

**מרוכבים:** מרחב וקטורי  $\mathbb{R}^2$  מעל  $\mathbb{R}$  עם הפעולות הסטנדרטיות.

**סימון:** נסמן את המרוכבים בעזרת  $\mathbb{C}$ .

**הערה:** נשתמש ב- $\mathbb{C}$  בהתאמה  $1 \mapsto (1, 0)$  וכן ההגדרה  $i = (0, 1)$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי קיימים ויחידים  $a, b \in \mathbb{R}$  עבורם  $z = a + ib$ .

**מטריצה קונפורמית:**  $A \in M_2(\mathbb{R})$   $0 \neq A$  המקיימת  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$   $\exists a, b \in \mathbb{R}$ .

**סימון:**  $A \in M_2(\mathbb{R})$  קונפורמית  $\iff A \in O(n)$ .

**טענה:** ההעתקה  $T \in \text{Hom}(\mathbb{C}, O(2))$  המוגדרת  $T(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  היא איזומורפיזם.

**טענה:** תהא  $A \in M_2(\mathbb{R})$  אזי  $A \iff A$  קונפורמית (הפיכה ושוברת זווית).

**מטריצה אנטי-קונפורמית:**  $A \in M_2(\mathbb{R})$   $0 \neq A$  המקיימת  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$   $\exists a, b \in \mathbb{R}$ .

**טענה:** תהא  $A \in M_2(\mathbb{R})$  אזי  $A \iff A$  אנטי-קונפורמית (הפיכה והופכת זווית).

**משפט:** תהא  $A \in M_2(\mathbb{R})$  אזי קיימות ויחידות  $B, C \in M_2(\mathbb{R})$  באשר  $B$  קונפורמית או  $0$  וכן  $C$  אנטי-קונפורמית או  $0$  עבורן  $A = B + C$ .

**מכפלת מרוכבים:** יהיו  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  אזי  $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ .

**טענה:**  $i^2 = -1$ .

**החלק הממשי:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\text{Re}(a + ib) = a$ .

**החלק המדומה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\text{Im}(a + ib) = b$ .

**הצמוד:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\overline{a + ib} = a - ib$ .

**הערך המוחלט:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**מספר מדומה טהור:**  $z \in \mathbb{C}$  עבורו  $\text{Re}(z) = 0$ .

**מספר ממשי טהור:**  $z \in \mathbb{C}$  עבורו  $\text{Im}(z) = 0$ .

**למה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי

$$\bullet \overline{\overline{z}} = z$$

$$\bullet |\overline{z}| = |z|$$

$$\bullet z\overline{z} = |z|^2$$

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי  $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ .

**מסקנה:**  $\mathbb{C}$  עם הפעולות שהוגדרו מלעיל הינו שדה.

**טענה:** יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$  אזי

$$\bullet \text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\bullet \text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$\bullet \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\bullet \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \text{ נניח כי } w \neq 0$$

$$\bullet |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\bullet \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ נניח כי } w \neq 0$$

$$\bullet -|z| \leq \text{Re}(z) \leq |z|$$

$$\bullet -|z| \leq \text{Im}(z) \leq |z|$$

**טענה אי שוויון המשולש:** יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$  אזי  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

**טענה אי שוויון קושי שורץ:** יהיו  $z_1 \dots z_n, w_1 \dots w_n \in \mathbb{C}$  אזי  $\left|\sum_{i=1}^n z_i w_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right) \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\right)$ .

**מסקנה:** יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$  ויהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי

$$\bullet |z| - |w| \leq |z - w|$$

$$\bullet |a + ib| \leq |a| + |b|$$

**הצגה פולרית/הצגה קוטבית:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  אזי  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ .

**הארגומנט:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z| e^{i\theta}\}$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי קיים ויחיד  $\theta \in (-\pi, \pi]$  עבורו  $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ .

**הארגומנט העיקרי:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ויהי  $\theta \in \arg(z) \cap (-\pi, \pi]$  אזי  $\text{Arg}(z) = \theta$ .

**הערה:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי הארגומנט העיקרי קיים ויחיד.

**הערה:**  $\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**טענה:** יהיו  $\theta, \phi \in \mathbb{R}$  ויהיו  $r, s \geq 0$  אזי

$$\overline{r \cdot e^{i\theta}} = r \cdot e^{-i\theta} \bullet$$

$$(r \cdot e^{i\theta}) \cdot (s \cdot e^{i\phi}) = rs \cdot e^{i(\theta+\phi)} \bullet$$

**מסקנה:** יהיו  $w, z \in \mathbb{C}$  אזי  $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

**טענה:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  ויהי  $r > 0$  אזי  $(r \cdot e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$

**טענה:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  יהי  $r \geq 0$  ויהי  $n \in \mathbb{Z}$  אזי  $(r \cdot e^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta}$

**מסקנה נוסאת דה מואבר:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  ויהי  $n \in \mathbb{Z}$  אזי  $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

**טענה:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  יהי  $r \geq 0$  ויהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

**מסקנה שורשי יחידה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

**המשפט היסודי של האלגברה:** יהי  $p \in \mathbb{C}_{\geq 1}[x]$  אזי קיים  $x \in \mathbb{C}$  עבורו  $p(x) = 0$

**מסקנה:** יהי  $p \in \mathbb{C}_{\geq 1}[x]$  אזי קיימים  $a_0 \dots a_n \in \mathbb{C}$  עבורם  $p(x) = a_0 \prod_{i=1}^n (x - a_i)$

**הקוטב הצפוני:** נסמן ב- $\mathbb{R}^3$  את  $N = (0, 0, 1)$

**ספירה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

**ההמיספרה העליונה:** כל הנקודות  $(x, y, z) \in S^2$  המקיימות  $z > 0$

**ההמיספרה התחתונה:** כל הנקודות  $(x, y, z) \in S^2$  המקיימות  $z < 0$

**הטלה סטריאוגרפית:** נגדיר  $f: \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$  כך  $f(x + iy) = \left( \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, 1 - \frac{2}{x^2+y^2+1} \right)$

**הערה:** במרחב  $\mathbb{R}^3$  נגדיר את  $\mathbb{C}$  להיות שני הצירים הראשונים, אז ההטלה הסטריאוגרפית היא מבחינה מעשית  $f(p) = \text{line}_{p,N} \cap S^1$

**טענה:**  $f$  רציפה.

**טענה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי

$$(z \in S^1) \iff (f(z) = z) \bullet$$

$$(f(z)) \iff (z \text{ מחוץ ל-} S^1) \bullet$$

$$(f(z)) \iff (z \text{ בתוך } S^1) \bullet$$

**טענה:**  $f$  הפיכה ומתקיים  $f^{-1}: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$  כך  $f^{-1}(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}$

