פונקציית הסתברות נקודתית: $\mathbb{P}\in[0,1]^{\Omega}$ המקיימת $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)=1$.

מרחב הסתברות (מ"ה): תהא Ω קבוצה ותהא $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אזי $(\Omega,\mathbb{P})$.

מרחב מדגם: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מרחב הסתברות בדיד: מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\le\aleph_0$.

מרחב הסתברות סופי: מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\in\mathbb{N}$.

הערה: בקורס זה כל מרחבי ההסתברות הינם בדידים.

סימון: $2^{A}=\mathcal{P}(A)$.

מאורע: תהא $A\subseteq\Omega$ אזי $\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)$.

סימון: $[n]=\{1,\ldots,n\}$.

משפט: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ומאורעות A,B

- **משלים:** $\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}\right)=1-\mathbb{P}(A)$.
- **אדטיביות:** $\mathbb{P}(A\uplus B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A\backslash B)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B\cap A)$.
- **מונוטוניות:** $(A\subseteq B)\Longrightarrow(\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(B))$.
- **הכלה והדחה:** $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

מסקנה: תהא $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אזי $\mathbb{P}(\varnothing)=0$.

משפט סיגמא־אדטיביות: יהיו $E=\biguplus_{i=1}^{\infty}E_i$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_i)$.

הכלה והדחה כללית: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{\varnothing\ne I\subseteq[n]}\left((-1)^{|I|+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\right)$.

הכלה והדחה סימטרית: נניח כי $\forall I\subseteq[n].(|I|=k)\Rightarrow(\mathbb{P}(A_I)=a_k)$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\binom{n}{k}a_k\right)$.

מרחב הסתברות אחיד: מרחב הסתברות סופי $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $\forall A\in2^{\Omega}.\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

תמורה מקרית/סידור אקראי: המרחב האחיד על S_n.

משפט חסם האיחוד: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cup B)\le\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.

מסקנה: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$.

מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$.

אי שוויונות בונפרוני: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות ויהי $1\le k\le n$

- $k\in\mathbb{N}_{odd}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.
- $k\in\mathbb{N}_{even}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\ge\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.

משפט רציפות פונקציית ההסתברות: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות

- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.
- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.

פונקציית גיבוב/hash: $h\in[m]^{[n]}$.

התנגשות: תהא h פונקציית גיבוב אזי $i\ne j$ עבורם $h(i)=h(j)$.

פרדוקס יום ההולדת: תהא $h\in[m]^{[n]}$ פונקציית גיבוב אזי $\frac{n(n-1)}{2m}\ge\mathbb{P}(\text{התנגשות})\ge1-e^{-\frac{n(n-1)}{2m}}$.

מספר ראמזי: נגדיר $R:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך $R(t)=\min\{n\mid \text{בכל צביעה של } K_n \text{ בשני צבעים יש } K_t \text{ מונוכרומטית}\}$.

משפט: $2^{\frac{t-3}{2}}<R(t)\le c\cdot\frac{4^t}{\sqrt{t}}$.

פונקציית הסתברות מותנית: יהי F מאורע המקיים $\mathbb{P}(F)>0$ אזי $\mathbb{P}(\omega\mid F)=\begin{cases}\frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(F)} & \omega\in F\\ 0 & else\end{cases}$.

טענה: פונקציית הסתברות מותנית הינה פונקציית הסתברות.

מרחב הסתברות מותנה: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $F\in2^{\Omega}$ אזי $(\Omega,\mathbb{P}(\cdot\mid F))$.

טענה: מרחב הסתברות מותנית הוא מרחב הסתברות.

משפט: יהיו E,F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E\mid F)=\frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

כלל השרשרת: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\mid B)\,\mathbb{P}(B)$.

כלל השרשרת: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\mid\bigcap_{j=1}^{i-1}A_i\right)$.

נוסחת ההסתברות השלמה: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\mid B)\,\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}\left(A\mid B^{\mathcal{C}}\right)\mathbb{P}\left(B^{\mathcal{C}}\right)$.

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ אזי $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

כלל בייס: יהיו E, F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E \mid F) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F|E)}{\mathbb{P}(F)}$.

טענה: יהיו A, B מאורעות עבורם $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) > 0$ אזי $\mathbb{P}((\cdot \mid B) \mid C) = \mathbb{P}(\cdot \mid B \cap C)\mathbb{P}(C \mid B)$.

מאורע מחזק: יהי B מאורע אזי מאורע A עבורו $\mathbb{P}(A) > 0$ המקיים $\mathbb{P}(B \mid A) > \mathbb{P}(B)$.

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות A, B המקיימים $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

סימון: $AB = A \cap B$.

טענה: יהי A מאורע אזי (A ב"ת עם עצמו)$\iff(\mathbb{P}(A) \in \{0,1\})$.

טענה: יהיו A, B מאורעות זרים וב"ת אזי $(\mathbb{P}(A) = 0) \vee (\mathbb{P}(B) = 0)$.

טענה: יהיו A, B מאורעות התב"ש

- A, B בלתי תלויים.
- $A^{\mathcal{C}}, B$ בלתי תלויים.
- $A^{\mathcal{C}}, B^{\mathcal{C}}$ בלתי תלויים.
- $A, B^{\mathcal{C}}$ בלתי תלויים.

אי תלות בזוגות: מאורעות $A_1 \ldots A_n$ המקיימים $\forall i \neq j. \mathbb{P}(A_i A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

אי תלות בזוגות: מאורעות $\{A_i\}_{i \in I}$ המקיימים $\forall i \neq j. \mathbb{P}(A_i A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות $A_1 \ldots A_n$ המקיימים $\forall I \subseteq [n] . \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.

