קטע/אינטרוול: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$

- $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$.
- $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$.
- $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$.
- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$.
- $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$.
- $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$.
- $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$.
- $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}$.
- $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

שדה סדור: שדה $\mathbb{F}$ ויחס סדר חזק $<$ על $\mathbb{F}$ המקיים

- טריכוטומיה/לינאריות: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\,(x<y)\vee(x>y)\vee(x=y)$.
- קומפטביליות עם חיבור: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}.x<y\Longrightarrow x+z<y+z$.
- קומפטביליות עם כפל: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\forall z>0_{\mathbb{F}}.x<y\Longrightarrow x\cdot z<y\cdot z$.

תכונת ארכימדס: $\forall x\in\mathbb{F}.\exists n\in\mathbb{N}.x<\sum_{i=0}^{n}1$.

טענה: $\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ארכימדס.

הערך השלם/ערך שלם תחתון: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lfloor x\rfloor=[x]=\max\left(n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\right)$.

הערך השברי: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\{x\}=x-[x]$.

ערך שלם עליון: $\lceil x\rceil=\min\left(n\in\mathbb{Z}\mid x\le n\right)$.

טענה: $\nexists q\in\mathbb{Q}.q^2=2$.

טענה: $\nexists x\in\mathbb{Q}.\forall a\in\left\{y\in\mathbb{Q}.y^2\le 2\right\}.\forall b\in\left\{y\in\mathbb{Q}_+\mid y^2\ge 2\right\}.a\le x\le b$.

חסם מלעיל: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

קבוצת החסמים מלעיל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A$ חסם מלעיל של $x\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\overline{B}_A\neq\varnothing$.

חסם מלרע: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

קבוצת החסמים מלרע: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\underline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A$ חסם מלרע של $x\}$.

קבוצה חסומה מלרע: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\underline{B}_A\neq\varnothing$.

קבוצה חסומה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת (חסומה מלעיל)$\wedge$(חסומה מלרע).

מקסימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

סימון: המקסימום של A הוא $\max\left(A\right)$.

מינימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

סימון: המינימום של A הוא $\min\left(A\right)$.

אקסיומת השלמות: יהיו $\varnothing\neq X,Y\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le y)\Longrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le c\le y)$.

טענה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\overline{B}_A\neq\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\min\left(\overline{B}_A\right)$.

מסקנה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\backslash\{\varnothing\}.\left(\underline{B}_A\neq\varnothing\right)\Longrightarrow\exists\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: $\mathbb{R}$ הוא השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את $\mathbb{Q}$.

סופרמום/חסם עליון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\sup\left(A\right)=\min\left(\overline{B}_A\right)$.

אינפימום/חסם תחתון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(A\right)=\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(\exists\max\left(A\right)\Longrightarrow\sup\left(A\right)=\max\left(A\right))\wedge(\exists\min\left(A\right)\Longrightarrow\inf\left(A\right)=\min\left(A\right))$.

טענה: יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ אזי $\inf\left(a,b\right)=a\wedge\sup\left(a,b\right)=b$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b\in\mathbb{R}$ חסם מלעיל של A התב"ש

- $b=\sup\left(A\right)$.
- $\forall d\in\overline{B}_A.b\le d$.
- $\forall a\in\mathbb{R}.a<b\Longrightarrow a\notin\overline{B}_A$.

מסקנה: תהא $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\sup\left(A\right)-\varepsilon<a\le\sup\left(A\right)$.

מסקנה: תהא $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $b=\sup(A) \iff (\forall x\in A.x\leq b)\wedge(\forall\varepsilon>0.\exists x\in A.x>b-\varepsilon)$.

טענה: תהיינה $\varnothing \neq A,B\subseteq\mathbb{R}$ חסומות

- $\inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)$.
- $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.
- $\sup(-A)=-\inf(A)$.

טענה: $\forall c\in\mathbb{R}_+.\exists b\in\mathbb{R}_+.b^2=c$.

טענה: $\forall c\in\mathbb{R}_+.\forall n\in\mathbb{N}.\exists b\in\mathbb{R}_+.b^n=c$.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\,|b-a|<\varepsilon$.

טענה: תהא $S\subseteq\mathbb{R}$ אזי (S צפופה ב־$\mathbb{R}$) $\iff$ ($\forall a,b\in\mathbb{R}.a<b\implies(a,b)\cap S\neq\varnothing$).

טענה: $\forall a,b\in\mathbb{Q}.a<b\implies|(a,b)\cap\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

טענה: $\forall a,b\in\mathbb{Q}.a<b\implies\exists r\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.a<r<b$.

טענה: $\forall x,y\in\mathbb{R}.x<y\implies\exists q\in\mathbb{Q}.x<q<y$.

מסקנה: ($\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$)$\wedge$(לכל $a<b$ מתקיים כי $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$).

עצרת: יהי $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $n!=\begin{cases}1 & n=0\\(n-1)!\cdot n & else\end{cases}$.

בחר: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

זהות פסקל: יהי $n,k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$.

למה: יהיו $a_1\ldots a_n\geq0$ המקיימים $\prod_{i=1}^{n}a_i=1$ אזי $\sum_{i=1}^{n}a_i\geq n$.

אי־שיוויון הממוצעים: יהיו $a_1\ldots a_n>0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\geq\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$.

טענה: $(a_1=\ldots=a_n)\iff\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\right)$.

אי־שיוויון ברנולי: $\forall x>-1.\forall n\in\mathbb{N}.\,(1+x)^n\geq1+nx$.

אי־שיוויון ברנולי המוכלל: $\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in\mathbb{R}^n.\,\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

הערך המוחלט: $|x|=\begin{cases}x & x\geq0\\-x & x<0\end{cases}$.

טענה: $(|a|\leq b\iff-b\leq a\leq b)\wedge(|a|\geq b\iff(b\leq a)\vee(a\leq-b))$.

אי־שיוויון המשולש (אש"מ): יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $|a+b|\leq|a|+|b|$.

אי־שיוויון המשולש המוכלל: יהיו $x_1\ldots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $|a-b|\leq|a|+|b|$.

מסקנה: יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$ אזי $|x-y|\leq|x-z|+|z-y|$.

אי־שיוויון המשולש ההפוך: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $||a|-|b||\leq|a-b|$.

טענה: $\forall a,b\in\mathbb{R}.\,(\forall\varepsilon>0.\,|a-b|<\varepsilon)\implies a=b$.

טענה: יהי $r\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sum_{i=0}^{n}r^i=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

סדרה: $a\in\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

סימון: תהא a סדרה אזי $a_n=a(n)$, $a=(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

הגדרה: תהא a_n סדרה

- סדרה חיובית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n>0$.
- סדרה אי שלילית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\geq0$.
- סדרה שלילית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n<0$.
- סדרה אי חיובית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\leq0$.

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה

- עולה ממש: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\implies a_n<a_m$.
- עולה: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\implies a_n\leq a_m$.
- יורדת ממש: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\implies a_n>a_m$.

- יורדת: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\Longrightarrow a_n\geq a_m$.

סדרה חסומה מלעיל: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.a_n<M$.

סדרה חסומה מלרע: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.M<a_n$.

סדרה חסומה: (חסומה מלרע)$\wedge$(חסומה מלעיל).

סדרה מתכנסת/גבול סופי: תהא a סדרה אזי $(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_n-L\right|<\varepsilon)\Longleftrightarrow(\lim_{n\to\infty}a_n=L)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L\right)\Longleftrightarrow(a_n\to L)$.

טענה: $\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)\wedge(\forall r\in\mathbb{R}.\lim_{n\to\infty}r=r)$.

טענה: $\left(\forall q\in(0,1).q^n\to0\right)\wedge(\forall c>0.\sqrt[n]{c}\to1)\wedge(\sqrt[n]{n}\to1)\wedge\left(\forall\alpha\in\mathbb{Q}_+.\frac{1}{n^\alpha}\to0\right)$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L_1)\wedge(\lim_{n\to\infty}a_n=L_2)\Longrightarrow L_1=L_2$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L)\Longrightarrow(\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|L\right|)$.

טענה: תהא a סדרה אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=0)\Longleftrightarrow(\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=0)$.

טענה: תהיינה a,b סדרות עבורן $\left|\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\neq b_n\}\right|\in\mathbb{N}$ אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L)\Longleftrightarrow(\lim_{n\to\infty}b_n=L)$.

טענה: תהא a סדרה נגדיר $b_{n+k}=a_n$ אזי $(\lim_{n\to\infty}a_n=L)\Longleftrightarrow(\lim_{n\to\infty}b_n=L)$.

סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה

- $(\lim_{n\to\infty}a_n=\infty)\Longleftrightarrow(\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.M<a_n)$.
- $(\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty)\Longleftrightarrow(\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n<-M)$.

טענה: $(\lim_{n\to\infty}n=\infty)\wedge(\forall a>1.\lim_{n\to\infty}a^n=\infty)$.

טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי a חסומה.

מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.

טענה: תהא a סדרה אזי $(\forall\varepsilon>0.\left|\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\notin(L-\varepsilon,L+\varepsilon)\}\right|\in\mathbb{N})\Longleftrightarrow(\lim_{n\to\infty}a_n=L)$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $\forall r\in(0,\left|L\right|).\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_n\right|>r$.

סימון: תהא a סדרה מונוטונית

- a יורדת ממש אזי $(a_n\to L)\Longleftrightarrow(a_n\downarrow L)$.
- a עולה ממש אזי $(a_n\to L)\Longleftrightarrow(a_n\uparrow L)$.
- a יורדת אזי $(a_n\to L)\Longleftrightarrow(a_n\searrow L)$.
- a עולה אזי $(a_n\to L)\Longleftrightarrow(a_n\nearrow L)$.

טענה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיימות סדרות $a,b\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ עבורן $(a_n\searrow x)\wedge(b_n\nearrow x)$.

ייצוג עשרוני: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי קיים $a\in\{0,\ldots,9\}^{\mathbb{Z}}$ המקיים $x=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_i\cdot10^{-i}$.

פיתוח מחזורי אינסופי: יהיו $d_1\ldots d_n$ אזי $\overline{d_1\ldots d_n}=d_1\ldots d_nd_1\ldots d_n\ldots$.

טענה: יהי $q\in\mathbb{R}$ אזי $\left(q=a.a_1\ldots a_n\overline{b_1\ldots b_\ell}\right)\Longleftrightarrow(q\in\mathbb{Q})$.

משפט אוקלידס: $\mathbb{P}$ חסומה מלרע אך לא מלעיל.

סדרות אוקלידס־מולין: יהי $p_1\in\mathbb{P}$ נגדיר $p_n\in\left\{p\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_i\right)\right\}$.

טענה: עבור $p_1=2$ ועבור p_n מינימלי לא ידוע אם $\mathrm{Im}\,(p)=\mathbb{P}$.

משפט דריכלה: $\forall\theta\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\left|\left\{\langle p,q\rangle\in\mathbb{Q}\times\mathbb{N}\mid\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\right\}\right|\geq\aleph_0$.

מספר מקורב רע: $a\in\mathbb{R}$ המקיים $\left(\exists c\in\mathbb{R}.\frac{c}{q^2}<\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\right)\Longleftarrow\left(\left|\theta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}\right)$ $\forall p\in\mathbb{Q}.\forall q\in\mathbb{N}.$

חשבון גבולות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהיינה $(a_n),(b_n)$ סדרות המקיימות $(a_n\to a)\wedge(b_n\to b)$

- $a_n+b_n\to a+b$.
- $a_n\cdot b_n\to a\cdot b$.
- $(b\neq0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.b_n\neq0)\Longrightarrow\left(\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}\right)$.

למה: תהא d_n סדרה המקיימת $\forall n\in\mathbb{N}.d_n\geq0$ אזי $(d_n\to d)\Longrightarrow(d\geq0)$.

טענה: תהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n\to L$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[k]{a_n}\to\sqrt[k]{L}$.

סימון: יהיו a_n,b_n סדרות

- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_n\leq b_n)\Longrightarrow(a_n\preccurlyeq b_n)$.
- $(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_n<b_n)\Longrightarrow(a_n\prec b_n)$.

מונוטוניות גבולות: תהיינה a_n,b_n סדרות מתכנסות אזי $(a_n\preccurlyeq b_n)\implies(\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}b_n)$.

משפט הסנדוויץ': תהיינה a_n,b_n,c_n סדרות המקיימות $a_n\preccurlyeq b_n\preccurlyeq c_n$ אזי $(a_n,c_n\to L)\implies(b_n\to L)$.

טענה: תהא a_n סדרה חסומה ותהא b_n סדרה המקיימת $b_n\to 0$ אזי $a_nb_n\to 0$.

מסקנה: תהא a_n סדרה חסומה אזי $\frac{a_n}{n}\to 0$.

משפט: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\exists b\in B^{\mathbb{N}}.b_n\to\sup(B)$.

מסקנה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי $\exists b\in B^{\mathbb{N}}.b_n\to\inf(B)$.

טענה: תהיינה a_n,b_n סדרות

- $(a_n\to\infty)\wedge(a_n\preccurlyeq b_n)\implies(b_n\to\infty)$.
- $(a_n\to-\infty)\wedge(b_n\preccurlyeq a_n)\implies(b_n\to-\infty)$.

מבחן השורש: תהא a_n סדרה אי שלילית אזי $(\exists\alpha\in[0,1).a_n\prec\alpha^n)\implies(a_n\to 0)$.

מבחן השורש הגבולי: יהי $p\in\mathbb{R}$ ותהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n^{\frac{1}{n}}\to p$

- $0\le p<1\implies a_n\to 0$.
- $p>1\implies a_n\to\infty$.

סימון: תהא a_n סדרה חסומה מלעיל אזי $(\sup(a_n)=\sup(\operatorname{Im}(a)))\wedge(\inf(a_n)=\inf(\operatorname{Im}(a)))$.

משפט: תהא a_n סדרה

- אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי $a_n\nearrow\sup(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי $a_n\nearrow\infty$.
- אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי $a_n\searrow\inf(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי $a_n\searrow-\infty$.

מבחן המנה הגבולי: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L$

- $(L<1)\implies(a_n\to 0)$.
- $(L>1)\implies(a_n\to\infty)$.

התכנסות צ'זארו: תהא a_n סדרה אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא a_n סדרה המקיימת $a_n\to a$ במובן הרחב אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

משפט התכנסות ממוצע הנדסי: תהא a_n סדרה חיובית המקיימת $a_n\to a$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}a_i}\to a$.

משפט ד'אלאמבר: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to c$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{a_n}\to c$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $a\to L$ במובן הרחב ותהא $t\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=1}^{n}t_k\to\infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^{n}t_ka_k}{\sum_{k=1}^{n}t_k}\to L$.

משפט שטולץ: תהא a סדרה ותהא $b\uparrow\infty$ סדרה נניח כי $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\to L$ במובן הרחב אזי $\frac{a_n}{b_n}\to L$.

טענה: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

מסקנה: $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in(2,3]$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $a_n\to\infty$ אזי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\to e$.

תת סדרה/סדרה חלקית (ת"ס): תהא a סדרה ותהא $n\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה אזי $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$.

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה

- a חסומה מלעיל $\Longleftarrow$ b חסומה מלעיל.
- a חסומה מלרע $\Longleftarrow$ b חסומה מלרע.
- $a\to L\implies b\to L$.
- a מונוטונית $\Longleftarrow$ b מונוטונית.

טענה: תהא a סדרה המקיימת $\nexists\max(a)$ אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

טענה: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מונוטונית.

הלמה של קנטור על קטעים מקוננים: תהיינה a,b סדרות המקיימות $b-a\to 0$ וגם $\forall n\in\mathbb{N}.(a_n\le b_n)\wedge([a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n])$ אזי $\left|\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n,b_n]\right|=1$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C}=[0,1]\backslash\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

סימון: $\mathbb{R}_\infty=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$.

גבול חלקי: תהא a סדרה אזי $x \in \mathbb{R}_\infty$ עבורו קיימת תת סדרה b עבורה $b \to x$ במובן הרחב.

סימון: תהא a סדרה אזי $\mathcal{P}(a) = \{L \in \mathbb{R} \mid L \text{ גבול חלקי של } a\}$, $\widehat{\mathcal{P}}(a) = \{L \in \mathbb{R}_\infty \mid L \text{ גבול חלקי של } a\}$.

טענה: תהא a סדרה

- a אינה חסומה מלעיל $\iff \infty \in \widehat{\mathcal{P}}$.
- a אינה חסומה מלרע $\iff -\infty \in \widehat{\mathcal{P}}$.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left|\widehat{\mathcal{P}}\right| > 0$.

משפט: תהא a סדרה אזי $(L \in \mathcal{P}) \iff (\forall \varepsilon > 0. |\{a_n \mid |a_n - L| < \varepsilon\}| = \aleph_0)$.

מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי $\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \subseteq [\inf(a), \sup(a)]$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim(\sup(a)) = \overline{\lim}(a) = \sup(\mathcal{P})$, $\lim(\inf(a)) = \underline{\lim}(a) = \sup(\mathcal{P})$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת) $\iff \left(\left|\widehat{\mathcal{P}}\right| = 1\right) \wedge \left(\widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}\right)$.

משפט: תהא a סדרה חסומה אזי $\exists \min(\mathcal{P}), \max(\mathcal{P})$.

טענה: יהיו $b_1 \dots b_m \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ זרות בזוגות המקיימות $(\bigcup b_i = \mathbb{N}) \wedge (b_i \uparrow \infty)$ ותהא a סדרה אזי $\widehat{\mathcal{P}}(a) = \bigcup_{i=1}^m \widehat{\mathcal{P}}(a_{b_i})$.

קבוצה פתוחה: $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $\forall x \in A. \exists \varepsilon > 0. (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$.

טענה: תהיינה $A_1, A_2, \dots$ סדרת קבוצות פתוחות אזי ($\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ פתוחה)$\wedge$($\bigcap_{i=1}^n A_i$ פתוחה).

קבוצה סגורה: $B \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $\mathbb{R} \backslash B$ פתוחה.

טענה: תהיינה $B_1, B_2, \dots$ סדרת קבוצות סגורות אזי ($\bigcup_{i=1}^n B_i$ סגורה)$\wedge$($\bigcap_{i=1}^\infty B_i$ סגורה).

נקודת הצטברות: תהא $S \subseteq \mathbb{R}$ אזי $x \in \mathbb{R}$ המקיימת $\exists a \in (S \backslash \{x\})^\mathbb{N}. \lim_{n\to\infty} a_n = x$.

טענה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ התב"ש

- B קבוצה סגורה.
- $\forall a \in B^\mathbb{N}. \lim_{n\to\infty} a_n \in B$.
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ נקודת הצטברות של } B\} \subseteq B$.

משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים $\mathcal{P}(a)$ קבוצה סגורה.

כמעט תמיד: פרידקט $P(n)$ המקיים $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. P(n)$.

שכיח: פרידקט $P(n)$ המקיים $|\{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}| = \aleph_0$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\iff(\limsup a = \liminf a)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L \in [-\infty, \infty]$

- $(\limsup a \leq L) \implies (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. a_n \leq L)$.
- $(\limsup a \geq L) \implies (\forall N \in \mathbb{N}. \exists n > N. a_n \geq L)$.
- $(\liminf a \geq L) \implies (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N. a_n \geq L)$.
- $(\liminf a \geq L) \implies (\forall N \in \mathbb{N}. \exists n > N. a_n \leq L)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$ התב"ש

- $\limsup a = L$.
- $(\forall \varepsilon > 0. \forall N \in \mathbb{N}. \exists n \geq N. a_n > L - \varepsilon) \wedge (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n < L + \varepsilon)\ \forall \varepsilon > 0.$

משפט: תהיינה a, b סדרות המקיימות $a_n \preccurlyeq b_n$ אזי $(\liminf a \leq \liminf b) \wedge (\limsup a \leq \limsup b)$.

סדרת קושי: סדרה a המקיימת $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall m, n \geq N. |a_m - a_n| < \varepsilon$.

למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)$\iff$(a סדרת קושי).

סכום אינסופי: יהי $k \in \mathbb{Z}$ אזי $\sum_{i=k}^\infty a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=k}^n a_i$.

טור: תהא a סדרה אזי $\sum_{i=0}^\infty a_i$.

סימון: יהי $\sum_{n=0}^\infty a_n$ טור אזי $\sum a_n = \sum_{n=0}^\infty a_n$.

סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרה אזי $S_n^a = \sum_{i=0}^n a_i$.

טור מתכנס: תהא a סדרה אזי $(\sum_{i=0}^\infty a_i = L) \implies (S_n^a \to L)$.

טור גאומטרי: יהי $a \neq 0$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^\infty ar^n$.

משפט: יהי $r \in \mathbb{R}$ אזי ($\sum_{n=0}^\infty ar^n$ מתכנס)$\iff(|r| < 1)$.

הטור ההרמוני: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$.

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty$.

משפט: תהא a סדרה אזי ($\sum_{i=0}^{\infty}a_n$ מתכנס)$\Longleftarrow(a_n\to 0)$.

קריטריון קושי: יהי $\sum a_n$ טור אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m>N.\forall k\in\mathbb{N}.\left|\sum_{n=m}^{m+k}a_n\right|<\varepsilon\right)$.

חשבון טורים: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ טורים ויהי $\xi\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

- $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס.
- $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\xi a_n$ מתכנס.

הגדרה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור

- טור חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n>0$.
- טור אי שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\geq 0$.
- טור שלילי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n<0$.
- טור אי חיובי: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\leq 0$.

טור מתכנס בהחלט: טור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ המקיים $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ טור מתכנס בהחלט אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס.

סימון: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים חיוביים עבורם ממקום מסויים $a_n\leq b_n$ אזי $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$.

משפט ההשוואה: יהיו $\sum a_n,\sum b_n$ טורים המקיימים $\sum a_n\preccurlyeq\sum b_n$

- ($\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר)$\Longleftarrow$($\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתבדר).

מבחן ההשוואה הגבולי: יהיו a_n,b_n סדרות חיוביות המקיימות $\frac{a_n}{b_n}\to L$ במובן הרחב

- $L\in(0,\infty)\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\iff\sum a_n<\infty\right)$.
- $L=0\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\Longrightarrow\sum a_n<\infty\right)$.
- $L=\infty\Longrightarrow\left(\sum b_n<\infty\Longleftarrow\sum a_n<\infty\right)$.

מבחן השורש: יהי $\sum a_n$ טור אי שלילי (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $a_n^{\frac{1}{n}}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתכנס).

מבחן השורש הגבולי: יהי $\sum a_n$ טור חיובי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)<1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)>1\right)$.

מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי

- (קיים $q\in(0,1)$ עבורו כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתכנס).
- (כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$)$\Longleftarrow$($\sum a_n$ מתבדר).

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי

- ($\sum a_n$ מתכנס)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\sup\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)<1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר)$\Longrightarrow\left(\lim\left(\inf\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)>1\right)$.

