תורת הפונקציות המרוכבות 1 (0366-2123)

נכתב ע"י רון גולדמן
מבוסס על ההרצאות של פרופסור אסף נחמיאס ותרגולים של מר רועי רווה

9 באוגוסט 2025

תוכן העניינים

פרק 1

שדה המספרים מרוכבים

1.1 הגדרות ותכונות בסיסיות

הגדרה 1.1. מספר מרוכב הוא מספר מהצורה $a+ib$ כאשר $i^2+1=0$ ו-$a,b\in\mathbb{R}$. נסמן את קבוצת **המספרים המרוכבים**

$$\mathbb{C}:=\{a+ib:\ a,b\in\mathbb{R}\}$$

עבור שני מספרים מרוכבים $z=a+ib, w=c+id$ נגדיר את **החיבור** ו**הכפל** ע"י

$$z+w=(a+ib)+(c+id):=(a+b)+i(b+d),\qquad z\cdot w=(a+ib)\cdot(c+id):=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

טענה 1.1. הקבוצה $\mathbb{C}$ יחד עם פעולות החיבור והכפל מהווה שדה, כאשר האיבר הניטרלי לחיבור הוא $0:=0+i0$ והאיבר הניטרלי לכפל הוא $1:=1+i0$.

הערה 1.1. נתייחס ל-$\mathbb{R}$ כתת-שדה של $\mathbb{C}$, תחת השיכון $a\mapsto a+i0$.

הגדרה 1.2. עבור מספר מרוכב $z=a+ib$ נגדיר:

1. $\Re(z):=a$ **החלק הממשי** של z.
2. $\Im(z):=b$ **החלק המדומה** של z.
3. $\overline{z}:=a-ib$ **הצמוד** של z.
4. $|z|:=\sqrt{a^2+b^2}$ **הערך המוחלט/המודלוס/הנורמה** של z.

טענה 1.2 (**תכונות של מרוכבים**). לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים:

1. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.
2. $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.
3. $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.
4. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.
5. לכל $n\in\mathbb{N}$, מתקיים $|z^n|=|z|^n$.

6. $z+\overline{z}=2\Re(z)$.

7. $z-\overline{z}=2i\Im(z)$.

טענה 1.3. לכל $z,w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ מתקיים

$$\left|\frac{z}{|z|}-|z|w\right|=\left|\frac{w}{|w|}-|w|z\right|$$

1.2 ארגומנט והצגה פולארית

הגדרה 1.3. לכל $\theta\in\mathbb{R}$ נגדיר:

$$e^{i\theta}:=\cos\theta+i\sin\theta$$

משפט 1.1 (הצגה פולארית). לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ קיימים ויחידים $r>0,\theta\in(-\pi,\pi]$ כך שמתקיים $z=re^{i\theta}$.

הגדרה 1.4. לכל $z=x+iy\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ נגדיר את **הארגומנט הראשי**:

$$\operatorname{Arg}(z):=\begin{cases}\arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x>0\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi, & x<0,y\geq 0\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)-\pi, & x<0,y<0\\ \frac{\pi}{2}, & x=0,y>0\\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,y<0\end{cases}$$

הגדרה 1.5. לכל $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ נאמר ש-$\theta\in\mathbb{R}$ הוא **ארגומנט** של z אם $z=|z|e^{i\theta}$. נגדיר את **הארגומנט** של z:

$$\arg(z):=\{\operatorname{Arg}(z)+2\pi m:\ m\in\mathbb{Z}\}$$

זו פונקציה **רב-ערכית** $\arg:(\mathbb{C}\setminus\{0\})\to\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

טענה 1.4. יהי $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, אזי $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ אם ורק אם $z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ או $|z|=1$.

1.3 נוסחת דה-מואבר ופתרון משוואות

טענה 1.5. אם $z_1=r_1e^{i\theta_1},z_2=r_2e^{i\theta_2}$ כאשר $r_1,r_2\geq 0$ אזי:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

מסקנה 1.1 (נוסחת דה-מואבר). לכל $z=re^{i\theta}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$z^n=r^ne^{i(n\theta)}$$

מסקנה 1.2. הפתרונות של המשוואה $z^n = re^{i\theta}$ נתונים על ידי

$$z_j = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi j}{n}\right)}, j \in [n-1] \cup \{0\}$$

פרק 2

טופולוגיה של המישור המרוכב

2.1 $\mathbb{C}$ כמרחב מטרי

טענה 2.1 (**תכונות של הערך המוחלט**). לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים

1. $|z|=|\overline{z}|,\ \ |z|=|-z|$.
2. (אי-שוויון המשולש) $|z+w|\le|z|+|w|$.
3. (שוויון המקבילית) $|z-w|^2+|z+w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$.
4. $z=0 \iff |z|=0$.

מסקנה 2.1. הפונקציה $d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to[0,\infty)$ הנתונה ע"י $d(z,w)=|z-w|$ היא **מטריקה** על $\mathbb{C}$.

הגדרה 2.1. תהי $\{z_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathbb{C}$ סדרה.

1. נאמר כי $\{z_n\}$ **מתכנסת** ל-$z\in\mathbb{C}$ ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z$ אם $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n-z|=0$.
2. נאמר כי $\{z_n\}$ **שואפת לאינסוף** ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$ אם $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\infty$.

טענה 2.2. תהי $\{z_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathbb{C}$ סדרה ו-$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=z$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\Re(z_n)=\Re(z)$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty}\Im(z_n)=\Im(z)$.

הגדרה 2.2. תהי $\{z_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathbb{C}$ סדרה, נאמר כי $\{z_n\}$ **סדרת קושי**, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m,n\ge N$ מתקיים $|z_n-z_m|<\varepsilon$.

טענה 2.3. תהי $\{z_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathbb{C}$ סדרה, אזי קיים $z\in\mathbb{C}$ כך ש-$\{z_n\}$ מתכנסת ל-z אם ורק אם $\{z_n\}$ סדרת קושי.

הגדרה 2.3. תהי $\{z_n\}_{n=1}^\infty\subseteq\mathbb{C}$ סדרה, הביטוי $\sum\limits_{n=1}^\infty z_n$ נקרא **טור**. נאמר כי הטור $\sum\limits_{n=1}^\infty z_n$ **מתכנס** אם סדרת הסכומים החלקיים $S_n=\sum\limits_{k=1}^n z_k$ היא סדרה מתכנסת.

הגדרה 2.4. נאמר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **מתכנס בהחלט** אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ מתכנס. אחרת, נאמר כי הטור **מתכנס בתנאי**.

טענה 2.4. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} \Re(z_n)$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} \Im(z_n)$ מתכנסים.

טענה 2.5. יהי $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ותהי $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C}$ סדרה כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|\mathrm{Arg}(z_n)| \leq \alpha$. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ מתכנס בהחלט אם ורק אם הוא מתכנס.

2.2 קבוצות פתוחות וקבוצות סגורות במישור

הגדרה 2.5 (דיסקים). יהי $z \in \mathbb{C}$ ויהי $r > 0$.

- **הדיסק הפתוח** סביב z ברדיוס r מוגדר להיות

$$D_z(r) = B(z,r) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}$$

- **הדיסק הסגור** סביב z ברדיוס r מוגדר להיות

$$\overline{D_z}(r) = \overline{B}(z,r) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : |z-w| \leq r\}$$

- **הדיסק המנוקב** סביב z ברדיוס r מוגדר להיות

$$D_z^*(r) = B^*(z,r) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : 0 < |z-w| < r\}$$

הגדרה 2.6. תהא קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$.

- A תקרא **פתוחה** אם לכל $z \in A$ קיים $r > 0$ כך ש-$B(z,r) \subseteq A$.
- $z \in A$ תקרא **נקודה פנימית** (או **נקודת פנים**) של A אם קיים $r > 0$ כך ש-$B(z,r) \subseteq A$. אוסף נקודות הפנים של הקבוצה A נקרא **הפנים** של A ומסומן $\mathrm{Int}(A)$ או $\mathring{A}$.

הגדרה 2.7. תהא $w \in \mathbb{C}$, קבוצה $U \subseteq \mathbb{C}$ נקראת **סביבה** של w אם $w \in \mathrm{Int}(U)$.

הגדרה 2.8. קבוצה $U \subseteq \mathbb{C}$ נקראת **סביבת** ∞ אם קיים $R > 0$ כך ש-$\{|z| > R\} \subseteq \mathrm{Int}(U)$.

הגדרה 2.9. קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ תקרא **סגורה** אם A^c קבוצה פתוחה.

טענה 2.6 (**תכונות של קבוצות פתוחות וסגורות**). מתקיים:

1. לכל קבוצת אינדקסים I ואוסף $\{A_i\}_{i\in I}$ של קבוצות פתוחות גם $\bigcup_{i\in I} A_i$ פתוחה.
2. לכל $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות פתוחות גם $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ פתוחה.
3. לכל קבוצת אינדקסים I ואוסף $\{A_i\}_{i\in I}$ של קבוצות סגורות גם $\bigcap_{i\in I} A_i$ סגורה.
4. לכל $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות סגורות גם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ סגורה.

5. $E \subseteq \mathbb{C}$ סגורה אם ורק אם לכל סדרה מתכנסת $\{z_n\} \subseteq E$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in E$.

הגדרה 2.10. לכל $z \in \mathbb{C}$ ולכל $r > 0$ נסמן

$$R(z,r) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : \max\{|\Re(w) - \Re(z)|, |\Im(w) - \Im(z)|\} < r\}$$

טענה 2.7. לכל $z \in \mathbb{C}$ ו-$r > 0$ מתקיים:

1. $R(z,r)$ קבוצה פתוחה.
2. $B(z,r) \subseteq R(z,r) \subseteq B\big(z, \sqrt{2}r\big)$.

מסקנה 2.2 (ריבועים הם בסיס טופולוגי של $\mathbb{C}$). קבוצה $G \subseteq \mathbb{C}$ היא פתוחה אם ורק אם לכל $z \in G$ קיים $d > 0$ כך ש-$R(z,d) \subseteq G$.

הגדרה 2.11. **השפה** של קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ היא הקבוצה $\partial A \coloneqq (\mathrm{Int}(A))^c \cap (\mathrm{Int}(A^c))^c$.

הגדרה 2.12. **הסגור** של $A \subseteq \mathbb{C}$ זו הקבוצה $\overline{A} = A \cup \partial A$.

הגדרה 2.13. נקודה $z \in \mathbb{C}$ נקראת **נקודת הצטברות** (accumalation point) של $A \subseteq \mathbb{C}$ אם לכל $r > 0$ מתקיים $A \cap B(z,r) \neq \emptyset$.

טענה 2.8. נקודה $z \in \mathbb{C}$ היא נקודת הצטברות של $A \subseteq \mathbb{C}$ אם ורק אם קיימת סדרה $\{z_n\} \subseteq A$ כך ש-$z_n \to z$.

טענה 2.9 (**תכונות של פנים וסגור**). תהא $A \subseteq \mathbb{C}$. אזי:

1. הקבוצה $\mathrm{Int}(A)$ היא פתוחה.
2. הקבוצה $\overline{A}$ היא סגורה.
3. הקבוצה ∂A היא סגורה ומתקיים $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$.
4. A סגורה אם ורק אם $A = \overline{A}$.
5. מתקיים

$$\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ is an accumalation point of } A\}$$

2.3 קומפקטיות

הגדרה 2.14. קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ תקרא **חסומה** אם קיים $r > 0$ כך ש-$A \subseteq B(0,r)$.

למה 2.1 (היינה-בורל). תהי $K \subseteq \mathbb{C}$, אז התנאים הבאים שקולים:

1. לכל סדרה $\{z_n\} \subseteq K$ קיימת תת-סדרה $\{z_{n_k}\}$ מתכנסת ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} z_{n_k} \in K$.
2. לכל כיסוי פתוח של K קיים תת-כיסוי סופי.
3. K סגורה וחסומה.

הגדרה 2.15. קבוצה $K \subseteq \mathbb{C}$ תקרא **קומפקטית** אם היא מקיימת את אחד התנאים לעיל.

טענה 2.10. לכל $K_1, \ldots, K_n$ קומפקטיות מתקיים כי $\bigcup_{i=1}^n K_i$ קומפקטית.

2.4 גבולות של פונקציות ופונקציות רציפות

הגדרה 2.16 (הגדרות הגבול). תהי $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, תהי $f: G \to \mathbb{C}$ פונקציה, יהי $z_0 \in G$ ויהי $w \in \mathbb{C}$.

1. נאמר כי f **שואפת ל-w בנקודה** z_0 אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $0 < \delta$ כך שלכל $z \in G$ כך ש-$0 < |z - z_0| < \delta$ מתקיים $|f(z) - w| < \varepsilon$.
   באופן שקול, אם לכל U סביבה של w מתקיים כי $f^{-1}(U) \cup \{z_0\}$ היא סביבה של z_0.
   במקרה זה, נסמן $\lim_{z \to z_0} f(z) = w$.
2. נאמר כי f **שואפת ל-w באינסוף** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $R > 0$ כך שלכל $z \in G$ כך ש-$|z| > R$ מתקיים $|f(z) - w| < \varepsilon$.
   במקרה זה, נסמן $\lim_{z \to \infty} f(z) = w$.
3. נאמר כי f **שואפת לאינסוף בנקודה** z_0 אם לכל $M > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $z \in G$ כך ש-$0 < |z - z_0| < \delta$ מתקיים $|f(z)| > M$
   במקרה זה, נסמן $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.
4. נאמר כי f **שואפת לאינסוף באינסוף** אם לכל $M > 0$ קיים $R > 0$ כך שלכל $z \in G$ כך ש-$|z| > R$ מתקיים $|f(z)| > M$
   במקרה זה, נסמן $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

הגדרה 2.17. תהי $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, תהי $f: G \to \mathbb{C}$ פונקציה. אז f **רציפה ב-G** אם לכל $z_0 \in G$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $z \in G$ כך ש-$|z - z_0| < \delta$ מתקיים $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

טענה 2.11. f רציפה ב-$G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה אם ורק אם לכל $U \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה.

משפט 2.1 (ווירשטראס). תהי $K \subseteq \mathbb{C}$ קומפקטית ו-$f: K \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה, אז $f(K)$ קומפקטית.

טענה 2.12. תהי $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה ויהי $w \in \mathbb{C}$. אזי $\lim_{z\to\infty} f(z) = w$ אם ורק אם $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w$.

2.5 קשירות

משפט 2.2. תהי $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, אז התנאים הבאים שקולים:

1. G קשירה פוליגונלית. כלומר, לכל $a, b \in G$ קיימים $a_1, \ldots, a_n \in G$ ו-$a_0 = a, a_{n+1} = b$ כך שלכל $0 \le i \le n$ מתקיים $[a_i, a_{i+1}] \subseteq G$ כאשר
$$[z, w] \coloneqq \{\, (1-t)z + tw : \ t \in [0,1] \,\}$$
2. לכל U, V פתוחות כך ש-$G = U \cup V$ ו-$U \cap V = \emptyset$ מתקיים $(U, V) \in \{(G, \emptyset), (\emptyset, G)\}$.
3. אם f רציפה וקבועה מקומית (כלומר לכל $z \in G$ קיים $r > 0$ כך ש-$f|_{B(z,r)}$ קבוצה), אז f קבועה.

הגדרה 2.18. אם $G \subseteq \mathbb{C}$ מקיימת אחד מהתנאים לעיל נאמר כי היא **קשירה**.

הגדרה 2.19. קבוצה $G \subseteq \mathbb{C}$ נקראת **תחום** (region או domain) אם היא פתוחה וקשירה.

טענה 2.13. יהי G תחום, ותהי $f: G \to \mathbb{C}$ פונקציה רציפה. אם $f(G)$ פתוחה אז היא קשירה.

טענה 2.14. אם γ מסילה פוליגונלית בתוך קבוצה פתוחה $D \subset \mathbb{C}$. נתונה $f: D \to \mathbb{C}$ וכדורים $B_1, \ldots, B_n$ בהם f קבועה. אם $\gamma \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$, אז f קבועה על γ.

פרק 3

פולינומים

הגדרה 3.1. נסמן ב-$\mathbb{F}[x]$ את **אוסף כל הפולינומים במשתנה** x מעל השדה $\mathbb{F}$.

$$\mathbb{F}[x] = \{\, a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n :\, n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}\}$$

הגדרה 3.2. פולינום $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ נקרא **ממשי** אם $a_k \in \mathbb{R}$ לכל $k \in [n] \cup \{0\}$, כלומר אם $P \in \mathbb{R}[z]$.

