הצרנה: הפיכת פסוק מילולי לשפה של צורות מתמטיות.

פסוק יסודי: טענה עצמית שיכולה להיות אמת או שקר.

קשר הדיסיונקציה/או: יהיו A, B פסוקים יסודיים אזי $A \vee B$.

קשר הקוניונקציה/גם: יהיו A, B פסוקים יסודיים אזי $A \wedge B$.

קשר האימפליקציה/גרירה: יהיו A, B פסוקים יסודיים אזי $A \Longrightarrow B$.

קשר השלילה: יהיו A, B פסוקים יסודיים אזי $\neg A$.

פסוק/טענה: יהיו $A_1 \ldots A_n$ פסוקים יסודיים אזי חיבור $A_1 \ldots A_n$ בעזרת קשרים בצורה חוקית.

רישא: יהי $A \Longrightarrow B$ פסוק אזי A.

סיפא: יהי $A \Longrightarrow B$ פסוק אזי B.

השמה: יהיו $A_1 \ldots A_n$ פסוקים יסודיים אזי קביעת ערך True או False לכל אחד מהם.

סימון: יהי A פסוק יסודי ותהא v השמה אזי $v(A) = \text{True}$ אם קבענו כי A מקבל ערך אמת בהשמה v.

סימון: יהי A פסוק יסודי ותהא v השמה אזי $v(A) = \text{False}$ אם קבענו כי A מקבל ערך שקר בהשמה v.

הערה: יהי A פסוק יסודי ותהא v השמה אזי $((v(A) = \text{True}) \wedge (v(A) \neq \text{False})) \vee ((v(A) = \text{False}) \wedge (v(A) \neq \text{True}))$.

טבלת אמת: יהיו A, B פסוקים יסודיים אזי טבלה המסכמת את כל ההשמות האפשריות.

טענה טבלאות אמת של קשרים: יהיו A, B פסוקים יסודיים אזי

A	B	$A \vee B$
True	True	True
True	False	True
False	True	True
False	False	False

A	B	$A \wedge B$
True	True	True
True	False	False
False	True	False
False	False	False

A	B	$A \Longrightarrow B$
True	True	True
True	False	False
False	True	True
False	False	True

A	$\neg A$
True	False
False	True

טענה: יהיו $A_1 \ldots A_n$ פסוקים יסודיים אזי קיימות 2^n השמות עבורם.

הערה: יהיו A, B פסוקים ותהא v השמה $(v(A) = \text{False}) \Longrightarrow (v(A \Longrightarrow B) = \text{True})$.

פסוקים שקולים: יהיו A, B פסוקים נאמר כי $A \equiv B$ אם לכל השמה v מתקיים $v(A) = v(B)$.

טענה: יהיו A, B פסוקים אזי

- $(A \Longrightarrow B) \equiv ((\neg A) \vee B)$.
- $(A \Longrightarrow B) \equiv ((\neg B) \Longrightarrow (\neg A))$.
- $(\neg(\neg A)) \equiv A$.
- $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.
- $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$.
- $(\neg(A \Longrightarrow B)) \equiv (A \wedge (\neg B))$.
- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$.
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$.
- $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$.
- $(A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C)$.

כללי דה מורגן: יהיו A, B פסוקים אזי

- $(\neg(A \wedge B)) \equiv ((\neg A) \vee (\neg B))$.
- $(\neg(A \vee B)) \equiv ((\neg A) \wedge (\neg B))$.

אם ורק אם (אם"ם): יהיו A, B פסוקים אזי $(A \Longleftrightarrow B) \equiv ((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A))$.

טאוטולוגיה: פסוק A עבורו לכל השמה v מתקיים כי $v(A) = \text{True}$.

סתירה: פסוק A עבורו לכל השמה v מתקיים כי $v(A) = \text{False}$.

מסקנה: יהי A פסוק אזי (A סתירה)$\Longleftrightarrow$($\neg A$ טאוטולוגיה).

טענה: יהי P פסוק אזי $P \Longrightarrow P$ טאוטולוגיה.

טענה: יהי P פסוק אזי $P \vee (\neg P)$ טאוטולוגיה.

פסוק נובע סמנטית: יהיו $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ פסוקים אזי פסוק α המקיים כי לכל השמה עבורה $v(\alpha_1) = \ldots = v(\alpha_n) = \text{True}$ מתקיים כי $v(\alpha) = \text{True}$.

פרידיקט n־מקומי: פסוק ב־n משתנים.

כמת קיים: קיים אובייקט שמקיים את הפרידיקט.

סימון: כמת קיים מסומן $\exists$.

כמת לכל: לכל אובייקט מתקיים הפרידיקט.

סימון: כמת לכל מסומן $\forall$.

נוסחה יסודית: יהי p פרידיקט חד־מקומי אזי $\forall x.p(x)$ או $\exists x.p(x)$.

נוסחה: תהיינה $A_1 \ldots A_n$ נוסחאות וטענות יסודיות אזי חיבור $A_1 \ldots A_n$ בעזרת קשרים וכמתים בצורה חוקית.

תחום הכימות/עולם הדיון: קבוצת האובייקטים שמהווים את המקור להצבות של משתנים.

אינטרפרטציה של פרידיקט: תהא p נוסחה ויהי D עולם הדיון אזי השמה מ־D.

סימון: תהא p נוסחה ותהא v השמה מעולם דיון D אם לכל a ב־D מתקיים $p(a)$ אזי $D \models \forall x.p(x)$.

סימון: תהא p נוסחה ותהא v השמה מעולם דיון D אם קיים a ב־D עבורו $p(a)$ אזי $D \models \exists x.p(x)$.

נוסחאות שקולות: יהיו p, q נוסחאות עבורן לכל תחום כימות D מתקיים $D \models (p \iff q)$.

סימון: יהיו p, q נוסחאות שקולות אזי $p \equiv q$.