משפט העיבוי: תהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\iff$($\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $m\geq 2$ ותהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס)$\iff$($\sum m^n a_{m^n}$ מתכנס).

מסקנה: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי ($\sum\frac{1}{n^x}$ מתכנס)$\iff(x>1)$.

משפט לייבניץ: תהא $a_n\searrow 0$ אזי $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס.

טור מתכנס בתנאי: טור $\sum a_n$ מתכנס המקיים $\sum|a_n|$ מתבדר.

טענה: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=m}^{n}a_k(b_{k+1}-b_k)=(a_nb_{n+1}-a_mb_m)-\sum_{k=m+1}^{n}b_k(a_k-a_{k-1})$.

התמרת אבל: תהיינה a,b סדרות אזי $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m(b_k-b_{k+1})$.

קריטריון דריכלה: תהא $b\to 0$ סדרה מונוטונית ותהא a סדרה עבורה S_n^a חסומה אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

קריטריון אבל: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי $\sum a_nb_n$ מתכנס.

משפט: $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}=\infty$.

משפט: יהי $\sum a_n=L$ טור ותהא $\underset{b_0=0}{b\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ עולה ממש אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}a_k=L$.

למה: תהא a סדרה ותהא $b\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה ממש עבורה $b_0=0$ וכן $(a_i)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1}$ בעלי אותו סימן וגם $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1}a_k=L$ אזי $\sum a_n=L$.

משפט: יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתכנס ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.
סימון: תהא a_n סדרה אזי $\left(a_n^+ = \frac{|a_n|+a_n}{2}\right) \wedge \left(a_n^- = \frac{|a_n|-a_n}{2}\right)$.
משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בהחלט)$\Longleftrightarrow$($\sum a_n^+$ מתכנס)$\wedge$($\sum a_n^-$ מתכנס).
משפט: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.
משפט: תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בתנאי)$\Longrightarrow$ $(\sum a_n^+ = \infty = \sum a_n^-)$.
משפט רימן: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי $\forall S \in [-\infty, \infty] . \exists \sigma \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{N} . \sum a_{\sigma(n)} = S$.
טענה: יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי קיים $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג עבורו $\nexists \sum a_{\sigma(n)}$.
משפט קושי: יהיו $p, q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט אזי $\sum\sum a_{p(n)} b_{q(k)} = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.
טור חזקות: תהא a_n סדרה ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k (x-x_0)^k$.
משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט עבור $x \in (-|q|, |q|)$.
משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0,\infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס בהחלט} & x \in (-R,R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R,R] \end{cases}$.
רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.
משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.
הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי$\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty \Longrightarrow R = 0\right) \wedge \left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0 \Longrightarrow R = \infty\right)$.
מכפלת קושי: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות אזי $\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$.
טענה: יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות המתכנסים עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ מתכנס עבור q.
התכנסות צ'זארו: יהי $\sum a_n$ טור אזי $(C)\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n}$.
טענה: יהי $\sum a_n$ טור אזי $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_n \left(1 - \frac{i}{n}\right)$.
פונקציה מונוטונית: תהא $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
- עולה ממש: $\forall x,y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.
- עולה: $\forall x,y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \le f(y)$.
- יורדת ממש: $\forall x,y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.
- יורדת: $\forall x,y \in \mathbb{R} . x < y \Longrightarrow f(x) \ge f(y)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי x^n מונוטונית עולה ממש בקטע $[0,\infty)$.
טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left(f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}\right) \Longrightarrow (f(x) = x^n)$.
טענה: יהיו $n,m,k,\ell \in \mathbb{N}$ המקיימים $\frac{m}{n} = \frac{k}{\ell}$ אזי $(x^m)^{\frac{1}{n}} = \left(x^k\right)^{\frac{1}{\ell}}$.
טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהיינה $a,b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימות $a_n, b_n \searrow b$ אזי $\lim\left(c^{a_n}\right) = \lim\left(c^{b_n}\right)$.
הגדרה: יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ יהי $b \in \mathbb{R}$ ותהא $b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $b_n \searrow b$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.
- $x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$.
- $a^b = \lim a^{b_n}$.

פונקציית החזקה: יהי $\alpha > 0$ נגדיר $f \in [0,\infty)^{[0,\infty)}$ כך $f(x) = x^\alpha$.
פונקציית החזקה: יהי $\alpha < 0$ נגדיר $f \in (0,\infty)^{(0,\infty)}$ כך $f(x) = x^\alpha$.
הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.
משפט: יהיו $a,b \in \mathbb{R}$ אזי $\left(x^a x^b = x^{a+b}\right) \wedge \left((x^a)^b = x^{ab}\right) \wedge \left((yx)^a = y^a x^a\right)$.
טענה: יהי $x > 1$ ויהיו $0 < r < \ell$ אזי $x^r < x^\ell$.
טענה: יהי $0 < x < 1$ ויהיו $0 < r < \ell$ אזי $x^r > x^\ell$.
הפונקציה המעריכית: יהי $0 < \alpha \ne 1$ נגדיר $f \in (0,\infty)^{\mathbb{R}}$ כך $f(x) = a^x$.
סינוס: נגדיר $\sin : [0,2\pi] \to [-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ממול הזווית ליתר במשולש ישר זווית.
סינוס: $\forall k \in \mathbb{N} . \sin(x + 2\pi k) = \sin(x)$
קוסינוס: נגדיר $\cos : [0,2\pi] \to [-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית.
קוסינוס: $\forall k \in \mathbb{N} . \cos(x + 2\pi k) = \cos(x)$
טנגנס: נגדיר $\tan : \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ כך $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

קוטנגנס: נגדיר $\cot:\mathbb{R}\backslash\left\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ כך $\tan\left(x\right)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

טענה: זהויות טריגונומטריות.

הגדרה: $\left(\text{arccot}=\cot^{-1}\right)\wedge\left(\arctan=\tan^{-1}\right)\wedge\left(\arccos=\cos^{-1}\right)\wedge\left(\arcsin=\sin^{-1}\right)$.

לוגריתם: יהי $a>0$ נסמן $f\left(x\right)=a^{x}$ אזי $\left(f\right)^{-1}=\log_{a}$.

סימון (הלוגריתם הטבעי): $\ln=\log_{e}$.

טענה: זהויות לוגרתמיות.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\exists a\in\mathbb{R}_{+}.f\left(x+a\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה זוגית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה אי־זוגית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

קטע מנוקב/סביבה: יהי $\delta>0$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $I_{x}=\left(x-\delta,x+\delta\right)\backslash\left\{x\right\}$.

פונקציה מתכנסת/גבול סופי: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימות $a<x_{0}<b$ תהא $f:A\to\mathbb{R}$

- בנקודה: $A=I_{x_{0}}$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי מימין: $A=\left(x_{0},b\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(x_{0},\min\left\{x_{0}+\delta,b\right\}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\downarrow x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי משמאל: $A=\left(a,x_{0}\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\uparrow x_{0}\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to L\right)\right)$.
- באינסוף: $A=\left(a,\infty\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\geq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to\infty\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to\infty\right)\right)$.
- במינוס אינסוף: $A=\left(-\infty,b\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\leq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_{n}\to-\infty\right)\Longrightarrow\left(f\left(y_{n}\right)\to-\infty\right)\right)$.

פונקציה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימות $a<x_{0}<b$

- בנקודה: תהא $f:I_{x_{0}}\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_{0}}.f\left(x\right)<-M\right)$.
- חד צדדי מימין: תהא $f:\left(x_{0},b\right)\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0},\min\left\{x_{0}+\delta,b\right\}\right).f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{+}}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0},\min\left\{x_{0}+\delta,b\right\}\right).f\left(x\right)<-M\right)$.
- חד צדדי משמאל: תהא $f:\left(a,x_{0}\right)\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to x_{0}^{-}}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).f\left(x\right)<-M\right)$.
- באינסוף: תהא $f:\left(a,\infty\right)\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\geq\delta.f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\geq\delta.f\left(x\right)<-M\right)$.
- במינוס אינסוף: תהא $f:\left(-\infty,b\right)\to\mathbb{R}$
  - $\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\leq\delta.f\left(x\right)>M\right)$.
  - $\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\leq\delta.f\left(x\right)<-M\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A^{\pm}=A\cup\left\{x_{0}^{+}\mid x_{0}\in A\right\}\cup\left\{x_{0}^{-}\mid x_{0}\in A\right\}$.

סימון: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}_{\infty}^{\pm}$ ותהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(f\left(x\right)\xrightarrow[x\to x_{0}]{}L\right)$ במובן הרחב.

משפט: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $(\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1)\wedge(\lim_{x\to x_0} f(x)=L_2)\Longrightarrow(L_1=L_2)$.

טענה: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)\Longleftrightarrow(\lim_{x\to x_0} f(x)=L)$.

פונקציית דריכלה: $D(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

חשבון גבולות: יהי $x_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ויהיו $f,g:I_{x_0}\to\mathbb{R}$

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$.
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x)$.

למה: יהי $x_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ אזי $\lim_{x\to x_0} x=x_0$.

מסקנה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^\pm$ ויהי $p\in\mathbb{R}[x]$ אזי $\lim_{x\to x_0} p(x)=p(x_0)$.

משפט: יהיו $x_0,y_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $g\in\mathbb{R}^{I_{y_0}}$ וכן $f\in I_{y_0}^{I_{x_0}}$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ אזי $\lim\limits_{x\to y_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))$.

טענה: יהיו $x_0,y_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $g,f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=y_0$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g\left(\lim\limits_{x\to y_0} f(x)\right)$.

פונקציה אלמנטרית: הרכבה/סכום/כפל/הופכית של $\left(\bigcup\{\{\log_a(x),a^x\}\mid a>0\}\right)\cup\mathbb{R}[x]\cup\{\sin,\cos\}\cup\{x^a\mid a\in\mathbb{R}\}$.

טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי $\forall a\in\text{Dom}(f).\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

משפט: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $|\sin(x)|\le|x|$.

למה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^\pm$ אזי $\lim_{x\to x_0}\cos(x)=\cos(x_0)$.

מסקנה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^\pm$ אזי $\lim_{x\to x_0}\sin(x)=\sin(x_0)$.

סימון: יהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ המקיימות $\forall x\in I.f(x)\le g(x)$ אזי $f(x)\preccurlyeq g(x)$.

מונוטוניות גבולות: יהי $x_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $f,g:\mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x)\preccurlyeq g(x)$ אזי $\lim_{x\to x_0} f(x)\le\lim_{x\to x_0} g(x)$.

כלל הסנדוויץ': יהי $x_0\in\mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $f,g,h:\mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x)\preccurlyeq g(x)\preccurlyeq h(x)$ אזי $\left(f(x),h(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L\right)\Longrightarrow\left(g(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L\right)$ במובן הרחב.

למה: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$.

רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$

- רציפות בנקודה: $x_0\in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית מימין בנקודה: $x_0\in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית משמאל בנקודה: $x_0\in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

פונקציה רציפה: $f:I\to\mathbb{R}$ המקיימת

- קושי: $\forall x_0\in I.\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
- היינה: $\forall x_0\in I.\forall y\in I^\mathbb{N}.(y_n\to x_0)\Longrightarrow(\lim_{n\to\infty} f(y_n)=f(x_0))$.

פתוחה יחסית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $B\subseteq A$ המקיימת $\forall x\in B.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap A\subseteq B$.

משפט: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על I)$\Longleftrightarrow$(לכל $B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה $f^{-1}[B]$ פתוחה יחסית אל I).

טענה: תהא $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ותהא $c\in(a,b)$ אזי (f רציפה על a)$\Longleftrightarrow$($f_{\restriction_{(a,c]}}$ רציפה על c)$\wedge$($f_{\restriction_{[c,b)}}$ רציפה על c).

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $C(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\mid f\text{ רציפה על } I\right\}$.

טענה: תהא $f\in C((a,b))$ רציפה מונוטונית עולה

- ($f[(a,b)]$ חסומה מלעיל)$\Longleftarrow(\lim_{x\to b^-} f(x)=\sup f[(a,b)])$.
- ($f[(a,b)]$ אינה חסומה מלעיל)$\Longleftarrow(\lim_{x\to b^-} f(x)=\infty)$.
- ($f[(a,b)]$ חסומה מלרע)$\Longleftarrow(\lim_{x\to b^-} f(x)=\inf f[(a,b)])$.
- ($f[(a,b)]$ חסומה אינה מלרע)$\Longleftarrow(\lim_{x\to b^-} f(x)=-\infty)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ רציפה על x_0 המקיימת $f(x_0)>0$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $\forall x\in I.f(x)>0$.

מסקנה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ רציפות על x_0 המקיימות $f(x_0)>g(x_0)$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $\forall x\in I.f(x)>g(x)$.

טענה: יהיו $f,g\in C(\mathbb{R})$ אזי $(\forall q\in\mathbb{Q}.f(q)=g(q))\Longrightarrow(\forall x\in\mathbb{R}.f(x)=g(x))$.

נקודת אי־רציפות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $x_0\in I$ המקיימת

- סליקה: $\lim_{x\to x_0} f(x)\ne f(x_0)$.
- סוג ראשון/קפיצה: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)\ne\lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

- סוג שני: $\left(\nexists\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)\right)\vee\left(\nexists\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)\right)$.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על x_0)$\iff\left(\forall y\in\mathbb{N}^I.\left(y_n\to x_0\right)\implies\left(\lim f\left(y_n\right)\in\mathbb{R}\right)\right)$.

פונקציית רימן: $R\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \exists p,q\in\mathbb{Z}.\left(\gcd\left(p,q\right)=1\right)\wedge\left(x=\frac{p}{q}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

טענה: $\left(\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}R\left(x\right)=0\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.R\left(x\right)=R\left(x+1\right)\right)$.

חשבון רציפות: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}$ ויהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ רציפות על x_0 אזי $f+g,f\cdot g,f^g$ רציפות על x_0.

טענה: תהא $f:A\to B$ רציפה על x_0 וכן $g:B\to C$ רציפה על $f\left(x_0\right)$ אזי $g\circ f$ רציפה על x_0.

מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה וכן $g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\lim_{x\to x_0}f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\lim_{x\to x_0}g\left(x\right)\right)$.

פונקציה רציונאלית: יהיו $p,q\in\mathbb{R}\left[x\right]$ אזי $\frac{p}{q}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי כמות נקודות האי־רציפות לכל היותר בת מנייה.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\forall x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)\implies\left(\exists x_0\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\right)$.

משפט וויירשטראס הראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

משפט וויירשטראס השני: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\exists\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)$.

משפט ערך הביניים: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\forall y\in\left(\min\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right),\max\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right)\right).\exists c\in\left(a,b\right).f\left(c\right)=y$.

למה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$ אזי $\exists\zeta\in\left[a,b\right].f\left(\zeta\right)=0$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\left(\left[a,b\right]\right)=\left[\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)\right]$.

קטע מוכלל: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x,y\in A.\forall\lambda\in\left[0,1\right].\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\in A$.

למה: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ חח"ע אזי f מונוטונית ממש.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\wedge\left(f^{-1}\in C\left(f\left(I\right)\right)\right)$.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\iff\left(f\in C\left(I\right)\right)$.

מסקנה: יהי $a>0$ אזי $x^a,a^x\in C\left(\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $a_n\to a>0$ סדרה חיובית וכן $b_n\to b$ סדרה אזי $a_n^{b_n}\to a^b$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{odd}$ ויהי $p\in\mathbb{R}_n\left[x\right]\backslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ אזי $\exists\zeta\in\mathbb{R}.p\left(\zeta\right)=0$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{I_n\right\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $\left[a,b\right]$ קומפקטית.

פונקציה רציפה במידה שווה (במ"ש): $f\in\mathbb{R}^A$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A.\forall y\in\left(x-\delta,x+\delta\right).\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ רציפה במ"ש אזי f רציפה.

תנאי ליפשיץ: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ עבורה $\exists M>0.\forall x,y\in A.\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|<M$ אזי f רציפה במ"ש.

משפט קנטור: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f רציפה במ"ש על $\left[a,b\right]$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^A$ רציפה במ"ש על $\left(a,b\right],\left[c,d\right)$ אזי f רציפה במ"ש על $\left(a,d\right)$.

פרה־קומפקטיות: תהא $D\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^D$ רציפה במ"ש אזי $\forall x\in D^{\mathbb{N}}.\left(\lim_{n\to\infty}x_n\in\mathbb{R}\right)\implies\left(\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)\in\mathbb{R}\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right]\right)$ אזי (f רציפה במ"ש)$\iff\left(\lim_{x\to a^+}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right)\right)$ אזי (f רציפה במ"ש)$\iff\left(\lim_{x\to a^+}f\left(x\right),\lim_{x\to b^-}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[a,\infty\right)\right)$ המקיימת $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי f רציפה במ"ש על $\left[a,\infty\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ רציפה במ"ש אזי f חסומה.

מודולוס הרציפות: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\omega_f\left(\delta\right)=\sup\left\{\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\mid\left(x_1,x_2\in I\right)\wedge\left(\left|x_1-x_2\right|<\delta\right)\right\}$.

גזירות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$

- נגזרת בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית מימין בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'_+\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית משמאל בנקודה: תהא $x_0\in I$ אזי $f'_-\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

טענה: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ ותהא $x_0\in I$ אזי $f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

נגזרת: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $f':I\to\mathbb{R}$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\frac{df}{dx}\left(x\right)=\frac{d}{dx}f\left(x\right)=f'\left(x\right)$.

טענה: יהי חלקיק ותהיינה $x,v\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי $x'(t)=v(t)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_0\in I^{\pm}$ אזי (f גזירה בנקודה x_0)$\Longleftarrow$(f רציפה בנקודה x_0).

קירוב בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_0\in I$ אזי $p(x)\in\mathbb{R}_n[x]\backslash\mathbb{R}_{n-1}[x]$ המקיימת $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n}=0$.

סדר הקירוב: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ויהי $p(x)$ קירוב בנקודה x_0 אזי $\deg(p)$.

דיפרנציאבילית בנקודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $x_0\in I$ עבורה (f רציפה על x_0)$\wedge$(קיים קירוב מסדר ראשון של f בנקודה x_0).

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_0\in I$ אזי (f דיפרנציאבילית בנקודה x_0)$\Longleftrightarrow$(f גזירה בנקודה x_0).

חשבון גזירות: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות בנקודה x_0

- $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.
- $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
- $\left(\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right)\Longleftarrow(g(x_0)\neq0)$.

משפט: תהא $x_0\in I$ ותהא $f\in C(I)$ מונוטונית חזק גזירה על $f^{-1}(y_0)$ אזי $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

מסקנה: $\tan'=\frac{1}{\cos^2}$, $(e^x)'=e^x$, $(x^r)'=rx^{r-1}$, $\arctan'=\frac{1}{1+x^2}$.

כלל השרשרת: תהא $x_0\in I$ תהא $f\in C(I)$ גזירה על x_0 וכן $g\in C(f(I))$ גזירה על $f(x_0)$ אזי $(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

נגזרת מסדר גבוה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה אזי $\left(f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'\right)\wedge\left(f^{(0)}=f\right)$.

הפרש דיסקרטי: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $(\Delta f)(x)=f(x+1)-f(x)$.

הגדרה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\Delta^{(k+1)}f=\Delta\left(\Delta^{(k)}f\right)\right)\wedge\left(\Delta^{(0)}f=\Delta f\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה עבורה f' רציפה.

סימון: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(C^{0}(I)=C(I)\right)\wedge\left(C^{n}(I)=\left\{f\in C^{n-1}(I)\mid f\text{ גזירה ברציפות}\right\}\right)$.

פונקציה חלקה: תהא $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $f\in C^{\infty}(I)=\bigcap_{n=0}^{\infty}C^{n}(I)$.

כלל לייבניץ: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$.

נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$

- מקסימום: $x_0\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f(x)\le f(x_0)$.
- מינימום: $x_0\in I$ עבורה $\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f(x_0)\le f(x)$.

משפט פרמה: תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) ותהא $x_0\in(a,b)$ נקודת קיצון אזי $f'(x_0)=0$.

משפט רול: תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) המקיימת $f(a)=f(b)$ אזי $\exists c\in(a,b).f'(c)=0$.

משפט לגרנז': תהא $f\in C([a,b])$ גזירה על (a,b) אזי $\exists c\in(a,b).f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה אזי (f' חסומה)$\Longleftarrow$(f רציפה במ"ש).

טענה: $\forall x>0.e^x>1+x$.

טענה: $\forall x,y\in\mathbb{R}.\left|\sin(x)-\sin(y)\right|\le|x-y|$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f'(x)=0$ אזי $\exists a\in\mathbb{R}.f(x)=a$.

מסקנה: תהיינה $g,h\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימות $g'=h'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.g=h+c$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $f=f'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.f(x)=e^x$.

משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה $f,g\in C([a,b])$ גזירות על (a,b) אזי $\exists x_0\in(a,b).\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'(x)>0$ אזי f עולה ממש.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'(x)<0$ אזי f יורדת ממש.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה פעמיים על $x_0\in I$ ומתקיים $f'(x_0)=0$

- אם $f''(x_0)>0$ אזי x_0 מינימום מקומי של f.
- אם $f''(x_0)<0$ אזי x_0 מקסימום מקומי של f.

משפט: תהא $f\in C([a,b))$ גזירה על (a,b) המקיימת $\lim_{x\to a^+}f'(x)\in\mathbb{R}$ אזי $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}f'(x)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה ברציפות אזי $f'(x_0)>0\Longrightarrow\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).f'(x)>0$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה אזי ($f'_+(a)<0$ גורר a לא מינימום מקומי)$\wedge$($f'_-(b)>0$ גורר b לא מקסימום מקומי).

משפט דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה אזי $\forall y\in\left(\min\left(f'(a),f'(b)\right),\max\left(f'(a),f'(b)\right)\right).\exists c\in(a,b).f'(c)=y$.

כלל לופיטל: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות ותהא $x\in I_{\infty}^{\pm}$ נניח כי $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מתכנס במובן הרחב

- $(\lim_{x\to x_0}f(x)=0=\lim_{x\to x_0}g(x))\Longrightarrow\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.
- $(\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty)\Longrightarrow\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.

אי־שיוויון יאנג: יהיו $x,y>0$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ מתקיים $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy$.

אי־שיוויון הולדר: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי $\sum_{i=1}^n|x_iy_i|\leq\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

אי־שיוויון מינקובסקי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי $\left(\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^n|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא $f,g\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I^{\pm}$
- $f\in O(g)\iff(\exists c>0.\exists\delta>0.\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta).|f(x)|\leq c|g(x)|)$. אינטואיטיבית $f\leq g$
- $f\in\Omega(g)\iff(g\in O(f))$. אינטואיטיבית $f\geq g$
- $f\in o(g)\iff\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0\right)$. אינטואיטיבית $f<g$
- $f\in\omega(g)\iff(g\in o(f))$. אינטואיטיבית $f>g$
- $f\in\Theta(g)\iff(f\in O(g)\wedge f\in\Omega(g))$. אינטואיטיבית $f=g$
- $f\sim g\iff\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1\right)$. אינטואיטיבית $f=g$ בדיוק של קבועים

למה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ ותהא $x_0\in I$ אזי $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to x_0]{}c\neq0\right)\Longrightarrow f\in\Theta(g)$.

