

**פולינום טיילור**: תהא  $f \in \mathbb{R}^I$  גזירה  $n$  פעמים על  $a$  אזי  $P_n(f, a)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

**שארית טיילור**: תהא  $f \in \mathbb{R}^I$  גזירה  $n$  פעמים על  $a$  אזי  $R_n(f, a)(x) = f(x) - P_n(f, a)(x)$

**טור טיילור**: תהא  $f \in \mathbb{R}^I$  חלקה על  $a$  אזי  $P(f, a)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

**פונקציה קדומה**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$  אזי  $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$  גזירה המקיימת  $F' = f$

**טענה**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$  תהא  $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$  קדומה ותהא  $G \in \mathbb{R}^{(a,b)}$  אזי  $(G' = f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}. G = F + c)$

**חלוקה**: יהי  $[a, b]$  אזי  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  המקיימות  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

**סימון**: תהא  $\{x_0, \dots, x_n\}$  חלוקה אזי  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

**מדד העדינות**: תהא  $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$  חלוקה אזי  $\lambda(\Pi) = \max_{i=1}^n |\Delta x_i|$

**עידון**: תהא  $\Pi_1$  חלוקה אזי חלוקה  $\Pi_2$  המקיימת  $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$

**טענה**: תהא  $\Pi_1$  חלוקה וכן  $\Pi_2$  עידון אזי  $\lambda(\Pi_2) \leq \lambda(\Pi_1)$

**נקודות מתאימות**: תהא  $\{x_0, \dots, x_n\}$  חלוקה אזי  $\{t_1 \dots t_n\}$  המקיימות  $\forall i \in \{1 \dots n\}. t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

**סכום רימן**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  תהא  $\Pi$  חלוקה ויהיו  $\{t_i\}$  נקודות מתאימות אזי  $S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum f(t_i) \Delta x_i$

**אינטגרליות רימן**:  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  עבורה קיים  $L \in \mathbb{R}$  לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת  $\delta > 0$  לכל  $\Pi$  חלוקה המקיימת  $\lambda(\Pi) < \delta$  לכל נקודות מתאימות  $\{t_i\}$  מתקיים  $|S(f, \Pi, \{t_i\}) - L| < \varepsilon$

**אינטגרל רימן מסוים**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  אינטגרליות רימן אזי  $L = \int_a^b f(t) dt$

**הערה**: יהיו  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  אינטגרל על פי המשתנה  $\varphi$   $\int_a^b f(\varphi) d\varphi$

**סימון**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  אינטגרליות רימן אזי  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$

**הערה**: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

**סימון**:  $R([a, b]) = \{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \mid f \text{ אינטגרליות רימן}\}$

**הערה**: ניתן להגדיר אינטגרליות רימן בסימון  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S(f, \Pi, \{t_i\})$

**טענה**: יהי  $c \in \mathbb{R}$  תהא  $\Pi$  חלוקה ויהיו  $\{t_i\}$  נקודות מתאימות אזי  $\int_a^b c \cdot dt = c(b-a)$

**טענה**:  $D(x) \notin R(\mathbb{R})$

**משפט**: תהא  $f \in R([a, b])$  אזי  $f$  חסומה.

**סכום דרבו עליון**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהא  $\Pi$  חלוקה אזי  $\bar{\Sigma}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_i, x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$

**סכום דרבו תחתון**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהא  $\Pi$  חלוקה אזי  $\underline{\Sigma}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_i, x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$

**למה**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהא  $\Pi$  חלוקה

$$\bar{\Sigma}(f, \Pi) = \sup_{\text{נקודות מתאימות } \{t_i\}} S(f, \Pi, \{t_i\}) \cdot$$

$$\underline{\Sigma}(f, \Pi) = \inf_{\text{נקודות מתאימות } \{t_i\}} S(f, \Pi, \{t_i\}) \cdot$$

**למה**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהינה  $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$  חלוקות

$$\bar{\Sigma}(f, \Pi_1) \geq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2) \cdot$$

$$\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \underline{\Sigma}(f, \Pi_2) \cdot$$