טענה: יהיו p, q, φ, ψ נוסחאות אזי

- $(\neg(\exists x.p(x))) \equiv (\forall x.(\neg p(x)))$.
- $(\neg(\forall x.p(x))) \equiv (\exists x.(\neg p(x)))$.
- $(\forall x.\forall y.\varphi(x,y)) \equiv (\forall y.\forall x.\varphi(x,y))$.
- $\exists x.\exists y.\varphi(x,y) \equiv \exists y.\exists x.\varphi(x,y)$.
- $\forall x.(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv (\forall x.\varphi(x)) \wedge (\forall y.\psi(y))$.
- $\exists x.(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv (\exists x.\varphi(x)) \vee (\exists y.\psi(y))$.

הוכחת טענת קיים: $\exists x.P(x)$ נציג x עבורו מתקיים $P(x)$.

הוכחת טענת לכל: $\forall x.P(x)$ נציג עבור x כללי בתחום הכימות.

קיים יחיד: תהא φ נוסחה אזי $(\exists! x.\varphi(x)) \equiv ((\exists x.\varphi(x)) \wedge (\forall x.\forall y.((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \Longrightarrow (x = y))))$.

כתיב יוטא: תהא φ נוסחה עבורה $\exists! x.\phi(x)$ אזי $\phi(\iota x.\phi(x))$ אמת.

הערה: אנו נעבוד מעל מערכת האקסיומות ZFC.

קבוצה: אוסף של איברים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות.

שייך: תהא A קבוצה אזי $a \in A$ אם a נמצאת ב־A.

סימון: תהא A קבוצה ויהי a אזי $(a \notin A) \iff (\neg(a \in A))$.

רישום קבוצה:

- רשימת איברים: $\{a_1, \ldots, a_n\}$ באשר $(a \in \{a_1, \ldots, a_n\}) \iff ((a = a_1) \vee \ldots \vee (a = a_n))$.
- עקרון ההפרדה: $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ באשר $(a \in \{x \in A \mid \phi(x)\}) \iff ((a \in A) \wedge \phi(a))$.
- עיקון ההחלפה: $\{f(x) \mid x \in A\}$ באשר $(a \in \{f(x) \mid x \in A\}) \iff (\exists x \in A.f(x) = a)$.

הקבוצה הריקה: $\varnothing = \{\}$.

הטבעיים: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

השלמים החיוביים: $\mathbb{N}_+ = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$.

הראשוניים: $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}_+.((1 < n < p) \Longrightarrow n \nmid p)\}$.

השלמים: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

הרציונליים: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}_+\right\}$.

הממשיים: $\mathbb{R} =$"כל המספרים הממשיים".

הממשיים החיוביים: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

המרוכבים: $\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})\}$.

קטע/אינטרוול: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ באשר $a \leq b$ אזי

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

- $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$.
- $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$.
- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$.

הכלה: תהיינה A,B קבוצות אזי $(A\subseteq B)\iff(\forall x((x\in A)\implies(x\in B)))$.

טענה: תהא A קבוצה אזי $\varnothing\subseteq A$.

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי $(A\nsubseteq B)\iff(\neg(A\subseteq B))$.

מוכל ממש: תהיינה A,B קבוצות אזי $(A\subset B)\iff((A\subseteq B)\wedge(B\nsubseteq A))$.

טענה: תהיינה A,B,C קבוצות אזי $((A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C))\implies(A\subseteq C)$.

שיוויון/עקרון האקסטנציונליות: תהיינה A,B קבוצות אזי $(A=B)\iff(\forall x((x\in A)\iff(x\in B)))$.

טענה: תהיינה A,B קבוצות אזי $(A=B)\iff(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)$.

טענה יחידות הקבוצה הריקה: $\forall X\left(\forall y.y\notin X\implies X=\varnothing\right)$.

חיתוך: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\cap B=\{x\in A\mid x\in B\}$.

איחוד: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$.

חיסור: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\backslash B=\{x\in A\mid x\notin B\}$.

משלים: תהיינה A,B קבוצות אזי $A^{\mathcal{C}}=\{x\in\mathcal{U}\mid x\notin A\}$.

הפרש סימטרי: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\triangle B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

טענה: תהיינה A,B,C קבוצות אזי

- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.
- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.
- $A\cup B=B\cup A$.
- $A\cap B=B\cap A$.
- $(A\cup B)^{\mathcal{C}}=A^{\mathcal{C}}\cap B^{\mathcal{C}}$.
- $(A\cap B)^{\mathcal{C}}=A^{\mathcal{C}}\cup B^{\mathcal{C}}$.

משפט האינדוקציה: יהי $P(x)$ פרידיקט אזי $(P(0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.P(n)\implies P(n+1)))\implies(\forall n\in\mathbb{N}.P(n))$.

עוצמה: תהא A קבוצה אזי $|A|$ היא כמות האיברים ב־A.

קבוצת החזקה: תהא A קבוצה אזי $\mathcal{P}(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$.

הערה: תהא A קבוצה סופית אזי $|\mathcal{P}(A)|=2^{|A|}$.

טענה: תהיינה A,B קבוצות אזי $(A\subseteq B)\iff(\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B))$.

חיתוך מוכלל: תהא I קבוצה ותהא A_i קבוצה לכל $i\in I$ אזי $\bigcap_{i\in I}A_i=\{x\mid\forall i\in I.x\in A_i\}$.

איחוד מוכלל: תהא I קבוצה ותהא A_i קבוצה לכל $i\in I$ אזי $\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\mid\exists i\in I.x\in A_i\}$.

סימון: תהא I קבוצה ותהא A_i קבוצה לכל $i\in I$ אזי $\bigcap\{A_i\mid i\in I\}=\bigcap_{i\in I}A_i$.

סימון: תהא I קבוצה ותהא A_i קבוצה לכל $i\in I$ אזי $\bigcup\{A_i\mid i\in I\}=\bigcup_{i\in I}A_i$.