מזדהה עד סדר: $f,g\in\mathbb{R}^I$ גזירות n פעמים על x_0 המקיימות $\forall k\in\{0\ldots n\}.f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ מזדהות עד סדר n על x_0 אזי $f-g\in o((x-x_0)^n)$.

מסקנה: תהא $h\in\mathbb{R}^I$ רציפה על x_0 וכן $h\in o((x-x_0)^n)$ אזי (h גזירה n פעמים על x_0)$\wedge$($h^{(k)}(x_0)=0$).

פולינום טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $p\in\mathbb{R}_n[x]\backslash\mathbb{R}_{n-1}[x]$ שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}$ ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\left((x-x_0)^k\right)^{(j)}(x_0)=\begin{cases}j! & j=k\\ 0 & else\end{cases}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם f עד סדר n על x_0.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי פולינום הטיילור הוא $P_n(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

שארית: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$.

משפט פאנו: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x)\in o(|x-x_0|^n)$.

למה: תהא $g\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים המקיימת $\forall k\in\{0\ldots n\}.g^{(k)}(x_0)=0$ אזי $\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).g(x)=\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

משפט השארית של לגרנז': תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי $\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ אזי $\left(\exists M\in\mathbb{R}.\forall k\in\mathbb{N}.\left|f^{(k)}(x)\right|<M\right)\Longrightarrow\left(R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\right)$. $\forall x\in(a,b)$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ עבורה $\forall x\in(a,b).R_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ אזי $f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

מסקנה: תהא $f\in C^\infty((a,b))$ ותהא a סדרה המקיימת $\forall x\in(a,b).\left|f^{(m)}(x)\right|<a_m$ אזי $\forall c\in\mathbb{R}.\left(\lim_{m\to\infty}\frac{a_m}{m!}c^m=0\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in[x_0-c,x_0+c].f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$.

מסקנה: $\left(e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}\right)\wedge\left(\sin(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\wedge\left(\cos(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$.

מסקנה: $e\notin\mathbb{Q}$.

משפט השארית של קושי: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי $\forall x\in(a,b).\exists c\in(\min(x,x_0),\max(x,x_0)).R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$.

מסקנה: יהי $|x|<1$ אזי $\arctan(x)=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}((a,b))$ המקיימת $\forall k\in\{0\ldots n\}.f^{(k)}(x_0)=0$ וכן $f^{(n+1)}(x_0)\neq0$
- $n\in\mathbb{N}_{even}$ אזי x_0 אינה נקודת קיצון של f.
- $n\in\mathbb{N}_{odd}$
  - $f^{(n+1)}(x_0)>0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.
  - $f^{(n+1)}(x_0)<0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.

פונקציה קמורה: $f\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in[0,1].f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$.

פונקציה קעורה: $f\in\mathbb{R}^{I}$ המקיימת $\forall x,y\in I.\forall\alpha\in[0,1].f(\alpha x+(1-\alpha)y)\ge\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$.

נקודת פיתול: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי x_0 המקיימת (f קעורה מאחד מצדדיה)$\wedge$(f קמורה מאחד מצדדיה).

משפט שלושת המיתרים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ קמורה אזי לכל $x_1<x_2<x_3$ מתקיים $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה פעמיים

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)>0$ אזי f קמורה.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f''(x)<0$ אזי f קעורה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $f\in C((a,b))$.

פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_{+}(a)=f(a)$ וכן $F'_{-}(b)=f(b)$.

אינטגרל לא מסוים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^{I}\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\iff(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int(f+g)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int(\alpha f)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int((f\circ g)\cdot g')$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^{n}|\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\ldots t_n\}$ המקיימות $\forall i\in\{1\ldots n\}.t_i\in[x_{i-1},x_i]$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-L|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסוים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a,b])=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid \text{אינטגרבילית רימן } f\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot\mathrm{d}t=c(b-a)$.

טענה: $D(x)\notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f\in R([a,b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\text{נקודות מתאימות}\{t_i\}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\text{נקודות מתאימות}\{t_i\}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\geq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\leq\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}\left(f\right)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\text{חלוקה }\Pi}\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\leq\underline{I}\left(f\right)\leq\overline{I}\left(f\right)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left([a,b]\right)\right)\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ חסומה אזי $\int_a^b f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega\left(f,J\right)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0\in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\Longleftrightarrow\left(\lim_{\delta\to0}\omega\left(f,[x_0-\delta,x_0+\delta]\right)=0\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow\left(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}\left(I\right).\omega\left(f,I\right)<\varepsilon\right)$.

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,[x_{i-1},x_i]\right)\Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)+\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\geq\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)-\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p_1\ldots p_m\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)+m\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_1\right)\geq\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_2\right)-m\lambda\left(\Pi_1\right)\omega\left(f,[a,b]\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\leq\underline{I}\left(f\right)\leq\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\geq\overline{I}\left(f\right)\geq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left([a,b]\right)\right)\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

משפט: $C\left([a,b]\right)\subseteq R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $f_{\restriction_{[a,b]}}\in R\left([a,b]\right)$ אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $\left(f\in R\left([a,b]\right)\right)\wedge\left(f\in R\left([b,c]\right)\right)$ אזי $f\in R\left([a,c]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in[a,d]$ עבורה $f\in R\left([a,d]\right)$ אזי $f\in R\left([b,c]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $f\in R\left([a,c]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left([b,c]\right)$ אזי $f\in R\left([a,c]\right)$.

טענה: תהא $f\in R\left([a,c]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases}y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else}\end{cases}$ אזי $g\in R\left([a,c]\right)$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אזי $f\in R\left([-1,1]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left([a,b]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left([a,b]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left([a,b]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),|f|\in R\left([a,b]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\{(a_i,b_i)\}_{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_i,b_i\right)$ וכן $\sum\left(b_i-a_i\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $|A|\leq\aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left([a,b]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\restriction_A}=g_{\restriction_A}$ אזי $\int_a^b f=\int_a^b g$.

מסקנה: תהא $f\in R\left([a,c]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_i & x\in\{b_1\dots b_m\}\\ f\left(x\right) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f=\int_a^c g$.

משפט ליניאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left([a,b]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left([a,c]\right)$ ויהי $b\in(a,c)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ המקיימת $f\geq 0$ אזי $\int_a^b f\geq 0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left([a,b]\right)$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_a^b f\geq\int_a^b g$.

טענה: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ רציפה המקיימת $f\geq 0$ וכן $\int_a^b f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ המקיימת $m\leq f\leq M$ אזי $m\left(b-a\right)\leq\int_a^b f\leq M\left(b-a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b|f|\leq\sup_{[a,b]}\left(|f|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסוים: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ אזי $F\in C\left([a,b]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C\left([a,b]\right)$ ותהא $0\leq g\in R\left([a,b]\right)$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b\left(f\cdot g\right)=f\left(x_0\right)\int_a^b g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ אזי $F'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left([a,b]\right)$ יהיו $x_1\dots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\dots x_n\}$ אזי $\int_a^b f=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]\,|_a^b=f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left([a,b]\right)$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]\,|_a^b-\int_a^b fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C\left([a,b]\right)$ ותהא $\varphi\in C^1\left([\alpha,\beta],[a,b]\right)$ המקיימת $\left(\varphi\left(\alpha\right)=a\right)\wedge\left(\varphi\left(\beta\right)=b\right)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta\left(f\circ\varphi\right)\cdot\varphi'$.

למה: תהא $f\in C^1\left([0,2\pi]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}f'\left(x\right)\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1\left([0,2\pi]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)\mathrm{d}x\right|\leq\frac{2\pi\sup\left(|f'|\right)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty).f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $\int_a^\infty f=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b].f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.\left(a<b\right)\Longrightarrow\left(f\in R\left([a,b]\right)\right)$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left([c,b]\right)$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left([a,c]\right)$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R\left(I\right)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\mid \text{קיים וסופי } \int_I f\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ אזי

- ליניאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R\left([a,\omega)\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left([a,\omega)\right)$ ויהי $c\in(a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R\left([a,\omega)\right)$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_a^\omega f\geq\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left([a,\omega)\right)$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left([a,\omega)\right)$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}[f\cdot g]\,|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R\left([a,\omega)\right)$ ותהא $\varphi\in C^1\left([c,\eta),[a,\omega)\right)$ המקיימת $\varphi\left(c\right)=a$ וכן $\lim_{b\to\eta}\varphi\left(b\right)=\omega$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R\left([a,b]\right)$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in(a,\omega).\forall b_1,b_2\in[B,\omega).\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow\left(f\in R\left([a,\omega)\right)\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R\left([a,b]\right)$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R\left([a,b]\right)$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\leq\int_a^\omega|f|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftrightarrow$ ($F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega).f,g\in R([a,b])$ אזי
- $\left(\int_a^\omega g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega f<\infty\right)$.
- $\left(\int_a^\omega f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\int_1^\infty f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

משפט אבל: תהא $g\in C([a,\omega))\cap R([a,\omega))$ ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C([a,\omega))$ עבורה $G(x)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$ אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

למה של בונה: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ באשר $g\ge0$ וכן g יורדת אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{x_0}f(x)\,\mathrm{d}x$.

למה של אבל: תהא $a_n\ge0$ סדרה יורדת ותהא b_n סדרה עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.m<\sum_{k=1}^n b_k<M$ אזי $a_1m<\sum_{k=1}^n a_kb_k<a_1M$.

משפט ערך ביניים שני: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ באשר g מונוטונית אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{x_0}f(x)\,\mathrm{d}x+g(b)\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $\varphi\in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ עולה ממש המקיימת $(\varphi(\alpha)=a)\wedge(\varphi(\beta)=b)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ אזי $R_n(f,a)(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}(k-2n)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^m\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^m\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}$.

משפט אבל: תהא $g\in R([a,\omega))$ ותהא $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ מונוטונית וחסומה אזי $fg\in R([a,\omega))$.

משפט דיריכלה: תהא $\forall b\in[a,\omega).g\in R([a,b])$ עבורה $G(x)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$ אזי $fg\in R([a,\omega))$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta(s)(s-1)=1$.

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in I.\lim_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{p.w.}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי
- רציפות: $(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C(I))\not\Longrightarrow(f\in C(I))$.
- אינטגרביליות רימן: $(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I))\not\Longrightarrow(f\in R(I))$.
- גבול האינטגרל: נניח $f\in R(I)$ וכן $\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I)$ אזי $\left(\int_I f=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $(f'(x)=L)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\Longleftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\Longleftrightarrow(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.|f_n(x)|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\wedge\left(g_n\xrightarrow{u}g\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{u}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ אזי $\left(\exists f \in \mathbb{R}^I . f_n \xrightarrow{u} f\right) \iff (\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.\left|f_n(x)-f_m(x)\right|<\varepsilon)$.

משפט: תהיינה $f_n \in C(I)$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $f\in C(I)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda} I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}} I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ ותהא $f\in C([a,b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ וכן $\forall n<m.f_m<f_n$ אזי $f_n\xrightarrow{u} f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.} f$ באשר $f\in C([a,b])$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a\in(0,1)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x)=\sum_{k=0}^\infty a^k\cos(b^k\pi x)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ כך $\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0(4^kx)}{4^k}\right)\wedge(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0(x+1)=\triangle_0(x))\wedge\left(\triangle_0(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le\frac12\\ 1-x & \frac12\le x\le1\end{cases}\right)$.

טענה: $\triangle_n\xrightarrow{u}\triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט: תהיינה $f_n\in C^1([a,b])$ עבורה $f'_n\xrightarrow{u}g$ ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת אזי $f_n\xrightarrow{u}f$ וכן $f'=g$.

סימון: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^n f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\sum_{i=0}^\infty f_n=f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^\infty u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b\sum_{i=0}^\infty u_n=\sum_{i=0}^\infty\int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u'_i$ במ"ש ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנסת אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^\infty u_i\right)=\sum_{i=0}^\infty\frac{d}{dx}u_i$.

משפט בוחן M של ויירשטראס: תהיינה $u_n\in\mathbb{R}^I$ ותהא $M\in\mathbb{R}_+^\mathbb{N}$ עבורה $\sum_{n=1}^\infty M_n<\infty$ וכן $\forall x\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\left|u_n(x)\right|\le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b\in\mathbb{R}^\mathbb{N}$ אזי $\sum_{k=1}^n a_kb_k=\sum_{k=1}^n a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^n\sum_{m=1}^k a_m(b_k-b_{k+1})$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^n f_ig_i$ מתכנס במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n\xrightarrow{u}0$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^n f_ig_i$ מתכנס במ"ש.

למה: תהא $f\in C([0,1])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין עבורה $\max|f-\varphi|<\varepsilon$.

למה: תהא $f\in C([0,1])$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ נגדיר $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין כך $\varphi(x)=f(0)+N\sum_{k=0}^{N-1}(f(a_{k+1})-2f(a_k)+f(a_{k-1}))\max\{x-a_k,0\}$ אזי $\forall m\in\{0\ldots N\}.\varphi(a_m)=f(a_m)$.

למה: קיימות $p_n\in\mathbb{R}[x]$ עבורן $\lim_{n\to\infty}\max_{[-1,1]}\left|p_n(x)-|x|\right|=0$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי $\exists p\in\mathbb{R}[x].\max_{[a,b]}\left|f(x)-p(x)\right|<\varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ אזי קיימות $p_n\in\mathbb{R}[x]$ עבורן $p_n\xrightarrow{u}f$.

הגדרה: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n(x)=\sum_{k=0}^n f\left(\frac kn\right)\binom nk x^k(1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n\xrightarrow{u}f$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R([a,\omega))$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi\in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.|f_n|\le\Psi$ אזי $(\forall b\in[a,\omega).f\in R([a,b]))\wedge(\int_a^\omega f$ מתכנסת בהחלט$)\wedge\left(\int_a^\omega f=\lim_{n\to\infty}\int_a^\omega f_n\right)$.

טענה: $\int_0^\infty e^{-x^2}=\frac{\sqrt\pi}{2}$.

משפט: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q\in\mathbb{R}$ ויהי $r<|q|$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|,|r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי קיים $R\in[0,\infty]$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases}\text{מתכנס} & x\in(-R,R)\\ \text{מתבדר} & x\notin[-R,R]\end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי $R\in[0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמר: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac1n}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac1n}\right)=0\right)\Longrightarrow(R=\infty)\right)\wedge\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac1n}\right)=\infty\right)\Longrightarrow(R=0)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}=f'\left(x\right)$ על $\left(-R,R\right)$.

משפט: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}a_{k+m}x^k=f^{(m)}\left(x\right)$ על $\left(-R,R\right)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $P\left(f,0\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ על $\left(-R,R\right)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $\left[0,R\right)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $\left(-R,0\right]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $\left[0,R\right]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $\left[-R,0\right]$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty}a_k<0$ אזי $\lim\limits_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־$-R$).

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ מתכנס בהחלט ותהא $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_i=\sum_{i=0}^{\infty}a_{p(i)}$.

טענה מכפלות קושי: יהיו $p,q\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_nx^n,\sum b_nx^n$ טורי חזקות מתכנסים בהחלט על I אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)$.

סכים לפי אבל: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(A\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim\limits_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$.

התכנסות צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(C\right)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$.

סכים לפי צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(C\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

סימון: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $\left(C\right)\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $\left(C\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\left(C\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $\left(A\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\left(A\right)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$ וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.

משפט: יהי $\sum a_kz^k$ טור טור חזקות מרוכב המתכנס עבור $w\in\mathbb{C}$ ויהי $r<\left|w\right|$ אזי $\sum a_kz^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $\overline{B}_r\left(0\right)$.

משפט אוילר: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta}=\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\cos\left(z\right)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.
- $\sin\left(z\right)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $u+iv\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_a^b\left(u+iv\right)=\int_a^bu+i\int_a^bv$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי

- $\int_a^b\left(f+g\right)=\int_a^bf+\int_a^bg$.
- $\int_a^bf=\int_a^cf+\int_c^bf$.
- $\int_a^bcf=c\int_a^bf$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^bf}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\frac{d}{dx}\left(u+iv\right)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_0\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^xf\left(t\right)\mathrm{d}t\right)'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_a^bf\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_a^bf'g=\left[f\cdot g\right]|_a^b-\int_a^bfg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_a^bf\right|\le\int_a^b\left|f\right|$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}={}^{\mathbb{R}}\!/_{2\pi\mathbb{Z}}$.

סימון: $R\left(\mathbb{T}\right)=\left\{ f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)\mid\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)\right\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_{n}\left(t\right)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_{n}\left(t\right)\in R\left(\mathbb{T}\right)$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $\left(c_{m}\neq0\right)\vee\left(c_{-m}\neq0\right)$ אזי m.

טענה: $R\left(\mathbb{T}\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

טענה: $\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle$ מכפלה פנימית על $C\left(\mathbb{T}\right)$.

טענה: $\left\langle e_{n},e_{m}\right\rangle =\begin{cases} 0 & n\neq m\\ 1 & n=m \end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(m\right)=\left\langle f,e_{m}\right\rangle$.

טענה: יהי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(k\right)=c_{k}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_{n}\left(t\right)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)\overline{\hat{g}\left(n\right)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\left\Vert f\right\Vert ^{2}=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(m\right)=\left\langle f,e_{m}\right\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\left(S_{m}f\right)\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_{n}\left(t\right)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(-n\right)=\overline{\hat{f}\left(n\right)}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$($S_{m}f$ ממשית).

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\left|k\right|\leq m$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp e_{k}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp S_{m}f$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left\Vert f\right\Vert ^{2}=\left\Vert S_{m}f\right\Vert ^{2}+\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}$.

טענת אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}\leq\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_{2}: תהיינה $f_{n},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\left\Vert f_{n}-g\right\Vert =0\right)\iff\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}g\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_{2} איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\Vert g\right\Vert \leq\sup\left|g\right|$.

מסקנה: תהיינה $f_{n}\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}f\right)\Longrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{u}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_{n}\in\mathbb{C}\left[x\right]$ עבורה $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t\in\left[0,2\pi\right]}\left|p\left(t\right)-f\left(t\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\left\Vert p-f\right\Vert <\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי קיימים p_{n} פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{m\to\infty}\left\Vert S_{m}f-f\right\Vert =0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}=\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

מסקנה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ המקיימות $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}\left(n\right)=\hat{g}\left(n\right)$ אזי בכל נקודת רציפות של f,g מתקיים $f=g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}\leq\left\Vert f-\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהיינה $f_{m},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורן $\left\Vert f_{m}-g\right\Vert \xrightarrow[m\to\infty]{}0$ אזי $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f_{m}}\left(n\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}\hat{g}\left(n\right)$.

טור פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $S_{N}f\xrightarrow{p.w.}g$ כאשר $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)e^{int}$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$ אזי $S_{N}f\xrightarrow{u}f$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[-\pi,\pi\right)}$ המוגדרת $f\left(t\right)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}i}{n}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=0\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}\sin\left(nt\right)}{n}$.
- יהי $r\in\left[0,\pi\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{u}f$ על $\left[-r,r\right]$.
- $S_{m}f\xrightarrow{p.w.}f$ על $\left(-\pi,\pi\right)$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[0,2\pi\right]}$ המוגדרת $f\left(t\right)=\frac{\left(\pi-t\right)^{2}}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{1}{2n^{2}}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=\frac{\pi^{2}}{12}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\frac{\pi^{2}}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos\left(nt\right)}{n^{2}}$.
- $S_{m}f\xrightarrow{u}f$ על $\left[0,2\pi\right]$.

מסקנה: $\frac{\pi^{4}}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k^{2}}$.

טענה: יהי $\alpha\notin\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\alpha\right)^{2}}=\frac{\pi^{2}}{\sin^{2}\left(\pi\alpha\right)}$.

למה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f'}\left(n\right)=in\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}\left(f'\right)=\left(S_{m}f\right)'$.

למה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f^{\left(k\right)}}\left(n\right)=i^{k}n^{k}\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$.

משפט: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$ אזי $f\in C^{k-2}\left(\mathbb{T}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{u}f$.

תנאי ליפשיץ מקומי: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $a\in\mathbb{R}$ עבורה $\exists\delta>0.\exists M>0.\forall x\in\left(a-\delta,a+\delta\right).\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|<M\left|x-a\right|$.

הערה: יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\left(a-\delta,a+\delta\right)\right)$ אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a.

משפט: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ותהא $a\in\mathbb{T}$ עבורן f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a אזי $S_{N}f\left(a\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}f\left(a\right)$.

קונבולוציה: תהיינה $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left(f*g\right)\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(t\right)g\left(x-t\right)\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי

- $f*g=g*f$.
- $f*\left(g+h\right)=f*g+f*h$.
- $\left(cf\right)*g=c\left(f*g\right)$.
- $\left(f*g\right)*h=f*\left(g*h\right)$.
- $f*g\in C\left(\mathbb{T}\right)$.
- $\widehat{f*g}\left(n\right)=\widehat{f}\left(n\right)\cdot\widehat{g}\left(n\right)$.

גרעין דיריכלה: נגדיר $D_{N}\in R\left(\mathbb{T}\right)$ כך $D_{N}\left(x\right)=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}$.

למה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $D_{N}*f=S_{N}f$.

למה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\widehat{D_{N}}\left(n\right)=\begin{cases}1 & \left|n\right|\le N\\0 & \left|n\right|>N\end{cases}$.

למה: יהי $y\in\left[-\pi,\pi\right]$ אזי $\left|D_{N}\left(y\right)\right|\le2N+1$.

למה: יהי $y\in\left[-\pi,\pi\right]$ אזי $D_{N}\left(y\right)=\begin{cases}2N+1 & y=0\\\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & y\neq0\end{cases}$.

מסקנה: D_{N} זוגית ממשית וכן מתקיים $\left(y\in\left\{\frac{2\pi k}{2N+1}\mid k\in\left\{-N,\ldots,N\right\}\right\}\right)\Longleftrightarrow\left(D_{N}\left(y\right)=0\right)$.

למה: D_{N} בעלת N מינימום מקומיים וכן $N+1$ מקסימום מקומיים.

למה: יהי $y\in\left[-\pi,\pi\right]$ אזי $\left|D_{N}\left(y\right)\right|\le\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right|$.

מסקנה: יהי $y\in\left[-\pi,\pi\right]$ אזי $\left|D_{N}\left(y\right)\right|\le\frac{\pi}{\left|y\right|}$.

טענה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_{N}\left(y\right)\mathrm{d}y=1$.

טענה: $\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_{N}\left(y\right)\right|\mathrm{d}y\ggg1$.

סכומי פייר: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left(\sigma_N f\right)\left(x\right)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}S_n f\left(x\right)$.