משפט 3.1 (המשפט היסודי של האלגברה). כל פולינום $P \in \mathbb{C}[z]$ מדרגה ≤ 1 מתפצל לגורמים ליניאריים. כלומר, אם P מדרגה n, קיים $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ו-$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ לא בהכרח שונים כך ש-$P(z) = c(z - a_1) \cdots (z - a_n)$.

טענה 3.1. יהי $P \in \mathbb{C}[z]$.

1. P ממשי אם ורק אם $P(x) \in \mathbb{R}$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
2. אם P ממשי, α הוא שורש של P אם ורק אם $\overline{\alpha}$ שורש של P.
3. קיימים ויחידים $S, Q \in \mathbb{R}[z]$ כך ש-$P = S + iQ$.

טענה 3.2. יהא P פולינום, ונניח כי כל האפסים של P נמצאים בחצי המישור העליון $\mathbb{H} = \{\Im(z) > 0\}$. נרשום $P = S + iQ$ כאשר $S, Q \in \mathbb{R}[z]$. אז ל-S, Q אין אפסים משותפים וכל האפסים שלהם ממשיים.

פרק 4

הנגזרת המרוכבת

4.1 הגדרה ותכונות

הגדרה 4.1. תהי $f \in G \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, $z \in G$. f תיקרא **גזירה במובן המרוכב ב-z** אם קיים הגבול

$$\boldsymbol{f^{'}(z)} \triangleq \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

ערך הגבול יקרא **הנגזרת של f בנקודה** z.

הגדרה 4.2. f **אנליטית/הולומורפית ב-G** אם היא גזירה במובן המרוכב בכל $z \in G$.
נסמן ב-$\mathrm{Hol}(D)$ את קבוצת כל הפונקציות ההולומורפיות בתחום D.

הגדרה 4.3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ נקראת **שלמה** אם היא הולומורפית ב-$\mathbb{C}$.

טענה 4.1 **(אריתמטיקה של נגזרות)**. אם f, g גזירות, $c \in \mathbb{C}$.

1. $(cf)^{'} = c \cdot f^{'}$.
2. $(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$.
3. $(fg) = f^{'}g + fg^{'}$.
4. אם $g, g^{'} \neq 0$ אז $\left(\frac{f}{g}\right)^{'} = \frac{f^{'}g - fg^{'}}{g^2}$.
5. **כלל השרשרת:** אם g גזירה ב-z ו-$w = g(z)$, f גזירה ב-w. אז

$$(f \circ g)^{'}(z) = g^{'}(z) f^{'}(g(z)).$$

6. f רציפה.

4.2 משוואות קושי-רימן

משפט 4.1 (קושי-רימן). תהא $f = u + iv : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ גזירה ב-$z = x + iy \in \mathbb{C}$, אזי מתקיימות **משוואות קושי-רימן**:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

הוכחה. נניח ש-f גזירה $z = (x, y)$. נרשום

$$f = u + iv,\ \ u, v \in G \to \mathbb{R}$$

ניקח את $h \to 0$ פעם בציר ה-x, פעם בציר ה-y.

$h = k \to 0$, $k \in \mathbb{R}$, אז

$$\begin{aligned} f^{'}(z) &= \lim_{k \to 0} \frac{f(z+k) - f(z)}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{u(x+k, y) + iv(x+k, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{k} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

כלומר

$$f^{'}(z) = u_x + iv_x$$

$h = i\ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, אז

$$f^{'}(z) = \lim_{\ell \to 0} \frac{u(x, y+\ell) + iv(x, y+\ell) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\ell} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

כלומר

$$f^{'}(z) = -iu_y + v_y = v_y - iu_y$$

לכן, אם f גזירה ב-z, אז:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

■

משפט 4.2. תהא $f : G \to \mathbb{C}$, כך ש-G פתוחה, ו-$f = u + iv$.

1. אם $f \in \mathrm{Hol}(G)$ אז היא מקיימת את משוואות קושי-רימן.
2. אם $u, v \in C^1(G)$ ו-f מקיימת את משוואות קושי-רימן אז $f \in \mathrm{Hol}(G)$.

הוכחה. את 1 הוכחנו. נוכיח את 2.

נניח כי u_x, u_y, v_x, v_y קיימים ורציפים ומקיימים קושי-רימן.

נניח $h = k + i\ell$, נניח $h \to 0$, כלומר $k, \ell \to 0$.

נסמן $z=(x,y)\in G$, אז מהגדרת הנגזרת של חדו"א 1 , וכיוון שהנגזרת רציפה קיימת $\varepsilon_1=o(h)$:

$$u(x+k,y+\ell)-u(x,y)=\underbrace{u_x}_{\alpha}\cdot k+\underbrace{u_y}_{\beta}\cdot\ell+\varepsilon_1(k,\ell)$$

באופן דומה ל-v:

$$v(x+k,y+\ell)-v(x,y)=-\beta\cdot k+\alpha\cdot\ell+\varepsilon_2(k,\ell)$$

לכן:

$$\begin{aligned}f(z+h)-f(z)&=\alpha k+\beta\ell+i(-\beta k+\alpha\ell)+\varepsilon_1+\varepsilon_2\\&=(\alpha-i\beta)(k+i\ell)+\varepsilon_1+\varepsilon_2\\&=(\alpha-i\beta)h+\varepsilon_1+\varepsilon_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\longrightarrow\alpha-i\beta=u_x-iu_y=u_x+iv_x=u_x+iv_x=v_y-iv_y$$

■

משפט 4.3. $f:G\to\mathbb{C}$, G פתוחה וקשירה (תחום - Domain).
אם $\forall z\in G.\ f'(z)=0$ אז f קבועה.

משפט 4.4. $f:G\to\mathbb{C}$ גזירה, G תחום.
אם אחת הפונקציות $|f|,\Re(f),\Im(f)$ קבועות, אז f קבועה.

למה 4.1. אם $u\in G\to\mathbb{R}$ גזירה במובן הממשי.
ו-

$$\forall z\in G.\ u_x,u_y\equiv0$$

אז u קבועה.

הוכחה. צ"ל שלכל $z_1,z_2\in G$ $u(z_1)=u(z_2)$. מספיק להוכיח עבור z_1,z_2 שהקו הישר ביניהם מוכל ב-G.
אם הקו מקביל לציר ה-x וה-y, סיימנו מחדו"א 1.
אחרת, u קבועה מקומית. ■

הוכחת משפט 4.3. $f'\equiv0 \Leftarrow u_x,u_y\equiv0$ מקושי רימן, $v_x,v_y\equiv0$
מלמה 4.1, u,v קבועות ב-G. ■

הוכחת משפט 4.4.
- נניח $u\equiv\text{const}$, אז $u_x,u_y\equiv0$.
מקושי-רימן $v_x,v_y\equiv0 \Leftarrow f$ קבועה.
- נניח $u^2+v^2\equiv\text{const}$.
נגזור לפי x ו-y:

$$\begin{cases}2u\cdot u_x+2v\cdot v_y=0\\2u\cdot u_y+2v\cdot v_y=0\end{cases}$$

לכן מקושי-רימן:

$$\begin{cases} uu_x - 2vu_y = 0 & / \cdot v \\ vu_x + uu_y = 0 & / \cdot u \end{cases}$$

$$\begin{cases} uvu_x - v^2u_y = 0 \\ uvu_x + u^2u_y = 0 \end{cases} \Rightarrow (u^2+v^2)u_y = 0 \Rightarrow u_y \equiv 0 \overset{\text{C-R}}{\Rightarrow} v_x \equiv 0$$

ובאופן דומה מקושי רימן:

$$u_x, v_y \equiv 0.$$

- $v \equiv \text{const}$ סימטרי למקרה הראשון.

■

טענה 4.2. תהינא $f, g \in \mathrm{Hol}(G)$ כאשר G תחום. אם $\Re(f) = \Im(g)$ אז קיים $c \in \mathbb{C}$ כך ש-$g = if + c$.

טענה 4.3. תהי $f = u + iv$ פונקציה שלמה ונניח שקיימת $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה כך ש-$v = g \circ u$. אזי f קבועה.

טענה 4.4. תהי $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה שמקיימת את משוואות קושי-רימן. אז בקואורדינטות פולאריות מתקיים:

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

טענה 4.5. לא קיימת $v : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}$ כך שהפונקציה $f(z) = \ln|z| + iv(z)$ הולומורפית ב-$\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

משפט 4.5 (Schwarz-Clairaut). תהי $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, אם f גזירה פעמיים ברציפות בסביבת הנקודה $p \in \Omega$ אז לכל $1 \le i \le j \le n$ מתקיים

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$$

טענה 4.6. תהי $f = u + iv$ הולומורפית בתחום G ונניח כי $u, v \in C^2(G)$. אזי u, v הרמוניות כלומר מקיימות את משוואת לפלאס:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \Delta v := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

4.3 קונפורמיות

הגדרה 4.4. מסילה ב-$\mathbb{C}$ זו העתקה $\gamma : I \to \mathbb{C}$ רציפה, כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע מוכלל.

הגדרה 4.5. נאמר שמסילה $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **גזירה** ב-$t_0 \in I$, אם $\Re\gamma$ ו-$\Im\gamma$ גזירים ב-t_0 (במובן הממשי).
זה שקול לכך שהגבול

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

קיים וסופי.
γ גזירה ב-I אם היא גזירה בכל $t_0 \in I$.
נאמר שהיא **גזירה ברציפות** אם הנגזרת $\gamma^{'}(t)$ רציפה ב-I.
γ נקראת **רגולרית** ב-$t_0 \in I$, אם גזירה ב-t_0 ו-$\gamma^{'}(t_0) \neq 0$.

הגדרה 4.6. אם $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{C}, \gamma_2 : I_2 \to \mathbb{C}$ שתי עקומות שנחתכות בנקודות $t_1 \in I_1, t_2 \in I_2$ בהתאמה, כלומר ש-$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$.
ונניח כי γ_1, γ_2 רגולריות ב-t_1, t_2 בהתאמה. אז **הזווית α ביניהם** בנק' החיתוך היא הזווית בין המשיקים:

$$\alpha \triangleq \operatorname{Arg}\Big(\gamma_1^{'}(t_1)\Big) - \operatorname{Arg}\Big(\gamma_2^{'}(t_2)\Big)$$

הגדרה 4.7. תהי $f : G \to \mathbb{C}$ פונקציה, G תחום ו-$z_0 \in G$. f נקראת **משמרת זווית** או **קונפורמית** בנקודה z_0 אם לכל $\gamma_1 : I_1 \to G$ ו-$\gamma_2 : I_2 \to G$ עקומות גזירות כך ש-$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z_0$, ו-$\gamma_1, \gamma_2$ רגולריות ב-t_1, t_2 בהתאמה, המסילות $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ רגולריות ב-t_1, t_2 בהתאמה והזווית בין γ_1 ל-γ_2 שווה לזווית בין $f \circ \gamma_1$ ל-$f \circ \gamma_2$.

משפט 4.6. תהא $f \in \operatorname{Hol}(D)$, ו-$\gamma$ מסילה ב-D.
אם γ גזירה ב-t_0, אז גם $f \circ \gamma$ גזירה ב-t_0 ו-$(f \circ \gamma)^{'}(t_0) = f^{'}(\gamma(t_0)) \cdot \gamma^{'}(t_0)$.
אם γ רגולרית ב-t_0, ו-$f^{'}(\gamma(t_0)) \neq 0$, אז $f \circ \gamma$ רגולרית ב-t_0. וזווית הוקטור המשיק למסילה היא:

$$\alpha = \arg f^{'}(\gamma(t_0)) + \arg \gamma^{'}(t_0)$$

מסקנה 4.1. תהא $f : G \to \mathbb{C}$.

1. אם f הולומורפית אז f קונפורמית בכל $z_0 \in G$ כך ש-$f^{'}(z_0) \neq 0$.
2. אם f קונפורמית אז f הולומורפית ו-$f^{'}$ לא מתאפסת.

פרק 5

העתקות מביוס

הגדרה 5.1. העתקת מביוס היא העתקה $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ מהצורה

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

כאשר $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ומתקיים $ad - bc \neq 0$.

טענה 5.1. כל העתקת מביוס היא הרכבה של העתקות מן הצורה:

1. **מתיחה**

$$z \mapsto kz, 0 < k \in \mathbb{R}$$

2. **סיבוב**

$$z \mapsto \lambda z, \lambda \in \mathbb{C} \wedge |\lambda| = 1$$

3. **הזזה**

$$z \mapsto z + b, b \in \mathbb{C}$$

4. **אינוורסיה**

$$z \mapsto \frac{1}{z}$$

5.1 הטלה סטריאוגרפית

הגדרה 5.2 (הטלה סטריאוגרפית). יהי

$$S^2 := \left\{ (x, y, q) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + q^2 = 1 \right\}$$

כדור היחידה ב-$\mathbb{R}^3$, ויהי $N := (0, 0, 1)$ הקוטב הצפוני. נזהה את $\mathbb{C}$ כחלק מ-$\mathbb{R}^3$ דרך ההעתקה $z = x + iy \mapsto (x, y, 0)$. **הטלה סטריאוגרפית** היא ההעתקה

$$\Phi : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$$

שמוגדרת לכל $z \in \mathbb{C}$ ע"י נקודת החיתוך של S^2 שאינה N, עם הקו ℓ_z שעובר ב-z, N. באופן מפורש

$$\Phi(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\Im(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}\right)$$

טענה 5.2. קיימת ההעתקה הפוכה להטלה הסטריאוגרפית $\Phi^{-1} : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ כך שלכל $(\xi, \zeta, \lambda) \in S^2 \setminus \{N\}$ מתקיים

$$\Phi^{-1}(\xi, \zeta, \lambda) = \frac{\xi + i\zeta}{1-\lambda}$$

משפט 5.1. תחת הטלה סטריאוגרפית של $\mathbb{C}$:

1. **קו המשווה** $S^2 \supseteq \{\lambda = 0\}$ מתאים **למעגל היחידה** $\mathbb{C} \supseteq \{|z| = 1\}$.
2. **חצי הספירה הדרומית** $S^2 \supseteq \{\lambda < 0\}$ מתאימה **לדיסק היחידה הפתוח** $\mathbb{C} \supseteq \{|z| < 1\}$.
3. **חצי הספירה הצפונית** $S^2 \supseteq \{\lambda > 0\}$ מתאימה **לחוץ של דיסק היחידה** $\mathbb{C} \supseteq \{|z| > 1\}$.
4. כל **מעגל** ב-S^2 שלא עובר בקוטב הצפוני מתאים **למעגל** ב-$\mathbb{C}$.
5. כל **מעגל** שלא עובר **בקוטב הדרומי** $(0, 0, -1)$ ב-S^2 מתאים **לקו ישר** ב-$\mathbb{C}$.

5.2 המרחב הפרויקטיבי המרוכב

הגדרה 5.3 (המרחב הפרויקטיבי המרוכב). יהי

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : \; z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

המרחב הוקטורי המרוכב ממימד 2. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ לפי

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \; \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

כל מחלקת שקילות תסומן $\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right]_\sim =: [z_1, z_2]$ והיא מייצגת **קו** במרחב$\mathbb{C}^2$. **המרחב הפרויקטיבי המרוכב** מוגדר להיות

$$\mathbb{C}P^1 := {}^{\left(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\right)} /_\sim$$

הגדרה 5.4. נסמן ב-π את "ההטלה" $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^1$:

$$\pi \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = [z_1, z_2]$$

טענה 5.3. הפונקציה $\varphi : \mathbb{C}P^1 \to \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ המוגדרת לכל $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ ע"י

$$\varphi([z_1, z_2]) = \begin{cases} \frac{z_1}{z_2}, & z_2 \neq 0 \\ \infty, & z_2 = 0 \end{cases}$$

היא הפיכה וההופכית לה היא $\varphi^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}P^1$ הנתונה לכל $z \in \overline{\mathbb{C}}$ ע"י:

$$\varphi^{-1}(z) = \begin{cases} [z, 1], & z \in \mathbb{C} \\ [1, 0], & z = \infty \end{cases}$$

הגדרה 5.5. תהא $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ הפיכה, אזי היא מגדירה העתקה לינארית על $\mathbb{C}P^1$ ע"י

$$[z_1, z_2] \mapsto [az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2] \sim M[z_1, z_2]$$

תחת הזיהוי $\varphi : \mathbb{C}P^1 \to \overline{\mathbb{C}}$ נגדיר את **ההעתקה המביוס** המתאימה לה

$$h_M(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \qquad z \in \overline{\mathbb{C}}$$

עם הקונבנציה כי עבור $c = 0$, נגדיר $h_M(\infty) = \infty$. ועבור $c \neq 0$ נגדיר $h_M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ $h_M(\infty) = c,$.