סימון: תהא A_i קבוצה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_i$.

סימון: תהא A_i קבוצה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$.

ערך שלם תחתון: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lfloor x\rfloor=\max(n\in\mathbb{Z}\mid n\le x)$.

ערך שלם עליון: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lceil x\rceil=\min(n\in\mathbb{Z}\mid x\le n)$.

משפט: קיימת טענה $\phi(x)$ כך ש־$\{x\mid\phi(x)\}$ איננה קבוצה.

פרדוקס ראסל: הקבוצה $\{x\mid x\notin x\}$ איננה מוגדרת.

מסקנה: קבוצת כל הקבוצות איננה מוגדרת.

זוג סדור: יהיו x,y אזי $\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$.

טענה: יהיו a,b,c,d אזי $(\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle)\iff((a=c)\wedge(b=d))$.

מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid a\in A\wedge b\in B\}$.

סימון: תהא A קבוצה אזי $A^1=A$.

חזקה: תהא A קבוצה אזי $A^n = A^{n-1} \times A$.

טענה: תהיינה A, B, C קבוצות אזי

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

איחוד זר: תהיינה A, B קבוצות עבורן $A \cap B = \varnothing$ אזי $A \uplus B = A \cup B$.

הערה: תהיינה $A_1 \ldots A_n$ קבוצות סופיות אזי $|A_1 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.

המישור הממשי: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{R}^n$.

יחס: תהיינה A, B קבוצות אזי $R \subseteq A \times B$.

הגדרה:

- $<_{\mathbb{N}} = \left\{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}_+ . n + k = m \right\}$.
- $\leq_{\mathbb{N}} = \left\{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N} . n + k = m \right\}$.
- $\text{Id}_A = \{ \langle n, n \rangle | \in A \}$.

סימון: תהיינה A, B קבוצות תהא $R \subseteq A \times B$ יהי $a \in A$ ויהי $b \in B$ אזי $(aRb) \iff (\langle a, b \rangle \in R)$.

מקור/תחום: יהי $R \subseteq A \times B$ אזי $\text{Dom}(R) = \{ a \in A \mid \exists b \in B . aRb \}$.

תמונה: יהי $R \subseteq A \times B$ אזי $\text{Im}(R) = \{ b \in B \mid \exists a \in A . aRb \}$.

יחס הופכי: יהי $R \subseteq A \times B$ אזי $R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid aRb \}$.

טענה: יהי $R \subseteq A \times B$ אזי $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

טענה: יהי $R \subseteq A \times B$ אזי $\text{Dom}\left(R^{-1}\right) = \text{Im}(R)$.

הרכבה: יהי $R \subseteq A \times B$ ויהי $S \subseteq B \times C$ אזי $S \circ R = \{ \langle a, c \rangle \in A \times C \mid \exists b \in B . aRb \wedge bSc \}$.

טענה: תהא $R \subseteq A \times B$ ותהא $S \subseteq C \times A$ אזי $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

טענה: תהא $R \subseteq A \times B$ אזי $R = R \circ \text{Id}_A$.

טענה: תהא $R \subseteq A \times B$ אזי $R = \text{Id}_B \circ R$.

יחס רפלקסיבי: יחס $R \subseteq A^2$ עבורו $\forall a \in A . aRa$.

יחס סימטרי: יחס $R \subseteq A^2$ עבורו $\forall a, b \in A . aRb \Longrightarrow bRa$.

יחס טרנזיטיבי: יחס $R \subseteq A^2$ עבורו $\forall a, b, c \in A . aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc$.

יחס שקילות: יחס $R \subseteq A^2$ באשר R רפלקסיבי סימטרי וטרנזיטיבי.

מחלק: יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$ אזי $(n|m) \iff (\exists k \in \mathbb{Z} . kn = m)$.

משפט חלוקה עם שארית: יהי $n \in \mathbb{Z}$ ויהי $m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ אזי קיים ויחיד $r \in \{0, \ldots, m\}$ וקיים ויחיד $q \in \mathbb{Z}$ עבורם $n = m \cdot q + r$.

טענה: יהי $R \subseteq A^2$ אזי

- (R רפלקסיבי)$\iff$($\text{Id}_A \subseteq R$).
- (R סימטרי)$\iff$($R^{-1} = R$).
- (R טרנזיטיבי)$\iff$($R \circ R \subseteq R$).

מחלקת שקילות: יהי $R \subseteq A^2$ יחס שקילות ויהי $x \in A$ אזי $[x]_R = \{ y \in A \mid xRy \}$.

קבוצת מנה/מודולו: יהי $R \subseteq A^2$ יחס שקילות אזי $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$.

טענה: יהי $R \subseteq A^2$ יחס שקילות ויהיו $a, b \in A$ אזי

- $\left([a]_R \cap [b]_R \neq \varnothing\right) \Longrightarrow [a]_R = [b]_R$.
- $aRb \iff b \in [a]_R \iff [a]_R = [b]_R \iff a \in [b]_R \iff bRa$.
- $\neg (aRb) \iff [a]_R \cap [b]_R = \varnothing$.

מערכת נציגים: יהי $R \subseteq A^2$ יחס שקילות אזי $C \subseteq A$ המקיימת $(\forall a, b \in C . [a] \cap [b] = \varnothing) \wedge (\forall a \in A . \exists b \in C . aRb)$.

חלוקה: תהא A קבוצה אזי $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ עבורה $(\biguplus \Pi = A) \wedge (\forall X, Y \in \Pi . ((X \neq Y) \Longrightarrow (X \cap Y = \varnothing)))$.

סימון: תהא A קבוצה יהי $k \in \mathbb{N}_+$ תהא $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \in A^k$ ויהי $i \in \{1, \ldots, k\}$ אזי $(\langle a_1, \ldots, a_k \rangle)_i = a_i$.