גרעין פייר: נגדיר $F_N\in R\left(\mathbb{T}\right)$ כך $F_N\left(x\right)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n\left(x\right)$.

למה: יהי $y\in\left[-\pi,\pi\right]$ אזי $F_N\left(y\right)=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right)^2$.

למה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_N\left(y\right)\mathrm{d}y=1$.

למה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sigma_N f=f*F_N$.

למה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\widehat{F_N}\left(n\right)=\begin{cases}1-\frac{|n|}{N+1} & |n|\le N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$.

למה: יהי $\delta>0$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים $N_0\in\mathbb{N}$ עבורו לכל $N\ge N_0$ מתקיים $\int_{-\pi}^{-\delta}F_N\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\pi}F_N\left(x\right)\mathrm{d}x\le\varepsilon$.

משפט פייר: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sigma_N f\xrightarrow{u}f$.

משפט פייר: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ותהא $a\in\left[-\pi,\pi\right]$ בה f רציפה מימין ומשמאל אזי $\sigma_N f\left(a\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\frac{\lim_{x\to a^+}f(x)+\lim_{x\to a^-}f(x)}{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ותהא $a\in\left[-\pi,\pi\right]$ בה f רציפה מימין ומשמאל וכן $S_N f\left(a\right)\to\ell$ אזי $\ell=\frac{\lim_{x\to a^+}f(x)+\lim_{x\to a^-}f(x)}{2}$.

מסקנה: $\left\{e_n\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ צפופים במ"ש ב־$C\left(\mathbb{T}\right)$.

טענה: $\int_0^\infty\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

מטריקה/מרחק: תהא A קבוצה אזי $d:A^2\to[0,\infty)$ המקיימת

- חיוביות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)\ge0$.
- חיוביות ממש: $\forall x,y\in A.\left(d\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(x=y\right)$.
- סימטריות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$.
- אי־שיוויון המשולש: $\forall x,y,z\in A.d\left(x,y\right)\le d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right)$.

מרחב מטרי: תהא X קבוצה ותהא $d:X^2\to[0,\infty)$ מטריצה אזי $\left(X,d\right)$.

גבול: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in X$ עבורן $d\left(a_n,L\right)\to0$ אזי $a_n\to L$.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ויהיו $L_1,L_2\in X$ עבורם $\left(a_n\to L_1\right)\wedge\left(a_n\to L_2\right)$ אזי $L_1=L_2$.

מרחק מנהטן: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ אזי $d_1\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$.

סימון: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ נגדיר $d_p\left(x,y\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ אזי $\ell_p^n=\left(\mathbb{R}^n,d_p\right)$.

טענה: ℓ_p^n מרחב מטרי.

מרחק יוניפורמי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^n$ אזי $d_\infty\left(x,y\right)=\max_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$.

סימון: $\ell_\infty^n=\left(\mathbb{R}^n,d_\infty\right)$.

טענה: ℓ_∞^n מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sup|f-g|$ אזי $C\left(\left[a,b\right]\right)=\left(C\left(\left[a,b\right]\right),d\right)$.

טענה: $C\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sqrt{\int_a^b|f-g|^2}$ ונגדיר יחס שקילות $\left(f\sim g\right)\iff\left(d\left(f,g\right)=0\right)$ אזי $L_2\left(\left[a,b\right]\right)=\left(R([a,b])/\sim,d\right)$.

טענה: $L_2\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.

טענה: יהי V מ"ו ותהא $\nu:V\to[0,\infty)$ נורמה על V נגדיר $d\left(x,y\right)=\nu\left(x-y\right)$ אזי $\left(V,d\right)$ מרחב מטרי.

נורמת ℓ_p^n: יהי $x\in\mathbb{R}^n$ אזי $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_∞^n: יהי $x\in\mathbb{R}^n$ אזי $\|x\|_\infty=\max_{i=1}^{n}|x_i|$.

למה: יהי $x\in\mathbb{R}^n$ אזי

- $\|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\sqrt{n}\|x\|_\infty$.
- $\|x\|_2\le\|x\|_1\le\sqrt{n}\|x\|_2$.

מסקנה: תהא $\left\{x^{(m)}\right\}\subseteq\mathbb{R}^n$ סדרה ותהא $y\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left(\lim_{m\to\infty}\left\|x^{(m)}-y\right\|_2=0\right)\iff\left(\forall i\in[n].\lim_{m\to\infty}x_i^{(m)}=y_i\right)$.

כדור פתוח: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)<r\right\}$.

כדור סגור: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)\le r\right\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)=r\right\}$.

נקודה פנימית: תהא $A\subseteq X$ אזי $x\in A$ המקיימת $\exists r>0.B_r\left(x\right)\subseteq A$.

פנים של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\overset{\circ}{A}=\left\{x\in A\mid A\text{ נקודה פנימית של } x\right\}=\mathrm{int}\left(A\right)$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $A=\mathrm{int}\left(A\right)$.

למה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}\left(\text{int}\left(A\right)\right)=\text{int}\left(A\right)$.

משפט: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי

- יהיו $\left\{ A_{i}\right\}$ פתוחות אזי $\bigcup A_{i}$ פתוחה.
- יהיו $\left\{ A_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ פתוחות אזי $\bigcap A_{i}$ פתוחה.
- $X,\varnothing$ פתוחות.

סביבה: יהי $a \in X$ אזי $A \subseteq X$ פתוחה עבורה $a \in A$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}\left(A\right)=\bigcup\left\{ B\subseteq A\mid \text{פתוחה } B\right\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $A \subseteq X$ עבורה $X\backslash A$ פתוחה.

נקודת סגור: תהא $A \subseteq X$ אזי $a \in X$ עבורה $\forall r>0.B_{r}\left(a\right)\cap A\neq\varnothing$.

סגור של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\text{cl}\left(A\right)=\overline{A}=\left\{ a\in X\mid A \text{ נקודת סגור של } a\right\}$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ אזי (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($A=\overline{A}$).

למה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A}=X\backslash\text{int}\left(X\backslash A\right)$ וכן $\text{int}\left(A\right)=X\backslash\overline{\left(X\backslash A\right)}$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A}=\bigcap\left\{ A\subseteq B\mid \text{סגורה } B\right\}$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ ותהא $a \in X$ אזי ($a\in\overline{A}$)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_{n}\in A$ עבורה $x_{n}\to a$).

נקודת הצטברות: תהא $A \subseteq X$ אזי $a \in X$ המקיימת $\forall r>0.\left(B_{r}\left(a\right)\backslash\left\{ a\right\} \right)\cap A\neq\varnothing$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ ותהא $a \in X$ אזי (a הצטברות של A)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_{n}\in A\backslash\left\{ a\right\}$ עבורה $x_{n}\to a$).

שפה של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A=\overline{A}\cap\overline{X\backslash A}=\overline{A}\backslash\text{int}\left(A\right)$.

קבוצה צפופה: קבוצה $Y \subseteq X$ עבורה $\overline{Y}=X$.

טענה: תהא $Y \subseteq X$ אזי (Y צפופה)$\Longleftrightarrow$(לכל $A \subseteq X$ פתוחה באשר $A\neq\varnothing$ מתקיים $Y\cap A\neq\varnothing$).

מרחב מטרי ספרבילי: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו קיימת $Y \subseteq X$ צפופה לכל היותר בת מנייה.

קבוצה חסומה: קבוצה $A \subseteq X$ עבורה $\exists r>0.\exists a\in X.A\subseteq B_{r}\left(a\right)$.

קוטר של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ חסומה אזי $\text{diam}\left(A\right)=\sup\left\{ d\left(x,y\right)\mid x,y\in A\right\}$.

טענה: תהא $\left\{ x^{\left(m\right)}\right\} \subseteq\mathbb{R}^{n}$ סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה $x^{\left(m_{j}\right)}$ מתכנסת.

מסקנה: לכל קבוצה חסומה ואינסופית קיימת נקודת הצטברות.

סדרת קושי: סדרה $\left\{ x_{n}\right\} \subseteq X$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall k,m\geq N.d\left(x_{k},x_{m}\right)<\varepsilon$.

למה: סדרת קושי הינה חסומה.

טענה: סדרה מתכנסת הינה סדרת קושי.

מרחב מטרי שלם: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו כל סדרת קושי מתכנסת.

משפט: $\mathbb{R}^{n}$ סטנדרטי שלם, $C\left(\left[a,b\right]\right)$ שלם, ℓ_{2} שלם.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי שלם ותהא $Y \subseteq X$ אזי ($\left(Y,d\right)$ שלם)$\Longleftrightarrow$(Y סגורה).

מרחבים מטריים איזומטריים: מרחבים מטריים $\left(X,d\right),\left(Y,\rho\right)$ עבורם קיימת $f:X\to Y$ חח"ע ועל המקיימת $\forall x,y\in X.d\left(x,y\right)=d\left(\left(x\right),f\left(y\right)\right)$.

השלמה של מרחב מטרי: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי $\left(Y,\rho\right)$ מרחב מטרי שלם עבורו $X\subseteq Y$ צפופה וכן $\rho_{\restriction_{X^{2}}}=d$.

משפט: לכל מרחב מטרי קיימת השלמה.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי בעל השלמות $\left(Y,\rho\right),\left(Z,\zeta\right)$ אזי $\left(Y,\rho\right),\left(Z,\zeta\right)$ איזומטריים.

נקודת שבת: תהא $f:X\to X$ אזי $a \in X$ עבורה $f\left(x\right)=x$.

העתקה מכווצת: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי $A\in\text{Hom}\left(X\right)$ עבורה קיים $\lambda<1$ המקיים $\forall x,y\in X.d\left(Ax,y\right)\leq\lambda d\left(x,y\right)$.

משפט נקודת השבת של בנך: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A\in\text{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת אזי קיים ויחיד $x \in X$ עבורו $Ax=x$.

מסקנה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $A\in\text{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת ותהא $x \in X$ עבורה $Ax=x$ אזי לכל $y \in X$ מתקיים $x=\lim_{n\to\infty}A^{n}z$.

מסקנה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $A\in\text{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת ותהא $x \in X$ עבורה $Ax=x$ אזי לכל $y \in X$ מתקיים $d\left(A^{n}y,x\right)\leq\frac{\lambda^{n}}{1-\lambda}d\left(y,Ay\right)$.

כיסוי פתוח: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ אזי קבוצות $\left\{ A_{\alpha}\right\} _{\alpha\in I}$ עבורן $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}A_{\alpha}$.

מרחב קומפקטי: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו לכל $\left\{ A_{\alpha}\right\} _{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X קיימות $\left\{ \beta_{i}\right\} _{i=1}^{m}\in I$ עבורן $X=\bigcup_{i=1}^{m}A_{\beta_{i}}$.

קבוצה קומפקטית: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי $B \subseteq X$ עבורו $\left(B,d\right)$ מרחב קומפקטי.

טענה קבוצה פתוחה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $X \subseteq Y$ אזי ($Y \subseteq U$ פתוחה ב־(Y,d))$\Longleftrightarrow$(קיימת $X \subseteq V$ פתוחה עבורה $U = V \cap Y$).

טענה קבוצה סגורה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $X \subseteq Y$ אזי ($Y \subseteq U$ סגורה ב־(Y,d))$\Longleftrightarrow$(קיימת $X \subseteq V$ סגורה עבורה $U = V \cap Y$).

טענה: תהא $X \subseteq K$ קומפקטית אזי K חסומה וכן K סגורה.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(לכל סדרה יורדת $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ סגורות לא ריקות אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \varnothing$).

קומפקטיות סדרתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$((X,d) קומפקטי סדרתית).

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(A סגורה וחסומה).

מרחב פרה־קומפקטי: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל סדרה יש תת סדרה קושי.

אוסף פונקציות רציף במידה אחידה: סדרה $\{f_n\} \subseteq C([a,b])$ המקיימת $\forall \varepsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall n \in \mathbb{N}.\forall s,t \in [a,b].|s-t| < \delta \Longrightarrow |f_n(s) - f_n(t)| < t$.

משפט: תהא $\{f_n\} \subseteq C([a,b])$ סדרה אזי ($\{f_n\}$ פרה־קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($\{f_n\}$ חסומה במ"ש ורציפה במידה אחידה).

גבול: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים תהא $f : X \to Y$ תהא $a \in X$ ותהא $L \in Y$ אזי

- קושי: $(\lim_{x\to a} f(x) = L) \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall x \in B(a,\delta).f(x) \in B(L,\varepsilon))$.
- היינה: $(\lim_{x\to a} f(x) = L) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in (X\backslash\{a\})^{\mathbb{N}}.(x_k \to a) \Longrightarrow (f(x_k) \to L)\right)$.

רציפות בנקודה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f : X \to Y$ אזי $a \in X$ עבורה $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

משפט: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f : X \to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה).

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $f : X \to \mathbb{R}^m$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $i \in [m]$ מתקיים כי f_i רציפה).

רציפות במידה שווה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $A \subseteq X$ אזי $f : A \to Y$ עבורה $\forall \varepsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall x,y \in A.(d(x,y) < \delta) \Longrightarrow (\rho(f(x),f(y)) < \varepsilon)$.

משפט: תהיינה $f,g : X \to \mathbb{R}^n$ רציפות ויהיו $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ אזי $\alpha f + \beta g$ רציפה וכן $\langle f,g\rangle$ רציפה.

משפט רציפות ההרכבה: יהיו $(X,d),(Y,\rho),(Z,\eta)$ מרחבים מטריים תהא $a \in X$ תהא $f : X \to Y$ רציפה על a ותהא $g : f(X) \to Z$ רציפה על $f(a)$ אזי $g \circ f$ רציפה על a.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קומפקטית.

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(כל $f \in C(X,\mathbb{R})$ הינה חסומה).

משפט קנטור: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.

משפט ויירשטראס: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ותהא $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה אזי קיימים $a,b \in X$ עבורם $f(X) = [f(a),f(b)]$.

מסקנה: תהיו $\nu,\eta : X \to \mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $c,C \in \mathbb{R}$ עבורם $c\nu \leq \eta \leq C\nu$.

מסילה: פונקציה $\gamma \in C([a,b],X)$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma : [a,b] \to X$ עבורה $\gamma(a) = \gamma(b)$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma : [a,b] \to X$ עבורה $\gamma_{\restriction_{(a,b]}},\gamma_{\restriction_{[a,b)}}$ חח"ע.

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma : [0,1] \to X$ מסילה אזי $-\gamma : [0,1] \to X$ המוגדרת $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$.

מרחב מטרי קשיר מסילתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל $x,y \in X$ קיימת עקומה $\gamma : [0,1] \to X$ המקיימת $\gamma(0) = x$ וכן $\gamma(1) = y$.

משפט תכונת דרבו: יהי (X,d) מרחב מטרי קשיר מסילתית תהא $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה יהיו $x,y \in X$ ותהא $c \in \mathbb{R}$ עבורה $f(x) < c < f(y)$ אזי קיים $z \in X$ עבורו $f(z) = c$.

תחום: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה מסילתית.

מרחב מטרי קשיר: מרחב מטרי (X,d) עבורו הקבוצות היחידות שפתוחות וסגורות במקביל הן $X,\varnothing$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קשיר מסילתית)$\Longrightarrow$((X,d) קשיר).

טענה: תהא $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ אזי A רציפה.

טענה: תהיינה $A,B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

מסקנה: תהא $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$.

משפט: תהא $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ ונגדיר $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ כך $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} x$ אזי f רציפה.

אקספוננט: תהא $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ נגדיר $e^A \in M_n(\mathbb{R})$ כך $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

מסקנה: תהא $A\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי e^{A} מתכנסת וכן $\left\Vert e^{A}\right\Vert \le e^{\left\Vert A\right\Vert }$.

הגדרה: תהא $\eta:[0,1]\to[0,1]^{2}$ מסילה אזי נגדיר מסילה $\Phi\eta:[0,1]\to[0,1]^{2}$ כך $\Phi\eta=\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\eta_{2}\left(4t\right),\eta_{1}\left(4t\right)\right) & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\left(\eta_{1}\left(4t-1\right),\eta_{2}\left(4t-1\right)\right)+\left(0,\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\left(\eta_{1}\left(4t-2\right),\eta_{2}\left(4t-2\right)\right)+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}\left(-\eta_{2}\left(4t-3\right),-\eta_{1}\left(4t-3\right)\right)+\left(1,\frac{1}{2}\right) & \frac{3}{4}\le t\le1 \end{cases}$.

נורמה של עקומה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומה אזי $\left\Vert \gamma\right\Vert _{\infty}=\max_{t\in[0,1]}\left\Vert \gamma\left(t\right)\right\Vert$.

מרחק של עקומות: תהיינה $\gamma,\eta:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומות אזי $d\left(\gamma,\eta\right)=\left\Vert \gamma-\eta\right\Vert _{\infty}$.

טענה: תהיינה $\gamma,\eta:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומות אזי $d\left(\Phi\gamma,\Phi\eta\right)=\frac{1}{2}d\left(\gamma,\eta\right)$.

עקום פביאנו: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומה אזי $\gamma_{\infty}=\lim_{n\to\infty}\Phi^{n}\gamma$.

טענה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומה אזי γ_{∞} רציפה וכן $\gamma_{\infty}\left(\left[0,1\right]\right)$ קומפקטית.

משפט: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$ עקומה אזי $\gamma_{\infty}\left(\left[0,1\right]\right)$ צפופה ב־$\left[0,1\right]^{2}$.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי קומפקטי יהי $\left(Y,\rho\right)$ מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל אזי $\left(Y,\rho\right)$ קומפקטי וכן f^{-1} רציפה.

טענה: לא קיימת פונקציה רציפה חח"ע ועל ב־$\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]^{2}$.

עקומה פוליגונלית: עקומה לינארית למקוטעין.

אורך עקומה פוליגונלית: תהא γ עקומה פוליגונלית בעלת חלקים לינאריים בקטעים $\left[\gamma\left(t_{i-1}\right),\gamma\left(t_{i}\right)\right]$ אזי $L\left(\gamma\right)=\sum_{i=1}^{M}\left\Vert \gamma\left(t_{i}\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\right\Vert$.

מסקנה: תהא γ עקומה פוליגונלית אזי $L\left(\gamma\right)=\int_{0}^{1}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert \mathrm{dt}$.

עקומה בעלת אורך ביחס לחלוקה: תהא Π חלוקה של $\left[a,b\right]$ אזי עקומה γ עבורה קיים חסם עליון לאורך של עקומה פוליגונלית בין הנקודות $\left\{ \gamma\left(t_{i}\right)\right\}$.

טענה: תהא $\gamma\in C^{1}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^{m}\right)$ עקומה אזי $L\left(\gamma\right)=\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert \mathrm{dt}$.

כדור פתוח: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid\left\Vert x-a\right\Vert <r\right\}$.

כדור סגור: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid\left\Vert x-a\right\Vert \le r\right\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid\left\Vert x-a\right\Vert =r\right\}$.

תיבה פתוחה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Pi_{a,b}=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}\mid\forall j\in\left[n\right].a_{j}<x_{j}<b_{j}\right\}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\overline{\Pi}_{a,b}=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}\mid\forall j\in\left[n\right].a_{j}\le x_{j}\le b_{j}\right\}$.

נקודה פנימית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\subseteq M$.

פנים של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathrm{int}\left(M\right)=\overset{\circ}{M}=\left\{ x\in M\mid \text{נקודה פנימית של } M\ x\right\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $M=\overset{\circ}{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $x\in\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\subseteq\mathbb{R}^{n}\backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\cap M=\left\{ x\right\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $x\in\mathbb{R}^{n}$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\partial M=\left\{ x\in M\mid \text{נקודת שפה של } M\ x\right\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $\partial M\subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\overline{M}=\overset{\circ}{M}\cup\partial M$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (x נקודה חיצונית של M)$\Longleftrightarrow$(x נקודה פנימית של $\mathbb{R}^{n}\backslash M$).

מסקנה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (M פתוחה)$\Longleftrightarrow$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\exists r>0.M\subseteq B_{r}\left(0\right)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\left\{ I_{n}\right\} _{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_{n}$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_{0}}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_{n}$).

סימון: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{\left(k\right)}=a\left(k\right)$.

גבול: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^{n}$ עבורן $\lim_{k\to\infty}\left\Vert a^{\left(k\right)}-L\right\Vert =0$ אזי $\lim_{k\to\infty}a^{\left(k\right)}=L$.

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x\to a}$ וכן $\xrightarrow[x\to a]{}$.

משפט: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(a^{\left(k\right)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right)\Longleftrightarrow\left(\forall j\in\left[n\right].a_{j}^{\left(k\right)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_{j}\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א 1 מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\Vert a^{(m)}-a^{(p)}\right\Vert <\varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff\left(\forall j\in[n].\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\Vert a_{j}^{(m)}-a_{j}^{(p)}\right\Vert <\varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ווירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (K קומפקטית)$\iff$(לכל $a\in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_{i})}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty}a^{(k_{i})}\in K$).

הערה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f=\langle f_{1},\ldots,f_{m}\rangle$ כאשר $f_{i}:A\to\mathbb{R}$.

גבול: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^{m}$ אזי

- היינה: אם $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{(k)}\to a\right)\implies\left(f\left(x^{(k)}\right)\to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A\backslash\left\{ a\right\} .\left\Vert x-a\right\Vert <\delta\implies\left\Vert f\left(x\right)-L\right\Vert <\varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א 1 מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $a\in A$ עבורה $f\left(a\right)=\lim_{x\to a}f\left(x\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $B\subseteq A$ אזי (f רציפה נקודתית עבור כל $b\in B$)$\iff\left(f\in C\left(B\right)\right)$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $B\subseteq A$ אזי $\left(f\in C\left(b\right)\right)\iff\left(f_{1},\ldots,f_{m}\in C\left(b\right)\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א 1 מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ וכן $B\subseteq\mathbb{R}^{m}$ אזי $f:A\to B$ הפיכה עבורה f,f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma:I\to\mathbb{R}^{m}$.

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{m}$ נגדיר $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^{m}$ כך $\gamma\left(t\right)=\left(1-t\right)a+tb$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{m}$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^{m}$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{m}$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^{m}$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b]=\mathrm{Im}\left(\gamma\right)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\forall a,b\in M.\left[a,b\right]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right),\overline{B}_{r}\left(a\right)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to M$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\gamma\left(1\right)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_{0}}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\biguplus\mathcal{A}=M$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f\left(a\right)<f\left(b\right)$ מתקיים $\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]\subseteq f\left(\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קשירה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ווירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f\left(\mathcal{K}\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\left\Vert x-y\right\Vert <\delta\implies\left\Vert f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\Vert <\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $\left(\upsilon\left(a\right)\geq0\right)\wedge\left(\left(\upsilon\left(a\right)=0\right)\iff\left(a=0\right)\right)$.
- הומוגניות: $\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon\left(a+b\right)\leq\upsilon\left(a\right)+\upsilon\left(b\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^{n}.\upsilon\left(x\right)\leq c\left\Vert x\right\Vert$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon\in C\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^{n}.c\left\Vert x\right\Vert \leq\upsilon\left(x\right)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\leq\upsilon\leq b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon,\left\Vert \cdot\right\Vert$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\rho\left(x^{(k)}\right)\to0\right)\iff\left(\upsilon\left(x^{(k)}\right)\to0\right)$.

