

אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ המקיימת

• $\Omega \in \mathcal{F}$

• $\forall E \in \mathcal{F}. E^c \in \mathcal{F}$

• לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} אלגברה אזי $\emptyset \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$

σ -אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ המקיימת

• $\Omega \in \mathcal{F}$

• $\forall E \in \mathcal{F}. E^c \in \mathcal{F}$

• לכל $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה אזי $\emptyset \in \mathcal{F}$

למה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה ותהא $E \subseteq \mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E \in \mathcal{F}$

משפט: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי \mathcal{F} הינה אלגברה מעל Ω

פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1 \dots B_n \in \mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu(\biguplus_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$

מידה על אלגברה: תהא \mathcal{F} אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ אדטיבית.

פונקציה σ -אדטיבית: פונקציה $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת לכל $\{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu(\biguplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i)$

מידה על σ -אלגברה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה אזי $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ σ -אדטיבית.

מרחב מדיד: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי (Ω, \mathcal{F})

קבוצה מדידה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי $E \in \mathcal{F}$

למה: תהא μ מידה על \mathcal{F} המקיימת $\mu(E) > 0$ אזי $\exists E \in \mathcal{F}. \mu(E) > 0$

למה: תהא μ מידה מעל σ -אלגברה \mathcal{F} אזי μ אדטיבית.

למה: תהא μ מידה ותהיינה $A, B \in \mathcal{F}$ עבורן $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי

• מונוטונית עולה חלש: $\forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1}$

• מונוטונית יורדת חלש: $\forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n$

סופרמום: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\sup(A) = \bigcup_{i=0}^\infty A_i$

אינפימום: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\inf(A) = \bigcap_{i=0}^\infty A_i$

גבול עליון: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^\infty \bigcup_{i=n}^\infty A_i$

גבול תחתון: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^\infty \bigcap_{i=n}^\infty A_i$

גבול: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ עבורה $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$

טענה: תהא μ מידה מעל σ -אלגברה \mathcal{F} ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(B)$

מרחב מידה: תהא \mathcal{F} אלגברה/ σ -אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על \mathcal{F} אזי $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

מידת הסתברות: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ המקיימת $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

מרחב הסתברות: מרחב מידה $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ עבורו μ מידת הסתברות.

מרחב התוצאות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω

מאורע: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $E \in \mathcal{F}$

מרחב המאורעות: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי \mathcal{F}

אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ עבורו לכל $A \subseteq (0, 1]$ ולכל $b \in (0, 1]$ באשר $A + b \subseteq (0, 1]$ מתקיים

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A + b)$

טענה: לכל מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.

קבוצה פתוחה: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה $\forall x \in A. \exists \varepsilon > 0. (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$

קבוצה סגורה: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה A^c פתוחה.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ σ -אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ הינה σ -אלגברה מעל Ω

σ -אלגברה בורלית מעל \mathbb{R} : תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ כל σ -אלגבראות מעל \mathbb{R} המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

קבוצה בורלית: $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$

טענה: σ -אלגברה בורלית הינה σ -אלגברה מעל \mathbb{R} .

טענה: תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל \mathbb{R} המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא \mathcal{F} σ -אלגברה מעל Ω ותהא $A \subseteq \Omega$ אזי $\{E \cap A \mid E \in \mathcal{F}\}$ הינה σ -אלגברה מעל A .

σ -אלגברה בורלית מעל $(0, 1]$: $\mathfrak{B}_{(0,1]} = \{B \cap (0, 1] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$.

מידת לבג: תהא $B \in \mathfrak{B}$ אזי $\lambda(B) = \inf \{\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)\}$.

טענה: $(0, 1], \mathfrak{B}_{(0,1]}, \lambda$) מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

מרחב אחיד על A : עבור $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(A, \mathfrak{B}_A, \lambda)$.

