שדות אלקטרומגנטיים (0512-2525)

נכתב ע"י רון גולדמן
מתוך הרצאות של ד"ר ירדן מזור

2 בפברואר 2026

תוכן העניינים

1 מבוא מתמטי **3**

1.1 מושג השדה 3

1.2 מערכות קואורדינטות ויחסים מטריים 3

1.3 האופרטורים הדיפרנציאליים 4

1.3.1 הגרדיאנט 4

1.3.2 הדיברגנץ 4

1.3.3 הלפלסיאן 5

1.3.4 הרוטור 5

1.3.5 הדיברגנץ המשטחי 5

1.4 דלתא של דיראק 6

I שדות במרחב חופשי ומודלים של חומר **7**

2 משוואות מקסוול **8**

2.1 מקורות השדה 8

2.1.1 מטענים 8

2.1.2 זרם חשמלי 8

2.2 משוואות מקסוול האינטגרליות 9

2.2.1 שימור מטען 9

2.2.2 המשוואות הסיבוביות 9

2.2.3 חוקי גאוס 10

2.3 משוואות מקסוול בוואקום 10

2.3.1 חוק שימור המטען 10

2.3.2 חוקי גאוס 10

2.3.3 המשוואות הסיבוביות 11

3 תנאי שפה, משוואת מקסוול בתדר **12**

3.1 תנאי שפה בזמן 12

3.1.1 חוק גאוס החשמלי 12

3.1.2 חוק גאוס המגנטי 12

3.1.3 חוק אמפר 12

3.1.4 חוק פאראדיי 12

3.1.5 חוק שימור המטען 12
3.2 משוואות מקסוול בתחום התדר 13

פרק 1

מבוא מתמטי

1.1 מושג השדה

הגדרה 1.1 [שדה סקלרי]. פונקציה $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

הגדרה 1.2 [שדה וקטורי]. פונקציה $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, לכל $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, ובסיס $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}), \dots \mathbf{u}_m(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^m$ ניתן לרשום:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{m} F_i(\mathbf{r})\mathbf{u}_i(\mathbf{r})$$

הערה 1.1. ההגדרות הבאות בקורס תהינא תקפות ביחס למיקום בלבד, כלומר נתייחס לשדה בכל נקודת זמן בנפרד (השדה עצמו הוא ב-$\mathbb{R}^{n+1}$ כאשר הזמן הוא המשתנה שמושמט).

1.2 מערכות קואורדינטות ויחסים מטריים

הגדרה 1.3 [מערכת קואורדינטות אורתוגונלית]. תהינא $u_1, \dots, u_n : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציות סקלריות גזירות ברציפות של המיקום $\mathbf{r}$.

אזי $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ היא **מערכת קואורדינטות אורתוגונלית** אם לכל $\mathbf{u}_0 = (u_{1,0}, \dots, u_{n,0}) \in \mathbb{R}^n$, משטחי הרמה

$$S_i \coloneqq \{\, \mathbf{r} \in D : \; u_i(\mathbf{r}) = u_{i,0} \,\}$$

אורתוגונליים זה לזה בכל נקודה, כלומר לכל $i \neq j$ ו-$\mathbf{r} \in S_i \cap S_j$ מתקיים $\nabla u_i(\mathbf{r}) \cdot \nabla u_j(\mathbf{r}) = 0$.

הגדרה 1.4 [וקטורי היחידה]. תהא $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ מערכת קואורדינטות אורתוגונלית בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$, אזי **וקטורי היחידה** של המערכת הם $\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_n : D \to \mathbb{R}^n$ כאשר $\hat{\mathbf{u}}_i \coloneqq \frac{\nabla u_i}{\|\nabla u_i\|}$ לכל $i \in [n]$.