נורמת ℓ_{p}: עבור $p\in\mathbb{N}_{+}$ נגדיר נורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert _{p}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert _{p}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|v_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_{∞}: נגדיר נורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert _{\infty}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert _{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}\left|v_{i}\right|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in(0,1)$ אזי $\gamma'(a)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in(0,1)$ אזי $\gamma'(a)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(a)\\ \vdots\\ \gamma_m'(a)\end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ המקיימת $f(x)=f(a)+L(x-a)+o(\|x-a\|)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}(a)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}(a)\Longrightarrow f\in C(a)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\text{grad}f(a)=[L]_{\text{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f(a)=\text{grad}f(a)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hx_i)-f(a)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $f'_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=(\nabla f(a))_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי ($\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ קיימת לכל i)$\not\Longleftarrow$($f\in\mathcal{D}(a)$).

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ המקיימת $f(x)=f(a)+L(x-a)+o(\|x-a\|)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $(f\in\mathcal{D}(a))\iff(\forall i\in\{1\ldots m\}.f_i\in\mathcal{D}(a))$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\mathcal{D}_f(a)=\begin{pmatrix}-\nabla f_1(a)-\\ \vdots\\ -\nabla f_m(a)-\end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $(\mathcal{D}_f(a))_{i,j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי

- אם $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $f\in C(a)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}(a)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}(a)$.
- $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)$.
- תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$ וכן $\mathcal{D}_f\in C(\mathcal{U})$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות אזי $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$ אזי $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי $\left(f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)\right)\iff\left(\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\nabla f(a)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\mathcal{D}_f(a)\cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ קשירה מסילתית)$\iff$($\mathcal{U}$ קשירה פוליגונלית).

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)\Longleftarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)\iff(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)$.

טענה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)\iff(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)$.

סימון: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in\{1\ldots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_i}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\{1\ldots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\{1\ldots n\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_i},\frac{\partial f}{\partial x_j}\in C^1(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ אזי $|K|=\sum_{i=1}^n K_i$ וכן $\partial x^K=\partial x_1^{K_1}\ldots\partial x_n^{K_n}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_f\in C^k(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{|K|}f}{\partial x^K}(a)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert Av\right\Vert _{\text{st}}\le\left\Vert A\right\Vert _{\text{st}}\cdot\left\Vert v\right\Vert _{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^{k}$ עבורן $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $g\in D\left(f\left(a\right)\right)$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}\left(a\right)=\mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right)\cdot\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\Gamma_{f}=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}\mid\left(x\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(f\left(x\right)=y\right)\right\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $\Pi_{c}=\left\{ x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)=c\right\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $y-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $N_{a}=\left(-\nabla f\left(a\right),1\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)\perp\Pi_{f\left(a\right)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי

- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\ge f\left(a\right)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\le f\left(a\right)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f\left(a\right)=0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי

- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_{i}.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_{i}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $\mathcal{D}_{\left(a,b\right)}^{k}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^{n}\\ \left|V\right|=k}}\binom{k}{V_{1},\ldots,V_{n}}\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)^{V_{i}}\frac{\partial^{k}}{\partial x^{V}}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathcal{D}_{\left(a,b\right)}^{k}f=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)^{k}$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $f\in C^{k+1}\left(a\right)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{i}f\left(a\right)+\frac{1}{\left(k+1\right)!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{k+1}f\left(c\right)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_{f}\right)_{i,j}=f''_{x_{i},x_{j}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=f\left(a\right)+\left(x-a\right)^{t}H_{f}\left(c\right)\left(x-a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- ($H_{f}\left(a\right)$ חיובית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מינימום).
- ($H_{f}\left(a\right)$ שלילית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\ne0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)>0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)<0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\ne0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\ne0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\ne0$ אזי קיימים $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\ne0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f'\left(x\right)=-\frac{F'_{x}\left(x,f\left(x\right)\right)}{F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)}$ על I_{x}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\ne0$ יהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f\left(x\right)\in C^{k}\left(I_{x},I_{y}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\ne0$ אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה

לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}(a)\neq0$ יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1}\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i},I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$ אזי לכל $i\in[n]$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=-\frac{F'_{x_i}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times(n+m)}{\mathcal{D}_f(a)}=\left(\underset{m\times n}{F'_x(a)},\underset{m\times m}{F'_y(a)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F'_y(a)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ וקיימת $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i},\prod_{j=1}^{m}I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_i}\right)$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F'_y(a)$ הפיכה יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ ותהא $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i},\prod_{j=1}^{m}I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_i}\right)$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$ אזי $\mathcal{D}_f(x)=-F'_y(x,f(x))^{-1}\cdot F'_x(x,f(x))$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $\nabla F(a)\neq0$ אזי משוואת המישור המשיק למשטח $\{F=0\}$ הינו $\sum_{i=1}^{n}F'_{x_i}(a)(x_i-a_i)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^1(\mathcal{U},\mathcal{V})$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^1(\mathcal{V},\mathcal{U})$.

C^k דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^k(\mathcal{U},\mathcal{V})$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^k(\mathcal{V},\mathcal{U})$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}(f(x))=\mathcal{D}_f(x)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $A\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

- (A פתוחה)$\iff$($f(A)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\iff$($f(A)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\iff$($f(A)$ קומפקטית).
- אם $\partial A\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\partial(f(A))=f(\partial A)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ עבורה $\operatorname{rank}(\mathcal{D}_f(a))=m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g(a)=0$ וכן $\nabla f(a)\in\operatorname{span}\{\nabla g_i(a)\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g(a)=0$ וכן $\{\nabla g_i(a)\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\operatorname{sols}(g)\cap\mathcal{O}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ נגדיר $L\in C^1(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ כך $L(x_1\ldots x_n,\lambda_1,\ldots\lambda_m)=f(x_1\ldots x_n)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x_1\ldots x_n)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$)$\iff$(קיימת $\lambda\in\mathbb{R}^m$ עבורה (a,λ) נקודה קריטית של L).

דרגה של פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $\operatorname{rank}(f(a))=\operatorname{rank}(\mathcal{D}_f(a))$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ עבורה $\forall x\in\mathcal{U}.\operatorname{rank}(f(x))=k$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a קיימת סביבה $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ של $f(a)$ קיימים דיפאומורפיזמים $\varphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ וכן $\psi:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^m$ וקיימת $\mathcal{W}\subseteq\varphi(\mathcal{O})$ סביבה של $\varphi(a)$ עבורם $\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)(x)=(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0)$ על $\mathcal{W}$.

הלמה של הדמר: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה קמורה של 0 יהי $p\geq1$ ותהא $f\in C^p(\mathcal{U},\mathbb{R})$ עבורה $f(0)=0$ אזי קיימת $g\in C^{p-1}(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $g(0)=\nabla f(0)$ וכן $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i g(x)$.

הלמה של מורס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^3(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a וגם $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של 0 וכן דיפאומורפיזם $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ המקיים $(f\circ g)(x)-f(a)=\sum_{i=1}^{k}x_i^2-\sum_{i=k+1}^{n}x_i^2$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $P_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\le x_j\le b_j\}$.

תיבה מנוונת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $\exists i\in[n].a_i=b_i$ אזי $P_{a,b}$.

חלוקה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ לכל $i\in[n]$ תהיינה $\left\{t_i^0,\ldots,t_i^{\ell_i}\right\}$ חלוקה של $[a_i.b_i]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^n\left[t_i^{m_i},t_i^{m_i+1}\right]\mid\forall i\in[n].m_i\in[\ell_i-1]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $V(P)=\text{Vol}(P)=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה של P אזי $\text{Vol}(P)=\sum_{i=1}^k\text{Vol}(A_i)$.

הערה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $P_{a,b}$ תיבה מנוונת אזי $\text{Vol}(P_{a,b})=0$.

סכום רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ תהא $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)}\in A_j$ אזי $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)=\sum_{j=1}^k f\left(x^{(j)}\right)\text{Vol}(A_j)$.

קוטר קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $d(M)=\sup_{x,y\in M}\|x-y\|$.

מדד העדינות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i\le i\le k}d(A_i)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אזי $\int_P f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f\in R(P)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f\in R(P)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1,\ldots,A_n\}$ חלוקה אזי $\overline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\sup_{P_j}(f)\text{Vol}(P_j)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1,\ldots,A_n\}$ חלוקה אזי $\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{P_j}(f)\text{Vol}(P_j)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי
$\underline{S}(f,\Pi)\le S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)\le\overline{S}(f,\Pi)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות אזי $\underline{S}(f,\Pi_1)\le\underline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_1)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}(f,\Pi_1)\le\overline{S}(f,\Pi_2)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{S}(f,\Pi)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\text{חלוקה }\Pi}\underline{S}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $(f\in R(P))\iff\left(\underline{I}(f)=\overline{I}(f)\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f\in R(P)$ חסומה אזי $\int_P f=\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\text{Vol}(P_{\lambda a,\lambda b})=\lambda^n\text{Vol}(P_{a,b})$.

טענה: יהיו $P_1\ldots P_n$ תיבות עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}(P_i)\cap\text{int}(P_j)=\varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי
$\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right)=\sum_{i=1}^n\text{Vol}(P_i)$.

מסקנה: יהיו $P_1\ldots P_n$ תיבות ותהא $P\subseteq\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $\text{Vol}(P)\le\sum_{i=1}^n\text{Vol}(P_i)$.

טענה: יהיו P_1,P_2 תיבות אזי $P_1\cap P_2$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}(P\backslash\text{int}(P))=0$.

קבוצה זניחה: $E\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty P_i$ וכן $\sum_{i=0}^\infty\text{Vol}(P_i)<\varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)=\{E\subseteq\mathbb{R}^n\mid E\text{ זניחה}\}$.

טענה: $\varnothing\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, יהי $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\{a\}\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=0}^\infty$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^\infty E_i\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\{P_i\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty\text{int}(P_i)$ וכן $\sum_{i=0}^\infty\text{Vol}(P_i)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\{P_i\}_{i=0}^n$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^n\text{int}(P_i)$ וכן $\sum_{i=0}^n\text{Vol}(P_i)<\varepsilon$.

טענה: תהא $E\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ ותהא $A\subseteq E$ אזי $A\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה לא מנוונת אזי $P\notin\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M\notin\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

מסקנה: תהא $M\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{int}(M)=\varnothing$.

טענה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה ותהא $f\in C(P,\mathbb{R})$ אזי $\Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי $\Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\{C_i\}_{i=0}^\infty$ בעלות אורך צלע 2^{-e_i} עבור $e_i\in\mathbb{N}$ עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}(P_i)\cap\text{int}(P_j)=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^\infty C_i$.

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, קבוצת קנטור זניחה.

תנודה של פונקציה בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי $\omega(f,a)=\lim_{\delta\to0^+}\omega(f,B_\delta(a)\cap A)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\iff$($\omega\left(f,a\right)=0$).

למה של קנטור: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית יהי $M>0$ ותהא $f:K\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall k\in K.\omega\left(f,k\right)\le M$ אזי $\forall x\in K.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\omega\left(f,B_{\delta}\left(x\right)\cap K\right)<\omega_{0}+\varepsilon$.

כמעט לכל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E\subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A\backslash E$.

סימון: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}=\left\{ x\in P\mid\omega\left(f,x\right)\ge\varepsilon\right\}$.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}$ קומפקטית.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left\{ A\in\Pi\mid\left(A\cap B_{f,\frac{1}{k}}\ne\varnothing\right)\wedge\left(\omega\left(f,A\right)\ge\frac{1}{2k}\right)\right\}$ כיסוי של $B_{f,\frac{1}{k}}$.

קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\iff$($f\in R\left(P\right)$).

קבוצה מדידת ז'ורדן: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה עבורה ∂E זניחה.

טענה: תהיינה $E_{1},E_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי

- ∂E_{1} סגורה.
- $\partial\left(E_{1}\backslash E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cup E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cap E_{2}\right)\subseteq\partial E_{1}\cup\partial E_{2}$.

סימון: $J\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid E\text{ ז'ורדן}\right\}$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J$ אזי $A\backslash B,A\cup B,A\cap B\in J$.

פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}:\mathbb{R}^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ כך $\chi_{A}\left(x\right)=\left\{ \begin{smallmatrix}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A \end{smallmatrix}\right.$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}\in C\left(\text{int}\left(A\right)\right)$ וכן $\chi_{A}\in C\left(\mathbb{R}^{n}\backslash A\right)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $A\subseteq P$ חסומה ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\cdot\chi_{A}\in R\left(P\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{P}f\cdot\chi_{A}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה תהיינה $P_{1},P_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבות סגורות עבורן $A\subseteq P_{1},P_{2}$ ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ אזי

- $\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{1}\right)\right)\iff\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{2}\right)\right)$.
- $\int_{P_{1}}f\cdot\chi_{A}=\int_{P_{2}}f\cdot\chi_{A}$.

מידה/נפח של תיבה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $V\left(A\right)=\text{Vol}\left(A\right)=\int_{A}\mathrm{d}x$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ אזי

- יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $af+bg\in R\left(A\right)$ וכן $\int_{A}\left(af+bg\right)=a\int_{A}f+b\int_{A}g$.
- נניח כי $f\ge0$ אזי $\int_{A}f\ge0$.
- נניח כי $f\ge g$ אזי $\int_{A}f\ge\int_{A}g$.
- נניח כי $m\le f\le M$ אזי $m\text{Vol}\left(A\right)\le\int_{A}f\le M\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $f\in R\left(A\right)\cap R\left(B\right)$ אזי $f\in R\left(A\cap B\right)$ וכן $f\in R\left(A\cup B\right)$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן $\text{Vol}\left(A\cap B\right)=0$ אזי $\int_{A\cup B}f=\int_{A}f+\int_{B}f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תחום ותהא $f\in C\left(A,\mathbb{R}\right)$ אזי $\exists c\in A.\int_{A}f=f\left(c\right)\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $f\in R\left(A\right)$ אזי $\left|f\right|\in R\left(A\right)$ וכן $\left|\int_{A}f\right|\le\int_{A}\left|f\right|$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ כמעט על כל A אזי $\int_{A}f=\int_{A}g$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\int_{\text{int}\left(A\right)}f=\int_{A}f=\int_{\overline{A}}f$.

טענה: תהינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\bigcup_{i=1}^{k}A_{i},\bigcap_{i=1}^{k}A_{i}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

מסקנה: תהיינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{Vol}\left(A_{i}\cap A_{j}\right)=0$ אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(A_{i}\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right)\iff\left(A+a\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right)$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Vol}\left(A\right)=\text{Vol}\left(A+a\right)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu:J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\to\mathbb{R}_{\ge0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu\left(\left[0,1\right]^{n}\right)=1$ אזי $\nu=\text{Vol}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה אזי $T\left(A\right)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $T\left(\partial A\right)=\partial\left(T\left(A\right)\right)$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ זניחה וחסומה אזי $T\left(E\right)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $T\left(A\right)\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ וכן $\text{Vol}\left(T\left(A\right)\right)=\text{Vol}\left(A\right)$.

משפט פוביני: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ עבורה $\iint_{P\times Q}f$ קיים אזי $\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ קיימים ובפרט $\iint_{P\times Q}f=\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ אזי $\int_{Q}f\left(a,y\right)\mathrm{d}y$ קיים כמעט לכל $a\in P$.

מסקנה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_{1},\varphi_{2}:B\to\mathbb{R}$ תהא $A=\left\{ \left(x,y\right)\in B\times\mathbb{R}\mid\varphi_{1}\left(x\right)\le y\le\varphi_{2}\left(x\right)\right\}$ ותהא $f\in R\left(A\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{B}\int_{\varphi_{1}\left(x\right)}^{\varphi_{2}\left(x\right)}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תהא $A\subseteq\prod_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{ y\right\} \right)\in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ כמעט לכל $y\in P_{n}$ ובפרט $\mathrm{Vol}\left(A\right)=\int_{P_{n}}\mathrm{Vol}\left(A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{ y\right\} \right)\right)\mathrm{d}y$.

שטח: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $S\left(D\right)=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי $m\left(D\right)=\iint_{D}\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מומנט מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי ציר x: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}y\cdot\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- מומנט מסה לפי ציר y: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}x\cdot\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\frac{M_{y}\left(D\right)}{m\left(D\right)},\frac{M_{x}\left(D\right)}{m\left(D\right)}\right)$.

נפח: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ אזי $V\left(E\right)=\iiint_{E}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי $m\left(E\right)=\iiint_{E}\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מומנט מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ z=0\right\}$: $M_{xy}\left(E\right)=\iiint_{E}z\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ y=0\right\}$: $M_{xz}\left(E\right)=\iiint_{E}y\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ x=0\right\}$: $M_{yz}\left(E\right)=\iiint_{E}x\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\frac{M_{yz}\left(E\right)}{m\left(E\right)},\frac{M_{xz}\left(E\right)}{m\left(E\right)},\frac{M_{xy}\left(E\right)}{m\left(E\right)}\right)$.

מקבילון: יהיו $v_{1}\ldots v_{n}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathrm{Par}\left(v_{1}\ldots v_{n}\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}\mid\forall i\in\left[n\right].\alpha_{i}\in\left[0,1\right]\right\}$.

טענה: יהיו $v_{1}\ldots v_{n}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי מתקיים $\mathrm{Vol}\left(\mathrm{Par}\left(v_{1}\ldots v_{n}\right)\right)=\left|\det\begin{pmatrix}- & v_{1} & -\\ & \vdots\\ - & v_{n} & -\end{pmatrix}\right|$.

תומך: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\mathrm{supp}\left(f\right)=\overline{\left\{ x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)\ne0\right\} }$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $E\subseteq A$ אזי

- (E זניחה)$\Longleftarrow$($\varphi\left(E\right)$ זניחה).
- ($\left(\mathrm{Vol}\left(E\right)=0\right)\wedge\left(\overline{E}\subseteq A\right)$)$\Longleftarrow$($\left(\mathrm{Vol}\left(\varphi\left(E\right)\right)=0\right)\wedge\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)$).
- (E ז'ורדן$)\wedge(\overline{E}\subseteq A$)$\Longleftarrow$($\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B)\wedge(\varphi\left(E\right)$ ז'ורדן).

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\varphi'\right|\in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\varphi'\right|\mathrm{d}t$.

דיפאומורפיזם אלמנטרי: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות אזי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם עבורו קיימת $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\varphi\left(x\right)=\left(x_{1},\ldots,\psi\left(x_{i}\right),\ldots x_{n}\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B,C\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהיו $\varphi:B\to C$, $\psi:A\to B$ דיפאומורפיזים אלמנטריים ותהא $f\in R\left(A\right)$ אזי $\int_{C}f=\int_{A}f\left(\left(\varphi\circ\psi\right)\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi\circ\psi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ויהי $a\in A$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq A$ סביבה של a וכן $\psi_{1}\ldots\psi_{m}$ דיפאומורפיזים אלמנטריים עבורם $\varphi=\psi_{1}\circ\ldots\circ\psi_{m}$ על $\mathcal{O}$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם תהא $E\subseteq A$ עבורה $\overline{E}\subseteq A$ ותהא $f\in R\left(\varphi\left(E\right)\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(E\right)$ ובפרט $\int_{\varphi\left(E\right)}f=\int_{E}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A\backslash E\right)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על $A\backslash E$ ותהא $f\in R\left(S\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\backslash E\right)$

ובפרט $\int_B f = \int_{A\backslash E} f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi: A \to B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E \subseteq A$, $S \subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E, S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi(A\backslash E) = S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם על $A\backslash E$ ותהא $f \in R(S)$ אזי $(f \circ \varphi) |\det \mathcal{D}_\varphi| \in R(A)$ ובפרט $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \mathrm{d}t$.

קואורדינטות קוטביות/פולריות: יהי $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ אזי $(\rho, \phi) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi]$ עבורן $x = \rho \cos(\phi)$ וכן $y = \rho \sin(\phi)$.

טענה: תהא $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי $|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| = \rho$.

קואורדינטות גליליות: יהי $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ אזי $(\rho, \phi, \iota) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi] \times \{z\}$ עבורן $x = \rho \cos(\phi)$ וכן $y = \rho \sin(\phi)$.

טענה: תהא $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי $|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| = \rho$.

קואורדינטות כדוריות: יהי $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ אזי $(\rho, \phi, \theta) \in (0, \infty] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ עבורן $x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$ וכן $y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$ וכן $z = \rho \cos(\theta)$.

טענה: תהא $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי $|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| = \rho^2 \sin(\theta)$.

טענה: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר z בקואורדינטות גליליות אזי $\text{Vol}(E) = 2\pi \iint_S \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z$.

מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ עבורן $f \le g$ תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סביב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}(E) = \pi \int_a^b \left(g^2(x) - f^2(x)\right) \mathrm{d}x$.

משפט פאפוס: תהא $S \subseteq \mathbb{R}^2$ יהי $c \in \mathbb{R}^2$ מרכז המסה של S ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}(E) = 2\pi R_c \cdot \text{Vol}(S)$ באשר R_c רדיוס סיבוב c.

מיצוי ז'ורדן: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(E_k)_{k=1}^\infty$ סדרת קבוצות מדידות ז'ורדן עולה עבורה $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = E$.

טענה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ ויהי $(E_k)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E אזי $\lim_{k\to\infty} \text{Vol}(E_k) = \text{Vol}(E)$.

מסקנה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ יהי $(E_k)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E ותהא $f \in R(E)$ אזי $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f = \int_E f$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f: E \to \mathbb{R}$ עבורם לכל $(E_k)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E מתקיים $\forall k \in \mathbb{N}. f \in R(E_k)$ וכן $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$ קיים ושווה אזי $\int_E f = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$.

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f: E \to \mathbb{R}$ אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן $(E_k)_{k=1}^\infty$ של E המקיימת $\forall k \in \mathbb{N}. f \in R(E_k)$ וכן $\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f$ קיים אזי $\int_E f$ מתכנס.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} \mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t\right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$.

משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה $f, g: E \to \mathbb{R}$ עבורן $|f| \le g$ וכן $\forall A \in \mathcal{P}(E) \cap J(\mathbb{R}^n). (f \in R(A)) \iff (g \in R(A))$ וכן $\int_E g$ מתכנס אזי $\int_E f, \int_E |f|$ מתכנסים.

מסקנה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $f: E \to \mathbb{R}$ אזי ($\int_E |f|$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E f$ מתכנס).

טענה: תהא $E \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהא $f \in R(E)$ אזי $\forall \varepsilon > 0. \forall A \subseteq E. \left|\int_A f\right| > \frac{1}{2} \int_E |f| - \varepsilon$.

משפט: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא $f: E \to \mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי ($\int_E f$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_E |f|$ מתכנס).

