```
a*b=*(a,b) אזי א איז פעולה A שימון: תהא A קבוצה ותהא A פעולה בינארית
                                            עבורו e \in G עבורה איי*: G 	imes G 	o G עבורה קיים *: G 	imes G 	o G
                                          a*(b*c)=(a*b)*c מתקיים a,b,c\in G אסוציאטיביות: לכל
                                                         a*e=e*a=a מתקיים a\in G איבר יחידה: לכל
                                              a*b=e=b*a עבורו b\in G קיים a\in G לכל לכל • איבר הופכי:
                                                   S(X) = \{f: X \to X \mid הפיכה f\} הפילה תהא X קבוצה אזי
                                                                    (S(X), \circ) אזי קבוצה אזי תהא X קבורת התמורות:
                                                            טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.
                                                                                   S_n = S\left([n]
ight) אזי n \in \mathbb{N} סימון: יהי
                                                                                       |S_n|=n! אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                         (\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight),\cdot) אזי n\in\mathbb{N} שדה ויהי \mathbb{F} שדה יהי אזי n\in\mathbb{N}
                                                  . מענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי n\in\mathbb{N} אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.
                                                             \mathbb{F},+ אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\} אזי החבורות החיבוריות: יהי
                                                                        A^*=A^{\times}=A\setminus\{0\} אזי A\subset\mathbb{C} סימון: תהא
                                                                \mathbb{F}(\mathbb{F},\cdot) אזי \mathbb{F}\in\{\mathbb{O}^*,\mathbb{R}^*,\mathbb{C}^*\} אזי יהי
                                                                             .(\{x\}, Id) אזי (החבורה הטריוואלית: יהי א
                                         (x\sim_n y)\Longleftrightarrow (n|\,(x-y)) המוגדרת \sim_n\subseteq\mathbb{Z}^2 אזי n\in\mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                                        .C_n=\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} סימון: יהי
                           [x]_{\sim} + [y]_{\sim} = [x+y]_{\sim} הגדרה: יהי n \in \mathbb{N} אזי n \in \mathbb{N} הגדרה: יהי
                                                                    (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N} יהי החלוקה: חבורת שאריות
                                                         טענה: יהי n\in\mathbb{N} אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.
                                                                                        |C_n|=n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
              g*h=h*g מתקיים g,h\in G עבורה לכל חבורה (G,*) חבורה חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית:
                                                                         . טענה: יהי (S_n,\circ) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 3} אינה אבלית
                                                                    . אינה אבלית (GL_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot) אזי n\in\mathbb{N}_{+} יהי יהי
                                                                               . אבלית (C_n,+) אזי n\in\mathbb{N}_+ אבלית טענה: יהי
                                                                         |G| \in \mathbb{N} חבורה עבורה חבורה חבורה חבורה
                                                                    |G| \geq \aleph_0 עבורה אינסופית: חבורה חבורה אינסופית:
                                                     .ord (G)=|G| אזי חבורה סופית הא (G,*) חבורה: תהא
                                                        \operatorname{ord}\left(G
ight)=\infty אינסופית אינ חבורה תהא G חבורה: תהא
                                                                     o\left(G
ight)=\operatorname{ord}\left(G
ight) חבורה אזי (G,st
ight) סימון: תהא
                                           Hעבורה H,st_{H	imes H} אזי H\subseteq G עבורה ותהא חבורה (G,st)
                                                              a*b\in H מתקיים a,b\in H סגירות לכפל: סגירות ש
                                                               a^{-1} \in H מתקיים a \in H סגירות להופכי: לכל
                                                           e\in H אזי איבר היחידה של e אזי יהי •
                         H \leq G עבורה (H,*_{\restriction_{H \times H}}) תת־חבורה ותהא H \subseteq G אזי חבורה ותהא סימון: תהא
.(a*b^{-1}\in H מתקיים a,b\in H מתקיים (לכל H\leq G) אזי H\in \mathcal{P}\left(G\right)\setminus\left\{ \varnothing\right\} מתקיים (G,*) למה: תהא
                    A*B=\{a*b\mid (a\in A)\land (b\in B)\} סימון: תהא A,B\subseteq G חבורה ותהיינה G,*
                                     g*H=\{q\}*H אזי אוני q\in G ויהי ויהי חבורה (G,*) אזי חבורה תהא
                                                                             (n\mathbb{Z},+)<(\mathbb{Z},+) אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                     (\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot)\leq\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}
ight),\cdot
ight) שדה אזי n\in\mathbb{N} יהי ויהי n\in\mathbb{N}
                                                                      R_n=\{z\in\mathbb{C}\mid z^n=1\} אזי n\in\mathbb{N} דימון: יהי
```

A imes A o A פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי

 $(R_n,\cdot) \leq (\mathbb{C}^*,\cdot)$ אזי $n \in \mathbb{N}$ טענה: יהי $G \leq G$ טענה: תהא $G \leq G$

```
\{e\} \leq G טענה: תהא (G,*) חבורה אזי
                                                     q^n=e המקיים n\in\mathbb{N}_+ איבר פיתול: תהא q\in G חבורה אזי חבורה (G,*)
                                                                      T\left(G
ight)=\left\{g\in G\mid T\left(G
ight) איבר אזי g\} חבורה אזי ותהא \left(G,st
ight)
                                                                                        T(G) < G טענה: תהא (G, *) חבורה אבלית אזי
                                               הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.
                                               a*e=e*a=a עבורו a*e=e*a=a עבורו אזי קיים ויחיד אזי קיים ויחיד (G,*) אכל
                                                a*b=e=b*a עבורו b\in G אזי קיים ויחיד a\in G חבורה ויהי חבורה (G,*)
                                                      a^{-1}=b אזי a איבר הופכי ל־b\in G ויהי a\in G חבורה יהי חבורה (G,*) איבר הופכי
                                                                  (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} אזי a,b \in G חבורה ויהיו (G,*) טענה: תהא
                                                                               (a^{-1})^{-1} = a אזי a \in G סענה: תהא (G,*) חבורה ויהי
                                    a*b=a*c אזיי a*b=a*c עבורם a,b,c\in G חבורה ויהי חבורה (G,*) אזיי משמאל:
                                      a,b=c אזי b*a=c*a עבורם a,b,c\in G חבורה ויהי חבורה (G,*) אזי
                                                                                       g^0=e אזי g\in G חבורה ויהי (G,*) אזי
                                                              g^n=g*g^{n-1} אזי g\in G ויהי חבורה יהי חבורה (G,*) אזי הגדרה: תהא
                                                                       g^{-n}=\left(q^{n}\right)^{-1} אזי q\in G ויהי חבורה יהי חבורה G אזי מימון: תהא
                                                                      g^{-n}=\left(q^{-1}\right)^n אזי q\in G ויהי n\in\mathbb{N} יהי חבורה G אחזי מענה: תהא
a,h'\in H אזי ולכל g,g'\in G לכל לכל (g,h)\cdot (g',h')=(g*g',h\otimes h') חבורות נגדיר המכפלה: תהיינה (G,*),(H,\otimes) חבורת המכפלה
                                                                                                                                   (G \times H, \cdot)
                                                                . חבורה הינה חבורת אזי חבורת (G,*),(H,\otimes) טענה: תהיינה
                                              .(חבורת אזי (חבורת אבלית) חבורות אזי חבורות אזי חבורות (G,*),(H,\otimes) טענה: תהיינה
                                                 .(HK=KH) (H*K\leq G) אזי איזי אינה תהיינה חבורה ותהיינה חבורה ותהיינה (G,*) איזי
                                         .(H \cap K \in \{H,K\}) שענה: תהא (H \cup K \leq G) אזי H,K \leq G טענה: תהא (G,*) חבורה ותהיינה
                                           .Stab (Y)=\{\pi\in S\left(X\right)\mid \forall y\in Y.\pi\left(y\right)=y\} אזי Y\subseteq X אחר קבוצה ותהא X קבוצה ותהא
                                                                            .Stab (Y) \leq S\left(X\right) אזי Y \subseteq X אחר קבוצה תהא א קבוצה ותהא
                                    \bigcap_{i\in I}H_i\leq G אזי i\in I לכל לכל H_i\leq G באשר באשר \{H_i\}_{I\in I}\subseteq \mathcal{P}\left(G
ight) אזי איזי חבורה תהא
                                                             \mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\} אזי X \subseteq G חבורה חבורה G תהא
                                         \langle X 
angle = igcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H אזי X \subseteq G חבורה ותהא חבורה תהיקבוצה: תהא אזי תת־קבוצה
                                                                                       \langle X \rangle \leq G אזי אזי X \subseteq G אמר: תהא חבורה חבורה מהא
                      \langle X 
angle \subseteq H אזי איזי איזי עבורה H \leq G ותהא אות חבורה תהא חבורה תהא אזי א אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי אזי
                          \langle X 
angle = \left\{\prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \ \middle| \ (k \in \mathbb{N}) \land \left(x \in X^k
ight) \land \left(s \in \{\pm 1\}^k
ight)
ight\} אזי X \subseteq G אזי X \subseteq G אזי
                                                                \langle X 
angle = G עבורה אזי אורה איזי אורה: תהא חבורה תהא אבורה עבורה איזי אבורה קבוצת יוצרים של חבורה
                                                                חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.
                                                                         \langle g \rangle = G המקיים g \in G המקיים עבורה עבורה ציקלית: חבורה
                                                                              \langle g \rangle = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \} אזי g \in G חבורה ויהי חבורה G אהי
                                                               g^{n+m}=g^n*g^m אזי g\in G ויהי n,m\in\mathbb{Z} חבורה יהיו
                                                                  \left(g^{n}
ight)^{m}=g^{n\cdot m} אזי g\in G ויהי הייו n,m\in\mathbb{Z} חבורה יהיו
                                                    G=\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\} עבורו g\in G עבורו ציקלית) אזי (G=\{g^k\mid k\in\mathbb{Z}\} עבורו למה: תהא
                                                                                             מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.
                                                                      \operatorname{ord}\left(g
ight)=\operatorname{ord}\left(\left\langle g
ight
angle אזי g\in G חבורה ויהי חבורה G איבר: תהא
                                                             .ord (g)=\min\left\{n\in\mathbb{N}_+\mid g^n=e\right\} אזי g\in G חבורה ויהי חבורה G
                                                           \operatorname{ord}\left(g
ight)=\infty אזי \operatorname{ord}\left(g
ight) עבורו g\in G חבורה ויהי G חבורה מערה:
                                g \in G טענה: תהא G = e (ord G = e) איי ord G = e באשר באשר G \in \mathcal{S} ויהי n \in \mathbb{N}_+ ויהי חבורה יהי
                                                                         . (ירים) ויהי i,n)\Longleftrightarrowו(\langle i 
angle = \mathbb{Z}_n) אזי i \in \mathbb{Z}_n ויהי n \in \mathbb{N}_+ זרים).
                                                                             . אזי H ציקלית H \leq G אזי איקלית חבורה G אזי חבורה עיקלית
```