**סימון:**  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

**הספירה של רימן:**  $f$  ניתנת להרחבה רציפה  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$  וכן  $f(\infty) = N$

**טענה:** תהא  $A \subseteq S^2 \setminus \{N\}$  אזי  $A \iff f^{-1}[A]$  מעגל או ישר.

**מסקנה:** יהי  $C \subseteq S^2 \setminus \{N\}$  מעגל ויהי  $P$  מישור עבורו  $C = P \cap S^2$  אזי  $f^{-1}[C]$  ישר  $(N \in P) \iff$

**גבול:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ויהי  $z \in \mathbb{C}$  עבורם  $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. |a_n - a| < \varepsilon$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ויהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $(a_n \rightarrow z) \iff (|a_n - z| \rightarrow 0)$

**גבול אינסופי:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  עבורה  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$   $\forall M \in \mathbb{R}. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. M < |a_n|$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a_n \rightarrow \infty) \iff (|a_n| \rightarrow \infty)$

**טענה:** תהיינה  $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ויהיו  $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$  עבורם  $a_n \rightarrow z$  וכן  $b_n \rightarrow w$  אזי

$$a_n + b_n \rightarrow z + w \bullet$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow z \cdot w \bullet$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{z}{w} \text{ אזי } w \neq 0 \bullet$$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  ויהי  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  עבורם  $a_n \rightarrow z$  אזי

$$\overline{a_n} \rightarrow \overline{z} \bullet$$

$$|a_n| \rightarrow |z| \bullet$$

$$\text{Re}(a_n) \rightarrow \text{Re}(z) \bullet$$

$$\text{Im}(a_n) \rightarrow \text{Im}(z) \bullet$$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a) \iff (\text{Re}(a), \text{Im}(a))$  מתכנסות.

**מסקנה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a) \iff (\text{Re}(a), \text{Im}(a))$  מתכנסות  $(\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N. |a_n - a_m| < \varepsilon)$

**טענה:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  המקיימת  $|a_n| \rightarrow 0$  אזי  $a_n \rightarrow 0$

**מסקנה:** תהיינה  $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  באשר  $a$  חסומה וכן  $b_n \rightarrow 0$  אזי  $a_n b_n \rightarrow 0$

**הערה:** מכאן והלאה הסימון  $\mathbb{F}$  יתאר שדה מבין  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  וכאשר נאמר כי  $\mathcal{U}$  פתוחה הכוונה היא ביחס לשדה.

**גבול:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה תהא  $a \in \mathbb{F}_1$  תהא  $A \in \mathbb{F}_2$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$  עבורה

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \iff \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall z \in \mathcal{U} \setminus \{a\}. |z - a| < \delta \implies |f(z) - A| < \varepsilon$$

**משפט היינה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה אזי  $(\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A) \iff (\forall b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}. (b_n \rightarrow a) \implies (f(b_n) \rightarrow A))$

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה ותהינה  $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$  באשר  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$  וכן  $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = B$  אזי

$$\lim_{z \rightarrow a} (f + g)(z) = A + B \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} (fg)(z) = AB \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(z) = \frac{A}{B} \quad \bullet \text{ נניח } B \neq 0$$

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}$  פתוחה ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  באשר  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$  אזי

$$\lim_{z \rightarrow a} \overline{f(z)} = \overline{A} \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |A| \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(A) \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(A) \quad \bullet$$

**גבול אינסופי:** תהא  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ויהי  $a \in \mathbb{C}$

• שאיפה לאינסוף בנקודה: אם  $\forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}. |z - a| < \delta \implies M < |f(z)|$  אזי  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

• שאיפה לנקודה באינסוף: אם  $\forall \varepsilon > 0. \exists R > 0. \forall z \in \mathbb{C}. R < |z| \implies |f(z) - a| < \varepsilon$  אזי  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a$

• שאיפה לאינסוף באינסוף: אם  $\forall M > 0. \exists R > 0. \forall z \in \mathbb{C}. R < |z| \implies M < |f(z)|$  אזי  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$

**פונקציה רציפה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה יהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$  המקיימת  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$

**מסקנה:** כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

**נגזרת:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$  פתוחה יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$  אזי  $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$

**פונקציה הולומורפית:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה אזי  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה על כל  $\mathcal{U}$

**מסקנה:** כל מניפולציות הנגזרת של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

**הערה:** תהא  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  נסמן  $u + iv = f$  עבור  $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

**טענה:** תהא  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי  $f$  גזירה  $\iff (v, u)$  גזירות.

**למה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה אזי  $(f' = 0) \iff (\exists c \in \mathbb{C}. f = c)$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a)$

**מסקנה משוואות קושי-רימן:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה אזי  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right) \wedge \left( \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \right)$

**הגדרה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  דיפרנציאבילית אזי

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \bullet$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \bullet$$

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  גזירה אזי  $(f \text{ הולומורפית}) \iff \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \right)$

**טענה:** תהא  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $f$  גזירה  $\iff (\exists c \in \mathbb{R}. f = c)$

**משפט:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי  $f$  גזירה ברציפות  $\iff \left( (u, v \in C^1(\mathcal{U})) \wedge \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \right) \wedge \left( \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right)$

**לפלסיאן:** תהא  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים אזי  $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

**פונקציה הרמונית:**  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה פעמיים המקיימת  $\Delta g = 0$

**טענה:** תהא  $f \in C^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  אזי  $u, v$  הרמוניות.

**פונקציה צמודה הרמונית:** תהא  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה  $u + iv$  הולומורפית.

**טענה:** תהא  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ותהא  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  צמודה הרמונית ל- $u$  אזי  $u$  צמודה הרמונית ל- $(-v)$ .

**טענה:** יהי  $\sum_{i=0}^n a_i z^i \in \mathbb{C}[z]$  אזי  $\sum_{i=1}^n a_i i z^{i-1} = \left( \sum_{i=0}^n a_i z^i \right)'$

**טענה:** יהי  $f \in \mathbb{R}[z]$  אזי  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$   $\forall z \in \mathbb{C}$

**התכנסות טור:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  אזי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_n$  עבורה  $\sum_{i=0}^n a_n$  מתכנסת.

**התכנסות נקודתית:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ויהי  $a \in \mathbb{C}$  אזי  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  עבורה  $f_n(a)$  מתכנסת.

**התכנסות במידה שווה (במ"ש):** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ותהא  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  אזי  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה

$$\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall x \in \mathcal{U}. \forall n > N. |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ותהא  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  אזי  $f$  מתכנסת במ"ש  $\iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N. \forall z \in \mathcal{U} |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon)$ .

