

טופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

$$\bullet X, \emptyset \in \mathcal{T}.$$

$$\bullet \text{ תהיינה } \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \text{ אזי } \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}.$$

$$\bullet \text{ תהיינה } \{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T} \text{ אזי } \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}.$$

מרחב טופולוגי (מ"ט): תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ טופולוגיה על X אזי (X, \mathcal{T}) .

קבוצה פתוחה: יהי (X, \mathcal{T}) מרחב טופולוגיה אזי $U \subseteq X$ המקיימת $U \in \mathcal{T}$.

קבוצה סגורה: יהי (X, \mathcal{T}) מרחב טופולוגיה אזי $E \subseteq X$ המקיימת $X \setminus E \in \mathcal{T}$.

טענה: תהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ וכן $(\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}) \iff (\forall U \subseteq \mathcal{T} \text{ אזי } \bigcap U \in \mathcal{T})$ (לכל $U, V \in \mathcal{T}$ מתקיים $U \cap V \in \mathcal{T}$).

הטופולוגיה הטריטוראלית: תהא X קבוצה אזי $\{X, \emptyset\}$.

הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X)$.

הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: יהי (X, ρ) מרחב מטרי אזי $\mathcal{T}(X, \rho) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists r > 0. B_r(x) \subseteq U\}$.

הטופולוגיה הקו־סופית: תהא X קבוצה אזי $\{A \subseteq X \mid |X \setminus A| < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$.

משפט: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ויהי $\mathcal{C} = \{E \subseteq X \mid X \setminus E \in \mathcal{T}\}$ אזי

$$\bullet X, \emptyset \in \mathcal{C}.$$

$$\bullet \text{ תהיינה } \{E_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C} \text{ אזי } \bigcap_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \in \mathcal{C}.$$

$$\bullet \text{ תהיינה } \{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{C} \text{ אזי } \bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{C}.$$

בסיס לטופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

$$\bullet \bigcup \mathcal{B} = X.$$

$$\bullet \text{ תהיינה } B_1, B_2 \in \mathcal{B} \text{ עבורן } B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \text{ ותהא } B_1 \cap B_2 \subseteq B_3 \text{ קיימת } B_3 \in \mathcal{B} \text{ עבורה } x \in B_3 \text{ וכן } B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists B \in \mathcal{B}. (x \in B) \wedge (B \subseteq U)\}$$

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ טופולוגיה על X .

סימון: $\mathcal{B}_E = \{(a, b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_{\text{Sorg}} = \{(a, b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_E \cup \{(a, b) \mid \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\}$.

טענה: $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{\text{Sorg}}, \mathcal{B}_K$ בסיסים של \mathbb{R} .

הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית: $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_E))$.

הישר של זורגנפריי: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{Sorg}}))$.

טופולוגיית-K: $\mathbb{R}_K = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$.

משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}. U = \bigcup \mathcal{A}\}$.

מסקנה: יהיו $B_1, B_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיסים עבורם $B_1 \subseteq \mathcal{T}(B_2)$ וכן $B_2 \subseteq \mathcal{T}(B_1)$ אזי $\mathcal{T}(B_1) = \mathcal{T}(B_2)$.

טופולוגיה עדינה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי \mathcal{T}_2 .

טופולוגיה גסה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי \mathcal{T}_1 .

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ עבורו $(x \in A) \wedge (A \subseteq U) \implies \exists A \in \mathcal{A}. (x \in A) \wedge (A \subseteq U)$ אזי \mathcal{A} בסיס של \mathcal{T} .

טענה: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי $\{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. a \leq x\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. x \leq b\}$ בסיס.

טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי

$$\mathcal{T}(\{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. a \leq x\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. x \leq b\})$$

תת בסיס: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $\bigcup \mathcal{S} = X$.

הטופולוגיה הנוצרת מתת-בסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת-בסיס אזי

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \left\{ U \subseteq X \mid \exists A_1 \dots A_k \subseteq \mathcal{S}. U = \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right) \right\}$$

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת-בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ טופולוגיה על X .

טופולוגיית זריצקי: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{T}(\{\{a \in \mathbb{F}^n \mid f(a) \neq 0\} \mid f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]\})$.

סביבה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ויהי $x \in X$ אזי $U \in \mathcal{T}$ עבורה $x \in U$.

פנים של קבוצה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$.

סגור של קבוצה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq E \\ E^c \in \mathcal{T}}} E$.

שפה של קבוצה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ התב"ש

• $x \in \bar{A}$.

• לכל $U \in \mathcal{T}$ המקיים $x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

• יהי \mathcal{B} בסיס של \mathcal{T} אזי לכל $B \in \mathcal{B}$ המקיים $x \in B$ מתקיים $B \cap A \neq \emptyset$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

מסקנה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט תהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ אזי $(x \in \partial A) \iff (U \in \mathcal{T} \text{ המקיימת } x \in U \text{ מתקיים } U \cap A \neq \emptyset \text{ וכן } U \cap A^c \neq \emptyset)$.

קבוצה צפופה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט אזי $A \subseteq X$ המקיימת $X = \bar{A}$.

נקודת הצטברות: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $x \in X$ עבורו לכל סביבה U של x מתקיים $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

גבול: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט תהא $x \in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $y \in X$ עבורו לכל סביבה U של y החל ממקום מסוים $x_n \in U$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $A \subseteq \{x \in X \mid \exists a \in A^{\mathbb{N}}. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x\} \subseteq \bar{A}$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\bar{A} = \{x \in X \mid A \text{ נקודת הצטברות של } A\} \cup A$.

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ אזי $(A \text{ סגורה}) \iff (x \in \bar{A} \implies x \in A)$.