טענה: $(\mathbb{Q},+)$ אינה נ"ס.

```
q*H אזי q\in G ויהי ויהי H< G אזי חבורה תהא
                                                                     g ימני אזי קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי של קוסט ימני אזי G
                                                                gH אזי אוי ממאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי
                                                         Hg=gH אזי g\in G ויהי ויהי H\leq G אחר חבורה אבלית תהא
                                                         (gH)^{-1}=Hg^{-1} אזי g\in G ויהי H\leq G מסקנה: תהא
                                                     (gH=H) \Longleftrightarrow (g \in H) אזי g \in G ויהי ויהי H \leq G טענה: תהא
                                                     (Hg=H) \Longleftrightarrow (g\in H) אזי g\in G ויהי H\leq G טענה: תהא
                                                                  G/H = \{gH \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G חבורה תהא
                                                                A_H \setminus G = \{Hg \mid g \in G\} אזי H \leq G חבורה חבורה G איזי G
                                                                      G משפט: תהא G חבורה ותהא H \leq G חבורה חבורה משפט:
                                   (g_1H=g_2H)\Longleftrightarrow \left(g_2^{-1}g_1\in H
ight) אזי g_1,g_2\in G ויהיו H\leq G טענה: תהא G חבורה תהא
                                                                        .eH אזי אזי H \leq G הקוסט הטריוואלית: תהא
                                             G:H]=|G/H| אזי H\leq G אינדקס של תת־חבורה בחבורה: תהא
                                                                       G:H]=|_Hackslash_G| אזי H\leq G טענה: תהא G חבורה ותהא
                                                    \operatorname{ord}(G) = \operatorname{ord}(H) \cdot [G:H] אזי H < G סענה: תהא G חבורה סופית ותהא
                                                        .ord (H) \left| \mathrm{ord} \left( G \right) \right. אזי אזי חבורה סופית ותהא H \leq G משפט לגראנז': תהא
                                                                   .ord (g) | \mathrm{ord} \, (G) אזי g \in G מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי
                                            G:K]=[G:H]\cdot [H:K] אזי איזי H\leq G חבורה תהא חבורה G איזי ותהא
                            G=\langle q \rangle מתקיים g\in G\setminus \{e\} אזי לכל ord G=p מתקיים חבורה חבורה G מתקיים מסקנה: יהי
                                                      אזי G אזי G אזי G אזי G אזי G אזי G אזי אזי G אזי G אזי מסקנה: יהי
                                 n^{p-1}\equiv 1\mod p אזי \gcd(n,p)=1 באשר n\in\mathbb{N} ויהי p\in\mathbb{P} ויהי מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי
                                                   |HK| = rac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|} אזי חבורות חבורה H,K \leq G למה: תהא
\operatorname{ord}(K)=p וכן \operatorname{ord}(H)=p באשר H,K\leq G אזי לכל ותהא G=p חבורה באשר G ותהא חבורה באשר אזי לכל
                                                                                                                   K=H מתקיים
                                                                (S_n/\mathsf{Stab}(1)) \cap (S_\mathsf{Stab}(1) \setminus S_n) = \{\mathsf{Stab}(1)\} אזי n \in \mathbb{N}_{\geq 3} יהי n \in \mathbb{N}_{\geq 3}
                                                            HqK אזי g \in G ויהי H, K < G אזי חבורה תהיינה
                                                   G טענה: תהא G חלוקה של H,K \leq G טענה: תהא חבורה ותהיינה
                                                                    המקיימת \varphi:G \to H אזי חבורות G,H המקיימת הומומורפיזם:
                                                                                          .arphi\left(e_{G}
ight)=e_{H} :שימור איבר יחידה
                                                                .\varphi\left(a\cdot b\right)=\varphi\left(a\right)\cdot\varphi\left(b\right)מתקיים a,b\in Gלכל לכל • שימור כפל
                                                                     .arphi\left(g^{-1}
ight)=arphi\left(g
ight)^{-1} מתקיים g\in G שימור הופכי: לכל
.(arphi\left(a\cdot b^{-1}
ight)=arphi\left(a
ight)\cdotarphi\left(b
ight)^{-1} מתקיים a,b\in G מתקיים a,b\in G אזי arphi אזי arphi הומומורפיזם) אזי מענה: תהיינה
             \ker(\varphi)=\{g\in G\mid \varphi(g)=e_H\} אזי הומומורפיזם \varphi:G	o H חבורות ויהי חבורות G,H הומומורפיזם: תהיינה
                                                                     למה: תהיינה G,H חבורות ויהי G,H חבורות למה:
                                                                                                                \operatorname{Im}(\varphi) \leq H \bullet
                                                                                                                \ker(\varphi) < G \bullet
                                                                                            (\ker(\varphi) = \{e_G\}) \iff (y \text{"nn } \varphi) \bullet
           \psi\circ \varphi אוווות היינה \psi:H	o K הומומורפיזם הומומורפיזם אזי הומומורפיזם אי\psi:G	o H הומומורפיזם סענה: תהיינה
```

H*q אזי $q\in G$ ויהי H< G אזי חבורה תהא

טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם. $g\in G$ לכל g(g)=e המוגדרת $g\in G$ לכל g(g)=e הינה הומומורפיזם. טענה ההומומורפיזם הטריוואלי: תהא $g\in G$ חבורה אזי $g\in G$ אזי $g\in G$ הינו הומומורפיזם. $g\in G$ טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא $g\in G$ חבורה ותהא $g\in G$ אזי $g\in G$ אזי $g\in G$ הינו הומומורפיזם. $g\in G$ טענה: יהי $g\in G$ שזי מעל $g\in G$ אזי $g\in G$ אזי $g\in G$ המוגדרת $g\in G$ לכל $g\in G$ לכל $g\in G$ אזי $g\in G$ המוגדרת $g\in G$ המוגדרת $g\in G$ לכל $g\in G$

 $\operatorname{ord}(\varphi(q))|\operatorname{ord}(q)$ אזי $q\in G$ אויי הומומורפיאם ויהי $g\in G$ אויי היינה G,H טענה: תהיינה

```
ho:S_n	o \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}
ight) אזי n\in\mathbb{N} הינה הומומורפיזם. 
ho:S_n	o \mathsf{GL}_n\left(\mathbb{R}
ight)
                                                                                     \det\left(
ho\left(\sigma
ight)
ight)\in\left\{\pm1
ight\} אזי \sigma\in S_n ותהא n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                              \operatorname{sign} = \det \circ 
ho המוגדרת \operatorname{sign} : S_n 	o \{\pm 1\} אזי n \in \mathbb{N} המוגדרת סימן של תמורה: יהי
                                                                                                   מסקנה: יהי אזי sign אזי n\in\mathbb{N} יהי יהי
                                                  \operatorname{sign}(\sigma)=rac{\prod_{i< j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i< j}(i-j)} אזי \sigma\in S_n אווי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא \sigma\in S_n אווי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא n\in\mathbb{N} אווי n\in\mathbb{N} אווי n\in\mathbb{N} טענה: יהי n\in\mathbb{N} ותהא
                                                                                    A_n = \ker\left(\operatorname{sign}
ight) אזי n \in \mathbb{N} חבורת התמורות הזוגיות: יהי
                                                                                                                    A_n \leq S_n אזי n \in \mathbb{N} טענה: יהי
                                                                    arphi:G	o H איזומורפיזם הפיך חבורות אזי חבורות היינה תהיינה איזומורפיזם: תהיינה
                                                                                         G \cong H אזי איזומורפיות איזומר G,H סימון: תהיינה
                                                         . למה: תהיינה G,H חבורות ויהי \varphi:G	o H ויהי חבורות מהיינה למה: תהיינה מיינה למה:
              למה: תהיינה \psi\circ \varphi איזומורפיזם איז \psi:H	o K איזומורפיזם ויהי \phi:G	o H איזומורפיזם איז למה: תהיינה
                                                                                  \mathcal{A} טענה: תהא \mathcal{A} קבוצה של חבורות אזי יחס שקילות על
                                                                                                                    .C_n\cong R_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
.arphi=\psi אזי arphi_S=\psi_{
estriction_S} חבורות תהא אזי arphi_S=\psi באשר באשר אזי arphi=G ויהיו ויהיו arphi=G באשר באשר באשר באשר באשר אזיי מענה:
                                                                    .arphi:G	o H מונומורפיזם: תהיינה G,H חבורות אזי הומומורפיזם תהיינה
                                                                        arphi:G	o H אפימורפיזם על אזי הומומורפיזם G,H חבורות אפימורפיזם:
                                                                                    arphi:G	o G אוטומורפיזם: תהא חבורה אזי איזומורפיזם: תהא
                                                                      .Aut (G)=\{\varphi:G	o G\mid סימון: תהא G חבורה אזי \{\varphi\} אוטומורפיזם
                                                                                                  חבורה (Aut (G), \circ) חבורה G חבורה טענה:
                                                                                                                        K = C_2 \times C_2 חבורת קליין:
                                                                                                                    טענה: חבורת קלייו הינה אבלית.
                                                                                                                    טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.
                                                                                                       .C_4טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־
                              c_{q}\left(x
ight)=gxg^{-1} המוגדרת c_{q}:G	o G אזי g\in G לכל לכל תהא חבורה תהא פונקציית הצמדה:
                                                                                         . טענה: תהא G אוטומורפיזם אזי g \in G טענה: תהא חבורה ויהי
                               \varphi=c_a המקיים פנימי: תהא g\in G עבורו קיים \varphi:G\to G אוטומורפיזם אוטומר תהא חבורה מיים פנימי: תהא
                                                                                             \operatorname{Inn}\left(G\right)=\left\{c_g\mid g\in G\right\} סימון: תהא חבורה אזי
                                             .c_{a}\left( H
ight) =H מתקיים g\in G מתקיים אזי אבורה אזי H\leq G מתקיים תהא
                                                                                    H \unlhd G נורמלית אזי H \subseteq G חבורה ותהא חבורה G נורמלית
                                                                                                      טענה: תהא G חבורה ותהא H \leq G טענה:
                                                                                                                                           .H \triangleleft G \bullet
                                                                                                          g^{-1}Hg=H מתקיים g\in G לכל
                                                                                                          .qHq^{-1}=H מתקיים q\in G לכל
                                                                                                             .qH=Hg מתקיים g\in G לכל
```

