uגרף מכוון קשיר: גרף מכוון G עבורו לכל $u,v \in V$ לכל $u,v \in V$ איים מסלול מuuים מסלול מ־u ל־u מכוון קשיר חזק: גרף מכוון u עבורו לכל אזי $s\in V\left(G
ight)$ אזי :BFS אזי אלגוריתם

```
function BFS(G, s):
      (d, \pi, \operatorname{color}) \leftarrow \operatorname{dict}(V(G))
      for u\in V\left( G\right) \backslash \{s\} do
            color[u] \leftarrow White
            d[u] \leftarrow \infty
           \pi[u] \leftarrow Null
      end
      color[s] \leftarrow Grey
      d[s] \leftarrow 0
      \pi[s] \leftarrow \text{Null}
      Q \leftarrow queue()
      while Q \neq \varnothing do
            u \leftarrow \mathsf{Q}.\mathsf{head}
            for v \in Neighbor(u) do
                 if color(v) = White then
                        color[v] \leftarrow Grey
                        d[v] \leftarrow d[u] + 1
                        \pi[v] \leftarrow u
                        Q.enqueue(v)
            end
            O.dequeue()
            color[u] \leftarrow Black
      end
     return (d, \pi, \text{color})
```

```
\mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) הינה BFS (G,s) טענה: יהי אזי סיבוכיות אי סיבוכיות אי s\in V\left(G
ight) הינה מענה:
                                                            \{v \in V \mid \mathtt{BFS}\left(G,s
ight).\mathsf{color}\left[v
ight] = \mathtt{Black}\} = [s]_{
ightarrow} אזי איז s \in V משפט: יהי
                                                            \delta(v,u) = \min(\{\operatorname{len}(\sigma) \mid v,u \mid v \in V \mid u,v \in V \mid u,v \in V \} סיול בין יהי
                                                          \delta\left(v,u
ight) \leq \delta\left(v,w
ight) + 1 אזי \left(w,u
ight) \in E טענה: יהי G גרף ויהיו G גרף באשר באשר
                                                      d\left[v
ight] \geq \delta\left(v
ight) מתקיים BFS \left(G,s
ight) אזי בכל שלב בהרצת אזי גרף ויהיו s,v\in V למה: יהי
             d[v_i] \leq d[v_1]+1 וכן d[v_i] \leq d[v_{i+1}] אזי מתקיים שלב בהרצת BFS (G,s) בו בהרצת G
                                                              .BFS (G,s) .d[v] = \delta\left(v,s\right) אזי s,v \in V ויהיו היי G יהי יהי מרחקים: יהי
עץ יהי C_\pi=\{(\pi\left[v\right],v)\mid v\in V_\pi\setminus\{s\}\} וכן V_\pi=\{v\in V\mid \mathtt{BFS}\left(G,s\right).\pi\left[v\right]\neq \mathtt{Null}\}\cup\{s\} נגדיר s\in V יהי S גרף ויהי S\in V יהי יהי
                                                                                                                                                 .G_{\pi} = (V_{\pi}, E_{\pi})
                                                                                                                            טענה: יהי S \in V אזי גרף איר s \in V
```

- $\deg_{G_{\pi}}^{-}(s)=0$ מתקיים
- $\deg_{G_{\pi}}^{-}\left(v
 ight)=1$ מתקיים $v\in V\left(G_{\pi}
 ight)$ •
- s,v בין ב־ G_{π} בין מסלול בי $v \in V\left(G_{\pi}\right)$ לכל
 - . הינו עץ G_{π}
- Gבין ביותר בין המסלול הקצר ביותר בין s,v בין בין G_π בין ויהי $v\in V$ ביותר בין יהי $v\in V$

מסלול אוילר: מסלול העובר על כל הקשתות בגרף.

מעגל אוילר: מסלול אוילר שהינו מעגל.

 $(\deg(v) \in \mathbb{N}_{\mathrm{even}}$ מתקיים $v \in V$ מענה: יהי Gטענה: יהי לא מכוון אזי (יש מעגל אוילר ב'

אזי $\deg\left(u
ight)\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}}$ מתקיים מעגל אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו לכל

```
function EulerCircle(G, v):
    \sigma \leftarrow \text{List}(E(G))
    u \leftarrow Neighbor(v)
    while u \neq v do
        \sigma.append(\{v,u\})
        G = G \setminus \{\{v, u\}\}\
        u \leftarrow \text{Neighbor}(u)
    if length(\sigma) = |E(G)| then
     \mid return \sigma
    else
        w \leftarrow \{x \in V(G) \mid (\exists y \in V(G).(x,y) \in \sigma) \land (\deg(x) > 0)\}
        \sigma[w] = \text{EulerCircle}(G, w)
טענה: יהי v \in V(G) ויהי ו\deg(u) \in \mathbb{N}_{\mathrm{even}} מתקיים מu \in V אזי סיבוכיות און עבורו לכל
                                                                                                             \mathcal{O}(|E|) הינה EulerCircle (G, v)
                                             . Neighbor (u) | \neq \varnothing פעילה מתקיים while כל עוד לולאת בשלגוריתם באלגוריתם באלגוריתם
                . הינו מעגל אוילר EulerCircle (G) אזי \deg(v) \in \mathbb{N}_{\mathrm{even}} משפט: יהי v \in V מתקיים עבורו לכל
             \{v\in V(G)\mid \deg(v)\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}\}=2\}טענה: יהי G גרף קשיר ולא מכוון אזי (יש מסלול אוילר שאינו מעגל ב־G
                        אזי |\{v\in V\left(G\right)\mid \deg\left(v
ight)\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}\}|=2 אזי אלגוריתם למציאת מסלול אוילר: יהי G גרף קשיר ולא מכוון עבורו
function EulerPath(G):
    (v, u) \leftarrow \{v \in V(G) \mid \deg(v) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}
    G = G + \{\{v, u\}\}
    \sigma = \operatorname{EulerCircle}(G, v)
   return \sigma \setminus \{v, u\}
                                                  .(לא קיים ב־G מעגל באורך אי־זוגיי) \iff מענה: יהי G גרף לא מכוון אזי (G דו־צדדי)
                                                                         אלגוריתם זיהוי גרפים דו־צדדיים: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי
function IsBipartite(G):
    (d, \pi, \operatorname{color}) \leftarrow \operatorname{BFS}(G)
    for (v,u) \in V do
     if d(v) = d(u) then return False
    end
    return True
                                                        .(IsBipartite (G) = \text{True}) איי (G דו־צדדי) מענה: יהי G גרף לא מכוון ופשוט אזי (G דו־צדדי)
.|\sigma|=\min\{|	au|\ |t| מסלול קצר ביותר בין קודקודים (מק"ב): יהי G גרף ויהיו s,t\in V אאי מסלול \sigma מ־t עבורו t
                                                                    גדיר גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד: יהי S \in V גרף ויהי S \in V גרים גרף המסלולים
                                                                    E'=\{e\in E\mid sאזי אזי אזי E'=\{e\in E\mid sאזי היוצא מ־פ
                                                 אזי אלגוריתם למציאת גרף המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד: יהי G גרף ויהי אלגוריתם למציאת אר
```

```
E' \leftarrow E(G_{\pi})
     for (u,v) \in E(G) do
          if |\operatorname{height}_{G_\pi}(u) - \operatorname{height}_{G_\pi(v)}| = 1 then
            E'.append((u,v))
     end
     return (V(G), E')
                                                       .(במק"ב) קשת e) אזי e) אזי אזי (e \in E אזי רמות עוקבות ביער פין מחברת אזי אזי פענה: תהא
                                                                  sב מ"ב מהינו גרף מק"ב הינו גרף מק"ב מ־ShortestPathGraph (G,s) אזי s\in V מסקנה: יהי
                                                                         גרף המסלולים הקצרים ביותר בין קודקודים: יהי S,t\in V ויהיו גרף המסלולים ביותר בין קודקודים:
                                                                             E' = \{e \in E \mid tאזי אזי E' = \{e \in E \mid tאזי אזי מ־סלול קצר ביותר היוצא מ־e\}
טענה: יהי S גרף מכוון ויהיו t בסיבוכיות אמן לחישוב גרף המסלולים הקצרים ביותר מיs ליל בסיבוכיות אמן ריצה אזי קיים אלגוריתם לחישוב און אזי מכוון ויהיו
                                                                                                                                                          \mathcal{O}(|V| + |E|)
                                                                                                                      אזי s \in V יהי גרף ויהי :DFS אלגוריתם
function DFS (G, s):
     (k,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
     color \leftarrow dict(E)
     k[s] \leftarrow 1
     \pi[s] \leftarrow \text{Null}
     for u \in V \setminus \{s\} do
          k[u] \leftarrow 0
          \pi[u] \leftarrow \text{Null}
     end
     for e \in E do
      |\operatorname{color}[e] \leftarrow \operatorname{White}
     end
     i \leftarrow 2
     while (\exists u \in Adj(v).color[(v,u)] = White) \lor (\pi[v] \neq Null) do
          if \{u \in Adj(v) \mid \operatorname{color}[(v,u)] = \operatorname{White}\} \neq \emptyset then
                w \leftarrow \{u \in Adj(v) \mid \operatorname{color}[(v, u)] = \operatorname{White}\}\
                \operatorname{color}[(v, w)] \leftarrow \operatorname{Black}
                if k[w] = 0 then
                     k[w] \leftarrow i
                     \pi[w] \leftarrow v
                     v \leftarrow w
                    i \leftarrow i + 1
           else
            v \leftarrow \pi[v]
     end
     return (k,\pi)
                                                    \mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) הינה DFS (G,s) שענה: יהי אזי סיבוכיות אי סיבוכיות אי s\in V הינה הינה יהי
```

function ShortestPathGraph(G, s): | $(d, \pi, \operatorname{color}) \leftarrow \operatorname{BFS}(G)$

```
עץ E_\pi=\{(\pi\left[v\right],v)\mid v\in V_\pi\setminus\{s\}\} וכן V_\pi=\{v\in V\mid {
m DFS}\,(G,s)\,.\pi\left[v\right]\neq {
m Null}\}\cup\{s\} נגדיר S\in V וכן S=\{v\in V\mid {
m DFS}\,(G,s)\,.\pi\left[v\right]\neq {
m Null}\} נגדיר S=\{v\in V\mid {
m DFS}\,(G,s)\,.\pi\left[v\right]\neq {
m Null}\} . פענה: יהי S=\{v\in V\mid {
m DFS}\,(G,s)\,.\pi\left[v\right]\neq {
m Null}\} ויהי S=\{v\in V\mid {
m DFS}\,(G,s)\,.\pi\left[v\right]\neq {
m Null}\} פשתות ביחס לריצת S=\{v\in V\mid {
m DFS}\,(G,s)\,.\pi\left[v\right]\neq {
m Null}\} פעבורה S=\{v\in V\mid {
m DFS}\,(G,s)\,.\pi\left[v\right]\neq {
m Null}\} פעבורה S=\{v\in V\mid {
m DFS}\,(G,s)\,.\pi\left[v\right]\neq {
m Null}\}
```

.DFS (G,s) אזי k בהרצת $s \in V(G)$ אוי גרף ויהי

 $.k\left[v
ight]>0$ מתקיים DFS (G,s) אזי בהרצת $v\in\left[s
ight]_{
ightarrow}$ באשר באשר אזי גרף ויהיו

- C_{π} ביער v ביער אב של וכן $u,v)\notin E\left(G_{\pi}
 ight)$ עבורה $(u,v)\in E\left(G\right)$ הינו אב של v
- C_{π} ביער u ביער אב של וכן $u,v)\notin E\left(G_{\pi}\right)$ עבורה עבורה $(u,v)\notin E\left(G\right)$ הינו אב של u ביער v
 - . שאינה או עץ או קדמית או שאינה $e \in E\left(G\right)$ שאינה חוצות: ullet

 G_{π} טענה: יהי G_{π} או u צאצא של ען אזי u אוזי ען אזי u צאצא של פגרף און ותהא ותהא u אוזי אוי בגרף אזי u

מסקנה: יהי G גרף לא מכוון אזי לא קיימות קשתות חוצות.

אלגוריתם DFS בעל זמני נסיגה: יהי אלגוריתם

```
function DFS(G):
     (k, f, \pi, \text{color}, \text{low}) \leftarrow \text{dict}(V)
     for u \in V do
          k[u] \leftarrow 0
           \pi[u] \leftarrow \text{Null}
           color \leftarrow White
           low \leftarrow \infty
     end
     i \leftarrow 0
     for s \in V do
          if k[s] = 0 then
         | DFS-VISIT(s, k, f, \pi, i)
     end
     return (k, f, \pi, low)
function DFS-VISIT(u, k, f, \pi, color, low, i):
     color[u] \leftarrow Gray
     i \leftarrow i + 1
     k[u] \leftarrow i
     for v \in Adj(u) do
           if (\operatorname{color}[v] = \operatorname{Gray}) \wedge (v \neq \pi[u]) then
              |\log[u] \leftarrow \min(\log[u], k[v])
           else if color[v] = White then
                \pi[v] \leftarrow u
                DFS-VISIT(v, k, f, \pi, \text{color}, \text{low}, i)
                low[u] \leftarrow min(low[u], low[v])
     \operatorname{color}[u] \leftarrow \operatorname{Black}
     i \leftarrow i + 1
     f[u] \leftarrow i
```

.DFS (G) אזי f אזי $s\in V\left(G\right)$ אזי היי G גרף יהי זמן נסיגה: יהי

 $(k \ [u] < k \ [v] < f \ [u])$ יהיו ביער $u \ne u$ אזי ($u \ne v$ אזי ($u \in V$ יהיו : Gray Path Lemma טענה יהיו $v,u \in V$ אזי (u,v) קשת חוצה $v,u \in V$ טענה: יהיו $v,u \in V$ אזי (u,v) קשת חוצה

משפט הסוגריים: יהי G גרף ויהיו $u,v\in V$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- $(G_{\pi}$ וכן u,v אינם צאצא־אב ביער $[k\left(u
 ight),f\left(u
 ight)]\cap [k\left(v
 ight),f\left(v
 ight)]=arnothing$ מתקיים \bullet
 - G_{π} וכן v צאצא של v וכן $[k\left(u
 ight),f\left(u
 ight)]\subset [k\left(v
 ight),f\left(v
 ight)]$ פתקיים •
 - G_{π} ביער u צאצא של וכן ו $[k\left(u
 ight),f\left(u
 ight)]\supset[k\left(v
 ight),f\left(v
 ight)]$ פתקיים •

יש מסלול לבן DFS (G) באלגוריתם (בזמן ביער (G_π) ביער אזי ע איז $u,v\in V$ יש מסלול לבן: יהי G גרף ויהיו ע אזי $u,v\in V$ אזי ויהי $u,v\in V$ יש מסלול לבן: יהי $u,v\in V$

גרף מכוון אציקלי: גרף מכוון G בו לא קיים מעגל.

