

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $[n] = \{1, \dots, n\}$.

עיקרון החיבור: תהינה $A_1 \dots A_n$ קבוצות סופיות אזי $|\biguplus_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$.

עיקרון המשלים: תהינה A, B קבוצות סופיות באשר $A \subseteq B$ אזי $|A| + |B \setminus A| = |B|$.

עיקרון הכפל: תהינה $A_1 \dots A_n$ קבוצות סופיות זרות באשר לכל $i, j \in [n]$ מתקיים $|A_i| = |A_j|$ אזי $|\biguplus_{i=1}^n A_i| = n \cdot |A_1|$.

עיקרון הכפל: תהא A קבוצה סופית יהי $R \subseteq A^2$ יחס שקילות עבורו לכל $x, y \in A$ מתקיים $|[x]_R| = |[y]_R|$ אזי $\forall x \in A. (|A| = |[x]_R| \cdot |A/R|)$.

עיקרון הכפל: תהא A קבוצה סופית תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A)$ חלוקה עבורה לכל $X, Y \in \Pi$ מתקיים $|X| = |Y|$ אזי $\forall X \in \Pi. (|A| = |\Pi| \cdot |X|)$.

עיקרון החלוקה/שיקולי סימטריה: תהינה $A_1 \dots A_n$ קבוצות סופיות זרות באשר לכל $i, j \in [n]$ מתקיים $|A_i| = |A_j|$ אזי $\frac{|\biguplus_{i=1}^n A_i|}{n} = |A_1|$.

תמורה/פרמוטציה: תהא A קבוצה סופית אזי פונקציה $f: A \rightarrow A$ חח"ע ועל.

טענה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $n^k = |\{f: [k] \rightarrow [n]\}|$.

הערה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי n^k זו ספירה עם חשיבות לסדר ועם חזרה.

עצרת: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $n! = \prod_{k=1}^n k$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $n! = |\{f: [n] \rightarrow [n] \mid f \text{ חח"ע ועל}\}|$.

עצרת: תהא A קבוצה אזי $A! = |\{f: A \rightarrow A \mid f \text{ חח"ע ועל}\}|$.

טענה: תהינה A, B קבוצות עבורן $|A| = |B|$ אזי $A! = B!$.

טענה: $\aleph_0! = \aleph$.

חליפות: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $P(k, n) = |\{f: [k] \rightarrow [n] \mid f \text{ חח"ע}\}|$.

טענה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $P(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

הערה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $P(n, k)$ זו ספירה עם חשיבות לסדר ובלי חזרה.

הגדרה: תהא A קבוצה ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathcal{P}_k(A) = \{B \in \mathcal{P}(A) \mid |B| = k\}$.

צירופים: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $C(n, k) = |\mathcal{P}_k([n])|$.

מקדם בינומי: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

טענה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $C(n, k) = \binom{n}{k}$.

הערה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $C(n, k)$ זו ספירה בלי חשיבות לסדר ובלי חזרה.

חלוקות: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $S(n, k) = |\{x \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = k\}|$.

טענה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $S(n, k) = \binom{k+n-1}{k}$.

הערה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $S(n, k)$ זו ספירה בלי חשיבות לסדר ועם חזרה.

מולטי-קבוצה: תהא A קבוצה ותהא $f: A \rightarrow \mathbb{N}_+$ אזי (A, f) .

עוצמה של מולטי-קבוצה: תהא (A, f) מולטי-קבוצה אזי $|(A, f)| = |A| \cdot \sum_{a \in A} f(a)$.

סימון: תהא A קבוצה ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\mathcal{P}_k^{\text{Multi}}(A) = \{(B, f) \mid (B \subseteq A) \wedge (f: B \rightarrow \mathbb{N}_+) \wedge (|(B, f)| = k)\}$.

טענה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $|\mathcal{P}_k^{\text{Multi}}([n])| = S(n, k)$.

הערה סידור עצמים בשורה: כמות האפשרויות לסדר n עצמים בשורה הינה $n!$.

הערב סידור עצמים במעגל: כמות האפשרויות לסדר n עצמים במעגל הינה $(n-1)!$.

הערה בחירה: כמות האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים הינה $\binom{n}{k}$.

הערה חלוקת כדורים לתאים: כמות האפשרויות לחלק k כדורים זהים לתוך n תאים שונים הינה $S(n, k)$.

טענה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ באשר $k \leq n$ אזי $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

זהות פסקל: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} \cdot n$.