 $.
ho\left(\sigma
ight)\cdot v=\left(egin{array}{c} v_{\sigma(1)}\ dots\ v_{\sigma(n)} \end{array}
ight)$ אזי $v\in\mathbb{R}^n$ ויהי $\sigma\in S_n$ תהא $n\in\mathbb{N}$ אזי $n\in\mathbb{N}$

 $.g^{-1}Hg\subseteq H$ מתקיים $g\in G$ לכל • $.H\subseteq g^{-1}Hg$ מתקיים $g\in G$ לכל •

 $\operatorname{Inn}(G) \unlhd \operatorname{Aut}(G)$ טענה: תהא G חבורה אזי

 $H \triangleleft G$ אזי G:H = 2 באשר $H \triangleleft G$ אזי חבורה תהא

K char G אופיינית אזי $K \leq G$ חבורה ותהא חבורה G אופיינית

 $K \subseteq G$ אזי אזי K char G אזי G חבורה תהא

 $arphi\left(K
ight)=K$ מתקיים $arphi\in\mathrm{Aut}\left(G
ight)$ עבורה לכל עבורה אזי G מתקיים תהא G מתקיים אופיינית:

 $G/H = H \setminus G \bullet$

```
(G/N,*) אזי N \subseteq G חבורה ותהא אזי (G,*) אזי חבורת המנה:
                                                                             . חבורה המנה הינה חבורת אזי חבורת המנה הינה חבורה R אזי חבורת המנה הינה חבורה.
                                                    q\left(g
ight)=gN המוגדרת q:G	o G/N אזי איזי N	olember G חבורה תהא
                                                                                   טענה: תהא G חבורה תהא N \lhd G ותהא G העתקת המנה אזי
                                                                                                                               הינה הומומורפיזם. q
                                                                                                                                       .\ker(q) = N \bullet
                        (H=\ker(arphi) עבורו arphi:G	o G עבור אוטומורפיזם אוטומורפיז אזי אזי אזי אזי אזי H\leq G עבורה ותהא חבורה תהא
                                                                                                                      \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_n אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                G/\ker(arphi)\cong \mathrm{Im}\,(arphi) הומומורפיזם האיזומורפיזם איזי תהיינה G,H חבורות ויהי האיזומורפיזם אזי
                                                                                  טענה: תהא חבורה אין בדיוק אזי מתקיים מתקיים מחבאים מחבים G
                                                                                                                                               G \cong \mathbb{Z} \bullet
                                                                                                                     G \cong \mathbb{Z}_n עבורו n \in \mathbb{N} פיים
                                                                                                              |G/\mathcal{Z}(G)| \notin \mathbb{P} טענה: תהא G חבורה אזי
                                          G \cong H 	imes K אזי אH \cap K = \{e\} וכן וכן HK = G באשר באשר H, K \unlhd G אזי חבורה ויהיו
                                                                   \mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n	imes\mathbb{Z}_m אוים אזי n,m\in\mathbb{N} יהיו הסיני: יהיו
טענה: יהי p\in \mathbb{P} תהא p\in M אזי H\neq M אזי אזי אווי היהי אוכן מאינדקס M מאינדקס אזי מאינדקס M באשר אווי אזי M
                                                                                                                                                  p^2 | \text{ord} (G)
                                            חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H,K חבורות ויהי arphi:K	o {\sf Aut}\,(H) חבורת המכפלה החצי ישרה:
                                                (H \times K, \cdot) איז k, k' \in K לכל h, h' \in H לכל (h, k) \cdot (h', k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')
                                   H 
ightarrow G איי חבורות ויהי G : K 
ightarrow H חבורות ויהי חבורות ויהי G : K 
ightarrow H חבורות ויהי
                                                             . הינה חבורה H \rtimes_{\omega} K אזי \varphi: K \to \operatorname{Aut}(H) חבורות ויהי חבורה H, K
                        H 
ightarrow_{arphi} K \cong H 
ightarrow K אזי איזי k \in K לכל \varphi\left(k\right) = \mathrm{Id}_{H} כך \varphi: K 
ightarrow \mathrm{Aut}\left(H\right) חבורות נגדיר חבורות נגדיר
                                        .Aff (\mathbb{F})=\{f:\mathbb{F}	o\mathbb{F}\mid\exists a\in\mathbb{F}^{	imes}\ (\exists b\in\mathbb{F}\ (\forall x\in\mathbb{F}\ (f\ (x)=ax+b)))\} יהי שדה אזי
                                                                                                            טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי (Aff (\mathbb{F}), \circ) טענה: יהי
                    Aff(\mathbb{F})\cong\mathbb{F}
times_{arphi}\mathbb{F}^{	imes} אזי b\in\mathbb{F} אזי אזי a\in\mathbb{F}^{	imes} לכל arphi(a) לכל arphi(a) לכל arphi(a) אזי arphi(a) אזי arphi(a)
                                  A .Iso (P)=\{arphi:\mathbb{R}^2	o\mathbb{R}^2\mid (מצולע משוכלל אזי arphi )\wedge (arphi(P)=P)\} איזומטריה מצולע משוכלל משוכלל אזי
                                                      D_n = \operatorname{Iso}(P) אזי קודקודים אוי משוכלל משוכלל משוכלל יהי יהי יהי יהי יהי יהי מצולע משוכלל בעל
                                                                                                             טענה: יהי(D_n,\circ) אזיn\in\mathbb{N}_{\geq 2} חבורה.
                                                                           D_n\cong \langle r,s\mid s^2=e,r^n=e,srs=r^{-1}
angle אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יסענה: יהי n\in\mathbb{N}_{\geq 2}
                                                                                                                                  משפט: יהי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} אזי
                              D_n אוי של החבורות הנורמליות אזי \{D_n,\langle sr,r^2\rangle,\langle s,r^2\rangle\}\cup\{H\leq\langle r\rangle\} אזי אזי n\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}} אם •
                                                      D_n אט אזי אזי אוי אוי \{D_n\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\} אזי אזי n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}} אס אם אס
```

 $K \lhd G$ אזי איר char H ותהא $H \lhd G$ אזי G חבורה תהא

 $\mathcal{Z}\left(G
ight) riangleq G$ טענה: תהא G חבורה אזי

 $A_n riangleleft S_n$ אזי $n \in \mathbb{N}$ טענה: יהי

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ פשוטה. $\mathrm{SL}_n\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $n\in\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ פשוטה.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}
ight)$ חבורה.

 $\mathcal{Z}\left(\mathcal{H}\left(\mathbb{F}
ight)
ight)\cong\left(\mathbb{F},+
ight)$ טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי

 $\mathcal{Z}\left(G
ight)=\left\{g\in G\mid \forall h\in G.gh=hg
ight\}$ מרכז של חבורה G חבורה אזי

 $\ker\left(arphi
ight) ext{\leq } G$ אזי אוי הומומורפיזם arphi:G o H הבורות ויהי

 $.(gN)*(hN)=(g*h)\,N$ כך *:G/N imes G/N o G/N נגדיר $N ext{ } \subseteq G$ נגדיר (G,*) חבורה ותהא $M ext{ } \subseteq G$