הגדרה 1.5 [יחסים מטריים]. תהא $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ מערכת קואורדינטות אורתוגונלית והפיכה בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ונסמן $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{u})$.
היחסים המטריים $h_i : D \to \mathbb{R}$ מוגדרים להיות $h_i \coloneqq \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \right\|$. ניתן גם לרשום,

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathrm{d}u_i \hat{\mathbf{u}}_i$$

ואז לקבל אלמנטי אורך בכיוון כל אחת מהקואורדינטות u_i באמצעות קשרים אלו,

$$\mathrm{d}\ell_i = h_i \mathrm{d}u_i$$

אלמנטי שטח על משטח שווה קואורדינטה u_i,

$$\mathrm{d}S_i = \prod_{j\neq i} \mathrm{d}\ell_j$$

ואלמנט נפח,

$$\mathrm{d}V = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}\ell_i$$

1.3 האופרטורים הדיפרנציאליים

1.3.1 הגרדיאנט

הגדרה 1.6 [גרדיאנט]. יהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $F \in C^1(D)$. **הגרדיאנט** של F הוא הפונקציה הוקטורית $\nabla F \in \left(C^0(D)\right)^n$ המוגדר על ידי

$$\nabla F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial r_i} \hat{\mathbf{r}}_i$$

כאשר $\hat{\mathbf{r}}_1, \ldots \hat{\mathbf{r}}_n$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$.

משפט 1.1 [כלל השרשרת]. תהא $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ מערכת קואורדינטות אורתוגונלית והפיכה בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ותהא $F \in C^1(D)$. אזי

$$\nabla F = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} \frac{\partial F}{\partial u_i} \hat{\mathbf{u}}_i$$

1.3.2 הדיברגנץ

הגדרה 1.7 [דיברגנץ]. יהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ותהא $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^n$, אזי **הדיברגנץ** של $\mathbf{F}$ (אם קיים) הוא הפונקציה הסקלרית $\nabla \cdot \mathbf{F} : D \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים לכל $\mathbf{r} \in D$:

$$\nabla \cdot \mathbf{F}|_{\mathbf{r}} = \lim_{\substack{V(\Omega)\to 0 \\ \mathbf{r}\in\Omega}} \frac{1}{V(\Omega)} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

כאשר הגבול הוא על נפחים $\Omega \subseteq D$.

משפט 1.2 [גאוס]. תהא $\mathbf{F} \in \left(C^1(D)\right)^n$, אז לכל נפח $\Omega \subseteq D$ מתקיים

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \mathrm{d}V$$

טענה 1.1 [נוסחה לחישוב דיברגנץ]. תהא $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ מערכת קואורדינטות אורתוגונלית והפיכה בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ו- $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} F_i \hat{\mathbf{u}}_i \in \left(C^1(D)\right)^n$, אזי:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} h_i} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(F_i \prod_{j\neq i} h_j \right)$$

1.3.3 הלפלסיאן

הגדרה 1.8 [לפלסיאן]. יהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום, ותהא $\mathbf{F} \in C^2(D)$, אזי **הלפלסיאן** של F מוגדרת להיות $\nabla^2 F = \nabla \cdot (\nabla F)$.

טענה 1.2. תהא $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ מערכת קואורדינטות אורתוגונלית והפיכה בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ו-$F \in C^1(D)$, אזי

$$\nabla^2 F = \frac{1}{\prod_{i=1}^n h_i} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\partial F}{\partial u_i} \frac{\prod_{j \neq i} h_j}{h_i} \right)$$

1.3.4 הרוטור

הגדרה 1.9 [רוטור]. יהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ותהא $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^n$, אזי **הרוטור** של $\mathbf{F}$ (אם קיים) הוא הפונקציה הוקטורית $\nabla \times \mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים לכל $\mathbf{r} \in D$:

$$\nabla \times \mathbf{F}|_{\mathbf{r}} = \lim_{\substack{A(\Sigma) \to 0 \\ \mathbf{r} \in \Sigma}} \frac{\hat{\mathbf{n}}}{A(\Sigma)} \oint_{\partial \Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

כאשר הגבול נלקח על משטחים $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ עם אנך $\hat{\mathbf{n}}$ בנקודה $\mathbf{r}$.