טענה: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

משפט: יהיו $n, k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

משפט הבינום של ניוטון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $|\{X \in \mathcal{P}([n]) \mid |X| \in \mathbb{N}_{\text{even}}\}| = 2^{n-1}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $|\{X \in \mathcal{P}([n]) \mid |X| \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}| = 2^{n-1}$.

מקדם מולטינומי: יהיו $n, k_1 \dots k_\ell \in \mathbb{N}$ כאשר $\sum_{i=1}^\ell k_i = n$ אזי $\binom{n}{k_1, \dots, k_\ell} = \frac{n!}{k_1! \dots k_\ell!}$ **אלפבית:** עולם הדין.

טענה: יהיו $n, \ell \in \mathbb{N}$ והיו $k_1 \dots k_\ell \in \mathbb{N}$ כאשר $\sum_{i=1}^\ell k_i = n$ אזי $\binom{n}{k_1, \dots, k_\ell} = \{f : [n] \rightarrow [\ell] \mid \forall i \in [\ell]. f^{-1}[\{i\}] = k_i\}$

נוסחת המולטינום: יהיו $n, \ell \in \mathbb{N}$ והיו $x_1 \dots x_\ell \in \mathbb{R}$ אזי $(x_1 + \dots + x_\ell)^n = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^\ell \\ \sum_{i=1}^\ell k_i = n}} \left(\binom{n}{k_1, \dots, k_\ell} \prod_{i=1}^\ell x_i^{k_i} \right)$

עצרת נופלת: יהי $r \in \mathbb{R}$ והי $k \in \mathbb{N}$ אזי $r^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (r - i)$

מקדם בינומי מוכלל: יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ והי $k \in \mathbb{N}$ אזי $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!}$

הבינום השלילי: יהיו $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ אזי $(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$

טענה: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

נוסחת ההכלה וההדחה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהיינה $A_1 \dots A_n$ קבוצות אזי $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} \left((-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right)$

נוסחת ההכלה וההדחה הסימטרית: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהיינה $A_1 \dots A_n$ קבוצות עבורן לכל $k \in [n]$ ולכל $I, J \in \mathcal{P}_k([n])$ מתקיים

$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left| \bigcap_{i=1}^k A_i \right| \right)$ אזי $\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \left| \bigcap_{i \in J} A_i \right|$

נקודת שבת: תהא A קבוצה ותהא $f : A \rightarrow A$ פונקציה אזי $a \in A$ עבורה $f(a) = a$

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $|\{f : [n] \rightarrow [n] \mid f \text{ תמורה}\}| = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!}$

עיקרון שובך היונים: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $f : [n+1] \rightarrow [n]$ אזי קיימים $i, j \in [n+1]$ שונים עבורם $f(i) = f(j)$

עיקרון שובך היונים המוכלל: יהיו $n, m \in \mathbb{N}_+$ ותהא $f : [m] \rightarrow [n]$ אזי קיים $i \in [n]$ עבורו $|f^{-1}[\{i\}]| \geq \lceil \frac{m}{n} \rceil$

פונקציית מידה: פונקציה $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ כאשר $\mu(A)$ זה "השטח" של A .

הערה: $\mu(\biguplus_{i=1}^m A_i) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$

טענה: תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ כאשר $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$

שובך היונים הגאומטרי: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהיינה $A_1, \dots, A_m \subseteq A$ קבוצות עבורן $\sum_{i=1}^m \mu(A_i) > \mu(A)$ אזי קיימים $i, j \in [m]$ שונים עבורם $A_i \cap A_j \neq \emptyset$

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה כאשר $|A| \leq \aleph_0$ אזי $\mu(A) = 0$

טענה: תהא \mathcal{U} קבוצה ותהיינה $A_1 \dots A_n \subseteq \mathcal{U}$ קבוצות אזי $|\bigcap_{i=1}^n A_i^c| = |\mathcal{U}| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} \left((-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right)$

מספר קטלן: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$

מסקנה: $C_0 = C_1 = 1$

סימון: תהיינה A, B קבוצות יהי $k \in \mathbb{N}_+$ תהא $f : A \rightarrow B^k$ תהא $i \in [k]$ והי $a \in A$ אזי $f_i(a) = (f(a))_i$

מסלול חוקי על הסריג: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $f : [n] \rightarrow \mathbb{N}^2$ עבורו לכל $i \in [n]$ מתקיים כי

$f(i+1) \in \{ \langle f_1(i) + 1, f_2(i) \rangle, \langle f_1(i), f_2(i) + 1 \rangle \}$