סימון: יהי $a \in \mathbb{N}^1$ אזי $\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$.

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ ויהי $a \in \mathbb{N}^k$ אזי $\prod_{i=1}^{k} a_i = \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i \right) \cdot a_k$.

המשפט היסודי של האריתמטיקה: יהי $t \in \mathbb{N}_+$ אזי קיים ויחיד $k \in \mathbb{N}$ וקיים ויחיד $a \in \mathbb{P}^k$ עבורם $\prod_{i=1}^{k} a_i = t$.

משפט: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|\mathbb{P}| \geq n$.

החלוקה המושרית מהיחס: תהא A קבוצה ויהי $R \subseteq A^2$ יחס שקילות אזי ${}^{A}/_{R}$ חלוקה של A.

היחס המושרה מהחלוקה: תהא A קבוצה ותהא Π חלוקה של A אזי $R_\Pi = \biguplus_{X \in \Pi} X^2$.

טענה: תהא A קבוצה ותהא Π חלוקה של A אזי R_Π יחס שקילות מעל A.

משפט: תהא A קבוצה ויהי $S \subseteq A^2$ יחס שקילות אזי $R_{({}^{A}/_{S})} = S$.

משפט: תהא A קבוצה ותהא Π חלוקה של A אזי ${}^{A}/_{R_\Pi} = \Pi$.

יחס מלא: יחס $R \subseteq A \times B$ עבורו $\forall a \in A. \exists b \in B. aRb$.

פונקציה חלקית/יחס חד־ערכי (ח"ע): יחס $R \subseteq A \times B$ עבורו $\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (((aRb_1) \wedge (aRb_2)) \Longrightarrow (b_1 = b_2))$.

סימון: יהי $f \subseteq A \times B$ יחס חד־ערכי יהי $a \in A$ ויהי $b \in B$ אזי $(f(a) = b) \iff (afb)$.

פונקציה: יחס $R \subseteq A \times B$ באשר R חד־ערכי ומלא.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי $A \to B = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid \text{פונקציה } f\}$.

סימון: תהיינה A, B קבוצות אזי $A^B = A \to B$.

סימון: תהיינה A, B קבוצות אזי ${}^{B}A = A^B$.

הערה: תהיינה A, B קבוצות סופיות אזי $\left|A^B\right| = |A|^{|B|}$.

סימון: תהיינה A, B קבוצות ויהי $f \subseteq A \times B$ יחס אזי $(f : A \to B) \iff (f \in A \to B)$.

כתיב למבדא: תהיינה A, B קבוצות ותהא $f : A \to B$ אזי

- $(\lambda x \in A. f(x)) = \{\langle x, f(x) \rangle \mid x \in A\}$.
- יהי $a \in A$ אזי $(\lambda x \in A. f(x))(a) = f(a)$.

שיוויון פונקציות: תהיינה f, g פונקציות אזי $(f = g) \iff ((\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)) \wedge (\forall x \in \text{Dom}(f). f(x) = g(x)))$.

תמונה: תהיינה A, B קבוצות תהא $f : A \to B$ יהי $a \in A$ ויהי $b \in B$ באשר $f(a) = b$ אזי b.

מקור: תהיינה A, B קבוצות תהא $f : A \to B$ יהי $a \in A$ ויהי $b \in B$ באשר $f(a) = b$ אזי a.

קבוצת התמונות: תהא $f : A \to B$ ותהא $X \subseteq A$ אזי $f[X] = \{f(a) \mid a \in X\}$.

קבוצת המקורות: תהא $f : A \to B$ ותהא $Y \subseteq B$ אזי $f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$.

טווח: תהיינה A, B קבוצות ותהא $f : A \to B$ אזי $\text{Range}(f) = B$.

סימון: $f(a, b) = f(\langle a, b \rangle)$.

פונקציית curry: תהיינה A, B, C קבוצות אזי $\text{curry} : C^{A \times B} \to \left(C^B\right)^A$ באשר $\text{curry} = \lambda f \in C^{A \times B}. \lambda a \in A. \lambda b \in A. f(\langle a, b \rangle)$.

צמצום: תהא $f : A \to B$ ותהא $X \subseteq A$ אזי $f_{\restriction X} : X \to B$ באשר $f_{\restriction X} = \lambda x \in X. f(x)$.

משפט: תהא $f \in A \to B$ ותהא $g \in B \to C$ אזי $\forall a \in A. (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

משפט: תהא $f \in A \to B$ ותהא $g \in B \to C$ אזי $g \circ f : A \to C$.

טענה: תהא $h : A \to B$ תהא $g : B \to C$ ותהא $f : C \to D$ אזי $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

פונקציה חד־חד־ערכית (חח"ע): פונקציה $f : A \to B$ עבורה $\forall a_1, a_2. (f(a_1) = f(a_2)) \Longrightarrow (a_1 = a_2)$.

פונקציה n־ערכית: פונקציה $f : A \to B$ עבורה $\forall b \in B. \left|f^{-1}[\{b\}]\right| = n$.

פונקציה על: פונקציה $f : A \to B$ עבורה $\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$.

משפט: תהא $f : A \to B$ אזי

- (f חח"ע)$\iff$(f^{-1} ח"ע).
- (f על)$\iff$(f^{-1} מלאה).
- (f חח"ע ועל)$\iff$($f^{-1} : B \to A$).

הפיכות: תהא $f : A \to B$ אזי

- הפיכה משמאל: $\exists g \in B \to A. g \circ f = Id_A$.
- הפיכה מימין: $\exists g \in B \to A. f \circ g = Id_B$.
- זיווג/הפיכה: f הפיכה מימין וכן הפיכה משמאל.