משפט 1.3 [סטוקס]. תהא $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^3$, אז לכל משטח $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$\oint_{\partial \Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

טענה 1.3 [נוסחה לחישוב רוטור]. תהא (u, v, w) מערכת קואורדינטות אורתוגונלית והפיכה בתחום $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ו-$\mathbf{F} = F_u \hat{\mathbf{u}} + F_v \hat{\mathbf{v}} + F_w \hat{\mathbf{w}} \in \left(C^1(D)\right)^3$, אזי:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{\mathbf{u}} & h_v \hat{\mathbf{v}} & h_w \hat{\mathbf{w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u F_u & h_v F_v & h_w F_w \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{h_v h_w} \left(\frac{\partial}{\partial v}(h_w F_w) - \frac{\partial}{\partial w}(h_v F_v) \right) \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_u h_w} \left(\frac{\partial}{\partial w}(h_u F_u) - \frac{\partial}{\partial u}(h_w F_w) \right) \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_u h_v} \left(\frac{\partial}{\partial u}(h_v F_v) - \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_u) \right) \hat{\mathbf{w}}
\end{aligned}$$

1.3.5 הדיברגנץ המשטחי

הגדרה 1.10 [משטח]. פונקציה $S : C \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ היא **פרמטריזציה של המשטח** $S(\mathbb{R}^2)$ כאשר לכל $(u, v) \in C$ נרשום:

$$S(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

הגדרה 1.11. המקדמים המטריים של המשטח מוגדרים על ידי:

$$\mathrm{d}S_u = \left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u} \right) \mathrm{d}u, \qquad \mathrm{d}S_v = \left(\frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v} \right) \mathrm{d}v$$

הגדרה 1.12. הפרמטרים המטריים:

$$\begin{cases} \|\mathrm{d}S_u\| = h_u \mathrm{d}u \\ \|\mathrm{d}S_v\| = h_v \mathrm{d}v \end{cases} \implies \begin{cases} h_u = \left\|\left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial Y}{\partial u}, \frac{\partial Z}{\partial u}\right)\right\| \\ h_v = \left\|\left(\frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial Y}{\partial v}, \frac{\partial Z}{\partial v}\right)\right\| \end{cases}$$

הגדרה 1.13. בהינתן שדה וקטורי על משטח $\mathbf{S}$ (או היטל של שדה וקטורי על המשטח):

$$\mathbf{F} = F_u \hat{\mathbf{u}} + F_v \hat{\mathbf{v}}$$

נגדיר את **הדיברגנץ הדו-מימדי** בתור:

$$\nabla_S \cdot \mathbf{F}|_{\mathbf{r}} = \lim_{\substack{A(\Sigma)\to 0 \\ \mathbf{r}\in\Sigma}} \frac{1}{A(\Sigma)} \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{n}})$$

כאשר הגבול נלקח על תתי משטחים Σ של S בעלי אנך $\hat{\mathbf{n}}$ בנקודה $\mathbf{r}$.

טענה 1.4 [נוסחה לחישוב דיברגנץ משטחי]. אם S משטח בעל קואורדינטה w קבועה, אזי

$$\nabla_S \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v)\right]$$

מסקנה 1.1. אם S משטח בעל קואורדינטה w קבועה, וכן h_w קבועה, אזי $\nabla_S \cdot \mathbf{F}$ מתקבל "ממחיקת הרכיב ה-w" מהדיברגנץ:

$$\nabla_S \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} - \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)$$

1.4 דלתא של דיראק

הגדרה 1.14 [דלתא של דיראק]. **דלתא של דיראק** ב-$\mathbb{R}^n$ בנקודה $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^n$ היא $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ אשר מקיימת התכונות הבאות:

1. לכל $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ מתקיים $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 0$.
2. לכל $V \subseteq \mathbb{R}^n$ (מדידה) מתקיים

$$\int_V \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V = \begin{cases} 1, & \mathbf{r}' \in V \\ 0, & \mathbf{r}' \notin V \end{cases}$$

חלק I

שדות במרחב חופשי ומודלים של חומר

פרק 2

משוואות מקסוול

2.1 מקורות השדה

אקסיומה 2.1. קיים מטען חשמלי.