טענה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהיינה $f, g: E \to \mathbb{R}$ עבורן $\int_E f, \int_E g$ מתכנסים אזי $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$.

הערה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה E בעלת מיצוי ז'ורדן.

משפט: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $\varphi: A \to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f: B \to \mathbb{R}$ עבורה לכל $E \subseteq B$ ז'ורדן וקומפקטית מתקיים $f \in R(E)$ וכן $\int_B f$ מתכנס אזי $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| \mathrm{d}t$.

פונקציית גאמא: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} \mathrm{d}x$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\Gamma(n) = (n-1)!$.

טענה: יהי $t > 0$ אזי $\Gamma(t)$ מתכנס.

פונקציית בטא: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t, s) = \int_0^\infty x^{t-1} (1-x)^{s-1} \mathrm{d}x$.

טענה: יהיו $t, s > 0$ אזי $B(t, s)$ מתכנס.

טענה: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ ותהא $t_n \in [c, d]^\mathbb{N}$ עבורה $t_n \to \ell$ אזי $\forall x \in [a, b]. f(x, t_n) \xrightarrow{u} f(x, \ell)$.

טענה: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ אזי $\int_a^b f(x, t) \mathrm{d}x \in C([c, d])$.

טענה: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a, b] \times [c, d])$ אזי $\int_a^b f(x, t) \mathrm{d}x \in C^1([c, d])$ וכן $\frac{d}{dt}\left(\int_a^b f(x, t) \mathrm{d}x\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \mathrm{d}x$.

משפט: תהא $f \in C([a, b] \times [c, d])$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a, b] \times [c, d])$ ותהיינה $\alpha, \beta \in C^1([c, d], [a, b])$ אזי מתקיים $\frac{d}{dt}\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) \mathrm{d}x\right) = f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \mathrm{d}x$.

מסקנה: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)=\frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\mathrm{Vol}\left(B_{1}^{n}\left(0\right)\right)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

סימפלקס: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\Delta_{n}=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}\mid\left(\forall i\in\left[n\right].x_{i}\geq0\right)\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i}\leq1\right)\right\}$.

טענה נוסחת דירכלה: יהיו $p_{1}\ldots p_{n}>0$ אזי $\int\cdots\int_{\Delta_{n}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}^{p_{i}-1}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_{i})}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}p_{i}\right)}$.

מסקנה: יהיו $p_{1}\ldots p_{n}>0$ ויהיו $\gamma_{1}\ldots\gamma_{n}>0$ אזי $\int\cdots\int_{\substack{x_{1},\ldots x_{n}\geq0\\ \sum x_{i}^{\gamma_{i}}\leq1}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}^{p_{i}-1}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\gamma_{i}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{p_{i}}{\gamma_{i}}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_{i}}{\gamma_{i}}\right)}$.

טענה: יהיו $p_{1}\ldots p_{n}>0$ ותהא $\psi:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד אזי
$\int\cdots\int_{\Delta_{n}}\psi\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}^{p_{i}-1}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_{i})}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}p_{i}\right)}\int_{0}^{1}\psi\left(u\right)u^{\left(\sum p_{i}\right)-1}\mathrm{d}u$.

C^{m}-יריעה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^{m}\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_{f}=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f\in C^{\infty}\left(G,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עבורה $\Gamma_{f}=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי $C^{\omega}\left(A,B\right)=\left\{ f:A\to B\mid \text{אנליטית מקומית } f\right\}$.

יריעה אנליטית k-מימדית: קבוצה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}$ של x וכן קיימת $f:G\to\mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_{f}=\mathcal{M}\cap\mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

עקומה: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ שהינה חד־מימדית.

משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ שהינה דו־מימדית.

היפר־משטח/על־משטח: יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ שהינה $n-1$ מימדית.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ הינה היפר־משפט חלק.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\left\{ \mathcal{U}_{\alpha}\right\} _{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ פתוחות עבורן $\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_{\alpha}$ וכן $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}_{\alpha}$ יריעה לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ C^{m}-יריעה k-מימדית ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה אזי $r\in C^{m}\left(G,\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $r\left(G\right)=\mathcal{M}$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r\in C^{1}\left(G,\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה לכל $x\in G$ מתקיים $\mathrm{rank}\left(\mathcal{D}_{r}\left(x\right)\right)=k$.

הומאומורפיזם: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $B\subseteq\mathbb{R}^{m}$ אזי $f\in C\left(A,B\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C\left(B,A\right)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r:G\to A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(קיימות $\left\{ \mathcal{U}_{\alpha}\right\} \subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ פתוחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ עבורן $\mathcal{M}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{U}_{\alpha}$ וכן קיימות $\left\{ G_{\alpha}\right\} \subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{k}\right)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_{\alpha}\subseteq C^{m}\left(G_{\alpha},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן $r_{\alpha}\left(G_{\alpha}\right)=\mathcal{U}_{\alpha}$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\left\{ f_{i}\right\} _{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $x\in\mathcal{U}$ המקיימת $\left(f_{1}\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים כי $\left\{ \nabla f_{i}\left(x\right)\right\}$ בת״ל.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f_{1}\ldots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי ($\left\{ f_{1}\ldots f_{n-k}\right\}$ מערכת משוואות רגולרית)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{U}$ עבורו $\left(f_{1}\ldots f_{n-k}\right)\left(x\right)=0$ מתקיים $\mathrm{rank}\left(\mathcal{D}_{\left(f_{1}\cdots f_{n-k}\right)}\left(x\right)\right)=n-k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ C^{m}-יריעה k-מימדית ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\left\{ f_{i}\right\} _{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{M}=\left\{ \left(f_{1}\ldots f_{n-k}\right)=0\right\}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי ($\mathcal{M}$ יריעה)$\iff$(לכל $x\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ עבורה $\mathcal{M}\cap\mathcal{U}$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{ \left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{3}\mid\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}+\frac{z^{2}}{c^{2}}=1\right\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{ \left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{3}\mid\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}-\frac{z^{2}}{c^{2}}=1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד חד־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו־יריעתי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{ \left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{3}\mid\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}-\frac{z^{2}}{c^{2}}=-1\right\}$.

טענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{ \left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{3}\mid\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=\frac{z^{2}}{c^{2}}\right\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $(0,0,0)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ אזי $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה אזי $f:I\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת $f(t,\rho)=\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\cos(\rho)\\ \gamma_1(t)\sin(\rho)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}(\gamma)$ אזי משפט הסיבוב f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\operatorname{Im}(f)$.

הטלה סטריאוגרפית: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ נגדיר $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{S}^n$ כך $f(x)=-\frac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{\|x\|^2-1}{2}\right)$.

טורוס: משטח הסיבוב של $\mathbb{S}^1$.

סימון: נסמן טורוס בעזרת $\mathbb{T}^2$.

קו־אוריינטציה של יריעה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח אזי $N\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{M}.(|N(x)|=1)\wedge(N(x)\perp x)$.

למה: טבעת מוביוס אינו משטח קו־אוריינטבילי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ טבעת מוביוס אזי $\mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M}$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^3$ אזי $a\times b=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_1b_1\end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $(u\times v)\perp v$ וכן $(u\times v)\perp u$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $(u\in\operatorname{span}(v))\iff(u\times v=0)$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\det(u,v,u\times v)=\|u\times v\|^2\geq 0$.

טענה: יהיו $u,v\in\mathbb{R}^3$ אזי $\|v\times u\|=\|v\|\|u\|\sin(\angle(v,u))$.

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ממימד k: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה המקיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ וכן קיים $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם עבורו $f(A)=f(\mathcal{U})\cap\left(\mathbb{R}^k\times\{0_{n-k}\}\right)$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה אזי פרידיקט P עבורו לכל $a\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה P מתקיימת על $A\cap\mathcal{U}$.

משפט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ התב"ש

- $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית.
- $\mathcal{M}$ מקומית גרף של פונקציה $f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}\right)$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{M}$ מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$.
- $\mathcal{M}$ מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל־$\mathbb{R}^k$.

מסקנה: תהא $r:G\to\mathbb{R}^n$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a\in G$ קיימת סביבה $W\subseteq\mathbb{R}^n$ של $(a,0_{n-k})$ וקיים דיפאומורפיזם $s:W\to s(W)$ עבורו $s_{\restriction_{W\cap(G\times 0_{n-k})}}=r$.

הערה: יריעה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\mathcal{U}\subseteq A$ עבורה קיימת $W\subseteq\mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $\mathcal{U}=W\cap A$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $\mathcal{U}\subseteq A$ אזי ($\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־A)$\iff$($\forall x\in\mathcal{U}.\exists r>0.B_r(x)\cap A\subseteq\mathcal{U}$).

קבוצה קשירה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה לכל $\mathcal{U}\subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל־A מתקיים $\mathcal{U}\in\{A,\varnothing\}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי (A קשירה)$\iff$(לא קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\subset A$ פתוחות יחסית ל־A עבורן $A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\}$).

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^d$ ותהא $f:A\to B$ אזי (f רציפה)$\iff$(לכל $\mathcal{U}\subseteq B$ פתוחה יחסית ל־B מתקיים כי $f^{-1}(\mathcal{U})$ פתוחה יחסית ל־A).

מפה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^k$ הפיכה עבורה $\varphi(\mathcal{U})$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטריזציה טובה אזי $(\mathcal{U},\varphi)$.

אטלס: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קבוצה של מפות $\mathcal{A}$ עבורה $\bigcup\{\mathcal{C}_1\mid\mathcal{C}\in\mathcal{A}\}=\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $r:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r(\mathcal{U})$ אזי $\left(r(\mathcal{U}),r^{-1}\right)$ מפה.

המרחב הפרוייקטיבי: יהי $n\geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^n=\left\{vv^T\mid v\in\mathbb{S}^n\right\}$.

טענה: יהי $n\geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^n\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^2}$ יריעה n מימדית.

העתקת מעבר: תהיינה $(\mathcal{U}_1,\varphi_1),(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$ המוגדרת $\varphi_{1,2}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}$.

טענה: תהיינה $(\mathcal{U}_1,\varphi_1),(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_i(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2)$ פתוחה עבור $i\in\{1,2\}$.

טענה: תהיינה $(\mathcal{U}_1,\varphi_1),(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}$ דיפאומורפיזם.

פונקציה C^α מיריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מתקיים כי $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α.

הערה: נניח כי $\mathcal{M}$ יריעה C^α אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ הינה לכל היותר מדרגת חלקות C^α.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ אזי (f הינה C^α)$\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\{(\mathcal{U}_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו $f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α לכל $\alpha\in\Lambda$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי קיים ל־$\mathcal{M}$ אטלס.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $\dim(\mathcal{M})=k$.

פונקציה C^α בין יריעות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $\mathcal{M}'\subseteq\mathbb{R}^m$ יריעה ℓ־מימדית אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ הינה C^α.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהא $g\in C^\alpha(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$ אזי $g\circ f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}'')$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^m$ אזי (f הינה C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל $p\in\mathcal{M}$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ של p עבורה קיימת $g\in C^\alpha(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ המקיימת $f=g_{\restriction\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}$).

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ אזי (f הינה C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ של $\mathcal{M}$ ולכל מפה $(\mathcal{V},\psi)$ של $\mathcal{M}'$ מתקיים כי $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ הינה C^α).

דיפאומורפיזם C^α: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות אזי $f:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$ עבורה f הפיכה וכן $f,f^{-1}\in C^\alpha$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות דיפאומורפיות אזי $\dim(\mathcal{M})=\dim(\mathcal{M}')$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהיינה $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ מפות באשר $\mathcal{U},\mathcal{V}$ סביבות של p אזי $\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}(\varphi(p))\right)=\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}(\psi(p))\right)$.

המרחב המשיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $T_p(\mathcal{M})=\mathrm{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi(p)}\left(\varphi^{-1}\right)\right)$.

הערה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_p(\mathcal{M})\subseteq\mathbb{R}^n$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $\dim(T_p(\mathcal{M}))=\dim(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{f=0\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $T_p(\mathcal{M})=\ker(\mathcal{D}_p(f))$.

וקטור מהירות: תהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 אזי $\dot{\gamma}=\frac{d\gamma}{dt}$.

טענה: תהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 אזי $\dot{\gamma}(t)\in T_{\gamma(t)}(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_p(\mathcal{M})=\left\{\dot{\gamma}(0)\mid\left(\gamma\in C^1((-\varepsilon,\varepsilon),\mathcal{M})\right)\wedge(\gamma(0)=p)\right\}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $f\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהיינה $\gamma_1,\gamma_2:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{M}$ מסילות המקיימות $\gamma_i(0)=p$ וכן $\dot{\gamma_i}(0)=v$ אזי $\left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma_1)\right)(0)=\left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma_2)\right)(0)$.

נגזרת של פונקציה בין יריעות: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ אזי $\mathcal{D}_pf:T_p(\mathcal{M})\to T_{f(p)}(\mathcal{M}')$ המוגדרת $(\mathcal{D}_pf)(v)=\left(\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right)(0)$ עבור מסילה $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathcal{M}$ המקיימת $\gamma(0)=p$ וכן $\dot{\gamma}(0)=v$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ אזי $\mathcal{D}_pf$ העתקה לינארית.

משפט כלל השרשרת: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}',\mathcal{M}''$ יריעות תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ ותהא $g\in C^\alpha(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$ אזי $\mathcal{D}_p(g\circ f)=\mathcal{D}_{f(p)}(g)\cdot\mathcal{D}_p(f)$.

מסקנה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ אזי $(\mathcal{D}_pf)(v)=\mathcal{D}_p(f)\cdot v$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $\{F=0\}$ הצגה סתומה רגולרית עבור סביבה של p אזי $T_p(\mathcal{M})=\mathrm{span}\left(\{\nabla F_1(p),\ldots,\nabla F_{n-k}(p)\}^\perp\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $p\in\mathcal{M}$ ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p אזי $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_1),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_k)\right\}$ בסיס של $T_p(\mathcal{M})$.

הערה: נגדיר את $\left\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_1),\ldots,\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_k)\right\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $T_p(\mathcal{M})$.

טענה: תהיינה $\mathcal{M},\mathcal{M}'$ יריעות תהא $f\in C^\alpha(\mathcal{M},\mathcal{M}')$ תהא $p\in\mathcal{M}$ תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה ב־$\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}$ סביבה של p תהא $(\mathcal{V},\psi)$ מפה ב־$\mathcal{M}'$ באשר $\mathcal{V}$ סביבה של $f(p)$ אזי $[\mathcal{D}_pf]_{i,j}=\frac{\partial\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)_i}{\partial x_j}$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\mathcal{M}' \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה תהא $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ תהא $p \in \mathcal{M}$ ותהא $g \in C^\alpha (\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ באשר $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של p וכן $f = g_{\restriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}$ אזי $\mathcal{D}_p f = (\mathcal{D}_p g)_{\restriction_{T_p(\mathcal{M})}}$.

נגזרת כיוונית: תהא $f \in C^\alpha (\mathcal{M}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $v \in T_p (\mathcal{M})$ אזי $L_v f = \mathcal{D}_p f (v)$.

טענה: תהא $f \in C^\alpha (\mathcal{M}, \mathbb{R}^m)$ תהא $(\mathcal{U}, \varphi)$ מפה בסביבה של p ותהא $v \in T_p (\mathcal{M})$ אזי $L_v f = \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}$.

טענה: תהא $f \in C^\alpha (\mathcal{M}, \mathbb{R}^m)$ ותהא $v \in T_p (\mathcal{M})$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v} = L_v f$.

וקטור נורמל: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $p \in \mathcal{M}$ אזי $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ עבורו $v \perp T_p (\mathcal{M})$.

וקטור נורמל יחידה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $p \in \mathcal{M}$ אזי וקטור נורמל $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ עבורו $\|v\| = 1$.

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p \in \mathcal{M}$ ותהא $\{f = 0\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא $\{f = 0\}$ הצגה סתומה רגולרית של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p \in \mathcal{M}$ ותהא Γ_f הצגה כגרף בסביבה של p אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p), -1\right)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(p)\|^2}}$ וקטור נורמל יחידה ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא Γ_f הצגה כגרף של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}, -1\right)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

מכפלה מצולבת: יהיו $v_1 \ldots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \det \begin{pmatrix} (v_1)_1 & \ldots & (v_{n-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{i-1} & \ldots & (v_{n-1})_{i-1} \\ (v_1)_{i+1} & \ldots & (v_{n-1})_{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_n & \ldots & (v_{n-1})_n \end{pmatrix} e_i$.

הערה: יהיו $v_1 \ldots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי בצורה לא פורמלית מתקיים $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = \det \begin{pmatrix} e_1 & | & & | \\ \vdots & v_1 & \ldots & v_{n-1} \\ e_n & | & & | \end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1 \ldots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.

דטרמיננטת גראם: יהיו $v_1 \ldots v_m \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Gamma (v_1 \ldots v_m) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \ldots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$.

טענה: יהיו $v_1 \ldots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי

- לכל $i \in [n-1]$ מתקיים $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \perp v_i$.
- $\|v_1 \times \ldots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\Gamma (v_1 \ldots v_{n-1})}$.
- $\det (v_1 \times \ldots \times v_{n-1}, v_1, \ldots, v_{n-1}) \geq 0$.

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח תהא $p \in \mathcal{M}$ ותהא r פרמטריזציה טובה בסביבה של p אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}(p) \times \ldots \times \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}(p)$ וקטור נורמל ל־p.

מסקנה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על־משטח ותהא r פרמטריזציה טובה של $\mathcal{M}$ אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \ldots \times \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$.

סימון: תהא $f \in C^\infty (\mathcal{M})$ ותהא $\alpha \in \mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} (f)$.

סימון: תהיינה $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^{k} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f, g \in C^\infty (\mathcal{M})$ ותהא $\alpha \in \mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^k \\ |\beta| \leq |\alpha|}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta (f) \partial^{\alpha - \beta} (g)$.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה אזי $D : C^\infty (\mathcal{U}) \to C^\infty (\mathcal{U})$ המקיימת $\mathcal{D} (f) (x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^k \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha (x) \cdot \partial^\alpha f (x)$ עבור $m \in \mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $D : C^\infty (\mathcal{M}) \to C^\infty (\mathcal{M})$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ על $\mathcal{M}$ באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית מתקיים $\mathcal{D} (f \circ \varphi^{-1}) (x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^k \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha (x) \cdot \partial^\alpha (f \circ \varphi^{-1}) (x)$ עבור $m \in \mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

שדה וקטורי C^m: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $v : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ עבורה $v(p) \in T_p (\mathcal{M})$ לכל $p \in \mathcal{M}$ וכן לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ מתקיים כי $x \mapsto \mathcal{D}_x \varphi (v(x))$ העתקה C^m.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי $L_v : C^\infty (\mathcal{M}) \to C^\infty (\mathcal{M})$ המוגדרת $L_v (f) (x) = L_{v(x)} (f)$ הינה אופרטור דיפרנציאלי.

תומך: תהא $f \in C (\mathcal{M})$ אזי $\text{supp} (f) = \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \neq 0\}}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה אזי $C_C^\infty (\mathcal{U}) = \{f \in C^\infty (\mathcal{U}) \mid \text{קומפקטית } \text{supp}(f)\}$.

אופרטור מקומי: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $L : C^{\infty}(\mathcal{M}) \to C^{\infty}(\mathcal{M})$ עבורה לכל $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה ולכל $f, g \in C_C^{\infty}$ עבורן $f_{\restriction_{\mathcal{U}}} = g_{\restriction_{\mathcal{U}}}$ מתקיים $L(f)_{\restriction_{\mathcal{U}}} = L(g)_{\restriction_{\mathcal{U}}}$.

הגדרה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\|f\|_{W,n} = \sup_{\substack{x \in w \\ |\alpha| \le n}} \|(\partial^{\alpha} f)(x)\|$.

טענה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ תהא $x \in \mathcal{W}$ עבורה $(\partial^{\alpha} f)(x) = 0$ לכל $|\alpha| \le n$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\delta \in (0, \varepsilon)$ וכן $g \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ עבורה

- $g_{\restriction_{B_{\frac{\delta}{2}}(x)}} = 0$.
- $g_{\restriction_{\mathcal{W} \setminus B_{\delta}(x)}} = 0$.
- $\|f - g\|_{W,n} < \varepsilon$.

סימון: יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^{k} \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.

משפט פיטרה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $L : C^{\infty}(\mathcal{M}) \to C^{\infty}(\mathcal{M})$ לינארית התב"ש

- L אופרטור מקומי.
- לכל $f \in C^{\infty}(\mathcal{M})$ מתקיים $\text{supp}(L(f)) \subseteq \text{supp}(f)$.
- L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^{\infty}(\mathcal{V}) \to C^{\infty}(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $x \in \mathcal{V}$ אזי קיימת $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{W}}$ קומפקטית וכן קיים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_C^{\infty}(\mathcal{W} \setminus \{x\})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \le C \|f\|_{\mathcal{W},n}$.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^{\infty}(\mathcal{V}) \to C^{\infty}(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ פתוחה עבורה קיימים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_C^{\infty}(\mathcal{W})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \le C \|f\|_{\mathcal{W},n}$ אזי L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n.

משפט פירוק יחידה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ כיסוי פתוח של X אזי קיימות $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ עבורן

- לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \le \rho_i \le 1$.
- לכל $i \in \mathbb{N}$ קיים $\alpha \in \Lambda$ עבורו $\text{supp}(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $|\{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i(\mathcal{W}) \ne 0\}| \in \mathbb{N}$.
- לכל $x \in X$ מתקיים $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i(x) = 1$.

מסקנה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ויהי $L : C^{\infty}(\mathcal{V}) \to C^{\infty}(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי אזי L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $X \subseteq \mathcal{M}$ ויהי $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ כיסוי פתוח ב־$\mathcal{M}$ של X אזי קיימות $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq C^{\infty}(\mathcal{M})$ עבורן

- לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \le \rho_i \le 1$.
- לכל $i \in \mathbb{N}$ קיים $\alpha \in \Lambda$ עבורו $\text{supp}(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$.
- לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$ עבורה $|\{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i(\mathcal{W}) \ne 0\}| \in \mathbb{N}$.
- לכל $x \in X$ מתקיים $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i(x) = 1$.

מקבילון: יהיו $v_1 \ldots v_k \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Pi(v_1 \ldots v_k) = \left\{\sum_{i=1}^{k} t_i v_i \mid \forall i \in [k] . t_i \in [0,1]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $v_1 \ldots v_k \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_k(\Pi(v_1 \ldots v_k)) = \sqrt{\Gamma(v_1 \ldots v_k)}$.

טענה: יהיו $v_1 \ldots v_k \in \mathbb{R}^k$ אזי

- $\text{Vol}_k\left(\binom{v_1}{0^{n-k}}, \ldots, \binom{v_k}{0^{n-k}}\right) = |\det(v_1 \ldots v_k)|$.
- תהא $T \in O(n)$ אזי $\text{Vol}_k(Tv_1, \ldots, Tv_k) = \text{Vol}_k(v_1, \ldots, v_k)$.