משפט: תהיינה $A, B \neq \varnothing$ ותהא $f : A \to B$ אזי

- (f חח"ע)$\iff$(f הפיכה משמאל). אקסיומת הבחירה
- (f על)$\iff$(f הפיכה מימין). אקסיומת הבחירה

מסקנה: תהיינה $A, B \neq \varnothing$ ותהא $f : A \to B$ אזי (f חח"ע ועל)$\iff$(f הפיכה). אקסיומת הבחירה

משפט: יהיו $A,B\neq\varnothing$ תהא $f:A\to B$ ותהיינה $g,h:B\to A$ עבורן $g\circ f=\mathrm{Id}_A$ וכן $h\circ f=\mathrm{Id}_A$ וכן $f\circ g=\mathrm{Id}_B$ וכן $f\circ h=\mathrm{Id}_B$ אזי $g=h$.

חלוקה למקרים: תהיינה A,B,C קבוצות יהי q פרידיקט תהא $f:A\to C$ ותהא $g:B\to C$ אזי $h:A\cup B\to C$ עבורה

- לכל $x\in A\cup B$ אם $q\left(x\right)$ אזי $x\in A$ וכן $h\left(x\right)=f\left(x\right)$.
- לכל $x\in A\cup B$ אם $\neg q\left(x\right)$ אזי $x\in B$ וכן $h\left(x\right)=g\left(x\right)$.

טענה: תהיינה A,B,C קבוצות יהי q פרידיקט תהא $f:A\to C$ ותהא $g:B\to C$ ותהיינה $h_1,h_2:A\cup B\to C$ חלוקות למקרים אזי $h_1=h_2$.

סימון: תהיינה A,B,C קבוצות יהי q פרידיקט תהא $f:A\to C$ ותהא $g:B\to C$ אזי $\lambda x\in A\cup.\begin{cases}f(x) & q(x)\\ g(x) & \text{else}\end{cases}$ חלוקה למקרים.

חלוקה למקרים: תהיינה $A_1\ldots A_n,C$ קבוצות יהיו $q_1\ldots q_{n-1}$ פרידיקטים ותהיינה $f_1\ldots f_n$ פונקציות באשר $f_i:A_i\to C$ לכל $i\in\{1,\ldots,n\}$ אזי $h:\bigcup_{i=1}^{n}A_i\to C$ עבורה

- לכל $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ אם $q_i\left(x\right)\wedge\left(\forall j\in\{1,\ldots,i-1\}.\left(\neg q_j\left(x\right)\right)\right)$ אזי $x\in A_i$ וכן $h\left(x\right)=f_i\left(x\right)$.
- לכל $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ אם $\forall j\in\{1,\ldots,n-1\}.\left(\neg q_j\left(x\right)\right)$ אזי $x\in A_n$ וכן $h\left(x\right)=f_n\left(x\right)$.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n,C$ קבוצות יהיו $q_1\ldots q_{n-1}$ פרידיקטים תהיינה $f_1\ldots f_n$ פונקציות באשר $f_i:A_i\to C$ לכל $i\in\{1,\ldots,n\}$ ותהיינה $h_1,h_2:A\cup B\to C$ חלוקות למקרים אזי $h_1=h_2$.

סימון: תהיינה $A_1\ldots A_n,C$ קבוצות יהיו $q_1\ldots q_{n-1}$ פרידיקטים ותהיינה $f_1\ldots f_n$ פונקציות באשר $f_i:A_i\to C$ לכל $i\in\{1,\ldots,n\}$ אזי $\lambda x\in A\cup.\begin{cases}f_1(x) & q_1(x)\\ \vdots & \vdots\\ f_{n-1}(x) & q_{n-1}(x)\\ f_n(x) & \text{else}\end{cases}$ חלוקה למקרים.

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי

- $\left(|A|=|B|\right)\Longleftrightarrow$(קיימת $f:A\to B$ הפיכה).
- $\left(|A|\le|B|\right)\Longleftrightarrow$(קיימת $f:A\to B$ חח"ע).

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי

- $\left(|A|\neq|B|\right)\Longleftrightarrow\left(\neg\left(|A|=|B|\right)\right)$.
- $\left(|A|<|B|\right)\Longleftrightarrow\left(\left(|A|\le|B|\right)\wedge\left(|A|\neq|B|\right)\right)$.

טענה: תהא A קבוצה אזי $|A|=|A|$.

טענה: תהיינה A,B קבוצות עבורן $A\subseteq B$ אזי $|A|\le|B|$.

טענה: תהיינה A,B קבוצות אזי$\left(|B|=|A|\right)\Longleftrightarrow\left(|A|=|B|\right)$.

טענה: תהיינה A,B,C קבוצות עבורן $|A|\le|B|$ וכן $|B|\le|C|$ אזי $|A|\le|C|$.

משפט: תהיינה A,B קבוצות אזי $\left(|A|\le|B|\right)\Longleftrightarrow$(קיימת $f:B\to A$ על). אקסיומת הבחירה

טענה: תהיינה A,A',B,B' קבוצות עבורן $|A|=|A'|$ וכן $|B|=|B'|$ אזי

- $|A\times B|=|A'\times B'|$.
- $|\mathcal{P}\left(A\right)|=|\mathcal{P}\left(A'\right)|$.
- $\left|A^B\right|=\left|\left(A'\right)^{B'}\right|$.
- $|A\uplus B|=|A'\uplus B'|$.

משפט קנטור ברנשטיין שרדר (קש"ב): תהיינה A,B קבוצות עבורן $|A|\le|B|$ וכן $|B|\le|A|$ אזי $|A|=|B|$.

סימון: $|\mathbb{N}|=\aleph_0$.

קבוצה בת־מנייה: קבוצה A עבורה $|A|=\aleph_0$.

קבוצה סופית: קבוצה A עבורה $\exists n\in\mathbb{N}.\,|A|=n$.

מסקנה: $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{N}^n|=|\mathbb{N}_{even}|=|\mathbb{N}_{odd}|=\aleph_0$.