2.1.1 מטענים

הגדרה 2.1 [צפיפות מטען רציפה]. יהי $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ נניח ו-δQ הוא המטען בתחום בעל נפח δV המכיל את $\mathbf{r}$, אזי נגדיר את **צפיפות המטען הנפחית** $\rho(\mathbf{r})$:

$$\delta Q = \int\limits_V \rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}V \iff \rho(\mathbf{r}) = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta Q}{\delta V}$$

באותו אופן מגדירים **צפיפות מטען משטחית** שמקיימת $Q = \int \eta(\mathbf{r}')\mathrm{d}S$, ו**צפיפות מטען אורכית** שמקיימת $Q = \int \lambda(\mathbf{r}')\mathrm{d}\ell$.

הגדרה 2.2 [צפיפות מטען נקודתית]. יהי $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, אזי **צפיפות המטען הנפחית של המטענים נקודתיים** $\{q_i\}_{i=1}^N$ בנקודות $\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^N$ היא

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

באופן דומה ניתן להגדיר צפיפות מטען משטחית ואורכית כצפיפות נפחית באמצעות δ.

טענה 2.1. אם יש במערכת מטען נפחי רציף ρ, מטען משטחי רציף η, מטען אורכי רציף λ, ומטען נקודתי $\{q_i\}_{i=1}^N$ אזי המטען הכולל הוא

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i + \int \lambda(\mathbf{r})\mathrm{d}\ell + \int \eta(\mathbf{r})\mathrm{d}S + \int \rho(\mathbf{r})\mathrm{d}V$$

2.1.2 זרם חשמלי

הגדרה 2.3 [זרם חשמלי]. יהי $S \subseteq \mathbb{R}^3$ משטח, ונניח כי דרך S חולף סך מטען δq בפרק זמן δt:

$$\delta q = \int Q(\tau)\mathrm{d}\tau$$

אזי **הזרם החשמלי** דרך S הוא:

$$I = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta q}{\delta t}$$

טענה 2.2. אם המטען דרך משטח $S \subseteq \mathbb{R}^3$ החולף בנקודת זמן כלשהי t, $Q(t)$ הוא גזיר, אזי $I = \dot{Q}$.

הגדרה 2.4 [צפיפות זרם נפחית]. יהי $\hat{\mathbf{v}}$ וקטור יחידה בכיוון הזרימה ו-$\delta a_\perp$ אלמנט שטח חתך הניצב ל-$\hat{\mathbf{v}}$, וכן δI הזרם דרך החתך. אזי **צפיפות הזרם הנפחית** היא

$$\mathbf{J} = \lim_{\delta a_\perp \to 0} \frac{\delta I}{\delta a_\perp} \hat{\mathbf{v}}$$

טענה 2.3. אם הזרם נוצר על ידי תנועה של צפיפות מטען נפחית $\rho(\mathbf{r})$ במהירות $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, אזי $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$.

הגדרה 2.5 [צפיפות זרם משטחית]. יהי $\hat{\mathbf{v}}$ וקטור יחידה בכיוון הזרימה, ונניח כי תנועת המטענים מוגבלת למשטח כלשהו. נגדיר את העקום ℓ להיות העקום דרכו חולף הזרם, ואז צפיפות וסך הזרם יוגדרו על ידי

$$\mathbf{K} = \lim_{\delta \ell_\perp \to 0} \frac{\delta I}{\delta \ell_\perp} \hat{\mathbf{v}} \iff I = \int_\ell \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\ell \mathrm{d}\ell$$

כאשר $\hat{\mathbf{n}}_\ell$ הוא הנורמל לעקום במישור ו-$\mathrm{d}\ell$ הוא אלמנט אורך קטן הניצב לכיוון הזרימה.

טענה 2.4. אם דרך חתך מסויים יש צפיפות זרם נפחית רציפה $\mathbf{J}$, צפיפות זרם משטחית רציפה $\mathbf{K}$, וזרמים קוויים $\{I_i\}_{i=1}^N$ הזורמים דרך חוטים, אזי הזרם דרך החתך הוא

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathrm{d}S + \int_\ell \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}}_\ell \mathrm{d}\ell + \sum_{i=1}^N I_i$$

אקסיומה 2.2 [כוח לורנץ]. קיים קבוע $\mu_0 \in \mathbb{R}$ כך שהכוח $\mathbf{F}$ הפועל על מטען נקודתי q הנע במהירות $\mathbf{v}$ בנוכחות שדה אלקטרומגנטי $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ הוא **כוח לורנץ**