σ -אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ותהיינה $\{F_i\}_{i \in I}$ כל ה- σ -אלגבראות מעל Ω המכילות את \mathcal{T} אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \bigcap_{i \in I} F_i$.

הצילינדר של ה- σ -אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ו- σ -אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי \mathcal{T} .

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\emptyset, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן

$\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_{\alpha} \cup \{A^c \mid A \in \mathcal{F}_{\alpha}\} \cup \{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_{\alpha}\}$ נסמן $\mathcal{F}_{\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}_{\alpha}$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ויהיו $\omega, \kappa \in \Omega$ עבורן $\omega \in A \iff \kappa \in A$ ויהיו $\forall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \iff \kappa \in A$ אזי $\forall A \in \sigma(\mathcal{T}). \omega \in A \iff \kappa \in A$.

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ עברה $X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ עבור $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

פונקציה מדידה בורל: $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $\varphi^{-1}[B] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ עבור $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

סימון: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}[B])$.

טענה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ מ"מ אזי $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P}_X)$ מרחב הסתברות.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ אזי

$$\bullet f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$$

$$\bullet f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$$

$$\bullet f^{-1}[A^c] = f^{-1}[A]^c$$

טענה: יהי (Ω, \mathcal{F}) מרחב מדיד ותהא $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\{E \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}[E] \in \mathcal{F}\}$ הינה σ -אלגברה מעל \mathbb{R} .

משפט: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ אזי X מ"מ $\iff (\forall t \in \mathbb{R}. X^{-1}[(-\infty, t)] \in \mathcal{F})$.

σ -אלגברה נוצרת על ידי משתנה מקרי: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}[B] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\})$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

$$\bullet \text{יהי } c \in \mathbb{R} \text{ אזי } cX \text{ מ"מ.}$$

$$\bullet X + Y \text{ מ"מ.}$$

$$\bullet XY \text{ מ"מ.}$$

$$\bullet \text{יהי } Z \text{ מ"מ על } (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu) \text{ אזי } f \circ X \text{ מ"מ.}$$

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אזי $f^{-1}[\mathcal{U}]$ פתוחה.

מסקנה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ אזי f מ"מ על $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$.

פונקציית התפלגות מצטברת (פה"מ): יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ המקיימת $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$.

טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$$

$$\bullet F_X \text{ מונוטונית עולה.}$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow a+} F_X(t) = F_X(a)$$

משתנים מקריים שוי התפלגות: X, Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

למה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}_0 \subseteq 2^{\Omega}$ סגורה לחיתוכים סופיים עברה $\Omega \in \mathcal{F}_0$ ותהא $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ סגורה להפרשים וסגורה לגבולות

אינסופיים עברה $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ אזי $\sigma(\mathcal{F}_0) \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $(F_X = F_Y) \iff (\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y)$.

תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X) = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(t - \varepsilon < X < t + \varepsilon) > 0\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}(X)$ הקבוצה הסגורה המינימלית ב- \mathbb{R} עברה $\mathbb{P}(X \in \text{supp}(X)) = 1$.

אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $t \in \mathbb{R}$ המקיים $\mathbb{P}(X = t) > 0$.

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ אזי $t \in \mathbb{R}$ אטום של X אזי $A_X = \{t \in \mathbb{R} \mid t \text{ אטום של } X\}$.

טענה: יהי X מ"מ אזי $|A_X| \leq \aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: משתנה מקרי X המקיים $\mathbb{P}(X \in A_X) = 1$.

פונקציית צפיפות: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f \geq 0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי X עבורו קיימת $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a < b$ מתקיים

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

סימון: יהי X מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של X .

טענה: יהי X מ"מ אזי $(X \text{ רציף}) \iff (\mathbb{P}(X \in A_X) = 0)$.

הערה: לא כל משתנה מקרה הוא בדיד או רציף, ובמקרה זה $0 < \mathbb{P}(X \in A_X) < 1$.