משפט: תהא A קבוצה אזי

- (A סופית)$\Longleftrightarrow\left(|A|<\aleph_0\right)$.
- (A אינסופית)$\Longleftrightarrow\left(\aleph_0\le|A|\right)$. אקסיומת הבחירה
- (A אינסופית)$\Longleftrightarrow\left(\exists B\subset A.\,|A|=|B|\right)$. אקסיומת הבחירה

מסקנה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ ותהיינה A,B קבוצות עבורן $|A|=n$ וכן $|B|=m$ אזי

- $\left(|A|\le|B|\right)\Longleftrightarrow\left(n\le_{\mathbb{N}}m\right)$.
- $\left(|A|=|B|\right)\Longleftrightarrow\left(n=_{\mathbb{N}}m\right)$.

- $(|A|<|B|)\iff(n<_{\mathbb{N}}m)$.

משפט איחוד לכל היותר בן־מנייה של קבוצות לכל היותר בנות־מנייה הוא לכל היותר בן־מנייה: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה עבורה $|\mathcal{A}|\le\aleph_0$ וכן $\forall X\in\mathcal{A}.\left|X\right|\le\aleph_0$ אזי $\left|\bigcup\mathcal{A}\right|\le\aleph_0$. אקסיומת הבחירה

סימון: תהא $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{C}$ אזי $\mathbb{F}_n\left[x\right]=\left\{\sum_{i=0}^{n}\alpha_ix^i\mid\forall i\in\mathbb{N}.\alpha_i\in\mathbb{F}\right\}$.

סימון: תהא $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{C}$ אזי $\mathbb{F}\left[x\right]=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathbb{F}_n\left[x\right]$.

מספר אלגברי: מספר $a\in\mathbb{R}$ עבורו $\exists p\in\mathbb{Z}\left[x\right].p\left(a\right)=0$.

מסקנה: יהי $q\in\mathbb{Q}$ אזי q מספר אלגברי.

משפט: יהי $p\in\mathbb{R}\left[x\right]$ עבורו $\exists a\in\mathbb{R}.p\left(a\right)\neq0$ אזי $\left|\left\{x\in\mathbb{R}\mid p\left(x\right)=0\right\}\right|\le\deg\left(p\right)$.

טענה: $\left|\mathbb{Z}\left[x\right]\right|=\aleph_0$.

משפט האלכסון של קנטור: $\aleph_0<\left|\mathbb{N}\to\{0,1\}\right|$.

סימון: תהא A קבוצה אזי $2^{|A|}=\left|A\to\{0,1\}\right|$.

משפט: תהא A קבוצה אזי $2^{|A|}=\left|\mathcal{P}\left(A\right)\right|$.

עוצמת הרצף: $\mathfrak{c}=\aleph=\left|\mathbb{R}\right|$.

קבוצה מעוצמת הרצף: קבוצה A עבורה $\left|A\right|=\aleph$.

משפט: $\aleph=\left|\mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)\right|=\left|\mathbb{R}^n\right|=\left|\mathbb{N}\to\{0,1\}\right|$.

מסקנה: $2^{\aleph_0}=\aleph$.

פונקציית האינדיקטור: תהא A קבוצה אזי $\chi=\lambda A.\lambda B\in\mathcal{P}\left(A\right).\lambda a\in A.\left\{\begin{smallmatrix}1 & a\in B\\ 0 & \text{else}\end{smallmatrix}\right.$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $B\in\mathcal{P}\left(A\right)$ אזי $\chi_B^A=\chi\left(A\right)\left(B\right)$.

סימון: $\mathbb{1}=\chi$.

משפט קנטור: תהא A קבוצה אזי $\left|A\right|<\left|\mathcal{P}\left(A\right)\right|$.

מסקנה: יש אינסוף עוצמות אינסופיות.

משפט: תהא A קבוצה באשר $\aleph_0\le\left|A\right|$ אזי $\left|A^n\right|=\left|A\right|$.

משפט: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ באשר $a<b$ אזי $\left|(a,b)\right|=\left|[a,b)\right|=\left|(a,b]\right|=\left|[a,b]\right|=2^{\aleph_0}$.

השערת הרצף: $\neg\left(\exists a.\aleph_0<a<\aleph\right)$. זוהי לא טענה

משפט: ב־ZFC לא ניתן להוכיח ולא ניתן להפריך את השערת הרצף.

משפט אי השלמות הראשון של גדל: בכל מערכת אקסיומות T אם T מספיק איכותית כדי לתאר את $\mathbb{N}$ אז קיימת טענה α כך ש־T לא מוכיחה את α וגם T לא מוכיחה את $\neg\alpha$.

חשבון עוצמות: תהיינה A,B קבוצות אזי

- $\left|A\right|+\left|B\right|=\left|A\times\{0\}\uplus B\times\{1\}\right|$.
- $\left|A\right|\cdot\left|B\right|=\left|A\times B\right|$.
- $\left|A\right|^{|B|}=\left|B\to A\right|$.

טענה: תהיינה κ,λ,μ עוצמות אזי

- אסוציטיביות: $\kappa+\left(\lambda+\mu\right)=\left(\kappa+\lambda\right)+\mu$ וכן $\left(\kappa\cdot\lambda\right)\cdot c=\kappa\cdot\left(\lambda\cdot c\right)$.
- חילופיות: $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$ וכן $\kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa$.
- חוק הפילוג והקיבוץ: $\kappa\cdot\left(\lambda+\mu\right)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$.
- יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\kappa\cdot n=\sum_{i=1}^{n}\kappa$.

משפט: תהיינה κ,λ,μ,ν עוצמות עבורן $\kappa\le\lambda$ וכן $\mu\le\nu$ אזי

- $\kappa+\mu\le\lambda+\nu$.
- $\kappa\cdot\mu\le\lambda\cdot\nu$.
- $\kappa^\mu\le\lambda^\nu$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי

- $\aleph_0+n=\aleph_0$.
- $\aleph_0\cdot n=\aleph_0$.
- $\aleph+n=\aleph$.
- $\aleph\cdot n=\aleph$.