 $H \in \{\{e\},G\}$ מתקיים $H \unlhd G$ עבורה עבורה עבורה משוטה: חבורה

```
חבורה G_0 \dots G_n \leq G וקיימות n \in \mathbb{N}_+ עבורה קיים עבורה מעירה: חבורה מעירה
                                                                                            G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                           i \in [n] לכל G_{i-1} \unlhd G_i
                                                                                        .i \in [n] אבלית לכל G_i/G_{i-1}
                                                                               G פתירה אבלית אזי G פתירה.
                                                    . אינה פתירה G אינה אבלית אזי G אינה פשוטה באשר חבורה G אינה אבלית אזי
                                                                                        משפט: יהיn\in [4] אזי S_n פתירה.
                                     חבורה נילפוטנטית: חבורה G עבורה קיים n\in\mathbb{N}_+ וקיימות חבורה מקיימות חבורה מקיימות
                                                                                            G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                            i \in [n] לכל G_{i-1} \triangleleft G \bullet
                                                                                i \in [n] לכל G_i/G_{i-1} < \mathcal{Z}\left(G/G_{i-1}\right)
                                                                          פתירה. G אזי G פתירה. נילפוטנטית אזי
                           H/(H\cap N)\cong (HN)/N אזי M\unlhd G ותהא ותהא M\subseteq G משפט האיזומורפיזם השני: תהא
                                                N/K \unlhd G/N אזי איזי K \subseteq N באשר N, K \unlhd G טענה: תהא
                  G/N\cong (G/K)/(N/K) אזי K\leq N משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהיינה או האיזומורפיזם השלישי:
משפט ההתאמה: תהא \Phi:\{H\leq G\mid N\leq H\}	o \{H\mid H\leq G/N\} משפט ההתאמה: תהא 0 חבורה ותהא 0 אזי קיימת אזי קיימת
                                                             \Phi\left(K
ight) 	riangleq G/N מתקיים N \leq K המקיימת K 	riangleq G
                                           C/K \cong \Phi(G)/\Phi(K) מתקיים N < K המקיימת א המקיים לכל K \lhd G
                                        .(פשוטה) מקסימלית) אזי ותהא M \subseteq G אזי ותהא M \subseteq G משוטה) מענה: תהא חבורה ותהא מקסימלית
              המקיימת f:G	imes X	o T המקיימת קבוצה אזי פונקציה G הבורה על קבוצה: תהא
                                                                                  f(e,x)=x מתקיים x\in X •
                                                   f(g \cdot h, x) = f(g, f(h, x)) מתקיים x \in X ולכל g, h \in G
                                                             הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.
                            f\left(g,x
ight)=g.x אזי אזי G פעולה על f:G	imes X	o X פעולה על קבוצה ותהא G
                                     G \curvearrowright X = \{f: G 	imes X 	o X \mid פעולה f\} פעולה ותהא G חבורה ותהא סימון: תהא
                                            f(g,x)=gx כך f\in G\curvearrowright G אזי חבורה G אזי הפעולה השמאלית: תהא
                                                                  . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.
                                            f אזי f(g,x)=xg^{-1} כך f\in G\curvearrowright G אזי חבורה מגדיר תהא
                                                                     . מענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.
                                                      . הפעולה מכאן ונסמן א ונסמן מיט פועלת כי הפעולה והלאה מכאן המערה: הערה מכאן והלאה הפעולה מיט הערה
                   \operatorname{corb}_lpha(x)=\{g.x\mid g\in G\} אזי x\in X איזי lpha\in G\curvearrowright X מסלולים: תהא lpha קבוצה תהא
                                     o(x) = \operatorname{orb}(x) אזי x \in X ויהי א ויהי X חבורה חבורה G חבורה תהא
              .o\left(x
ight)=X המקיים x\in X המקיים f\in G\curvearrowright X עבורה חבורה ותהא G חבורה חבורה קיים אזי
                    \operatorname{Stab}_G(x)=\{g\in G\mid g.x=x\} אזי X\in X וויהי וויהי G חבורה הפועלת על מייצב: תהא
        \operatorname{Fix}_X(g) = \{x \in X \mid g.x = x\} אוסף נקודות השבת: תהא G חבורה תהא G חבורה הפועלת על G ויהי
                                      \operatorname{Stab}_G(x) < G אזי x \in X ויהי א ויהי X חבורה חבורה חבורה X אזי חבורה מענה:
            x \in X מתקיים x \in X מתקיים x \in X מנולה חופשית: תהא x \in X חבורה ותהא x \in X מבורה אזי
                                   lpha\left(g
ight)\in S\left(X
ight) אזי g\in G ויהי lpha\in G\curvearrowright X אמי קבוצה תהא למה: תהא
        arphi_lpha\left(g
ight)(x)=lpha\left(g,x
ight) חבורה תהא G חבורה ותהא איlpha\in G\curvearrowright X אזי מועדרת G חבורה תהא א
                                            . סענה: תהא \varphi_{lpha} אזי lpha\in G\curvearrowright X אחותהא קבוצה חבורה תהא מענה: תהא
```

 $arphi(k)=c_k$ סענה: תהא G חבורה יהי G יהי G יהי א באשר באשר G באשר G יהי א ונגדיר $H\cap K=\{e\}$ ונגדיר איהי שונה יהי איהי G

 $D_n\cong C_n$ איזי $k\in K$ לכל $arphi(k)=c_k$ כך כך $arphi:C_2 o {
m Aut}\,(C_n)$ ונגדיר ונגדיר $n\in \mathbb{N}_{\geq 2}$ יהי

 $\mathcal{H}\left(\mathbb{F}_{2}\right)\cong D_{4}$ טענה:

 $.G\cong H
times_{arphi}K$ איז $k\in K$

```
lpha_{arphi}\left(g,x
ight)=arphi\left(g
ight)(x) המוגדרת lpha_{arphi}:G	imes X	o T הומומורפיזם אזי lpha:G	o X חבורה תהא lpha קבוצה ויהי
                                                                                                              . פעולה lpha_{arphi} חבורה תהא אזי קבוצה ויהי arphi:G	o S\left(X
ight) פעולה תהא חבורה תהא
                                                       |o\left(x
ight)|=[G:\mathsf{Stab}_{G}\left(x
ight)] אזי x\in X איזי חבורה הפועלת על X חבורה הפועלת על אזי קבוצה תהא
                         |\{o\left(x
ight)\mid x\in X\}|=rac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}_{X}\left(g
ight)| איזי איז חבורה חבורה G חבורה חבורה חבורה איז קבוצה איזי חבורה ח
                                       lpha\left(g,g'H
ight)=gg'H המוגדרת lpha\in G\curvearrowright G/H אזי אוlpha\in G המשמאליים: תהא חבורה ותהא lpha\in G
                                                                                    . טענה: תהא G חבורה ותהא H \leq G אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.
                        עבורן קיימת (lpha,eta)\in (G\curvearrowright X)	imes (G\curvearrowright Y) חבורה אזי חבורה G קבוצות ותהיינה X,Y קבורן קיימת עפורן אקווריאנטיות
                                                                                                                x \in X ולכל g \in G לכל F(\alpha(g,x)) = \beta(g,F(x)) ולכל המקיימת F:X \to Y
טענה: תהא o\left(x
ight)=X עבורו x\in X טרנזיטיבית תהא lpha\in G\curvearrowright X אזי הפעולה על חבורה תהא איזי הפעולה על מענה:
                                                                                                                                                                                                                                      .lphaהשמאליים של G/_{\mathsf{Stab}_G(x)} אקווריאנטית
מסקנה: תהא עבורה הפעולה על הקוסטים אזי קיימת אזי איי סינבית אזי חבורה ותהא חבורה ותהא חבורה מסקנה: מסקנה: עבורה הפעולה או חבורה ותהא מסקנה:
                                                                                                                                                                                                                                                                                                           .\alphaאקווריאנטית ל־
                                                                                                          X טענה: תהא \{o\left(x\right)\mid x\in X\} אזי אוי חבורה חבורה G חלוקה של
                                                      .o\left(x
ight)=X מתקיים x\in X אוי לכל מסקנה: תהא lpha\in G\curvearrowright X חבורה ותהא חבורה מסקנה: תהא
                                                                אזי p\in igcup_{i=1}^n arphi_i (P	imes\{0\}) איזי של \mathbb{R}^3 ותהא p\in igcup_{i=1}^n arphi_i (P	imes\{0\}) אזי מצולע משוכלל יהיו
                                                                                                                                                                                                                    .Poly (p) = |\{\varphi_i (P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i (P \times \{0\})\}|
עבורן \mathbb{R}^3 עבורה איזומטריות איזומטריות עבורה קיים מצולע משוכלל אוני: קבוצה קמורה אוניחה אניחה אבורה קיים מצולע משוכלל אוני: קבוצה קמורה אוניחה אוניחה אוניחה אוניחה עבורה קיים מצולע משוכלל
                                                                                                                                                                                                           \partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i\left(P \times \{0\}\right) פאות איזומטריות: •
                                                                                                     .
Poly (v_1)= Poly (v_2) מתקיים v_1,v_2\in K פודקודים לכל קודקודים יהה כמות:
עבורן \mathbb{R}^3 עבורן arphi_1\ldotsarphi_n של arphi_1\ldotsarphi_n של איזומטריות איזומטריות אפלטוני: יהיK\subseteq\mathbb{R}^3 אוף אפלטוני אזיn\in\mathbb{N} מינימלי עבורו קיימות איזומטריות
                                                                                                                                                                                           באשר P\subseteq\mathbb{R}^2 באשר \partial K=igcup_{i=1}^n arphi_i \left(P	imes\{0\}
ight)
                                                                              . Iso (P)=\left\{arphi:\mathbb{R}^3	o\mathbb{R}^3\mid (מימון: יהי K\subseteq\mathbb{R}^3 גוף אפלטוני אזי K\subseteq\mathbb{R}^3 איזומטריה יהי אוי גוף אפלטוני אזי אוי
                    \operatorname{Iso}_+(P)=\left\{arphi:\mathbb{R}^3	o\mathbb{R}^3\mid (גוף אפלטוני אזי (arphi)וני איזי אומטריה משמרת איזומטריה (arphi) איזומטריה אוריינטציה אוריינט איינט איינט
                                                                     \{n,\operatorname{Poly}(k)\} אזי קודקוד v\in K פאות ויהי n\in\mathbb{N} גוף אפלטוני גוף אפלטוני בעל אזי K\subseteq\mathbb{R}^3 הגדרה סימון שלפלי: יהי
                                                                                                                                                                                                                                      הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.
                                                                                                                                                                                            \{5,3\} בעל סימון שלפלי K\subseteq\mathbb{R}^3 בעל אפלטוני גוף אפלטוני
                                                                                                                                                                                                                                \operatorname{Iso}_+(D) \cong A_5 טענה: יהי D דודקהדרון אזי
                                                                                                                                                                                                               .ord (Iso<sub>+</sub> (D)) = 60 מסקנה: יהי דודקהדרון אזי מסקנה:
```

 $G\cong H$ משפט קיילי: תהא $H\leq S\left(X
ight)$ וקיימת קבוצה X וקיימת חבורה אזי קיימת חבורה אזי קיימת $G\cong H$ עבורה $H\leq S\left(\mathbb{N}\right)$ אזי קיימת $G\cong H$ עבורה אם חבורה באשר $G\cong H$

 $G \cong S_3$ או $G \cong \mathbb{Z}_6$ אזי $G \cong G$ או $G \cong G$ טענה: תהא

 $h^g=g^{-1}hg$ אזי $h,g\in G$ חבורה ויהיו חבורה G אזי $h^{g,k}=(h^g)^k$ טענה: תהא $g,h,k\in G$ חבורה ויהיו

G מסקנה: תהא G חבורה אזי $\{[h]\mid h\in G\}$ חלוקה של

 $.C_G\left(h
ight) \leq G$ אזי א $h \in G$ חבורה חבורה מסקנה: תהא מסקנה: תהא חבורה אזי מענה: תהא חבורה אזי G

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)$ אופיינית. $G/\mathcal{Z}(G)\cong\operatorname{Inn}(G)$ טענה: תהא G חבורה אזי