משפט 5.2. תהינא $M_1, M_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ הפיכות. אזי

$$h_{M_1} \circ h_{M_2} = h_{M_1 M_2}, \qquad h_M^{-1} = h_{M^{-1}}$$

טענה 5.4. אם $\lambda M \neq I$ לכל $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ו-M הפיכה, אז מספר נקודות השבת של h_M הוא 1 או 2.

סיבה.

$$h_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

אם $c = 0$, אז $h_M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. יש נקודת שבת אחת ב-$z = \infty$.
אם $c \neq 0$, אז צריך לפתור את המשוואה:

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \Rightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

ולמשוואה הזאת יש פתרון אחד או 2. ∎

משפט 5.3 (3 נקודות קובעות העתקת המביוס). לכל $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ שונות ו-$w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ שונות, קיימת ויחידה העתקת מביוס h כך ש-$h(z_i) = w_i$ $\forall i \in [3]$.

הוכחה. **יחידות** נניח שיש 2 כאלו h_1, h_2 אז $h := h_1^{-1} \circ h_2$ מקיימת $h(z_i) = z_i$ $\forall i \in [3]$.
מטענה קודמת נובע ש-$h_1 = h_2$.
קיום ראשית נוכיח עבור מקרה פרטי בו $w_1 = \infty, w_2 = 0, w_3 = 1$.

ו-z_1, z_2, z_3 כלשהן

$$h(z) = \begin{cases} \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_1)(z_2-z_3)} & z_1, z_2, z_3 \neq \infty \\ \frac{z-z_2}{z_3-z_2} & z_1 = \infty \\ \frac{z_3-z_1}{z-z_1} & z_2 = \infty \\ \frac{z-z_2}{z-z_1} & z_3 = \infty \end{cases}$$

עבור המקרה הכללי, w_1, w_2, w_3 שונות כלשהן.

ניקח $h_1 : (z_1, z_2, z_3) \hookrightarrow (\infty, 0, 1)$

ו-$h_2 : (w_1, w_2, w_3) \hookrightarrow (\infty, 0, 1)$

ואז ההעתקה הדרושה היא

$$.h_2^{-1} \circ h_1$$

■

הגדרה 5.6 מעגל מוכלל זהו או מעגל ב-$\mathbb{C}$ או קו ישר ב-$\overline{\mathbb{C}}$.

משפט 5.4. העתקת מביוס מעבירה מעגלים מוכללים למעגלים מוכללים.

הוכחה. נכון לכל שלושת העתקות מתיחה,סיבוב והזזה. צריך לבדוק רק ל- $z \mapsto \frac{1}{z}$.

משוואת מעגל מוכלל:

$$\alpha|z|^2 + \beta\Re(z) + \gamma\Im(z) + \delta = 0, \ \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

וזה ישר ב-$\alpha = 0$.

אם $z = \frac{1}{w}$ אז נקבל:

$$\frac{\alpha}{|w|^2} + \frac{\beta\Re w}{|w|^2} - \frac{\gamma\Im w}{|w|^2} + \delta = 0$$

$$\delta|w|^2 + \beta\Im w - \gamma\Im w + \alpha = 0$$

וזו שוב משוואת מעגל מוכלל. ■

דוגמה 5.1 (העתקת Cayley החביבה).

$$\phi(z) = \frac{z+i}{z-i}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi(-i) &= 0 \\ \phi(i) &= \infty \\ \phi(0) &= -1 \\ \phi(\infty) &= 1 \end{aligned}$$

$$z \mapsto \begin{cases} x \in \mathbb{R} & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ e^{i\theta} & z \in \mathbb{R} \\ 1 & z = \infty \end{cases}$$

חצי המישור העליון $H_+\{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ וחצי המישור התחתון $H_- = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$ עוברים ל-:

$$\phi(H_+) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$
$$\phi(H_-) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

טענה 5.5. כל העתקת מביוס שמעתיקה את דיסק היחידה לעצמו היא מהצורה $f(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ כאשר $|\lambda| = 1$ ו-$a \in \mathbb{D}$.

פרק 6

פונקציות אלמנטריות וענפים

6.1 האקספוננט המרוכב

הגדרה 6.1. לכל $z = x + iy \in \mathbb{C}$ נגדיר את **הפונקציה המעריכית**:

$$\boldsymbol{e^z} \triangleq e^x(\cos y + i \sin y)$$

טענה 6.1 (**תכונות הפונקציה המעריכית**).
1. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^z \neq 0$,
2. לכל $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$,
3. לכל $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$,
4. $e^z|_{\mathbb{R}} = e^x$ (מחדו"א 1).
5. לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $|e^z| = e^{\Re(z)}$

הערה 6.1. e^z בעלת מחזור $2\pi i$:

$$\forall z \in \mathbb{C}.\ e^z = e^{z+2\pi i}.$$

משפט 6.1. $f(z) = e^z \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$.

הוכחה. נסמן $f = u + iv$, אז:

$$u = u(x,y) = e^x \cos y$$
$$v = v(x,y) = e^x \sin y$$

ברור כי $u, v \in C(\mathbb{C})$, גם כן:

$$u_x = e^x \cos y u_y = -e^x \sin y$$
$$v_x = e^x \sin y v_y = e^x \cos y$$

ואכן $u_x = v_y, u_y = -v_x$. ■

6.2 הפונקציות הטריגונומטריות

הגדרה 6.2. לכל $z \in \mathbb{C}$ נגדיר:

$$\boldsymbol{\sin z} \triangleq \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\boldsymbol{\cos z} \triangleq \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

סיבה.

$$\sin z|_{\mathbb{R}} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$$
$$\cos z|_{\mathbb{R}} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

■

מסקנה 6.1. $\sin z, \cos z \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$.

6.3 הלוגריתם

הגדרה 6.3. $\mathrm{Log}(\boldsymbol{z}) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ מוגדרת לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ על ידי:

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$$

6.4 ענפים של פונקציות הולומורפיות

הגדרה 6.4. תהא קבוצה פתוחה $U \subset \mathbb{C}$, ו-$f : U \to f(U)$. פונקציה $g : f(U) \to U$ תיקרא **הפוכה ימנית של f** אם

$$\forall z \in f(U).\ \ f(g(z)) = z$$

הגדרה 6.5. תהי $f : U \to \mathbb{C}$ הולומורפית כאשר $U \subset \mathbb{C}$ פתוחה, ו-$D \subset f(U)$ תחום. **ענף של f^{-1} ב-D** זו פונקציה $g : D \to \mathbb{C}$ רציפה והפכית ימנית של f.

טענה 6.2. תהא $f \in \mathrm{Hol}(U)$, g ענף של f^{-1} ב-$D \subset f(U)$. תהא $z_0 \in D$ ונסמן $w_0 = g(z_0)$.
אם $f^{'}(w_0) \neq 0$ אז g גזירה ב-z_0 ומתקיים

$$g^{'}(z_0) = \frac{1}{f'(w_0)}$$

הוכחה. לפי הרציפות:

$$g^{'}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{f(w) - f(w_0)} \overset{f^{'}(w_0) \neq 0}{=} \lim_{w \to w_0} \frac{1}{\frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0}} = \frac{1}{f'(w_0)}$$

■

6.4.1 ענפים של Log

משפט 6.2. אם L ענף של פונקציית $\log$ בתחום D, אז כל ענף אחר ב-D הוא מן הצורה $L^{'}(z)=L(z)+2\pi ik$, כאשר $k\in\mathbb{Z}$.

הוכחה. $L^{'}(z)=\frac{1}{e^{L(z)}}=\frac{1}{z}$.
ואם L_1 ענף אחר אז גם $L_1^{'}(z)=\frac{1}{z}$.
לכן $(L-L_1)^{'}=0$ בכל $z\in D$ ולכן $L-L_1$ קבועה ב-D.
בנוסף

$$e^{L(z)-L_1(z)}=1$$

לכן קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש-$L_1-L=2\pi ik$ לכל $z\in D$. ■

6.4.2 ענפים של ההפכית של $z^p\mapsto z$ כאשר $2\le p\in\mathbb{Z}$

דוגמה 6.1. $g(z)=\sqrt[p]{|z|}e^{i\frac{\operatorname{Arg}(z)}{p}}$ ענף ב-$\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.
נבחין:

$$f^{'}(z)=pz^{p-1}$$

ולפיכך $z=0\iff f^{'}(z)=0$ ולכן אם g ענף של f^{-1} ב-D אז $0\notin D$

$$g^{'}(z)=\frac{1}{f^{'}(g(z))}=\frac{1}{p(g(z))^{p-1}}=\frac{g(z)}{pz}$$

משפט 6.3. אם $g:D\to\mathbb{C}$ ענף של $\sqrt[p]{z}$ בתחום D שבו היא הולומורפית. אז יש בדיוק p ענפים שונים של $\sqrt[p]{z}$ ב-D וכל אחד מהן הצורה $c\cdot g$, כאשר c שורש יחידה.

$$\left(\xi_k\triangleq c=e^{\frac{2\pi i}{p}k},k=0,\dots,p-1\right)$$

הוכחה. ברור ש- $\xi_k g$ הן ענפים שונים.
יהי h ענף, ראשית נשים לב ש-$0\notin D$ ו-$0\notin h(D)$.
כי $\forall z\in D.\ h(z)^p=z \Leftarrow ph(z)^{p-1}h^{'}(z)=1$, אם $0\in D$ אז $h(z)=0$ וזו סתירה.
באופן דומה $pg(z)^{p-1}g^{'}(z)=1$ לכן אין $z\in D$ עבורו $g(z)=0$.
נסמן $\ell(z)\triangleq\frac{h(z)}{g(z)}$ הולומורפית ב-D

$$\forall z\in D.\ \ell(z)\neq 0$$

ו-$\ell(z)^p=1$, נגזור: $p\ell(z)^{p-1}\ell^{'}(z)=0$
$\Leftarrow\forall z\in D.\ \ell^{'}(z)=0$
$\Leftarrow\ell$ פונקציה קבועה כי (D תחום), $\ell\equiv c$
$\Leftarrow c^p=1$, ולכן c שורש יחידה מסדר p. ■

6.4.3 ענפים של חזקת $\lambda\in\mathbb{C}$

הגדרה 6.6. יהי $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $D\subset\mathbb{C}$ תחום שיש בו ענף L של $\log$ ב-D.

לכל $z \in D$ נגדיר

$$h_{\lambda,L}(z) = e^{\lambda L(z)}$$

פרק 7

טורים וטורי חזקות

הגדרה 7.1. תהא $\{c_n\} \subset \mathbb{C}$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ יקרא **מתכנס** אם סדרת הסכומים החלקיים $\left\{\sum_{n=0}^{N} c_n\right\}_N$ מתכנסת ל-$S \in \mathbb{C}$.

טענה 7.1 (**קריטריון קושי להתכנסות**). תהא $\{c_n\}_n \subset \mathbb{C}$. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס אם ורק אם

$$\forall \varepsilon > 0.\ \exists N_0 \in \mathbb{N}.\ \forall N > M > N_0.\ \left|\sum_{n=M}^{N} c_n\right| < \varepsilon$$

טענה 7.2. אם $|c| < 1$ אז $\sum_{n=0}^{\infty} c^n = \frac{1}{1-c}$.

הגדרה 7.2. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ **מתכנס בהחלט** אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ מתכנס.

טענה 7.3. אם טור מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס.

הגדרה 7.3. $\{g_n\}$ סדרת פונקציות מרוכבות, $g_n : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.
נאמר ש-g_n **מתכנסת במידה שווה** על S אם קיימת $g : S \to \mathbb{C}$ כך ש-

$$\sup_{z \in D} |g_n(z) - g(z)| \to 0$$

הגדרה 7.4. $\{g_n\}$ מתכנסת **במ"ש מקומית** על קבוצה פתוחה G אם לכל $z \in G$ יש סביבה של z ב-G בה $\{g_n\}$ מתכנסת במ"ש.

הגדרה 7.5. טור הפונקציות $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש ב-S אם סדרת הסכומים החלקיים $\left\{\sum_{n=0}^{N} f_n\right\}_N$ מתכנסת במ"ש ב-S.
באופן דומה גם מוגדרת התכנסות במ"ש מקומית.

משפט 7.1 (מבחן M של ויירשטראס). אם $f_n : S \to \mathbb{C}$ סדרת פונקציות, ו-$M_n \geq 0$ סדרת מספרים אי-שליליים.
אם

$$\forall n \forall z \in S.\ |f_n(z)| \leq M_n$$

ו-$\sum M_n < \infty$ אז $\sum f_n$ מתכנס במ"ש.

הגדרה 7.6. טור חזקות הוא טור פונקציות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

הגדרה 7.7. **רדיוס ההתכנסות** של טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ ע"

$$\boldsymbol{R} \triangleq \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

נתמקד במקרה $z_0 = 0$.

משפט 7.2. יהי טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ בעל רדיוס התכנסות R.

1. לכל $|z| < R$ הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש מקומית על $\{|z| < R\}$.
2. אם $|z| > R$ אז $\limsup|a_n z^n| = \infty$.
3. בתחום $\{|z| < R\}$, פונקציית הגבול $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ הולומורפית ו-

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

הוכחה.

1. לכל $0 < r < R$ נוכיח במ"ש ב-$D_0(r)$ ע"י קריטריון ווירשטראס עם $M_n = q^n$ כאשר ניקח $\frac{r}{R} < q < 1$, אז

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} |z| \underset{\forall n \geq N_0}{\leq} q \Rightarrow |a_n||z|^n \leq q^n = M_n$$

לכן הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש מקומית ב-$D_0(R)$.

2. אם $|z| > R$ וניקח $|z| > r > R$ ואז סדרה r_k

$$|a_{r_k}|^{\frac{1}{r_k}} \cdot |z| \geq \frac{r}{R}$$

3. נגדיר $f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, היא בעלת רדיוס התכנסות R, ולכן f_1 מוגדרת ב-$D_0(R)$ לפי 1. נסמן $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ כך ש-$f(z) = P_n(z) + R_n(z)$ כאשר $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$.

$$f_1(z) = \lim_{n \to \infty} P_n'(z)$$

נכתוב:

$$\frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} - f_1(\xi) = \frac{P_n(z) - P_n(\xi)}{z - \xi} - P_n'(\xi) + P_n'(\xi) - f_1(\xi) + \frac{R_n(z) - R_n(\xi)}{z - \xi}$$

נבחר r כך ש- $|\xi| < r < R$, אז יש $\delta = \delta(\xi, n)$ כך ש-

$$\left| \frac{P_n(z) - P_n(\xi)}{z - \xi} - P_n'(\xi) \right| < \varepsilon$$

אם $|z - \xi| < \delta$.

$$\left| P_n'(\xi) - f_1(\xi) \right| < \varepsilon$$

כש-$n > N_0 = N_0(\xi)$.

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(\xi)}{z - \xi} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k - \xi^k}{z - \xi} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \left(z^{k-1} + z^{k-2}\xi + \ldots + z\xi^{k-2} + \xi^{k-1} \right) \right|$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot k \cdot r^{k-1} < \infty$$

■

מסקנה 7.1 (משפט טיילור).

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

פרק 8

אינטגרציה מרוכבת

8.1 אינטגרל רימן

הגדרה 8.1. תהא $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ כך ש-$\Re\varphi, \Im\varphi$ אינטגרביליות רימן, אז נגדיר את **אינטגרל רימן** באופן הבא

$$\int_a^b \varphi(t)dt \triangleq \int_a^b \Re\varphi(t)dt + i\int_a^b \Im\varphi(t)dt$$

טענה 8.1 (**תכונות של אינטגרל רימן**).
1. ליניאריות:

$$\int (c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\int \varphi_1 + c_2\int \varphi_2$$

2. אם φ גזירה ברציפות אז

$$\int_a^b \varphi^{'}(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

3.