טענה: יהי X מ"מ רציף אזי

$$\bullet \text{ יהי } t \in \mathbb{R} \text{ אזי } \mathbb{P}(X = t) = 0$$

$$\bullet F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$$

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $a \in \mathbb{R}$ עבורה $f_X \in C(a)$ אזי $F'_X(a) = f_X(a)$.

האחוזון ה- p : יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ממש עד אשר $F_X = 1$ ויהי $p \in (0, 1)$ אזי $x_p \in \mathbb{R}$ המקיים $F_X(x_p) = p$.

האחוזון ה- p : יהי X מ"מ עבורו F_X עולה ויהי $p \in (0, 1)$ אזי $x_p = \sup \{t \mid F_X(t) \leq p\}$.

טענה: תהא $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ אזי קיים מ"מ X על

מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ עבורו $F_X = F$.

סימון: תהא $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ אזי

$$X^*(s) = \sup \{t \mid F(t) \leq s\}$$

טענה: תהא $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ אזי X^* מ"מ על

$$((0, 1), \mathfrak{B}_{(0,1)}, \lambda)$$

משפט: תהא $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ וכן $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ אזי $F_{X^*} = F$.

טענה: יהי $\lambda > 0$ יהיו $X_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ מ"מ יהי $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ מ"מ ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = k)$.

תהליך פואסון: משתנים מקריים $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ כך שלכל $t \in \mathbb{R}_+$ המ"מ N_t סופר את מספר האירועים בלתי תלויים שקרו עד זמן t , בפרט $N_0 = 0$ וכן $N_{t+s} - N_s \sim \text{Poi}(\lambda t)$ באשר λ ממוצע האירועים ליחידת זמן.

טענה: יהי $\lambda > 0$ יהי $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ויהיו $a, b > 0$ אזי $\mathbb{P}(X > a + b \mid X > a) = \mathbb{P}(X > b)$.

טענה: יהי X מ"מ המקיים $\mathbb{P}(X > a + b \mid X > a) = \mathbb{P}(X > b)$ $\forall a, b > 0$ אזי קיים $\lambda > 0$ עבורו $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

טענה: הזמן הבינומופעי של תהליך פואסון עם קצב λ מופעים ליחידת זמן מתפלג $\text{Exp}(\lambda)$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ על, עולה ממש וגזירה אזי $f_{\varphi \circ X}(t) = \frac{f_X(\varphi^{-1}(t))}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$.

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ על, יורדת ממש וגזירה אזי $f_{\varphi \circ X}(t) = -\frac{f_X(\varphi^{-1}(t))}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$.

הגדרה: יהי X מ"מ אזי $X^+ = \max\{X, 0\}$, $X^- = \min\{X, 0\}$.

תוחלת: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}[X] = \sum_{c \in A_X} c \cdot \mathbb{P}(X = c)$.

טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-]$.

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו $\mathbb{E}[X]$ סופי.

משתנה מקרי סימטרי: יהי $a \in \mathbb{R}$ אזי מ"מ X עבורו $\mathbb{P}(X \geq a + k) = \mathbb{P}(X \leq a - k)$ $\forall k \in \mathbb{R}$.

טענה: יהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי סימטרי סביב a אזי $\mathbb{E}[X] = a$.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי X מ"מ בדיד אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$.

משתנה מקרי שולט: יהיו X, Y מ"מ אזי X שולט על Y אם $Y \leq X$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $X \geq Y$ מ"מ בדידים אזי $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$.

תוחלת: יהי X מ"מ אזי

$$\bullet \mathbb{E}[X^+] = \sup \{\mathbb{E}[Y] \mid (0 \leq Y \leq X^+) \wedge (Y \text{ מ"מ בדיד})\}$$

$$\bullet \mathbb{E}[X^-] = -\sup \{\mathbb{E}[Y] \mid (0 \leq Y \leq -X^-) \wedge (Y \text{ מ"מ בדיד})\}$$

$$\bullet \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-]$$

משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו $\mathbb{E}[X]$ סופי.