מסלולים חוקיים בין נקודות על הסריג: יהיו $a, b \in \mathbb{N}^2$ אזי

$\text{Path}(a, b) = \bigcup_{n=0}^\infty \{f : [n] \rightarrow \mathbb{N}^2 \mid (f \text{ מסלול חוקי על הסריג}) \wedge (f(1) = a) \wedge (f(n) = b)\}$

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{N}^2$ אזי $\text{PC}(a, b) = \bigcup_{n=0}^\infty \{f \in \text{Path}(a, b) \mid \exists i \in [n]. f_1(i) < f_2(i)\}$

למה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{Path}(\langle 0, 0 \rangle, \langle n-1, n+1 \rangle) = \text{PC}(\langle 0, 0 \rangle, \langle n, n \rangle)$

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{N}^2$ אזי $\text{PB}(a, b) = \bigcup_{n=0}^\infty \{f \in \text{Path}(a, b) \mid \forall i \in [n]. f_1(i) \geq f_2(i)\}$

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{PB}(\langle 0, 0 \rangle, \langle n, n \rangle) = C_n$

משפט: $C_n = \sum_{i=1}^n (C_{i-1} \cdot C_{n-i})$

סדרות מאוזנות: יהי $n \in \mathbb{N}$

$\text{BS}(n) = \left\{ f : [2n] \rightarrow \{0, 1\} \mid (|f^{-1}[\{0\}]| = |f^{-1}[\{1\}]|) \wedge \left(\forall k \in [n]. \left| (f|_{[k]})^{-1}(\{0\}) \right| \leq \left| (f|_{[k]})^{-1}(\{1\}) \right| \right) \right\}$

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $|\text{BS}(n)| = C_n$

מצולע קמור: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורו לכל $a, b \in K$ ולכל $t \in [0, 1]$ מתקיים כי $ta + (1-t)b \in K$

מצולע קעור: הי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ שאינו קמור.

קבוצת סידון: קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ עבורה לכל $a, b, c, d \in A$ מתקיים $a + b \neq x + y$

סימון: אם $f : A \rightarrow B$ חח"ע נסמן $f : A \xrightarrow{1-1} B$

סימון: אם $f : A \rightarrow B$ על נסמן $f : A \rightarrow_{\text{onto}} B$.

משפט ארדש סקריש: יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ ותהא $f : [a \cdot b + 1] \rightarrow \mathbb{R}$ חח"ע אזי אחד מהבאים מתקיים

- קיימים $k_1 < \dots < k_{a+1}$ כך ש- $f|_{\{k_1, \dots, k_{a+1}\}}$ מונוטונית עולה.
- קיימים $k_1 < \dots < k_{b+1}$ כך ש- $f|_{\{k_1, \dots, k_{b+1}\}}$ מונוטונית יורדת.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ אזי $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

טענה טור הנדסי: יהי $x \in (-1, 1)$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

סדרה: פונקציה a המקיימת $\text{Dom}(a) = \mathbb{N}$

סדרה ממשית: פונקציה $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

טור חזקות: תהא a סדרה ממשית אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

טור חזקות יוצרת סדרה: יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות אזי $\lambda n \in \mathbb{N} \cdot a_n$

טענה: יהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} S(m, n) x^n$

הגדרה גזירת טור: יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות אזי $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

הגדרה אינטגרציית טור: יהי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות אזי $\int f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

משפט: יהיו f, g טורים באשר $f(x)$ יוצרת את $\lambda n \in \mathbb{N} \cdot a_n$ וכן $g(x)$ יוצרת את $\lambda n \in \mathbb{N} \cdot b_n$ אזי

$$\bullet f(x) + g(x) \text{ יוצרת את } \lambda n \in \mathbb{N} \cdot a_n + b_n$$

$$\bullet f(x) - g(x) \text{ יוצרת את } \lambda n \in \mathbb{N} \cdot a_n - b_n$$

$$\bullet \text{יהי } c \in \mathbb{R} \text{ אזי } cf(x) \text{ יוצרת את } \lambda n \in \mathbb{N} \cdot c \cdot a_n$$

$$\bullet \text{יהי } m \in \mathbb{N} \text{ אזי } x^m f(x) \text{ יוצרת את } \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \begin{cases} 0 & n < m \\ a_{n-m} & \text{else} \end{cases}$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \text{ יוצרת את } f(x)g(x)$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \sum_{k=0}^n a_k \text{ יוצרת את } \frac{f(x)}{1-x}$$