 $lpha\left(g,h
ight)=c_{g}\left(h
ight)$ המוגדרת $lpha\in G\curvearrowright G$ חבורה אזי חבורה lpha

 $[h]=\left\{ghg^{-1}\mid g\in G
ight\}$ אזי $h\in G$ חבורה תהא חבורה ממידות: תהא G אזי חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי G אזי חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי

 $.C_G\left(h
ight)=\{g\in G\mid gh=hg\}$ אזי $h\in G$ חבורה חבורה G הממרכז של איבר: תהא ממרכז של פעולת החבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h\in G$ אזי חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי

 $\operatorname{ord}\left(g
ight)=p$ עבורו עבורו קיים אזי קיים עבורו עבורו עבורה סופית ויהי $g\in G$ עבורו עבורו עבורו עבורו עבורה סופית ויהי

.ord (H)=p אזי קיימת $H\leq G$ אזי קיימת עבורה $p|\operatorname{ord}(G)$ עבורו עבורה $p\in\mathbb{P}$ אין ציקלית עבורה G

```
\sum_{g\in C}rac{1}{|C_G(g)|}=1 אזי \{[h]\mid h\in G\} אזי קבוצת נציגים של קבוצת חבורה סופית חבורה סופית חבורה כופית משוואת מחלקות הצמידות:
                                                                \mathcal{Z}\left(G
ight)=igcup\{[g]\mid (g\in G)\wedge (|[g]|=1)\} טענה: תהא G חבורה סופית אזי
                   למה: יהי \beta=(m_{1,1}\cdots m_{1,\ell_1})\circ\ldots\circ(m_{b,1}\cdots m_{b,\ell_b}) באשר \alpha,\beta\in S_n פירוק מעגלים זרים אזי n\in\mathbb{N}_+ למה:
                                                                                \alpha\beta\alpha^{-1} = (\alpha(m_{1,1}) \dots \alpha(m_{1,\ell_1})) \circ \dots \circ (\alpha(m_{b,1}) \dots \alpha(m_{b,\ell_b}))
                                                                                                                                        . פשוטה A_5
                                    H=A_n אזי \pi\in H אזי שלוש בגודל שלוש מעגל \pi עבורה קיים עבורה H\unlhd A_n אזי ותהא ותהא למה: יהי
                                                                                                                                        .למה: A_6 פשוטה
                                                                                               . משפט: יהי אבלית אזי n\in\mathbb{N}_{>5} יהי משפט: יהי
                         \mathbb{FP}=(\mathbb{F}^2\setminus\{0\})/R אזי R=\left\{(x,y)\in\mathbb{F}^2\setminus\{0\}\;\middle|\;\exists\lambda\in\mathbb{F}^	imes\;(x=\lambda y)
ight\} אזי היישר הפרויקטיבי: יהי
                                                                      \mathcal{Z}\left(\mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}
ight)
ight)=\{\lambda I_n\mid\lambda\in\mathbb{F}^{	imes}\} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq2} שדה ויהי \mathbb{F} שדה ויהי
                                                                            \operatorname{PGL}_n\left(\mathbb{F}
ight)=\operatorname{GL}_n(\mathbb{F})/\mathcal{Z}(\operatorname{GL}_n(\mathbb{F})) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} שדה ויהי \mathbb{F} שדה ויהי
                                                                   |G|=p^n יהי n\in\mathbb{N} המקיים עבורה q\in\mathbb{R} אזי חבורה אזי יהי יהי
                                                                                         \mathcal{Z}\left(G
ight)
eq \left\{e
ight\} אזי p\in\mathbb{P} ותהא חבורת G ותהא א
                                                                                    . אבלית G אזי אזי p\in\mathbb{P} אזי מסקנה: יהי p\in\mathbb{P} אזי מסקנה:
                                                                                         . נילפוטנטית אזי G אזי p חבורת־G ותהא ותהא p \in \mathbb{P}
H \leq G אזי אוי|G| = p^k \cdot m חבורה באשר חבורה G ותהא אוי אוי באשר m,k \in \mathbb{N} אזי p \in \mathbb{P} אזי p \in \mathbb{R}
p-חבורה K \leq G וכן לכל חבורת H) אזי (H \in \mathcal{G} אזי ותהא H \leq G חבורה חבורה חבורה חבורה אזי וענה: יהי
                                                                                                                                   |K| \leq |H| מתקיים
                      (p \not\mid [G:H] טענה: יהי p \in \mathbb{P} חבורה ותהא H \leq G אזי וענה: אזי חבורה H חבורה אזי וענה: אזי חבורה ותהא H \leq G
                                      \operatorname{Syl}_n(G)=\{H\leq G\mid G אינו של p\in \mathbb{P} חבורה סופית אזיg\in \mathbb{P} חבורה סופית אזיg\in \mathbb{P} ותהא
                                                                                 .n_{p}=\left|\operatorname{Syl}_{p}\left(G
ight)
ight| יהי אזי חבורה חבורה G ותהא ותהא p\in\mathbb{P}
                                                                    p 
otin \gcd(p,m) = 1 באשר n,m \in \mathbb{N}_+ ויהיו p \in \mathbb{P} אזי p \in \mathbb{P}
                        G משפט סילו הראשון: יהי H תת־חבורה סופית אזי קיימת H \leq G ותהא חבורה סופית חבורה סופית אזי קיימת
                                                                                          n_p \geq 1 יהי חבורה חבורה p \in \mathbb{P} ותהא מסקנה: יהי
                                            N_{G}\left(H
ight)=\left\{g\in G\mid gHg^{-1}=H
ight\} אזי אוי חבורה תהא חבורה: תהא חבורה G
                                                                 H \subseteq N_G(H) וכן N_G(H) \subseteq G אזי H \subseteq G חבורה חבורה G אסענה: תהא
H,K \leq G ותהיינה G באשר חבורות G תהא תהא \gcd(p,m)=1 באשר הבאשר m,k \in \mathbb{N} ותהיינה למה: יהי
                                                                                                                  .H \nsubseteq N_G\left(K
ight) אזי H 
eq K באשר
g+g^{-1}=K עבורו g\in G אוי קיים סילו של G אוי סילו של g+G תת־חבורה סופית ותהיינה G תהא חבורה סופית ותהיינה ותהיינה אוי חבורה סופית ותהיינה משפט סילו השני: יהי
                           (n_p=1)\Longleftrightarrow (H\unlhd G) מסקנה: יהי p אזי תהא H תת־חבורה סופית ותהא p\in\mathbb{P} מסקנה:
y \in Y ולכל g \in G איזי איזי איזי איזי Y \subseteq X ולכל קבוצה ותהא קבוצה ותהא קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה: תהא
                                                                                                                                       g,y \in Y מתקיים
\mathcal{O}\subseteq X שפורה)\Longleftrightarrowר שמורה)\Longrightarrow עבורה אזי על איזי איזי עותהא אין ותהא Y\subseteq X חבורה הפועלת על חבורה הפועלת על איזי שורה)
                                                                                                                                     \mathcal{N} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} o(x)
                       טענה: יהי \alpha עונה אזי \alpha עונה: יהי שונה: יהי מופית ונגדיר \alpha עונה: יהי
למה: יהי R וכן H\in R וכן H\in R וכן הינה H\in Syl_p(G) אזי סילו תהא H\leq G תת־חבורה תהא חבורה אזי H\in R
                                                                 n_p \equiv 1 \mod p אוי אוי חבורה חבורה G ותהא ותהא אוי יהי השלישי: יהי
                            a_n|m אזי אזי |G|=p^k\cdot m חבורה באשר G ותהא \gcd(p,m)=1 באשר m,k\in\mathbb{N} יהיו יהי p\in\mathbb{P} יהי
                                                                                      n_p|\mathrm{ord}\,(G) מסקנה: יהי p\in\mathbb{P} ותהא חבורה חבורה סופית אזי
```

 $|G||=|G:C_{G}\left(g
ight)$ אזי $g\in G$ מסקנה: תהא חבורה סופית ויהי

מסקנה משפטי סילו: יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא חבורה סופית אזי G . באשר $H\leq G$ סילו של