**טענה מבחן M של וויירשטראס להתכנסות:** תהא  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  ותהא  $M \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  עבורה  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$  וכן

$\forall x \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \leq M_n$  אזי  $\sum_{i=0}^n u_i$  מתכנסת בהחלט ובמ"ש.

**טענה:** תהא  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ותהא  $f \in (\mathbb{C}^{\mathcal{U}})^{\mathbb{N}}$  עבורה  $f_n \in C(\mathcal{U})$   $\forall n \in \mathbb{N}$  וכן  $f_n \xrightarrow{u} g$  אזי  $g \in C(\mathcal{U})$ .

**טור חזקות:** תהא  $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  סדרה ויהי  $b \in \mathbb{C}$  אזי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (z-b)^i$ .

**משפט אבלי:** יהי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  טור חזקות אזי קיים  $R \in [0, \infty]$  המקיים

• הטור מתכנס בהחלט על  $|z| < R$ .

• יהי  $0 \leq \rho < R$  אזי הטור מתכנס במ"ש על  $|z| < \rho$ .

• יהי  $|z| > R$  אזי  $\sum a_n z^n$  לא מתכנס.

**טענה:** יהי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  טור חזקות אזי הפונקציה  $\sum a_n z^n$  הולומורפית על  $|z| < R$  ובפרט  $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i)' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1}$ .

**משפט קושי-הדמר:** יהי  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$  טור חזקות ויהי  $R$  רדיוס ההתכנסות אזי  $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ .

**טענה:** יהיו  $g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  פתרונות של המד"ר  $(f'(z) = f(z)) \wedge (f(0) = 1)$  אזי  $g = h$ .

**פונקציה מעריכית:** נגדיר  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  להיות פתרון של המד"ר  $(f'(z) = f(z)) \wedge (f(0) = 1)$ .

**טענה:**  $\exp(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}$ .

**מסקנה:**  $\exp$  מתכנסת על  $\mathbb{C}$ .

**טענה:**  $e^0 = 1, (e^z)' = e^z$  על כל  $\mathbb{C}$ .

**מסקנה:**  $\exp(z) = e^z$ .

**מסקנה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{C}$  אזי  $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $e^z \neq 0$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$ .

**קוסינוס:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ .

**סינוס:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ .

**מסקנה:**  $e^z$  הינה  $2\pi i$ -מחזורית,  $\cos, \sin$  הן  $2\pi$ -מחזוריות.

**טענה:** על כל  $\mathbb{C}$  מתקיים  $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ .

**מסקנה:** על כל  $\mathbb{C}$  מתקיים  $\sin'(z) = \cos(z), \cos'(z) = -\sin(z)$ .

**log:** יהי  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי  $\log(w) = \text{sols}(e^z = w)$ .

**טענה:** יהי  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי  $\log(w) = \{\log|w| + i\theta \mid \theta \in \arg(w)\}$ .

**חזקה:** יהי  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ויהי  $b \in \mathbb{C}$  אזי  $a^b = e^{b \log a}$ .

**ענף של arg:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום עבורו  $0 \notin \mathcal{U}$  אזי  $\alpha \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$  המקיימת  $\alpha(z) \in \arg(z) \forall z \in \mathcal{U}$ .

**ענף של log:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום עבורו  $0 \notin \mathcal{U}$  אזי  $\ell \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$  המקיימת  $\ell(z) \in \log(z) \forall z \in \mathcal{U}$ .

**ענף של  $\sqrt[n]{\cdot}$ :** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום אזי  $\rho \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$  המקיימת  $\rho(z) \in \sqrt[n]{z} \forall z \in \mathcal{U}$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום עבורו  $0 \notin \mathcal{U}$  אזי (קיים ענף של  $\arg$  על  $\mathcal{U}$ )  $\iff$  (קיים ענף של  $\log$  על  $\mathcal{U}$ ).

**טענה:** בתחום  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  לא קיים ענף של  $\log$ .

**טענה:** יהי  $\ell : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  ענף של  $\log$  אזי  $\ell$  הולומורפית וכן  $\ell'(z) = \frac{1}{z}$ .

**טענה:** יהי  $\ell : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  ענף של  $\sqrt[n]{\cdot}$  אזי  $\ell$  הולומורפית וכן  $\ell'(z) = \frac{1}{n\ell(z)^{n-1}}$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום אזי (קיים ענף של  $\log$  על  $\mathcal{U}$ )  $\iff$  (קיים ענף של  $\sqrt[n]{\cdot}$  על  $\mathcal{U}$ ).

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום עבורו  $0 \notin \mathcal{U}$  אזי (קיים ענף של  $\sqrt[n]{\cdot}$  על  $\mathcal{U}$ )  $\iff$  (קיים ענף של  $\log$  על  $\mathcal{U}$ ).

**טענה:**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$  ענף של  $\log(1+z)$  בתחום  $|z| < 1$ .

**אינטגרל:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע ותהא  $f \in C(I, \mathbb{C})$  אזי  $\int_I f(t) dt = \int_I u(t) dt + i \int_I v(t) dt$ .

**טענה:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע ותהא  $f \in C(I, \mathbb{C})$  אזי  $|\int_I f(t) dt| \leq \int_I |f(t)| dt$ .

**מסילה:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע אזי  $\gamma \in C(I, \mathbb{C})$ .

**מסילה חלקה למקוטעין:** מסילה  $\gamma$  אשר חלקה עד כדי מספר סופי של נקודות ובהן קיימות נגזרות חד-צדדיות מכל סדר.

**אינטגרל מסילתי:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע ותהא  $\gamma \in C^1(I, \mathbb{C})$  מסילה ותהא  $f \in C(\gamma(I), \mathbb{C})$  אזי  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_I f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ .

**רפרמטריזציה:** תהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה ותהא  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  רציפה ועולה עבורה  $\varphi(c) = a$  וכן  $\varphi(d) = b$  אזי  $\gamma \circ \varphi$ .

**טענה:** תהא  $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה ותהא  $\gamma \circ \varphi$  רפרמטריזציה גזירה ברציפות אזי  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma \circ \varphi} f(z) dz$ .

**המסילה ההפוכה:** תהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה אזי  $-\gamma : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$  המוגדרת  $-\gamma(t) = \gamma(-t)$ .

**טענה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz$ .

**סכום מסילות:** תהיינה  $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילות אזי  $(\sum \gamma_i)(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & t \in [a_0, a_1] \\ \vdots \\ \gamma_n(t) & t \in [a_n, a_{n+1}] \end{cases}$  מסילה.

**מסקנה:** תהיינה  $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילות אזי  $\int_{\sum \gamma_i} f(z) dz = \sum \int_{\gamma_i} f(z) dz$ .

**מסילה סגורה:** מסילה  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  המקיימת  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**סימון:** תהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה סגורה אזי  $\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$ .