טענה לינאריות התוחלת: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$.

טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו $X \geq Y$ מ"מ אזי $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$.

טענה נוסחת הזנב: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F_X(t)) dt + \int_{-\infty}^0 (0 - F_X(t)) dt$

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^\infty t f_X(t) dt$

משתנה מקרי שולט סטוכסטית: יהיו X, Y מ"מ אזי X שולט סטוכסטית על Y אם $F_Y \geq F_X$

טענה: יהיו X, Y מ"מ עבורם $\mathbb{P}(Y \leq X) = 1$ אזי X שולט סטוכסטית על Y .

טענה: יהיו X, Y מ"מ

• אם X שולט סטוכסטית על Y אזי $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X]$

• אם $\mathbb{P}(Y \leq X) = 1$ אזי $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X]$

• חיבוריות: $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

טענה אי־שוויון מרקוב: יהי $X \geq 0$ מ"מ אינטגרבילי ויהי $b > 0$ אזי $\mathbb{P}(X \geq b) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{b}$

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא φ מדידה בורל אזי $\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \sum_{c \in A_X} \varphi(c) \cdot \mathbb{P}(X = c)$

טענה: יהי X מ"מ רציף ותהא φ רציפה למקוטעין אזי $\mathbb{E}[\varphi \circ X] = \int_{-\infty}^\infty \varphi(t) f_X(t) dt$

טענה: יהי X מ"מ חסום אזי $\mathbb{E}[X] = \int_0^1 X^*(t) dt$

טענה: יהי X מ"מ חסום מלרע אזי $\mathbb{E}[X] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} X^*(t) dt$

טענה: יהי X מ"מ חסום מלעיל אזי $\mathbb{E}[X] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 X^*(t) dt$

שונויות: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

סטיית תקן: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי אזי $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$

טענה: יהי X מ"מ אינטגרבילי ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$

טענה אי־שוויון צ'בישב: יהי X מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי $a > 0$ אזי $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0 \in I$ וכן $M_X \in C^n(I)$ אזי $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$

טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו $0 \in I$ וכן $M_X(t)$ קיים וסופי על I אזי $\mathbb{E}[|X|^n]$ מתכנס לכל $n \in \mathbb{N}$

טענה: יהי X מ"מ ויהי $\varepsilon > 0$ עבורו $M_X(t)$ קיים וסופי על $(-\varepsilon, \varepsilon)$ אזי $M_X(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n \mathbb{E}[X^n]}{n!}$

σ-אלגברה בורלית מעל \mathbb{R}^n : תהייה $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ כל הσ-אלגבראות מעל \mathbb{R}^n המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$

משתנה מקרי n-מימדי: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ עבורה $X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$ $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$

משפט: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ אזי X מ"מ $\iff (\forall t \in \mathbb{R}^n. \forall i \in [n]. X_i^{-1}((-\infty, t]) \in \mathcal{F})$

סימון: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ מ"מ נגדיר $\mathbb{P}_X : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ כך $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}[B])$

טענה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ מ"מ אזי $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{P}_X)$ מרחב הסתברות.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת: יהי X מ"מ n-מימדי על $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $F : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ המקיימת

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n)$$

טענה: יהי (X, Y) מ"מ דו־ערכי אזי

• יהי $\ell \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{k \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(k, \ell) = 0$

• יהי $k \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{\ell \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(k, \ell) = 0$

• $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} F_{X,Y}(k, \ell) = 1$

• רציפות מימין: יהיו $p, q \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{k \rightarrow p^+} \lim_{\ell \rightarrow q^+} F_{X,Y}(k, \ell) = F_{X,Y}(p, q)$

טענה: יהי (X, Y) מ"מ דו־ערכי ויהיו $k_1 < k_2$ וכן $\ell_1 < \ell_2$ אזי $F_{X,Y}(k_2, \ell_2) + F_{X,Y}(k_1, \ell_1) \geq F_{X,Y}(k_2, \ell_1) + F_{X,Y}(k_1, \ell_2)$

משתנים מקריים שויי התפלגות: X, Y מ"מ n-מימדיים עבורם $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$

טענה: יהיו מ"מ n-מימדיים X, Y אזי $(F_X = F_Y) \iff (\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y)$

טענה: יהי X מ"מ n-מימדי אזי X_i מ"מ חד־מימדי.