 $|C_G(k)|=|C_G(h)|$ אזי $k=ghg^{-1}$ באשר g,h,k ויהיו חבורה G אחי

```
.n_p \equiv 1 \mod p .3
                                                                                           H=\langle \pi
angle עבורו \pi\in S_p אזי קיים p־מעגל H=p באשר באשר H\leq S_p ותהא p\in\mathbb{P} יהי
                                                                                                                                                                    (p-1)! \equiv -1 \mod p אזי p \in \mathbb{P} מסקנה משפט ווילסון: יהי
                                                                                    טענה: יהיו p \in p אזי אזי q \neq 1 \mod p וכן p < q אזי אזי q \in \mathbb{P} ותהא יהיו
                                                                                                                                       G \cong D_p או G \cong C_{2p} אזי אזי p \in \mathbb{P}_{>2} ותהא p \in \mathbb{P}_{>2}
                                                                         N_G\left(N_G\left(P
ight)
ight)=N_G\left(P
ight) אזי איי ענה: תהא P\leq G ותהא p\in\mathbb{P} ותהא P\leq G חבורה סופית יהי
                                                         g\in A ולכל n\in\mathbb{Z} לכל g^n=ng וכן x\in A לכל -x=x^{-1} וכן ולכל e_A=0 ולכל תהא
אזי g,h\in\prod_{i\in I}G_i לכל לכל (g\cdot h)_i=g_i\cdot h_i חבורות נגדיר אזי ולכל ותהיינה קבוצה ותהיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה וולכל ולכל ולכל וולכל וו
                                                                                                                                                                                                                                                                                         (\prod_{i\in I}G_i,\cdot)
                                                                                                                                        חבורה. \prod_{i\in I}G_i אזי חבורות \{G_i\mid i\in I\} חבורה ותהיינה קבוצה ותהיינה
                                                                                                                              חבורות אזי אחיצוני: תהא \{G_i \mid i \in I\} חבורת הסכום הישר החיצוני: תהא
                                                                                                                                                                           .\bigoplus_{i\in I}G_n=\left\{g\in\prod_{i\in I}G_i\mid |\{i\in I\mid g_i\neq e_{G_i}\}|\in\mathbb{N}\right\}
G_i\cap\left(igoplus_{j
eq i}G_i
ight)=\{e\} באשר באשר איימת קבורה קיימת קבוצה |I|\geq 2 באשר באשר עבורה קיימת קבוצה עבורה קיימת קבוצה וקיימות באשר איימות וקיימות וקיימות ואיימות באשר איימת קבוצה ואיימת קבוצה ואיימת קבוצה ואיימת קבוצה ואיימת קבוצה איימת קבוצה ואיימת הבודרה הבודרה ואיימת הבודרה ואימת הבודרה בבודרה בבודרה בבודרה הבודרה בבודר
                                                                                                                                                                                                                                                 G = \bigoplus_{i \in I} G_n לכל i \in I לכל
                                                                                                                                                                                 הערה: נקרא לחבורת סכום ישר חיצוני חבורת סכום ישר.
                                                                                                                          \bigoplus_{i\in I}G_n\leq \prod_{i\in I}G_i אזי חבורות אזי \{G_i\mid i\in I\} טענה: תהא קבוצה ותהיינה
                                                                                                                                                                                                                T\left( G
ight) =G אבורת פיתול: חבורה G
                                                                                                                                                                                 T\left(G
ight)=\left\{ e
ight\} אבורה לכל G חבורה חסרת פיתול:
                                                                                                                                                                                      טענה: תהא A חבורה אבלית אזי A חסרת פיתול.
                                                                                                                                                                                      G/H אזי H \subseteq G טענה: תהא G חבורה נ"ס ותהא G
                                                                                                               Gמסקנה: תהיינה G,H,Kוליס), חבורות באשר G\cong H	imes K מסקנה: תהיינה
                                                                                                                                                                                                igoplus_X \mathbb{Z} אזי קבוצה אזי תהא X קבוצה אזי
                                                                                          X בסיס של חבורה אבלית חופשית: תהא X קבוצה ותהא בסיס של חבורה אבלית חופשית אזי
                                                                                       \|X\| חבורה אבלית חופשית: תהא אזי קבוצה ותהא אוי חבורה אבלית חופשית אזי אזי אוי דרגה של חבורה אבלית חופשית:
                                         x\mapsto e_x כך X כדיס אזי נשכן בצורה במוך החבורה האבלית בתוך במיס X כך בצורה כצורה בעית את התופשית עם בסיס כדיס במיס
arphi:igoplus_X\mathbb{Z}	o G משפט התכונה האוניברסלית: תהא f:X	o G חבורה ותהא חבורה תהא קבוצה תהא משפט התכונה האוניברסלית: משפט התכונה האוניברסלית:
                                                                                                                                                                                                                                         x \in X לכל \varphi(x) = f(x) עבורו
\psi:F	o B משפט תכונת ההרמה: תהא \varphi:A	o B חבורה אבלית חופשית תהיינה A,B חבורה אבליות ויהי
                                                                                                                                                         .arphi\circ\hat{\psi}=\psi עבורו \hat{\psi}:F	o A הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם
                                                           A \cong B \oplus A/B אבלית חופשית אזי B < A באשר אבלית ותהא A \cong B \oplus A/B אבלית חופשית אזי
                                                                                                                            משפט: תהא A אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי A אבלית חופשית עם בסיס סופי.
                                                                                                                                      A \cong \mathbb{Z}^k עבורו k \in \mathbb{N} מסקנה: תהא אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי קיים
                                                                                                                                                                                           תהא A חבורת פיתול אבלית נ"ס אזי A סופית.
                                                                                                                                                                                                                                                 משפט: תהא A אבלית נ"ס אזי
                                                                                                                                                                                                                                                    A \cong A/T(A) \oplus T(A) \bullet
                                                                                                                                                                                                                          A/T(A)\cong \mathbb{Z}^k עבורו k\in \mathbb{N} סיים
                                                                                                                                                                                                                                                                           . סופית T(A) \bullet
                                                                            A\cong\mathbb{Z}^k\oplus B עבורם k\in\mathbb{N} מסקנה: תהא A אבלית נ"ס אזי קיימת חבורה אבלית סופית
```

 $qHq^{-1}=K$ עבורו $q\in G$ אזי קיים $q\in G$ עבורו של $q\in G$ עבורו של $q\in G$ עבורו של 2.

 $G_p = \{x \in G \mid p| \mathrm{ord}\,(x)\}$ אזי $p \in \mathbb{P}$ חבורה ויהי G חבורה אזי

 $A=igoplus \left\{P\leq A\; \middle|\; \exists p\in \mathbb{P}\left(P\in \operatorname{Syl}_p\left(A
ight)
ight)
ight\}$ מסקנה: תהא אבלית סופית אזי

 $A_p \leq A$ אזי $p \in \mathbb{P}$ אינת: תהא A חבורה אבלית ויהי $p \in \mathbb{P}$ אזי A חבורת־ A_p אזי $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$ אזי סענה: תהא A אבלית סופית אזי $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$ אזי חבית אוסי $A \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} A_p$ אזי A אבלית סופית ויהי A אזי A אבלית סופית ויהי A

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ יהי $a_1\ldots a_{n+1}\in\mathbb{N}$ תהא $a_1\ldots a_{n+1}\in A$ ויהיו $a_1\ldots a_{n+1}\in \mathbb{N}$ יהי $a_1\ldots a_{n+1}\in \mathbb{N}$ עבורם $a_i \not\equiv 0 \mod p$ וכן קיים $i \in [n+1]$ וכן קיים $\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i = 0$ טענה: תהא G אבלית ותהא G התב"ש A+B=G וכן $B\cap A=\{e\}$ עבורה $B\leq G$ קיימת B

a=a+b עבורם $b\in B$ וקיים ויחיד $a\in A$ קיים ויחיד $g\in G$ עבורה לכל

. העתקת המנה $u:G \to G/A$ באשר $u\circ \varphi = \mathrm{Id}_{G/A}$ עבורו $\varphi:G/A \to G$ העתקת המנה $u\circ \varphi = \mathrm{Id}_{G/A}$

 $\pi:G o A$ קיימת נשג $\sigma:G$

 $(A\cong \mathbb{Z}^k/G)$ עבורם $G<\mathbb{Z}^k$ וקיימת $k\in \mathbb{N}$ טענה: תהא A אבלית אזי A אבלית אזי איים)

 $\operatorname{ord}\left(q
ight)\in\left\{ 1,p
ight\}$ מתקיים $q\in G$ מתקיים אזי חבורה $p\in\mathbb{P}$ אזי חבורה $q\in G$

משפט המבנה לחבורות־p אזי קיים ויחיד $k\in\mathbb{N}$ יהי יהי אבליות סופית בעלת סופית המבנה לחבורות־p אזי יהי ויחיד אבליות המיים ויחיד אבליות משפט המבנה לחבורות־p אזי קיים ויחיד אבליות משפט המבנה לחבורות־p אוי יהי ויחיד אבליות סופית: $A\cong igoplus_{i=1}^k C_{p^{n_i}}$ עבורם $\sum_{i=1}^k n_i=n$ וכן $i\in [k-1]$ לכל $n_{i+1}\leq n_i$ באשר באשר $n_1\ldots n_k\in \mathbb{N}_+$ ויחידים

מסקנה משפט המיון לחבורות אבליות סופיות: תהא A אבלית סופית אזי קיים ויחיד ווחידים $k\in\mathbb{N}$ וקיימים ויחידים באשר $A\congigoplus_{i=1}^k C_{m_i}$ עבורם $i\in[k-1]$ לכל $m_i|m_{i+1}$

וקיימים $i\in [k-1]$ לכל $p_i\leq p_{i+1}$ באשר באשר אבלית סופית אזי קיים ויחיד א קיימים ויחידים אבלית באשר אבלית סופית אזי קיים ויחידים ויחידים אויחידים ויחידים אבלית סופית אזי קיים ויחידים אויחידים אבלית סופית אזי קיים ויחידים אבלית סופית אויחידים אבלית סופית אזי קיים ויחידים אויחידים אבלית סופית אויחידים אויח $A\cong igoplus_{i=1}^k C_{n_i^{t_i}}$ עבורם $t_1\dots t_k\in\mathbb{N}$ ויחידים

 $A \cong B$ אזי $A \oplus C \cong B \oplus C$ מסקנה: תהיינה A,B,C אבליות סופיות באשר

 $A \cong B$ אזי $A \oplus A \cong B \oplus B$ מסקנה: תהיינה A, B אזי אבליות סופיות באשר

. ציקלית אזי A טופית אזי $A \leq \mathbb{F}^{\times}$ שדה ותהא \mathbb{F} יהי מסקנה: יהי

. מסקנה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי ציקלית מסקנה:

 $C \cong A/B$ עבורה עבורה איי קיימת אזי קיימת חופית סופית טענה: תהא אבלית סופית ותהא אבלית אזי קיימת

 $\chi:A o\mathbb{S}^1$ קרקטר: תהא A אבלית אזי הומומורפיזם

 $\hat{A} = \{\chi: A o \mathbb{S}^1 \mid$ החבורה $\chi\}$ קרקטר חבורה חבורה A חבורה הדואלית: תהא

 $.C_n\cong\widehat{C_n}$ אזי $n\in\mathbb{N}$ טענה: יהי

 $\widehat{A imes B} = \hat{A} imes \hat{B}$ אבליות סופיות אזי A,B טענה: תהיינה

 $A\cong \hat{A}$ מסקנה: תהא A אלבית סופית אזי

 $U(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=\{a\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\mid\exists b\in\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\ (a\cdot b=1)\}$ אזי $p\in\mathbb{P}\setminus\{2\}$ יהי יהי $p\in\mathbb{P}\setminus\{2\}$ יהי

. ציקלית $U\left(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}
ight)$ אזי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $p\in\mathbb{P}ackslash\left\{2
ight\}$ ציקלית.