הכללה: מאורעות $\{A_i\}_{i \in I}$ המקיימים $\forall J \subseteq I. (|J| \in \mathbb{N}_+) \Longrightarrow \left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\right)$.

הערה: נסמן זמנית $\left(A^1 = A\right) \wedge \left(A^{-1} = A^{\mathcal{C}}\right)$.

טענה: ($A_1 \ldots A_n$ בלתי תלויים)$\iff(\forall \varepsilon \in \{\pm 1\}^n . \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^n A_i^{\varepsilon_i}) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^{\varepsilon_i}))$.

מסקנה: יהיו $A_1 \ldots A_n, B_1$ מאורעות ב"ת אזי כל איחוד/חיתוך/משלים של $A_1 \ldots A_n$ ב"ת עם B_1.

פונקציית הסתברות מכפלה: יהיו $(\Omega_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $\mathbb{P}_{\Omega_1 \times \Omega_2}((\omega_1, \omega_2)) = \mathbb{P}_1(\omega_1)\mathbb{P}_2(\omega_2)$.

טענה: פונקציית הסתברות מכפלה היא פונקציית הסתברות.

מרחב מכפלה: יהיו $(\Omega_1, \mathbb{P}_1), (\Omega_2, \mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $(\Omega_1, \mathbb{P}_1) \otimes (\Omega_2, \mathbb{P}_2) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{P}_{\Omega_1 \times \Omega_2})$.

טענה: מרחב מכפלה הוא מרחב הסתברות.

טענה: יהיו $(\Omega_1, \mathbb{P}_1) \ldots (\Omega_n, \mathbb{P}_n)$ מ"ה אזי $\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathbb{P}_i)$ מרחב הסתברות.

מלבן: מאורע $C \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ המקיים $\exists A \subseteq \Omega_1 . \exists B \subseteq \Omega_2 . C = A \times B$.

טענה: יהי $A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ מלבן אזי $\mathbb{P}(A \times B) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B)$.

סימון: יהי $\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathbb{P}_i)$ מ"ה ויהי $A \subseteq \Omega_i$ אזי $\overline{A} = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{i-1} \times A \times \Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n$.

מסקנה: יהי $A \subseteq \Omega_i$ ויהי $B \subseteq \Omega_j$ אזי $\overline{A}, \overline{B}$ ב"ת מעל $\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathbb{P}_i)$.

טענה: יהי $A \subseteq \Omega_i$ אזי $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}_i(A)$.

מסקנה: $\mathbb{P}((\omega_1 \ldots \omega_n)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i(\omega_i)$.

משפט: יהיו $A_1 \ldots A_n$ מאורעות עבורם $\forall i \in [n] . A_i \subseteq \Omega_i$ אזי $\overline{A_1} \ldots \overline{A_n}$ ב"ת.

מאורעות בלתי תלויים בהתנייה: יהי $\mathbb{P}(C) > 0$ אזי מאורעות A, B עבורם $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)$.

n **ניסויי ברנולי:** יהי $0 \leq p \leq 1$ נגדיר $f \in [0,1]^{\{0,1\}}$ כך $f(k) = \begin{cases} p & k = 1 \\ 1-p & k = 0 \end{cases}$ אזי $\bigotimes_{i=1}^n (\{0,1\}, f)$.

טענה: נסמן $M_n =$ "הרצף הארוך ביותר של 1 ב־n ניסויי ברנולי" אזי $\left(M_n - \log_{\frac{1}{p}}(n)\right) \to 0$.

מטריצת שכנויות: יהי $G = (V, E)$ גרף לא מכוון אזי $A \in M_{|V|}(\{0,1\})$ המקיים $A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \{i,j\} \in E \\ 0 & else \end{cases}$.

גרפים על n קודקודים: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left\{(A_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n} \mid A_{i,j} \in \{0,1\}\right\}$.

הימצאות קשת בהתסברות p: יהי $p \in [0,1]$ אזי $\mathbb{P}(\{\omega \in$ גרפים על n קודקודים $\mid \omega_{i,j} = 1\}) = p$.

גרף מקרי: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $p \in [0,1]$ אזי $G(n,p) = ($גרפים על n קודקודים, הימצאות קשת בהתסברות $p)$.

טענה: יהי $\omega \in G(n,p)$ אזי $\mathbb{P}(\omega) = p^{|E_\omega|} \cdot (1-p)^{\binom{n}{2} - |E_\omega|}$.

מסקנה: גרף מקרי הינו מרחב הסתברות.

משתנה מקרי (מ"מ): יהי $(\Omega, \mathbb{P})$ מ"ה בדיד אזי $f \in \Omega \to S$.

סימון: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{P}\left(X=s\right)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\{s\}\right)\right)$.

אינדיקטור: יהי $A\subseteq\Omega$ מאורע אזי $\mathbb{1}_{A}\in\{0,1\}^{\Omega}$ המוגדר $\mathbb{1}_{A}\left(\omega\right)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\0 & else\end{cases}$.

טענה: $\left(\mathbb{1}_{A}\cdot\mathbb{1}_{B}=\mathbb{1}_{A\cap B}\right)\wedge\left(\mathbb{1}_{A}+\mathbb{1}_{B}=\mathbb{1}_{A\uplus B}\right)$.

תומך: תהא $f:S\to\mathbb{R}$ אזי $\text{supp}\left(f\right)=\left\{s\in S\mid f\left(s\right)\neq0\right\}$.