טענה: יהיו $\alpha, a, c \in \mathbb{R}$ ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m \end{cases} \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot x^m$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot 1 \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot (-1)^n \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot \frac{1}{1+x}$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot c^n \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot \frac{1}{1-cx}$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \binom{\alpha}{n} \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot (1+x)^\alpha$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \binom{\alpha+n-1}{n} \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot \frac{1}{(1-x)^\alpha}$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot n \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{1}{n} & \text{else} \end{cases} \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot (-\ln(1-x))$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot e^{\alpha x}$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \begin{cases} \frac{\alpha^n}{n!} & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot \cosh(\alpha x)$$

$$\bullet \lambda n \in \mathbb{N} \cdot \begin{cases} \frac{\alpha^n}{n!} & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \text{ יוצרת את } \lambda x \in \mathbb{R} \cdot \sinh(\alpha x)$$

פונקציה רציונלית: יהיו $p, q \in \mathbb{R}[x]$ באשר $\exists a \in \mathbb{R} \cdot q(a) \neq 0$ אזי $\frac{p}{q}$

פירוק לשברים חלקיים: יהי $P \in \mathbb{C}_n[x]$ ויהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ אזי A_1, \dots, A_n עבורם $\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{x-\alpha_i}$

פונקציה יוצרת מעריכית: תהא $\lambda n \in \mathbb{N} \cdot a_n$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$

כלל/נוסחת נסיגה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי פונקציה $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

סדרה נוצרת מכלל נסיגה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $f : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ נוסחת נסיגה אזי סדרה a עבורה לכל $n \geq i$ מתקיים

$$a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-i})$$

עומק הרקורסיה/נוסחת הנסיגה: יהי $i \in \mathbb{N}$ ותהא $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נוסחת נסיגה אזי $k \in [n]$ מינימלי עבורו קיימת $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$

המקיימת $f(x_1 \dots x_n) = g(x_1 \dots x_k)$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$

הערה: מכאן והלאה נניח כי כל נוסחאות הנסיגה $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ הן מעומק n .

תנאי התחלה: יהי f כלל נסיגה עם עומק $n \in \mathbb{N}$ אזי $p \in \mathbb{R}^n$

בעיית התחלה: יהי f כלל נסיגה עם עומק $i \in \mathbb{N}$ ויהי $p \in \mathbb{R}^i$ תנאי התחלה אזי סדרה ממשית a עבורה $a_n = p_n$ לכל $n \in [i]$ וכן

$$a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-i}) \text{ לכל } n > i$$

סדרת פיבונאצ'י: $F_0 = 0$ וכן $F_1 = 1$ וכן $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

נוסחת נסיגה לינארית: נוסחת נסיגה $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה קיימים $\alpha_1 \dots \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ המקיימים $f(x) = (\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) + \alpha_{n+1}$

נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית: נוסחת נסיגה $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה קיימים $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ המקיימים $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$

הפולינום האופייני: תהא $f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ נוסחת נסיגה הומוגנית באשר $f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$ אזי $p_f(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$

משפט קיום ויחידות פתרון לבעיית נסיגה לינארית הומוגנית: תהא $f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ נוסחת נסיגה הומוגנית והי $p \in \mathbb{R}^{n-1}$ תנאי התחלה אזי קיים ויחיד פתרון לבעיית ההתחלה.

משפט פתרון לבעיית ההתחלה: תהא $f: \mathbb{R}^{i-1} \rightarrow \mathbb{R}$ נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית והיו $\{\beta_1, \dots, \beta_i\}$ הפתרונות של p_f אזי קיימים $A_1 \dots A_i \in \mathbb{R}$ עבורם $a_n = \sum_{j=1}^i A_j \beta_j^n$ פתרון לבעיית ההתחלה.

הערה: המשפט מלעיל הוא רק כאשר יש i פתרונות שונים ל- p_f .

משפט פתרון לבעיית ההתחלה: תהא $f: \mathbb{R}^{i-1} \rightarrow \mathbb{R}$ נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית יהיו $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ הפתרונות של p_f והי $r: [k] \rightarrow [i]$ באשר $r(j)$ הריבוי של β_j בפתרונות של p_f אזי קיימים $A_1 \dots A_i \in \mathbb{R}$ עבורם $a_n = \sum_{j=1}^k \sum_{\ell=0}^{r(j)-1} n^\ell A_j \beta_j^n$ פתרון לבעיית ההתחלה.

מסקנה: הסדרה $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ הינה פתרון לבעיית ההתחלה של סדרת פיבונאצ'י.