משתנה מקרי שולי: יהי X מ"מ n-מימדי אזי X_i

פונקציית התפלגות מצטברת שולית: יהי (X, Y) מ"מ דו־מימדי אזי

• $F_X(t) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(t, y)$

• $F_Y(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, t)$

אטום: יהי X מ"מ n-מימדי אזי $a \in \mathbb{R}^n$ עבורו $\mathbb{P}(X = a) > 0$

קבוצת האטומים: יהי X מ"מ n-מימדי אזי t אטום של X $\{t \in \mathbb{R}^n \mid X = t\}$

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי אזי $|A_X| \leq \aleph_0$.

משתנה מקרי בדיד: X מ"מ n -מימדי עבורו $\mathbb{P}(X \in A_X) = 1$.

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי בדיד אזי $\forall a \in A_X. \mathbb{P}_X(a) = \mathbb{P}(X = a)$.

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי אזי $(X_i \text{ מ"מ בדיד לכל } i \in [n]) \iff (X \text{ מ"מ בדיד})$.

פונקציית צפיפות משותפת: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין המקיימת $f \geq 0$ וכן $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$.

משתנה מקרי רציף: X מ"מ n -מימדי עבורו קיימת $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית צפיפות עבורה לכל $a, b \in \mathbb{R}^n$ המקיימות $a_i < b_i$ מתקיים

$$\mathbb{P}(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי אזי $(X \text{ רציף}) \iff (\mathbb{P}(X \in A_X) = 0)$.

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי ויהי $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\mathbb{P}(X = a) = 0$.

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי רציף אזי $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a_n} \dots \int_{-\infty}^{a_1} f_X(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$.

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי רציף ותהא $p: [n] \rightarrow [n]$ תמורה אזי $F_X(a) = \int_{-\infty}^{a_{p(n)}} \dots \int_{-\infty}^{a_{p(1)}} f_X(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$.

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי רציף ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ עבורה $f_X \in C(a)$ אזי $\frac{\partial^2 F_X}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 F_X}{\partial y \partial x}(a) = f_X(a)$.

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי רציף אזי X_i מ"מ רציף לכל $i \in [n]$.

פונקציית צפיפות שולית: יהי (X, Y) מ"מ דו-מימדי אזי

$$f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t, y) dy \bullet$$

$$f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, t) dx \bullet$$

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי רציף ותהא $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ אזי $\mathbb{P}(X \in B) = \int_B f_X$.

פונקציה מדידה בורל: $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת $\varphi^{-1}[B] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$ לכל $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי ותהא $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ מדידה בורל אזי $\varphi(X)$ מ"מ חד-מימדי.

מסקנה: יהי (X, Y) מ"מ דו-מימדי אזי $f_{X+Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, s-x) dx$.

טענה: יהי X מ"מ n -מימדי ותהא $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ בורלית רציפה למקוטעין אזי

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1 \dots x_n) f_X(x_1 \dots x_n) dx_1 \dots dx_n$$

שונוות משותפת: יהיו X, Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות אזי $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.

משתנים בלתי מתואמים: X, Y מ"מ על אותו מרחב הסתברות עבורם $\text{Cov}[X, Y] = 0$.

מקדם מתאם: יהיו X, Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

משפט אי-שוויון קושי-שוורץ: יהיו X, Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי $\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]$.