**אינטגרל לפי אורך קשת:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_I f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$ .

**הערה:** מקובל מאוד גם הסימון  $\int_{\gamma} f(z) ds = \int_{\gamma} f(z) |dz|$ .

**אורך מסילה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} |dz|$ .

**טענה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} (f+g)(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz| + \int_{\gamma} g(z) |dz|$ .

**טענה:** תהא  $\gamma$  מסילה ותהא  $\varphi \circ \gamma$  רפרמטריזציה אזי  $\int_{\gamma \circ \varphi} f(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz|$ .

**טענה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$ .

**מסקנה:** תהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה אזי  $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \left( \int_{\gamma} |dz| \right) \max_{z \in \gamma([a, b])} |f(z)|$ .

**אינטגרל על פי צמוד:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} f(z) d\bar{z} = \int_I \overline{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt$ .

**הגדרה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי

$$\bullet \int_{\gamma} f(z) dx = \frac{1}{2} \left( \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\gamma} f(z) d\bar{z} \right)$$

$$\bullet \int_{\gamma} f(z) dy = \frac{1}{2i} \left( \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f(z) d\bar{z} \right)$$

**טענה:** תהא  $\gamma$  מסילה אזי  $\int_{\gamma} f(z) dz = \left( \int_{\gamma} u(x, y) dx - \int_{\gamma} v(x, y) dy \right) + i \left( \int_{\gamma} u(x, y) dy - \int_{\gamma} v(x, y) dx \right)$ .

**הערה:** מהמשוואה מעיל ניתן לחשוב על כך שמתקיים  $dz = dx + i dy$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  ותהא  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עבורה  $g' = f$  אזי לכל מסילה  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  מתקיים

$$\int_{\gamma} f(z) dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

**משפט קושי למלבן:** יהי  $R \subseteq \mathbb{C}$  מלבן סגור תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה עבורה  $R \subseteq \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $\int_{\partial R} f(z) dz = 0$ .

**משפט קושי למלבן משופר:** יהי  $R \subseteq \mathbb{C}$  מלבן סגור תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה עבורה  $R \subseteq \mathcal{U}$  יהיו  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \subseteq R \setminus \partial R$  ותהא

$$f : \mathcal{U} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ הולומורפית עבורה לכל } i \in [k] \text{ מתקיים } \lim_{z \rightarrow \zeta_i} (z - \zeta_i) f(z) = 0$$

**למה:** תהא מסילה  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  סגורה חלקה למקוטעין ותהא  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$  אזי קיים  $k \in \mathbb{Z}$  עבורו  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i k$ .

**מספר הליפופים:** תהא מסילה  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  סגורה חלקה למקוטעין ותהא  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$  אזי מספר הליפופים של  $\gamma$  סביב  $a$

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

**ענף של  $\log(f)$ :** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $\ell \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$  המקיימת  $\forall z \in \mathcal{U}. \ell(z) \in \log(f(z))$ .

**ענף של  $\sqrt[n]{f}$ :** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $\rho \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$  המקיימת  $\forall z \in \mathcal{U}. \rho(z) \in \sqrt[n]{f(z)}$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  הולומורפית ויהי  $\ell : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  ענף של  $\log(f)$  אזי  $\ell$  הולומורפית וכן  $\ell'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי  $\ell : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  ענף של  $\sqrt[n]{f}$  אזי  $\ell$  הולומורפית וכן  $\ell'(z) = \frac{f'(z)}{n\ell(z)^{n-1}}$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{C} \setminus \{0\})$  אזי

$$\bullet (n(f \circ \gamma, 0) = 0) \iff \gamma \text{ מסילה סגורה גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים}$$

$$\bullet (n(f \circ \gamma, 0) \in n\mathbb{Z}) \iff \gamma \text{ מסילה סגורה גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים}$$

**טענה:** תהא  $f \in C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$  נגדיר  $F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  כך  $F(t) = \int_{\alpha}^t f(\tau) d\tau$  אזי  $F$  גזירה וכן  $\frac{dF}{dt} = f$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{C})$  עבורה לכל  $\gamma$  סגורה מתקיים  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  אזי  $f$  בעלת קדומה.

**למה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי קיימת  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית המקיימת  $F' = f$ .

**משפט קושי לדיסק:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ותהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow D$  מסילה סגורה אזי  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .

**משפט קושי לדיסק משופר:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח יהיו  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \subseteq D$  תהא  $f : D \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עבורה

$$\text{לכל } i \in [k] \text{ מתקיים } \lim_{z \rightarrow \zeta_i} (z - \zeta_i) f(z) = 0 \text{ ותהא } \gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} \text{ מסילה סגורה אזי } \int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

**טענה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  מסילה סגורה ויהי  $a \in \mathbb{C} \setminus D$  אזי  $n(\gamma, a) = 0$ .

**טענה:** תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה ויהיו  $a, b \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$  לא נחתכת עם  $\gamma$  אזי  $n(\gamma, a) = n(\gamma, b)$ .

**משפט נוסחת האינטגרל של קושי:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  מסילה סגורה תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי  $a \in D \setminus \gamma([\alpha, \beta])$  אזי  $n(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$

**מסקנה משפט הערך הממוצע:** יהי  $r > 0$  ויהי  $a \in \mathbb{C}$  ותהא  $f : B_a(r) \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$

**סימון:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  מסילה סגורה תהא  $(\gamma([\alpha, \beta]), \mathbb{C})$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  נגדיר  $F_n(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n} d\zeta$  כך  $F_n : D \rightarrow \gamma([\alpha, \beta])$

**טענה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow D$  מסילה סגורה תהא  $(\gamma([\alpha, \beta]), \mathbb{C})$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי

- $F_n$  רציפה.
- $F_n$  גזירה.
- $F'_n = n \cdot F_{n+1}$

**מסקנה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח ותהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $f \in C^\infty(D)$

**מסקנה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי  $C_r \subseteq D$  מעגל סביב  $z$  אזי  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$

**מסקנה:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח ותהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  בעלת קדומה אזי  $f$  הולומורפית.

**מסקנה משפט מוררה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה לכל  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{U}$  מתקיים  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  אזי  $f$  הולומורפית. **פונקציה שלמה:** פונקציה הולומורפית על  $\mathbb{C}$ .

**משפט ליוביל:** תהא  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית וחסומה אזי  $f$  קבועה.

**טענה חסם קושי לנגזרת:** יהי  $D \subseteq \mathbb{C}$  דיסק פתוח תהא  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי  $C_r \subseteq D$  מעגל סביב  $z$  אזי  $|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \max_{C_r} |f|}{r^n}$

**מסקנה המשפט היסודי של האלגברה:** יהי  $p \in \mathbb{C}[x]$  עבורו  $\deg(p) \geq 1$  אזי  $\exists \alpha \in \mathbb{C} . p(\alpha) = 0$

**נקודה יחודית/יחודיות/סינגולריות:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה אזי  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית.