התפלגות בדידה: $\mu:S\to[0,1]$ המקיימת $\left(\left|\text{supp}\left(\mu\right)\right|\le\aleph_{0}\right)\wedge\left(\sum_{s\in\text{supp}(\mu)}\mu\left(s\right)=1\right)$.

התפלגות של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $\mu:\text{Im}\left(X\right)\to[0,1]$ המוגדרת $\mu_{X}\left(s\right)=\mathbb{P}\left(X=s\right)$.

טענה: ההתפלגות של משתנה מקרית היא התפלגות בדידה.

סימון: יהי X מ"מ אזי $\text{supp}\left(X\right)=\text{supp}\left(\mu_{X}\right)$.

משתנים מקריים שווים: $X,Y\in S^{\Omega}$ המקיימים $\forall\omega\in\Omega.X\left(\omega\right)=Y\left(\omega\right)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עם אותה תמונה המקיימים $\forall s\in S.\mu_{X}\left(s\right)=\mu_{Y}\left(s\right)$.

סימון: יהיו X,Y מ"מ שווי התפלגות אזי $X\sim Y$.

התפלגות אחידה בדידה: יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\mu\left(k\right)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1} & {\scriptstyle k\in[a,b]\cap\mathbb{Z}}\\0 & else\end{cases}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_{X} מתפלג אחיד בדיד אזי $X\sim\text{Uni}\left(a,b\right)$.

סימון: תהא μ התפלגות אזי $\left(\mu\left(k\right)=\begin{cases}p_{i} & k=x_{i}\\0 & else\end{cases}\right)\equiv\left(\mu=\begin{cases}x_{1} & p_{1}\\\vdots & \vdots\\x_{n} & p_{n}\end{cases}\right)$.

התפלגות ברנולי: יהי $p\in[0,1]$ אזי $\mu\in[0,1]^{\{0,1\}}$ המקיימת $\mu=\begin{cases}1 & p\\0 & 1-p\end{cases}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_{X} מתפלג ברנולי אזי $X\sim\text{Ber}\left(p\right)$.

התפלגות גאומטרית: יהי $p\in[0,1]$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}_{+}}$ המקיימת $\mu\left(k\right)=\left(1-p\right)^{k-1}p$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_{X} מתפלג גאומטרית אזי $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$.

התפלגות בינומית: יהי $p\in[0,1]$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\mu\left(k\right)=\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_{X} מתפלג בינומית אזי $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$.

התפלגות פואסון: יהי $\lambda>0$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(k\right)=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_{X} מתפלג פואסונית אזי $X\sim\text{Pois}\left(\lambda\right)$.

משפט קירוב בינום־פואסון: יהי $k\in\mathbb{N}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\mu_{\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)}\left(k\right)=\mu_{\text{Pois}(\lambda)}\left(k\right)$.

התפלגות היפרגאומטרית: יהיו $r,n,m\in\mathbb{N}$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(k\right)=\frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_{X} מתפלג היפרגאומטרית אזי $X\sim\text{HG}\left(n,m,r\right)$.

התפלגות בינומית שלילית: יהי $r\in\mathbb{N}$ וכן $p\in[0,1]$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(k\right)=\binom{k-1}{r-1}p^{r}\left(1-p\right)^{k-r}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_{X} מתפלג בינומית שלילית אזי $X\sim\text{NB}\left(r,p\right)$.

התפלגות היפרגאומטרית שלילית: יהיו $r,k,m\in\mathbb{N}$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu\left(x\right)=\frac{\binom{x-1}{k-1}\binom{m-x}{r-k}}{\binom{m}{r}}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_{X} מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי $X\sim\text{NHG}\left(r,k,m\right)$.

טרנספורמציה של משתנה מקרי: תהא $X\in A^{\Omega}$ ותהא $f\in B^{A}$ אזי $f\left(X\right)=f\circ X$.

משפט: יהי X מ"מ ויהי $f\in B^{A}$ אזי $\mu_{f(X)}\left(k\right)=\sum_{r\in f^{-1}(\{k\})}\mu_{X}\left(r\right)$.

מסקנה: יהי X מ"מ ויהי $f\in B^{A}$ אזי $\text{supp}\left(f\left(X\right)\right)=f\left(\text{supp}\left(X\right)\right)$.

זוג משתנים מקריים: יהיו $X:\Omega\to A$ וכן $Y:\Omega\to B$ משתנים מקריים אזי $\left(X,Y\right)$.

התפלגות משותפת: יהי $\left(X,Y\right)$ זוג מ"מ אזי $\mu_{X,Y}\left(x,y\right)=\mathbb{P}\left(X=x,Y=y\right)$.

הכללה: יהיו $X_{1}\ldots X_{n}$ מ"מ אזי $\mu_{X_{1}\ldots X_{n}}\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)=\mathbb{P}\left(X_{1}=x_{1},\ldots,X_{n}=x_{n}\right)$.

התפלגויות שוליות: יהי $\left(X,Y\right)$ זוג מ"מ אזי μ_{X},μ_{Y}.

טענה: $\mu_{X}\left(x\right)=\sum_{y\in S}\mu_{X,Y}\left(x,y\right)$.

משתנים מקריים בלתי תלויים: $\left(X,Y\right)$ זוג מ"מ עבורו $\mu_{X,Y}=\mu_{X}\mu_{Y}$.

הכללה: $X_1 \dots X_n$ מ"מ המקיימים $\mu_{X_1 \dots X_n} = \mu_{X_1} \cdot \dots \cdot \mu_{X_n}$.

משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות: $X_1 \dots X_n$ מ"מ המקיימים X_i, X_j ב"ת לכל $i \neq j$.