יחס הזהב: $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$

טענה: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

משפט: תהא $S_0, \dots, S_k \subseteq \mathbb{N}$ נסמן ב- a_n את מספר הפתרונות של $n = \sum_{i=0}^k x_i$ בעבור $x_i \in S_i$ אזי

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{1}_{S_i}(\ell) x^\ell \right)$$

סימון: תהא $A \subseteq \mathbb{N}$ והי $n \in \mathbb{N}$ אזי $p_A(n) = \left| \bigcup_{i=1}^n \left\{ a \in A^i \mid \left(\sum_{j=1}^i a_j = n \right) \wedge (a \text{ עולה}) \right\} \right|$

מספר החלוקות של מספר: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $p(n) = p_{\mathbb{N}}(n)$

מספר החלוקות השונות של מספר: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $p_{\text{dist}}(n) = \left| \bigcup_{i=1}^n \left\{ a \in \mathbb{N}^i \mid \left(\sum_{j=1}^i a_j = n \right) \wedge (a \text{ עולה ממש}) \right\} \right|$

מספר החלוקות האי-זוגיות של מספר: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $p_{\text{odd}}(n) = p_{\mathbb{N}_{\text{odd}}}(n)$

משפט אוילר: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $p_{\text{odd}}(n) = p_{\text{dist}}(n)$

גרף מכונן: תהא V ותהא $E \subseteq V^2$ אזי $\langle V, E \rangle$

גרף לא מכונן: תהא V ותהא $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ אזי $\langle V, E \rangle$

קודקודים/צמתים: יהי $\langle V, E \rangle$ גרף אזי $V(G) = V$

קשתות/צלעות: יהי $\langle V, E \rangle$ גרף אזי $E(G) = E$

לולאה: יהי G גרף מכונן והי $v \in V(G)$ אזי $\langle v, v \rangle \in E(G)$

גרף פשוט: גרף מכונן חסר לולאות.

הערה: בקורס מדובר רק על גרפים לא מכוונים אלא אם כן מצויין אחרת.

גרף שרוד: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\langle [n], \{\{k, k+1\} \mid k \in [n-1]\} \rangle$

גרף מעגל: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n = \langle [n], \{\{k, k+1\} \mid k \in [n-1]\} \cup \{\{0, n\}\} \rangle$

גרף n-צדדי: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהיינה $V_1 \dots V_n$ קבוצות זרות אזי גרף $\langle \biguplus_{i=1}^n V_i, E \rangle$ עבורו לכל $e \in E$ קיימים $i, j \in [n]$ שונים עבורם $|e \cap V_i| = |e \cap V_j| = 1$

גרף n-צדדי מלא: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהיינה $V_1 \dots V_n$ קבוצות זרות אזי

$$K_{|V_1|, \dots, |V_n|} = \left\langle \biguplus_{i=1}^n V_i, \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=i+1}^n \{\{v, u\} \mid (v \in V_i) \wedge (u \in V_j)\} \right\rangle$$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהיינה $V_1 \dots V_n$ קבוצות זרות אזי $K_{|V_1|, \dots, |V_n|}$ גרף n-צדדי.

קליקה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי K_n

קבוצת השכנים: יהי G גרף והי $v \in V(G)$ אזי $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}$

דרגה: יהי G גרף והי $v \in V(G)$ אזי $\deg(v) = d_G(v) = |N(v)|$

קודקוד מבודד: יהי G גרף אזי $v \in V(G)$ עבורו $d(v) = 0$

עלה: יהי G גרף אזי $v \in V(G)$ עבורו $d(v) = 1$

טענה: יהי G גרף אזי $0 \leq d(v) \leq |V(G)| - 1$ $\forall v \in V(G)$

נוסחת לחיצות הידיים: יהי G גרף אזי $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v)$

תת-גרף: יהי G גרף אזי גרף T עבורו $(V(T) \subseteq V(G)) \wedge (E(T) \subseteq E(G) \cap \mathcal{P}_2(V(T)))$

סימון: יהי G גרף והי T תת-גרף של G אזי $T \triangleleft G$

תת-גרף נפרש: יהי G גרף ותהא $U \subseteq V(G)$ אזי $G[U] = \langle U, P_2(U) \cap E(G) \rangle$.

גרף משלים: יהי G גרף אזי $\overline{G} = \langle V(G), P_2(V(G)) \setminus E(G) \rangle$.

טיול: יהי G גרף ויהיו $v, u \in V(G)$ אזי $a \in V(G)^n$ באשר $a_1 = v$ וכן $a_n = u$ וכן $\{a_i, a_{i+1}\} \in E(G)$ $\forall i \in [n-1]$.