משפט: תהיינה κ, λ עוצמות אינסופית אזי $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

משפט: יהיו κ, λ עוצמות אינסופית אזי $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

מסקנה:

- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
- $\aleph + \aleph = \aleph$.
- $\aleph \cdot \aleph = \aleph$.
- $\aleph_0 + \aleph = \aleph$.
- $\aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$.

משפט: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי

- $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
- $\left(\kappa^\lambda\right)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
- $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

מסקנה: תהא κ עוצמה באשר $\kappa \geq \aleph_0$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\kappa + n = \kappa$.

מסקנה: $|\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}| = \aleph$.

מסקנה: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$.

יחס אנטי סימטרי חלש: יחס $R \subseteq A^2$ עבורו $\forall a, b \in A. ((aRb \wedge bRa) \Longrightarrow (a = b))$.

יחס אנטי סימטרי חזק: יחס $R \subseteq A^2$ עבורו $\forall a, b \in A. (aRb \Longrightarrow (\neg bRa))$.

יחס אנטי רפלקסיבי: יחס $R \subseteq A^2$ עבורו $\forall a \in A. (\neg aRa)$.

יחס סדר חלש: יחס $R \subseteq A^2$ באשר R רפלקסיבי אנטי סימטרי חלש וטרנזיטיבי.

יחס סדר חזק: יחס $R \subseteq A^2$ באשר R אנטי רפלקסיבי אנטי סימטרי חזק וטרנזיטיבי.

טענה: יהי $R \subseteq A^2$ יחס אזי (R אנטי סימטרי חזק)$\Longleftrightarrow$(R אנטי סימטרי חלש אנטי רפלקסיבי).

מסקנה: יהי $R \subseteq A^2$ יחס סדר חזק אזי $R \cup \mathrm{Id}_A$ יחס סדר חלש.

מסקנה: יהי $R \subseteq A^2$ יחס סדר חלש אזי $R \backslash \mathrm{Id}_A$ יחס סדר חזק.

הערה: תהא A קבוצה ויהי $R \subseteq A^2$ יחס אזי $\langle A, R \rangle$ מסמן את היחס R על A.

היחס המילוני: תהא A קבוצה יהי $\prec$ יחס סדר חזק על A ויהיו $x, y, z, w \in A$ אזי $(\langle x, y \rangle \prec_{\text{Lex}} \langle z, w \rangle) \iff ((x \prec z) \vee ((x = z) \wedge (y \prec w)))$.

טענה: תהא A קבוצה ויהי $\prec$ יחס סדר חזק על A אזי $\prec_{\text{Lex}}$ יחס סדר חזק.

יחס השליטה בכל מקום: תהיינה $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אזי $(f \leq g) \iff (\forall n \in \mathbb{N}. f(n) \leq g(n))$.

טענה: $\langle \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \leq \rangle$ יחס סדר חלש.

יחס השליטה כמעט בכל מקום: תהיינה $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אזי $(f <^* g) \iff (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. f(n) < g(n))$.

טענה: $\langle \mathbb{N} \to \mathbb{N}, <^* \rangle$ יחס סדר חזק.

יחס קווי/טוטלי/לינארי: יחס $R \subseteq A^2$ עבורו $\forall a, b \in A. ((aRb) \vee (bRa) \vee (a = b))$.

איבר מקסימלי/מירבי: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס ותהא $X \subseteq A$ אזי $x \in X$ עבורו $\forall y \in X. ((\neg (xRy)) \vee (y = x))$.

מקסימום: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס ותהא $X \subseteq A$ אזי $x \in X$ עבורו $\forall y \in X. ((yRx) \vee (y = x))$.

טענה: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס תהא $X \subseteq A$ ויהיו $x, y \in X$ מקסימומים של X אזי $x = y$.

סימון: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס תהא $X \subseteq A$ ויהי $x \in X$ המקסימום של X אזי $\max_R(X) = x$.

איבר מינימלי: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס ותהא $X \subseteq A$ אזי $x \in X$ עבורו $\forall y \in X. ((\neg (yRx)) \vee (y = x))$.

מינימום: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס ותהא $X \subseteq A$ אזי $x \in X$ עבורו $\forall y \in X. ((xRy) \vee (y = x))$.

טענה: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס תהא $X \subseteq A$ ויהיו $x, y \in X$ מינימומים של X אזי $x = y$.

סימון: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס תהא $X \subseteq A$ ויהי $x \in X$ המינימום של X אזי $\min_R(X) = x$.

חסם עליון/מלעיל: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס ותהא $X \subseteq A$ אזי $a \in A$ עבורו $\forall x \in X. ((yRa) \vee (y = x))$.

סופרמום: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס ותהא $X \subseteq A$ אזי $a \in A$ חסם מלעיל של X עבורו לכל $b \in A$ חסם מלעיל מתקיים $(aRb) \vee (a = b)$.

טענה: תהא A קבוצה יהי $R \subseteq A^2$ יחס תהא $X \subseteq A$ ויהיו $x, y \in X$ סופרמומים של X אזי $x = y$.

סימון: תהא A קבוצה יהי $R\subseteq A^2$ יחס תהא $X\subseteq A$ ויהי $x\in X$ הסופרמום של X אזי $\sup_R(X)=x$.

חסם תחתון/מלרע: תהא A קבוצה יהי $R\subseteq A^2$ יחס ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו $\forall x\in X.((aRy)\vee(y=x))$.

אינפימום: תהא A קבוצה יהי $R\subseteq A^2$ יחס ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ חסם מלרע של X עבורו לכל $b\in A$ חסם מלרע מתקיים $(bRa)\vee(a=b)$.