קבוצה זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית אזי $E \subseteq \mathcal{M}$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U}, \varphi)$ מתקיים כי $\varphi(E \cap \mathcal{U})$ זניחה ב־$\mathbb{R}^k$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית יהי $\{(\mathcal{U}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$ אטלס של $\mathcal{M}$ ותהא $E \subseteq \mathcal{M}$ אזי (E זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$)$\iff$(לכל $\alpha \in \Lambda$ מתקיים כי $\varphi_{\alpha}(E \cap \mathcal{U}_{\alpha})$ זניחה ב־$\mathbb{R}^k$).

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$ זניחות ביחס ל־$\mathcal{M}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}$.

קבוצת נקודות האי־רציפות: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ אזי $B_f = \{x \in \mathcal{M} \mid x \text{ אינה רציפה על } f\}$.

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ עבורה

- f חסומה.
- $\text{supp}(f)$ קומפקטי.
- B_f זניחה ביחס ל־$\mathcal{M}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן על יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{E}$ אינטגרבילית רימן על $\mathcal{M}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית תהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה ותהא $E\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי (E מדידה ז'ורדן ב־$\mathcal{M}$)$\Longleftrightarrow$($\varphi(E)$ מדידה ז'ורדן ב־$\mathbb{R}^{k}$).

פונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathrm{supp}(f)$ קומפקטית וכן קיימת מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ עבורה $\mathrm{supp}(f)\subseteq\mathcal{U}$.

קבוצה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $A\subseteq\mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_{A}$ נוחה.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה $\{(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i})\}$ של $\mathcal{M}$ באשר $\mathcal{U}_{i}$ נוחה לכל $i\in\mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימות $f_{1}\ldots f_{n}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה $r_{i}:G_{i}\to\mathcal{M}$ פרמטריזציות טובות באשר $G_{i}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ וכן $i\in\{1,2\}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי
$\int_{G_{1}}(f\circ r_{1})(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}(r_{1})^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}(r_{1})\right)}\mathrm{d}q=\int_{G_{2}}(f\circ r_{2})(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}(r_{2})^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}(r_{2})\right)}\mathrm{d}q$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}(f\circ r)(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}(r)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}(r)\right)}\mathrm{d}q$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה k־מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r:G\to\mathcal{M}$ באשר $G\subseteq\mathbb{R}^{k}$ ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}(f\circ r)(q)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\frac{\partial r}{\partial x_{1}}\ldots\frac{\partial r}{\partial x_{k}}\right)}\mathrm{d}q$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}=\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid(\mathrm{supp}(f)\subseteq\mathcal{U})\wedge($נוחה ואינטגרבילית רימן $f)\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $R_{\mathcal{U}}$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R_{\mathcal{U}}\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_{1}\ldots f_{n},g_{1}\ldots g_{m}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$ וכן $f=\sum_{i=1}^{m}g_{i}$ אזי $\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{M}}f_{i}=\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathcal{M}}g_{i}$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהיינה $f_{1}\ldots f_{n}:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f=\sum_{i=1}^{n}f_{i}$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{M}}f_{i}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})=\{f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}\mid$ אינטגרבילית רימן $f\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $R(\mathcal{M})$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\int_{\mathcal{M}}:R(\mathcal{M})\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}f\mathrm{dVol}_{k}$.

מיצוי ז'ורדן של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $(E_{i})_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{M})$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_{i}=\mathcal{M}$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר B_{f} זניחה אזי אם קיים $L\in\mathbb{R}$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות סגורות $(E_{i})_{i=1}^{\infty}$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\lim_{i\to\infty}\int_{E_{i}}f\cdot\mathbb{1}_{E_{i}}=L$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=L$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $(E_{i})_{i=1}^{\infty}$ של $\mathcal{M}$ מתקיים $\int_{\mathcal{M}}f=\lim_{i\to\infty}\int_{\mathcal{M}}f\cdot\mathbb{1}_{E_{i}}$.

נפח של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $\mathrm{Vol}_{k}(\mathcal{M})=\int_{\mathcal{M}}1$.

מפות זרות: מפות $(\mathcal{U},\varphi),(\mathcal{V},\psi)$ עבורן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

טענה: תהיינה $\{(\mathcal{U}_{i},\varphi_{i})\}_{i=1}^{n}$ מפות זרות בזוגות על $\mathcal{M}$ תהא $S\subseteq\mathcal{M}$ זניחה ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה $f_{\restriction_{\mathcal{M}\backslash(S\cup(\biguplus_{i=1}^{n}\mathcal{U}_{i}))}}=0$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathcal{U}_{i}}f$.

אינטגרל קווי מסוג ראשון: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathrm{Im}(\gamma)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אזי $\int_{\gamma}f\mathrm{dVol}_{1}$.

סימון: תהא $\gamma\in C([a,b],\mathbb{R}^{n})$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\lim_{m\to\infty}\sup_{a=t_{0}<\ldots<t_{m}=b}\sum_{i=1}^{m}\|\gamma(t_{i})-\gamma(t_{i-1})\|$.

טענה: תהא $\gamma\in C^{1}([a,b],\mathbb{R}^{n})$ אזי $\mathrm{Length}(\gamma)=\int_{a}^{b}\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_{1}(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית ותהא $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה אזי $\mathrm{Length}(\mathcal{M})=\mathrm{Length}(\gamma)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה ותהא $f\in C^{1}(\mathcal{U})$ אזי $\mathrm{Length}(\Gamma_{f})=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(t))^{2}}\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $r,\theta\in C^{1}(\mathbb{R})$ נגדיר $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^{2}$ כך $\gamma(t)=(r(t)\cos(\theta(t)),r(t)\sin(\theta(t)))$ אזי $\|\gamma'\|=\sqrt{r^{2}+r'}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה חד־מימדית אזי $\mathrm{Area}(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_{2}(\mathcal{M})$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^3$ יריעה דו־מימדית ותהא $r:G\to\mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה באשר $G\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\text{Area}(\mathcal{M})=\int_G\left|\frac{\partial r}{\partial x_1}(x)\times\frac{\partial r}{\partial x_2}(y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי $\text{Area}(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|\nabla f(x,y)\|^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

טענה: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\det(I+uv^T)=1+\langle u,v\rangle$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k})$ אזי $\text{Vol}_k(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\|\nabla f(x)\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k})$ ותהא $\alpha:\Gamma_f\to\mathbb{R}$ באשר $\alpha(x)$ הזווית בין הנורמל של Γ_f בנקודה x לבין ציר e_{k+1} אזי $\sqrt{1+\|\nabla f(x)\|^2}=\frac{1}{\cos(\alpha(x))}$.

משפט ארכימדס: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\text{Area}(\mathcal{M})=2\pi h$.

מסקנה: יהיו P_1,P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי $\mathcal{M}$ השטח הכלוא על $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין P_1 ל־P_2 אזי $\text{Area}(\mathcal{M})=2\pi hR$.

קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים מקבילים אזי $P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\max\{d(x,H_1),d(x,H_2)\}\le d(H_1,H_2)\}$.

רוחב קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים אזי $\text{Width}(P_{H_1,H_2})=d(H_1,H_2)$.

רוחב גוף: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\text{Width}(K)=\inf_{\{K\subseteq P\mid P\ \text{קורה}\}}(\text{Width}(P))$.

משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $\text{Width}(K)\le\sum_{i=1}^m\text{Width}(P_i)$.

רוחב יחסי של קורה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ותהא P קורה אזי $\text{Width}_K(P)=\inf_{m\in\mathbb{R}_+}\{m\in\mathbb{R}_+\mid\exists a\in\mathbb{R}^n.K\subseteq m\cdot P+a\}$.

השערת באנג: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^m\text{Width}_K(P_i)$. השערה פתוחה

טענה: יהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי עבורו $K=-K$ ויהיו $P_1\ldots P_m$ קורות עבורן $K\subseteq\bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1\le\sum_{i=1}^m\text{Width}_K(P_i)$.

טענה: תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ אזי $\varphi^{-1}(t)$ על־משטח.

טענה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi(\mathcal{V})=(a,b)$ ותהא $p\in\mathcal{V}$ אזי קיים $\delta>0$ עבורו לכל $f\in R(V_\delta(p))$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית מתקיים $\int_{B_\delta(p)}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\mathrm{dVol}_{n-1}(x)\,\mathrm{d}t$.

משפט נוחסאת קו־שטח: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi(\mathcal{V})=(a,b)$ ותהא $f\in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\mathrm{dVol}_{n-1}(x)\,\mathrm{d}t$.

גרדיאנט: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $u\in T_x(\mathcal{M})$ עבורו $\langle u,v\rangle=L_v\varphi(x)$ לכל $v\in T_x(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי הגרדיאנט של φ בנקודה x הוא $\nabla_x\varphi$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של $x\in\mathcal{M}$ ותהא $\psi\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ באשר $\psi_{\restriction\mathcal{U}\cap\mathcal{M}}=\varphi_{\restriction\mathcal{U}}$ אזי $\nabla_x\varphi=\text{Proj}_{T_x(\mathcal{M})}(\nabla_x\psi)$.

משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$ באשר $\nabla\varphi\neq0$ וכן $\varphi(\mathcal{M})=(a,b)$ ותהא $f\in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}}f=\int_a^b\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\|\nabla\varphi(x)\|}\mathrm{dVol}_{n-1}(x)\,\mathrm{d}t$.

מסקנה: יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi\in C^1(\mathcal{V},\mathbb{R}^k)$ באשר $\text{rank}(\mathcal{D}_x\varphi)=k$ ותהא $f\in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}}f=\int_{\varphi(\mathcal{V})}\int_{\varphi^{-1}(t)}\frac{f(x)}{\sqrt{\det\left((\mathcal{D}_x\varphi)\cdot(\mathcal{D}_x\varphi)^T\right)}}\mathrm{dVol}_{n-1}(x)\,\mathrm{d}t$.

טענה: תהא $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהא $A\in O(n+1)$ אזי $\int_{\mathbb{S}^n}f(x)\,\mathrm{dVol}_n=\int_{\mathbb{S}^n}f(Ax)\,\mathrm{dVol}_n$.

טענה: יהי $r>0$ אזי $\text{Vol}_n(r\cdot\mathbb{S}^n)=r^n\cdot\text{Vol}_n(\mathbb{S}^n)$.

טענה שטח פנים של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

טענה נפח של ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_n(B_1(0))=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}$ יריעה אזי $\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{M})=\{v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k\mid v\ \text{שדה וקטורי}\ C^\alpha\ \text{מעל}\ \mathcal{M}\}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה C^α ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי $\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}\in\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$(לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ ולכל $i\in[k]$ מתקיים כי $\left\langle v(x),\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_i}(x)\right\rangle$ הינה C^α).

טענה: יהי v שדה וקטורי על $\mathcal{M}$ אזי (v הוא C^α)$\Longleftrightarrow$($v:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^k$ הינה C^α).

שדה וקטורי C^{m} מעל תת־קבוצה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$ אזי $v:A\to\mathbb{R}^{k}$ עבורו $v\left(x\right)\in T_{x}\left(\mathcal{M}\right)$ וכן לכל $p\in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ וקיים $u\in\mathfrak{X}^{m}\left(\mathcal{U}\right)$ עבורו $u_{\restriction A\cap\mathcal{U}}=v_{\restriction A\cap\mathcal{U}}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}$ יריעה תהא $A\subseteq\mathcal{M}$ ותהא $v:A\to\mathbb{R}^{k}$ אזי (v שדה וקטורי C^{α} מעל A)$\Longleftrightarrow$(קיימת $A\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה ב־$\mathcal{M}$ וקיימת $u\in\mathfrak{X}^{\alpha}\left(\mathcal{U}\right)$ עבורה $u_{\restriction\mathcal{U}}=v$).

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\varphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\nabla\varphi\in\mathfrak{X}^{0}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ על־משטח קשיר אזי ($\mathcal{M}$ בעל 0 קו־אוריינטציות)$\vee$($\mathcal{M}$ בעל 2 קו־אוריינטציות).

שטף: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}\right)=\int_{\mathcal{M}}\left\langle F\left(x\right),N\left(x\right)\right\rangle \text{dVol}_{n-1}\left(x\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ ויהיו $F_{1},F_{2}\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורם F_{1},F_{2} שדות וקטוריים דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{\alpha F_{1}+\beta F_{2}}\left(\mathcal{M}\right)=\alpha\text{Flux}_{F_{1}}\left(\mathcal{M}\right)+\beta\text{Flux}_{F_{2}}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: יהיו $\mathcal{M}_{1},\mathcal{M}_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטחים זרים עד כדי קבוצה זניחה בעלי קו־אוריינטציה N_{1},N_{2} בהתאמה ויהי $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}_{1},\mathcal{M}_{2}$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(M_{1}\cup\mathcal{M}_{2}\right)=\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}_{1}\right)+\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}_{2}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח בעל קו־אוריינטציה N ויהי $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M},N\right)=\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M},-N\right)$.

דיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\text{div}\left(F\right)\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_{i}}{\partial x_{i}}\left(x\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ נגדיר $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{n}$ כך $f\left(x\right)=F\left(x\right)$ אזי $\text{div}\left(F\right)\left(x\right)=\text{trace}\left(\mathcal{D}_{x}\left(f\right)\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ ותהא $A\in\text{GL}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\text{div}\left(A\circ F\right)\left(A^{-1}x\right)=\text{div}\left(F\right)\left(x\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה יהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\text{div}\left(f\cdot F\right)=f\cdot\text{div}\left(F\right)+\left\langle \nabla f,F\right\rangle$.

לפלסיאן: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\Delta f=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}^{2}}$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\Delta f=\text{div}\left(\nabla f\right)$.

סימון: תהא $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Cube}_{\ell}\left(x\right)=\left\{ Q\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\left(x\in Q\right)\wedge\left(\ell\text{ אורך הצלע של }Q\text{ הוא}\right)\wedge\left(\text{קובייה }Q\right)\right\}$.

הערה: תהא $x\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $Q\in\text{Cube}_{\ell}\left(x\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial Q\right)=\sum\text{Flux}_{F}\left(E_{i}\right)$ כאשר $\left\{ E_{i}\right\}$ פאות Q עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני ל־Q.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\text{div}\left(F\right)\left(x\right)=\lim_{\substack{Q\in\text{Cube}_{\ell}\left(x\right)\\ \ell\to0}}\frac{1}{\text{Vol}_{n}\left(Q\right)}\text{Flux}_{F}\left(\partial Q\right)$.

נקודת שפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $x\in\partial\mathcal{U}$ עבורה קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של x וקיימת $f\in C^{1}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ עבורה $\nabla_{x}f\neq0$ וכן $f\left(x\right)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\left\{ f<0\right\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}=\left\{ x\in\partial\mathcal{U}\mid\text{נקודת שפה חלקה }x\right\}$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה תהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ באשר $\mathcal{W}$ סביבה של x המקיימת $\nabla_{x}f\neq0$ וכן $f\left(x\right)=0$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\left\{ f<0\right\}$ אזי $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}\left(x\right)=\left(\mathcal{W},f\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיימת $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של x עבורה $\mathcal{W}\cap\partial\mathcal{U}$ היפר־משטח.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ פתוחה ביחס ל־$\partial\mathcal{U}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ יריעה.

קבוצה חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $\partial\mathcal{U}=\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$.

קבוצה בעלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\text{Vol}_{n}\left(\left(\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)+B_{\varepsilon}^{n}\left(0\right)\right)=0$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ עבורה $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}\left(x\right)=\left(\mathcal{W},f\right)$ אזי $\frac{\nabla f}{\left\Vert \nabla f\right\Vert }:\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{n}$ נורמל יחידה.

קו־אוריינטציה חיצונית קנונית לשפה חלקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $N:\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $x\in\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ באשר $\text{Smooth}_{\mathcal{U}}\left(x\right)=\left(\mathcal{W},f\right)$ מתקיים $N_{\restriction\mathcal{W}\cap\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}=\frac{\nabla f}{\left\Vert \nabla f\right\Vert }$.

שטף: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ בעלת שפה כמעט חלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\partial\mathcal{U}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\text{Flux}_{F}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)$.

למה: יהי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ על־משטח תהא N קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}$ יהי $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}$ ותהא $A\in\text{GL}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\text{Flux}_{A\circ F}\left(A\cdot\mathcal{M}\right)=\text{Flux}_{F}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ יהי $r>0$ תהא $g\in C^{1}\left(B_{r}\left(a\right),\mathbb{R}\right)$ באשר $\frac{\partial g}{\partial x_{i}}\neq0$ לכל $i\in\left[n\right]$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ באשר $\text{supp}\left(F\right)\subseteq B_{r}\left(a\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\left\{ g<0\right\} \right)=\int_{\left\{ g<0\right\} }\text{div}\left(F\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $a\in\partial\mathcal{U}\backslash\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}$ אזי קיים $r>0$ עבורו לכל $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיים $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ולכל $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ המקיים $\text{supp}\left(F\right)\subseteq B_{r}\left(a\right)$ מתקיים $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה וחלקה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ויהי $\varepsilon>0$ אזי $X+B_{\varepsilon}\left(0\right)$ מדידה ז'ורדן.

למה: תהא $X\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית אזי קיים $C\in\mathbb{R}$ עבורו לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\psi\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ המקיימת

- $0\le\psi\le1$.
- $\psi_{\restriction X+B_{\varepsilon}(0)}=1$.
- $\psi_{\restriction\mathbb{R}^{n}\backslash(X+B_{3\varepsilon}(0))}=0$.
- לכל $i\in[n]$ מתקיים $\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_{i}}\right|\le\frac{C}{\varepsilon}$.

משפט הדיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{W}\right)$ אזי $\text{Flux}_{F}\left(\partial\mathcal{U}\right)=\int_{\mathcal{U}}\text{div}\left(F\right)$.

טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ ויהי N נורמל חיצוני ל־$\mathcal{U}$ אזי $\text{Vol}_{n}\left(\mathcal{U}\right)=\frac{1}{n}\int_{\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}}\left\langle x,N\right\rangle \text{dVol}_{n-1}\left(x\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ תהיינה $f,g\in C^{1}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\int_{\mathcal{U}}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\cdot g\right)=\int_{\partial\mathcal{U}}\left(f\cdot g\cdot\left\langle N,v\right\rangle \right)-\int_{\mathcal{U}}\left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial v}\right)$.

טענה נוסחאות גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $u,v:\mathcal{W}\to\mathbb{R}$ אזי

1. נניח כי u הינה C^{2} אזי $\int_{G}\Delta u=\int_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial N}$.
2. נניח כי v הינה C^{2} וכן u הינה C^{1} אזי $\int_{G}\left\langle \nabla u,\nabla v\right\rangle =-\int_{G}u\cdot\Delta v+\int_{\partial G}u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.
3. נניח כי u,v הן C^{2} אזי $\int_{G}\left(u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u\right)=\int_{\partial G}\left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial N}\right)$.

אנרגיית דיריכלה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_{G}\left\Vert \nabla v\right\Vert ^{2}$.

מסקנה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $v\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $\int_{G}\left\Vert \nabla v\right\Vert ^{2}=-\int_{G}v\cdot\Delta v+\int_{\partial G}v\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$.

פונקציה הרמונית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $u\in C^{2}\left(G,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $\Delta u=0$.

טענה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\text{sm}}G\right)<\infty$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי

- $\text{Flux}_{\nabla u}\left(\partial G\right)=0$.
- נניח כי $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction\partial G}=0$ אזי u קבועה מקומית ב־G.
- נניח כי $u_{\restriction\partial G}$ קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב־G.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $⨍_{\mathcal{U}}f=\frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{U})}\int_{\mathcal{U}}f$.

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{B_{r}\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=⨍_{\partial B_{r}(a)}u$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ יהי $r>0$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה באשר $\overline{B_{r}\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ ותהא $u\in C^{2}\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ הרמונית אזי $u\left(a\right)=⨍_{B_{r}(a)}u$.

טענה: תהא $f\in C^{2}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Delta f\left(a\right)=\lim_{r\to0}\frac{2n}{r^{2}}\left(⨍_{\partial B_{r}(a)}f-f\left(a\right)\right)$.

מסקנה עקרון המקסימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\max\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

מסקנה עקרון המינמום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב־G וכן $\min\left(u\left(\overline{G}\right)\right)\in u\left(G\right)$ אזי u קבועה.

משפט ליוביל: תהא $u:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי u קבועה.

מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלעיל אזי u קבועה.

טענה אינטגרל פואסון: יהי $n\ge3$ תהא $u\in C^{2}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ באשר $\text{supp}\left(u\right)$ קומפקטי ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $u\left(a\right)=\frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})(n-2)}\int_{\mathbb{R}^{n}}\frac{\Delta u(x)}{\left|x-a\right|^{n-2}}\text{d}x$.

משפט גרעין פואסון: תהא $u:\overline{B_{1}^{n}\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ רציפה באשר $u_{\restriction B_{1}^{n}(0)}$ הרמונית אזי לכל $a\in B_{1}^{n}\left(0\right)$ מתקיים $u\left(a\right)=\frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u\left(x\right)\cdot\frac{1-\left\Vert a\right\Vert ^{2}}{\left\Vert x-a\right\Vert ^{n}}\text{dVol}_{n-1}$.

מסקנה: תהא $f\in C^{2}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}\right)$ אזי $u:\overline{B_{1}^{n}\left(0\right)}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $u\left(x\right)=\frac{1}{\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y\right)\cdot\frac{1-\left\Vert x\right\Vert ^{2}}{\left\Vert y-x\right\Vert ^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y\right)$ הינה הרמונית וכן $u_{\restriction_{\mathbb{S}^{n-1}}}=f$.

המרחב הדואלי: יהי V מ"ו ממשי אזי $V^{*}=\mathrm{Hom}\left(V,\mathbb{R}\right)$.

סימון: יהי V מ"ו ממשי ויהי $\left\{ e_{1}\ldots e_{n}\right\}$ בסיס של V ויהי $i\in\left[n\right]$ אזי $e_{i}^{*}:V\to\mathbb{R}$ המוגדרת $e_{i}^{*}\left(e_{j}\right)=\delta_{i,j}$.

טענה: יהי V מ"ו ממשי ויהי $\left\{ e_{1}\ldots e_{n}\right\}$ בסיס של V אזי $\left\{ e_{1}^{*}\ldots e_{n}^{*}\right\}$ בסיס של V^{*}.

המרחב הקו־משיק: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}\left(\mathcal{M}\right)^{*}$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $T_{p}^{*}\left(\mathcal{M}\right)=T_{p}\left(\mathcal{M}\right)^{*}$.

קו־וקטורים: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $p\in\mathcal{M}$ אזי $v\in T_{p}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

1־תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\omega:\mathcal{M}\to\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{*}$ המקיימת $\omega\left(x\right)\in T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא ω 1־תבנית דיפרנציאלית על $\mathcal{M}$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\omega_{x}=\omega\left(x\right)$.