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \le \int_a^b |\varphi(t)|dt$$

הוכחה. נניח ש-

$$\int_a^b \varphi(t)dt \neq 0$$

ונסמן

$$\lambda = \frac{\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right|}{\int_a^b |\varphi(t)|dt}$$

$$|\lambda| = 1$$

אז

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| = \int_a^b \lambda\varphi(t)dt = \Re\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b \Re(\lambda\varphi(t))dt$$

ואז לפי משפט מחדוא 2:

$$\left|\int_a^b \varphi(t)dt\right| \leq \int_a^b |\Re(\lambda\varphi(t))|dt \leq \int_a^b |\lambda\varphi(t)|dt = \int_a^b |\varphi(t)|dt$$

■

הגדרה 8.2. נניח ש-$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ רציפה וגזירה למקוטעין. **האורך של** γ מוגדר להיות:

$$\text{Len}(\gamma) \triangleq \int_a^b \left|\gamma^{'}(t)\right|dt$$

8.2 האינטגרל המרוכב

הגדרה 8.3. תהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ רציפה וחלקה למקוטעין (גזירה מקוטעין כך שנגזרתה רציפה איפה שהיא גזירה).
אם f מוגדרת על התמונה $\gamma([a,b])$ נגדיר את **האינטגרל המרוכב**

$$\int_\gamma f(z)dz \triangleq \int_a^b f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt$$

הערה 8.1. נחלק את $[a,b]$ ל-$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ ונסמן:

$$\forall 0 \leq k \leq n.\ \gamma_k := \gamma(t_k)$$

ונבחר $\xi_k \in \gamma([t_k, t_{k+1}])$, נביט בסכום

$$R_n := \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k))$$

אזי $R_n \to \int_\gamma f(z)dz$ כאשר $\max_k|t_{k+1} - t_k| \to 0$ לכל בחירה של ξ_k.

טענה 8.2 (**תכונות של האינטגרל המרוכב**).
1. לכל $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים:

$$\int_\gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2)dz = c_1\int_\gamma f_1 dz + c_2\int_\gamma f_2 dz$$

2. אם נתונה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ו-$a < c < b$, $\gamma_1 = \gamma_{|_{[a,c]}} : [a,c] \to \mathbb{C}, \gamma_2 = \gamma_{|_{[c,b]}} : [c,b] \to \mathbb{C}$ אז:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

3. בהינתן $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ נגדיר את $-\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ע"י:

$$(-\gamma)(t)=\gamma(b+a-t)$$

ואז:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz=-\int\limits_{-\gamma} f(z)dz$$

4.

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right|\leq \text{Len}(\gamma)\cdot\sup_{z\in\gamma}|f(z)|$$

טענה 8.3. אם G קבוצה פתוחה ו-$f,F:G\to\mathbb{C}$ כך ש-$f\in C(G),F\in \text{Hol}(G)$ ונניח ש-$F^{'}=f$ (במקרה זה נאמר ש-F פונקציה קדומה של f).
אם $\gamma:[a,b]\to G$ חלקה למקוטעין, אז:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$$

הוכחה.

$$\int\limits_{\gamma} fdz=\int\limits_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt=\int\limits_{a}^{b} F^{'}(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt=\int\limits_{a}^{b} F(\gamma(t))^{'}dt=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))$$

■

מסקנה 8.1. אם $f:G\to\mathbb{C}$ רציפה כך שקיימת לה קדומה בכל G, אז לכל מסילה סגורה מתקיים:

$$\int\limits_{\gamma} fdz=0$$

מסקנה 8.2. אם $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ רציפות ו-$f_n\to f$ במ"ש על γ, אז:

$$\int\limits_{\gamma} f_n dz\to\int\limits_{\gamma} fdz$$

סיבה.

$$\left|\int\limits_{\gamma} f-\int\limits_{\gamma} f_n dz\right|=\left|\int\limits_{\gamma}(f-f_n)dz\right|\leq \text{Len}(\gamma)\cdot\sup_{z\in\gamma}|f_n(z)-f(z)|\to 0$$

■

מסקנה 8.3. אם $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ טור חזקות המתכנס ב-$D_0(R)$.
אז לכל מסילה סגורה $\gamma\subset D_0(R)$ מתקיים:

$$\int\limits_{\gamma} f=0$$

סיבה. ניקח $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1}$ ואז $F^{'}=f$ ב-$D_0(R)$.
לכן משום שרדיוס ההתכנסות של F הוא זה של f:

$$\int\limits_{\gamma} f=0$$

■

הגדרה 8.4. תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ חלקה למקוטעין, נאמר ש-$\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{C}$ היא **רה-פרמטריזציה** של γ אם קיימת $\beta:[a_1,b_1]\to[a,b]$ עולה חח"ע ועל, חלקה למקוטעין כך ש-

$$\gamma_1=\gamma\circ\beta$$

טענה 8.4. אם f רציפה ומוגדרת על γ, ו-γ_1 רה-פרמטריזציה של γ אז

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz=\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz$$

סיבה.

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1^{'}(t)dt=\int\limits_{a_1}^{b_1} f(\gamma(\beta(t)))\gamma^{'}(\beta(t))\beta^{'}(t)dt$$
$$=\begin{bmatrix} s=\beta(t) \\ ds=\beta^{'}(t)dt \end{bmatrix}=\int\limits_{a}^{b} f(\gamma(s))\gamma^{'}(s)ds=\int\limits_{\gamma} f(z)dz$$

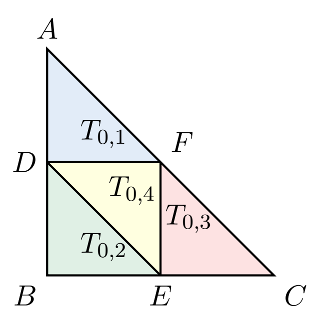
■

8.3 משפט קושי

משפט 8.1 (הלמה של Goursat). תהא G קבוצה פתוחה ו-$f\in\text{Hol}(G)$.
נניח ש-T משולש כך ש-$T\subseteq G$. ותהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ עקומה כך ש-$\gamma([a,b])=\partial T$.
אז

$$\int\limits_{\partial T} f(z)dz=\int\limits_{\gamma} f(z)dz=0$$

הוכחה. נסמן $T_0=T$. מ-T נבנה ארבעה משולשים חדשים $T_{0,1},T_{0,2},T_{0,3},T_{0,4}$ ע"י סימון שלוש נקודות אמצע על צלעות T וחיבורן בשלושה קווים ישרים:



אז כאשר כל המסילות נגד כיוון השעון נקבל:

$$\int_{\partial T_0} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial T_{0,,j}} f(z)dz$$

כיוון שלכל צלע פנימית האינטגרל מתבצע עליה פעם אחת בכיוון חיובי, ופעם אחת בכיוון שלילי אז האינטגרלים מתבטלים.
נסמן:

$$I := \int_{\partial T_0} f(z)dz$$

לכן יש $j \in [4]$ כך ש-

$$\left| \int_{\partial T_{0,j}} fdz \right| \geq \frac{1}{4}|I|$$

נקרא למשולש זה T_1.
נשים לב כי $\text{Len}(\partial T_1) = \frac{1}{2}\text{Len}(\partial T_0)$, כיוון ש-$T_{0,j} \sim T_0$ לכל $j \in [4]$.
נחלק את T_1 באופן דומה ל-$T_{1,j}$. $\forall j \in [4]$ ונקבל כי קיים $j \in [4]$ כך ש-

$$\left| \int_{\partial T_{1,j}} fdz \right| \geq \frac{1}{4}\left| \int_{\partial T_1} fdz \right| \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}|I| = \frac{1}{4^2}|I|$$

נקרא למשולש זה T_2 ולכן גם $\text{Len}(\partial T_2) = \frac{1}{2}\text{Len}(\partial T_1) = \frac{1}{4}\text{Len}(\partial T_0)$.
נמשיך את התהליך ונקבל כך סדרת משולשים $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$, מקוננים ומקיימים:

1.
$$\left| \int_{\partial T_n} fdz \right| \geq \frac{|I|}{4^n}$$

2.
$$\text{Len}(\partial T_n) = 2^{-n}\text{Len}(\partial T_0)$$

כיוון ש-T_n קבוצות קומפקטיות מקוננות, קיימת $z_\infty \in G$ כך ש-$\bigcap_{n=0}^{\infty} T_n = \{z_\infty\}$.
לכן $z_\infty \in G$ ו-f גזירה בה. לכן:

$$\lim_{z \to z_\infty} \frac{\overbrace{f(z) - f(z_\infty) - f^{'}(z_\infty)(z - z_\infty)}^{E(z)}}{z - z_\infty}$$

ומכאן שניתן לכתוב :

$$f(z) = f(z_\infty) + f^{'}(z_\infty)(z - z_\infty) + E(z)$$

כך ש-

$$\lim_{z \to z_\infty} \frac{E(z)}{z - z_\infty} = 0$$

לכן מלינאריות האינטגרל:

$$\int_{\partial T_n} fdz = \int_{\partial T_n} f(z_\infty)dz + \int_{\partial T_n} f'(z_\infty)(z-z_\infty)dz + \int_{\partial T_n} E(z)dz$$

שני הראשונים מתאפסים כפי שראינו ביום חמישי (ניוטון-לייבניץ) כי יש שם קדומה.
לכל n נסמן:

$$\varepsilon_n := \sup_{z\in\partial T_n}\left|\frac{E(z)}{z-z_\infty}\right|$$

ולכן $\varepsilon_n \to 0$. לכן:

$$\left|\int_{\partial T_n} E(z)dz\right| \leq \mathrm{Len}(\partial T_n)\cdot \sup_{z\in\partial T_n}|E(z)| \leq 2^{-n}\cdot \mathrm{Len}(\partial T_0)\cdot\varepsilon_n\cdot \sup_{z\in\partial T_n}|z-z_\infty| \leq \mathrm{Len}(\partial T_0)^2\varepsilon_n 4^{-n}$$

ולכן:

$$\forall n\in\mathbb{N}.\ |I| \leq \mathrm{Len}(\partial T_0)^2\varepsilon_n \to 0$$

ולכן $I=0$. ■

משפט 8.2 (קושי). יהי $D_R(0)\subset\mathbb{C}$ דיסק, ו-$f: D_R\to\mathbb{C}$ הולומורפית ב-$D_R(0)$. תהא γ מסילה סגורה, $\gamma\subset D_R(0)$, חלקה למקוטעין. אז

$$\int_\gamma fdz = 0$$

הוכחה. נסמן $[z_0,z] = \{(1-t)z_0+tz:\ t\in[0,1]\}$, נבחר את z_0 להיות נק' קבועה ב-D_R. נראה של-f יש קדומה. נגדיר:

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw$$

נוכיח ש-$F'=f$, וסיימנו ממסקנה מיום חמישי.
תהא z_1 נק' נוספת, אז לפי הלמה של Goursat:

$$\int_{[z_0,z_1]} fdw + \int_{[z_1,z]} fdw + \int_{[z,z_0]} fdw = 0$$

לכן:

$$F(z)-F(z_1) = -\int_{[z_1,z]} f(w)dw$$

$$\frac{F(z)-F(z_1)}{z-z_1} - f(z_1) = \frac{1}{z-z_1}\int_{[z,z_1]} (f(w)-f(z_1))dw$$

נקבע $\varepsilon > 0$, כיוון ש-f רציפה קיים $\delta > 0$ כך ש-

$$|f(w) - f(z_1)| < \varepsilon$$

כש-$|w - z_1| < \delta$.
לכן אם $|z - z_1| < \delta$ אז כל $w \in [z, z_1]$ מקיים $|w - z_1| < \delta$, ולכן:

$$\left|\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1)\right| < \frac{1}{|z - z_1|}\varepsilon|z - z_1| = \varepsilon$$

כלומר ש-

$$F^{'}(z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z_1)$$

■

הערה 8.2. למעשה, הוכחנו, תחת תנאים אלו של-f יש קדומה ב-D, כלומר $f : D \to \mathbb{C}$ גזירה כך ש-$F'(z) = f(z)$. $\forall z \in D$.
הגדרנו

$$F(z) := \int\limits_{[z_0,z]} f(w)dw$$

אותה הוכחה עובדת אם D קבוצה קמורה, כלומר אם $z_0, z_1 \in D$ אז $[z_0, z_1] \subset D$.

8.4 נוסחת קושי

משפט 8.3. נניח ש-$f : G \to \mathbb{C}$ הולומורפית בקבוצה הפתוחה G, ו-$\overline{D} \subset G$ דיסק.
אז לכל $z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi$$

כאשר ∂D נגד כיוון השעון.

הערה 8.3. אינטגרל זה אינו 0 תמיד כי $\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$ כפונקציה של ξ **אינה** הולומורפית ב-D.

הערה 8.4. כש-$f \equiv C \in \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{C}{\xi - z_0}d\xi = C$$

הוכחה. נקבע $z_0 \in D$ וראשית נוכיח באמצעות משפט קושי (8.2)

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi = \int\limits_{\partial D(z_0,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi \tag{8.1}$$

כאשר $D_\varepsilon = D(z_0, \varepsilon)$, לכל $\varepsilon > 0$ כך ש-$\overline{D_\varepsilon} \subset D$.
נבחר את 4 הנקודות שבהן הצירים שיוצאים מ-z_0 חותכים את D_ε ונגדיר 4 מסילות חדשות שיבטלו אחד את השני.

מהחלוקה שציירנו (לא ציירתי):

$$\sum_{i=1}^{4}\int\limits_{\gamma_i}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi-\int\limits_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi$$

לפי משפט קושי, לכל $i\in[4]$

$$\int\limits_{\gamma_i}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=0$$

כיוון ש-γ_i מוכלת בתוך קבוצה קמורה G בה הפונקציה $\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}$ הולומורפית (G - חיתוך על המישור בין שתי נקודות ב-γ_i והדיסק D).

ולכן בשיוויון האחרון צד שמאל הוא 0, וזה מוכיח את (1). עתה:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi-f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(\xi)-f(z_0)}{\xi-z_0}d\xi$$

אבל $\lim_{\xi\to z_0}\frac{f(\xi)-f(z_0)}{\xi-z_0}=f'(z_0)$, לכן האינטגרל חסום

$$\sup_{\varepsilon>0,\xi\in\partial D_\varepsilon}\left|\frac{f(\xi)-f(z_0)}{\xi-z_0}\right|<\infty$$

ולכן

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi\overset{(1)}{=}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=f(z_0)$$

כלומר

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}d\xi=f(z_0)$$

■

8.5 משפט הערך הממוצע

משפט 8.4. נניח ש-$f:G\to\mathbb{C}$ הולומורפית בקבוצה הפתוחה G, ו-$\overline{D}\subset G$ דיסק.
אז לכל $z_0\in D$ מתקיים:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f\big(z_0+re^{it}\big)dt$$

הוכחה. מנוסחת קושי

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{f(\gamma(t))}{re^{it}}\gamma'(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}f\big(z_0+re^{it}\big)dt$$

■

כלומר, $f(z_0)$ הוא ממוצע ערכיה של f על $\partial D(z_0,r)$.

אם $f=u+iv$, אז אותו דבר מתקיים ל-u ו-v.

8.6 אינטגרלי קושי

הגדרה 8.5 (אינטגרל קושי). תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ חלקה למקוטעין ו-$\phi:\gamma\to\mathbb{C}$. נגדיר את **אינטגרל קושי של ϕ על** γ כפונקציה $F:\mathbb{C}\setminus\gamma\to\mathbb{C}$ ע"י:

$$F(z):=\int\limits_{\gamma}\frac{\phi(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

למה 8.1. F הולומורפית ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$ ובנוסף, גזירה אינסוף פעמים ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$F^{(n)}(z)=n!\int\limits_{\gamma}\frac{\phi(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

יתר על כן, ניתן לפתח את F לטור חזקות סביב כל $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$ בעל רדיוס התכנסות שהוא $\operatorname{dist}(z_0,\gamma)=\inf\limits_{p\in\gamma}d(z_0,p)$.

הוכחה. נבחר $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma$, ונסמן $\delta=\operatorname{dist}(z_0,\gamma)$.

יהי $z\in(\mathbb{C}\setminus\gamma)\cap D(z_0,\delta)$, נבחין כי לכל $\xi\in\gamma$:

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$$

לכן משום ש-$\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|<1$:

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}$$

ולכן

$$\frac{\phi(\xi)}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}$$

זהו טור חזקות במשתנה z סביב z_0 בעל רדיוס התכנסות δ.