משפט: יהיו $X_1 \dots X_n$ מ"מ ב"ת ויהיו $E_1 \dots E_n$ קבוצות אזי $\{X_i \in E_i\}$ מאורעות ב"ת.

משפט: יהיו X, Y מ"מ ב"ת ויהיו f, g טרנספורמציות של מ"מ אזי $f(X), g(Y)$ ב"ת.

משפט: ($A_1 \dots A_n$ מאורעות ב"ת)$\Longleftrightarrow$($\mathbb{1}_{A_1} \dots \mathbb{1}_{A_n}$ מ"מ ב"ת).

טענה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי קיים מ"ה $(\Omega, \mathbb{P})$ עבורו קיימים X, Y מ"מ ב"ת המקיימים $(\mu_X = \mu_1) \wedge (\mu_Y = \mu_2)$.

קונבולוציה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי $(\mu_1 * \mu_2)(z) = \sum_x \mu_1(x) \mu_2(z - x)$.

טענה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$.

משפט: יהיו X, Y מ"מ ב"ת אזי $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$.

טענה: $\text{Bin}(n, p) + \text{Bin}(m, p) \sim \text{Bin}(n + m, p)$.

מסקנה: $\text{Bin}(n, p) \sim \sum_{i=1}^n \text{Ber}(p)$.

טענה: $\text{Pois}(\lambda_1) + \text{Pois}(\lambda_2) \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

טענה: $\text{NB}(n, p) \sim \sum_{i=1}^n \text{Geo}(p)$.

משתנה מקרי מותנה: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $X_{\restriction_A}$.

התפלגות מותנית: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction_A}}$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction_{Y=y}}}(x) = \frac{\mu_{X,Y}(x,y)}{\mu_Y(y)}$.

סימון: יהיו X, Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction_Y}}(x \mid y) = \mu_{X_{\restriction_{Y=y}}}(x)$.

התפלגות מולטינומית: יהיו $p_1 \dots p_n$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}^n}$ המקיים $\mu(k_1 \dots k_n) = \binom{n}{k_1 \dots k_n} \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$.

התפלגות מצטברת: יהי X מ"מ אזי $F_X : [0,1]^{\mathbb{R}}$ כך $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

טענה: יהי X מ"מ

- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$.
- $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$.
- יהי $s \in \text{supp}(X)$ אזי $\mu_X(s) = F_X(s) - \lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(s - \varepsilon)$.

פונקציית ההישרדות: יהי X מ"מ אזי $\lambda_X(t) = 1 - F_X(t)$.

מסקנה: $\min_{i=1}^n \{\text{Geo}(p_i)\} \sim \text{Geo}\left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)\right)$.

פיצול פואסון: יהיו X, Y מ"מ עבורם $X + Y \sim \text{Poiss}(\lambda)$ וכן $X_{\restriction_{X+Y=n}} \sim \text{Bin}(n, p)$

- $Y_{\restriction_{X+Y=n}} \sim \text{Bin}(n, 1 - p)$.
- $X \sim \text{Poiss}(p\lambda)$.
- $Y \sim \text{Poiss}((1 - p)\lambda)$.
- X, Y ב"ת.

צימוד בין התפלגויות: יהיו $\mu_1, \mu_2 : [0,1]^S$ התפלגויות אזי התפלגות $\mu : [0,1]^{S^2}$ המקיימת $\mu_1(\omega) = \sum_{s \in S} \mu(\omega, s)$ וכן $\mu_2(\omega) = \sum_{s \in S} \mu(s, \omega)$.

צימוד בין משתנים: יהיו X, Y מ"מ אזי זוג מ"מ (X', Y') המקיים $(X' \sim X) \wedge (Y' \sim Y)$.

טענה: יהי X מ"מ על Ω_1 ויהי Y מ"מ על Ω_2 נגדיר X', Y' מ"מ ב"ת על $\Omega_1 \otimes \Omega_2$ כך $X'(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1)$ וכן $Y'(\omega_1, \omega_2) = Y(\omega_2)$ אזי (X', Y') צימוד של X, Y.

התפלגות שולטת סטוכסטית: יהי X מ"מ אזי מ"מ Y המקיים $\mathbb{P}(X > t) \geq \mathbb{P}(Y > t)$.

צימוד מונוטוני: יהיו X, Y מ"מ אזי צימוד (X', Y') המקיים $\mathbb{P}(Y' > X') = 0$.

טענה: יהי X מ"מ בעל התפלגות שולטת סטוכסטית בהתפלגות Y אזי קיים צימוד מונוטוני.

מטריקת ההשתנות הכוללת: תהא $|S| \leq \aleph_0$ ויהיו $\mu, \upsilon : [0,1]^S$ התפלגויות אזי $\delta(\mu, \upsilon) = \sum_{x \in S} |\mu(x) - \upsilon(x)|$.

למה: מטריקת ההשתנות הכוללת הינה מטריקה.

סימון: יהיו X, Y מ"מ אזי $\delta(X, Y) = \delta(\mu_X, \mu_Y)$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\delta(X, Y) = 2 \sup_{E \subseteq S} |\mathbb{P}(X \in E) - \mathbb{P}(Y \in E)|$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ ויהי (X', Y') צימוד אזי $\delta(X, Y) = \delta(X', Y') \leq 2\mathbb{P}(X' \neq Y')$.

מסקנה: יהיו $X_1 \dots X_{2n}$ מ"מ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=n+1}^{2n} X_i\right) \leq 2 \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \neq Y_i)$.

חוק המספרים הקטנים: יהיו $\{X_i \sim \text{Ber}(p_i)\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ויהיו $T \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, T\right) \le 2\sum_{i=1}^{n} p_i^2$.