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_{x}\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{*}$ אלא $\omega_{x}\in T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: יהי $v\in\mathfrak{X}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\omega_{x}\left(u\right)=\left\langle v\left(x\right),u\right\rangle$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

נגזרת חיצונית: תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}f:\mathcal{M}\to\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{*}$ המוגדרת $\left(\mathrm{d}f\right)\left(x\right)\left(v\right)=\frac{\partial f}{\partial v}\left(x\right)$.

טענה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}f$ 1־תבנית דיפרנציאלית.

טענה כלל לייבניץ': תהיינה $f,g\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ אזי $\mathrm{d}\left(f\cdot g\right)=f\cdot\mathrm{d}g+g\cdot\mathrm{d}f$.

הטלה: יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $i\in\left[n\right]$ אזי $q_{i}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $q_{i}\left(u\right)=u_{i}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $x_{i}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $x_{i}=q_{i}\circ\varphi$.

מערכת קואורדינטות מקומיות על יריעה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\left\{ x_{1}\ldots x_{k}\right\}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ויהי $i\in\left[k\right]$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(p\right)=\frac{\partial\left(f\circ\varphi^{-1}\right)}{\partial x_{i}}\left(\varphi\left(p\right)\right)$.

הערה: מטרת הסימונים מלעיל הינה לאפשר קואורדינטות $x_{1}\ldots x_{k}$ על $\mathcal{M}$ כמו ב־$\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $i\in\left[k\right]$ אזי $\mathrm{d}x_{i}$ 1־תבנית דיפרנציאלית ב־$\mathcal{U}$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ תהא $p\in\mathcal{M}$ ויהי $i\in\left[n\right]$ אזי $\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(p\right)=\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_{i}}\left(\varphi\left(p\right)\right)$.

סימון: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i\in\left[k\right]$ ויהי $p\in\mathcal{U}$ אזי $\mathrm{d}x_{i}|_{p}=\mathrm{d}x_{i}\left(p\right)$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ ויהי $x\in\mathcal{U}$ אזי $\left\{ \mathrm{d}x_{1}|_{x},\ldots,\mathrm{d}x_{k}|_{x}\right\}$ בסיס של $T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}\right)$.

טענה: תהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ יהי $i\in\left[k\right]$ ויהי $p\in\mathcal{U}$ אזי $\mathrm{d}x_{i}|_{p}=\left(\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(p\right)\right)^{*}$.

1־תבנית דיפרנציאלית C^{m}: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי 1־תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ של $\mathcal{M}$ ולכל $f_{1}\ldots f_{k}\in\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ באשר $\omega=\sum_{i=1}^{k}f_{i}\cdot\mathrm{d}x_{i}$ מתקיים $f_{1}\ldots f_{k}\in C^{m}\left(\mathcal{U}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא ω 1־תבנית דיפרנציאלית אזי $\left(\omega\in C^{m}\right)\Longleftrightarrow$(קיים אטלס $\left\{ \left(\mathcal{U}_{\alpha},\varphi_{\alpha}\right)\right\} _{\alpha\in\Lambda}$ של $\mathcal{M}$ עבורו לכל $\alpha\in\Lambda$ ולכל $f_{1}\ldots f_{k}\in\mathcal{U}_{\alpha}\to\mathbb{R}$ באשר $\omega=\sum_{i=1}^{k}f_{i}\cdot\mathrm{d}x_{i}$ מתקיים $f_{1}\ldots f_{k}\in C^{m}\left(\mathcal{U}_{\alpha}\right)$).

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)=\left\{ \omega\mid\mathcal{M}\text{ על }C^{\infty}\text{ 1־תבנית דיפרנציאלית }\omega\right\}$.

טענה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהא $\left(\mathcal{U},\varphi\right)$ מפה על $\mathcal{M}$ אזי $\mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\cdot\mathrm{d}x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in C^{m+1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\mathrm{d}f$ הינה 1־תבנית דיפרנציאלית C^{m}.

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right)$ אזי $F^{*}:\Omega^{1}\left(\mathcal{N}\right)\to\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $F^{*}\left(\omega,x,v\right)=\omega_{F\left(x\right)}\left(\mathcal{D}_{x}\left(F\right)\cdot v\right)$.

סימון: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $N\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $F\in C^{1}\left(M,N\right)$ אזי $\left(F_{\omega}^{*}\right)_{x}\left(v\right)=F^{*}\left(\omega,x,v\right)$.

אינטגרל קווי מסוג שני: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega=\int_{a}^{b}\omega_{\gamma\left(t\right)}\left(\gamma'\left(t\right)\right)\mathrm{d}t$.

טענה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין אזי $\int_{\gamma}:\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)\to\mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה C^{1} למקוטעין תהא $\psi:\left[\alpha,\beta\right]\to\left[a,b\right]$ מסילה C^{1} למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\int_{\gamma}\omega=\int_{\gamma\circ\psi}\omega$.

העתקה לינארית שומרת אוריינטציה: העתקה $\varphi\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\det\left(\left[\varphi\right]_{\mathrm{st}}\right)>0$.

דיפאומורפיזם שומר אוריינטציה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי דיפאומורפיזם $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ עבורו $\mathcal{D}_{x}\left(f\right)$ שומרת אוריינטרציה לכל $x\in\mathcal{U}$.

אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathcal{M}$ מסילה פשוטה אזי $O:\mathrm{Im}\left(\gamma\right)\to\mathbb{R}^{n}$ רציפה למקוטעין עבורה $O\left(x\right)\in\left\{ \pm\dot{\gamma}\left(\gamma^{-1}\left(x\right)\right)\right\}$.

הערה: אם המסילה לא פשוטה נפרק אותה מספר מסילות פשוטות ונחבר בסוף.

האוריינטציה הסטנדרטית של מסילה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה פשוטה C^1 למקוטעין אזי $O:\operatorname{Im}(\gamma)\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת $O(x)=\dot{\gamma}\left(\gamma^{-1}(x)\right)$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי האוריינטציה הסטנדרטית של γ הינה אוריינטציה של $\operatorname{Im}(\gamma)$.

היפוך אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\overline{\gamma}:[a,b]\to\mathcal{M}$ המוגדרת $\overline{\gamma}(t)=\gamma(a+b-t)$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\int_{\overline{\gamma}}\omega=-\int_{\gamma}\omega$.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ותהא $\omega\in\Omega^1([a,b])$ אזי $\int_a^b\omega=-\int_b^a\omega$.

שרשור מסילות: תהא $\gamma_1:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\gamma_2:[b,c]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $(\gamma_1\cup\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(t) & t\in[a,b]\\ \gamma_2(t) & t\in(b,c]\end{cases}$.

טענה: תהא $\gamma_1:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין תהא $\gamma_2:[b,c]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\omega=\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר לכל $t\in[a,b]$ קיימת $\mathcal{U}$ סביבה של $\gamma(t)$ בה f הינה C^1 אזי $\int_{\gamma}\mathrm{d}f=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$.

סימון: תהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\|\omega_x\|_{\infty}=\max\{\omega_x(v)\mid(v\in T_x(\mathcal{M}))\wedge(\|v\|=1)\}$.

טענה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\gamma}\omega\le\operatorname{Length}(\gamma)\cdot\max_{t\in[a,b]}\left\|\omega_{\gamma(t)}\right\|_{\infty}$.

הערה: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G)<\infty$ אזי ניתן לחשוב על ∂G בתור איחוד סופי זר של מסילות סגורות.

אוריינטציית רגל שמאל: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G)<\infty$ תהא N קו־אוריינטציה חיצונית של ∂G ותהיינה $\gamma_1\ldots\gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup\gamma_i=\partial G$ אזי אוריינטציה $O:\partial G\to\mathbb{R}^2$ עבורה $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot O(x)=-N(x)$ לכל $x\in\partial G$.

טענה פרמטריזציה נורמלית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 אזי קיימות $\gamma_1\ldots\gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup\gamma_i=\partial G$ וכן לכל $i\in[m]$ ולכל $t\in\operatorname{Dom}(\gamma_i)$ מתקיים $\|\gamma_i'(t)\|=1$.

משפט גרין: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G}\subseteq\mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהיינה $P,Q\in C^1(\mathcal{W})$ אזי $\int_{\partial G}(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y)=\int_G\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

מסקנה נוסחת גאוס: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G)<\infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין אזי $\operatorname{Area}(G)=\frac{1}{2}\int_{\partial G}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

העתקה לינארית אנטי סימטרית: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $T\in\operatorname{Hom}(V^k,\mathbb{R})$ עבורה לכל $u_1\ldots u_k\in V$ ולכל $i,j\in[k]$ שונים מתקיים כי $T\left(\begin{pmatrix}u_1\\\vdots\\u_k\end{pmatrix}\right)=-T\left(R_{i\leftrightarrow j}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\\vdots\\u_k\end{pmatrix}\right)$.

הערה: יהיו $i,j\in[n]$ אזי $R_{i\leftrightarrow j}\in M_n(A)$ הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות i,j.

k־תבנית: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\bigwedge^k V^*=\left\{\omega\in\operatorname{Hom}(V^k,\mathbb{R})\mid\text{אנטי סימטרית }\omega\right\}$.

סימון: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\bigwedge^0 V^*=\mathbb{R}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\det_n\in\bigwedge^n V^*$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהיו $u_1\ldots u_k\in V$ תלויים לינארית ותהא $\omega\in\bigwedge^k V^*$ אזי $\omega(u_1\ldots u_k)=0$.

מכפלת וודג'/מכפלת יתד: יהיו $\varphi_1\ldots\varphi_k\in V^*$ אזי $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\in\bigwedge^k V^*$ באשר $(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)(u_1\ldots u_k)=\det\left((\varphi_i(u_j))_{i,j\in[k]}\right)$ לכל $u_1\ldots u_k\in V$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ יהי $e_1\ldots e_n$ בסיס של V ויהי $k\in[n]$ אזי $\left\{e_{a_1}^*\wedge\ldots\wedge e_{a_k}^*\,\middle|\,1\le a_1<\ldots<a_k\le n\right\}$ בסיס של $\bigwedge^k V^*$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\dim\left(\bigwedge^k V^*\right)=\binom{n}{k}$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim(V)=n$ אזי $\bigwedge^n V^*=\operatorname{span}\{\det_n\}$.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $k,\ell\in\mathbb{N}$ אזי קיימת ויחידה $\wedge:\bigwedge^k V^*\times\bigwedge^\ell V^*\to\bigwedge^{k+\ell}V^*$ עבורה $(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k)\wedge(\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k)=\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_k\wedge\psi_1\wedge\ldots\wedge\psi_k$ לכל $\varphi_1\ldots\varphi_k,\psi_1\ldots\psi_\ell\in V^*$.

p־תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega:\mathcal{M}\to\operatorname{Hom}((\mathbb{R}^n)^p,\mathbb{R})$ המקיימת $\omega(x)\in\bigwedge^p T_x^*(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω p־תבנית דיפרנציאלית על $\mathcal{M}$ ותהא $x\in\mathcal{M}$ אזי $\omega_x=\omega(x)$.

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_x\in\operatorname{Hom}((\mathbb{R}^n)^p,\mathbb{R})$ אלא $\omega_x\in\bigwedge^p T_x^*(\mathcal{M})$.

מכפלת וודג'/מכפלת יתד: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא ω p־תבנית דיפרנציאלית ותהא ν q־תבנית דיפרנציאלית אזי $\omega\wedge\nu$ הינה $(p+q)$־תבנית דיפרנציאלית באשר $\left(\omega\wedge\nu\right)_{x}=\omega_{x}\wedge\nu_{x}$.

סימון: תהא $a:[p]\to[k]$ באשר $1\le a_{1}<\ldots<a_{k}\le n$ אזי $\mathrm{d}x_{\{a_{1}\ldots a_{p}\}}=\mathrm{d}x_{a_{1}}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{a_{p}}$.

p־תבנית דיפרנציאלית C^{m}: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי p־תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ של $\mathcal{M}$ ולכל $f\in\mathcal{P}_{p}\left([k]\right)\to\left(\mathcal{U}\to\mathbb{R}\right)$ באשר $\omega=\sum_{I\in\mathcal{P}_{p}([k])}f_{I}\cdot\mathrm{d}x_{I}$ מתקיים $f_{I}\in C^{m}\left(\mathcal{U}\right)$ לכל $I\in\mathcal{P}_{p}\left([k]\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי $\Omega^{p}\left(\mathcal{M}\right)=\{\omega\mid$ הינה p־תבנית דיפרנציאלית C^{∞} על $\mathcal{M}\}$.

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right)$ אזי $H^{*}:\Omega^{p}\left(\mathcal{N}\right)\to\Omega^{p}\left(\mathcal{M}\right)$ המוגדרת $H^{*}\left(\omega,x,v_{1}\ldots v_{p}\right)=\omega_{H(x)}\left(\mathcal{D}_{x}\left(H\right)\cdot v_{1},\ldots,\mathcal{D}_{x}\left(H\right)\cdot v_{p}\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $H\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right)$ אזי $\left(H_{\omega}^{*}\right)_{x}\left(v\right)=H^{*}\left(\omega,x,v\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ יריעה תהא $\mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\mathcal{L}\subseteq\mathbb{R}^{\ell}$ יריעה תהא $H\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{N}\right)$ ותהא $G\in C^{1}\left(\mathcal{N},\mathcal{L}\right)$ אזי $\left(G\circ H\right)^{*}=H^{*}\circ G^{*}$.

נגזרת חיצונית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\mathrm{d}:\Omega^{p}\left(\mathcal{U}\right)\to\Omega^{p+1}\left(\mathcal{U}\right)$ המוגדרת $\mathrm{d}\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_{p}([k])}f_{I}\cdot\mathrm{d}x_{I}\right)=\sum_{I\in\mathcal{P}_{p}([k])}\left(\mathrm{d}f_{I}\wedge\mathrm{d}x_{I}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי d לינארית.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\omega\right)=0$.

סימון: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\Omega\left(\mathcal{U}\right)=\bigcup_{p\in\mathbb{N}_{+}}\Omega^{p}\left(\mathcal{U}\right)$.

אופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות דיפרנציאליות: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי $\mathrm{b}:\Omega\left(\mathcal{U}\right)\to\Omega\left(\mathcal{U}\right)$ באשר $\mathrm{b}\left(\omega\right)\in\Omega^{p+1}\left(\mathcal{U}\right)$ לכל $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{U}\right)$ המקיימת $\mathrm{b}\left(\alpha_{1}\wedge\ldots\wedge\alpha_{k}\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(-1\right)^{i+1}\left(\alpha_{1}\wedge\ldots\wedge\alpha_{i-1}\wedge\mathrm{b}\left(\alpha_{i}\right)\wedge\alpha_{i+1}\wedge\ldots\wedge\alpha_{k}\right)$ לכל $\alpha_{1}\ldots\alpha_{k}\in\mathcal{U}^{*}$.

טענה כלל לייבניץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי d מקיימת את כלל לייבניץ.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $\mathrm{b}:\Omega\left(\mathcal{U}\right)\to\Omega\left(\mathcal{U}\right)$ לינארית המקיימת את כלל לייבניץ וכן $\mathrm{b}\left(\mathrm{b}\left(\omega\right)\right)=0$ לכל $\omega\in\Omega\left(\mathcal{U}\right)$ וכן $\mathrm{b}\left(f\right)=\mathrm{d}f$ לכל $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $\mathrm{b}=\mathrm{d}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}\right)$ אזי $\mathrm{d}\left(F_{\omega}^{*}\right)=F_{\mathrm{d}\omega}^{*}$.

טענה: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}\right)$ אזי $\left(F^{-1}\right)^{*}=\left(F^{*}\right)^{-1}$.

סימון: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}\right)$ אזי $F^{-*}=\left(F^{-1}\right)^{*}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}\right)$ ותהיינה $\left(\mathcal{U}_{1},\varphi_{1}\right),\left(\mathcal{U}_{2},\varphi_{2}\right)$ מפות אזי $\varphi_{2}^{*}\left(\mathrm{d}\left(\varphi_{2}^{-*}\left(\omega\right)\right)\right)=\varphi_{1}^{*}\left(\mathrm{d}\left(\varphi_{1}^{-*}\left(\omega\right)\right)\right)$.

הגדרה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\mathrm{d}\omega\in\Omega^{p+1}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה לכל מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ מתקיים $\varphi^{-*}\left(\mathrm{d}\omega\right)=\mathrm{d}\left(\varphi^{-*}\omega\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה תהא $(\mathcal{M},\varphi)$ מפה ותהא $\omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}\right)$ אזי $\mathrm{d}\omega=\varphi^{*}\left(\mathrm{d}\left(\varphi^{-*}\omega\right)\right)$.

הערה: בקבוצה $\mathbb{R}^{n}$ עצמה p־תבנית היא שקולה ל־p־תבנית דיפרנציאלית מהיות ומתקיים $T_{p}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\mathbb{R}^{n}$.

מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ באשר $\dim\left(V\right)=n$ אזי $\det_{n}=\mathrm{d}x_{1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{n}$.

אינגטרל: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U}\right)$ עבורה $f\cdot\mathrm{d}x_{1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{k}$ בעלת תומך קומפקטי אזי $\int_{\mathcal{U}}\left(f\cdot\mathrm{d}x_{1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{n}\right)=\int_{\mathcal{U}}f\left(x\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{k}$.

הערה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה ויהי $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{U}\right)$ אזי קיימת $f\in C\left(\mathcal{U}\right)$ עבורה $\omega=f\cdot\det_{k}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחומים יהי $F:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{U}\right)$ בעלת תומך קומפקטי אזי $\int_{\mathcal{U}}\omega=\mathrm{sign}\left(\det\left(\mathcal{D}\left(T\right)\right)\right)\cdot\int_{\mathcal{V}}T_{\omega}^{*}$.

תבנית נפח: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי $\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורה $\omega_{x}\neq0$ לכל $x\in\mathcal{M}$.

תבניות נפח שקולות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית אזי תבניות נפח $\omega_{1},\omega_{2}\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ עבורן קיימת $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ באשר $f>0$ המקיימת $\omega_{2}=f\cdot\omega_{1}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה אזי שקילות תבניות נפח על $\mathcal{M}$ הינו יחס שקילות.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה קשירה אזי קיימות לכל היותר 2 מחלקות שקילות של תבניות נפח על $\mathcal{M}$.

אוריינטציה של יריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה קשירה אזי מחלקת שקילות של תבניות נפח על $\mathcal{M}$.

האוריינטציה האוקלידית הסטנדרטית: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי מחלקת השקילות של $\det_{n}$.

תבנית נפח חיובית: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה אזי תבנית נפח $\eta\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}\right)$ השייכת לאוריינטציה.

מפה משמרת אוריינטציה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה אזי מפה $(\mathcal{U},\varphi)$ עבורה לכל η תבנית נפח חיובית על $\mathcal{U}$ מתקיים כי $\left(\varphi^{-1}\right)^{*}\left(\eta\right)$ תבנית נפח חיובית על $\mathbb{R}^{k}$.

טענה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה ותהא $(\mathcal{U},\varphi)$ מפה אזי קיימת מפה משמרת אוריינטציה $(\mathcal{U},\psi)$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה תהיינה $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$ מפות משמרות אוריינטציה ותהא $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ בעלת תומך קומפקטי עבורה $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ אזי $\int_{\psi(\mathcal{V})} \psi_\omega^{-*} = \int_{\varphi(\mathcal{U})} \varphi_\omega^{-*}$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית עם אוריינטציה תהא $(\mathcal{U}, \varphi)$ מפה משמרת אוריינטציה ותהא $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ בעלת תומך קומפקטי עבורה $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq \mathcal{U}$ אזי $\int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\varphi(\mathcal{U})} \varphi_\omega^{-*}$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא ω k־תבנית יהיו $\{(\mathcal{V}_i, \psi_i)\}_{i=1}^\infty, \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ כיסויים של $\operatorname{supp}(\omega)$ יהי $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ פירוק יחידה של $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ ויהי $\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ פירוק יחידה של $\{(\mathcal{V}_i, \psi_i)\}_{i=1}^\infty$ אזי $\sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{M}} (\eta_i \cdot \omega) = \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{M}} (\rho_i \cdot \omega)$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית תהא ω k־תבנית יהי $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ כיסוי של $\operatorname{supp}(\omega)$ ויהי $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ פירוק יחידה של $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ אזי $\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{M}} (\rho_i \cdot \omega)$.

משפט גרין בשפה של תבנית: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל־G ותהא ω 1־תבנית על $\mathcal{W}$ אזי $\int_G \mathrm{d}\omega = \int_{\partial G} \omega$ באשר ∂G עם אוריינטציית רגל שמאל.

1־תבנית דיפרנציאלית סגורה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ עבורה $\mathrm{d}\omega = 0$.

1־תבנית דיפרנציאלית מדוייקת: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ עבורה קיימת $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ המקיימת $\omega = \mathrm{d}f$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ מדוייקת אזי ω סגורה.

1־תבנית דיפרנציאלית משמרת: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ עבורה לכל מסילה סגורה C^1 למקוטעין γ מתקיים $\int_\gamma \omega = 0$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי (ω משמרת)$\Longleftrightarrow$(קיימת $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ עבורה לכל $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין מתקיים $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$).

טענה: תהא $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ סגורה אזי ω משמרת.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי (ω מדוייקת)$\Longleftrightarrow$(ω משמרת).

מסקנה: תהא $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ אזי (ω סגורה)$\Longleftrightarrow$(ω מדוייקת)$\Longleftrightarrow$(ω משמרת).

שפה גאומטרית/קצה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\partial_g \mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \backslash \mathcal{M}$.

נקודת קצה חלקה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $x \in \partial_g(\mathcal{M})$ עבורה קיים $\delta > 0$ וקיימת יריעה $\mathcal{N} \subseteq B_\delta(x)$ באשר $\mathcal{M} \cap B_\delta(x) \subseteq \mathcal{N}$ וקיימת $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ וקיימת פרמטריזציה טובה $r : \mathcal{V} \to \mathcal{N}$ עבורן $r^{-1}(x) \in \partial^{\text{sm}}\left(r^{-1}(\mathcal{N})\right)$.

יריעה בעלת קצה חלק: יריעה $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה כל $x \in \partial_g \mathcal{M}$ הינה נקודת קצה חלקה.

מסקנה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית בעלת קצה חלק אזי $\partial_g \mathcal{M}$ יריעה $(k-1)$־מימדית.

אוריינטציה מושרית על קצה חלק: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית בעלת קצה חלק יהי N קו־אוריינטציה ותהא $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ תבנית נפח אזי $\omega^\partial \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M})$ המוגדרת $\omega_x^\partial(u_1 \ldots u_{k-1}) = \omega_x(N(x), u_1 \ldots u_{k-1})$.

משפט סטוקס: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k־מימדית חסומה בעלת קצה חלק ותהא $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial_g \mathcal{M}} \omega$.