לכן, (אם $f_n\to f$ במ"ש על γ אז $\int_\gamma f_n\to\int_\gamma f$):

$$F(z)=\int\limits_{\gamma}\frac{\phi(\xi)}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int\limits_{\gamma}\frac{\phi(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}$$

לכן לפי משפט גזירה איבר-איבר F הולומורפית וגזירה אינסוף פעמים, ויש לה טור טיילור, לכן מהשוואת מקדמים:

$$\forall n\in\mathbb{N}.\ \frac{F^{(n)}(z_0)}{a_n}=\int\limits_{\gamma}\frac{\phi(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

למה $f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\phi(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ מתכנס במ"ש?

$$|f(\xi)-f_N(\xi)|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\phi(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right|\le\max_{p\in\gamma}\phi(p)\cdot\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\delta^n}{\delta^{n+1}}\to 0$$

■

מסקנה 8.4. אם f הולומורפית בקבוצה פתוחה G, $z_0\in G$ וניקח $0<r$ כך ש-$r<\operatorname{dist}(z_0,\partial G)$.
אז מנוסחת קושי:

$$f(z)=\int_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(\xi)/2\pi i}{\xi-z}d\xi$$

לכן עבור $\phi(\xi)=\frac{f(\xi)}{2\pi i}$, מהלמה f גזירה אינסוף פעמים ומתקיים:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(z_0,r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$$

ולכל $z_0\in G$,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}$$

כטור חזקות בעל רדיוס התכנסות לפחות $\operatorname{dist}(z_0,\partial G)$.

משפט 8.5 (משפט Morera). תהא G קבוצה פתוחה, ונניח ש-$f:G\to\mathbb{C}$ רציפה.
ונניח שלכל משולש $\overline{T}\subset G$ שמוכל כולו ב-G מתקיים:

$$\int_{\partial T}f(z)dz=0$$

אז f הולומורפית.

הוכחה. נניח בה"כ ש-G דיסק.
ראינו שהתנאי $\int_{\partial T}fdz=0$ גורר שיש קבועה ל-f ב-G.
כלומר, יש $F:G\to\mathbb{C}$ הולומורפית ו-$F'=f$.
אך ממסקנה 2 נובע ש-f הולומורפית. ■

מסקנה 8.5. אם $f:G\to\mathbb{C}$ רציפה, הולומורפית ב-$G\setminus\{z_0\}$ אז היא הולומורפית ב-G.

סיבה. נוודא את תנאי משפט Morera. יהי T משולש שמוכל כולו ב-G.
אם $z_0\notin T$, אז

$$\int_{\partial T}fdz=0$$

אם $z_0\in\operatorname{int}T$ נחלק את T לשני משולשים בהם z_0 על השפה ונחבר את האינטגרלים ונעבור למקרה האחרון.
אם $z_0\in\partial T$ ניקח γ_ε שעוקפת את z_0 (צלעות המשולש כאשר מחליפים מקטע בחצי מעגל סביב z_0 עם הכיוון החיובי ברדיוס ε).

אז

$$\left|\int_{\partial T} f dz - \int_{\gamma_\varepsilon} f dz\right| = \left|\int_{\partial T - \gamma_\varepsilon} f dz\right| \le \pi\varepsilon \max_{z\in\partial T} f(z) \to 0$$

כאשר $\varepsilon \to 0$, וכיוון ש-γ_ε מסילה סגורה ובה"כ G דיסק, לכן לכל $\varepsilon > 0$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f dz = 0 \implies \int_{\partial T} f dz = 0 \underset{\text{Morera}}{\implies} f \in \text{Hol}(\{z_0\})$$

■

תרגיל. יהי $I \subset D$ (D דיסק) קטע ב-$\mathbb{C}$ ו-f הולומורפית ב-$D \setminus I$ ורציפה ב-D.
הוכיחו כי f הולומורפית ב-D.

8.7 משפט ההערכה של קושי

משפט 8.6 (משפט ההערכה של קושי). אם f הולומורפית ב-$D(z_0, R)$ אז לכל $0 < r < R$ ולכל $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!}{r^n} \max_{z\in D(z_0,r)} |f(z)|$$

סיבה. ראינו.

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi\right| \le \frac{n!}{r^{n+1}} \cdot \frac{2\pi r}{2\pi} \max_{z\in D(z_0,r)} |f(z)|$$

■

8.8 משפט ליוביל

משפט 8.7 (משפט ליוביל). אם f הולומורפית ב-$\mathbb{C}$, וחסומה. אז f קבועה.

הוכחה. אם $\forall z \in \mathbb{C}.\ |f(z)| \le M$ אז ממשפט ההערכה של קושי עם $n = 1$:

$$\forall r > 0.\ \left|f'(z)\right| \le \frac{1}{r} \cdot M$$

לכן אם $r \to \infty$ נקבל כי $f' \equiv 0$, ולכן f קבועה. ■

משפט 8.8 (המשפט היסודי של האלגברה). כל פולינום עם מקדמים מרוכבים שאינו קבוע ניתן לפרק לגורמים ליניארים.

הוכחה. מספיק להוכיח קיום שורש. יהי $p = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ פולינום, וודאי שהוא פונקציה הולומורפית.
נניח שהוא ממעלה ≥ 1 ונניח בשלילה כי אין לו שורשים. אז $h(z) = \frac{1}{p(z)} \in \text{Hol}(\mathbb{C})$.
כמו כן,

$$\lim_{z\to\infty} |p(z)| = \lim_{z\to\infty} |a_n z^n| \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{z^n}\right| = \infty$$

לכן h חסומה, לכן מליוביל קבועה, לכן p קבועה בסתירה להנחה. $\blacksquare$

פרק 9

משפט היחידות, עיקרון המקסימום, הלמה של שוורץ

9.1 משפט היחידות

משפט 9.1 (יחידות 1). יהי G תחום ותהא $f \in \mathrm{Hol}(G)$.
אם קיימת $a \in G$ כך ש-$f(a) = 0$ ולכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים, $f^{(n)}(a) = 0$, אז $f \equiv 0$.

הוכחה. נסמן:

$$U = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \exists 1 \leq n \in \mathbb{N}.\ f^{(n)}(z) = 0 \Big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{ z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \Big\}$$

U סגורה.
יהי $z_0 \in U$, f אנליטית ולכן קיים $R > 0$ כך שלכל $z \in D(z_0, R) \subset G$ מתקיים:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \overset{z_0 \in U}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!}(z - z_0)^n$$

ולכן $f|_{D(z_0,n)} \equiv 0 \Longleftarrow f^{(n)}|_{D(z_0,n)} \equiv$ אזי:

$$D(z_0, R) \subseteq U$$

U פתוחה וגם סגורה ולכן $U \neq \emptyset$ כי $a \in U$.
ולכן $U = G$. ■

הגדרה 9.1. תהא $G \subseteq \mathbb{C}$ פתוחה, ו-$0 \not\equiv f \in \mathrm{Hol}(G)$, $a \in G$.
אם $f(a) = 0$ אז a נקודת **אפס של f**.
הסדר של f בנק' a או הריבוי של a ב-f:

$$\mathrm{ord}_a(f) = m_f(a) = \min \Big\{ n \geq 1 : f^{(n)}(a) \neq 0 \Big\}$$

לפי משפט היחידות $m_f(a) < \infty$.

טענה 9.1. יהי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $a \in G$. ותהא $0 \not\equiv f \in \mathrm{Hol}(G)$.
נסמן $m = m_f(a)$, אזי קיימת $g \in \mathrm{Hol}(G)$, כך ש-$g(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$, וגם:

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

סיבה.

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)}{(z-a)^m} & z\neq a\\ \frac{f^{(m)}(a)}{m!} & z=a\end{cases}$$

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \implies g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+m)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

■

משפט 9.2 (יחידות 2). יהי $G\subseteq\mathbb{C}$ תחום ו-$f\in\mathrm{Hol}(G)$.
אם קיימת $G \supseteq \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$a\in G$ $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ $a\neq z_n$, ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(z_n)=0$, אז $f\equiv 0$.

הוכחה. נניח בשלילה כי $f\not\equiv 0$, מרציפות:

$$0=f(z_n)\to f(a)=0$$

נסמן $m=m_f(a)$, מטענה 9.1 קיימת $g\in\mathrm{Hol}(G)$ כך ש-$g(a)\neq 0$ וגם $f(z)=(z-a)^m g(z)$.

$$0=f(z_n)=(z_n-a)^m g(z_n) \implies 0=g(z_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(a)=0$$

וזו סתירה. ■

משפט 9.3 (משפט Weierstrass). תהא $G\subseteq\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathrm{Hol}(G)$.
תהא $f:G\to\mathbb{C}$ כך ש-f $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ f_n במ"ש מקומית.
אז $f\in\mathrm{Hol}(G)$ וגם לכל $j\geq 0$ מתקיים $f^{(j)}$ $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ $f_n^{(j)}$ במ"ש מקומית.

הוכחה. יהי $T\subseteq G$ משולש סגור, אזי $\sup_{\partial T}|f_n-f|\leq\sup_T|f_n-f|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.
f_n הולומורפיות, אז לפי קושי-גורסה:

$$\int_{\partial T} f_n(z)dz=0$$

גם כן:

$$\left|\int_{\partial T} f(z)dz\right|=\left|\int_{\partial T} f_n(z)dz-\int_{\partial T} f(z)dz\right|\leq \mathrm{Len}(\partial T)\cdot\sup_{\partial T}|f_n-f|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ולכן:

$$\int_{\partial T} f(z)dz=0$$

ולכן לפי משפט מוררה $f\in\mathrm{Hol}(G)$. יהי $z\in G$.
מההתכנסות במ"ש מקומית קיימת $\delta>0$ כך ש-

$$\sup_{\xi\in D(z,\delta)}|f_n(\xi)-f(\xi)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

יהי $w \in D\left(z,\frac{\delta}{2}\right)$, אז $D\left(w,\frac{\delta}{2}\right) \subseteq D(z,\delta)$, אז:

$$\sup_{w \in D\left(z,\frac{\delta}{2}\right)} \left|f_n^{(j)}(w) - f^{(j)}(w)\right| \leq \frac{j!}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j} \sup_{w \in D\left(z,\frac{\delta}{2}\right)} \sup_{\xi \in D\left(w,\frac{\delta}{2}\right)} |f_n(\xi) - f(\xi)| \leq \frac{j!}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^j} \sup_{\xi \in D(w,\delta)} |f_n(\xi) - f(\xi)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

■

9.2 עקרון המקסימום

משפט 9.4. תהא f הולומורפית בתחום G, אם $|f|$ מקבלת מקסימום מקומי ב-$z_0 \in G$ אז f קבועה.

הוכחה. נסמן $w(z) = |f(z)|$, $w : G \to \mathbb{R}$.
לפי משפט ההערך הממוצע:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z + re^{it}\right) dt$$

כך ש-$r > 0$ הוא דיסק כך ש-$D(z_0, r) \subseteq G$.
ולכן:

$$w(z_0) = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w\left(z_0 + re^{it}\right) dt$$

אם z_0 מקסימום מקומי של w, נסמן $m = w(z_0)$.
נקבע $r > 0$, אם הייתה נקודה $z \in \partial D(z_0, r)$ בה $w(z) < m$, אז:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w\left(z + re^{it}\right) dt < m$$

אך זאת סתירה כי $m \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w\left(z + re^{it}\right) dt$.
לכן w קבועה, אז מקושי רימן f קבועה. ■

9.3 הלמה של שוורץ

משפט 9.5. תהא $f : D(0,1) \to D(0,1)$ הולומורפית, ונניח כי $f(0) = 0$. אז לכל $z \in D(0,1)$:

1. $|f(z)| \leq |z|$
2. $\left|f'(0)\right| \leq 1$
3. אם $\left|f'(0)\right| = 1$ או קיימת $z_0 \in D(0,1)$ כך ש-$|f(z_0)| = |z_0|$,
אז קיימת $\lambda \in \partial D(0,1)$, כך ש-$f(z) = \lambda z$.

הוכחה. נגדיר $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$, ע"י:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

g רציפה ב-0, גזירה ב-$D(0,1)\setminus\{0\}$ ולכן לפי משפט Morrera היא גזירה ב-$D(0,1)$.
נקבע $z\in D(0,1)$, לכן יש $r>0$ כך ש-$|z|<r$, ואז

$$|g(z)|\le\max_{|w|=r}|g(w)|=\frac{1}{r}\max_{|w|=r}|f(w)|\le\frac{1}{r}\sup_{|w|=r}|f(w)|\le\frac{1}{r}$$

ניקח $r\to1^-$ ונקבל $|g(z)|\le1$, וזה שקול ל-$1,2$.
נוכיח את 3, אם קיימת $z_0\in D(0,1)$ כך ש-$|g(z_0)|=1$, אז ל-$|g|$ יש מקסימום ב-$D(0,1)$ ולכן לפי עיקרון המקסימום g קבועה ב-$D(0,1)$.
לכן קיימת $\lambda\in\mathbb{C}$ כך ש- $g(z)=\lambda$, ו-$|\lambda|=1$, כלומר $f(z)=\lambda z$. ■

פרק 10

טורי לורן

הגדרה 10.1. טור לורן סביב הנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$ נקבע ע"י סדרה $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ והוא:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

נאמר שהטור מתכנס ב-$z \in \mathbb{C}$ אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ מתכנס וגם $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ מתכנס.
נגדיר:

$$R_+ = \frac{1}{\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

ו-

$$R_- = \limsup|a_{-n}|^{\frac{1}{n}}$$

אם $R_- < R_+$ נקרא לטבעת (annulus)

$$A = A_{z_0}(R_-, R_+) = \{\, z \in \mathbb{C} :\ R_- < |z-z_0| < R_+ \,\}$$

טבעת ההתכנסות של הטור.

10.1 משפט לורן

משפט 10.1 (משפט לורן 1). יהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ טור לורן. נסמן

$$\Sigma_+ := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$
$$\Sigma_- := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$$

נניח כי $R_- < R_+$ ו-A טבעת ההתכנסות. אזי:

1. הטור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ אינו מתכנס ב-$\mathbb{C} \setminus \overline{A}$.

2. אם $R_+ > 0$, אז Σ_+ מתכנס במ"ש מקומית ב-$D(z_0,R_+)$ וסכומו פונקציה הולומורפית ב-$D(z_0,R_+)$.
3. אם $R_- > 0$, אז Σ_- מתכנס במ"ש מקומית ב-$\mathbb{C}\setminus\overline{D(z_0,R_-)}$ וסכומו פונקציה הולומורפית ב-$\mathbb{C}\setminus\overline{D(z_0,R_-)}$.
4. לכן אם $R_- < R_+$ הטור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ מתכנס בהחלט, במ"ש מקומית וסכומו פונקציה הולומורפית ב-$f : A \to \mathbb{C}$. ובנוסף:

$$\forall R_- < r < R_+.\ a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

הוכחה. (2) נובע מקושי-הדמר.
(1) ברור שאין התכנסות עבור $|z| > R_+$ כי Σ_+ לא מתכנס שם, נביט בטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ בעל רדיוס ההתכנסות

$$\frac{1}{\limsup|a_{-n}|^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{R_-}$$

לכן, אם $|w| > \frac{1}{R_-}$ אז הטור הנ"ל לא מתכנס.
נציב $w = \frac{1}{z-z_0}$, ונקבל שאם $|z-z_0| < R_-$ אז $|w| > \frac{1}{R_-}$ ולכן

$$\Sigma_- = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

אינו מתכנס. (3) אם $|w| < \frac{1}{R_-}$ אז הטור מתכנס במ"ש מקומית ולכן Σ_- מתכנס ב-$\mathbb{C}\setminus\overline{D(z_0,R_-)}$.
(4) לפי ווירשטראס ההתכנסות במ"ש מקומית, נוכיח את הנוסחה, לכל $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-k-1}$$

במ"ש, ולכן ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר:

$$\int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int\limits_{\partial D(z_0,r)} (z-z_0)^{n-k-1}dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\delta_{n,k} \int\limits_{\partial D(z_0,r)} (z-z_0)^{n-k-1}dz$$
$$= a_k 2\pi i \Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

■

משפט 10.2 (משפט לורן 2). תהא f הולומורפית ב-$A_{z_0}(a,b)$.
אזי הטור לורן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ מתכנס במ"ש מקומית ל-f ב-$A_{z_0}(a,b)$ כאשר לכל $n\in\mathbb{Z}, a<r<b$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

למה 10.1. אם f הולומורפית ב-$A_{z_0}(a,b)$ ולכל $a<r<b$, נסמן $C_r=\partial D(z_0,r)$. אז הפונקציה

$$I(r):=\int_{C_r} f dz$$

קבועה.