פונקציה רציפה: יהיו $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ מ"טים אזי $f : X \rightarrow Y$ עברה $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ $\forall U \in \mathcal{S}$.

משפט: יהיו $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f : X \rightarrow Y$ התב"ש

• f רציפה.

• לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה.

• לכל $E \subseteq Y$ סגורה מתקיים כי $f^{-1}(E)$ סגורה.

• לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

הומיאומורפיזם: יהיו $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ מ"טים אזי $f : X \rightarrow Y$ רציפה חח"ע ועל עברה f^{-1} רציפה.

טענה: יהיו $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f : X \rightarrow Y$ חח"ע ועל התב"ש

• f הומיאומורפיזם.

• תהא $U \subseteq Y$ אזי $(U \text{ פתוחה}) \iff (f^{-1}(U) \text{ פתוחה})$.

• תהא $E \subseteq Y$ אזי $(E \text{ סגורה}) \iff (f^{-1}(E) \text{ סגורה})$.

• לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

הטופולוגיה המושרית על קבוצה מפונקציה: תהא X קבוצה יהי (Y, \mathcal{S}) מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי $\mathcal{T}_X = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{S}\}$.

טענה: תהא X קבוצה יהי (Y, \mathcal{S}) מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי (X, \mathcal{T}_X) מ"ט.

מסקנה: תהא X קבוצה יהי (Y, \mathcal{S}) מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי f רציפה על $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{S})$.

תת מרחב טופולוגי (ת"מ): יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A = \{U \subseteq A \mid \exists V \in \mathcal{T}. U = \text{Id}^{-1}(V)\}$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי (A, \mathcal{T}_A) מ"ט.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ויהי \mathcal{B} בסיס של \mathcal{T} אזי $\mathcal{B}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ בסיס של \mathcal{T}_A .

טענה: יהי $A \subseteq X$ אזי

• תהא $U \subseteq A$ אזי $(U \text{ פתוחה ביחס ל-}\mathcal{T}_A) \iff (U \text{ פתוחה ביחס ל-}\mathcal{T} \text{ עברה } V \cap A = U)$.

• תהא $E \subseteq A$ אזי $(E \text{ סגורה ביחס ל-}\mathcal{T}_A) \iff (E \text{ פתוחה ביחס ל-}\mathcal{T} \text{ עברה } F \cap A = E)$.

• תהא $D \subseteq A$ אזי $\text{cl}_X(D) \cap A = \text{cl}_A(D)$.

• תהא $D \subseteq A$ אזי $\text{int}_X(D) \cap A = \text{int}_A(D)$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}_X) מ"ט ויהי (Y, \mathcal{T}_Y) ת"מ אזי

• נניח כי Y פתוחה ב- X , תהא $A \subseteq Y$ פתוחה ב- Y אזי A פתוחה ב- X .

• נניח כי Y סגורה ב- X , תהא $A \subseteq Y$ סגורה ב- Y אזי A סגורה ב- X .

טענה: יהיו X, Z מ"ט יהי $Y \subseteq Z$ ת"מ ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f : X \rightarrow Z$ רציפה.

טענה: יהיו X, Y מ"ט יהי $A \subseteq X$ ת"מ ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f|_A : A \rightarrow Y$ רציפה.

טענה: יהיו X, Z מ"ט יהי $Z \subseteq Y$ ת"מ ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה עברה $f(X) \subseteq Z$ אזי $f : X \rightarrow Z$ רציפה.

טענה: יהיו X, Z מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי $(f \text{ רציפה}) \iff \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ פתוחות עבורן } \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = X \text{ וכן } f|_{U_\alpha}$ רציפה לכל $\alpha \in \Lambda$.

טענה: יהיו X, Y, Z מ"ט תהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה ותהא $g : Y \rightarrow Z$ רציפה אזי $g \circ f : X \rightarrow Z$ רציפה.

משפט למת ההדבקה: יהיו X, Y מ"ט תהיינה $A, B \subseteq X$ סגורות עבורן $X = A \cup B$ תהא $f : A \rightarrow Y$ רציפה ותהא $g : B \rightarrow Y$ רציפה עבורן $f = g$ על $A \cap B$ אזי $f \cup g : X \rightarrow Y$ רציפה.

סימון: יהיו X, Y מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ חח"ע ורציפה נגדיר $\hat{f} : X \rightarrow f(X)$ כך $\hat{f} = f$.

שיכון: יהיו X, Y מ"ט אזי $f : X \rightarrow Y$ חח"ע ורציפה עבורה \hat{f} הומיאומורפיזם.

העתקת מנה: יהיו X, Y מ"ט אזי $f : Y \rightarrow X$ פונקציה על המקיימת $(f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_Y) \iff (\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X)$.

הערה: יהיו X, Y מ"ט ותהא $f : Y \rightarrow X$ העתקת מנה אזי רציפה.

טענה: יהיו X, Y, Z מ"ט תהא $f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה ותהא $g : Y \rightarrow Z$ העתקת מנה אזי $g \circ f : X \rightarrow Z$ העתקת מנה.

משפט: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f : X \rightarrow A$ על אזי קיימת ויחידה טופולוגיה \mathcal{T}_A על A עבורה f העתקת מנה.

טופולוגיית המנה המושרית: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f : X \rightarrow A$ על אזי טופולוגיה \mathcal{T}_A על A עבורה f העתקת מנה.

מרחב המנה: יהי X מ"ט יהי \sim יחס שקילות מעל X ונגדיר $f : X \rightarrow X/\sim$ כך $f(x) = [x]_\sim$ אזי X/\sim מצויידת עם טופולוגיית המנה.