חציון של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $m \in \text{supp}(X)$ המקיים $\left(\mathbb{P}(X \ge m) \ge \frac{1}{2}\right) \land \left(\mathbb{P}(X \le m) \ge \frac{1}{2}\right)$.

משתנה בעל תוחלת: X מ"מ עבורו $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ מתכנס בהחלט.

טענה: יהי X משתנה על מ"ה סופי אזי X בעל תוחלת.

תוחלת: יהי X מ"מ בעל תוחלת אזי $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$.

למה: יהיו X, Y מ"מ ויהי $c \in \mathbb{R}$

- הומוגניות: $\mathbb{E}[cX] = c\mathbb{E}[X]$.
- חיבוריות: $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.
- מונוטוניות: $(X \le Y) \implies (\mathbb{E}[X] \le \mathbb{E}[Y])$.

מסקנה: יהיו $X_1 \ldots X_n$ מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$.

משפט: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X] = \sum_{s\in\text{supp}(X)} s \cdot \mu_X(s)$.

טענה: יהי X מ"מ

- $(X \sim \text{Uni}(0,\ldots,n)) \implies \left(\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}\right)$.
- $(X \sim \text{Ber}(p)) \implies (\mathbb{E}[X] = p)$.
- $(X \sim \text{Bin}(n,p)) \implies (\mathbb{E}[X] = np)$.
- $(X \sim \text{Geo}(p)) \implies \left(\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}\right)$.
- $(X \sim \text{HG}(n,m,r)) \implies \left(\mathbb{E}[X] = \frac{nr}{m}\right)$.
- $(X \sim \text{Pois}(\lambda)) \implies (\mathbb{E}[X] = \lambda)$.

משפט: יהי X מ"מ ותהא f טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{s\in\text{supp}(X)} f(s)\mu_X(s)$.

נוסחאת הזנב: יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}(X) = \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X \ge n)$.

משפט: יהיו X, Y מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

תוחלת מותנית: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X \mid A] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega \mid A)$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X \mid A] = \frac{\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}$.

מסקנה: יהיו $X, \mathbb{1}_A$ מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}[X \mid A] = \mathbb{E}[X]$.

נוסחאת התוחלת השלמה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid A]\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}\left[X \mid A^{\mathcal{C}}\right]\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}\right)$.

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ ויהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X \mid A_i]\mathbb{P}(A_i)$.

תוחלת של משתנה מותנה במשתנה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[X \mid Y](\omega) = \mathbb{E}[X \mid Y = Y(\omega)]$.

משפט/נוסחאת ההחלקה: יהיו X, Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y]] = \mathbb{E}[X]$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ ותהא g טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[X \cdot g(Y) \mid Y] = g(Y) \cdot \mathbb{E}[X \mid Y]$.

משתנה בעל מומנט k: מ"מ X המקיים $\mathbb{E}\left[|X|^k\right] < \infty$.

סימון: יהי X משתנה בעל מומנט k אזי $X \in \ell^k$.

מומנט k: יהי $X \in \ell^k$ אזי $\mathbb{E}\left[X^k\right]$.

טענה: יהיו $m < k \in \mathbb{N}$ אזי $\ell^k \subseteq \ell^m$.

אי שיוויון קושי שוורץ: יהיו $X, Y \in \ell^2$ אזי $|\mathbb{E}[XY]| \le \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$.

מסקנה: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\mathbb{E}[X]^2 \le \mathbb{E}\left[X^2\right]$.

שונות: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\text{Var}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$.

טענה: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\text{Var}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$.

סטיית תקן: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]}$.

משתנה דטרמיניסטי: מ"מ X המקיים $\exists c.\mathbb{P}(X = c) = 1$.

למה: יהי $X \in \ell^2$ ויהי a סקלר

- $\text{Var}[X] \ge 0$.
- (X דטרמיניסטי)$\iff (\text{Var}[X] = 0)$.
- $\text{Var}[aX] = a^2\text{Var}[X]$.
- $\text{Var}[X + a] = \text{Var}[X]$

פונקציית הפסד: יהי $X \in \ell^2$ אזי $\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right]$.

משפט: יהי $X \in \ell^2$ אזי המינימום של פונקציית ההפסד מתקבלת בערך $\mathbb{E}[X]$.

חציון: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{E}[|X-a|]$.

סימון: יהי X מ"מ אזי החציון הוא $\text{Median}(X)$.

ערך אמצעי/Mid Range: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\max|X-a|$.

סימון: יהי X מ"מ אזי הערך האמצעי הוא $\text{MR}(X)$.

שכיח: יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{P}(X \neq a)$.

סימון: יהי X מ"מ אזי השכיח הוא $\text{Mode}(X)$.

שונות משותפת: יהיו X, Y מ"מ אזי $\text{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

משפט: $\text{Var}[X+Y] = \text{Var}[X] + 2\text{Cov}[X,Y] + \text{Var}[Y]$.

טענה: $\text{Cov}[X,Y] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$.

משתנים בלתי מתואמים: X, Y המקיימים $\text{Cov}[X,Y] = 0$.

משפט: יהיו X, Y ב"ת אזי X, Y בלתי מתואמים.

מסקנה: יהיו X, Y בלתי מתואמים אזי $\text{Var}[X+Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$.

למה: יהיו X, Y, Z מ"מ ויהיו α, β סקלרים

- $\text{Cov}[X,X] = \text{Var}[X]$.
- סימטריות: $\text{Cov}[X,Y] = \text{Cov}[Y,X]$.
- בי־לינאריות: $\text{Cov}[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha\text{Cov}[X,Z] + \beta\text{Cov}[Y,Z]$.
- אינווריאנטיות להוספת סקלר: $\text{Cov}[X+\alpha, Y] = \text{Cov}[X,Y]$.
- $|\text{Cov}[X,Y]| \le \sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}$.