טענה: תהא A קבוצה יהי $R\subseteq A^2$ יחס תהא $X\subseteq A$ ויהיו $x,y\in X$ אינפימומים של X אזי $x=y$.

סימון: תהא A קבוצה יהי $R\subseteq A^2$ יחס תהא $X\subseteq A$ ויהי $x\in X$ האינפימום של X אזי $\inf_R(X)=x$.

משפט שלמות הממשיים: תהא $X\subseteq\mathbb{R}$ באשר $X\neq\varnothing$ אזי

- (קיים ל־X חסם מלעיל)$\Longleftarrow$(קיים ל־X סופרמום).
- (קיים ל־X חסם מלרע)$\Longleftarrow$(קיים ל־X אינפימום).

הומומורפיזם/פונקציה שומרת סדר: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ יחסים אזי פונקציה $f:A\to B$ עבורה $\forall a,b\in A.((aRb)\Longleftrightarrow(f(a)Sf(b)))$.

טענה: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle,\langle C,T\rangle$ יחסים תהא $f:A\to B$ פונקציה שומרת סדר ותהא $g:B\to C$ פונקציה שומרת סדר אזי $g\circ f$ פונקציה שומרת סדר.

איזומורפיזם: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ יחסים אזי פונקציה $f:A\to B$ באשר f הומומורפיזם וזיווג.

סימון: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ יחסים עבום קיים איזומורפיזם $f:A\to B$ אזי $\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$.

יחס סדר טוב: יחס $\langle A,R\rangle$ עבורו R יחס סדר חזק קווי וכן לכל $\varnothing\neq X\subseteq A$ קיים מינימום.

אינדוקציה טרנספיניטית: יהי $\langle A,R\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $P(x)$ פרדיקט אזי $(P(\min(A))\wedge(\forall a,b\in A.(P(a)\wedge aRb)\Longrightarrow P(b)))\Longrightarrow(\forall a\in A.P(a))$.

קבוצה טרנזיטיבית: קבוצה A עבורה $\forall B\in A.\forall x\in B.x\in A$.

סודר: קבוצה α עבורה α טרנזיטיביות וכן $\langle\alpha,\in\rangle$ יחס סדר טוב.

סודר עוקב: יהי α סודר אזי $S(\alpha)=\alpha\cup\{\alpha\}$.

טענה: יהי α סודר אזי $S(\alpha)$ סודר.

מסקנה: יהי α סודר אזי $\alpha\in S(\alpha)$.

סודר גבולי: סודר α עבורו לכל סודר β מתקיים $S(\beta)\neq\alpha$.

סימון: $0=\varnothing$.

סימון: $n+1=S(n)$.

סודר סופי: סודר α עבורו קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $\alpha=n$.

סימון: $\omega=\mathbb{N}$.

טענה: ω סודר גבולי.

טיפוס סדר: יהי $\langle A,R\rangle$ יחס סדר טוב אזי סודר α עבורו $\langle\alpha,\in\rangle\cong\langle A,R\rangle$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ יחס סדר טוב ויהיו α,β טיפוסי סדר אזי $\langle\alpha,\in\rangle\cong\langle\beta,\in\rangle$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ יחס סדר טוב אזי טיפוס הסדר של $\langle A,R\rangle$ הוא $\operatorname{ord}(A,R)$.

טענה: תהא A קבוצה של סודרים אזי $\bigcap A$ סודר.

טענה: תהא A קבוצה של סודרים אזי $\min_{\subseteq}(A)=\bigcap A$.

עוצמה: תהא A קבוצה אזי $|A|=\min_{\subseteq}\{\operatorname{ord}(A,R)\mid A \text{ יחס סדר טוב על } R\}$.

הגדרה אקסיומת הבחירה: $\forall A.(\forall X\in A.X\neq\varnothing)\Longrightarrow(\exists F:A\to\bigcup A.\forall X\in A.F(X)\in X)$. זוהי לא טענה

הגדרה עיקרון הסדר הטוב: לכל קבוצה A קיים סדר טוב R על A. זוהי לא טענה

קבוצות חופפות בחלקים: קבוצות $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיימות $X_1,\ldots X_k,Y_1,\ldots,Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ באשר $X=X_1\uplus\ldots\uplus X_k$ וכן $Y=Y_1\uplus\ldots\uplus Y_k$ וקיימות איזומטריות $\varphi_1,\ldots,\varphi_k$ עבורן $\forall 1\leq j\leq k.Y_j=\varphi_jX_j$.

הגדרה פרדוקס בנך טרסקי: תהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\operatorname{int}(X),\operatorname{int}(Y)\neq\varnothing$ אזי X,Y חופפות בחלקים. זוהי לא טענה

טענה: (אקסיומת הבחירה)$\equiv$(עיקרון הסדר הטוב)$\equiv$(פרדוקס בנך טרסקי).

כדור: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ תהא $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r>0$ אזי $B_r^n(a)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\sum_{i=1}^n(x_i-a_i)^2<r^2\right\}$.

מסקנה: (אקסיומת הבחירה)$\Longleftarrow$($B_1^3(0),B_2^3(0)$ חופפות בחלקים).

שרשרת: יהי $\langle\Sigma,R\rangle$ יחס אזי $C\subseteq\Sigma$ עבורה $\langle C,R\rangle$ יחס לינארי.

הגדרה הלמה של צורן: יהי $\langle \Sigma, R \rangle$ יחס סדר באשר $\Sigma \neq \varnothing$ וכן לכל שרשרת $X \subseteq \Sigma$ יש חסם עליון אזי קיים איבר מקסימלי ב־Σ.

זוהי לא טענה

טענה: (אקסיומת הבחירה)$\equiv$(הלמה של צורן).

מסקנה: (אקסיומת הבחירה)$\Longleftarrow$($\forall A, B. |A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|$).