**נקודת יחודיות סליקה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה אזי  $a \in \mathcal{U}$  יחודיות של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה קיימת הרחבה הולומורפית  $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  המקיימת  $\forall z \in \mathcal{U} \setminus \{a\} . g(z) = f(z)$

**הערה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ותהא  $a \in \mathcal{U}$  סליקה עבור  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי קיימת הרחבה יחידה.

**משפט:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה תהא  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $(a$  סליקה)  $\iff \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = 0$

**משפט טיילור:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה תהא  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי קיימת  $f_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עבורה  $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k + f_n(z) (z-a)^n$

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה תהא  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית יהי  $n \in \mathbb{N}$  ויהי  $C$  מעגל סביב  $a$  אזי לכל  $z \in C$  מתקיים  $f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n (\zeta-z)} d\zeta$

**אפס:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי עבורה  $a \in \mathcal{U}$   $f(a) = 0$

**אפס מסדר  $n$ :** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי עבורה  $a \in \mathcal{U}$   $f^{(j)}(a) \neq 0$   $\iff n = \min \{j \in \mathbb{N} \mid f^{(j)}(a) \neq 0\}$  **למה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית תהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $f^{(n)}(a) = 0$   $\forall n \in \mathbb{N}$  ויהי  $r > 0$  עבורו  $\overline{B_r(a)} \subseteq \mathcal{U}$  אזי  $f|_{B_r(a)} = 0$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ותהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $f^{(n)}(a) = 0$   $\forall n \in \mathbb{N}$  אזי  $f = 0$

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עבורה  $f \neq 0$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אפס אזי הסדר של  $a$  סופי.

**אפס מבודד:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי אפס  $a \in \mathcal{U}$  עבורו  $f(z) \neq 0$   $\forall z \in B_r(a) \setminus \{a\}$   $\exists r > 0$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עבורה  $f \neq 0$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אפס אזי  $a$  אפס מבודד.

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהיינה  $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ותהא  $E \subseteq \mathcal{U}$  בעלת נקודת הצטברות ב- $\mathcal{U}$  נניח כי  $f = g$  על  $E$  אזי  $f = g$  על  $\mathcal{U}$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ותהא  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$  פתוחה עבורה  $f = 0$  על  $\mathcal{O}$  אזי  $f = 0$  על  $\mathcal{U}$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ותהא  $\gamma$  מסילה עבורה  $f = 0$  על  $\gamma$  אזי  $f = 0$  על  $\mathcal{U}$

**נקודת קוטב:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום אזי  $a \in \mathcal{U}$  יחודית של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה קיימת  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{a\}$  סביבה של  $a$  עבורה  $\frac{1}{f}$  מוגדרת היטב בעלת יחודיות סליקה ב- $a$  וכן  $\frac{1}{f}(a) = 0$

**הערה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $a \in \mathcal{U}$  יחודית של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  ותהא  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{a\}$  סביבה של  $a$  עבורה  $\frac{1}{f}$  מוגדרת היטב בעלת יחודיות סליקה ב- $a$  וכן  $\frac{1}{f}(a) \neq 0$  אזי  $a$  יחודית סליקה של  $f$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $a \in \mathcal{U}$  יחודית של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי  $(a$  קוטב)  $\iff \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

**קוטב מסדר  $n$ :** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום אזי  $a \in \mathcal{U}$  קוטב של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  אשר אפס מסדר  $n$  של  $\frac{1}{f}$ .

**קוטב פשוט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום אזי  $a \in \mathcal{U}$  קוטב מסדר 1 של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום יהי  $n \in \mathbb{N}$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  קוטב מסדר  $n$  של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי קיימת  $f_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עבורה  $f(z) = f_n(z)(z-a)^{-n}$  על  $\mathcal{U} \setminus \{a\}$ .

**פונקציה מרומורפית:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $E \subseteq \mathcal{U}$  אזי  $f : \mathcal{U} \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עבורה כל  $a \in E$  הינה קוטב של  $f$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהייה  $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפיות באשר  $g \neq 0$  אזי  $\frac{f}{g}$  מרומורפית.

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהייה  $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפיות באשר  $g \neq 0$  אזי

$$\bullet \# \{f \text{ של אפסים}\} \geq \# \left\{ \frac{f}{g} \right\}$$

$$\bullet \# \{g \text{ של אפסים}\} \geq \# \left\{ \frac{f}{g} \right\}$$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהייה  $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  מרומורפיות אזי  $f+g, f \cdot g$  מרומורפיות.

**יחודיות עיקרית:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום אזי  $a \in \mathcal{U}$  יחודיות של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  אשר אינה סליקה ואינה קוטב של  $f$ .

**משפט וירשטראס:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $a \in \mathcal{U}$  יחודיות עיקרית של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי לכל  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$  סביבה של  $a$  מתקיים כי  $f(\mathcal{O} \setminus \{a\})$  צפופה ב- $\mathbb{C}$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $a \in \mathcal{U}$  יחודיות מבודדת של  $f : \mathcal{U} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

$$\bullet f = 0$$

$$\bullet \text{קיים } k \in \mathbb{Z} \text{ עבורו לכל } k < h \text{ מתקיים } \lim_{z \rightarrow a} |z-a|^h |f(z)| = 0$$

$$\bullet \text{לכל } h \in \mathbb{R} \text{ מתקיים } \lim_{z \rightarrow a} |z-a|^h |f(z)| \notin \{0, \infty\}$$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהייה  $f_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפיות ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה  $f_n \xrightarrow{p.w.} f$  וכן לכל  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$  קומפקטית

$$\text{מתקיים } f_n \xrightarrow{u} f \text{ אזי } f \text{ הולומורפית וכן } f'_n \xrightarrow{p.w.} f'$$

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהייה  $f_n : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפיות ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$  במ"ש אזי  $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n = f'$ .

**משפט טיילור:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$  על  $B_{\sup\{r|B_r(a) \subseteq \mathcal{U}\}}(a)$ .

**פונקציה אנליטית:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה ויהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}$  תחום אזי  $f \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{F})$  עבורה לכל  $a \in \mathcal{U}$  קיימת סביבה  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$  של  $a$  בה

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי  $f$  (הולומורפית)  $\iff f$  (אנליטית).

**טור לורן:** יהי  $c \in \mathbb{C}$  ותהא  $a \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$  אזי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$ .

