונה אזי  $A^{\mathcal{C}}$ 

למה: יהיX מרחב מטרי אזי

- . דלילה  $B \subseteq A$  אזי  $A \subseteq X$  דלילה תהא  $A \subseteq X$
- . דלילה  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  אזי דלילות אזי  $A_1 \ldots A_n \subseteq X$  דלילה.
  - . דלילה אזי  $\overline{A}$  דלילה אזי  $A\subseteq X$  תהא

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

 $\operatorname{cint}(A)=arnothing$  משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא ותהא  $A\subseteq X$  משפט בייר: יהי מרחב מטרי משפט הייר

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות  $\sigma$ ־אידיאל.

 $\mathbb{Q} \notin G_{\delta}$  :מסקנה

 $A=F\uplus N$  אזי קיימת איים וקיימת איימת משפט: תהא אזי קיימת הקטגוריה מקטגוריה אזי קיימת אזי קיימת אזי קיימת משפט

משפט בנך: במרחב המטרי  $\{f\in C\left([0,1]\right)\mid\exists x\in\left(0,1\right).f\in\mathcal{D}\left(x\right)\}$  היא מקטגוריה מקסימום הקבוצה  $C\left([0,1]\right)$  היא מקטגוריה במרחב המטרי ראשונה.

הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבורה עבורה עבורה עבורה קיימת  $Q\subseteq X$  פתוחה וקיימת עבורה אזי איז מרחב מטרי אזי מרחב מטרי אזי עבורה קיימת  $A\subseteq X$  מקטגוריה ראשונה עבורה  $A=G\triangle Q$ 

משפט: תהא  $A\subseteq X$  מקטגוריה ראשונה עבורה  $F\subseteq X$  סגורה בייר) $\Longleftrightarrow$ (קיימת בייר) אזי (ל-A אזי ל-A אזי ל-A אזי אזי (ל- $A\subseteq X$ ).

מסקנה: תהא  $A \subseteq X$  בעלת תכונת בייר אזי  $A \subseteq X$  בעלת תכונת בייר.

נסמן lpha+1 נסמן,  $\mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\}$  נסמן  $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$  נסמן  $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{T}$ , לכל סודר עוקב משפט:

באשר  $\sigma\left(\mathcal{T}\right)=\mathcal{F}_{\omega_{1}}$  אזי  $\mathcal{F}_{\lambda}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha}$  נסמן  $\lambda$  נסמן  $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_{n}\mid A_{n}\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}$  באשר ... הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

 $|\sigma\left(X
ight)|=\aleph$  אזי אין אורה עבורה עבורה א קבוצה עבורה א

 $.(X,\Sigma)$ אזי אזי ס אלגברה  $\sigma$   $\Sigma\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ ותהא ותהא קבוצה אזי תהא מדיד: תהא

המקיימת  $\mu:\Sigma \to [0,\infty]$  אזי מרחב מדיד הה<br/>  $(X,\Sigma)$ יהי יהי פונקציית מידה: המקיימת

- $.\mu(\varnothing) = 0 \bullet$
- $.\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B_i\right)$  אזי לרות בזוגות אזי ורות ב $\left\{B_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$  הדטיביות: תהיינה ס

 $(X,\Sigma,\mu)$  יהי מידה פונקציית מדיה מדיד מרחב מרחב מרחב ( $X,\Sigma)$ יהי יהי מרחב מרחב מרחב

 $.\mu\left( X\right) <\infty$  חמקיימת  $\mu$  מידה פונקציית פונקציית מידה סופית:

 $. orall i \in \mathbb{N}_+. \mu\left(B_i
ight) < \infty$  וכן  $X = igcup_{i=1}^\infty B_i$  המקיימים  $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$  וכן  $\mu$  בורה קיימים מידה  $\mu$  וכן  $\mu$  בורה קיימים מידה  $\mu$  המקיימת  $\mu$  בורה הסתברות: פונקציית מידה  $\mu$  המקיימת  $\mu$ 

טענה: יהי  $(X,\Sigma,\mu)$  מרחב מידה אזי

- $.\mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right)$  אזי  $A\subseteq B$ באשר  $A,B\in\Sigma$  יהיו מונוטוניות: יהיו
- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_{i}\right)$  אזי  $\left\{A_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$  התראדיטיביות: תהיינה  $\sigma$
- $.\mu\left(igcup_{i=1}^{\infty}A_{i}
  ight)=\lim_{n o\infty}\mu\left(A_{n}
  ight)$  אזי  $orall i\in\mathbb{N}_{+}.A_{i}\subseteq A_{i+1}$  באשר באשר  $\{A_{i}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$  מלעיל: תהיינה •
- $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_{i}
  ight)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_{n}
  ight)$  אזי  $\mu\left(A_{1}
  ight)<\infty$  וכן  $\forall i\in\mathbb{N}_{+}.A_{i}\supseteq A_{i+1}$  באשר  $\{A_{i}\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$  באשר פידת בורל: תהא X קבוצה אזי מידה  $\mu$  על  $\mu\left(X,\mathcal{B}\left(X
  ight)\right)$ .