מקדם המתאם: יהיו X, Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}}$.

למה: יהיו X, Y מ"מ ויהיו a, b סקלרים

- $|\rho_{X,Y}| \le 1$.
- (X, Y בלתי מתואמים)$\iff(\rho_{X,Y} = 0)$.
- $(\rho_{X,Y} = \pm 1) \iff (Y = aX + b)$.

למה: יהי X מ"מ

- $X \sim \text{Uni}([n])$ אזי $\text{Var}[X] = \frac{n^2-1}{12}$.
- $X \sim \text{Bin}(n,p)$ אזי $\text{Var}(X) = np(1-p)$.
- $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ אזי $\text{Var}(X) = \lambda$.
- $X \sim \text{Geo}(p)$ אזי $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

פונקציה יוצרת: יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}(X) = \mathbb{N}$ אזי $g_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_X(n) t^n$.

טענה: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת

- $g_X(t)$ מתכנס עבור $|t| \le 1$.
- $g_X \in C^\infty((-1,1))$.
- יהי $t \in [-1,1]$ אזי t^X מ"מ בעל תוחלת.

משפט: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת אזי $g_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right]$.

למה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת בעלי פונקציה יוצרת

- $\mu_X(n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$.
- $g_{X+Y} = g_X \cdot g_Y$.
- $\lim_{t\to1^-} g_X(t) = g_X(1) = 1$.
- נניח כי X בעל מומנט k אזי $\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right] = \lim_{t\to1^-} g_X^{(k)}(t)$.

מסקנה: יהי $X \in \ell^2$ בעל פונקציה יוצרת

- $\mathbb{E}[X] = \lim_{t\to1^-} g_X'(t)$.
- $\text{Var}[X] = \lim_{t\to1^-}\left(g_X''(t) + g_X'(t) - (g_X'(t))^2\right)$.

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_X(t)=\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

טענה: יהי $X\sim\text{Bin}(n,p)$ אזי $M_X(t)=(1-p+pe^t)^n$.

למה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת

- $M_{X+Y}=M_X\cdot M_Y$.
- יהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_X\in C^n(I)$ אזי $M_X^{(n)}(0)=\mathbb{E}[X^n]$.

מסקנה: יהי I קטע עבורו $0\in I$ וכן $M_X\in C^\infty(I)$ אזי $M_X(t)=\sum_{n=0}^\infty\frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!}t^n$.

אי־שוויון מרקוב: יהי X מ"מ אי שלילי ויהי $a>0$ אזי $\mathbb{P}(X\ge a)\le\frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

מסקנה: תהא $f\in[0,\infty)^{\mathbb{R}}$ עולה ויהי X מ"מ עבורו $f(X)$ בעל תוחלת אזי $\mathbb{P}(X\ge t)\le\frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(t)}$.

אי־שוויון צ'בישב: יהי $X\in\ell^2$ ויהי $b>0$ אזי $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\ge b)\le\frac{\text{Var}[X]}{b^2}$.

סימון: יהיו $X_1\ldots X_n$ מ"מ אזי $\mu=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]$.

טענה: יהיו $X_1\sim\ldots\sim X_n$ מ"מ בלתי מתואמים בזוגות עם תוחלת משותפת μ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i-n\mu\right|\ge b\right)\le\frac{n\sigma_1^2}{b^2}$.

אי־שוויון צ'רנוף: יהיו $\{X_i\sim\text{Ber}(p_i)\}_{i=1}^n$ אזי $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i\ge(1+t)\mu\right)\le\exp\left(-\frac{t^2}{2+t}\mu\right)$.

הכללה: יהי X מ"מ ויהי $s\in\mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}(X\ge a)\le\frac{M_X(s)}{e^{sa}}$.

פונקציה קמורה: יהי I קטע אזי $\varphi\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\forall x,y\in I.\forall\lambda\in[0,1].\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$.

טענה: תהא $\varphi\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה ויהיו $x<y<z$ אזי $\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}\le\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y}$.

מסקנה: תהא $\varphi\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $\varphi\in C((a,b))$.

למה: תהא $\varphi\in\mathbb{R}^I$ קמורה ותהא $x_0\in\mathbb{R}$ אזי קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $(\varphi(x_0)=ax_0+b)\wedge(\forall x\in I.\varphi(x)\ge ax+b)$.

אי־שוויון ינסן: יהי X מ"מ בעל תוחלת ותהא $\varphi\in\mathbb{R}^I$ קמורה עבורה $\varphi(X)$ בעל תוחלת אזי $\varphi(\mathbb{E}[X])\le\mathbb{E}[\varphi(X)]$.

אי־שוויון הממוצעים: יהיו $a_1\ldots a_n>0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}\ge\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$.

אי־שיוויון המשולש: יהי X מ"מ אזי $|\mathbb{E}[X]|\le\mathbb{E}[|X|]$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ מ"מ ב"ת שקולי התפלגות עם תוחלת μ אזי $\forall\delta>0.\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\mu\right|\ge\delta\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהי $X\in\ell^1$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon,\delta>0$ קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_0$ ולכל $\{X_i\sim X\}_{i=1}^n$ מ"מ בלתי מתואמים מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\mu\right|\ge\delta\right)<\varepsilon$.

מסקנה: יהי $X\sim\text{Bin}(n,p)$ ויהי $\delta>0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\delta\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$.