 $u \prec v$ אזי אוי אוי $u,v \in E$ אם אם $u,v \in V$ המקיים לכל V המס סדר אזי אחס אזי אזי מיון טופולוגי: יהי

(G) משפט: יהי G גרף מכוון אזי (G אציקלי) \iff (קיים מיון טופולוגי על

 $\mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight)$ אזי אלגוריתם אלגוריתם מיון טופולוגי בסיבוכיות אלגוריתם אלגור

```
G טענה: יהי G משרה מיון טופולוגי על חמתקבלת מהרצת G משרה מיון טופולוגי על טענה: יהי G גרף מכוון אציקלי אזי
                                                   \left. \left| G/_{\overrightarrow{G}} 
ight| < \left| G-\{v\}/_{\overrightarrow{G-\{v\}}} 
ight| עבורו על אזי v \in V\left(G\right) אזי גרף מכוון אזי מנתק: יהי
                                                         אב חורית. (w,v) קשת אחורית. w\in V אזי v\in V אחורית. הרי G גרף מכוון ויהי
                                                              .DFS (G) בהרצת low גרף אזי G בהרצת ביותר: יהי
                                                                אלגוריתם למציאת כל הקודקודים המנתקים: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי
function Detachable Vertices (G):
        if \forall v \in children(u).low[v] \geq k[u] then
                             \mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) הינה Detachable
Vertices (G) טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות זמן הריצה של
                                     סענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי Detachable Vertices (G) טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי
וכן uיים מסלול מ־u קיים מסלול מ־u איי קבוצה עבורה לכל מקסימלית בגודלה עבורה לכל ארף מכוון איי קבוצה רכיב קשיר היטב (רק"ה): יהי
                                         G^T=(V,E') אזי אזי E'=\{(v,u)\mid (u,v)\in E\} אזי גרף מכוון נגדיר הופבי/משוחלף: יהי
                                                    (G^T) טענה: יהי C גרף מכוון ותהא C \subseteq V אזי ותהא C \subseteq C אזי יהי
                                                          אלגוריתם קוסראג'ו־שריר למציאת רכיבים קשירים היטב: יהי G גרף מכוון אזי
    /* In the next line, in the main loop of DFS we go through the vertices in decreasing order of f[u]
                                                                                                                                         */
        A.append \left( [v]_{\overbrace{(G^T)_{\pi}}} \right)
   .G^{*}=\left(\operatorname{SCC}\left(G
ight),E^{*}
ight) אזי E^{*}=\left\{\left(A,B
ight)\in\operatorname{SCC}\left(G
ight)^{2}\mid\exists u\in A.\exists v\in B.\left(u,v
ight)\in E
ight\} אזי הרכיבים: יהי G גרף מכוון נגדיר
```

אלגוריתם למציאת גרף הרכיבים: יהיG גרף מכוון אזי

 $s \leftarrow V$

end return A

function SCC(G):

end return A

 $(k, f, \pi) \leftarrow \text{DFS}(G)$

 $(k', f', \pi') \leftarrow \text{DFS}(G^T)$ $A \leftarrow \operatorname{set}(\operatorname{set}(V))$ for $v \in V$ do

 $A \leftarrow \operatorname{set}(V)$

 $(k, f, \pi, \text{low}) \leftarrow \text{DFS}(G, s)$

if $|Adj_{G_{\pi}}(s)| \neq 1$ then A.append(s)for $u \in V \setminus \{s\}$ do

A.append(u)

(Gמשפט: יהי G גרף מכוון אזי (G אציקלי) אזיקלי) משפט: יהי G גרף מכוון אזי

```
function KosarajuSharir(G):
    V^* \leftarrow \operatorname{SCC}(G)
     E^* \leftarrow \operatorname{set}((V^*)^2)
     for (u,v) \in E do
         \begin{array}{l} (u,v) \in E \text{ as} \\ \text{if } [v] \xrightarrow[G_{\pi}^T]{} \neq [u] \xrightarrow[G_{\pi}^T]{} \text{ then} \\ \\ E^*.\text{append} \left( \left( [v] \xrightarrow[G_{\pi}^T]{}, [u] \xrightarrow[G_{\pi}^T]{} \right) \right) \end{array}
     return (V^*, E^*)
                                                                                                                        למה: יהי G גרף מכוון אזי G^st אציקלי.
                                                                                                                          אזי U \subseteq V אזי גרף ותהא G יהי
                                                                                                                   .k\left( U\right) =\min_{u\in U}\left( k\left[ u\right] \right) זמן גילוי: •
                                                                                                                f(U) = \max_{u \in U} (f[u]) זמן נסיגה: •
                                          f\left(C_{2}
ight) < f\left(C_{1}
ight) אזי אזי \left(C_{1},C_{2}
ight) \in E\left(G^{st}
ight) באשר רק"ה באשר רק"ה מכוון יהיו G יהי היי G
                                f\left(C_{2}
ight)>f\left(C_{1}
ight) אזי אזי \left(C_{1},C_{2}
ight)\in E\left(\left(G^{T}
ight)^{*}
ight) באשר רק"ה באשר רק"ה גרף מכוון יהיו
                                                                            (C \in \operatorname{SCC}(G)) \Longleftrightarrowמשפט: יהי G גרף מכוון ויהי C \subseteq V אזי ויהי G גרף מכוון ויהי
                                                                                                  G^* = 	ext{KosarajuSharir}(G) מסקנה: יהי G גרף מכוון אזי
                                                                     \exists v \in V. \exists s \in S. s 	o v המקיימת S \subseteq V הכוון אזי גרף מכוון אזי יהי
                                                                                        אלגוריתם למציאת קבוצת מוצא מינימלית: יהי G גרף מכוון אזי
function MinimalOriginSet(G):
     A \leftarrow \operatorname{set}(V(G))
     G^* \leftarrow \text{ComponentGraph}(G)
     for C \in V(G^*) do
          v \leftarrow \{u \in C \mid \nexists w \in V(G) \backslash C.(w, u) \in E(G)\}
          A.append(v)
     end
     return A
                                                                           . קבוצת מוצא מינימלית MinimalOriginSet (G) אזי מכוון אזי G יהי הי G גרף מכוון אזי
                                    \mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) הינה MinimalOriginSet (G) טענה: יהי G גרף מכוון וקשיר אזי סיבוכיות זמן הריצה של
\mathcal{O}\left(|V|+|E|
ight) אזי קיים אלגוריתם הבודק האם קיים הילוך אובר על S\subseteq V אזי קיים אלגוריתם הבודק האם קיים הילוך אובר על מכוון ותהא
                                                                                                 (G,w) אזי w:E	o\mathbb{R} גרף ממושקל: יהי
                                                  V\left(T
ight)=V\left(G
ight) עץ וכן T באשר באשר אי מכוון אזי תת־גרף אזי היי היי T גרף קשיר לא מכוון אזי תת־גרף אזי T\leq G
                                            .w\left(T
ight) = \sum_{e \in E\left(T
ight)} w\left(e
ight) אזי פורש אזי עץ פורש: יהי G גרף קשיר לא מכוון ויהי ויהי יהי T \leq G
       w\left(T
ight)=\min\left\{ w\left(S
ight)\mid G עץ פורש מינימלי (עפ"מ): יהי G גרף קשיר לא מכוון אזי עץ פורש T\leq G עבורו אזי עץ פורש זהי G יהי
                                                                        A,B \subseteq V(G) אזי A \uplus B = V(G) עבורם A,B \subseteq V(G) אזי אזי A \uplus B = V(G)
                          E\left(A,B
ight)=\left\{ \left(u,v
ight)\in E\left(G
ight)\mid\left(u\in A
ight)\wedge\left(v\in B
ight)
ight\} חתך אזי \left(A,B
ight) חתך החתך החתך החתך החתך יהי
                                                             . בעל מעגל יחיד בעל מעגל T+\{e\} אזי e\in E\left(G\right)ackslash E\left(T\right) בעל מעגל יחיד. עץ פורש יחיד
עץ T+\{e_1\}-\{e_2\} עץ פורש תהא עץ e_2\in E (T+\{e_1\}) ותהא ותהא e_1\in E (G)\setminus E עץ פורש תהא עץ פורש יהי יהי
                                                             . טענה: יער בעל שני עצים T-\{e\} אזי e\in E\left(T
ight) עץ פורש ותהא די יהי עצים. אזי T\leq G
                      G של של [v]_{\overbrace{T-\{e\}}},V\left(G
ight)\setminus [v]_{\overbrace{T-\{e\}}} אזי v\in V\left(G
ight) ויהי e\in E\left(T
ight) חתך או פורש תהא T\leq G
                                                            אזי שוו וממושקל אזי אוי מינימלי: יהי G אזי פורש מינימלי: יהי מכוון וממושקל אזי אלגוריתם אוי למציאת עץ פורש מינימלי:
```

```
function MST(G, w):
       color \leftarrow dict(E)
       color \leftarrow White
       Blueless \leftarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(V) \times \mathcal{P}(V))
       Redless \leftarrow \mathcal{P}(\{v \rightarrow v \mid v \in V(G)\})
       while \exists e \in E.color[e] = White do
             Blueless \leftarrow \{(A,B) חתך \forall e \in E(A,B).\operatorname{color}[e] \neq \operatorname{Blue}\}
             Redless \leftarrow \{ \sigma \text{ circle in } G \mid \forall i \in [\text{len}(\sigma)].\text{color}[(\sigma[i], \sigma[i+1])] \neq \text{Red} \}
             if Blueless \neq \emptyset then
                    A \leftarrow \text{Blueless}
                    f \leftarrow \operatorname{argmin}_{e \in A^2 \cap E}(w(e))
                    color[f] = Blue
             if Redless \neq \emptyset then
                    \sigma \leftarrow \text{Redless}
                     f \leftarrow \operatorname{argmax}_{e \in \sigma}(w(e))
                    color[f] = Red
       end
      return (V, \{e \in E \mid \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue}\})
```

 $e\in E$ אזי קיימת MST (G) באיטרציה של color [a]= White עבורה ותהא $a\in E$ ותהא של מכוון וממושקל אזי קיימת אטר ניתנת לצביעה.

תות. אוי אוי אובעת |E| אויע אוי אוי אוי וממושקל קשרות אויר קשיר אוי קשרות אוי אורף קשיר אויג מסקנה: יהי G

עפ"מ עבורו עפ"מ איטרציה של MST (G) עפ"מ אזי בכל איטרציה אזי מכוון וממושקל א עפ"מ עבורו אזי זהי G יהי

- $.e\in E\left(T
 ight)$ מתקיים color $\left[e
 ight] =$ Blue המקיימת $e\in E$ לכל
- $.e
 otin E\left(T
 ight)$ מתקיים מהקיים $e \in E$ לכל \bullet

G עפ"מ של MST G עפ"מ אזי w אזי מסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל

אזי w אזי מכוון וממושקל אזי אלגוריתם פרים למציאת עץ פורש מינימלי: יהי

```
function Prim's Algorithm (G, w):
      color \leftarrow dict(E)
      U \leftarrow \operatorname{set}(V)
      color \leftarrow White
     r \leftarrow V
      U.append(r)
      while U \neq V do
            (u, v) \leftarrow \operatorname{argmin}_{e \in U \times (V \setminus U)}(w(e))
           color[(u, v)] = Blue
           U.append(v)
           for w \in U do
                 if (w,v) \in E then
                  |\operatorname{color}[(w,v)] = \operatorname{Red}
           end
      end
      return (V, \{e \in E \mid \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue}\})
```

נעשית כמו באלגוריתם הגנרי. Prim'sAlgorithm (G) טענה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי כל צביעת קשת באלגוריתם G עפ"מ של Prim'sAlgorithm (G) עפ"מ של G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי G אזי G אזי G אזי G אזי פסקנה: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל G

ריצה ערימת מינימום בסיבוכיות או Prim'sAlgorithm (G) אזי ניתן לממש אזי ניתן ניתן ממושקל אזי ערימת מינימום אזי יהי G יהי G יהי G יהי G יהי G יהי לא מכוון וממושקל אזי ניתן לממש אודי נ

 $\mathcal{O}\left(|E|+|V|\log|V|\right)$ בסיבוכיות זמן ריצה Prim'sAlgorithm (G) אזי ניתן לממש אזי ניתן לממש אזי ניתן לממש אזי פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל אזי W אלגוריתם קרוסקל למציאת עץ פורש מינימלי: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל

```
\begin{array}{l|l} \textbf{function Kruskal'sAlgorithm}(G,w) : \\ & \operatorname{color} \leftarrow \operatorname{dict}(E) \\ & L \leftarrow \operatorname{sort}(E) \text{ // Sort is done by } w \text{ from small to big.} \\ & \textbf{for } (u,v) \in L \text{ do} \\ & | & \textbf{if } \exists \sigma \in \{u \rightarrow v\}. \forall i \in [n]. \operatorname{color}(\sigma(i)) = \operatorname{Blue \ then} \\ & | & \operatorname{color}[e] = \operatorname{Red} \\ & | & \operatorname{else} \\ & | & \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue} \\ & \textbf{end} \\ & \textbf{return } (V, \{e \in E \mid \operatorname{color}[e] = \operatorname{Blue}\}) \end{array}
```