 $T \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} T_p$ משפט גאוס: חבורת חבורת משפט מאוס:

 $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight)=\left\{rac{k}{p^{n}}\ \middle|\ (n\in\mathbb{N})\wedge\left(k\in\{0,\ldots,p^{n}-1\}
ight)
ight\}$ ההי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ אזי $a\star b=(a+b)-\lfloor a+b\rfloor$ כך p כך p אזי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$.($\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight),\star$)

. טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $p\in\mathbb{P}$ חבורה

 $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}
ight)\cong\left\{2^{\pi i\cdot rac{k}{p^n}}\;\middle|\;(n\in\mathbb{N})\wedge(k\in\{0,\ldots,p^n-1\})
ight\}$ טענה: יהי $p\in\mathbb{P}$ איזי מענה: $p\in\mathbb{P}$ איזי $p\in\mathbb{P}$ מענה: $p\in\mathbb{P}$ מענה: $p\in\mathbb{P}$ מענה: $p\in\mathbb{P}$ מענה: $p\in\mathbb{P}$ מענה:

 $a\cdot b=a$ המקיים $b\in G$ עבורו קיים $a\in G$ אזר אבלית ויהי חבורה אבלית חבורה אבלית ויהי מתחלק במספר:

a ב־n מתחלק בים מתחלק מתקיים כי $a\in G$ עבורה לכל עבורה לכל $a\in G$ מתחלק בים מתחלק מתחלק

מסקנה: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} חליקה.

סענה: D חבורות אבליות באשר D חליקה ויהי G חליקה ויהי חליקה אזי D חבורות אבליות באשר חליקה ויהי

 $(i \in I \)$ סענה: תהא $(i \in I \)$ חליקה חבורה אבלית לכל וענה: תהא $(i \in I \)$ חליקה לכל חבורה אבלית לכל וענה: תהא חבורה אבלית לכל וענה: תהא וענה ותהא

מסקנה: יהי $\mathbb{Z}\left(p^{\infty}\right)$ אזי $p\in\mathbb{P}$ חליקה.

חבורה מצומצמת: חבורה G עבורה לכל $H \leq G$ מתקיים כי

וכן $C\cap B=\{0\}$ באשר באיר קיימת אזי קיימת A אבלית ויהי אבלית ויהי $B\leq A$ אבלית ויהי $A = C \oplus B$

 $A=D\oplus K$ מסקנה: תהא A אבלית ותהא $D\leq A$ חליקה אזי קיימת $K\leq A$ באשר $C\leq A$ וכן

 $A=D\oplus R$ סענה: תהא A אבלית אזי קיימת D< A חליקה וקיימת R< A מצומצמת באשר $D\cap R=\{0\}$ וכן

```
[g,h]=g^{-1}h^{-1}gh אזי g,h\in G חבורה חבורה G חבורה מוטטור: תהא
                                          g,h \in G מסקנה: תהא G חבורה ויהיוG אזי מסקנה: תהא
                                                 [I+e_{i,j},I+e_{j,k}]=e_{i,k} אזי i,j,k\in[n] ויהיו n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                          I[I+e_{i,j},I+e_{j,\ell}]=I שונים אזי i,j,k,\ell\in[n] ויהיו n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                             Av=v עבורו יחיד אזי קיים ויחיד עבורו אזי קיים תהא A\in\mathrm{SO}\left(3
ight) אזי אויילר: תהא
g\cdot \mathrm{Fix}\,(h)=\mathrm{Fix}\,(h) אזי(g,h]=e באשר g,h\in G באשר אזי(g,h)=g אזי(g,h)=g באשר
                                                            [G,G] = \{[g,h] \mid g,h \in G\} הגדרה: תהא G חבורה אזי
                                                                    G' = \langle [G,G] \rangle חבורה אזי (הא תהא תהא תבורת הנגזרת:
                    \langle X 
angle char G איזי \varphi \in \operatorname{Aut}(G) לכל \varphi(X) = X עבורה X \subseteq G איזי X \subseteq G
                                                                                    G' char G אזי חבורה G תהא
                                                                G^{ab}=G/G' אבליזציה של חבורה: תהא G חבורה אזי
                                                                             G=G' עבורה מושלמת: חבורה חבורה
                                                             מושלמת. G חבורה פשוטה לא אבלית אזי G חבורה משלמת.
                                                                                 מסקנה: יהי A_n אזי n\in\mathbb{N}_{>5} מטקנה:
                                                                             טענה: יהי\mathbb{SL}_n\left(\mathbb{R}
ight) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} מושלמת.
                                   x=[\pi,\sigma] עבורן \pi,\sigma\in S_n אזי קיימות x\in A_n ויהי ויהי ויהי אור: יהי
                                                                                       למה אבליזציה: תהא G חבורה אזי
                                                                                                         .אבלית G^{ab}
                    (G' < \ker(\varphi))אבלית) מתקיים G' : G \to H ולכל אפימורפיזם ולכל הביתו של לכל הבורה G' = G'
                                                             (G' < N)אבלית) מתקיים N \triangleleft G מתקיים N \triangleleft G
         מסקנה: תהא G חבורה מושלמת תהא A חבורה אבלית ויהי \varphi:G 	o A הומומורפיזם אזי \varphi טריוואלי.
                                                                                    S_n'=A_n אזי n\in\mathbb{N}_+ מסקנה: יהי
                                                                                 .S_n^{ab}\cong\{\pm 1\} אזי n\in\mathbb{N}_+ מסקנה: יהי יהי
                                                                     \left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{R}
ight)
ight)^{\prime}=\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{R}
ight) אזי n\in\mathbb{N}_{\geq2} יהי יהי
                                                                        \left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{R}
ight)
ight)^{ab}=\mathbb{R}^{	imes} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq2} יהי מסקנה: יהי
                                a \in \mathbb{N} לכל G^{(n+1)} = \left(G^{(n)}
ight)' וכן וכן G^{(0)} = G לכל חבורה אזי חבורה הנגזרת: תהא
                                   מסקנה: תהא G חבורה עבורה קיים n\in\mathbb{N} המקיים G אזי G^{(n)}=\{e\} מסקנה:
                                       סדרה נורמלית: תהא G חבורה ויהי n\in\mathbb{N}_+ אזי חבורה G המקיימות
                                                                                           G_0 = \{e\} וכן G_n = G \bullet
                                                                                          i \in [n] לכל G_i \unlhd G_{i-1}
                                      .(G^{(n)}=\{e\} עבורו n\in\mathbb{N} פתירה)\Longleftrightarrow(קיים G חבורה אזי G חבורה אזי (משפט: תהא
                                                                                    . פתירה D_n אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} פתירה n\in\mathbb{N}_{\geq 2}
                                                                       G^{(2)}=\{e\} תבורה G עבורה מטאבלית: חבורה
                         .(קיימת G/N אבלית עבורה M \triangleleft G אבלית) מטאבלית) מטאבלית אזי (G מטאבלית) אבלית חבורה אזי (
                       M 
ot \leq N מתקיים N \leq G עבורה לכל עבורה אזי חבורה חבורה מקסימלית: תהא
                                                    \Phi\left(G\right)=\bigcap_{\substack{M\leq G\\\text{ מקסימלית}}}M\leq M חבורה חבורה G תהא פרטיני: תהא ת־חבורת חבורה G
  \langle X 
angle = G מתקיים עבורה אזי g \in G עבורו לכל עבורו לכל עבורו אינר X \cup \{g\}
                                                           \Phi\left(G
ight)=\left\{g\in G\mid \Phi\left(G
ight) לא־יוצר G חבורה אזי לאייוצר מענה: תהא
```

וכן $D \cap R = \{0\}$ חסרת פיתול באשר F < D חליקה וקיימת A < D מצומצמת קיימת B < A מצומצמת קיימת מסקנה:

טענה: תהא D אבלית חליקה אזי T(D) חליקה.

 $A=T\left(D\right)\oplus F\oplus R$ וכן $D=T\left(D\right)\oplus F$ וכן $T\left(D\right)\cap F=\{0\}$ וכן $A=D\oplus R$ משפט: תהא T חבורה אבלית חליקה חסרת פיתול אזי קיימת קבוצה T עבורה F משפט: תהא

 $\mathbb{P}\left(xy=yx
ight)\leq rac{5}{8}$ משפט ארדש־טוראן: תהא חבורה סופית לא אבלית משפט ארדש־טוראן

 $\mathbb{P}\left(xy=yx
ight)=rac{5}{8}$ עבורה עבורה סופית לא אבלית סיימת חבורה סופית לא

 $T\cong\bigoplus_I\mathbb{Z}(p^\infty)$ חבורת עבורה I חבורת אזי קיים אבלית אזי קיים או חליקה אבלית חליקה חבורת משפט: תהא

 $\Phi(G)$ char G טענה: תהא G חבורה אזי

. אבלית אזי G אבלית אזי $G/\mathcal{Z}(G)$ אבלית חבורה באשר חבורה G

הרחבה של חבורה אבלית אזי חבורה G חבורה אבלית חבורה אבלית חבורה אבלית תהא חבורה אבלית תהא אבלית: תהא K חבורה אבלית: $\ker\left(\varphi\right)\cong L$ המקיים $\varphi:G\to K$

 $Q \cong G/N$ וכן $N \unlhd G$ חבורה אזי חבורה אזי חבורה Q חבורה: תהא חבורה עבורה עבורה עבורה מבורה.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי

- . מתקיים כי $H \leq G$ מתקיים לכל
- . מתקיים כי G/N סופית $N \unlhd G$ סופית •
- . של H סופיתם מתקיים כי H סופית H סופית לכל הרחבה H

משפט: תהא G חבורת פיתול אזי

- . מתקיים כי H < G מתקיים לכל
- . מתקיים כי G/N פיתול $N \subseteq G$ פיתול •
- . פיתול H פיתול מתקיים כי H פיתול לכל הרחבה H

משפט: תהא G חבורה פתירה אזי

- . מתקיים כי $H \leq G$ פתירה $H \leq G$
- . מתקיים כי G/N פתירה $N \subseteq G$ פתירה •
- . פתירם H פתירם מתקיים כי H פתירה לכל •

 $i\in[n]$ סדרת הרכב: תהא G חבורה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי סדרה נורמלית $G_0\ldots G_n\leq G$ עבורה ויהי G_1 פשוטה לכל G_1 מדרת הרכב אזי G_1