למה: יהי $x\in[0,1]$ יהי $X\sim\text{Bin}(n,p)$ ויהי $\delta>0$ אזי $\sup_{x\in[0,1]}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\ge\delta\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

פולינום ברנשטיין: יהיו $k<n\in\mathbb{N}$ אזי $B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

הגדרה: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $Q_n(t)=\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$.

טענה: $Q_n(t)\in\mathbb{R}_n[x]$.

משפט: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $\forall\varepsilon>0.\exists n\in\mathbb{N}.\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-Q_n(t)|\le\varepsilon$.

החוק החזק של המספרים הגדולים: יהי $X\in\ell^4$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon,\delta>0$ קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N>N_0$ ולכל $\{X_i\sim X\}_{i=1}^N$ מ"מ ב"ת מתקיים $\mathbb{P}\left(\max_{n\in\{N_0\ldots N\}}\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\mu\right|\ge\delta\right)<\varepsilon$.

פונקציית צפיפות רציפה: $f:I\to[0,1]$ רציפה המקיימת $\int_I f(x)\,dx=1$.

הסתברות רציפה: תהא $f:I\to[0,1]$ פונקציית צפיפות ותהא $[a,b]\subseteq I$ אזי $\mathbb{P}([a,b])=\int_a^b f(x)\,dx$.

משנה מקרי רציף: מ"מ X עבורו קיימת פונקצית צפיפות $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ עבורה $\forall E\subseteq\mathbb{R}.\mathbb{P}(X\in E)=\int_E f(x)\,dx$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת: יהי X מ"מ רציף אזי $F(t)=\mathbb{P}(X\le t)=\int_{-\infty}^t f(x)\,dx$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$.

משתנה מקרי אחיד רציף: מ"מ רציף $X:I\to\mathbb{R}$ עבורו $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|I|} & x\in I\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

תוחלת רציפה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}}xf(x)\,dx$.

מומנט רציף: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X^p]=\int_{\mathbb{R}}x^pf(x)\,dx$.

התפלגות נורמלית: יהיו $\sigma^2,\mu\in\mathbb{R}$ אזי $f\in[0,1]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

סימון: יהי Z מ"מ רציף עבורו $f(x)$ מתפלג נורמלית אזי $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$.

גאוסיאן: $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

טענה: יהי Z מ"מ רציף עם פונקציית צפיפות $\phi\left(x\right)$ אזי $Z\sim N\left(0,1\right)$.

הגדרה: יהי $Z\sim N\left(0,1\right)$ מ"מ רציף אזי $\Phi\left(x\right)=\mathbb{P}\left(Z\leq x\right)=\int_{-\infty}^{x}\phi\left(t\right)dt$.

טענה: יהי $t\in\mathbb{R}$

- $\left(\lim_{x\to\infty}\Phi\left(x\right)=1\right)\wedge\left(\lim_{x\to-\infty}\Phi\left(x\right)=0\right)$.
- $\left(\Phi\in C\left(\mathbb{R}\right)\right)\wedge\left(\Phi>0\right)\wedge$($\Phi$ עולה ממש).
- $\Phi\left(t\right)=1-\Phi\left(-t\right)$.

הגדרה: $\left(\Phi\left(\infty\right)=1\right)\wedge\left(\Phi\left(-\infty\right)=0\right)$.

מסקנה: יהי $Z\sim N\left(0,1\right)$ מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}\left(a\leq Z\leq b\right)=\Phi\left(b\right)-\Phi\left(a\right)=\int_{a}^{b}\phi\left(t\right)dt$.

משתנה מתוקנן: $X\in\ell^{2}$ המקיים $\left(\mathbb{E}\left[X\right]=0\right)\wedge\left(\text{Var}\left[X\right]=1\right)$.

תקנון: יהי $X\in\ell^{2}$ אזי $\widehat{X}=\frac{X-\mathbb{E}\left[X\right]}{\sigma}$.

טענה: יהי $X\in\ell^{2}$ אזי $\widehat{X}$ מתוקנן.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\left(x\right)dx=\frac{\pi}{4^{n}}\binom{2n}{n}\right)\wedge\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\left(x\right)dx=\frac{2}{2n+1}\frac{4^{n}}{\binom{2n}{n}}\right)$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4^{n}}\binom{2n}{n}}{\frac{2}{2n+1}\frac{4^{n}}{\binom{2n}{n}}}=1$.

משפט דה־מואבר לפלס: יהיו $a\leq b$ ויהי $\left\{S_{N}\sim\text{Bin}\left(N,p\right)\right\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(a\leq\widehat{S_{N}}\leq b\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\Phi\left(b\right)-\Phi\left(a\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\mathbb{R}\right)$ חסומה יהיו $a\leq b$ ויהי $\left\{S_{N}\sim\text{Bin}\left(N,p\right)\right\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(f\left(\frac{S_{N}-Np}{p\sqrt{N}}\right)\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\int_{a}^{b}f\left(t\right)\phi\left(t\right)dt$.

הגדרה: תהא $f\in C\left(\mathbb{R}\right)$ חסומה אזי $\left\Vert f\right\Vert=\max_{x\in\mathbb{R}}\left|f\left(x\right)\right|$.

למה: תהא $f\in C^{3}\left(\mathbb{R}\right)$ יהי X מ"מ ויהי $Z\sim2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)-1$ אזי $\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)\right]-\mathbb{E}\left[f\left(\frac{Z}{\sqrt{N}}\right)\right]\right|\leq\frac{1}{6N^{\frac{3}{2}}}\left\Vert f^{(3)}\right\Vert\left(1+\mathbb{E}\left[\left|X-\mathbb{E}\left[X\right]\right|^{3}\right]\right)$.