הוכחה. נראה כי $I(r_1)=I(r_2)$ לכל $a<r_1<r_2<b$, נחלק את $A_{z_0}(r_1,r_2)$ ל"מלבנים" $Rect$ עקומים כך שכל אחד מוכל בקב' קמורה שמוכלת ב-$A_{z_0}(a,b)$.
ממשפט קושי נובע ש-

$$\int_{\partial Rect} f dz=0$$

נחבר את האינטגרלים על כל ה"מלבנים", כל הצלעות הישרות במלבנים מתקזזות, מה שנותר הוא:

$$0=I(r_2)-I(r_r)$$

■

למה 10.2. אם f הולומורפית ב-$A_{z_0}(a,b)$, $\xi\in A_{z_0}(a,b)$, ו-$a<r_1<|\xi-z_0|<r_2<b$.
אז

$$f(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}}\frac{f(z)}{z-\xi}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(z)}{z-\xi}dz$$

הוכחה. נסמן

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi} & z\neq\xi\\ f'(\xi) & z=\xi\end{cases}$$

g הולומורפית ב-$A_{z_0}(a,b)$, לכן מלמה 1:

$$\int_{C_{r_1}} g=\int_{C_{r_2}} g\Rightarrow 0=\int_{C_{r_2}}\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}dz-\int_{C_{r_1}}\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}dz$$

כלומר:

$$0=\int_{C_{r_2}}\frac{f(z)}{z-\xi}dz-f(\xi)\underbrace{\int_{C_{r_2}}\frac{1}{z-\xi}dz}_{2\pi i\text{ by Cauchy}}-\int_{C_{r_1}}\frac{f(z)}{z-\xi}dz+f(\xi)\underbrace{\int_{C_{r_1}}\frac{1}{z-\xi}dz}_{0\text{ by Cauchy}}$$

ולכן:

$$f(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_2}}\frac{f(z)}{z-\xi}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{r_1}}\frac{f(z)}{z-\xi}dz$$

■

הוכחת משפט לורן 2 (10.2). מלמה 10.1, הביטוי שמגדיר את a_n לא תלוי ב-r, כי $\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\in\mathrm{Hol}(A)$.

תהא $z \in A$, נבחר r_1, r_2 כך ש-$R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$.

מלמה 10.2:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_2}} \frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_{r_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

נכתוב:

$$\frac{f(\eta)}{\eta - z} = \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\eta - z_0}} = \frac{f(\eta)}{\eta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\eta - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} f(\eta)\frac{(z - z_0)^n}{(\eta - z_0)^{n+1}}$$

תהי $\tilde{\eta}$ הנקודה הקרובה ביותר ל-z על $\partial D(z_0, r_2)$, לכן לכל $\eta \in \partial D(z_0, r_2)$ מתקיים:

$$\frac{|z - z_0|}{|\eta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r_2} = \frac{|\tilde{\eta} - z_0| - |\tilde{\eta} - z|}{r_2} = 1 - \frac{|\tilde{\eta} - z|}{r_2}$$

לכן ההתכנסות במ"ש ב-$\eta \in \partial D(z_0, r_2)$ ונוכל לבצע אינטגרציה איבר-איבר:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(z_0, r_2)} \frac{f(\eta)}{\eta - z}d\eta = \sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(z_0, r_2)} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}d\eta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

באופן דומה $\xi \in \partial D(z_0, r_1)$, נקבל $\frac{|\xi - z_0|}{|z - z_0|} < 1$ במ"ש ב-ξ.

נכתוב:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \frac{-f(\xi)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \frac{-f(\xi)}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} f(\xi)$$

ע"י אינטגרציה נקבל:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(z_0, r_1)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = -\sum_{n=-\infty}^{-1}(z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D(z_0, r_1)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

נסיק כי לכל $z \in A_{z_0}(r_1, r_2)$ מתקיים:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ניתן לקחת $r_1 \to R_1$ ו-$r_2 \to R_2$ כרצוננו ולכן:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

במ"ש מקומית ב-$A_{z_0}(R_1, R_2)$. ■

פרק 11

נקודות סינגולריות מבודדות של פונקציה הולומורפית

הגדרה 11.1. נגדיר את **הדיסק המנוקב** סביב z_0 ברדיוס $r > 0$:

$$D_{z_0}^*(r) := D_{z_0}(r) \setminus \{z_0\} = \{\, z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z - z_0| < r \,\}$$

הגדרה 11.2. נאמר ש-z_0 נקודה **סינגולרית מבודדת** של f אם קיים $r > 0$ כך ש-$f \in \mathrm{Hol}\big(D_{z_0}^*(r)\big)$.
במקרה של-f יש הרחבה הולומורפית לכל $D_{z_0}(r)$ נאמר ש-z_0 היא נקודה **סינגולרית סליקה**.

11.1 משפט ההמשכה של רימן

משפט 11.1. תהי $f \in \mathrm{Hol}\big(D_{z_0}^*(r)\big)$, אז z_0 נקודה סליקה אם ורק אם f חסומה-$D_{z_0}^*(\delta)$ עבור $0 < \delta < r$.

הוכחה. $\underline{\Leftarrow:}$ אם z_0 סליקה אז ההמשכה של f הולומורפית, בפרט רציפה ב-$D_{z_0}(\delta)$ עבור $\delta \in (0, r)$ ולכן חסומה.
$\underline{\Rightarrow:}$ נניח כי קיים $M > 0$ כך ש-$\sup_{z \in D_{z_0}(r)} |f(z)| \le M$.
נכתוב פיתוח לטור לורן ב-$D_{z_0}^*(r)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

נראה כי $a_n = 0$ לכל $n < 0$.
לכל $s \in (0, \delta)$ ו-$n \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_{z_0}(s)} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}} d\eta$$

מכך ש-f חסומה ב-$D_{z_0}(\delta)$ על ידי M אז בפרט גם ב-$D_{z_0}(s)$ ולכן:

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi s \cdot \frac{M}{s^{n+1}} = \frac{M}{s^n}$$

ולכן אם $n \le -1$ אזי:

$$\lim_{s \to 0} |a_n| = \lim_{n \to \infty} \frac{M}{s^n} = 0$$

קיבלנו:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

לכן $f(z_0)=a_0$ וזוהי פונקציה הולומורפית ב-$D_{z_0}(r)$ שזהה ל-f המקורית ב-$D^*_{z_0}(r)$. ■

מסקנה 11.1. z_0 סליקה אם ורק אם $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$ קיים וסופי.

11.2 סיווג נקודות סינגולריות

הגדרה 11.3. תהי $f\in \mathrm{Hol}\big(D^*_{z_0}(r)\big)$ ונכתוב פיתוח לטור לורן:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

אזי ישנם שלושה מקרים:

1. אם $a_n=0$ לכל $n<0$ אז z_0 סליקה (זאת בעצם טענה שכבר הוכחנו).
2. $a_n=0$ לכל $n<-N$ עבור $1\le N\in\mathbb{N}$ ו-$a_{-N}\neq 0$ כלומר:

$$f(z)=\frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots$$

נאמר ש-z_0 היא **קוטב מסדר N** של f.

3. $|\{1\le n\in\mathbb{N}:\ a_{-n}\neq 0\}|=\aleph_0$.
נאמר ש-z_0 נקודה סינגולרית **עיקרית** (essential singularity).

דוגמה 11.1.

1. $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, נראה כי $z_0=0$ **סליקה**.

$$f(z)=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}\Rightarrow a_n=0,\forall n<0$$

2. $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$, נראה כי $z_0=0$ סליקה.
e^z-1 שלמה ויש לה אפס פשוט ב-$z_0=0$, לכן קיימת פונק' שלמה g כך ש- $g(0)\neq 0$ כך ש-$e^z-1=zg(z)$.
לכן

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{1}{g(z)},\ \ z\neq 0$$

ו-$\frac{1}{g}$ היא ההמשכה של f בסביבת 0.

3. הפונק' $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ הנתונה ע"י $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

ולכן $z_0 = 0$ **סינגולרית עיקרית**.

טענה 11.1 (סיווג קטבים). נניח כי ל-f יש קוטב מסדר m בנקודה z_0 וקיים פיתוח לטור לורן ב-$D_{z_0}^*(r)$ כך ש-$a_{-m} \neq 0$:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

נסתכל על הפונקציה

$$g(z) \coloneqq (z - z_0)^m f(z)$$

לכן

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z - z_0)^n$$

כלומר z_0 סליקה עבור g ו-$g(z_0) \neq 0$.
בכיוון ההפוך, אם $g \in \mathrm{Hol}(D_{z_0}(r))$ ו-$g(z_0) \neq 0$ אז לפונקציה

$$f(z) = \frac{g(m)}{(z - z_0)^m}$$

יש קוטב מסדר m ב-z_0.

מסקנה 11.2. ל-f יש קוטב מסדר m ב-z_0 אם ורק אם קיימת $g \in \mathrm{Hol}(D_{z_0}(r))$ כך ש-$g(z_0) \neq 0$ ו-

$$\forall z \in D_{z_0}^*(r).\ f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

הערה 11.1.

1. אם ל-f יש אפס מסדר m בנק' z_0 אז ל-$\frac{1}{f}$ קוטב מסדר m ב-z_0.
2. אם ל-f קוטב מסדר m בנק' z_0 אז ל-$\frac{1}{f}$ יש נקודה סליקה ב-z_0 ולהרחבה שלה יש אפס מסדר m ב-z_0.

הוכחה.

1. לפי טענה 9.1 קיימת פונקציה $h : D_{z_0}(r) \to \mathbb{C}$ הולומורפית, $h(z_0) \neq 0$ כך ש-

$$f(z) = (z - z_0)^m h(z)$$

מרציפות, יש $\varepsilon > 0$ כך ש-$h \neq 0$ ב-$D_{z_0}(\varepsilon)$ ולכן

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{h(z)} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^m}$$

2. באופן דומה ל-1.

■

משפט 11.2. תהא $f \in \mathrm{Hol}\big(D_{z_0}^*(r)\big)$, אז ל-$f$ יש קוטב ב-z_0 אם ורק אם $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

בנוסף, סדר הקוטב הוא m המינימלי המקיים כי:

$$\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^m|f(z)|$$

קיים וסופי.

הוכחה. נניח כי ל-f יש קוטב מסדר m ב-z_0, לכן

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^m},\ \ g(z_0)\neq 0$$

לכל $\ell>0$ נחשב:

$$\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^\ell|f(z)|=\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^{\ell-m}|g(z)|=\begin{cases}\infty & \ell<m\\ |g(z_0)| & \ell=m\\ 0 & \ell>m\end{cases}$$

בכיוון השני, נניח כי $\lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$.
לכן קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $z\in D^*_{z_0}(\varepsilon)$ מתקיים $|f(z)|\geq 1$. נסמן

$$h(z)=\frac{1}{f(z)}\Rightarrow h\in\mathrm{Hol}\big(D^*_{z_0}(\varepsilon)\big)\wedge\forall z\in D^*_{z_0}(\varepsilon),\ \ |h(z)|\leq 1$$

אז לפי משפט ההמשכה של רימן, קיימת ל-h המשכה הולומורפית $h\in\mathrm{Hol}(D_{z_0}(\varepsilon))$, ונסיק כי

$$\lim_{z\to z_0}|h(z)|=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{|f(z)|}=0\Rightarrow h(z_0)=0$$

מכיוון ש-z_0 הוא אפס מבודד, נסמן ב-m את הריבוי שלו.
מהערה 11.1 ל-f יש קוטב מסדר m ב-z_0. ■

11.3 תמונה של פונקציה עם סינגולריות עיקרית

הגדרה 11.4. יהי G תחום, ותהא f הולומורפית ב-G פרט לנקודות סינגולריות מבודדות, אז f נקראת **מרומורפית (meromorphic)** אם **כל** הנקודות הסינגולריות הן סליקות או קטבים.

דוגמה. נסתכל על $f(z)=z\cos\frac{1}{z-1}$.
נפתח לטור לורן סביב $z_0=1$:

$$\cos\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}$$

נכתוב:

$$f(z)=[1+(z-1)]\cos\frac{1}{z-1}=(z-1)\cos\frac{1}{z-1}+\cos\frac{1}{z-1}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{1} a_n (z-z_0)^n \end{aligned}$$

כאשר:

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(-n)!} & -n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(-n+1)!} & -n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \\ 0 & n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \end{cases}$$

טענה 11.2. z_0 סינגולרית עיקרית אם ורק אם הגבול $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$ לא קיים במובן הרחב.

משפט 11.3 (Casorati-Weierstrass)**.** תהא $f \in \mathrm{Hol}\big(D^*_{z_0}(r)\big)$ ונניח כי z_0 נקודה סינגולרית עיקרית. אז

$$f\big(D^*_{z_0}(r)\big)$$

קבוצה **צפופה** ב-$\mathbb{C}$.

כלומר לכל $w \in \mathbb{C}$ קיימת סדרת נקודות $\{z_n\} \subset D^*_{z_0}(r)$ כך ש-$z_n \to z_0$ ו-$f(z_n) \to w$.

הוכחה. תהי $w \in \mathbb{C}$, ונניח בשלילה כי לא קיימת סדרה $\{z_n\}$ כזאת.
אז קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $z \in D^*_{z_0}(\varepsilon)$

$$|f(z) - w| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

נגדיר פונקצית עזר

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

זאת פונקציה חסומה ב-$D^*_{z_0}(\varepsilon)$ ולכן z_0 נקודה סליקה עבור g.
לכן ל-$\frac{1}{g}$ יש נקודה סליקה או קוטב ב-z_0 ולכן גם ל-

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$$

וזו סתירה להנחה של-f סינגולריות עיקרית ב-z_0. ■

משפט 11.4 (Picard)**.** אם z_0 סינגולרית עיקרית של f, אז

$$f\big(D^*_{z_0}(r)\big) \in \{\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{w\}\}$$

עבור $w \in \mathbb{C}$ מסוימת.
למעשה למשוואה $f(z) = a$ יש **אינסוף** פתרונות ב-$D^*_{z_0}(r)$ חוץ מאולי ערך אחד של a.

פרק 12

תכונות של עקומות

12.1 אינדקס של עקומה

למה 12.1. תהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ מסילה רציפה שאינה עוברת ב-0.
אז קיימת פונקציה **רציפה** $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ כך ש-$\theta(t) \in \arg(\gamma(t))$ לכל $t \in [a,b]$.
כמו כן, לכל θ^* אחרת כזו מתקיים שקיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש-

$$\forall t \in [a,b].\ \theta(t) - \theta^*(t) = 2\pi k$$

הוכחה.
יחידות: אם θ, θ^* רציפות ומקיימות את תנאי הלמה, אז לכל $t \in [a,b]$ $(\theta - \theta^*)(t) \in 2\pi\mathbb{Z}$.
וכיוון ש-$\theta - \theta^*$ רציפה, היא חייבת להיות קבועה.
קיום: אם γ מקבלת ערכים ב-$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, נשתמש $\theta(t) = \mathrm{Arg}(\gamma(t))$.
אם γ מקבלת ערכים ב-$\mathbb{C} \setminus \{y = \alpha x\}$ נבחר באופן דומה ענף מתאים.
אם γ פוגעת בכל בכל קרן ישרה שיוצאת מהראשית, נחלק את $[a,b]$ לתתי קטעים

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

כך שכל תת עקומה $\gamma_i := \gamma_{|[t_i, t_{i+1}]}$ עבור $i = 0, \ldots, n-1$, נמנעת מקרן ישרה כלשהיא דרך הראשית (נובע מהקומפקטיות של העקומה).
אז יש $\theta_i : [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ רציפה כך ש-

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}].\ \theta_i(t) \in \arg(\gamma(t))$$

נתחיל מ-θ_0. נשנה את ערכי θ_1 בכפולה שלמה של 2π כך ש-

$$\theta_1(t_1) = \theta_0(t_1)$$

וכך נעשה לשאר העקומות לפי הסדר. ■

טענה 12.1. אם בנוסף γ חלקה למקוטעין, אז עבור $C \in \mathbb{C}$ מסוים, הפונקציה $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\psi(t) = C + \int\limits_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds$$

מקיימת $\gamma(t) = e^{\psi(t)}$.

סיבה. מהגדרת ψ וחלקות γ נובע ש-ψ גזירה למקוטעין.
אז לפי המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי:

$$\psi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$$

ומכאן:

$$\left(\gamma \cdot e^{-\psi(t)}\right)' = \gamma' e^{-\psi} - \gamma\psi' e^{-\psi} = \gamma' e^{-\psi} - \gamma' e^{-\psi}$$

לכן קיים $C \in \mathbb{C}$ כך ש-$\gamma = e^{\psi}$. בפרט:

$$\gamma(a) = e^{\psi(a)} = e^C \Rightarrow C = \mathrm{Log}(\gamma(a))$$

■

הגדרה 12.1. תהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ מסילה **סגורה**. תהא θ בחירה רציפה של הארגומנט לאורך γ (כמו בלמה).
נגדיר את **האינדקס של γ סביב 0** כ-

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) := \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$$

הוא מוגדר היטב ללא תלות ב-θ לפי למה 1.