מסקנה: יהיו X, Y מ"מ בעלי מומנט ראשון ושני אזי $(\mathbb{E}[XY]^2 = \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]) \iff (\exists c \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(Y = cX) = 1)$.

מסקנה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$.

מסקנה: יהיו X, Y מ"מ אזי

$$(\rho_{X,Y} = 1) \iff (\exists a > 0. \exists b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet$$

$$(\rho_{X,Y} = -1) \iff (\exists a < 0. \exists b \in \mathbb{R}. \mathbb{P}(X = aY + b) = 1) \bullet$$

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי

$$\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X] \bullet$$

$$\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X] \bullet$$

$$\text{Cov}[aX + b, Y] = a \text{Cov}[X, Y] \bullet$$

$$\text{Cov}[\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^m Y_i] = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m \text{Cov}[X_i, Y_i] \bullet$$

משתנים מקריים בלתי תלויים: $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ חד-מימדיים עבורם לכל מאורעות $\{B_i\}_{i=1}^n$ המקיימים $\forall k \in [n]. B_k \in \sigma(X_k)$ מתקיים

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)$$

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת ותהיינה $\{g_i\}_{i=1}^n$ פונקציות מדידות בורל אזי $\{g_i(X_i)\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ אזי $(\{X_i\}_{i=1}^n \text{ ב"ת}) \iff (F_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i))$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ רציפים אזי $(\{X_i\}_{i=1}^n \text{ ב"ת}) \iff (f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i))$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ רציפים ותהיינה $\{g_i\}_{i=1}^n$ אי-שליליות רציפות למקוטעין המקיימות $f_{X_1 \dots X_n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$ אזי $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת.

למה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת אינטגרבייליים אזי $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת אזי $\text{Cov}[X, Y] = 0$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי $\text{Var}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i]$.

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני אזי $M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$.

סטטיסטי הסדר: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $X_{(k)}$ הערך ה- k בגודלו באוסף $\{X_i\}_{i=1}^n$.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי

$$F_{X_{(k)}}(t) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \cdot F_{X_1}(t)^i \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-i}$$

$$f_{X_{(k)}}(t) = n \cdot f_{X_1}(t) \cdot F_{X_1}(t)^{k-1} \cdot (1 - F_{X_1}(t))^{n-k}$$

מומוצע מדגמי: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}[X_1]$

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות אזי $\text{Var}[\bar{X}_n] \rightarrow 0$

התכנסות משתנים מקריים: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי

$$(X_n \xrightarrow{D} X) \iff \left(\forall t \in \mathbb{R}. (F_X \in C(\{t\})) \implies \left(F_{X_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(t) \right) \right)$$

$$(X_n \xrightarrow{p} X) \iff \left(\forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right)$$

$$(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \iff \left(\mathbb{P} \left(\left\{ \omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega) \right\} \right) = 1 \right)$$

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי $(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \implies (X_n \xrightarrow{p} X) \implies (X_n \xrightarrow{D} X)$

החוק החלש של המספרים הגדולים: מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ עבורם $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{p} 0$

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט שני אזי $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{p} 0$

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם $\frac{\sum_{k=1}^n \text{Var}[X_k]}{n^2} \rightarrow 0$ אזי $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{p} 0$

למה הלמה של קרונקר: תהיינה a_n, b_n סדרות עבורן $a_n \geq 0$ וכן $b_n \uparrow \infty$ וכן $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{b_n} < \infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{b_n} \rightarrow 0$

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת בעלי מומנט שני עבורם $\sum_{n=1}^\infty \frac{\text{Var}[X_n]}{n^2} < \infty$ אזי $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{p} 0$

טענה: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\limsup A_n = \{A_n \text{ אינסוף פעמים}\}$

טענה: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא $A : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ אזי $\liminf A_n = \{A_n \text{ החל ממקום מסויים}\}$

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ אזי $(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \iff (\forall \varepsilon > 0. \mathbb{P}(\limsup \{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0)$