הגדרה: $\psi\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\geq0\\1+x-\frac{2\sin(2\pi x)}{3\pi}+\frac{\sin(4\pi x)}{12\pi} & -1\leq x\leq0\\0 & x\leq-1\end{cases}$.

טענה: $\left(\psi\in C^{3}\left(\mathbb{R}\right)\right)\wedge$($\psi$ חסומה).

הגדרה: יהי $\varepsilon>0$ ויהיו $a\leq b$ אזי $I_{a,b,\varepsilon}\left(x\right)=\psi\left(\frac{b-x}{\varepsilon}\right)\psi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$.

טענה: יהי $\varepsilon>0$ ויהיו $a\leq b$ אזי $\left(I_{a,b,\varepsilon}\in C^{3}\left(\mathbb{R}\right)\right)\wedge$($I_{a,b,\varepsilon}$ חסומה).

למה: קיים $B>0$ עבורו לכל $a\leq b$ ולכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\left\Vert I_{a,b,\varepsilon}^{(3)}\right\Vert\leq\frac{B}{\varepsilon^{3}}$.

מסקנה: יהיו $a\leq b$ ויהי $0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$ אזי $\mathbb{1}_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}\leq I_{a+\varepsilon,b-\varepsilon,\varepsilon}\leq\mathbb{1}_{[a,b]}\leq I_{a,b,\varepsilon}\leq\mathbb{1}_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}$.

משפט הגבול המרכזי: יהיו $a\leq b$ נניח כי לכל $N\in\mathbb{N}$ יהיו $X_{1}\sim\ldots\sim X_{N}$ מ"מ ב"ת עם תוחלת משותפת אזי $\mathbb{P}\left(a\leq\widehat{\sum_{i=1}^{N}X_{i}}\leq b\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\Phi\left(b\right)-\Phi\left(a\right)$.

מרחב מצבים: קבוצה S.

מטריצת מצבים: $\mathcal{P}:S^{2}\to\left[0,1\right]$ המקיימת $\forall x\in S.\sum_{y\in S}\mathcal{P}\left(x,y\right)=1$.

שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן ובעלת מרחב מצבים סופי: מ"מ $\left\{X_{i}\right\}_{i=0}^{\infty}$ ומטריצת מצבים $\mathcal{P}$ עבורם $\mathbb{P}\left(X_{0}=s_{0}\ldots X_{n}=s_{n}\right)=\mu_{X_{0}}\left(s_{0}\right)\prod_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}\left(s_{i},s_{i+1}\right)$.

טענה: תהא $\left\{X_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}\left(X_{n+1}=s_{n+1}\mid X_{n}=s_{n}\ldots X_{0}=s_{0}\right)=\mathcal{P}\left(s_{n},s_{n+1}\right)$.

הערה: נתייחס אל התפלגות μ_{X} כאל וקטור שורה כך $\left(\mu_{X}\right)_{i}=\mathbb{P}\left(X=i-1\right)$.

משפט: תהא $\left\{X_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mu_{X_{k}}=\mu_{X_{0}}\cdot\mathcal{P}^{k}$.

טענה: תהא $\left\{X_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}\left(X_{n}=y\mid X_{k}=x\right)=\mathcal{P}^{n-k}\left(x,y\right)$.

התפלגות סטציונרית/עמידה: התפלגות π על S המקיימת $\pi\cdot\mathcal{P}=\pi$.

וקטור עצמי שמאלי: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $v\in M_{1,n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיים $v\cdot A=\alpha v$.

טענה: תהא $\left\{X_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\left(\mu_{X_{0}}\mathcal{P}^{n}\to\pi\right)\Longleftarrow$($\pi$ התפלגות סטציונרית).

משפט: תהא $\left\{X_{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות סטציונרית π.

סימון: יהיו $x,y\in S$ עבורם $\exists n\in\mathbb{N}_{+}.\mathcal{P}^{n}\left(x,y\right)>0$ אזי $x\to y$.

מטריצת מעברים אי פריקה: שרשרת עבורה $\forall x,y\in S.x\to y$.

למה: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה ותהא π התפלגות סטציונרית אזי $\forall x\in S.\pi\left(x\right)>0$.

משפט: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה אזי קיימת התפלגות סטציונרית יחידה π.

משפט התכנסות ממוצעים: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^k\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi$.

הערה: נתייחס אל טרנספורמציה f כאל וקטור עמודה כך $\left(f\right)_i=f\left(i\right)$.

משפט: תהא $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π ותהא f טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(X_k\right)\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi\cdot f$.

מחזור: יהי $x\in S$ אזי $\gcd\left(\left\{n\in\mathbb{N}_+\mid\mathcal{P}^n\left(x,x\right)>0\right\}\right)$.

מצב חסר מחזור: $x\in S$ אשר מחזורו 1.

שרשרת חסרת מחזור: שרשרת $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ עבורה כל מצב חסר מחזור.

המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב: תהא $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת אי פריקה וחסרת מחזור אזי $\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^n\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi$.

זמן החזרה: יהי $x\in S$ אזי T_x מ"מ הזמן הראשון בו חזרנו ל־x בהילוך שמתחיל ב־x.

משפט: תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}\left[T_x\right]=\frac{1}{\pi(x)}$.

זמן הפגיעה: יהיו $x,y\in S$ אזי $T_{x,y}$ מספר הפעמים שנגיע למצב y בהילוך שמתחיל ב־x עד לחזרה הראשונה אל x.

משפט: תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}\left[T_{x,y}\right]=\frac{\pi(y)}{\pi(x)}$.