משפט 12.1. אם $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ מסילה סגורה חלקה למקוטעין, אז

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{1}{w} dw$$

הוכחה. ראינו ש-

$$\psi(t) = C + \int\limits_a^t \frac{\gamma'(w)}{\gamma(w)} dw$$

מקיימת $\gamma(t) = e^{\psi(t)}$. לכן $\Im\psi(t) \in \arg(\gamma(t))$ ורציפה, וכן $\Re\psi(t) = \ln|\gamma(t)|$, לכן מרציפות $\ln$:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \frac{\Im\psi(b) - \Im\psi(a)}{2\pi i} = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_a^b \frac{\gamma'}{\gamma} dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{1}{w} dw$$

■

טענה 12.2 (**תכונות אינדקס הליפוף**). תהא $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{z\}$ סגורה. אזי:

1. מתקיים:
$$-\text{ind}_{-\gamma}(z)=\text{ind}_{\gamma}(z)$$

2. אם $\mu:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}\setminus\{z\}$ רה פרמטריזציה של γ, אז:
$$\text{ind}_{\gamma}(z)=\text{ind}_{\mu}(z)$$

3. אם $U=\mathbb{C}\setminus\gamma$ אז $\text{ind}_{\gamma}(z)$ קבועה על רכיבי הקשירות של U.

4. $\text{ind}_{\gamma}(z)=0$ לכל z שנמצא ברכיב קשירות לא חסום של U.

הוכחה.

1. ראינו.

2. ראינו.

3. $\text{ind}_{\gamma}(z)$ רציפה ב-$\mathbb{C}\setminus\gamma$ ולכן מעבירה קבוצה קשירה לקשירה, ולכן כל רכיב קשירות ב-U עובר למספר יחיד ב-$\mathbb{Z}$.

4. כיוון ש-γ קומפקטית, יש R כך ש-$\gamma\subset D(0,R)$ ו-$\mathbb{C}\setminus D(0,R)$ קשירה, לכן מוכלת באחד מרכיבי הקשירות של U וזהו הרכיב הלא חסום. לכן ממשפט קושי $\text{ind}_{\gamma}(z)=0$.

■

12.2 נוסחת קושי הכללית

משפט 12.2. תהא f הולומורפית בתחום קמור G, $\gamma\subset G$ מסילה סגורה.
אז
$$\text{ind}_{\gamma}(z)\cdot f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\qquad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\gamma.$$

הוכחה. נגדיר
$$g(w)=\begin{cases}\frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w\neq z\\ f^{'}(z) & w=z\end{cases}$$

g הולומורפית ו-G קמורה, לכן ממשפט קושי
$$\int_{\gamma}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw=\int_{\gamma}g(w)dw=0$$

$$0=\int_{\gamma}\frac{f(w)}{z-w}dw-f(z)\underbrace{\int_{\gamma}\frac{1}{w-z}dw}_{2\pi i\text{ind}_{\gamma}(z)}$$

$$\text{ind}_\gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$$

■

הערה **12.1**. באופן דומה, לכל $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{ind}_\gamma(z) \cdot f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

12.3 הומוטופיה

הגדרה 12.2. הומוטופיה של מסילות בתחום D זו העתקה רציפה:

$$\Gamma : [0,1] \times [a,b] \to D$$

כך שלכל $s \in [0,1]$

$$\gamma_s(t) := \Gamma(s,t)$$

היא מסילה כפונקציה של t, $\gamma_s : [a,b] \to \mathbb{C}$.
ובנוסף נניח ש-γ_s חלקה למקוטעין, וש-$\Gamma \in C^1$.

הגדרה 12.3. תהינה שתי מסילות $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ו-$\eta : [a,b] \to \mathbb{C}$.
נאמר ש- γ ו-η **הומוטופיות אחת לשנייה** אם יש הומוטופיה Γ כך ש-$\gamma(\cdot) = \Gamma(0,\cdot)$ ו-$\eta(\cdot) = \Gamma(1,\cdot)$.

משפט 12.3. אם f הולומורפית בתחום G ו-$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ מסילות סגורות והומוטופיות אחת לשנייה כך ש-γ_s סגורה לכל $s \in [0,1]$ (הומוטופיה של מסילות סגורות).
אזי:

$$\int\limits_{\gamma_0} f(w)dw = \int\limits_{\gamma_1} f(w)dw$$

הוכחה. תהא $\{\gamma_s(\cdot)\}_{s\in[0,1]}$ ההומוטופיה, נסמן

$$I(s) := \int\limits_{\gamma_s} f(w)dw$$

צ"ל ש-I קבועה.

$$I(s) = \int\limits_a^b f(\gamma_s(t)) \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t} dt$$

לכן מדרישת הגזירות ברציפה בהומוטופיה, לפי כלל לייבניץ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}I(s) &= \int_a^b \left[f'(\gamma_s(t))\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\gamma_s(t) + f(\gamma_s(t))\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\gamma_s(t)\right]dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left[f(\gamma_s(t))\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)\right]dt\end{aligned}$$

אז לפי ניוטון לייבניץ:

$$\frac{\partial}{\partial s}I(s) = f(\gamma_s(t))\frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t)|_{t=a}^{t=b} = 0$$

כי המסילות סגורות. ■

הגדרה 12.4. $G \supset \gamma$ תיקרא **כוויצה** (contractible/null-homotopic) אם היא הומוטופית במסילות סגורות למסילה הקבועה.

מסקנה 12.1. אם f הולומורפית ב-G ו-$G \supset \gamma$ כוויצה אז $\int_\gamma f dz = 0$.

הערה 12.2. בתחום קמור כל מסילה היא כוויצה.

סיבה. נגדיר Γ ע"י:

$$\begin{aligned}&\Gamma(0,t) = \gamma(t)\\ &\Gamma(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s\gamma(0) \in G\\ &\Gamma(1,t) = \gamma(0)\end{aligned}$$

■

מסקנה 12.2. אם $\gamma_0, \gamma_1 \subset \mathbb{C}$ הומוטופיות במסילות סגורות, ו-$z \in \mathbb{C}\setminus(\gamma_0\cup\gamma_1)$, וההומוטופיה בתחום $\mathbb{C}\setminus\{z\}$.
אז:

$$\mathrm{ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(z)$$

12.4 קריטריון לקיום פונקציה קדומה

בהינתן f הולומורפית ב-G, האם יש לה קדומה ב-G?

משפט 12.4. אם f הולומורפית בתחום G אז יש ל-f קדומה אם ורק אם $\int_\gamma f = 0$ לכל מסילה סגורה $\gamma \subset G$.

הוכחה. $\Leftarrow$ קל (ניוטון לייבניץ).
$\Rightarrow$ נקבע $z_0 \in G$ ולכל $z \in G$ תהא γ_z מסילה בין z_0 ל-z ונגדיר

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw$$

וזו הגדרה טובה כיוון שמהנתון ש-$\int_\gamma f = 0$ לכל γ סגורה, נובע ש-$F(z)$ אינה תלויה בבחירת המסילה γ_z.

צריך לודא ש-$F^{'}=f$. תהא $w_0\in G$, נרצה להראות $F^{'}(w_0)=f(w_0)$, ניקח דיסק $D\subset G$ סביב w_0, $D(w_0,r)$ ולכל $w\in D(w_0,r)$ נסמן $[w,w_0]$ את הקטע הישר בין w ל-w_0.
אז

$$F(w)=\int\limits_{\gamma_{w_0}} f(\xi)d\xi+\int\limits_{[w_0,w]} f(\xi)d\xi$$

ממשפט קודם, יש ל-f קדומה ב-$D(w_0,r)$, נסמנה ב-g ואז

$$F(w)=\int\limits_{\gamma_{w_0}} f+\int\limits_{[w_0,w]} g^{'}(z)dz=C+g(w)-g(w_0)$$

ולכן F גזירה כסכום של גזירות ב-w ומתקיים:

$$F^{'}(w)=g^{'}(w)=f(w)$$

■

פרק 13

ענפי לוג

הגדרה 13.1. ענף של $\log z$ בתחום G זו פונקציה הולומורפית g ב-G כך ש-

$$\forall z \in G.\ e^{g(z)} = z$$

דוגמה 13.1. $\mathrm{Log}(z)$ $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

נכליל:

הגדרה 13.2. תהא $f \in \mathrm{Hol}(G)$ כאשר G תחום. **ענף של** $\log f(z)$ היא פונקציה $g \in \mathrm{Hol}(G)$ המקיימת:

$$e^{g(z)} = f(z)$$

הערה 13.1. תנאי הכרחי לקיום ענף של $\log f(z)$ ב-G הוא

$$\forall z \in G.\ f(z) \neq 0$$

אינו תנאי מספיק.

משפט 13.1. יהיו G תחום ו-$f \in \mathrm{Hol}(G)$ כך ש-$\forall z \in G.\ f(z) \neq 0$.
אז קיים ענף של $\log f$ ב-G אם ורק אם לכל $\gamma \subset G$ סגורה חלקה למקוטעין $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = 0$.
במילים אחרות, אם המסילה $f \circ \gamma$ "לא מקיפה" את 0.

מסקנה 13.1. אם G תחום שלא מכיל את 0, אז יש ענף של $\log z$ ב-G אם ורק אם לכל $\gamma \subset G$ $\mathrm{Ind}_{\gamma}(0) = 0$.

אז: ב-$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ אין ענף.
ב-$\mathbb{C} \setminus L$, L קרן שיוצאת מ-0 יש ענף.

משפט 13.2. תהא $f \in \mathrm{Hol}(G)$ לא מתאפסת ב-G. אז יש ענף של $\log f$ ב-G אם ורק אם לכל $\gamma \subset G$ סגורה וחלקה למקוטעין

$$\int_{\gamma} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = 0$$

הוכחה. נניח ש-g ענף של $\log f$ ב-G, אז $\forall z \in G.\ e^{g(z)} = f(z)$.

נגזור:

$$g^{'}(z)e^{g(z)} = f^{'}(z) \Rightarrow g^{'}(z) = \frac{f^{'}(z)}{f(z)}$$

לכן g קדומה של $\frac{f^{'}}{f}$ ולכן $\int_\gamma \frac{f^{'}}{f} = 0$.

מצד שני, נניח $\int_\gamma \frac{f^{'}}{f} = 0$ לכל $\gamma \subset G$ סגורה וחלקה למקוטעין, ונגדיר:

$$g(z) = \text{Log} f(z_0) + \int\limits_{z_0}^{z} \frac{f^{'}(w)}{f(w)} dw$$

$z_0 \in G$ כלשהי, ו-$\int_{z_0}^{z}$ על פני מסילה כלשהי $\gamma : z_0 \to z$.

בהגדרת g השתמשנו ב-$(*)$ ונראה כי $e^{g(z)} = f(z)$.

נסמן

$$H(z) \coloneqq f(z)e^{-g(z)}$$

נגזור:

$$H^{'}(z) = f^{'}e^{-g(z)} - g^{'}(z)fe^{-g(z)}$$

מתקיים:

$$g^{'} = \frac{f^{'}}{f}$$

ולכן:

$$H^{'}(z) = f^{'}e^{-g} - f^{'}e^{-g} = 0$$

ולכן H קבועה. נציב:

$$H(z_0) = f(z_0)e^{-\text{Log} f(z_0)} = 1$$

ולכן:

$$f(z) = e^{g(z)}$$

■

הוכחת משפט 13.1. תהא $\gamma \subset G$ מסילה סגורה וחלקה למקוטעין

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f^{'}(w)}{f(w)} dw = \int\limits_{a}^{b} \frac{f^{'}(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma^{'}(t) dt = \int\limits_{a}^{b} \frac{\frac{d}{dt} f(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} dt = \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \text{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$$

ולכן לפי משפט 13.2 סיימנו. ■

פרק 14

שאריות Residue

הגדרה 14.1. תהא $f \in \mathrm{Hol}(D^*(z_0,r))$ ויהי

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

טור לורן סביב z_0. **השארית** של f ב-z_0 היא

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) \coloneqq a_{-1}$$

טענה 14.1 (**נוסחא לחישוב השארית**). נניח של-f יש קוטב מסדר m ב-z_0, כלומר:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \ldots$$

נביט ב-

$$(z-z_0)^m f = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \ldots$$

אז:

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) \coloneqq \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]$$

דוגמה 14.1. $f(z) = \frac{1}{e^z-1}$, $z_0 = 0$.
במכנה יש פו' (e^z-1) משתאפסת ב-z_0 מסדר 1, ולכן ל-f יש קוטב מסדר 1 ב-z_0.

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \to z_0} \frac{z}{e^z-1} = 1$$

משפט 14.1 (משפט השארית). יהיו G תחום, $E \subset G$ סופית, $f \in \mathrm{Hol}(G \setminus E)$ ו-$\gamma \subset G \setminus E$ כוויצה ב-G. אז:

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{z \in E} \mathrm{Ind}_\gamma(z) \mathrm{Res}_z(f)$$

הוכחה. יהיו $E = \{z_1, \ldots, z_q\}$ הנק' הסינגולריות.

נסמן ב-S_k את החלק הסינגולרי של פיתוח לורן של f סביב z_k

$$S_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} (z - z_k)^n$$

$S_k \in \text{Hol}(G \setminus \{z_k\})$ (אפילו ב-$\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$ ממשפט לורן 1).

נתבונן בפונקציה

$$g = f(z) - \sum_{k=1}^{q} S_k(z)$$

ונטען ש-$g \in \text{Hol}(G)$, היא בוודאי הולומורפית ב-$G \setminus E$.

צריך להוכיח ש-$z_1, \ldots, z_k$ סינגולריות סליקות של g.

ואכן בסביבה קטנה סביב z_k, ל-f יש חלק סינגולרי S_k ולכן הוא מתבטל ב-g. לכן g חסומה בסביבת $z_k \Leftarrow z_k$ סליקה ל-g.

לכן מכיוון ש-γ כוויצה ב-G, $\int_\gamma g = 0$ ולכן

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{q} \int_\gamma S_k(z) dz$$

S_k מתכנס במ"ש מקומית

$$\int_\gamma S_k(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(k)} \int_\gamma (z - z_k)^n dz$$

לפי נוסחת קושי אם $n < -1$:

$$\int_\gamma (z - z_k)^n dz = 0$$

ולכן:

$$\int_\gamma S_k(z) dz = 2\pi i \text{Ind}_\gamma(z_k) \text{Res}_{z_k}(f)$$

■

דוגמה 14.2. נתבונן באינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

נתבונן בפונקציה $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, אז:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + z^4} dz$$

לכל $R > 0$ נחשב את האינטגרל על פני המסילה:

$$\Gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$$
$$\gamma_1(t) = t, t \in [-R, R]$$
$$\gamma_2(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi]$$

היא כוויצה, ול-f יש קטבים בנקודות:

$$\omega = z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}, z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

כולם מסדר 1, ורק z_1, z_2 בתחום שכלוא על ידי המסילה. נחשב את השאריות שלהן:

$$\mathrm{Res}_{z_1}(f) = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{1 + z^4} \overset{LH}{=} \lim_{z \to z_1} \frac{1}{4z^3} = \frac{\omega^{-3}}{4} = \frac{1}{4} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\mathrm{Res}_{z_2}(f) = \lim_{z \to z_2} \frac{z - z_2}{1 + z^4} \overset{LH}{=} \lim_{z \to z_2} \frac{1}{4z^3} = \frac{\omega^{-9}}{4} = \frac{1}{4} e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

ולכן לפי משפט השארית:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1 + z^4} = 2\pi i \left(\frac{1}{4} e^{i\frac{5\pi}{4}} + \frac{1}{4} e^{i\frac{7\pi}{4}} \right) = \frac{\pi i}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ואם ניקח את $R \to \infty$ נקבל את הדרוש.