 $\mu\left(E
ight)=0$  המקיימת  $E\in\Sigma$  אפס/זניחה:

 $\mathcal{N}=\{E\in\Sigma\mid\mu\left(E
ight)=0\}$  סימון: יהי  $(X,\Sigma,\mu)$  מרחב מידה אזי

. אניחה  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  אזי אניחות אזי  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$  אניחה: תהיינה

 $\mu$  כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי  $\psi$  פרידיקט עבורו קיימת  $E\in\mathcal{N}$  המקיים כי  $\psi$  מתקיים לכל Xackslash E אזי נאמר כי  $\psi$  נכונה בכל מקום..

 $F\in\mathcal{N}$  מתקיים  $F\subseteq E$  ולכל ולכל לכל עבורה מידה מידה מידה פונקציית מידה לכל

 $.\overline{\Sigma}=\{E\cup F\mid (E\in\Sigma)\wedge (\exists N\in\mathcal{N}.F\subseteq N)\}$  השלמה של  $\sigma$ ־אלגברה: יהי  $(X,\Sigma,\mu)$  מרחב מידה אזי

טענה: יהי  $\overline{\Sigma}$  יהי מידה מידה ( $X,\Sigma,\mu)$  יהי טענה:

 $u_{
ho_{\Sigma}} = \mu$  עבורה על  $\overline{\Sigma}$  עבורה מידה מידה אזי קיימת ויחידה מידה אל מרחב מרחב מידה אזי קיימת ויחידה מידה שלמה על  $(X,\Sigma,\mu)$ 

 $.\overline{\mu}_{1_{\Sigma}}=\mu$  עבורה על  $\overline{\Sigma}$  עבורה השלמה המידה מידה מידה מידה מרחב מרחב ( $X,\Sigma,\mu$ ) השלמה של מידה: יהי

טענה: יהי  $(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu})$  מרחב מידה אזי  $(X,\Sigma,\mu)$  מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא  $X 
eq \varnothing$  אזי  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$  אזי איזי תהא

- $X \in \mathcal{D} \bullet$
- $.B \backslash A \in \mathcal{D}$  אזי  $A \subseteq B$  באשר  $A, B \in \mathcal{D}$  יהיי •
- $\bigcup_{i=1}^\infty A_i\in\mathcal{D}$  אזי  $orall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$  באשר  $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{D}$  ההיינה ullet

 $\bigcap_{i=1}^{n}A_{i}\in\Pi$  מתקיים  $A_{1}\ldots A_{n}\in\Pi$  עבורה לכל עבורה אזי אזי אזי אזי  $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$  אזי אזי  $X
eq\varnothing$ 

. מחלקת חלקת  $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_{\alpha}$  אזי אינקין מחלקת אולקות  $\{\mathcal{D}_{\alpha}\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$  מענה: תהיינה

 $d(A)=igcap_{lpha\in I}\mathcal{D}_lpha$  אזי אזי A אזי אזי מחלקת דינקין מעל A המכילות את A אזי  $A\subseteq\mathcal{P}(X)$  מחלקת דינקין נוצרת: תהא  $A\subseteq\mathcal{P}(X)$  אזי  $A\subseteq\mathcal{P}(X)$  הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את  $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ 

למה: תהא A אלגברה על X עבורה לכל A עבורה לכל A באשר  $A_i \in \mathbb{N}_+$  מתקיים  $A_i \in \mathcal{A}$  מתקיים  $A_i \in \mathcal{A}$  אזי A האלגברה על מה: תהא A אלגברה על עבורה לכל  $A_i \in \mathcal{A}$  באשר  $A_i \in \mathbb{N}_+$  מתקיים  $A_i \in \mathcal{A}$  אזי  $A_i \in \mathcal{A}$  אזי  $A_i \in \mathcal{A}$  מתקיים  $A_i \in \mathcal{A}$  אזי  $A_i \in \mathcal{A}$  משפט הלמה של דינקין: תהא  $A_i \in \mathcal{A}$  מערכת  $A_i \in \mathcal{A}$  אזי  $A_i \in \mathcal{A}$  משפט הלמה של דינקין: תהא  $A_i \in \mathcal{A}$  מערכת  $A_i \in \mathcal{A}$  אזי  $A_i \in \mathcal{A}$ 

עבורן  $\Sigma$  עבורן סופיות סופיות  $\mu, \nu$  מידות  $\Sigma = \sigma\left(\Pi\right)$  עבורה מטקנה: יהי  $\Pi \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$  מרחב מדיד תהא על  $\Pi \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$  מרחב מדיד תהא  $\mu = \mu$  אזי  $\mu \in \mathcal{P}\left(X\right)$  וכן  $\mu \in \mathcal{P}\left(X\right)$  אזי  $\mu \in \mathcal{P}\left(X\right)$ 