אורך טיול: יהי G גרף ויהי $\sigma \in V(G)^n$ טיול אזי $\ell(\sigma) = n-1$.

מסלול: יהי G גרף אזי טיול σ עבורו לכל $i, j \in [\ell(\sigma)]$ שונים מתקיים $\{\sigma_i, \sigma_{i+1}\} \neq \{\sigma_j, \sigma_{j+1}\}$.

תת-מסלול: יהי G גרף ויהי $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ מסלול אזי $\langle a_i, \dots, a_j \rangle$ עבור $i, j \in [n]$ באשר $i < j$.

מעגל: יהי G גרף ויהי $v \in V(G)$ אזי מסלול בין v ל- v .

מסלול פשוט: יהי G גרף אזי מסלול σ עבורו כל תת-מסלול של σ אינו מעגל.

מעגל פשוט: מעגל $\langle a_1, \dots, a_n, a_1 \rangle$ המקיים $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ מסלול פשוט.

משפט: יהי G גרף ויהיו $v_1, v_2 \in V(G)$ אזי

• (קיים מסלול פשוט מ- v_1 ל- v_2) \iff (קיים טיול מ- v_1 ל- v_2).

• (קיים מעגל פשוט מ- v_1 ל- v_1) \iff (קיים מעגל מ- v_1 ל- v_1).

משפט: יהי G גרף חסר מעגלים אזי $|E(G)| < |V(G)|$.

למה: יהי G גרף חסר מעגלים אזי קיימים $v, u \in V(G)$ שונים כך ש- v, u עלים.

יחס הקשירות: יהי G גרף אזי $\xrightarrow{G} \subseteq V(G)^2$ עבורו לכל $u, v \in V(G)$ מתקיים (קיים טיול מ- v ל- u) $\iff (v \xrightarrow{G} u)$.

טענה: יהי G גרף אזי \xrightarrow{G} יחס שקילות.

רכיב קשירות: יהי G גרף אזי $[v]_{\xrightarrow{G}}$ עבור $v \in V(G)$.

מסקנה: יהי G גרף ויהי $K \in V(G)/\xrightarrow{G}$ אזי $\forall v \in K. d_{G[K]}(v) = d_G(v)$.

גרף קשיר: גרף G עבורו $|V(G)/\xrightarrow{G}| = 1$.

הגדרה: יהי G גרף ותהא $F \subseteq P_2(V(G))$ אזי $G + F = \langle V(G), E(G) \cup F \rangle$.

הגדרה: יהי G גרף ותהא $F \subseteq P_2(V(G))$ אזי $G - F = \langle V(G), E(G) \setminus F \rangle$.

טענה: יהי G גרף ויהיו $v, u \in V(G)$ אזי

$$1. (v \xrightarrow{G} u) \implies \left([v]_{\xrightarrow{G}} = [v]_{\xrightarrow{G+\{\{v,u\}\}}} \right).$$

$$2. (\neg(v \xrightarrow{G} u)) \implies \left([v]_{\xrightarrow{G}} \uplus [u]_{\xrightarrow{G}} = [v]_{\xrightarrow{G+\{\{v,u\}\}}} \right).$$

מסקנה: יהי G גרף אזי $|V(G)/\xrightarrow{G}| \geq |V(G)| - |E(G)|$.

מסקנה: יהי G גרף עבורו $|E(G)| > |V(G)| - 1$ אזי G לא קשיר.

מסקנה: יהי G גרף קשיר אזי $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

טענה: יהי G גרף חסר מעגלים אזי $|E(G)| \leq |V(G)| - 1$.

עץ: גרף T באשר T קשיר וחסר מעגלים.

טענה: יהי G גרף ויהי $K \in V(G)/\xrightarrow{G}$ אזי K עץ.

מסקנה: יהי T עץ אזי $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

עץ פורש: יהי G גרף אזי עץ $\langle V(G), F \rangle$ באשר $F \subseteq E(G)$.

יער: גרף T באשר T חסר מעגלים.

קשיר מינימלי: גרף G עבורו לכל $e \in E(G)$ מתקיים כי $G - \{e\}$ אינו קשיר.

חסר מעגלים מקסימלי: גרף G עבורו לכל $v, u \in V(G)$ מתקיים כי $G + \{\{v, u\}\}$ בעל מעגל.

משפט העצים: יהי G גרף התב"ש

• עץ G .

• $(G \text{ חסר מעגלים}) \wedge (|E(G)| = |V(G)| - 1)$.

• $(G \text{ קשיר}) \wedge (|E(G)| = |V(G)| - 1)$.

• G קשיר מינימלי.