. נעשית כמו באלגוריתם הגנרי. אזי כל צביעת קשת באלגוריתם אזי כל צביעת פשר באלגוריתם נשית כמו באלגוריתם באלגוריתם הגנרי. אזי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי G אזי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי G אזי אזי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל w אזי G

עם Union-Find עם Kruskal'sAlgorithm (G) עם אזי ניתן לממש א אזי ניתן לממש אזי ניתן עם אזי ניתן עם אזי ניתן לא אזי ניתן לממש אזי ניתן לממש אוי ניתן לU ($|E| \log |V|$) וכן סיבוכיות זמן סיבוכיות אמן $\mathcal{O}\left(|E|\log |V|\right)$

אלגוריתם w באשר באשר אזי אוי גרף היי G אריי מינימלי: יהי באשר אין פורש מינימלי: אלגוריתם מונימלי אזי Borůvska אלגוריתם

function Borůvska's Algorithm (G, w):

```
\begin{array}{l} \operatorname{Trees} \leftarrow \operatorname{set}(\operatorname{set}(G)) \\ \text{for } v \in V \text{ do} \\ | \operatorname{Trees.append}(\{v\}) \\ \text{end} \\ \text{while } |Trees| \neq 1 \text{ do} \\ | \operatorname{for } T \in Tree \text{ do} \\ | (u,v) \leftarrow \operatorname{argmin}_{(u,v) \in V(T) \times V(G)}(w((u,v))) \\ | S \leftarrow \{S \in Tree \mid u \in V(S)\} \\ | S \leftarrow S + T + \{(u,v)\} \\ | \operatorname{Trees.Remove}(T) \\ | \text{end} \\ \text{end} \\ A \leftarrow \operatorname{Trees} \\ \text{return } A \end{array}
```

G עפ"מ של Borůvska'sAlgorithm Gי איז w באשר ש באשר ש Borůvska א נהף קשיר לא מכוון וממושקל ש באשר ש

 $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n$ עפ"מ בעלי משקליי קשתות כולל כפילויות יהי $i \leq G$ עפ"מ בעלי משקליי קשתות כולל כפילויות $i \in [n]$ אזי $i \in [n]$ אזי $i \in [n]$ לכל $i \in [n]$

w אלגוריתם למציאת עץ פורש מינימלי המכיל מספר מקסימלי של קשתות מקבוצה מסוימת: יהי G גרף קשיר לא מכוון וממושקל ותהא $F\subseteq E$ אזי

```
function PrioritizeMST(G, w, F):
    \omega \leftarrow (V(G) \rightarrow \mathbb{R})
    m \leftarrow \min(\{|w(e_1) - w(e_2)| \mid (e_1, e_2 \in E) \land (w(e_1) \neq w(e_2))\}
    for e \in E do
        if e \in F then
         \omega(e) \leftarrow w(e)
        else
         | \omega(e) \leftarrow w(e) + \varepsilon
    end
    return Kruskal'sAlgorithm(G, \omega)
                                      w^-טענה: תהא T ויהי T עפ"מ ביחס ל\omega באלגוריתם באלגוריתם T עפ"מ ביחס לT עפ"מ ביחס ל
                                                                 wעפ"מ ב־G ביחס ל־PrioritizeMST (G,w) אזי F\subseteq E מסקנה: תהא
                                                 אזי i \in [n] לכל אזי בעיית שיבוץ המשימות: יהיו יהיו היו s_i < f_i באשר בעיית שיבוץ המשימות: יהיו
                                                                         \max\{|A|\mid (A\subseteq\{[s_1,f_i]\}_{i=1}^n)\land (\forall I,J\in A.I\cap J=\varnothing)\}
                              אזי i \in [n] אזי אינוריתם חמדן לבעיית שיבוץ המשימות: יהיו יהיו s_i < f_i באשר באשר אלגוריתם אזי
function ActivitySelectionProblem(s_1, \ldots, s_n, f_1, \ldots, f_n):
    F \leftarrow \operatorname{list}([s_1, f_1], \dots, [s_n, f_n])
    /* In the next line, we put all the parameters in F and sort it based on f_i
                                                                                                                                      */
    F \leftarrow \operatorname{sort}(\{f_1, \dots, f_n\})
    X \leftarrow \operatorname{list}([s_1, f_1], \dots, [s_n, f_n])
    X \leftarrow \varnothing
    for k \in [1, \ldots, n] do
        if X = \emptyset then
         X.append(L[k])
        else if L[k] \cap X.last = \emptyset then
         X.append(L[k])
    end
    return X
     \mathcal{O}(n\log(n)) הינה ActivitySelectionProblem אי סיבוכיות זמן הריצה של s_i < f_i באשר הינה s_1 \ldots s_n, f_1 \ldots f_n \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                עבורו X^* עבורו לבעיה איים פתרון לבעיה X^* עבורו לכלי פאיטרציה לכל לכל באיטרציה היX
                                                                                                     ([s_i, f_i] \in X^*) \iff ([s_i, f_i] \in X)
                   . פתרון לבעיית שיבוץ המשימות ActivitySelectionProblem אזי s_i < f_i באשר באשר אזי s_1 \dots s_n, f_1 \dots f_n \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
           .\ell=1 הכוונה היא "אורך הקשת" ובכך אנו "מכלילים" גרף ללא משקל בתור היא "אורך הקשת" הערה: כאשר משקל הגרף הוא \ell
                                                                     \ell(\sigma) = \min\{\ell(\tau) \mid \tau \in \{s \to t\}\} מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי G גרף ממושקל \ell ויהיו s,t \in V אזי מסלול קצר ביותר בין קודקודים: יהי
למה: יהיו t קשת השייכת למעגל שלילי אזי קיים מסלול לt וכן כל מסלול מ־t לא עובר דרך קשת השייכת למעגל שלילי אזי קיים מסלול למה:
                                                                                                               t-ל s פשוט קצר ביותר בין
למה: יהיו sעבורם קיים מסלול מיsלי לוכן קיים מסלול מיsלי למה: יהיו אזי לא קיים מסלול מיsלי למה: יהיו
                                                                                                               tל ל ל ליט קצר ביותר בין s
                                                         .\delta_{\ell}\left(s,t
ight)=\inf_{\sigma\in\left\{ s	o t
ight\} }\ell\left(\sigma
ight) אזי s,t\in V אינון: יהי G גרף ממושקל
                                           . משקל. במרחק ביחס במרחק ברור שמדובר למשקל. \delta=\delta_\ell אזי נסמן אזי גרף הערה: הערה: הערה למשקל
sבעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא (SSSP): יהי S גרף מכוון ממושקל s\in V אזי איי T\leq G עץ פורש בו כל מסלול מ
                                                                                                         Gל־ט הינו מסלול קצר ביותר ב־v
                            .\delta_\ell\left(u,v
ight) \leq \delta_\ell\left(u,w
ight) + \delta_\ell\left(w,v
ight) אזי u,v,w \in V למה אי־שיוויון המשולש: יהי
                  רביותר. יהי \sigma מסלול קצר ביותר ויהי i \in \text{len}(\sigma) אזי \sigma מסלול קצר ביותר מסלול קצר ביותר ויהי \sigma
                   אזי s\in V אלו וממושקל \ell ויהי וממושקל אלגוריתם בלמן-פורד למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא: יהי
```

```
function BellmanFord(G, \ell, s):
     (d,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
     d[s] \leftarrow 0
     for u \in V do
          d[u] \leftarrow \infty
          \pi[u] \leftarrow \text{None}
     end
     (c,i) \leftarrow 1
     while (i \leq |V|) \wedge (c > 0) do
          for (u,v) \in E do
           c \leftarrow c + \text{Relax}(\ell, d, u, v)
          end
         i \leftarrow i + 1
     end
     if c > 0 then c \leftarrow 1
     return c
function Relax (\ell, d, u, v):
     if d[v] > d[u] + \ell(u, v) then
          d[v] \leftarrow d[u] + \ell(u, v)
          \pi[v] \leftarrow u
          return 1
     return 0
```

 $.\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[u
ight] + \ell\left((u,v)
ight)$ אזי מסקנה: יהיו $\delta\left(s,u
ight) \leq d\left[u
ight]$ בריצת BellmanFord מתקיים ($u,v
ight) \in E$ אזי לאחר הרצת ($u,v
ight) \in E$ באשר $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ וכן בריצת הרצת ($u,v
ight) \in E$ מסקנה: יהיו $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ וכן בריצת $\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ מתקיים ($\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$ מתקיים ($\delta\left(s,v
ight) \leq d\left[v
ight]$

Relax נקבל כי למה: אזי אחר כל רצף מתקיים BellmanFord מתקיים אזי פעולות אזי אזי איי אזי אזי פעולות אזי פריצת אזי אזי למה: יהי $\delta\left(s,v\right)\leq d\left[v\right]$ מתקיים $\delta\left(s,v\right)\leq d\left[v\right]$ מתקיים $v\in V$

 $d\left[v
ight]=\infty$ מסקנה: יהיו $s,v\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים מחקנים אזי לאחר כל רצף פעולות אזי לפבל כי $s,v\in V$ מסקנה: יהיו $s,v\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים מחקנים מחקנה: יהיו $d\left[v
ight]=\delta\left(s,v
ight)$ מתקיים $d\left[s
ight]=\delta\left(s,v
ight)$ אזי לאחר כל רצף פעולות BellmanFord מתקיים $s,v\in V$ למה: יהיו $s,t\in V$ עבורם בריצת BellmanFord מתקיים $d\left[s
ight]=0$ ויהי $d\left[s
ight]=0$ מסלול אזי לאחר הפעלת הרצף $d\left[s
ight]=0$ נקבל כי $d\left[s
ight]=0$ מחקנים מחקנ

מסקנה: יהי $s \in V$ אזי

- (sיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־(s) החזיר (קיים מעגל שלילי אשר ניתן BellmanFord) •
- .($d\left[v
 ight]=\delta\left(s,v
 ight)$ מתקיים (כל לכל מרכל) אפר ניתן להגיע אליו מ־s וכן לכל ששר ניתן (לא קיים מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מ־s וכן לכל S מתקיים (אביר בינון אפר נעץ בינות אפר בינון אפר בינון אפר בינות בינות אפר בינות אפר בינות בינות אפר בינות אפר בינות בינות אפר בינות בינות בינות אפר בינות ב

. אזי BellmanFord אזי BellmanFord באיזשהו שלב של בעץ מעגל בעץ אזי מעגל בעץ אזי אזי ויהי $s \in V$ ויהי

. איי BellmanFord איי אליו להגיע אליו אשר ניתן שלילי אשר אליי מעגל איים איים איי עץ אכורו א א עכורו א א איי אפיים מעגל אלילי אשר ניתן א

מכיל מעגל שלילי. BellmanFord אזי עץ אליו מיז מעגל שלילי שלילי שלילי מעגל שלילי אשר ניתן להגיע אליו מיז $s\in V$

.SSSP מסקנה: יהי אוי BellmanFord אזי $s \in V$ מסקנה:

 $\mathcal{O}\left(|E|\cdot|V|
ight)$ אזי בעל סיבוכיות בעל BellmanFord משפט: יהי אזי אזי משפט בעל משפט

ריצה זמן בסיבוכיות SSSP אזי קיים אלגוריתם אזי קיים וכן $\ell:E\to\mathbb{Z}$ בסיבוכיות הערה: נניח כי $\ell:E\to\mathbb{Z}$

 $\mathcal{O}(|E|\log^2(|V|)\log(|V|\cdot W)\log\log(|V|))$

```
function IsZeroCircle (G,\ell):  \begin{array}{c|c} V \leftarrow V \uplus \{s\} \\ \text{for } v \in V \backslash \{s\} \text{ do} \\ & E \leftarrow E \cup \{(s,v)\} \\ & \ell((s,v)) \leftarrow 0 \\ \text{end} \\ & (c,d,\pi) \leftarrow \text{BellmanFord}(G,\ell,s) \\ \text{for } e \in E \text{ do} \\ & \text{if } d(v) \neq d(u) + \delta(u,v) \text{ then} \\ & | E \leftarrow E \backslash \{(s,v)\} \\ \text{end} \\ & \text{if } \exists \text{ circle } C \in G \text{ then return True return False} \\ \end{array}
```

טענה: בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה נקבל את גרף מק"ב מS לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה קיים מעגל S אזי S IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה קיים מעגל S אזי בריצת IsZeroCircle לאחר מחיקת כל הקשתות בלולאה נקבל כי S בגרף. עענה: יהי S מעגל עבורו S מחזיר שליליים אזי S בעל מעגל ממשקל S בעל מעגל מחילר IsZeroCircle מחזיר S מחזיר S עענה: יהי S גרף מכוון חסר מעגלים שליליים אזי סיבוכיות זמן הריצה של IsZeroCircle הינה S הינה S אזי שלגוריתם למציאת מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף מכוון אציקלי: יהי S מכוון אציקלי ויהי S אזי

```
function SSSP-DAG(G, \ell, s):
    (d,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
    d[s] \leftarrow 0
    for u \in V do
         d[u] \leftarrow \infty
      \pi[u] \leftarrow \text{None}
    end
    /* Knuth'sAlgorithm is an algorithm to compute a topological sorting.
                                                                                                                                                      */
    f \leftarrow \text{Knuth'sAlgorithm}(G)
    for i \in [1, \dots, |V|] do
         for v \in Adj(f(i)) do
          Relax((f(i), v))
         end
    end
    return (d,\pi)
```

טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s\in V$ אזי SSSP-DAG (G) פתרון לבעיית SSSP-DAG (G) אזי $s\in V$ טענה: יהי G מכוון אציקלי ויהי $s\in V$ אזי סיבוכיות זמן הריצה של SSSP-DAG (G) הינה (|E|+|V|) אזי סיבוכיות זמן הריצה של $s\in V$ אזי מסלולים קצרים ביותר מנקודת מוצא בגרף ללא משקלים שליליים: יהי S גרף מכוון עבורו $s\in V$ ויהי $s\in V$

```
Q \leftarrow \text{heap}((V, \text{int}))
    (d,\pi) \leftarrow \operatorname{dict}(V)
    d[s] \leftarrow 0
    for u \in V do
         d[u] \leftarrow \infty
         \pi[u] \leftarrow \text{None}
    end
    Q.insert((s, d[s]))
    while Q \neq \varnothing do
         u \leftarrow Q.\min
         for v \in Adj(u) do
             if d[v] = \infty then
                  \pi[v] \leftarrow u
                  d[v] \leftarrow d[u] + \ell(u, v)
                  Q.insert((v, d[v]))
             else if d[u] + \ell(u, v) < d[v] then
                  \pi[v] \leftarrow u
                  d[v] \leftarrow d[u] + \ell(u, v)
                  Q.decrease-key((v, d[v]))
         end
    end
    return (d,\pi)
                                                 d\left[u
ight]=\delta\left(s,u
ight) אזי Q אזי Dijkstra למה: יהיו s,u\in V אזי למה:
                                                                            \ell \geq 0 כאשר SSSP משפט: יהי היי אוי Dijkstra אזי אזי משפט: יהי
                  \mathcal{O}\left(|E|+|V|\cdot\log\left(|V|
ight)
ight) איז ניתן לממש את Dijkstra אי ניתן לממש את אי בסיבוכיות בסיבוכיות אמן אי משפט: יהי s\in V
D_{u,v}=\delta\left(u,v
ight) מתקיים u,v\in V מתקיים לכל אזי D\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) אזי גרף מכוון וממושקל יהי G יהי יהי (APSP): יהי
                                  \Pi_{u,v}(v)\in\sigma מ־u ל־v המקיים u,v\in V וכן וכן \Pi\in M_{|V|}(V) וכן
                                                                                               p:V	o\mathbb{R} אזי גרף אזי G יהי פוטנציאל: יהי
מתקיים משקל מותאמת: תהא p פונקציית פוטנציאל אזי פונקציית משקל עבורה לכל u,v \in E מתקיים מוקציית משקל מותאמת: תהא
                                                                                                     \ell_p((u,v)) = \ell((u,v)) + p(u) - p(v)
                         \ell_{p}\left(\sigma
ight)=\ell\left(\sigma
ight)+p\left(s
ight)-p\left(t
ight) אזי ל־ל משפט: תהא t פונקציית פוטנציאל יהיו s,t\in V ויהי ויהי פוטנציאל משפט:
(מסלול קצר ביותר ביחס ל־t מסלול מיs ויהי s,t\in V ויהי פוטנציאל פונקציית פוטנציאל היו היי אזי s,t\in V ויהי
                                                                                                                                ביותר ביחס ל־(\ell_p).
                                                                      \ell_p\left(\sigma
ight)=\ell\left(\sigma
ight) מסקנה: תהא מסקנה פונקציית פוטנציאל ויהי מסקנה פונקציית פו
                                           \delta_{\ell}\left(s,t
ight)=\delta_{\ell_{n}}\left(s,t
ight)-p\left(s
ight)+p\left(t
ight) אזי s,t\in V מסקנה: תהא p פונקציית פוטנציאל ויהיו
                                   \ell_p \geq 0 עבורה עבורה פוטנציאל פונקציית פוטנציאל פונקציית מכוון וממושקל גרף מכוון וממושקל פונקציית פוטנציאל פיזבילית: יהי
          משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל \emptyset אזי (קיימת פונקציית פוטנציאל פיזבילית)(G) מצוייד עם \emptyset חסר מעגלים שליליים).
                                                         אלגוריתם למציאת פונקציית פוטנאציל פיזבילית: יהי G גרף מכוון וממושקל אזי
```

function Dijkstra(G, ℓ, s):

```
function FeasiblePotential (G, \ell):
     G' \leftarrow G \uplus \{s\}
     for v \in V(G) do
          E(G') \leftarrow E(G') \cup \{(s,v)\}
          \ell((s,v)) \leftarrow 0
     end
     c \leftarrow \text{BelmanFord}(G', \ell, s)
     if c=1 then return None
     p \leftarrow (V(G) \rightarrow \mathbb{R})
     for v \in V(G) do
      p(v) \leftarrow \delta(s,v)
     end
     return p
                                                                                                                        טענה: יהי G גרף מכוון וממושקל
                                                               .(None מחזיר FeasiblePotential (G,\ell))\iff(מעגל שלילי בעל מעגל \ell מצוייד עם \ell מצוייד עם \ell
           מחזיר פונקציית פוטנציאל פיזבילית). FeasiblePotential (G,\ell) פיזבילית פוטנציאל פיזבילית פוטנציאל פיזבילית). \ell
                                                                 אלגוריתם ג'ונסון לבעיית כל המסלולים הקצרים: יהי G גרף מכוון וממושקל אזי
function Johnson (G, \ell):
     p \leftarrow \text{FeasiblePotential}(G, \ell)
     if p = None then return None
     \ell_p \leftarrow (E \to \mathbb{R})
     for (u,v) \in E do
      \ell_p((u,v)) = \ell((u,v)) + p(u) - p(v)
     end
     (D_{\ell_p}, D_{\ell}) \leftarrow M_{|V|}(\mathbb{R})
     \Pi \leftarrow M_{|V|}(E)
     for v \in V do
          (d,\pi) \leftarrow \text{Dijkstra}(G,\ell_p,v)
          /* Here D and \Pi will be simplified, to get a solution to APSP as needed we can modify a bit Dijkstra's
               algorithm to calculate D and \Pi on the way to get constant time for this assignment.
          D_v \leftarrow d
         \Pi_v \leftarrow \pi
     for (u,v) \in E do
           D_{\ell}((u,v)) = D_{\ell_n}((u,v)) - p(u) + p(v)
     end
     return (D,\Pi)
                                                                       .APSP משפט: יהי G גרף מכוון וממושקל אזי אזי \ell אזי וממושקל מכוון גרף מכוון יהי
                 \mathcal{O}\left(|E|\,|V|+|V|^2\log\left(|V|
ight)
ight) הינה Johnson (G,\ell) שענה: יהי אזי סיבוכיות אזי סיבוכיות אזי סיבוכיות אזי הריצה של
                                            A 	imes B \in M_{m 	imes k}\left(\mathbb{F}
ight) איזי B \in M_{n 	imes k}\left(\mathbb{F}
ight) ותהא ותהא A \in M_{m 	imes n}\left(\mathbb{F}
ight) באשר :Min Plus מכפלת
                                                                                                                         (A * B)_{i,j} = \min_{k=1}^{n} (A_{i,k} + B_{k,j})
                                                                \mathcal{O}\left(n^3
ight) אינ סיבוכיות אמן הריצה של A*B\in M_n\left(\mathbb{F}
ight) טענה: תהיינה
                                                                                A*B*C=(A*B)*C אזי A,B,C\in M_{n}\left( \mathbb{F}
ight) טענה: תהיינה
                                                                .\delta_k\left(s,v
ight)=\min\left\{\ell\left(\sigma\right)\mid\left(\sigma\in\left\{s
ightarrow v
ight\}
ight)\wedge\left(\left|\sigma\right|\leq k
ight)
ight\} אזי s,v\in V סימון: יהיו
                                                                             .\delta_{k}\left(s,v\right)=\min_{u\in V}\left(\delta_{k-1}\left(s,v\right)+\ell\left(u,v\right)\right) אזי s,v\in V טענה: יהיו
                                                          s \in V לכל (\delta_k(s)), \delta_k(s,v) באשר \delta_k(s) \in M_{1 	imes |V|}(\mathbb{R}) לכל s \in V סימון: יהי
L_{u,v} = \left\{egin{array}{ll} 0 & u=v \\ \ell((u,v)) & (u 
eq v) \land ((u,v) \in E) \\ \infty & (u 
eq v) \land ((u,v) 
eq E) \end{array} 
ight. מתקיים u,v \in V מתקיים באשר לכל L \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}\right) אזי L \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}\right) אזי באשר לכל יהי
```

 $.\delta_k\left(s
ight)=\delta_{k-1}\left(s
ight)*L$ מסקנה: יהי הי מטקנה מטריצת מטריצת ב $L\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight)$ ותהא $s\in V$ מתקיים מסקנה: $D_{u,v}^{(k)}=\delta_k\left(u,v
ight)$ אזי מאזי באשר לכל באשר לכל באשר אזי אזי אזי אזי מימון: יהי אזי אזי אזי באשר לכל באשר לכל באשר אזי מחקיים מח

```
D^{(k)}=L^k אזי מטריצת מטריצת L\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) טענה: תהא
                                                               L^k=L*\ldots*L יהי אזי מטריצת מטריצת לL\in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) ותהא והי יהי יהי
                                      D^{(k)}=D^{(m)} אזי אזי k,m\geq |V|-1 וחסר מעגלים שליליים מעגלים ווחסר מכוון וממושקל טענה: יהי
                                   D_{n,v}^{(|V|)} < 0 אזי שלילי אזי במעגל שלילי ויהי עv \in V המופיע במעגל שלילי אזי \ell בעל מעגל שלילי אזי
                                                                     .APSP מסקנה: תהא L \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight) מטריצת המשקל אזי וL \in M_{|V|}\left(\mathbb{R}
ight)
                                            אזי m\in\mathbb{N}_+ איי ויהי אסוציאטיבית אלגוריתם \star פעולה A\in M_n\left(\mathbb{R}\right) אזי תהא
function RepeatedSquaring (A, \star, m):
     (a_k \dots a_0) \leftarrow (m)_2 // (m)_2 denotes m in base 2.
          if a_i = 1 then
           B = B \star A
                                          .APSP פתרון לבעיית RepeatedSquaring (L,*,n) אזי מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת המשקל מיי
   \mathcal{O}\left(\left|V
ight|^{3}\log\left(\left|V
ight|
ight)
ight) הינה RepeatedSquaring (L,*,n) שענה: תהא מטריצת המשקל אזי סיבוכיות זמן הריצה של L\in M_{\left|V\right|}\left(\mathbb{R}
ight)
                                               מתקיים u,v\in V באשר לכל באשר F^{(k)}\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight) אזי און ויהי ויהי אז גרף מכוון ויהי ויהי k\in\mathbb{N} אזי ([n]
                                             F_{u,v}^{(k)} = \min \left\{ \ell\left(\sigma\right) \mid \left(\sigma \in \left\{u 
ightarrow v
ight\}
ight) \wedge \left(עוברת דרך הצמתים עוברת למעט בהתחלה ובסוף \left[k\right]
F_{u,v}^{(0)}=L מתקיים u,v\in V באשר לכל באשר F^{(0)}\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת מטריצת המשקל אזי
                                            F_{u,v}^{(k)}=\min\left\{F_{u,v}^{(k-1)},F_{u,k}^{(k-1)}+F_{k,v}^{(k-1)}
ight\} אזי u,v\in[n] גרף מכוון ויהיו ([n] , E) איזי איזי
                                                   אלגוריתם פלויד־וורשאל: יהי ([n]\,,E) גרף מכוון ותהא אלגוריתם פלויד־וורשאל: יהי
function FloydWarshall (n, L):
          for v \in [n] do
               if (u \neq v) \wedge (L_{u,v} < \infty) then
                 | \Pi_{u,v} \leftarrow u
                 | \Pi_{u,v} \leftarrow \text{None}
          for u \in [n] do
               for v \in [n] do
                    \begin{array}{c|c} \text{if } F_{u,k} + F_{k,v} < F_{u,v} \text{ then} \\ F_{u,v} \leftarrow F_{u,k} + F_{k,v} \end{array}
                         \Pi_{u,v} \leftarrow \Pi_{k,v}
```

 $B \leftarrow M_n(\mathbb{R})$ for $i \in [k]$ do

 $\Pi \leftarrow M_n([n])$ for $u \in [n]$ do

else

end

end

return (F,Π)