 $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$  באשר  $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\Pi$  מסקנה: יהי  $\Sigma=\sigma(\Pi)$  מערכת  $\pi$  עבורה  $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$  מרחב מדיד תהא  $\mu=\nu$  מיר וכן  $\mu=\nu$  וכן  $\mu=\nu$  וכן  $\mu=\nu$  מידות על  $\mu=\nu$  עבורן  $\mu=\nu$  עבורן  $\mu=\nu$  וכן  $\mu=\nu$  וכן  $\mu=\nu$  ווכן  $\mu=\nu$  מידות על  $\mu=\nu$  עבורן  $\mu=\nu$  עבורן  $\mu=\nu$  ווכן  $\mu=\nu$  ווב

חוג למחצה: תהא  $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$  אזי קבוצה X המקיימת

- $\mathscr{A} \in \mathcal{E} \bullet$
- $A \cap B \in \mathcal{E}$  אזי  $A, B \in \mathcal{E}$  יהיי
- $A \setminus B = \biguplus_{i=1}^n C_i$  עבורם  $C_1 \dots C_n \in \mathcal{E}$  אזי קיימים  $A, B \in \mathcal{E}$  יהיי

 $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{E}$  טענה: יהי  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}\left(X
ight)$  חוג למחצה ויהיו

- $.Packslash\bigcup_{i=1}^nA_i=\biguplus_{i=1}^mB_i$  יהי  $P\in\mathcal{E}$  אזי קיימים יהי אז  $P\in\mathcal{E}$  יהי •
- $.\bigcup_{i=1}^nA_i=\biguplus_{i=1}^m\biguplus_{j=1}^mB_{i,j}$  עבורם  $\{B_{i,j}\mid (i\in[n])\wedge (j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$  קיימים •
- $.\bigcup_{i=1}^nA_i=\biguplus_{i=1}^\infty\biguplus_{j=1}^mB_{i,j}$  עבורם  $\{B_{i,j}\mid (i\in\mathbb{N}_+)\wedge (j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$  קיימים •

מידה אלמנטרית: יהי  $\mu:\mathcal{E} o [0,\infty]$  חוג למחצה אזי חוג למרית: יהי יהי

- $.\mu(\varnothing) = 0 \bullet$
- $.\mu\left(A\uplus B
  ight)=\mu\left(A
  ight)+\mu\left(B
  ight)$  אזי  $A\uplus B\in\mathcal{E}$  עבורם  $A,B\in\mathcal{E}$  אדיטיביות: תהיינה •

- $.\mu\left(A
  ight) \leq \mu\left(B
  ight)$  אזי  $A\subseteq B$  באשר  $A,B\in\mathcal{E}$  מונוטוניות: תהיינה
- $\mu\left(igcup_{i=1}^\infty A_i
  ight) \le \sum_{i=1}^\infty \mu\left(A_i
  ight)$  איי ווינה  $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{E}$  התראדטיביות: תהיינה  $\sigma$

מידה חיצונית: יהי X
eqarnothing אזי  $[0,\infty]$  אזי X
eqarnothing המקיימת

- $.\mu^*(\varnothing) = 0 \bullet$
- $.\mu^{st}\left(A
  ight)\leq\mu^{st}\left(B
  ight)$  אזי  $A\subseteq B$  באשר  $A,B\in\mathcal{P}\left(X
  ight)$  מונוטוניות: תהיינה
- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}
  ight)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_{i}
  ight)$  איי  $\left\{A_{i}
  ight\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(X
  ight)$  היינה  $\sigma$  •

 $ho\left(\varnothing
ight)=0$  אבורה  $ho:\mathcal{E} o [0,\infty]$  אתהא  $arphi,X\in\mathcal{E}$  באשר  $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight)$  יהי יהי  $ho:
ho^*\left(A
ight)=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty 
ho\left(E_i
ight)\mid\left(\left\{E_i\right\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{E}\right)\wedge\left(A\subseteq\bigcup_{i=1}^\infty E_i
ight)
ight\}$  כגדיר  $ho^*:\mathcal{P}\left(X
ight) o [0,\infty]$ 

. טענה:  $ho^*$  אזי  $ho(\varnothing)=0$  אזי  $ho:\mathcal{E} o[0,\infty]$  ותהא מידה חיצונית. באשר  $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$  אזי יהי

 $.m_{{\scriptscriptstyle \mathsf{LM}}}^* = m$  אזי אלמנטרית מידה מידה m מידה למחצה חוג למחצה שענה: יהי

 $.\Gamma_{0}=\{E\in\mathcal{A}\mid\lambda$  אזי  $E\}$  אזי  $\lambda\left(arnothing
ight)=0$  עבורה  $\lambda:\mathcal{A} o\left[0,\infty
ight]$  אלגברה ותהא אלגברה ותהא  $\lambda:\mathcal{A} o\left[0,\infty
ight]$ 