טענה: תהא $G_0 \dots G_n \Longrightarrow (G_0 \dots G_n)$ סדרה נורמלית אזי ($G_0 \dots G_n \bowtie G_n$

 $m\geq n$ עבורה $\tilde{G}_0\ldots \tilde{G}_m\leq G$ עבורה נורמלית אזי סדרה נורמלית חבורה ותהא $\tilde{G}_0\ldots G_n\leq G$ עבורה חברה נורמלית אזי סדרה נורמלית חבורה ותהא $j\in\{0\ldots n\}$ עבורה $i_0=m$ וכן $i_0=m$ וכן $i_0=0$ אזי וכן $i_0=0$ אזי חבורה תהיינה $i_0=0$ חבורה תהיינה $i_0=0$ באשר $i_0=0$ באשר $i_0=0$ אזי חבורה תהיינה $i_0=0$ חבורה תהיינה $i_0=0$ באשר אפור מבורה וכן $i_0=0$ אזי חבורה תהיינה $i_0=0$ אוני מבורה תהיינה ווני מבורה תהיינה ווני מבורה תהיינה ווני מבורה תהיינה ווני מבורה

- $A(B \cap B^*) \leq B(A^* \cap B^*)$ וכן $A(B \cap A^*) \leq A(B^* \cap A^*)$
 - $(A(B^{\star} \cap A^{\star}))/(A(B \cap A^{\star})) \cong (B(A^{\star} \cap B^{\star}))/(B(A \cap B^{\star})) \bullet$

 $ilde{G}_0\dots ilde{G}_N \leq G$ משפט העידון של שרייר: תהא G חבורה תהיינה $G_0\dots G_n \leq G$ וכן $G_0\dots G_n \leq G$ סדרות הרכב אזי קיים עידון $ilde{H}_0\dots ilde{H}_M \leq G$ של $G_0\dots ilde{G}_0\dots ilde{G}_M$ של $G_0\dots ilde{H}_M \leq G$ של $G_0\dots ilde{G}_0\dots ild$

משפט ז'ורדן־הולדר: תהא חבורה אזי

- . בעלת סדרת אזי G בעלת סדרת הרכב \bullet
- $H_0 \dots H_m$ וכן $G_0 \dots G_n$ מתקיים כי $G_0 \dots G_n \leq G$ וכן וכן וכן פולה ל- $G_0 \dots G_n \leq G$

.(סופית) פתירה אזי G בעלת סדרת הרכב) פתירה אזי G פתירה מיענה:

 $G_i=H$ סטענה: תהא G חבורה סופית ותהא G אזי קיימת סדרת הרכב G אזי קיימת עבורה קיים G אזי אינה פתירה אזי G אינה פתירה אזי G סדרת הרכב באשר קיים G עבורו ותהא G אינה אבלית אזי G סדרת הרכב באשר קיים G עבורו ותהא G אינה אבלית אזי G סדרת הרכב באשר קיים G וכן G מקיימת G אינה בעולה: תהא G חבורה אזי G וכן G וכן G וכן G אונן G אינה מעולה: תהא G חבורה אזי G וכן G וכן G אונן G מקיימת העולה: תהא G חבורה אזי G וכן G וכן G אונן G וכן G אונן G אינה מעולה: תהא G אונן G אונן G וכן G וכן G אונן G אונן G אינה מעולה: תהא G אונן G אונן G וכן G וכן G אונן G אונן G אונן G אונן G אינה מעולה: G אונן G

. טענה: תהא G חבורה אזי הסדרה המרכזית העולה יחידה G

 $i\in\mathbb{N}$ לכל $G_{i+1}=\langle [G,G_i]
angle$ וכן וכן $G_0=G$ לכל תהא חבורה אזי היורדת: תהא

Gטענה: תהא G חבורה אזי (G נילפוטנטית) \Longleftrightarrow (קיים G עבורו G חבורה אזי

 $.(G^n=G)\Longleftrightarrow (G_n=\{e\})$ אזי $n\in\mathbb{N}$ חבורה חבורה מענה: תהא

 $i\in\{0\dots n\}$ לכל $G_i\leq G^{n-i}$ אזי $n=\min\{m\in\mathbb{N}\mid G^m=G\}$ לכל לכל לכל נילפוטנטית נילפוטנטית ונגדיר

Q טענה: תהיינה N,Q חבורות תהא G הרחבה של Q ב־N ותהא K פשוטה אזי (K גורם הרכב של K) אורם הרכב של K גורם הרכב של K).

```
וכן n=m אזי אזי \prod_{i=1}^m K_i\cong \prod_{i=1}^n H_i אטייות באשר איי פשוטות אזי וענה: H_1\dots H_n, K_1\dots K_m ותהיינה n,m\in\mathbb{N}_+
                                                                                                       i \in [n] לכל H_i \cong K_{\pi(i)} עבורה \pi \in S_n קיימת
                                                                        t\left(e
ight)=e_{2} וכן o\left(e
ight)=e_{1} אזי e\in E\left(G
ight) וכן גרף מכוון ותהא G
                      \sigma עבורו (e,e^{-1}) מסלול מצומצם: יהי G גרף מכוון אזי מסלול \sigma עבורו לכל של מעבור יהי \sigma גרף מכוון אזי מסלול של
                  \pi_1\left(G,v
ight)=\{\sigma\mid G^v ב־ס מיע לv\in V\left(G
ight) אזי איז \sigma מעגל מצומצום מיv ברv\in V\left(G
ight) גרף מכוון ויהי
                                        . המצויידת עם שרשור מסלולים הינה חבורה. \pi_1\left(G,v\right) אזי v\in V\left(G\right) המצויידת עם שרשור מסלולים הינה חבורה.
                                                                   (e,e^{-1}) מהצורה משרשרים מסלולים של לצמצם תתי מסלולים מהצורה הערה:
                                                                                                                   \pi_1\left(\left(\{v\},\{(v,v)\}\right),v\right)\cong\mathbb{Z} מסקנה:
                                                                           B_n = (\{v\}, \{(v, v, 1) \dots (v, v, n)\}) אזי n \in \mathbb{N}_+ יהי השושנים: יהי
                                                                                 v של עצמיות עצמיות בעל n לולאות הינו מולטי הינו מולטי הערה:
                                                                                                   F_n = \pi_1\left(B_n,v
ight) אזי n \in \mathbb{N}_+ יהי חבורה חופשית: יהי
                        .Cay (G,S)=(G,\{(g,gs)\mid (g\in G)\land (s\in S)\}) אויי יוצרת אזי איילי: תהא G חבורה ותהא אויי איילי: תהא א
                                                                 V\left(G
ight) פועלת טרנזיטיביי. גרף מכוון המקיים כי Aut\left(G
ight) המקיים על ארף טרנזיטיביי. גרף מכוון
                                                          \deg\left(v
ight)=\deg\left(u
ight) מתקיים v,u\in V\left(G
ight) כי לכל
                                                   . גרף טרנזיטיבי ורגולרי. אזי Cay (G,S) אזי קבוצה יוצרת אזי אינה: תהא חבורה ותהא S\subseteq G
                                                         .\bigcup_{n=0}^{\infty}\left(S\cup S^{-1}\right)^{n} אוי יוצרת קבוצה ותהא חבורה ותהא מילים ביוצרים: תהא מילים מילים מילים אוי חבורה ותהא
                                              \bigcap_{i=1}^{n=0} w_i = e יחס ביוצרים: תהא G חבורה ותהא G קבוצה יוצרת אזי מילה G יחס ביוצרים: תהא יוצרת חבורה ותהא יוצרת אזי מילה אוי מילה ותהא
                                         R = \{w \mid Sיחס ב־w\} יחס יוצרת אזי S \subseteq G חבורה ותהא חבורה מיחסים ביוצרים: תהא
תרמילה xx^{-1} מילה מצומצמת ביוצרים: תהא A חבורה ותהא אA \subseteq S קבוצה יוצרת אזי מילה A עבורה לכל
                                                                                                       w של שוכן לא מתקיים כיx^{-1} תת־מילה של של
                                                                  F(X) = \{w \mid Xבורה חופשית: תהא X קבוצה אזי \{w\} מילה מצומצמת ב־
                                                                     טענה: תהא X קבוצה אזי F\left( X\right) המצויידת עם שרשור מילים הינה חבורה.
                                             x^{-1} מילים מהצורה וכן מילים מהצורה מילים יש לצמצם תתי מילים מהצורה בארה: כאשר משרשרים מילים יש לצמצם התי
                                       \hat{x}\left(\ell_1\dots\ell_n
ight)=\left\{egin{array}{ll} x\ell_1\dots\ell_n & \ell_1
eq x^{-1} \\ \ell_2\dots\ell_n & \mathrm{else} \end{array}
ight. כך \hat{x}\in S\left(F\left(X
ight)
ight) נגדיר נהא x\in X נגדיר נהא x\in X נגדיר נהא ליינו ליינות הא
                                \widehat{x^{-1}}\left(\ell_1\dots\ell_n\right) = \left\{egin{array}{ll} x^{-1}\ell_1\dots\ell_n & \ell_1 
eq x \\ \ell_2\dots\ell_n & \mathrm{else} \end{array}
ight. כך \widehat{x^{-1}}\in S\left(F\left(X
ight)\right) כגדיר x\in X כגדיר על הארה: תהא x\in X כגדיר ווהי
           \hat{F}(X)=\left\langle \{\hat{x}\mid x\in X\}\cup \left\{\widehat{x^{-1}}\mid x\in X\right\}
ight
angle הגדרה: תהא G קבוצה אזי קיים G אזי קיים ויחיד הומומורפיזם G עבורו G עבורו G טענה: תהא G קבוצה תהא G חבורה ותהא G אזי קיים ויחיד הומומורפיזם
                                                                                תבורה R יוצרת אזי קבוצה יוצרת ותהא אורה. חבורה תהא מסקנה:
                                                                            G \cong F(S)/R יוצרת אזי קבוצה יוצרת ותהא אוי מסקנה: תהא חבורה ותהא
                                                                       .\langle S\mid R
angle=F(S)/R אזי יוצרת קבוצה ותהא S\subseteq G סימון: תהא G חבורה ותהא
```