end

end end $F \leftarrow L$ for $k \in [n]$ do

end $\mathbf{return}\ B$

 $A = A \star A$

 $D^{(k)} = D^{(k-1)} * L$ אזי המשקל מטריצת מטריצת $L \in M_{|V|}(\mathbb{R})$ מסקנה: תהא

```
.APSP פתרון לבעיית FloydWarshall (n,L) איי מטריצת המשקל אזי L\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) פתרון לבעיית L\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) מטריצת היי
\mathcal{O}\left(n^3
ight) הינה FloydWarshall (n,L) מטריצת המשקל אזי סיבוכיות זמן הריצה של בL\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) הינה הינה L\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)
                                                                     (u,v) 
otin E מתקיים u,v \in I עבורה לכל עבורה אזי I \subseteq V ארף אזי יהי G מתקיים
                             \min\left(i
ight)=\max\left\{w\left(I
ight)\mid\left(I\subseteq\left[i
ight]
ight)\wedge\left( בלתי תלויה w:\left[n
ight]
ightarrow\mathbb{R}_{>0} אזי w:\left[n
ight]
ightarrow\mathbb{R}_{>0} גרף שרוך ויהי
                                                         וכן \min (1) = w \, (1) וכן \min (0) = 0 אזי w : [n] \to \mathbb{R}_{\geq 0} וכן יהי גרף שרוך ויהי ויהי
                                                                                                                        mis(i) = max\{w(i) + mis(i-2), mis(i-1)\}\
                                                  \mathcal{O}\left(n
ight) אזי \min\left(n
ight) אזי w:[n]	o\mathbb{R}_{\geq0} אויהי בעל סיבוכיות \left(\left[n
ight],E
ight) מסקנה: יהי
A_{f(i)}=B_i עבורה ממש וחח"ע המקיימת f:[|B|]	o [|A|] עבורה קיימת אזי B\in \Sigma^* אזי אלפבית ותהא אלפבית ותהא
                                                                                                                                                                               i \in [|B|] לכל
                                                                                   B \lhd A ותהא B \in \Sigma^* ותהא ותהא A \in \Sigma^* אלפבית תהא אזי
\max\{|C|\mid (C\in\Sigma^*)\land (C\lhd A)\land (C\lhd B)\} איי A,B\in\Sigma^* אלפבית ותהיינה \Sigma אלפבית ארוכה ביותר (LCS): יהי
    \text{lcs } (k,\ell) = \max \left\{ |C| \mid (C \lhd (A_1,\ldots,A_k)) \land (C \lhd (B_1,\ldots,B_\ell)) \right\} \text{ איז } \ell \leq |B| \text{ איז } k \leq |A| \text{ תהא } A,B \in \Sigma^* \text{ סימון: תהיינה } A,B \in \Sigma^* \text{ outs.}   \text{lcs } (k,\ell) = \begin{cases} 0 & (k=0) \lor (\ell=0) \\ \log(k-1,\ell-1)+1 & (k,\ell>0) \land (A_k=B_\ell) \end{cases} \text{ with } A,B \in \Sigma^* \text{ outs.}   \text{outs.} \text{ max} \left\{ \log(k-1,\ell-1)+1 & (k,\ell>0) \land (A_k=B_\ell) \\ \max\{\log(k-1,\ell),\log(k,\ell-1)\} & (k,\ell>0) \land (A_k\neq B_\ell) \end{cases}   \text{lcs } \left( |A| \cdot |B| \right) \text{ in the constant of } A,B \in \Sigma^* \text{ outs.}   \text{adjets.} \text{ adjets.} \text{ and } C \in \mathbb{R}^* \text{ outs.} 
\max\left\{|C|\mid (C\lhd A)\land (orall i.C_{i-1}\prec C_i)
ight\} אזי אוי A\in \Sigma^* אאי אלפבית בעל סדר היינ\Sigma אלפבית היי\Sigma אלפבית בעל סדר אותהא
                                                                                A, \operatorname{sort}(A) של LCS של בעיית של LIS טענה: תהא A \in \Sigma^* אזי בעיית
                                  .lenlis (k)=\max\left\{|X|\mid ((A_1,\ldots,A_k)\, של של ווא X)\wedge (A_k מסתיים עם X)
ight\} אזי אזי A\in\Sigma^* איזי A\in\Sigma^*
                                                         .lenlis (k)=\max_{i\in[k-1]}\left\{ \mathrm{lenlis}\left(i\right)\mid A_{i}\prec A_{k}
ight\} וכך וכוווs (1)=1 אזי A\in\Sigma^{*} איזי A\in\Sigma^{*}
                                                            \pilis (k)=rg\max{\{\mathrm{lenlis}\,(i)\mid A_i\prec A_k\}} וכן \pilis (1)=\mathrm{None} אזי A\in\Sigma^* סימון: תהא
LIS מסקנה: תהא A \in \Sigma^* ויהי (x_{\pi \mathrm{lis}(\ell)(k)}, \dots, x_{\pi \mathrm{lis}(2)(k)}, x_{\pi \mathrm{lis}(k)}, x_k) איי אי k = rg \max \{ \mathrm{lenlis}(1), \dots, \mathrm{lenlis}(|A|) \} פתרון של
                                                                                                                                                \mathcal{O}\left(\left|A
ight|^{2}
ight) בעל סיבוכיות זמן ריצה
                                                                                             .min lis (m)=\min\left\{x_k\mid 	ext{lenlis}\left(k
ight)=m
ight\} אזי A\in\Sigma^* אינון: תהא
                                                                                                                                  . עולה ממש \min lis אזי A \in \Sigma^* עולה ממש
                      \mathcal{O}\left(|A|\cdot\log\left(|A|
ight)
ight) אזי אמן ריצה (\min\operatorname{lis}\left(1
ight),\ldots,\min\operatorname{lis}\left(\ell
ight) אזי אזי (\min\operatorname{lis}\left(1
ight),\ldots,\min\operatorname{lis}\left(\ell
ight) אזי אזי (\min\operatorname{lis}\left(1
ight)
                      \operatorname{costp}(T) = \sum_{i=1}^n \left( p_i \cdot \operatorname{depth}_T(x_i) \right) אזי \{x_1 \dots x_n\} איי עץ חיפוש בינארי עץ T ויהי ויהי p_1 \dots p_n \in (0,1] איי
                         מינימלי. Costp\left(T\right) עבורו בינארי אופטימלי: יהיו p_1\dots p_n\in(0,1] אזי עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו
                    \operatorname{costp}(T) = (\sum_{i=1}^n p_i) + \operatorname{costp}(T.\operatorname{left}) + \operatorname{costp}(T.\operatorname{right}) אינה: יהיו עץ חיפוש בינארי אזי p_1 \dots p_n \in (0,1] ויהי
מסקנה: יהיו T.left, T.right מסקנה: יהיו בינארי סטטי אופטימלי פתרון לבעיית עץ ויהי T פתרון לבעיית עץ ויהי
                                                                                                                                                       חיפוש בינארי סטטי אופטימלי.
                                                                                                                .pp (i,j)=\sum_{k=i}^{j}p_{k} אזי p_{1}\dots p_{n}\in(0,1] סימון: יהיו
                  \operatorname{cep}(i,j) = \min\left\{\operatorname{costp}(T) \mid \{x_i \dots x_i\} \;\; עץ חיפוש בינארי מעל T אזי x_1 \dots x_n ויהיו p_1 \dots p_n \in (0,1] יהיו
                                                               וכן \operatorname{cp}\left(i,i\right)=p_{i} וכך \operatorname{cp}\left(i,i-1\right)=0 אזי x_{1}\ldots x_{n} ויהיו p_{1}\ldots p_{n}\in\left(0,1\right] וכך
                                                                                                  .cp(i, j) = pp(i, j) + \min_{i \le k \le j} (cp(i, k - 1) + cp(k + 1, j))
                                                      אלגוריתם לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי: יהיו p_1 \dots p_n \in (0,1] ויהיו אלגוריתם לבעיית אויהיו
```

```
function OSBST(pp):
     K, C \leftarrow \text{List}([n]^2)
     for i \leftarrow [n+1] do
      C(i,i-1) \leftarrow 0
     end
     for d \leftarrow \{0, \ldots, n-1\} do
         for i \leftarrow [n-d] do
              C(i, i+d) \leftarrow \infty
               for k \leftarrow \{i, \dots, i+d\} do
                    t \leftarrow \operatorname{pp}(i,j) + C(i,k-1) + C(k+1,j)
                    if t < C(i, j) then
                        C(i,j) \leftarrow t
                        K(i,j) \leftarrow k
              end
          end
     end
```

מטקנה: יהיו אופטימלי. אוי סטטי אופטימלי. אוי OSBST (pp) איי א $p_1\dots p_n\in(0,1]$ משקנה: יהיו $\mathcal{O}\left(n^3
ight)$ אזי מסקנה: יהיו אמן ריצה OSBST (pp) אזי אזי ואזי ריצה $p_1\dots p_n\in(0,1]$ מסקנה: $\mathcal{O}\left(n^2
ight)$ הערה: קיים אלגוריתם קנות' לבעיית עץ חיפוש בינארי סטטי אופטימלי בסיבוכיות זמן ריצה $\sum_{i \in S} w_i \le W$ מקסימלית וכן מקסימלית אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי וכן אזי איזי איזי יהיו אזי איזי יהיו אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי וכן אזי מקסימלית וכן $\sum_{i\in[n]}f\left(i\right)v_{i}$ באשר בר תרמיל אזי אזי $W,w_{1}\ldots w_{n},v_{1}\ldots v_{n}\geq0$ מקסימלית וכן $\sum_{i \in [n]} f(i) w_i \le W$ אזי $v_1 \dots v_n \geq 0$ ויהיו $W, w_1 \dots w_n > 0$ אזי הינו שבר תרמיל הגב: יהיו

```
function Fractional Knapsack (W, w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n):
```

```
f \leftarrow ([n] \rightarrow [0,1])
P \leftarrow \text{List}([n] \times \mathbb{R})
for i \leftarrow [n] do
      P(i) \leftarrow (i, \frac{v_i}{w_i})
     f(i) \leftarrow 0
end
P \leftarrow \operatorname{sort}(P) // Sort from high to low based on second coordinate.
t \leftarrow 0
i \leftarrow 1
while (t < W) \land (i \le n) do
      j \leftarrow P(i)[0]
      if t + w_i \leq W then
           f(j) \leftarrow 1
         t \leftarrow t + w_i
          f(j) \leftarrow \frac{W-t}{w_j}t \leftarrow W
end
return f
```

.bknap $(k,W)=\max\left\{\sum_{i\in S}v_i\mid (S\subseteq[k])\wedge\left(\sum_{i\in S}w_i\leq W
ight)
ight\}$ אזי $W,w_1\ldots w_n,v_1\ldots v_n\geq 0$ סימון: יהיו טענה: יהיו $w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ טענה:

- .bknap (0,m)=0 אזי $m\geq 0$ יהי
- .bknap (i,0)=0 אזי $i\in[n]$ יהי •
- .bknap $(i,m)=\left\{egin{array}{ll} & \text{bknap}(i-1,m) & w_i>m \\ \max\{bknap(i-1,m),bknap(i-1,m-w_i)+v_i\} & w_i\leq m \end{array} \right.$ אזי $i\in[n]$ אזי $m\geq 0$ יהי $m\geq 0$ יהי $m\geq 0$ אזי חישוב $m\geq 0$ אזי חישוב $m\geq 0$ בעל סיבוכיות זמן ריצה $m\geq 0$ מסקנה: יהיו $m\geq 0$ אזי חישוב $m\geq 0$ אזי חישוב $m\geq 0$

אזי $W, w_1 \dots w_n, v_1 \dots v_n \geq 0$ אזי הגב: יהיו 00 תרמיל הגב

```
function ZeroOneKnapsack(W, w_1, \ldots, w_n, v_1, \ldots, v_n):
         k \leftarrow n
         w \leftarrow W
         S \leftarrow \operatorname{Set}([n])
         S \leftarrow \varnothing
         while (k>0) \wedge (w>0) do
                  if bknap(k, w) \neq bknap(k-1, w) then
                          S \leftarrow S \cup \{k\}
                          k \leftarrow k - 1
                          w \leftarrow w - w_k
                    else k \leftarrow k-1
                   מסקנה: יהיו פתרון לבעיית 0/1 אזי W,w_1\ldots w_n,v_1\ldots v_n פתרון לבעיית אזי W,w_1\ldots w_n,v_1\ldots v_n\geq 0 מסקנה: יהיו
                                                                                                             (V,E,c,s,t) אזי s,t\in V ותהיינה c\geq 0 וממושקל מכוון וממושקל יהי G אזי יהי
                                                                                                                                                                           c אזי זרימה איי רשת (V,E,c,s,t) תהא פונקציית קיבולת:
                                                                                                                                                                                   s אזי ארימה אזי (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי
                                                                                                                                                                                       t אזי ארימה אזי (V, E, c, s, t) הימה אזי קודקוד בור: תהא
                                                                                  עודף \chi_f:V	o\mathbb{R} אזי f:E	o\mathbb{R}_{\geq 0} רשת ותהא רשת (V,E,c,s,t) אזי (V,E,c,s,t) המוגדרת
                                                                                                                                                                            .\chi_{f}\left(v\right)=\sum_{\substack{u\in V\\\left(u,v\right)\in E}}f\left(\left(u,v\right)\right)-\sum_{\substack{u\in V\\\left(v,u\right)\in E}}f\left(\left(v,u\right)\right)
                                                                                                                               עבורה f:E	o \mathbb{R}_{\geq 0} עבורה אזי (V,E,c,s,t) עבורה f:E	o \mathbb{R}_{\geq 0}
                                                                                                                                                                                                                                             f \leq c חסם קיבולת: •
                                                                                                                                                                    \chi_f(v)=0 מתקיים v\in V\setminus\{s,t\} שימור זרם: לכל
                                                  . מקסימלית: תהא \chi_f\left(t\right) עבורה f אוי פונקציית ארימה אי רימה (V,E,c,s,t) מקסימלית: בעיית הזרימה המקסימלית:
                                                                                                              t\in T וכן s\in S וכן אבורו (S,T) עבורו איי חתך (V,E,c,s,t) וכן s-t חתך יארימה איי
                                               E\left(S,T
ight)=\left\{(u,v)\in E\mid (u\in S)\wedge (v\in T)
ight\} אזי \left(S,T
ight) חתך והי Sרשת והי Gרשת הוא מרימה ויהי
                                         E\left(T,S
ight)=\left\{ \left(u,v
ight)\in E\mid\left(u\in T
ight)\wedge\left(v\in S
ight)
ight\} אזי \left(S,T
ight) חתך הימה היהי \left(S,T
ight) חתך הא \left(S,T
ight)
                                                                                                                                        .c\left(S,T
ight)=\sum_{e\in E\left(S,T
ight)}c\left(e
ight) אזי s-t חתך ואי הי הי יהי
                                                                                 f\left(S,T
ight)=\sum_{e\in E\left(S,T
ight)}f\left(e
ight)-\sum_{e\in E\left(T,S
ight)}f\left(e
ight) אזי s-t חתך אזי (S,T) אזי מני חתך: יהי
                                                                                                                                                          |f|=f\left(V\backslash\left\{t\right\},\left\{t\right\}\right) אוימה: תהא ל זרימה: תהא אזי ארימה: תהא
                                                                                                                                                               |f| = f(S,T) אזי s-t חתך אזי ויהי f ארימה ויהי זרימה ויהי
                                                                                                                                                                                      |f|=f\left(\left\{ s\right\} ,V\backslash\left\{ s\right\} 
ight) איימה אזי f ארימה מסקנה: תהא
                                                                                                                                                   f(S,T) \leq c(S,T) אזי s-t חתך אויהי f ארימה ויהי f ארימה ויהי
                                                                                                                               אזי f\left(S,T\right)=c\left(S,T\right) עבורו s-t אזי (S,T) אזי ארימה אזי זרימה אזי ארימה ויהי
                                                                                                                                                                                                                                                . זרימה מקסימלית f
                                                                                                                                                               c((S,T)) \le c((A,B)) מתקיים (A,B) s-t לכל חתך
                                                                                          e \in P לכל f\left(e
ight) < c\left(e
ight) באשר P \in \{s 
ightarrow t\} זרימה אזי זרימה אזי יארימה פסלול ניתן להגדלה
g_{\restriction_{E \setminus P}} = f_{\restriction_{E \setminus P}} איי ארימה g עבורה איי איי איי איי פונקציית מסלול: תהא ארימה ויהי ויהי ארימה פולל ניתן להגדלה פונקציית ארימה ויהי ויהי ויהי ארימה ויהי
                                                                                                                                                                                                                                                                              |f| < |g| וכן
                                                                                                                                  .s-t ארימה חוסמת: פונקציית ארימה f עבורה לא קיים מסלול ניתן להגדלה
                                                                                                                          e^{-1} אזי e^{-1} \in E עבורה עבורה אנטי־מקבילה: יהי G גרף מכוון ותהא אנטי־מקבילה
           באשר (V, E_f, c_f, s, t) אזיימה אזי f ארימה אנטי־מקבילות הסרת הסרת רשת רשת אני על רשת אני תהא רשת (V, E_f, c_f, s, t) באשר
                                                                                                            .E_f = \left\{e \in E \mid c\left(e\right) > f\left(e\right)\right\} \cup E^{-1} \quad \bullet .c_f\left(e\right) = \left\{\begin{smallmatrix} c(e) - f(e) & e \in E \\ f\left(e^{-1}\right) & e \in E^{-1} \end{smallmatrix}\right. \text{ אז } \quad e \in E_f \text{ кал } e \in E_f \text{ к
```