טענה: תהא  $\lambda\left(arnothing
ight)=0$  אזי  $\lambda:\mathcal{A} o\left[0,\infty
ight]$  אלגברה ותהא אלגברה לגברה אזי  $\lambda:\mathcal{A} o\left[0,\infty
ight]$ 

- .אלגברה  $\Gamma_0$
- $.\Gamma_0$  אדיטיבית על  $\lambda$

 $.\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$ 

 $\lambda\left(\biguplus_{i=1}^{n}\left(E_{k}\cap F\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(E_{n}\cap F\right)$  אזי  $F\in\mathcal{A}$  ויהי  $E_{1}\ldots E_{n}\in\Gamma_{0}$  תהיינה

מתקיים לכל לכל עבורה אזי אזי אזי חיצונית מידה מידה תהא  $E\subseteq X$ לכל למידה אזי אזי על אזי מידה מידה מהידה מהידה מהידה מידה תהא  $\mu^*$ 

 $\Sigma_{\mu^*}=\{A\subseteq X\mid \mu^*$  מדידה  $A\}$  אזי X איזי על מידה חיצונית על מדידה  $\mu^*$ 

 $\mathcal{M}\subseteq \Sigma_{m^*}$  אזי אלמנטרית מידה m מידה ותהא חוג למחצה יהי  $\mathcal{M}$ 

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא  $\mu^*$  מידה חיצונית על X אזי

- . אלגברה  $\sigma$   $\Sigma_{\mu^*}$
- . מידה שלמה  $\mu^*_{\restriction_{\Sigma_{..*}}}$

משפט: יהי  $\mathcal M$  חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא  $(X,\Sigma',\mu)$  המשכת קרתיאודורי נוספת של מידה m אזי

- $\mu\left(A\right) \leq m^{*}\left(A\right)$  מתקיים  $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^{*}}$  •
- $.\mu\left(A
  ight)=m^{st}\left(A
  ight)$  מתקיים  $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}}$  לכל אזי לכל  $m^{st}\left(X
  ight)<\infty$  .
  - $\mu\left(A
    ight)=m^{st}\left(A
    ight)$  מתקיים  $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}}$  לכל אזי לכל  $\sigma$  m נניח כי

. מסקנה: יהי  ${\mathcal M}$  חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית  $\sigma$ ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה מסקנה:

מתקיים  $d\left(A,B\right)>0$  באשר  $A,B\subseteq X$  מתקיים  $\mu^*$  מידה מטרי ותהא ווהא  $\mu^*$  מידה מטרי מידה (X,d) מתקיים  $\mathcal{B}\left(X\right)\subseteq\Sigma_{\mu^*}$  אזי  $\mu^*\left(A\cup B\right)=\mu^*\left(A\right)+\mu^*\left(B\right)$ 

 $.\mu\left(A\right)=\sup\left\{ \mu\left(K\right)\mid\left(K\subseteq A\right)\wedge\left($ קומפקטית הפועה אבורה  $A\in\Sigma$  קבוצה קבוצה רגולרית: קבוצה אבורה אבורה אבורה אבורה אבורה האבוצה האבוצה האבוצה אבורה אבורה אבורה אבורה אבורה האבוצה האבוצה האבוצה אבורה אב

. תולרית. אזי  $\mu$  אזי אוי  $\mu$  אזי  $\mu$  אזי  $\mu$  משפט אולם: יהי א מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא ותהא אוי משפט אולם: יהי אוי שלח מטרי שלח ו

עבורה  $\{\prod_{i=1}^n (a_i,b_i) \mid a_1,b_1\dots a_n,b_n\in\mathbb{R}\}$  עבורה מידה אלמנטרית: מידה אלמנטרית:

 $.m(\prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ 

 $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n
ight)=\sigma\left(\{A\subseteq\mathbb{R}^n\mid ($ מתוחה A)ee (מירת הנפח האלמנטרית פי מידת על פי מידת אניחה על פי מידת הנפח האלמנטרית)

 $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d
ight)\subseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)$  :מסקנה

 $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n
ight)=\Sigma_{m^*}$  אזי אזי הנפח האלמנטרית מידת מידת מידת מידת מידת מידת הנפח

מסקנה: תהא  $u \left(\prod_{i=1}^n (a_i,b_i)\right) = \prod_{i=1}^n (b_i-a_i)$  מידה אלמנטרית מידה אלמנטרית מידה אלמנטרית עבורה  $u : \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right) \to [0,\infty]$  אזי א הינה מידת הנפח האלמנטרית.