• G חסר מעגלים מקסימלי.

• בין כל שני קודקודים ב- G קיים מסלול יחיד.

גרף מישורי: גרף G באשר G בעל דיאגרמה בה כל קשתות הגרף אינן נחתכות.

הגדרה: יהי G גרף אזי $\Delta(G) = \max(d_G(v) \mid v \in V(G))$.

הגדרה: יהי G גרף אזי $\delta(G) = \min(d_G(v) \mid v \in V(G))$.

מסלול המילטוני/המילטון: יהי G גרף אזי מסלול פשוט σ עבורו לכל $v \in V(G)$ מתקיים $v \in \sigma$.

מעגל המילטוני/המילטון: יהי G גרף אזי מעגל פשוט σ עבורו לכל $v \in V(G)$ מתקיים $v \in \sigma$.

משפט דיראק: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי G גרף באשר $V(G) = [n]$ אזי $(\delta(G) \geq \frac{n}{2}) \iff (G \text{ קיים מעגל המילטון ב-} G)$.

הגדרה: יהי G גרף ויהי $v \in V(G)$ אזי $G + \{v\} = \langle V(G) \cup \{v\}, E(G) \rangle$.

הגדרה: יהי G גרף ויהי $v \in V(G)$ אזי $G - \{v\} = \langle V(G) \setminus \{v\}, E(G) \setminus \{\{v, u\} \mid u \in V(G)\} \rangle$.

טענה: יהי T עץ ויהי $v \in V(T)$ עלה אזי $G - \{v\}$ עץ.

גרף ממושקל: גרף G ופונקציה $f: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$.

משפט קיילי: כמות העצים על n קודקודים הוא $n^{(n-2)}$.

מסלול אוילר: מסלול העובר על כל הקשתות בגרף.

מסלול אוילר: יהי G גרף אזי מסלול σ עבורו לכל $e \in E(G)$ מתקיים $e \in \sigma$.

מעגל אוילר: יהי G גרף אזי מעגל σ באשר σ מסלול אוילר.

משפט אוילר: יהי G גרף קשיר אזי

• $(\forall v \in V(G). d(v) \in \mathbb{N}_{\text{even}}) \iff (G \text{ יש מעגל אוילר})$.

• $(|\{v \in V(G) \mid d(v) \in \mathbb{N}_{\text{odd}}\}| \in \{0, 2\}) \iff (G \text{ יש מסלול אוילר})$.

הומומורפיזם: יהיו G, S גרפים אזי $f: V(G) \rightarrow V(S)$ עבורה לכל $v, u \in V(G)$ מתקיים

$(\{v, u\} \in E(G)) \iff (\{f(v), f(u)\} \in E(S))$.

איזומורפיזם: יהיו G, S גרפים אזי הומומורפיזם $f: V(G) \rightarrow V(S)$ באשר f זיווג.

גרפים איזומורפיים: יהיו G, S גרפים ויהי $f: V(G) \rightarrow V(S)$ איזומורפיזם אזי $G \cong S$.

סימון: יהיו G, S גרפים יהי $f: V(G) \rightarrow V(S)$ איזומורפיזם יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $\sigma \in V(G)^n$ אזי $f(\sigma) = \langle f(\sigma_1), \dots, f(\sigma_n) \rangle$.

טענה: יהיו G, S גרפים ויהי $f: V(G) \rightarrow V(S)$ איזומורפיזם אזי

• $|V(G)| = |V(S)|$

• $|E(G)| = |E(S)|$

• לכל $v \in V(G)$ מתקיים $d_G(v) = d_S(f(v))$.

• יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $\sigma \in V(G)^n$ אזי $(\sigma \text{ טיול ב-} G) \iff (f(\sigma) \text{ טיול ב-} S)$.

• $(G \text{ קשיר}) \iff (S \text{ קשיר})$.

מסקנה: יהיו G, S גרפים איזומורפיים אזי

• $(G \text{ עץ}) \iff (S \text{ עץ})$.

• $(G \text{ חסר מעגלים}) \iff (S \text{ חסר מעגלים})$.

טענה: יהיו G, S גרפים יהי $f: V(G) \rightarrow V(S)$ איזומורפיזם יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $\sigma \in V(G)^n$ אזי

• $(\sigma \text{ מסלול ב-} G) \iff (f(\sigma) \text{ מסלול ב-} S)$.

• $(\sigma \text{ מסלול פשוט ב-} G) \iff (f(\sigma) \text{ מסלול פשוט ב-} S)$.

• $(\sigma \text{ מעגל ב-} G) \iff (f(\sigma) \text{ מעגל ב-} S)$.