באשר (V, E_f, c_f, s, t) רשת זרימה שנורית: תהא f זרימה איז (V, E_f, c_f, s, t) רשת זרימה שנורית: תהא

 $c_f(e) = c(e) - f(e) + f(e^{-1})$ אזי $e \in E$ אחי הקיבולת: תהא

 $.E_f = \{e \in E \mid c_f(e) > 0\} \bullet$

c((u,v))=0 אזי $(u,v)\notin E$ עבורם $u,v\in V$ עבורם סימון: תהא G רשת זרימה ותהא G זרימה אזי G_f הינה רשת הזרימה השיורית. G_f רשת זרימה ותהא G_f רשת זרימה ותהא G_f הינה רשת מסלול ניתן לשיפור G_f : תהא G_f רשת זרימה ותהא G_f זרימה אזי מסלול ניתן לשיפור G_f : G_f : תהא G_f זרימה ויהי G_f מסלול ניתן לשיפור G_f : G_f

- Gזרימה מקסימלית ב-f
- .s-t מתקיים מסלול ניתן מסלול מחלול בגרף מתקיים מתקיים $P \in \{s o t\}$ לכל מסלול
 - Gמינימלי ל-s-t חתך (S,T) סיים •

 $\max\{|f|\mid$ ארימה $f\}=\min\{c\left(S,T\right)\mid$ s-t חתך ואזי אזי רימה אזי רשת ההא G רשת ארימה מקסימלית קיבולת מינימלית: תהא וא רימה אזי אלגוריתם פורד־פלקרסון: תהא (V,E,c,s,t) רשת ארימה אזי

הערה: האלגוריתם שיטה גנרית למציאת של EdmondsKarp ובאלגוריתם במניחים שיטה גנרית למציאת מסלול ניתן לשיפור.

```
.FF = FordFulkerson (V, E, c, s, t) רשת זרימה אזי (V, E, c, s, t) ההא
```

 $f\left(E
ight)\subseteq\mathbb{N}$ באשר באשר אזי קיימת ארימה מקסימלית אזי קיימת זרימה באשר ער אזיי רעת ארימה באשר אזיי קיימת אויימת $c\left(E
ight)\subseteq\mathbb{N}$ רשת ארימה באשר

מתקיים FF מתקיים אזי בכל איטרציה אוי באשר $c(E) \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים ורימה של (V,E,c,s,t) מתקיים

- .G זרימה של f
 - $f(E) \subseteq \mathbb{N} \bullet$
 - $.c_{f}(P) > 1 \bullet$

- . פתרון לבעיית הזרימה המקסימלית לכל בחירת מסלולים באלגוריתם. FF
 - עושה לכל היותר |f| שיפורי מסלול. FF
 - .FF $(E)\subseteq \mathbb{N}$ •

מסקנה: תהא $f\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות און ותהא $c\left(E\right)\subseteq\mathbb{N}$ ותהא רימה באשר אוי סיבוכיות ועד אוי סיבוכיות היצה ((E||f|) הינה הינה (E||f|) הינה אוי סיבוכיות היצה דישה אוי סיבוכיות היצה דישה אוי סיבוכיות היצה ועד היצה היצה ועד היצה היצה ועד היצה היצה ועד היצה ועד היצה היצה ועד היצה היצה ועד היצה

סענה: תהא $f(E)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות אמן ותהא $f(E)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות מקסימלית באשר ותהא אזי סיבוכיות מענה: ענה: $c(E)\subseteq\mathbb{N}$ אזי סיבוכיות מענה: של EdmondsKarp הינה $c(E)^2\cdot |V|$

 $|e_1\cap e_2|
eq 1$ מתקיים $e_1,e_2\in M$ עבורה לכל $M\subseteq \stackrel{
ightharpoonup}{E}(G)$ אזי גרף לא מכוון אזי

 $rg \max \{|M| \mid G$ בעיית זיווג מקסימלי: יהיG גרף לא מכוון אזי M זיווג של

 $A \subseteq V(G)$ עבורו $M \subseteq E(G)$ איווג מושלם: יהי G גרף לא מכוון אזי זיווג

וכן $G_L=A$ אזי און $|e\cap A|=|e\cap B|=1$ מתקיים $e\in E\left(G
ight)$ חתך עבורו ויהי (A,B) חתך אזי אזי $G_L=A$ וכן יהי $G_L=A$ אזי א

 $V^{\perp}=V\left(G
ight)\cup\left\{ s,t
ight\}$ אזי אזי א מכוון ויהיו ויהיו לא מכוון ויהיו גרף דו־צדדי לא גרף אזי אזי מימון: יהי

```
E^{	o}=\{\langle v,u
angle \mid (\{v,u\}\in E(G))\land (v\in G_L)\land (u\in G_R)\} סימון: יהיG גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
                                  .E^{\perp}=\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup E^{
ightarrow}\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight) אזי s,t
otin V\left(G
ight) ויהיו לא מכוון ויהיו מיחון אזי מיחון: יהי
.c_{
ho_{E}	o}^{\perp}=\infty וכן .c_{
ho_{\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight)}}^{\perp}=1 המוגדרת .c_{
ho_{E}	o}^{\perp}:E^{\perp}	o\mathbb{R}_{+} אזי .c_{E}	o אזי .c_{E}	o המוגדרת .c_{\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight)}^{\perp} וכן .c_{\left(\{s\}	imes G_{L}
ight)\cup\left(G_{R}	imes\{t\}
ight)}^{\perp}
                                                      G^{\perp}=\left(V^{\perp},E^{\perp},c^{\perp},s,t
ight) אזי s,t\notin V\left(G
ight) ויהיו לא מכוון ויהיו מימון: יהי
                                                                 אלגוריתם לבעיית זיווג מקסימלי בגרף דו־צדדי: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
function BMMF (G):
     (s,t) \not\leftarrow V(G)
    G^{\perp} \leftarrow (V^{\perp}, E^{\perp}, c^{\perp}, s, t)
     f \leftarrow \text{FordFulkerson}(G^{\perp})
    return \{e \in E(G) \mid f(e) = 1\}
                                                                            . איווג אינו זיווג אינו איווג מקסימלי. ארף דו־צדדי לא מכוון איז G הינו איווג מקסימלי.
                                                   \mathcal{O}\left(|E|\cdot|V|
ight) אמן ריצה אמר סיבוכיות בעל אוזי מכוון אזי אזי לא מכוון אזי מכוון אזי מענה: יהיG גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
        \max{\{|M|\mid G } איווג של M\}=\max{\{|f|\mid G^\perp\}} זרימה של s,t
otin V(G) איווג של s,t
otin V(G) איווג של
                                                 e \cap C 
eq \emptyset מתקיים e \in E עבורה לכל עבורה אמכוון אזי מכוון אזי ממים: יהי G גרף לא מכוון אזי
                                               rg \min \{|C| \mid G בעיית כיסוי צמתים מינימלי: יהי G גרף לא מכוון אזי C כיסוי צמתים של
                             \max\{|M|\mid G איווג של M\}\leq \min\{|C|\mid G למה: יהי M גרף דו־צדדי לא מכוון אזיC כיסוי צמתים של
                                                       אלגוריתם לבעיית כיסוי צמתים מינימלי בגרף דו־צדדי: יהי G גרף אלגוריתם מינימלי מינימלי מינימלי אלגוריתם לבעיית ביסוי
function BMVC(G):
     (M, s, t, G^{\perp}, f) \leftarrow \text{BMMF}(G)
     C \leftarrow V(G)
     for \{u,v\}\in M\cap (G_L\times G_R) do
         \inf\left\{\tau:s\to v\;\middle|\; G_f^\perp \right. \text{ (Althous)} \tau\left\}\neq\varnothing \text{ then } \left. C\leftarrow C\cup\{v\}\right.
          \mid \ C \leftarrow C \cup \{u\}
     end
     return C
                                                                              . אינו כיסוי צמתים BMVC (G) טענה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי
                                                            |\mathrm{BMVC}\,(G)| = |M| איווג מקסימלי איזי M איוון ויהי לא מכוון ויהי הרף דו־צדדי לא מכוון ויהי
                                                                 . מסקנה: יהי G גרף דו־צדדי לא מכוון אזי אינימלי הינו כיסוי צמתים מינימלי ארף דו־צדדי אוי אינימלי
                           \max\{|M|\mid G איווג של M\}=\min\{|C|\mid G משפט: יהי M גרף דו־צדדי לא מכוון אזי כיסוי צמתים של
                        \mathrm{DP}_{s,t} = \max \left\{ n \in \mathbb{N} \mid t^{-t} \right\} גרף מכוון ויהיו s,t \in V אזי לקיימים n מסלולים זרים בקשתות מs
         \mathrm{DE}_{s,t} = \min \left\{ n \in \mathbb{N} \mid tא גרף מכוון ויהיו s,t \in V איז לקיימות שאם נסירן לא יהיה מסלול מ־s,t \in V איז איז לקיימות איז G
                                                                                         (V,E,1,s,t) אזי s,t\in V רשת G יהי יהי G יהי
```

 $\mathrm{DP}_{s,t} = \max\left\{|f| \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{DP}_{s,t} = s, t \in V \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{DP}_{s,t} \in \mathcal{A} \mid \mathsf{DP}_{s,t} \mid \mathsf{DP}_{s,t$

 $\mathtt{DP}_{s,t} = \mathtt{DE}_{s,t}$ אזי $s,t \in V$ מסקנה משפט מנגר: יהי

אלגוריתם לבדיקת k־קשירות בקשתות: יהי א $k \in \mathbb{N}_+$ ויהי מכוון אזי

 $|A| \leq |N(A)|$

 $\mathsf{DE}_{s,t} = \min\left\{c\left(S,T\right) \mid \mathsf{O/1} \mid \mathsf{DM} \right\}$ ברשת S-t אזי איזי איזי איזי איזי איזי מכוון ויהיו איזי איזי איזי איזי איזי ברשת מכוון ויהיו

 $N\left(A
ight)=\{y\in G_R\mid (A imes\{y\})\cap E
eqarnothing\}$ אזי $A\subseteq G_L$ אזי לא מכוון ותהא מכוון יהי G יהי G יהי לימון: יהי

מתקיים $A\subseteq G_L$ מתקיים איווג מושלם ב־ (G_L) אזי (קיים איווג מושלם ב- (G_L) (לכל אזי ברף דו־צדדי לא מכוון באשר

vגרף uימים u מסלולים זרים בקשתות מ־u ל־v אזי גרף מכוון u עבורו לכל u קיימים u מסלולים זרים בקשתות מ־u

```
function kConnected(k, G):
    for u \in V \setminus \{v\} do
        /st The following FordFulkerson calls will return True if the flow size is bigger then k after k augmenting
            paths else False
        b_1 \leftarrow \text{FordFulkerson}(V, E, 1, v, u)
        b_2 \leftarrow \text{FordFulkerson}(V, E, 1, u, v)
        if (\neg b_1) \lor (\neg b_2) then return False
    return True
                                    .(kConnected (G)= True)\Longleftrightarrowויהי k\in\mathbb{N}_+ איי היי k\in\mathbb{N}_+קשיר בקשתות) איי ויהי k\in\mathbb{N}_+
                            \mathcal{O}\left(|V|\cdot k|E|
ight) הינה אכרף מכוון אזי סיבוכיות זמן הריצה של הינה אכרות גרף מכוון אזי סיבוכיות זמן היצה של הינה k\in\mathbb{N}_+
                                          עבורה f:E	o \mathbb{R}_{\geq 0} רשת זרימה אזי (V,E,c,s,t) עבורה ארימה: תהא
                                                                                                                   f \leq c חסם קיבולת: •
                                                                                             \chi_f(v) \geq 0 מתקיים v \in V \setminus \{s, t\} •
\chi_f(v)>0 עבורה v\in V\setminus\{s,t\} איזי קדם ארימה אזי פונקציית קדם ארימה (V,E,c,s,t) עבורה עודף ארימה: תהא
E_f = \{e \in E \mid c\left(e\right) > f\left(e\right)\} \cup E^{-1} איי ארימה איי מקבילות אנטי־מקבילות אנטי־מקבילות ותהא ענטי־מקבילות ותהא (V, E, c, s, t) רשת ארימה חסרת קשתות אנטי־מקבילות ותהא
E_f=E_f=\{e\in E\mid c_f\left(e
ight)>0\} רשת זרימה בעלת קשתות אנטי־מקבילות ותהא f קדם זרימה אזי (V,E,c,s,t) רשת זרימה בעלת קשתות אנטי־מקבילות ותהא
                      המוגדרת הקיבולת: תהא c_f:E_f	o\mathbb{R}_+ אזי קדם הרימה ותהא (V,E,c,s,t) המוגדרת הקיבולת: מונקציית שיוריות הקיבולת
                                                                                                                .c_f(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & e \in E \\ f(e^{-1}) & e \in E^{-1} \end{cases}
                \Delta_{u,v} = \min\left\{\chi_f\left(u\right), c_f\left((u,v)\right)
ight\} אזי u,v \in V איזי קדם זרימה תהא t קדם זרימה עהא t רשת זרימה תהא
                                              אזי u,v\in V אזי ארימה ויהיו f קדם ארימה (V,E,c,s,t) אאזי אלגוריתם אויביה: תהא
function Push((V, E, c, s, t), f, u, v):
    f^* \leftarrow f
    if (u,v) \in E then
       f^*((u,v)) \leftarrow f((u,v)) + \Delta_{u,v}
    if (v,u) \in E then
     f^*((v,u)) \leftarrow f((v,u)) - \Delta_{u,v}
    return f^*
     .Push (f,u,v)= Push ((V,E,c,s,t),f,u,v) אזי u,v\in V איי ארימה תהא f קדם ארימה תהא (V,E,c,s,t) רשת ארימה תהא
                            פדם זרימה. Push (f,u,v) אזי u,v\in V אזי זרימה תהא f קדם זרימה תהא (V,E,c,s,t) אזי יטענה: תהא
                  \chi_{\mathrm{Push}(f,u,v)}\left(u
ight)=\chi_{f}\left(u
ight)-\Delta_{u,v} אזי איזי u,v\in V טענה: תהא t קדם זרימה תהא t רשת זרימה ענה: תהא
 .Push (f,u,v) אזי \Delta_{u,v}=c_f\left((u,v)
ight) עבורם u,v\in V אזי ארימה תהא t קדם ארימה t אזי t איזי t
                                           עבורה h:V	o\mathbb{N} אזי h:V	o\mathbb{N} רשת זרימה ותהא f קדם זרימה אזי (V,E,c,s,t) עבורה
                                                                                                                            .h(s) = |V| \bullet
                                                                                                                               .h(t) = 0 \bullet
                                                                                             h(u) \le h(v) + 1 אזי (u,v) \in E_f יהי
    \lambda(u)=h\left(v
ight)+1 וכן \chi_{f}\left(u
ight)>0 עבורה על קבילה: תהא \chi_{f}\left(u
ight)=0 רשת זרימה ותהא לקדם זרימה אזי\chi_{f}\left(u
ight)>0 עבורה על וערימה אוי
                   אזי u \in V אאזי אוני שם: תהא h פונקציית אובה תהא t רשת ארימה תהא אלגוריתם שינוי שם: ער אוני אוני שה (V,E,c,s,t) אאזי
function Relabel ((V, E, c, s, t), f, h, u):
    h^*(u) \leftarrow \min\{h(v) \mid (u, v) \in E_f\} + 1
    return h^*
```