טענה: תהא  $\lambda$  מידת לבג אזי

```
.\lambda\left(E
ight)=\lim_{n	o\infty}\lambda\left(E\cap\left[-n,n
ight]^{d}
ight) אזי E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
ight) תהא
```

- $A\left(\mathcal{O}\backslash E
  ight)<arepsilon$  פתוחה עבורה  $E\subseteq\mathcal{O}$  אזי קיימת arepsilon>0 אזי ויהי ויהי  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
  ight)$
- $\lambda\left(Eackslash F
  ight)<arepsilon$  סגורה עבורה אזי קיימת  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
  ight)$  תהא  $\bullet$
- $.\lambda\left(E\backslash F\right)<\varepsilon$  עבורה עבורה  $F\subseteq E$  אזי קיימת יהי ויהי  $\mu\left(E\right)<\infty$  עבורה עבורה תהא  $\bullet$
- .( $\lambda\left(A\right)=\lambda\left(B\right)$  וכן  $A\subseteq E\subseteq B$  המקיימות  $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$  פֿיימות לאזי ( $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ ) אזי וכן  $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$

טענה: תהא  $A\subseteq\mathbb{R}^d$  מידת לבג ותהא  $\mu$  התב"ש

- $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$  •
- A=Gackslash E עבורן  $E\in\mathcal{N}$  וקיימת וקיימת  $G\in G_\delta$
- $A=F\cup E$  עבורן איימת  $E\in\mathcal{N}$  וקיימת וקיימת  $F\in F_{\sigma}$

 $(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d
ight),m)$  מסקנה: תהא  $\lambda$  מידת לבג אזי ( $\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight),\lambda$ ) השלמה אזי מסקנה:

משפט: תהא  $A\subseteq\mathcal{O}$  מידת לבג תהא  $f:\mathcal{O} o\mathbb{R}^d$  פתוחה תהא פתוחה לבג תהא מידת לבג תהא לבג תהא משפט

- $f\left(A
  ight)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
  ight)$  אזי  $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
  ight)$  נניח כי
  - $\lambda\left(f\left(A\right)\right)=0$  נניח כי  $\lambda\left(A\right)=0$  אזי •

 $A(A)=\lambda\left(A+x
ight)$  אזי  $X\in\mathbb{R}^n$  ויהי  $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n
ight)$  משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא

מסקנה: תהא  $\nu\left(E\right)<\infty$  חבומה מתקיים בע וכן לכל לכל לכל  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$  מידה אינווריאנטית מידה אינווריאנטית מידה אינווריאנטית האינווריאנטית מידה אינווריאנטית  $u:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)\to\left[0,\infty\right]$  איי קיים  $\lambda=\kappa \nu$  אוי עבורו  $\kappa\in\left[0,\infty\right)$ 

 $\lambda\left(T\left(E
ight)
ight)=\left|\det\left(T
ight)
ight|\lambda\left(E
ight)$  אזי  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}
ight)$  ותהא  $T\in\operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}^{d}
ight)$  משפט: תהא

 $A=\prod_{i=1}^n{(a_i,b_i)}$  המקיימים  $a_1,b_1\dots a_n,b_n\in\mathbb{R}$  עבורה קיימים עבורה  $A\subseteq\mathbb{R}^d$  המדרה: תהא  $E\subseteq\mathbb{R}^d$  חסומה ותהא  $A\subseteq\mathbb{R}^d$  מידת לבג אזי

- $\lambda_{*,I}(E) = \sup \{\lambda(A) \mid (\lambda(A) \subseteq E)\}$  מידת ז'ורדן פנימית:
- $.\lambda_{I}^{st}(E)=\inf\left\{ \lambda\left(A
  ight) \mid$  (פשוטה) איורדן חיצונית: A

 $\lambda_{J}\left(E
ight)=\lambda_{J}^{*}\left(E
ight)$  אזי א $\lambda_{*,J}\left(E
ight)=\lambda_{J}^{*}\left(E
ight)$  חסומה עבורה  $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$  אזי אוירדן: תהא

 $.\lambda_{J}^{*}\left(E
ight)=\lambda\left(\overline{E}
ight)$  וכן  $\lambda_{*,J}\left(E
ight)=\lambda\left(\mathrm{int}\left(E
ight)
ight)$  חסומה אזי וכן וכן

טענה: תהא  $\lambda$  מידת לבג אזי  $E\subseteq \mathbb{R}^d$  מידת לבג אזי

- .מדידה ז'ורדן Eullet
- $A(B\backslash A)<arepsilon$  וכן  $A\subseteq E\subseteq B$  פשוטות עבורן A,B אזי קיימות arepsilon>0
  - $.\lambda_I^*(\partial E) = 0 \bullet$
  - $.\lambda^* \left( \partial E \right) = 0 \bullet$

 $(x-y)\in\mathbb{Z}^dackslash\{0\}$  עבורם  $x,y\in E$  אזי קיימים א $\lambda\left(E
ight)>1$  עבורה  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)$ 

 $V\cap \left(\mathbb{Z}^dackslash\{0\}
ight)
eq arnothing$  אזי א $V\subseteq \mathbb{R}^d$  משפט מינקובסקי: יהי  $V\subseteq \mathbb{R}^d$  גוף קמור סימטרי סביב  $V\cap \left(\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}
ight)$ 