**טענה:** יהי  $c \in \mathbb{C}$  ותהא  $a \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$  אזי קיימים  $R_1, R_2 \in \mathbb{R}$  עבורם  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$  מתכנס בטבעת  $R_1 < |z-c| < R_2$  וכן

לכל  $\mathcal{K} \subseteq \{R_1 < |z-c| < R_2\}$  קומפקטית  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$  מתכנס במ"ש ובהחלט.

**משפט:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  טבעת תהא  $c \in \mathbb{C}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי קיימת  $a \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$  עבורה  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$

על  $\mathcal{U}$ .

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  טבעת תהא  $c \in \mathbb{C}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי מקדמי טור לורן של  $f$  הם  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta$

**מסקנה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  טבעת תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי  $c \in \mathcal{U}$  אפס מסדר  $m \in \mathbb{N}$  אזי  $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} (z-c)^n$

**מסקנה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  טבעת תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי  $c \in \mathcal{U}$  קוטב מסדר  $m \in \mathbb{N}$  אזי  $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_{n+m} (z-c)^n$

**מסילה כוויצה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום אזי  $\gamma$  מסילה סגורה עבורה  $\forall a \in \mathcal{U}. n(\gamma, a) = 0$ .

**תחום פשוט קשר:** תחום  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  עבורו כל מסילה  $\gamma$  סגורה הינה כוויצה.

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום אזי  $(\mathcal{U} \text{ פשוט קשר}) \iff (\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{U}) \text{ קשירה}$ .

**מסילות הומוטופיות:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום אזי מסילות  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$  עבורן  $(\gamma_0(a) = \gamma_1(a)) \wedge (\gamma_0(b) = \gamma_1(b))$  וכן קיימת

$$(\eta(t, 1) = \gamma_1(t)) \wedge (\eta(t, 0) = \gamma_0(t)) \wedge (\eta(b, s) = \gamma_0(b)) \wedge (\eta(a, s) = \gamma_0(a))$$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $\gamma$  מסילה סגורה אזי  $(\gamma \text{ כוויצה}) \iff (\gamma \text{ הומוטופית למסילה קבועה})$ .

**משפט קושי:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ותהא  $\gamma$  מסילה כוויצה אזי  $\int_\gamma f(z) dz = 0$ .

**מסקנה נוסחת האינטגרל של קושי:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $D$   $[\alpha, \beta] \rightarrow D$  מסילה כוויצה תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי

$$n(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz \text{ אזי } a \in \mathcal{U} \setminus \gamma([[\alpha, \beta]])$$

**מסקנה נוסחת הנגזרת של קושי:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי  $C_r \subseteq D$  מעגל כוויץ סביב  $z$  אזי

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$$

**טענה:** יהי  $a \in \mathbb{C}$  תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$  טבעת סביב  $a$  תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהיו  $C_1, C_2$  מעגלים ב- $\mathcal{U}$  סביב  $a$  אזי

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$



**טענה:** יהי  $a \in \mathbb{C}$  תהא  $U \subseteq \mathbb{C}$  טבעת סביב  $a$  תהא  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית תהא  $\gamma$  מסילה סגורה עברה  $n(\gamma, a) = 1$  ויהי  $C$  מעגל ב- $U$  סביב  $a$  אזי  $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_C f(z) dz$ .

**מסקנה:** יהי  $a \in \mathbb{C}$  תהא  $U \subseteq \mathbb{C}$  טבעת סביב  $a$  תהא  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית תהא  $\gamma$  מסילה סגורה ויהי  $C$  מעגל ב- $U$  סביב  $a$  אזי  $\int_{\gamma} f(z) dz = n(\gamma, a) \cdot \int_C f(z) dz$ .

**שארית:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $a \in \mathbb{C}$  יחודיות מבודדת של  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  ויהי  $C$  מעגל ב- $U$  סביב  $a$  ללא נקודות יחודיות נוספות בתוכו אזי  $\text{Res}_a(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$ .

**טענה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $a \in \mathbb{C}$  יחודיות מבודדת של  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  ותהא  $V \subseteq U$  טבעת סביב  $a$  אזי  $f(z) - \frac{\text{Res}_a(f)}{z-a}$  בעלת קדומה ב- $V$ .

**טענה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $a \in \mathbb{C}$  יחודיות סליקה מבודדת של  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי  $\text{Res}_a(f) = 0$ .

**טענה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $c \in \mathbb{C}$  יחודיות מבודדת של  $f : U \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{C}$  תהא  $V \subseteq U$  טבעת סביב  $c$  ויהי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$  סור לורן של  $f$  ב- $V$  אזי  $\text{Res}_a(f) = a_{-1}$ .

**טענה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום יהי  $a \in \mathbb{C}$  קוטב פשוט מבודד של  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי  $\text{Res}_a(f) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$ .

**משפט השאריות:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $E \subseteq U$  בת מנייה לכל היותר תהא  $f : U \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ותהא  $\gamma : [c, d] \rightarrow U \setminus E$  כיווצה ב- $U$  אזי  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{a \in E} n(\gamma, a) \cdot \text{Res}_a(f)$ .

**סימון:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית ויהי  $a \in U$  אפס אזי סדר  $a$  הינו  $\text{ord}_f(a)$ .

**סימון:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום ויהי  $a \in U$  קוטב של  $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  אזי סדר  $a$  הינו  $\text{ord}_f(a)$ .

**משפט עקרון הארגומנט:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  מורומורפית תהא  $\{f\}$  אפסים וקטבים של  $f : [c, d] \rightarrow U$  מסילה כוויצה ב- $U$  אזי  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{a \in \{f\}} \text{ord}_f(a) \cdot n(\gamma, a) - \sum_{b \in \{f\}} \text{ord}_f(b) \cdot n(\gamma, b)$ .

**מסילה תוחמת קבוצה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $\gamma$  מסילה סגורה אזי  $\Omega \subseteq U$  עברה  $\Omega \subseteq U$   $\iff (z \in \Omega) \iff (n(\gamma, z) = 1) \forall z \in \mathbb{C}$ .

**משפט רושה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $\gamma$  כוויצה עברה  $n(\gamma, z) \in \{0, 1\} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$  תהא  $\Omega \subseteq U$  נתחמת על ידי  $\gamma$  ותהיינה  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפיות עבורן  $|f(z) - g(z)| < |f(z)| \forall z \in \gamma([a, b])$  אזי  $\{f\}$  אפסים של  $g$  ב- $\Omega$   $\iff \#\{\Omega\} = \#\{\Omega\}$ .

**תחום טוב:** קבוצה  $G \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה חסומה עברה קיימות  $\gamma_1 \dots \gamma_n$  מסילות זרות פשוטות וחלקות למקוטעין המקיימות  $\forall j \in [n]. \forall t \in \text{Dom}(\gamma_j). \exists \varepsilon > 0. \gamma_j(t) \cdot i \cdot \varepsilon \in G$ .