Relabel (f, h, u) = Relabel ((V, E, c, s, t), f, h, u)טענה: תהא $u \in V$ רשת זרימה תהא h פונקציית גובה ותהא $u \in V$ רשת זרימה תהא h פונקציית גובה ותהא

אזי $u \in V$ רשת גובה ותהא h פונקציית גובה ותהא t רימה תהא t רימה ותהא $t \in V$ רשת אונה ותהא

```
.Relabel (f, h, u) (u) \leq \text{Relabel} (f, h, u) (v) + 1 אזי (u, v) \in E_f יהי •
```

. Relabel (f,h,u) $(w) \leq$ Relabel (f,h,u) (u)+1 אזי $(w,u) \in E_f$ יהי •

Relabel (f,h,u) אזי $u\in V\setminus\{s,t\}$ תהא גובה ותהא פונקציית גובה f קדם זרימה תהא t קדם זרימה ותהא t פונקציית גובה.

 $(u,v)\in E_f$ אזי קיימת $u\in V\setminus \{s,t\}$ אוי פונקציית גובה ותהא פונקציית איז קיימת t אזי קיימת t אזי קיימת t אזי קיימת t אוי קיימת t אוי קיימת t (t). Relabel t

 $(u,u) \leq h\left(v
ight) + \delta_{G_f}\left(u,v
ight)$ אאי $u,v \in V$ אינתה הוא h פונקציית גובה ותהיינה $u,v \in V$ אינתה תהא h קדם זרימה תהא h קדם זרימה תהא h פונקציית גובה ויהי $u \in V$ עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב־u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u עבורו איי $u \in V$ ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u איי $u \in V$ ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-u ב-u ב-u עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ב-u ב-

 G_f ב ב־u מסקנה: תהא $u \in V$ עבורו קיים מסלול מ־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל-u ל-u עבורו איי ל $u \in V$ עבורו איז ל $u \in V$ ל-u ליים מסלול מ"u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל־u ל-u ל-

 G_f ב ל־ל ב־ל מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת ארימה תהא f קדם ארימה ותהא f פונקציית גובה אזי לא קיים מסלול מ־f למה: תהא f קדם ארימה תהא f קדם ארימה ותהא f קדם ארימה ותהא f קדם ארימה תהא f קדם ארימה תהא f קדם ארימה ותהא f פונק באשר f איי קיים מסלול f מ־f למה: f לכל f

 G_f מסקנה: תהא $\chi_f\left(u
ight)>0$ אזי קיים מסלול T מהע לים בר היים מסקנה: תהא אזי קיים מסלול T היים אזי איי קיים מסלול T השת ארימה תהא T העת ארימה תהא T העת ארימה תהא T העת ארימה תהא ליד באשר T העת ארימה אזי עובר העם דחיפה ושינוי שם: תהא T העת ארימה אזי רעת ארימה שים: תהא T העת ארימה אזי

```
function GoldbergTarjan((V, E, c, s, t)):
     f \leftarrow (E \rightarrow \mathbb{R}_+)
      f \leftarrow 0
     for (s,v) \in E do
      f((s,v)) \leftarrow c((s,v))
     h \leftarrow (V \rightarrow \mathbb{N})
     h \leftarrow 0
      h(s) \leftarrow |V|
     while \{u \in V \setminus \{s,t\} \mid \chi_f(u) > 0\} \neq \emptyset do
          u \leftarrow \{u \in V \setminus \{s, t\} \mid \chi_f(u) > 0\}
           if \{(u,v) \in E_f \mid h(u) = h(v) + 1\} \neq \emptyset then
                f(u,v) \leftarrow \{(u,v) \in E_f \mid h(u) = h(v) + 1\}
                f \leftarrow \text{Push}(f, u, v)
            h \leftarrow \text{Relabel}(f, h, u)
     end
     return f
```

```
f_s\left((u,v)
ight)=\left\{egin{array}{l} c^{c((u,v))} & u=s \\ 0 & \mathrm{else} \end{array}
ight. המוגדרת f_s:E	o\mathbb{R}_+ רשת זרימה אזי ורימה V,E,c,s,t המוגדרת I_s\left(u
ight)=\left\{egin{array}{l} 1 & u=s \\ 0 & \mathrm{else} \end{array}
ight. המוגדרת ורימה אזי ורימה אזי ועדימה אזי ועד המוגדרת I_s:V	o\mathbb{R}_+ המוגדרת ועד מסלול מ־V,E,c,s,t רשת זרימה אזי ועד מונקציית גובה וכן לא קיים מסלול מ־V,E,c,s,t הרא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי לאחר כל איטרציה של GoldbergTarjan מתקיים ועד מונקציית ועד אונים ועד מונים ועד מונים
```

- . הינה קדם זרימה f ullet
 - פונקציית גובה. h ullet
- G_f ב ל־ל מ־s לא קיים מסלול מ-s

. פעמים. פעמים איז הרימה אזי GoldbergTarjan קוראת לפונקציה פולה היותר (V,E,c,s,t) פעמים. למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי GoldbergTarjan מבצעת דחיפה מרווה לכל היותר (V,E,c,s,t) פעמים. למה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי GoldbergTarjan מבצעת דחיפה לא מרווה לכל היותר (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי GoldbergTarjan הינה זרימה מקסימלית.

 $\mathcal{O}\left(\left|E\right|\cdot\left|V\right|^{2}
ight)$ רשת זמן ריצה בסיבוכיות עם GoldbergTarjan טענה: תהא עם זרימה אזי ניתן לממש את ריצה (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי ניתן לממש

עם Dynamic Trees עם GoldbergTarjan בסיבוכיות אמע זרימה אזי ניתן ריצה (V, E, c, s, t) עם ריצה (V, E, c, s, t) עם הערה: תהא $\mathcal{O}\left(|E||V|\log\left(|V|\right)\right)$

 $x \leq y$ אזי $i \in [n]$ לכל $x_i \leq y_i$ עבורן $x,y \in \mathbb{R}^n$ אזי $x,y \in \mathbb{R}^n$

 $x\geq y$ אזי $i\in [n]$ איזי $x,y\in \mathbb{R}^n$ איזי $x,y\in \mathbb{R}^n$ סימון: תהיינה

תהא $q\in\mathbb{R}^k$ יהי $Q\in M_{k imes n}(\mathbb{R})$ תהא יהי $P\in M_{m imes n}(\mathbb{R})$ תהא יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ יהי $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$

תחת ההנחות קיצון של איז מציאת נקודת ההנחות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות לינארי מציאת נקודת איז תהא ($Px \leq p,Qx=q,Rx \geq r$).

בעיית תכנות לינארי מקסימום של c, P, p, Q, q, R, r תחת ההנחות מקסימום של בעיית תכנות לינארי מקסימלית: תהא (c, P, p, Q, q, R, r) תחת ההנחות $Px \leq p, Qx = q, Rx \geq r$

בעיית תכנות לינארי מינימום של c, P, p, Q, q, R, r תחת ההנחות מינימום של c, P, Q, q, R, r תחת ההנחות $c^T x$ מינימלית: תהא $c^T x$ מינימלית: תהא $c^T x$ החת ההנחות $c^T x$ מינימלית: c, P, Q, q, R, r תחת ההנחות $c^T x$ החת ההנחות $c^T x$ מינימלית: c, P, Q, q, R, r ההנחות ההנחות מינימלית: תהא $c^T x$ מינימלית: תהא $c^T x$ החת ההנחות מינימלית: c, P, Q, q, R, r מינימלית: תהא $c^T x$ החת ההנחות מינימלית: c, P, Q, q, R, r מינימלית: תהא מינ

הערה: מכאן והלאה נשתמש במונח תוכנה לינארית גם עבור בעיית תכנות לינארי.

סימון: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) בעיית עכנות לינארית מקסימלית אזי

$$\begin{aligned} & \max & c^T x \\ & \text{s.t.} & Px \leq p \\ & Qx = q \\ & Rx \geq r \end{aligned}$$

סימון: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) בעיית עכנות לינארית מינימלית אזי

 $Rx \geq r$ וכן $Px \leq p$ וכן $Px \leq p$ עבורו $x \in \mathbb{R}^n$ עבורו לינארית: תהא (c, P, p, Q, q, R, r) תוכנה לינארית: תהא $Rx \geq r$ תוכנה לינארית: תהא LP תוכנה לינארית: תהא LP תוכנה לינארית: תהא $Rx \in \mathbb{R}^n$ בעיית התכנות הלינארי.

תוכנה לינארית פיזבילית: תוכנה לינארית LP עבורה קיים פתרון אופטימלי.

 $x\in\mathbb{R}^n$ עבורה המקיים כי לכל פתרון פיזבילי עבורה קיים $B\in\mathbb{R}$ עבורה קיים עבורה לינארית תוכנה לינארית תוכנה לינארית (c,P,p,Q,q,R,r) עבורה מקסימלית מקסימלית חסומה: תוכנה לינארית מקסימלית חסומה:

 LP בעלת פתרון אופטימלי LP חסומה ופיזבילית). משפט: תהא LP ר תוכנה לינארית מקסימלית אזי

 $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ יהי המקסימלית התוכנה הלינארית ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ ויהי ויהי $A\in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$ תהא ויהי $c\in\mathbb{R}^n$ יהי הינה הינה

$$\begin{aligned} & \max \quad c^T x \\ & \text{s.t.} \quad Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

.LP אשר שקולה ל-LP אענה: תהא תוכנה לינארית אזי קיימת תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית LP ענה: תהא $Px \leq p, Qx = q, Rx \geq r$ תוכנה לינארית אזי (c, P, p, Q, q, R, r) תוכנה לינארית אזי

 $\alpha x+(1-lpha)\ y\in K$ מתקיים $lpha\in[0,1]$ מתקיים $x,y\in K$ עבורה לכל עבורה לכל $x,y\in K$ אזי $x,y\in K$ מתקיים אזיים $x\in K$ מתקיים $x\in K$ נקודה קיצונית בקבוצה: תהא $x\in K$ אזי $x\in K$ אזי $x\in K$ עבורה לכל $x\in K$ ולכל קידון: יהי $x\in K$ פאון אזי נקודה קיצונית $x\in K$

תוכנה הלינארית המקסימלית אזי התוכנה הלינארית המקסימלית אזי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ תהא המקסימלית יהי $n,m\in\mathbb{N}$ יהי יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ יהי המקסימלית בצורה משוואתית: יהיו $(c,0,0,A,b,I_n,0)$

 $(c,0,0,A,b,I_n,0)$ יהי המקסימלית התוכנה הלינארית ויהי $b\in\mathbb{R}^m$ ויהי ויהי $A\in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$ תהא הינה $c\in\mathbb{R}^n$ יהי הינה הינה

$$\begin{aligned} &\max \quad c^T x\\ &\text{s.t.} \quad Ax = b\\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

צורת סלאק/צורה רפויה של תוכנה לינארית סטנדרטית: תהא $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ תוכנה לינארית שנדרטית אזי התוכנה $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ תוכנה לינארית סטנדרטית: תהא $((\begin{smallmatrix}c\\0\end{smallmatrix}),0,0,(A|I_m),b,I_{n+m},0)$

הערה המקסימלית אזי התוכנה הלינארית חוכנה לינארית תוכנה לינארית חוכנה לינארית חוכנה לינארית חוכנה לינארית חוכנה האינארית חוכנה לינארית חוכנה $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ הינה הינה $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ הינה הינה חוכנה לינארית חוכנה הינארית הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית הינארית חוכנה הינארית חוכנה הינארית הינא

$$\max c^T x$$
s.t. $Ax + s = b$

$$\binom{x}{s} \ge 0$$

משתנים בסיסיים בצורה רפויה: תהא SF צורה רפויה אזי $\{x_{n+1},\dots,x_{n+m}\}$ בבעיית התכנות הלינארי. משתנים לא בסיסיים בצורה רפויה: תהא SF צורה רפויה אזי $\{x_1,\dots,x_n\}$ בבעיית התכנות הלינארי. $x_1,\dots,x_n\}$ טענה צורה רפויה: תהא SLP תוכנה לינארית בצורה סטנדרטית ויהי $x\in\mathbb{R}^n$ אזי (קיים $y\in\mathbb{R}^m$ עבורו x_n) פתרון פיזבילי של הצורה הרפויה) x

אלגוריתם סימפלקס: ...