• $(\sigma \text{ מעגל פשוט ב-} G) \iff (f(\sigma) \text{ מעגל פשוט ב-} S)$.

• $(\sigma \text{ מסלול אוילר ב-} G) \iff (f(\sigma) \text{ מסלול אוילר ב-} S)$.

• $(\sigma \text{ מעגל אוילר ב-} G) \iff (f(\sigma) \text{ מעגל אוילר ב-} S)$.

• $(\sigma \text{ מסלול המילטון ב-} G) \iff (f(\sigma) \text{ מסלול המילטון ב-} S)$.

• $(\sigma \text{ מעגל המילטון ב-} G) \iff (f(\sigma) \text{ מעגל המילטון ב-} S)$.

הגדרה: תהא V קבוצה אזי $\text{Graph}(V) = \{\langle V, E \rangle \mid E \subseteq \mathcal{P}_2(V)\}$.

גרף לא מסומן: תהא V קבוצה אזי $K \in \text{Graph}(V)/\cong$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq |\text{Graph}([n])/\cong| \leq 2^{\binom{n}{2}}$.

צביעת קשתות: תהא A קבוצה ויהי G גרף אזי פונקציה $f: E(G) \rightarrow A$.

תת-גרף מונוכרומטי: יהי G גרף ותהא f צביעה אזי $S \triangleleft G$ עבורו $f(e_1) = f(e_2)$ $\forall e_1, e_2 \in E(S)$.

מספר ראמזי: יהיו $s, t \geq 2$ אזי $R(s, t)$ הוא ה- \mathbb{N} n המינימלי עבורו לכל צביעת קשתות $f : E(K_n) \rightarrow \{0, 1\}$ מתקיים כי (קיימת ב- K_n קליקה K_s מונוכרומטית \vee (קיימת ב- K_n קליקה K_t מונוכרומטית 1).

משפט: $R(3, 3) = 6$.

משפט: יהיו $s, t \geq 2$ אזי $R(s, t) = R(t, s)$.

משפט ראמזי: יהיו $s, t \geq 2$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $R(s, t) = n$.

הגדרה: תהא κ עוצמה ותהא V קבוצה באשר $|V| = \kappa$ אזי $K_\kappa = \langle V, \{X \subseteq V \mid |X| = 2\} \rangle$.

עוצמה מסוג ראמזי: עוצמה κ עבורה לכל צביעת קשתות $f : E(K_\kappa) \rightarrow \{0, 1\}$ קיימת ב- K_κ קליקה K_κ מונוכרומטית.

משפט קונינג: תהא $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיימת $H \subseteq \mathbb{N}$ בת-מנייה עבורה $|f[\mathcal{P}_2(H)]| = 1$.

מסקנה: \aleph_0 הינה עוצמה מסוג ראמזי.

משפט ארדש-ראדזי: יהי G גרף באשר $|V(G)| < \aleph$ ותהא $f : \mathcal{P}_2(V(G)) \rightarrow \mathbb{N}$ אזי קיימת $B \subseteq A$ מונוכרומטית המקיימת $|B| < \aleph_0$.

משפט: ב-ZFC לא ניתן להוכיח ולא ניתן להפריך את קיומם של עוצמות גדולות מ- \aleph_0 מסוג ראמזי.

צביעת קודקודים: יהי G גרף אזי $f : V(G) \rightarrow A$.

צביעת קודקודים חוקית: יהי G גרף אזי צביעת קודקודים $f : V(G) \rightarrow A$ עבורה לכל $v, u \in V(G)$ באשר $\{v, u\} \in E(G)$ מתקיים $f(v) \neq f(u)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $n! = |\{f : [n] \rightarrow [n] \mid f \text{ צביעה חוקית}\}|$.

גרף k -צביע: גרף G עבורו קיימת צביעה חוקית של G ב- k צבעים.

טענה: יהי G גרף אזי

$$\bullet (G \text{ 1-צביע}) \iff (E(G) = \emptyset).$$

$$\bullet (G \text{ 2-צביע}) \iff (G \text{ גרף דו צדדי}).$$

משפט: יהי G גרף אזי $(G \text{ גרף דו צדדי}) \iff (אין ב- G מעגלים באורך אי-זוגי).$

מספר הצביעה: יהי G גרף אזי $\chi(G) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid G \text{ הינו } n\text{-צביע}\}$.

מסקנה: יהי G גרף שמקיים $E(G) \neq \emptyset$ אזי $2 \leq \chi(G) \leq |V(G)|$.