 $\lambda\left(E\cap Q
ight)> heta\cdot\lambda\left(Q
ight)$  עבורה  $Q\subseteq\mathbb{R}^d$  אזי קיימת קוביה  $\theta\in(0,1)$  ותהא  $\lambda\left(E
ight)\in(0,\infty)$  עבורה  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)$  משפט שטיינהאוס: תהא  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)$  עבורה  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d
ight)$  אזי  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ 

 $(x-y)\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$  עבורם  $x,y\in E$  אזי קיימים א ל(E)>0 עבורה  $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}
ight)$  מסקנה: תהא

 $\mathcal{O}=(\biguplus_{i=1}^\infty B_i)\cup E$  עבורם  $E\in\mathcal{N}$  עבורים וקיימת למה: תהא  $\mathcal{O}=\{B_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d
ight)$  פתוחה אזי קיימים

. פונקציית התפלגות:  $F:\mathbb{R} o\mathbb{R}_{>0}$  מונוטונית עולה ורציפה מימין

טענה: תהא  $\mu$  מידת בורל סופית על  $\mathbb{R}$  אזי  $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  המוגדרת  $F(x)=\mu$  הינה פונקציית התפלגות.  $\mu$  מידת בורל סופית על  $\mu$  אזי  $\mu:\mathcal{A} \to [0,\infty]$  אלגברה אזי  $\mu:\mathcal{A} \to [0,\infty]$  אלגברה אזי

- $.\mu(\varnothing) = 0 \bullet$
- $\mu(iguplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$  ארות בזוגות אזי ורות ב $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \Sigma$  אדטיביות: תהיינה  $\sigma$

 $.m_{\uparrow_{\mathcal{A}}}^*=m$  אזי קדם־מידה אזי האגברה ותהא אלגברה אלגברה אלגברה שלגברה ותהא

 $\mathcal{A} \subseteq \Sigma_{m^*}$  אזי קדם־מידה אזי תהא אלגברה ותהא אלגברה ותהא

 $\Sigma_{m^*}$  מידה מעל  $m^*$  מידה המשכת קרתיאודורי: תהא אלגברה ותהא M

משפט: תהא Aאלגברה תהא m קדם־מידה ותהא  $(X,\Sigma',\mu)$  המשכת קרתיאודורי נוספת של

- $\mu\left(A\right) < m^{*}\left(A\right)$  מתקיים  $A \in \Sigma' \cap \Sigma_{m^{*}}$  •
- $\mu\left(A
  ight)=m^{st}\left(A
  ight)$  מתקיים  $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}}$  אזי לכל  $m^{st}\left(X
  ight)<\infty$  פניח כי
  - $.\mu\left(A
    ight)=m^{st}\left(A
    ight)$  מתקיים  $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{st}}$  לכל אזי לכל יניח כי  $\sigma$  ת

. מסקנה: תהא  $\mathcal{A}$ אלגברה ותהא m קדם־מידה  $\sigma$ ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

 $\{[a,b)\mid a\leq b\}$  פענה: תהא  $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  שמנה:  $\mu\left([a,b)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$  שמידה אלמנטרית מעל החוג למחצה  $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  פונקציית התפלגות אזי  $\mu\left(\biguplus_{i=1}^n\left[a_i,b_i\right)\right)=\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)$  אזי התפלגות אזי  $\pi\left(\biguplus_{i=1}^n\left[a_i,b_i\right)\right)=\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)$  פונקציית התפלגות אזי  $\pi\left(\biguplus_{i=1}^n\left[a_i,b_i\right]\right)=\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)$  פונקציית התפלגות אזי  $\pi\left(\biguplus_{i=1}^n\left[a_i,b_i\right]\right)=\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)$  פונקציית התפלגות אזי  $\pi\left(\biguplus_{i=1}^n\left[a_i,b_i\right]\right)=\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)$ 

 $\mu_F\left([a,b)
ight)=F\left(b
ight)-F\left(a
ight)$  עבורה בורל  $\mu_F$  עבורה אזי קיימת אזי קיימת אזי קיימת פונקציית התפלגות התפלגות אזי  $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  ענה: תהיינה  $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  פונקציות התפלגות אזי  $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 

 $. orall a,b \in \mathbb{R}.\mu\left([a,b]
ight) < \infty$  מידה סופית מקומית: מידת בורל מעל מעל מידה מידה מקומית:

 $\mu=\mu_F$  עבורה  $F:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  מסקנה: תהא  $\mu$  מידת בורל סופית מקומית על  $\mathbb{R}$  אזי קיימת פונקציית התפלגות  $\mu$ 

 $\overline{\mu_F}$  אזי התפלגות איזי פונקציית התפלגות איזי מידת לבג־סטילטייס: תהא

 $\mu_F = \overline{\mu_F}$  פונקציית התפלגות נסמן  $F: \mathbb{R} o \mathbb{R}$  סימון: תהא

 $\mu_F\left(E
ight)=\inf\left\{\sum_{i=1}^n\left(F\left(b_i
ight)-F\left(a_i
ight)
ight)\mid E\subseteq\bigcup_{i=1}^n\left[a_i,b_i
ight)
ight\}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  פונקציית התפלגות ותהא  $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  פונקציית התפלגות ותהא  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  פונקציית התפלגות ותהא  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  פונקציית התפלגות אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  פונקציית התפלגות אזי  $E\in\Sigma_{\mu_F}$  רגולרית.