טענה: בעיית הזרימה המקסימלית הינה בעיית תכנות לינארי מקסימלית.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת אזי בעיית הזרימה המקסימלית הינה

$$\begin{aligned} & \max & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,t)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,t)\right) \\ & \text{s.t.} & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,u)\right) = 0 & , \forall v \in V \backslash \{s,t\} \\ & & f\left((u,v)\right) \leq c\left((u,v)\right) & , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & & f\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

.(V,E,c,s,t,a) אזי $a:E o\mathbb{R}$ ותהא היימה ותהא (V,E,c,s,t) ואזי תהא בעלת עלות: $a\cdot f$ ארימה ותהא f ארימה ותהא (V,E,c,s,t) רשת רימה אזי f

וכן $\chi_f\left(t
ight)=d$ עבורה f אזי פונקציית איי פונקציית עלות ויהי עלת ארימה עלת (V,E,c,s,t,a) וכן בעיית העלות המינימלית: תהא המינימלית: $\sum_{e\in E}a\left(e\right)\cdot f\left(e\right)$

טענה: בעיית העלות המינימלית הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t,a) רשת זרימה בעלת עלות ויהי $d\in\mathbb{N}_+$ אזי בעיית העלות המינימלית הינה

$$\begin{aligned} & \min \quad \sum_{(u,v) \in E} a\left((a,v)\right) \cdot f\left((a,v)\right) \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,t)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,t)\right) = d \\ & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,u)\right) = 0 \qquad , \forall v \in V \backslash \left\{s,t\right\} \\ & f\left((u,v)\right) \leq c\left((u,v)\right) \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & f\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

מסקנה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה בעלת עלות יהי $d\in\mathbb{N}_+$ ותהא זרימה מקסימלית של (V,E,c,s,t,a) אזי (בעיית העלות המינימלית פיזבילית). $(|f|\geq d)$

סענה: תהא (V,E,c,s,t,a) השת בעית העלות ויהי עלות ויהי עלות ויהי אזי בעיית העלות המינימלית פיזבילית אזי בעיית העלות המינימלית בעיית פתרון אופטימלי.

 $f:E o\mathbb{R}_+$ אזי פונקציה אזי פונקציה עלות ותהא עלות איימה בעלת (V,E,c,s,t,a) אזי פונקציה בעיית העלות המינימלית המינימלית עם היצע וביקוש: תהא $\chi_f=d$ וכן $\chi_f=d$ וכן $\chi_f=d$ וכן $\chi_f=d$ וכן לפר בורה בעיית העלות מינימלית.

טענה: בעיית העלות המינימלית עם היצע וביקוש הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: תהא עם המינימלית עם היצע וביקוש הינה $d:V o \mathbb{Z}$ אזי בעלת עלות ותהא אוי בעלת עם היצע וביקוש הינה (V,E,c,s,t,a) מסקנה:

$$\begin{aligned} & \min & & \sum_{(u,v) \in E} a\left((a,v)\right) \cdot f\left((a,v)\right) \\ & \text{s.t.} & & \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left((v,u)\right) = d\left(v\right) & , \forall v \in V \\ & & f\left((u,v)\right) \leq c\left((u,v)\right) & , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & & f\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

טענה: תהא המינימלית עם היצע וביקוש פיזבילית עבורה בעיית העלות ותהא איז פיזבילית על זרימה בעלת עלות ותהא איז רימה בעלת אוו ותהא בעלת עלות ותהא בעלת עלות ותהא וביקוש פיזבילית וביקוש פיזבילית בערית העלות המינימלית עם היצע וביקוש פיזבילית בעלת וביקוש פיזבילית וביקוש פיזבילית וביקוש פיזבילית בעלת עלות ותהא בעלת ותהא ב

s.t.
$$\sum_{u \in V} f\left(\left(u,t_{i}\right),i\right) - \sum_{u \in V} f\left(\left(t_{i},u\right),i\right) = \alpha \cdot d\left(i\right) \qquad , \forall i \in [k]$$

$$\sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} f\left(\left(u,v\right),i\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} f\left(\left(v,u\right),i\right) = 0 \qquad , \forall i \in [k] . \forall v \in V \backslash \left\{s_{i},t_{i}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^{k} f\left(\left(u,v\right),i\right) \leq c\left(\left(u,v\right)\right) \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E$$

$$f\left(\left(u,v\right),i\right) \geq 0 \qquad , \forall i \in [k] . \forall \left(u,v\right) \in E$$

 $y:V o\mathbb{R}$ אזי $s\in V$ אזי δ גרף מכוון ממושקל אוזי δ אזי אזי $s\in V$ אזיים ויהי שליליים אזי משקל: יהי δ גרף מכוון ממושקל חסר מעגלים שליליים $s\in V$ אזי אזי g לכל g לכל g לכל g לכל g לכל אוזי g לכל אוזי מעבורה g

 $y:V o\mathbb{R}$ ותהא $v\in V$ ותהא לכל $\delta\left(s,v
ight)<\infty$ עבורו יהי $s\in V$ תת־משקל חסר מעגלים שליליים יהי עבורו $s\in V$ ותהא $v\in V$ ותהא אזי $v\in V$ למל: $v\in V$ לכל עבורו למליים אזי $v\in V$ לכל למר:

 $y:V o\mathbb{R}$ אותהא $v\in V$ לכל לכל לכל און עבורו $s\in V$ יהי שליליים שליליים שליליים עבורו ממושקל לכל לכל און ותהא $s\in V$ ותהא אוי קשת g עבורה g עבורה g עבורה g עבורה בעבורה אוי עבורה משקל אוי קשת לכל אוי עבורה וותהא אוי קשת לכל אוי שליליים וותהא אוי קשת לכל אוי שליליים וותהא אוי שליליים שליליים וותהא אוי עבורה וותהא אויים עבורה וותהא אויים

 $y:V o\mathbb{R}$ תהא $v\in V$ לכל לכל לכל $\delta\left(s,v
ight)<\infty$ עבורו יהי שליליים שליליים שליליים עבורו חסר מעגלים עבורו ממושקל א תהא $v\in V$ חסר מעגלים שליליים יהי עבורו $s\in V$ המכיל רק קשתות הדוקות אזי עבורו קיים מסלול $u\in V$ המכיל רק קשתות הדוקות אזי עבורו קיים מסלול

 $y:V o\mathbb{R}$ ותהא $v\in V$ לכל לכל לכל לכל עבורו אור מטקנה: יהי אורף מכוון ממושקל חסר מעגלים שליליים יהי שליליים אור אזי עבורו אורף מכוון ממושקל פיזבילית.

טענה: בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה בעיית תכנות לינארי מינימלית.

מסקנה: יהי G גרף מכוון ממושקל ויהי $s\in V$ ויהי ויהי מנקודת מנקודת מנח מסקנה: יהי מכוון ממושקל ויהי

$$\max \quad \sum_{u \in V} y(u)$$
 s.t.
$$y(v) - y(u) \le \ell(u,v) \qquad , \forall (u,v) \in E$$

$$y(s) = 0$$

משפט: יהי $S\in V$ מכוון ממושקל $\delta\left(s,v
ight)<\infty$ חסר מעגלים שליליים ויהי מהי $S\in V$ אזי לכל ל

- בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא בעלת פתאון אופטימלי.
- $u\in V$ לכל $y\left(u
 ight)=\delta_{\ell}\left(s,u
 ight)$ אזי אוי אונטימלי של בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא אזי $y\left(u
 ight)=\delta_{\ell}\left(s,u
 ight)$

טענה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ בעל מעגל שלילי ויהי $s\in V$ אזי בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא אי פיזבילית. טענה: יהי δ גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי $s\in V$ עבורו קיים $t\in V$ המקיים המסלולים הקצרים מנקודת מוצא לא חסומה.

תחת ההנחות c^Tx מוכנה לינארי אזי מציאת תכנות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות בעיית תכנות לינארי בשלמים: תהא (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות (c,P,p,Q,q,R,r) תחת ההנחות בעיית תכנות לינארי בשלמים: תחת ההנחות המוחד בעיית המוחד בעוד בעודה בעיית המוחד בעוד בעודת המוחד בעיית המוחד בעודת המוחד בע

תוכנה הלינארית אזי התוכנה הלינארית חוכנה ($c,A,b,0,0,I_n,0$) תוכנה הלינארית אזי התוכנה הלינארית המינימלית ($b,0,0,0,0,\left(\frac{A^T}{I_m} \right),\left(\begin{smallmatrix} c \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

הינה $\left(b,0,0,0,0,\left(rac{A^T}{I_m}
ight),\left(rac{c}{0}
ight)
ight)$ הינה הלינארית המינימלית תהא תוכנה לינארית סטנדרטית אזי התוכנה הלינארית המינימלית $\left(c,A,b,0,0,I_n,0
ight)$

$$\begin{aligned} & \min & b^T x \\ & \text{s.t.} & A^T x \geq c \\ & & x > 0 \end{aligned}$$

y ויהי $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ של פתרון פיזבילי פתרון משפט חוכנה לינארית סטנדרטית ווכנה $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ ויהי $(c,A,b,0,0,I_n,0)$ של התוכנה הלינארית הדואלית אזי $c^Tx \leq b^Ty$ משפט דואליו של התוכנה הלינארית הדואלית אזי

משפט הפרדת היפר־משטח: תהא $\beta\in\mathbb{R}$ עבורם $x\in\mathbb{R}^n$ אזי קיים $x\in\mathbb{R}^n$ וקיים אוכן $x\in\mathbb{R}^n$ עבורם אזי קיים $x\in\mathbb{R}^n$ וכן גורם אזי קיים $x\in\mathbb{R}^n$ וכן לכל $x^Tb>\beta$

למה מתקיים מהבאים אזי בדיוק אוי ויהי $h\in\mathbb{R}^m$ ויהי ויהי אוי מהבאים מתקיים מתקיים למה מארקאס: תהא

- Ax = b וכן $x \geq 0$ עבורו $x \in \mathbb{R}^n$ פיים
- $A^Ty \geq 0$ וכן $b^Ty < 0$ עבורו $y \in \mathbb{R}^m$ פיים

משפט דואליות חזקה: תהא SLP תוכנה לינארית סטנדרטית ותהא DLP התוכנה הלינארית הדואלית אזי

- x=y אזי DLP ויהי אופטימלי אופטימלי פתרון ויהי SLP יהי x פתרון אופטימלי יהי
 - (SLP) פיזבילית וחסומה \Longrightarrow (חסומה) פיזבילית וחסומה).
 - \bullet (א פיזבילית) לא DLP) לא חסומה SLP) \bullet
 - .(א חסומה) לא DLP) \Longrightarrow לא פיזבילית SLP) •

תוכנה לינארית פרימאלית: תהא SLP תוכנה לינארית סטנדרטית תהא DLP התוכנה הלינארית הדואלית ותהא SDLP הצורה הסטנדרטית של DLP אזי התוכנה הלינארית הדואלית של SDLP.

שקולה ל-SDLP שקולה ל-SDLP תוכנה לינארית סטנדרטית ותהא SDLP התוכנה הלינארית הפרימאלית אזי

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה המקסימלית הינה

$$\begin{split} & \min \quad \sum_{(u,v) \in E} c\left((u,v)\right) \cdot z\left((u,v)\right) \\ & \text{s.t.} \quad y\left(v\right) - y\left(u\right) + z\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall u,v \in V \backslash \left\{s,t\right\}.\left(u,v\right) \in E \\ & \quad y\left(v\right) + z\left((s,v)\right) \geq 1 \qquad , \forall \left(s,v\right) \in E \\ & \quad -y\left(u\right) + z\left((u,t)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,t\right) \in E \\ & \quad z\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \end{split}$$

טענה: תהא (V,E,c,s,t) רשת זרימה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה מקסימלית שקולה לתוכנה הלינארית

$$\begin{aligned} & \min & & \sum_{(u,v) \in E} c\left((u,v)\right) \cdot z\left((u,v)\right) \\ & \text{s.t.} & & y\left(v\right) - y\left(u\right) + z\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \\ & & y\left(s\right) = 1 \\ & & y\left(t\right) = 0 \\ & & z\left((u,v)\right) \geq 0 & , \forall \left(u,v\right) \in E \end{aligned}$$

עבורו ($\binom{z}{y}$) משפט: תהא (V,E,c,s,t) משפט: תהא אזי הבעיה אזי הבעיה הדואלית של בעיית הזרימה המקסימלית בעלת פתרון אופטימלי ($u\in V$) עבורו $u\in V$ לכל v

טענה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ ויהי $s\in V$ אזי הבעיה הדואלית של בעיית המסלולים הקצרים מנקודת מוצא הינה

$$\begin{split} & \min \quad \sum_{(u,v) \in E} \ell\left((u,v)\right) \cdot x\left((u,v)\right) \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{\substack{u \in V \\ (u,v) \in E}} x\left((u,v)\right) - \sum_{\substack{u \in V \\ (v,u) \in E}} x\left((v,u)\right) = 1 \qquad , \forall v \in V \backslash \left\{s\right\} \\ & \quad x\left((u,v)\right) \geq 0 \qquad , \forall \left(u,v\right) \in E \end{split}$$

מסקנה: יהי G גרף מכוון ממושקל ℓ יהי יהי $s \in V$ יהי ויהי $s \in V$ יהי מסקנה: יהי G גרף מכוון ממושקל אזי S פתרון אופטימלי של פתרון בשלמים.