מאורעות בלתי תלויים: מאורעות $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ המקיימים כי לכל $I \subseteq \mathbb{N}$ סופית מתקיים $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$

טענה הלמה של בורל-קנטלי: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות אזי

$$(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \iff (\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty)$$

$$(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1) \iff ((\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty) \wedge (\text{מאורעות ב"ת}))$$

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ויהי X מ"מ עבורם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$ אזי $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

החוק החזק של המספרים הגדולים: מ"מ $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ עבורם $\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n] \xrightarrow{a.s.} 0$

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ בעלי מומנט רביעי חסום במידה אחידה עבורם $\forall i \in \mathbb{N}. \mathbb{E}[X_i] = 0$ אזי $\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} 0$

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ עבורם $\forall i \in \mathbb{N}. \mathbb{E}[X_i] = 0$ וכן $\sum_{n=1}^\infty \frac{\text{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$ אזי $\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} 0$

σ -אלגברת הזנב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ אזי $\bigcap_{n=1}^\infty \sigma(\bigcup_{i=n}^\infty X_i)$

מאורע זנב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ותהא \mathcal{F} σ -אלגברת הזנב אזי $A \in \mathcal{F}$

חוק 0-1 של קולמוגורוב: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת ויהי A מאורע זנב אזי $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$

מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות ב"ת אזי

$$(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0) \iff (\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) < \infty)$$

$$(\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1) \iff (\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n) = \infty)$$

התפלגות נורמלית סטנדרטית: מ"מ Z עבורו $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

טענה: יהי $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ אזי $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

טענה: יהי $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ יהי $\mu \in \mathbb{R}$ ויהי $\sigma \in \mathbb{R}_+$ אזי $\sigma Z + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

מסקנה: יהי $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ אזי $M_Z(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \mu t}$

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת עבורם $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ אזי $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$

מסקנה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת עבורם $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

משפט הגבול המרכזי: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות בעלי מומנט שני אזי $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\text{Var}(X_1)}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1)$

תוחלת מותנית: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות יהי X מ"מ ותהא $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ σ -אלגברה אזי $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_0]$ מ"מ על \mathcal{F}_0 עבורו לכל

$$A \in \mathcal{F}_0 \text{ מתקיים } \mathbb{E}[\chi_A \cdot X] = \mathbb{E}[\chi_A \cdot \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_0]]$$

הגדרה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו X, Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[X | \sigma(Y)]$

משתנה מקרי מותנה: יהי (X, Y) מ"מ דו-מימדי בדיד אזי $X | Y = y$ מ"מ עבורו $\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X=x, Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$

מסקנה: יהי (X, Y) מ"מ דו-מימדי בדיד אזי $\mathbb{E}[X | Y = y] = \sum x \cdot \mathbb{P}(X = x | Y = y)$

משתנה מקרי מותנה: יהי (X, Y) מ"מ דו-מימדי רציף אזי $X|Y$ מ"מ עבורו $f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$

מסקנה: יהי (X, Y) מ"מ דו-מימדי רציף אזי $\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x) dx$

טענה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות יהי X מ"מ ותהיינה $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ σ -אלגברות אזי $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_2] | \mathcal{F}_1]$

מסקנה נוסחאת ההחלקה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהיו X, Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$

מסקנה: יהי X מ"מ רציף ויהי $A \in \mathcal{F}$ מאורע אזי $\mathbb{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(A | X = x) f_X(x) dx$

התפלגויות

התפלגות ברנולי: יהי $p \in [0, 1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X אינדיקטור להצלחה בניסוי בעל סיכוי הצלחה p וסיכוי כישלון $1 - p$.
- פונקציית הסתברות: $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \mathbb{P}(X = 1) = p$
- סימון: $X \sim \text{Ber}(p)$
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = p$
- שונות: $\text{Var}(X) = p(1 - p)$