משפט: תהא  $E\subseteq\mathbb{R}$  התב"ש התפלגות פונקציית  $F:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  התב"ש

- $.E \in \Sigma_{\mu_E} \bullet$
- E=Gackslash N עבורן  $N\in\mathcal{N}$  וכן  $G\in G_\delta$  קיימת
- $E=F\uplus N$  עבורן  $N\in\mathcal{N}$  וכן וכן  $F\in F_{\sigma}$

.( $\mu_F\left(A
ight)=\mu_F\left(B
ight)$  וכן  $A\subseteq E\subseteq B$  וכן  $A,B\in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}
ight)$  אזי ( $E\in \Sigma_{\mu_F}$ ) אזי ( $E\in \Sigma_{\mu_F}$ )

טענה העיקרון הראשון של ליטלווד: תהא  $F:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  פונקציית התפלגות תהא ב $E\in \Sigma_{\mu_F}$  עבורה  $F:\mathbb{R} o \mathbb{R}$  ותהא ותהא  $\mu_F(E)<\infty$  קיימים  $\mu_F(E\triangle(\bigcup_{i=1}^n(a_i,b_i)))<\varepsilon$  עבורם  $\mu_F(E)<\infty$ 

 $\mathcal{C}=[0,1]\setminus igcup_{n=0}^\infty igcup_{k=0}^{3^n-1}\left(rac{3k+1}{3^{n+1}},rac{3k+2}{3^{n+1}}
ight)$  קבוצת קנטור:

 $\mathcal{C} \in \mathcal{N}$  טענה: תהא  $\lambda$  מידת לבג אזי

 $\mathcal{C} = \left\{\sum_{i=1}^\infty rac{x_i}{3^i} \;\middle|\; x \in \mathbb{N}^{\{0,2\}}
ight\}$  :טענה

. בבודה מבודדות מבילה לא מכילה לחלוטין קשירה בלתי קבוצה בלתי קבוצה בלתי קבוצה בלתי קבוצה בלתי קשירה לחלוטין אשר לא בלתי הבוצה בלתי הבודדות בלתי הב

## :טענה

- $|\mathcal{C}| = \aleph \bullet$
- .קומפקטית  $\mathcal{C}$ 
  - .מושלמת  $\mathcal{C}$

קבוצת קנטור מוכללת: תהיינה  $C_{n-1}$  אוין  $C_{n-1}$  וכן את היינה ( $\delta_n$ ) נגדיר ( $\delta_n$ ) נגדיר ( $\delta_n$ ) נגדיר היינה ( $\delta_n$ ) אוי  $\delta_n$  אוי  $\delta_n$  אוי  $\delta_n$  אוי  $\delta_n$  קטע באורך  $\delta_n$  קטע באורך ( $\delta_n$ ) אוי  $\delta_n$  אוי  $\delta_n$  אוי  $\delta_n$  אוי  $\delta_n$ 

. $\forall n \in \mathbb{N}_+.\delta_n = rac{1}{3}$  קנטור מוכללת באשר קנטור הינה קבוצת אינה קנטור הינה קבוצת אינה

 $(\sum_{i=1}^\infty \delta_i = \infty)$ איי (קבוצת קנטור המוכללת זניחה על פי מידת לבג) איי איי (קבוצת קנטור המוכללת איינה  $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left((0,1)
ight)$ 

 $.arphi^\star(x)=\sum_{i=1}^\inftyrac{a_i}{3^i}$  אזי  $a_i\in\{0,1\}$  אזי  $x=\sum_{i=1}^\inftyrac{2a_i}{3^i}$  הגדרה: נגדיר כך שאם  $arphi^\star:\mathcal{C} o[0,1]$  אזי  $x\in\mathcal{C}$ 

. $arphi\left(x
ight)=\sup\left\{ arphi^{\star}\left(t
ight)\mid\left(t\in\mathcal{C}
ight)\wedge\left(t\leq x
ight)
ight\}$  כך  $arphi:\left[0,1
ight]
ightarrow\left[0,1
ight]$  כד נגדיר

 $oldsymbol{arphi}$ טענה: תהא [0,1] 
ightarrow [0,1] 
ightarrow [0,1] פונקציית קנטור אזי