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mu_0 \mathbf{H})$$

2.2 משוואות מקסוול האינטגרליות

2.2.1 שימור מטען

אקסיומה 2.3 [שימור מטען]. סך המטען במערכת סגורה נשמר. מתמטית, אם הזרם היוצא מנפח כלשהו V הוא I והמטען בתחום הנ"ל הוא Q, אזי

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

טענה 2.5. אם צפיפויות המטען והזרם רציפות, נקבל

$$\oint_{S=\partial V} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \mathrm{d}S = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathrm{d}V$$

2.2.2 המשוואות הסיבוביות

אקסיומה 2.4 [חוק פאראדיי האינטגרלי]. אם A משטח בעל שפה ∂A אזי

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

אקסיומה 2.5 [חוק אמפר האינטגרלי]. אם A משטח בעל שפה ∂A אזי

$$\oint_{\partial A} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_A \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

טענה 2.6. יהי גליל מקביל לציר z שאורכו אינסופי ורדיוסו a. בגליל זורם זרם חשמלי שצפיפותו הנפחית אחידה $\mathbf{J} = J_0\hat{\mathbf{z}}$. אזי השדה המגנטי במרחב הוא

$$\mathbf{H} = \frac{J_0}{2r}\left(r^2 + \left(a^2 - r^2\right)u(r-a)\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

2.2.3 חוקי גאוס

אקסיומה 2.6 [חוק גאוס החשמלי האינטגרלי]. אם Ω נפח התחום על ידי המשטח $\partial\Omega$ אזי

$$\int_{\partial\Omega} \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Omega} \rho \mathrm{d}V$$

טענה 2.7. יהי גליל המקביל לציר z שאורכו אינסופי ורדיוסו a. הגליל טעון במטען חשמלי שצפיפותו הנפחית אחידה ρ_0. אזי השדה החשמלי במרחב הוא

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}\left(r^2 + \left(a^2 - r^2\right)u(r-a)\right)\hat{\mathbf{r}}$$

אקסיומה 2.7 [חוק גאוס המגנטי האינטגרלי]. אם Ω נפח התחום על ידי המשטח $\partial\Omega$ אזי

$$\int_{\partial\Omega} \mu_0 \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

2.3 משוואות מקסוול בוואקום

2.3.1 חוק שימור המטען

משפט 2.1 [חוק שימור המטען הדיפרנציאלי]. נניח וצפיפות הזרם הנפחית גזירה במרחב וכן צפיפות המטען הנפחית גזירה בזמן, אזי

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

2.3.2 חוקי גאוס

משפט 2.2 [חוק גאוס החשמלי הדיפרנציאלי]. אם השדה החשמלי $\mathbf{E}$ גזיר במרחב אזי

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho$$

משפט 2.3 [חוק גאוס המגנטי הדיפרנציאלי]. אם השדה המגנטי $\mathbf{H}$ גזיר במרחב אזי

$$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = 0$$

2.3.3 המשוואות הסיבוביות

משפט 2.4 [חוק פאראדיי הדיפרנציאלי]. אם $\mathbf{E}$ גזיר במרחב ו-$\mathbf{H}$ גזיר בזמן אזי

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mathbf{H})$$

משפט 2.5 [חוק אמפר הדיפרנציאלי]. אם $\mathbf{H}$ גזיר במרחב ו-$\mathbf{E}$ גזיר בזמן אזי

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) + \mathbf{J}$$

לסיכום

חוק	משוואה
חוק שימור מהטען	$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
חוק אמפר	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) + \mathbf{J}$
חוק פאראדיי	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \mathbf{H})$
חוק גאוס המגנטי	$\nabla \cdot (\mu_0 \mathbf{H}) = 0$
חוק גאוס החשמלי	$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho$

פרק 3

תנאי שפה, משוואת מקסוול בתדר

3.1 תנאי שפה בזמן

3.1.1 חוק גאוס החשמלי

משפט 3.1. אם η צפיפות המטען על משטח A ו-$\hat{\mathbf{n}}$ הנורמל למשטח A בנקודה $\mathbf{r}$, וכן $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}(\mathbf{r}^+), \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}(\mathbf{r}^-)$ השדה החשמלי ב-$\mathbf{r}$ משני הצדדים של $\hat{\mathbf{n}}$, אזי