**טענה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום יהי  $G \subseteq U$  תחום טוב ותהא  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית אזי  $\int_{\partial G} f(z) dz = 0$ .

**משפט עקרון המקסימום:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית תהא  $a \in U$  ויהי  $r > 0$  עבורם  $\overline{B}_r(a) \subseteq U$  וכן  $|f(a)| = \max_{z \in \overline{B}_r(a)} |f(z)|$  אזי  $f$  קבועה.

**טענה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום ותהא  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית התב"ש

- $|f|$  חסרת מקסימום מקומי.

- $f$  לא קבועה  $\iff |f|$  חסרת מקסימום ב- $U$ .

- נניח כי  $\overline{U}$  חסומה וכן  $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{C}$  רציפה אזי  $\max_{z \in \overline{U}} |f(z)|$  מתקבל ב- $\partial \overline{U}$ .

**מסקנה עקרון המינימום:** יהי  $U \subseteq \mathbb{C}$  תחום תהא  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית תהא  $a \in U$  ויהי  $r > 0$  עבורם  $\overline{B}_r(a) \subseteq U$  וכן  $|f(a)| = \min_{z \in \overline{B}_r(a)} |f(z)|$  אזי  $f$  קבועה.

**מסקנה הלמה של שוורץ:** תהא  $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית עברה  $|f| \leq 1$  וכן  $f(0) = 0$  אזי

- $|f(z)| \leq |z| \forall z \in B_1(0)$ .

- $|f'(0)| \leq 1$ .

- נניח כי קיימת  $a \in B_1(0) \setminus \{0\}$  עברה  $|f(a)| = |a|$  אזי קיים  $\alpha \in \mathbb{R}$  עבורו  $f(z) = e^{i\alpha} z$ .

**משפט ההעתקה הפתוחה:** תהא  $U \subseteq \mathbb{C}$  פתוחה ותהא  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  הולומורפית לא קבועה אזי  $f(U)$  פתוחה.

**טענה:** יהיו  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  אזי  $\frac{az+b}{cz+d}$  קבועה  $\iff (ad - bc = 0)$ .

**העתקת מוביוס:** יהיו  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  עבורן  $ad - bc \neq 0$  אזי  $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C}$  המוגדרת  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ .  
**הרחבת העתקת מוביוס:** יהיו  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  עבורן  $ad - bc \neq 0$  אזי  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  המקיימת  $f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & z = \infty \end{cases}$ .

**טענה:** תהא  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  העתקת מוביוס אזי  $f$  רציפה חח"ע ועל.

**העתקת מוביוס אלמנטרית:**  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  עברה

- מתיחה:  $\exists \lambda \in \mathbb{R}_{>0}. f(z) = \lambda z$ .

- סיבוב:  $\exists \theta \in (-\pi, \pi]. f(z) = e^{i\theta} z$ .



• הזזה:  $\exists a \in \mathbb{C}. f(z) = z + a$ .

• היפוך:  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

**טענה:** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  העתקת מוביוס אזי קיימות  $g_1, \dots, g_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  העתקות מוביוס אלמנטריות עבורן  $f = g_1 \circ \dots \circ g_n$ .  
**מעגל מוכלל:** מעגל או ישר.

**טענה:** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  העתקת מוביוס ויהי  $A \subseteq \mathbb{C}$  מעגל מוכלל אזי  $f(A)$  מעגל מוכלל.

**טענה:** תהיינה  $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$  שונות אזי קיימת ויחידה  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  העתקת מוביוס עבורה  $f(0) = a$  וכן  $f(1) = b$  וכן  $f(\infty) = c$ .

**מסקנה:** יהיו  $A, B \subseteq \mathbb{C}$  מעגלים מוכללים אזי קיימת  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  העתקת מוביוס עבורה  $f(A) = B$ .

## בונוסים

**מטריצת השכנויות:** יהי  $G$  גרף על  $n$  קודקודים אזי  $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$  המקיים  $(\{i, j\} \in E(G)) \iff (A)_{i,j} = 1$ .

**טענה:** יהי  $G$  גרף  $k$ -רגולרי אזי  $A$  לכסינה וכן  $\text{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$ .

**טענה:** יהי  $G$  גרף  $k$ -רגולרי ויהי  $\lambda \in \text{spec}(A)$  אזי  $|\lambda| \leq k$ .

**טענה:** יהי  $G$  גרף  $k$ -רגולרי אזי  $k \in \text{spec}(A)$ .

**משפט:** יהי  $G$  גרף  $k$ -רגולרי אזי  $(G \text{ קשיר}) \iff (r_g(k) = 1)$ .

**משפט:** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  המקיימת  $f(z)^2 = z \forall z \in \mathbb{C}$  אזי  $f$  אינה רציפה ב- $\mathbb{C}$ .

**משפט המשפט היסודי של האלגברה:** יהי  $p \in \mathbb{C}[x]$  עבורו  $\deg(p) \geq 1$  אזי  $\exists \alpha \in \mathbb{C} . p(\alpha) = 0$ .

**אפס של פולינום:** יהי  $p \in \mathbb{C}[x]$  עבורו  $\deg(p) = k$  וכן  $p(z) = a \prod (z - a_i)^{\ell_i}$  אזי  $\{a_i\}$ .

**סדר של אפס של פולינום:** יהי  $p \in \mathbb{C}[x]$  עבורו  $\deg(p) = k$  וכן  $p(z) = a \prod (z - a_i)^{\ell_i}$  יהי  $a_i$  אפס  $\ell_i$ .

**פונקציה רציונלית:** יהיו  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  אזי  $\frac{p}{q}$ .

**סדר של פונקציה רציונלית:** יהיו  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  אזי  $\text{ord}\left(\frac{p}{q}\right) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$ .

**הגדרה:** יהיו  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  זרים ויהי  $a \in \mathbb{C}$  אזי

• קוטב מסדר  $m$  של  $\frac{p}{q}$  אפס של  $q$  מסדר  $m$ .

• אפס מסדר  $m$  של  $\frac{p}{q}$  אפס של  $p$  מסדר  $m$ .

**הגדרה:** יהיו  $p, q \in \mathbb{C}[x]$  זרים אזי

• אם  $\deg(p) > \deg(q)$  אזי  $\frac{p}{q}$  מסדר  $\infty$  קוטב של  $\frac{p}{q}$  מסדר  $\deg(p) - \deg(q)$ .

• אם  $\deg(p) < \deg(q)$  אזי  $\frac{p}{q}$  אפס של  $\frac{p}{q}$  מסדר  $\deg(q) - \deg(p)$ .