התפלגות בינומית: יהי $p \in [0, 1]$ ויהי $n \in \mathbb{N}_+$

- המשתנה המקרי: X מספר הניסויים שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p לניסוי.
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \{0, \dots, n\}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- סימון: $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = np$
- שונות: $\text{Var}(X) = np(1 - p)$

התפלגות בינומית שלילית: יהי $p \in [0, 1]$ ויהי $r \in \mathbb{N}$

- המשתנה המקרי: $X \dots$
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \mathbb{N} \setminus \{0 \dots r - 1\}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1 - p)^{k-r}$
- סימון: $X \sim \text{NB}(n, p)$
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p}$
- שונות: $\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

התפלגות גאומטרית: יהי $p \in [0, 1]$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל.
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$
- סימון: $X \sim \text{Geo}(p)$
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$
- שונות: $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

התפלגות היפרגאומטרית: יהי $N \in \mathbb{N}$ ויהיו $D, n \in \{0 \dots N\}$

- המשתנה המקרי: $X \dots$
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \{\max\{0, n + D - N\} \dots \min(n, D)\}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- סימון: $X \sim \text{HG}(N, D, n)$
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \frac{nD}{N}$
- שונות: $\text{Var}(X) = \frac{nD}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

התפלגות היפרגאומטרית שלילית: יהי $N \in \mathbb{N}$ ויהי $K \in \{0, \dots, N\}$ ויהי $r \in \{0, \dots, N - K\}$

- המשתנה המקרי: $X \dots$
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \{0, \dots, K\}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k+r-1}{k} \binom{N-r-k}{K-k}}{\binom{N}{K}}$
- סימון: $X \sim \text{NHG}(N, K, r)$
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \frac{rK}{N-K+1}$
- שונות: $\text{Var}(X) = \left(\frac{r(N+1)K}{(N-K+1)(N-K+2)}\right) \left(1 - \frac{r}{N-K+1}\right)$

התפלגות פואסונית: יהי $\lambda > 0$ אזי

- המשתנה המקרי: X מספר האירועים שקרו בפרק זמן נתון בעל קצב אירועים בפרק זמן זה λ .
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
- סימון: $X \sim \text{Poi}(\lambda)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \lambda$.
- שונות: $\text{Var}(X) = \lambda$.

התפלגות אחידה בדידה: יהיו $a < b \in \mathbb{Z}$

- המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקבוצה $\{a \dots b\}$.
- פונקציית הסתברות: יהי $k \in \mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & k \in [a, b] \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.
- סימון: $X \sim \text{Uni}(\{a \dots b\})$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.
- שונות: $\text{Var}(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$.

התפלגות אחידה רציפה: יהיו $a < b$ אזי

- המשתנה המקרי: X בחירה אקראית של נקודה בקטע (a, b) .
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a, b) \\ 1 & t \geq b \end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in (a, b) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$.
- סימון: $X \sim \text{Uni}(a, b)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$.
- שונות: $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

התפלגות מעריכית: יהי $\lambda > 0$ אזי

- המשתנה המקרי: X משך חיים של תהליך הנמשך λ יחידות זמן בממוצע.
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$.
- סימון: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$.
- שונות: $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

התפלגות גאמא: יהיו $n, \lambda > 0$ אזי

- המשתנה המקרי: X
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$.
- סימון: $X \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \frac{n}{\lambda}$.
- שונות: $\text{Var}(X) = \frac{n}{\lambda^2}$.

התפלגות נורמלית: יהי $\sigma \in \mathbb{R}_+$ ויהי $\mu \in \mathbb{R}$ אזי

- המשתנה המקרי: X
- פונקציית התפלגות מצטברת: $F_X(t) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$.
- פונקציית צפיפות: $f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$.
- סימון: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- תוחלת: $\mathbb{E}[X] = \mu$.
- שונות: $\text{Var}(X) = \sigma^2$.