- עולה. arphi ullet
  - רציפה.  $\varphi$
  - $.\varphi(C) = [0,1] \bullet$
- $arphi\left(E
  ight)
  otin\mathcal{L}\left(\mathbb{R}
  ight)$  עבורה  $E\subseteq\mathcal{C}$  קיימת •

. $\operatorname{diam}\left(A\right)=\sup\left\{d\left(x,y\right)\mid x,y\in A\right\}$  אזי אזי  $A\subseteq X$  מרחב מטרי ותהא מרחב מטרי יהי (X,d) אזי

```
אזי E\subseteq X יהי \delta>0 יהי יהי מטרי מטרי מרחב (X,d) אזי הגדרה: יהי
                                      \mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)=\inf\left\{ \sum_{i=1}^{n}\operatorname{diam}\left(A_{i}\right)^{s}\mid\left(E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_{i}\right)\wedge\left(\operatorname{diam}\left(A_{i}\right)<\delta
ight) 
ight\}
\mathcal{H}_{s}\left(E
ight)=\lim_{\delta\downarrow0}\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E
ight) אזי אזי E\subseteq X ויהי ויהי s\geq0 מידת האוסדורף: יהי יהי יהי
                                                                       טענה: יהי \delta>0 ויהי s\geq 0 מרחב מטרי יהי s\geq 0 אזי
```

- יורדת.  $f(\delta) = \mathcal{H}_{s,\delta}(E)$  המוגדרת  $f:(0,\infty) \to [0,\infty]$  יורדת. •
- יורדת.  $f\left(s
  ight)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E
  ight)$  המוגדרת  $f:\left[0,\infty
  ight)
  ightarrow\left[0,\infty
  ight]$  יורדת.  $\bullet$
- יורדת.  $f\left(s
  ight)=\mathcal{H}_{s}\left(E
  ight)$  המוגדרת  $f\left(s
  ight)=\left(0,\infty
  ight) 
  ightarrow \left(0,\infty
  ight)$  יורדת.  $\bullet$ 
  - $\mathcal{H}_s(\varnothing) = 0 \bullet$
  - . מידות חיצוניות  $\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s,\delta}$

טענה: יהי  $d\left(A,B
ight)>\delta$  עבורן  $A,B\subseteq X$  ותהיינה  $\delta>0$  יהי יהי מטרי מטרי מרחב מטרי יהי  $s\geq 0$ 

 $\mathcal{H}_{s,\delta}(A \cup B) = \mathcal{H}_{s,\delta}(A) + \mathcal{H}_{s,\delta}(B)$ 

 $\mathcal{H}_s\left(A\cup B
ight)=\mathcal{H}_s\left(A
ight)+\mathcal{H}_s\left(B
ight)$  אזי  $d\left(A,B
ight)>0$  מסקנה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי  $s\geq 0$  ותהיינה  $s\geq 0$  ותהיינה  $\mathcal{H}_{s}$  מדידה  $E\in\mathcal{B}\left(X
ight)$  אזי אוי  $s\geq0$  מסקנה: יהי

 $\mathcal{H}_{s}\left(f\left(E
ight)
ight)\leq L^{s}\cdot\mathcal{H}_{s}\left(E
ight)$  אזי  $E\subseteq X$  ותהא  $E\subseteq X$  ליפשיץ ליפשיץ f:X o Y

 $\mathcal{H}_{s}\left(f\left(E
ight)
ight)=\mathcal{H}_{s}\left(E
ight)$  אזי  $E\subseteq X$  איזומטריה ותהא f:X o X מסקנה: תהא

 $E \subseteq X$  אזי אינ s > 0 מרחב מטרי יהי (X,d) אזי

- $\mathcal{H}_{t}\left(E
  ight)=0$  מתקיים t>s אזי לכל  $\mathcal{H}_{s}\left(E
  ight)<\infty$  אם •
- $\mathcal{H}_{t}\left(E
  ight)=\infty$  מתקיים t< s אזי לכל  $\mathcal{H}_{s}\left(E
  ight)>0$  אם  $\bullet$

 $\mathcal{H}_s\left(E
ight) = 0$  אזי n < s ויהי  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  מסקנה: תהא

 $\dim_{\mathcal{H}}(E)=\inf\{s\geq 0\mid \mathcal{H}_s\left(E
ight)=0\}$  מימד האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא

 $\dim_{\mathcal{H}}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)=n$  אזי  $n\in\mathbb{N}_{+}$  מסקנה: יהי

 $\dim_{\mathcal{H}}\left(\mathcal{C}\right)=\log_{3}\left(2\right)$  משפט:

 $\mathcal{H}_n = rac{2^n}{\lambda(\{|x| \le 1\})} \cdot \lambda$  אזי איזי  $\lambda$  משפט: תהא  $\lambda$  מידת לבג מעל

 $0<\mathcal{H}_n\left(\left[0,1
ight]^n
ight)<\infty$  אזי  $n\in\mathbb{N}_+$  יהי יהי  $n\in\mathbb{N}_+$