**הגדרה:** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  רציונלית אזי נרחיבה לפונקציה  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  כך

• יהי  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  קוטב של  $f$  אזי  $f(z) = \infty$ .

• נניח כי  $\infty$  אפס של  $f$  אזי  $f(\infty) = 0$ .

• אם  $\infty$  אינו קוטב ואינו אפס אזי  $f(\infty) = \frac{a_n}{b_n}$  כאשר  $a_n, b_n$  המקדמים המובילים של הפולינומים בהתאמה.

**טענה:** תהא  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  רציונלית אזי  $\{f \text{ אפסים של } f\} = \#\{f \text{ קטבים של } f\} = \text{ord}(f)$ .

**טענה:** תהא  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  רציונלית ויהי  $a \in \hat{\mathbb{C}}$  אזי

•  $(a \text{ אפס של } f) \iff (\lim_{z \rightarrow a} f(z) = 0)$ .

•  $(a \text{ קוטב של } f) \iff (\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty)$ .

**מסקנה:** תהא  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  רציונלית ויהי  $a \in \hat{\mathbb{C}}$  אזי

•  $(a \text{ אפס של } f \text{ מסדר } k) \iff (a \text{ אפס של } \frac{1}{f} \text{ מסדר } k)$ .

•  $(a \text{ קוטב של } f \text{ מסדר } k) \iff (a \text{ קוטב של } \frac{1}{f} \text{ מסדר } k)$ .

**משפט פירוק סינגולרי:** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  רציונלית אזי קיים יחיד  $g \in \mathbb{C}[x]$  ללא מקדם חופשי וכן  $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  רציונלית ללא קוטב

ב- $\infty$  עבורן  $f = g + h$ .

**החלק הסינגולרי ב- $\infty$ :** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  רציונלית ויהי  $f = g + h$  פירוק סינגולרי אזי  $g_\infty = g$ .

**החלק הסינגולרי ב- $\alpha$ :** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  רציונלית נסמן  $\tilde{f}(z) = f(\alpha + \frac{1}{z})$  ויהי  $\tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}$  פירוק סינגולרי אזי  $g_\alpha(z) = \tilde{g}\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)$ .

**טענה:** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  רציונלית ויהי  $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$  קוטב אזי  $g_\alpha$  בעלת ערך סופי על  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha\}$  וכן  $g_\alpha(\alpha) = \infty$ .

**מסקנה:** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  רציונלית ויהי  $\alpha \in \mathbb{C}$  קוטב אזי  $f - g_\alpha$  חסרת קוטב ב- $\alpha$ .

**משפט פירוק לשבריים חלקיים:** תהא  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  רציונלית עם פירוק סינגולרי  $f = g + h$  ויהיו  $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$  קטבים אזי קיים

$c \in \mathbb{C}$  עבורו  $f = (g + c) + \sum_{k=1}^n g_{\alpha_k}$ .

**הקוטב הדרומי:** נסמן ב- $\mathbb{R}^3$  את  $S = (0, 0, -1)$ .

**הטלה סטריאוגרפית מהדרום:** נגדיר  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$  כך  $T(x + iy) = \left( \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2+1} \right)$   
**הערה:** במרחב  $\mathbb{R}^3$  נגדיר את  $\mathbb{C}$  להיות שני הצירים הראשונים, אז ההטלה הסטריאוגרפית מהדרום היא מבחינה מעשית  $T(p) = \text{line}_{p,S} \cap \mathbb{S}^1$

**היטל מרקטור:** נגדיר  $p : [-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}] \times [-\infty, \infty] \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$  רציפה כך  $p(x + iy) = e^{i(x+iy)}$   
**טענה:**  $p|_{(-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}) \times [-\infty, \infty]}$  חח"ע ועל.

**פונקציה קונפורמית:**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  דיפרנציאבילית עבורה לכל  $a \in \mathbb{R}^2$  מתקיים כי  $\mathcal{D}_f(a)$  קונפורמית.  
**פונקציה קונפורמית:**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  דיפרנציאבילית עבורה לכל  $p \in \mathbb{R}^2$  קיימת  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  עבורה  $\mathcal{D}_f(p) = \begin{pmatrix} a & f_2(p)c - f_3(p)b \\ b & f_3(p)a - f_1(p)c \\ c & f_1(p)b - f_2(p)a \end{pmatrix}$

**הערה:** תהא  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  קונפורמית אזי  $f(p) \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(p)c - f_3(p)b \\ f_3(p)a - f_1(p)c \\ f_1(p)b - f_2(p)a \end{pmatrix}$   
**טענה:** תהא  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  קונפורמית ותהא  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  קונפורמית אזי  $g \circ f$  קונפורמית.  
**טענה:**  $p$  קונפורמית,  $T$  קונפורמית.

**מסקנה:**  $T \circ p$  קונפורמית.

**עיוות שטח:** תהא  $p \in \mathbb{R}^2$  אזי  $\alpha_T(p) = \left\| \frac{\partial T}{\partial x}(p) \right\| \left\| \frac{\partial T}{\partial y}(p) \right\|$

**טענה:** תהא  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  אזי  $\alpha_T(x, y) = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}$

**מסילה פשוטה:** מסילה  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  עבורה  $\gamma|_{(a,b)}, \gamma|_{[a,b]}$  חח"ע.

**משפט ז'ורדן:** תהא  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  מסילה פשוטה וסגורה אזי קיימים  $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$  קשירים מסילתית עבורם  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$  וכן  $\Omega_1$  חסום וכן  $\Omega_2$  אינו חסום.

**מסקנה:** תהא  $\gamma$  מסילה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין ויהי  $\Omega$  התחום הכלוא על ידי  $\gamma$  אזי מתקיים  $\text{Vol}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - \frac{1}{2} \int_{\gamma} y dx$

**משפט:** תהא  $\gamma$  מסילה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין ויהי  $\Omega$  התחום הכלוא על ידי  $\gamma$  אזי  $\text{Vol}(\Omega) = -\frac{i}{2} \int_{\gamma} \bar{z} dz$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי מתקיים  $\int_0^{2\pi} (\cos(t))^{2n} dt = \frac{2\pi}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}$

**סדרה חשבונית:** יהי  $a \in \mathbb{Z}$  ויהי  $d \in \mathbb{N}_+$  אזי  $a + d\mathbb{Z}$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי לא קיימים  $a_1 \dots a_n \in \mathbb{Z}$  ולא קיימים  $d_1 \dots d_n \in \mathbb{N}_+$  שונים עבורם  $\mathbb{Z} = \biguplus_{k=1}^n (a_k + d_k \mathbb{Z})$

**טענה:** יהי  $\leq$  יחס סדר מלא על  $\mathbb{C}$  אזי  $(\mathbb{C}, \leq)$  אינו שדה סדור.