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_1) = \eta$$

3.1.2 חוק גאוס המגנטי

משפט 3.2. אם A משטח ו-$\hat{\mathbf{n}}$ הנורמל למשטח A בנקודה $\mathbf{r}$, וכן $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}(\mathbf{r}^+), \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}(\mathbf{r}^-)$ השדה המגנטי ב-$\mathbf{r}$ משני הצדדים של $\hat{\mathbf{n}}$, אזי

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mu_0 \mathbf{H}_2 - \mu_0 \mathbf{H}_1) = 0$$

3.1.3 חוק אמפר

משפט 3.3. אם A משטח בעל צפיפות זרם $\mathbf{K}$ ו-$\hat{\mathbf{n}}$ הנורמל למשטח A בנקודה $\mathbf{r}$, וכן $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}(\mathbf{r}^+), \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}(\mathbf{r}^-)$ השדה המגנטי ב-$\mathbf{r}$ משני הצדדים של $\hat{\mathbf{n}}$, אזי

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

3.1.4 חוק פאראדיי

משפט 3.4. אם A משטח ו-$\hat{\mathbf{n}}$ הנורמל למשטח A בנקודה $\mathbf{r}$, וכן $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}(\mathbf{r}^+), \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}(\mathbf{r}^-)$ השדה החשמלי ב-$\mathbf{r}$ משני הצדדים של $\hat{\mathbf{n}}$, אזי

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

3.1.5 חוק שימור המטען

משפט 3.5. אם A משטח ו-$\hat{\mathbf{n}}$ הנורמל למשטח A בנקודה $\mathbf{r}$, וכן $\mathbf{J}_2 = \mathbf{J}(\mathbf{r}^+), \mathbf{J}_1 = \mathbf{J}(\mathbf{r}^-)$ צפיפות הזרם הנפחית ב-$\mathbf{r}$ משני הצדדים של $\hat{\mathbf{n}}$, וכן $\mathbf{K}, \eta$ צפיפות הזרם והמטען המשטחית על A אשר גזירות במרחב ובזמן בהתאמה, אזי

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) + \nabla_{2D} \cdot \mathbf{K} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

לסיכום

	שדה מגנטי	שדה חשמלי
הרכיב הניצב	$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$	$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$
הרכיב המקביל	$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mu_0 \mathbf{H}_2 - \mu_0 \mathbf{H}_1) = 0$	$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}_2 - \varepsilon_0 \mathbf{E}_1) = \eta$
חוק שימור המטען	$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) + \nabla_{2D} \cdot \mathbf{K} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}$	

3.2 משוואות מקסוול בתחום התדר

משפט 3.6. נסמן ב-$\tilde{f} = \mathcal{F}\{f\}$ התמרת פורייה בזמן. אזי מתקיים (כאשר כל האופרטורים מוגדרים היטב):

חוק	תנאי שפה	משוואה
חוק פאראדיי	$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_1\right) = 0$	$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{H}}$
חוק אמפר	$\hat{\mathbf{n}} \times \left(\tilde{\mathbf{H}}_2 - \tilde{\mathbf{H}}_1\right) = \tilde{\mathbf{K}}$	$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{J}}$
חוק גאוס החשמלי	$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}_2 - \varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}_1\right) = \tilde{\eta}$	$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \tilde{\mathbf{E}}\right) = \tilde{\rho}$
חוק גאוס המגנטי	$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\mu_0 \tilde{\mathbf{H}}_2 - \mu_0 \tilde{\mathbf{H}}_1\right) = 0$	$\nabla \cdot \left(\mu_0 \tilde{\mathbf{H}}\right) = 0$
חוק שימור המטען	$\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\tilde{\mathbf{J}}_2 - \tilde{\mathbf{J}}_1\right) + \nabla_{2D} \cdot \tilde{\mathbf{K}} = -i\omega\tilde{\eta}$	$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}} = -i\omega\tilde{\rho}$