פרק 15

עיקרון הארגומנט, משפט רושה ומשפט הורוויץ

15.1 עקרון הארגומנט

משפט 15.1. יהי G תחום ו-$\gamma \subset G$ כוויצה ב-G כך ש-

$$\forall z \notin \gamma.\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \{0,1\}$$

נסמן $G_\gamma = \{z \in G :\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1\}$. תהא $f \in \mathrm{Hol}(G \setminus E)$ כאשר $E \subset G$ סופית כך של-f אין סינגולריות עיקרית ב-E, ונניח של-f אין קטבים ואפסים ב-γ.
נסמן

$$Z = \#\{\text{zeros of } f \text{ in } G_\gamma \text{ with multiplicty}\}, \qquad P = \#\{\text{poles of } f \text{ in } G_\gamma \text{ with multiplicty}\}$$

אז:

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f^{'}}{f} = Z - P$$

הוכחה. הפונקציה $\frac{f^{'}}{f}$ מרומורפית ב-G וקטביה יכולים להיות רק באפסים ובקטבים של f. ממשפט השארית:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f^{'}}{f} = \sum_{f(w)=0} \mathrm{Res}_w\left(\frac{f^{'}}{f}\right) + \sum_{\frac{1}{f(w)}=0} \mathrm{Res}_w\left(\frac{f^{'}}{f}\right)$$

נניח ש-w אפס מסדר m של f. אז בסביבה של w $f(z) = (z-w)^m g(z)$ ו-$g(w) \neq 0$.
אז:

$$f^{'}(z) = m(z-w)^{m-1}g(z) + (z-w)^m g^{'}(z)$$

לכן:

$$\frac{f^{'}}{f} = \frac{m}{z-w} + \frac{g^{'}}{g}$$

ו-$\frac{g'}{g}$ הולומורפית בסביבת w, לכן:

$$\text{Res}_w\left(\frac{f'}{f}\right) = m$$

אם w קוטב מסדר m של f:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-w)^m}$$

$$f' = -m(z-w)^{-(m+1)}g + \frac{g'}{(z-w)^m}$$

$$\frac{f'}{f} = -\frac{m}{z-w}$$

ולכן:

$$\text{Res}_w\left(\frac{f'}{f}\right) = -m$$

■

15.2 משפט רושה

משפט 15.2 (משפט רושה הקלאסי). יהי G תחום, $\gamma \subset G$ מסילה סגורה כוויצה ב-G, $\forall z \notin \gamma.\ \text{Ind}_\gamma(z) \in \{0,1\}$, נסמן

$$G_\gamma := \{\, z \in G :\ \text{Ind}_\gamma(z) = 1\,\}$$

נניח ש-$h, \ell \in \text{Hol}(G)$, ונניח כי

$$\forall z \in \gamma.\ |h(z)| < |\ell(z)|$$

אז ל-ℓ ול-$h+\ell$ יש אותו מספר אפסים (כולל ריבוי) ב-G_γ.

משפט 15.3 (משפט רושה). יהי G תחום, $\gamma \subset G$ מסילה סגורה כוויצה ב-G, $\forall z \notin \gamma.\ \text{Ind}_\gamma(z) \in \{0,1\}$, נסמן

$$G_\gamma := \{\, z \in G :\ \text{Ind}_\gamma(z) = 1\,\}$$

נניח ש-$f, g \in \text{Hol}(G)$, ונניח כי

$$\forall z \in \gamma.\ |f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \tag{15.1}$$

אז ל-f ול-g יש אותו מספר אפסים (כולל ריבוי) ב-G_γ.

הוכחה. מ-(1) נובע של-f ו-g אין אפסים ב-γ.
נגדיר $h = \frac{f}{g}$, היא מרומורפית שאין לה אפסים או קטבים ב-γ, לכן h הולומורפית בסביבת γ. נחלק ב-$|g(z)|$ את שני צידי (1):

$$|1 - h(z)| < 1 + |h(z)|$$

מכך נובע שלכל $z \in \gamma$, $h(z) \notin (-\infty, 0]$.
לכן, 0 נמצא ברכיב הקשירות הלא חסום של $\mathbb{C} \setminus h(\gamma)$ $\Leftarrow$ $\mathrm{Ind}_{h\circ\gamma}(0) = 0$.

$$0 = \mathrm{Ind}_{h\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'}{h}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\frac{f'g-fg'}{g^2}}{\frac{f}{g}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)dz$$

כלומר:

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$$

אז מעיקרון הארגומנט:

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g$$

והרי $f, h \in \mathrm{Hol}(G)$, לכן $P_f = P_g$ ולכן:

$$Z_f = Z_g$$

■

דוגמה 15.1. $f(z) = z^5 + 5z^3 + z - 2$.
הוכיחו של-f יש שלושה אפסים ב-$\mathbb{D}$.

פתרון. ניקח $g = 5z^3$, ונבדוק את תנאי משפט רושה על $\partial\mathbb{D}$:

$$|f-g| = \left|z^5 + z - 2\right| \leq 4 < 5 = |g| \leq |g| + |f|$$

לכן, מספר האפסים ב$\mathbb{D}$ של f, g זהה והוא 3 כי זהו מספר האפסים של g ב-$\mathbb{D}$.

תרגיל 15.1. הוכיחו ע"י רושה את המשפט היסודי של האלגברה.

15.3 משפט הורוויץ

משפט 15.4. יהי G תחום, $f_n \in \mathrm{Hol}(G)$ לכל $n \in \mathbb{N}$, ללא אפסים:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ Z_{f_n} = \emptyset$$

ונניח ש- $f_n \to f$ במ"ש על קבוצה קומפקטית.
אז ל-f אין אפסים או $f \equiv 0$.

הוכחה. נניח $f(z_0) = 0$ ו-$f \not\equiv 0$. נבחר דיסק קטן ברדיוס $\varepsilon > 0$ סביב z_0 $D(z_0, \varepsilon)$.
אז f אינה מתאפסת ב-$\partial D(z_0, \varepsilon)$, כיוון שזו קבוצה קומפקטית קיים $c > 0$ כך ש-

$$\forall z \in \partial D(z_0, \varepsilon).\ |f(z)| > c$$

ולכן

$$\forall z \in \partial D(z_0, \varepsilon).\ |f_n - f| < |f| + |f_n|$$

עבור n גדול מספיק.

לכן, ממשפט רושה, ל-f_n יש אפס ב-$D(z_0,\varepsilon)$ בסתירה להנחה. ■

מסקנה 15.1. אם G תחום ו-$f_n \in \mathrm{Hol}(G)$ חח"ע ו-$f_n \to f$ במ"ש על קבוצות קומפקטיות ב-G.
אז f חח"ע או f קבועה.

הוכחה. נניח כי קיימים $z_1 \neq z_2$ כך ש-$f(z_1) = f(z_2)$. נגדיר

$$\varphi(z) \coloneqq f(z) - f(z_2)$$

ו-

$$\varphi_n(z) \coloneqq f_n(z) - f_n(z_2)$$

אז $\varphi_n \to \varphi$ במ"ש על קבוצות קומפקטית. $\varphi(z_1) = 0$ ול-φ_n אין אפסים ב-$G \setminus \{z_2\}$, לכן ממשפט הורביץ, φ קבועה ולכן גם f קבועה. ■

פרק 16

משפט ההעתקה המקומית

הגדרה 16.1. תהא $f \in \mathrm{Hol}(G)$ לא קבועה ו-$w_0 = f(z_0)$.
נאמר ש-w_0 **מתקבלת בריבוי** m ב-z_0 אם z_0 הוא אפס מריבוי m של $f - w_0$.

משפט 16.1 (משפט ההעתקה המקומית/כיסוי מסועף). תהא $f \in \mathrm{Hol}(G)$ לא קבועה, ונניח ש-$w_0 = f(z_0)$ מתקבלת בריבוי m.
אז לכל $\varepsilon > 0$ קטן מספיק קיימת $\delta > 0$ כך שלכל w המקיים $0 < |w - w_0| < \delta$ יש בדיוק m פתרונות שונים למשוואה $f(z) = w$ בדיסק $D(z_0, \varepsilon)$, ו-w מתקבלת בריבוי 1 (כלומר יש $z_1, \ldots, z_m$ שונים בדיסק כך ש-$f(z_i) = w$).

הוכחה. כיוון ש-f לא קבועה, לכל $\varepsilon > 0$ קטן דיו מתקיים

$$\forall z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}. \begin{cases} f(z) \neq w_0 \\ f'(z) \neq 0 \end{cases}$$

אז יש $\delta > 0$ כך ש-

$$\forall z \in \partial D(z_0, \varepsilon). \ |f(z) - w_0| > \delta$$

נבחר $w \in D^*_{w_0}(\delta)$ ונסמן $h(z) := f(z) - w$, ונגדיר $g(z) := f(z) - w_0$.

$$\forall z \in \partial D(z_0, \varepsilon). \ |h(z) - g(z)| = |w - w_0| < \delta < |g(z)|$$

לכן ל-h ול-g אותו מספר אפסים ב-$D(z_0, \varepsilon)$.
מספר האפסים של g ב-$D(z_0, \varepsilon)$ הוא m, ולכן מספר האפסים של h הוא m.
וכיוון ש-$f'(z) \neq 0$ ב- $D^*_{z_0}(\varepsilon)$, כל הנק' הללו הן מריבוי 1. ■

הערה 16.1. אם z_0 הוא 0 של f הולומורפית וריבויו הוא $m > 1$, אז $f'(z_0) = 0$.

16.1 משפט ההעתקה הפתוחה

משפט 16.2 (משפט ההעתקה הפתוחה). תהא $f \in \mathrm{Hol}(G)$ לא קבועה, אז f העתקה פתוחה, כלומר לכל $V \subset G$ פתוחה גם $f(V)$ פתוחה.
בפרט $f(G)$ היא תחום.

סיבה. נובע ממשפט ההעתקה המקומית. ■

משפט 16.3. תהא $f \in \mathrm{Hol}(G)$ חח"ע.
אז $\forall z \in G.\ f^{'}(z) \neq 0$.

סיבה. נניח ש-$f^{'}(z_0) = 0$ ו-$w_0 = f(z_0)$, אז מהערה 1, הריבוי של w_0 הוא לפחות 2, ולכן ממשפט הכיסוי המסועף נובע שלכל נקודה w מספיק קרובה ל-w_0 יש לפחות שתי מקורות שונים ולכן אינה חח"ע. ■

הערה 16.2. הכיוון השני לא נכון, למשל אם $f(z) = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}.\ f^{'}(z) \neq 0$ אך היא כן חח"ע מקומית.

משפט 16.4. תהא $f \in \mathrm{Hol}(G)$ וחח"ע, אז הפונקציה

$$f^{-1} : f(G) \to G$$

הולומורפית.

סיבה. f^{-1} רציפה בגלל משפט ההעתקה הפתוחה, ואז

$$\left(f^{-1}(w)\right)^{'} = \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(w))}$$

■

פרק 17

משפט ההעתקה של רימן

הערה 17.1. החל מפה נקטע חומר הקורס בגלל האיראנים :(. לא הקלדתי את כל ההוכחה של המשפט בגלל חוסר בזמן.

הגדרה 17.1. יהי G תחום.
אם כל $\gamma \subset G$ סגורה היא כוויצה, אז G **תחום פשוט קשר**.

משפט 17.1 (Riemann mapping theorem)**.** יהי $G \neq \mathbb{C}$ תחום פשוט קשר, אז קיימת העתקה הולומורפית חח"ע

$$f : G \to D(0,1)$$

על $D(0,1)$.

הערה 17.2. G אינו יכול להיות כל $\mathbb{C}$ ממשפט ליוביל.

טענה 17.1. אם קיימת g נוספת כזו אז יש $\theta_0 \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$g(z) = f(z)e^{i\theta_0}$$

סיבה. אם יש f, g כאלו, נגדיר

$$h = f \circ g^{-1} : D_0(1) \to D_0(1)$$

ו-$h(0) = 0$.
אז מהלמה של שוורץ $\left|h^{'}(0)\right| \leq 1$, אבל גם $h^{-1} = g \circ f^{-1}$.
לכן:

$$\left|\frac{1}{h^{'}(0)}\right| = \left|\left(h^{-1}\right)^{-1}(0)\right| \leq 1$$

לכן:

$$\left|h^{'}(0)\right| = 1$$

ומהלמה של שוורץ מתקיים ש-$f \circ g^{-1}(z) = \lambda z$.
עבור $|\lambda| = 1$ קבוע. ■

רעיון להוכחת הקיום. נניח ש-f היא הפונקציה המבוקשת ו-$g : G \to D_0(1)$ הולומורפית לווא דווקא חח"ע ועל כך ש-$g(z_0) = 0$.

$$h(z) = g\big(f^{-1}(z)\big)$$

הולומורפית מ-$D_0(1)$ לעצמו. אז מלמה של שוורץ $1 \leq \left|h^{'}(0)\right|$.

$$\left|h^{'}(0)\right| = \left|g^{'}(z_0)\right| \cdot \left|\left(f^{-1}\right)^{'}(z_0)\right| = \left|\frac{g^{'}(z_0)}{f^{'}(z_0)}\right|$$

$$\Rightarrow \left|g^{'}(z_0)\right| \leq \left|f^{'}(z_0)\right|$$

ושוויון אמ"מ $g = \lambda f, |\lambda| = 1$.

ננסה למצוא פונקציה $f : G \to D_0(1)$ הולומורפית וממקסמת את $\left|f^{'}(z_0)\right|$.

נביט בקבוצת הפונקציות

$$\mathcal{F} = \{\, f \in (G \to D_0(1)) \cap \mathrm{Hol}(G) : \ f(z_0) = 0, f \ \text{ is one to one}\}$$

ונביט ב-

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \left|f^{'}(z_0)\right|$$

לא ברור אפילו ש- $\mathcal{F} \neq \emptyset$. ■

משפט 17.2 (Stiltiyes-Osgood)**.** אם $f_n : G \to D_0(1)$ סדרת פונק' הול', אז יש לה תת סדרה מתכנסת במ"ש מקומית.

הוכחה. מספיק להראות שלכל דיסק D המקיים ש- $\overline{D} \subset G$ יש תת"ס של f_n המתכנסת במ"ש ב-$\overline{D}$.

אכן, ניקח קבוצה בת מניה של דיסקים $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ כך ש-$\overline{D_k} \subset G$ ו-$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = G$.

תהא $\{f_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ תת"ס של $\{f_n\}$ שמתכנסת במ"ש על D_1. נחלץ מ-$\{f_{1,n}\}$ תת-סדרה מתכנסת ב-$\overline{D_2}$, נסמנה $\{f_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ ובאופן זה $\{f_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על

$$\overline{D_1} \cup \ldots \cup \overline{D_k}$$

לכל k. ולפיכך הסדרה האלכסונית $\{f_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש מקומית על $\overline{D_1} \cup \ldots \cup \overline{D_k}$ לכל k, ולכן מתכנסת במ"ש מקומית על G.

נניח לפיכך כי $G = D_0(1)$, $f_n : D_0(1) \to D_0(1)$ לכל n, ויש ל-f_n פיתוח טיילור סביב 0 עם רדיוס התכנסות 1:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} z^k$$

בנוסף לכל z

$$|f_n(z)| \leq 1$$

אז לכל $0 < r < 1$

$$|a_{n,k}| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{f_n(z)}{z^{k+1}} dz\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1 \cdot 2\pi r}{r^{k+1}} = \frac{1}{r^k} \Rightarrow |a_{n,k}| \leq 1$$

$\{a_{n,k}\}_{n,k \geq 1} \subset D_0(1)$ אז יש תת"ס $\{n_j\}$ כך שלכל k הסדרה $a_{n_j,k}$ מתכנסת כש-$j \to \infty$.

לפיכך מועמדת לפונקציה הגבולית תהא $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, אשר מתכנסת בדיסק לפי קושי-הדמר.

צ"ל $f_{n_j} \to f$ במ"ש מקומית. אכן:

$$\left|f(z) - f_{n_j}(z)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k - a_{n_j,k}\right)z^k\right|$$

נבחר מספר שלם m (אח"כ):

$$\le \sum_{k=0}^{m}\left|a_k - a_{n_j,k}\right| + 2\sum_{k=m+1}^{\infty} r^k = \sum_{k=0}^{m}\left|a_k - a_{n_j,k}\right| + \frac{2\cdot r^{m+1}}{1-r}$$

אז בהינתן $\varepsilon > 0$, נבחר m כך ש-

$$\frac{2r^{m+1}}{1-r} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ו-j_0 יהיה האינדקס עבורו $\left|a_k - a_{n_j,k}\right| < \frac{\varepsilon}{2(m+1)}$ לכל $j > j_0$, $k = 0, \ldots, m$ נקבל:
לכל $\varepsilon > 0$, יש j_0 כך שאם $j \ge j_0$

$$\left|f(z) - f_{n_j}(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■