**מסקנה**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהינה  $\Pi_1, \Pi_2$  חלוקות אזי  $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2)$

**האינטגרל העליון**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה אזי  $\bar{I}(f) = \inf_{\Pi \text{ חלוקה}} \bar{\Sigma}(f, \Pi)$

**האינטגרל התחתון**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה אזי  $\underline{I}(f) = \sup_{\Pi \text{ חלוקה}} \underline{\Sigma}(f, \Pi)$

**מסקנה**: תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהא  $\Pi$  חלוקה אזי  $\underline{\Sigma}(f, \Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi)$

**קריטריון דרבו:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה אזי  $(f \in R([a,b])) \iff (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ לכל } \Pi \text{ חלוקה המקיימת } \lambda(\Pi) < \varepsilon \implies \bar{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi) < \varepsilon)$ .

**תנודה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^J$  חסומה אזי  $\omega(f, J) = \sup_{x,y \in J} (f(x) - f(y))$ .

**משפט:** תהא  $f \in \mathbb{R}^J$  חסומה ויהי  $x_0 \in J$  אזי  $(f \text{ רציפה על } x_0) \iff (\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = 0)$ .

**משפט:** תהא  $f \in \mathbb{R}^J$  חסומה אזי  $(f \text{ רציפה ב"ש}) \iff (\forall I \subseteq J. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \text{len}(I) < \delta \implies \omega(f, I) < \varepsilon)$ .

**תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהא  $\Pi$  חלוקה אזי  $\omega(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהא  $\Pi$  חלוקה אזי  $\omega(f, \Pi) = \bar{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi)$ .

**למה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהיינה  $\Pi_1 \cup \{p\} = \Pi_2$  חלוקות

- $\bar{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2) + \lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$  •
- $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \geq \underline{\Sigma}(f, \Pi_2) - \lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$  •

**מסקנה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה ותהיינה  $\Pi_1 \cup \{p_1 \dots p_m\} = \Pi_2$  חלוקות

- $\bar{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2) + m\lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$  •
- $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \geq \underline{\Sigma}(f, \Pi_2) - m\lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$  •

**טענה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה אזי לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  לכל  $\Pi$  חלוקה  $\lambda(\Pi) < \delta$  מתקיים

- $\underline{\Sigma}(f, \Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \underline{\Sigma}(f, \Pi) + \varepsilon$  •
- $\bar{\Sigma}(f, \Pi) \geq \bar{I}(f) \geq \bar{\Sigma}(f, \Pi) - \varepsilon$  •

**מסקנה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה המקיימת  $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$  אזי  $f \in R([a, b])$ .

**קריטריון דרבו משופר:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה כך שלכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $\Pi$  עבורה  $\bar{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi) < \varepsilon$  אזי  $f \in R([a, b])$ .

**משפט:**  $C([a, b]) \subseteq R([a, b])$ .

**משפט:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  מונוטונית אזי  $f \in R([a, b])$ .

**סימון:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$  חסומה ויהי  $b \in [a, c]$  עבורה  $f|_{[a,b]} \in R([a, b])$  אזי  $f \in R([a, b])$ .

**משפט:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$  חסומה ויהי  $b \in [a, c]$  עבורה  $(f \in R([a, b])) \wedge (f \in R([b, c]))$  אזי  $f \in R([a, c])$ .

**משפט:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,d]}$  חסומה ויהיו  $b < c \in [a, d]$  עבורה  $f \in R([a, d])$  אזי  $f \in R([b, c])$ .

**משפט:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$  חסומה המקיימת  $f \in R([a, b])$   $\forall b \in (a, c)$  אזי  $f \in R([a, c])$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$  חסומה המקיימת  $f \in R([b, c])$   $\forall b \in (a, c)$  אזי  $f \in R([a, c])$ .

**טענה:** תהא  $f \in R([a, c])$  נגדיר  $g(x) = \begin{cases} y & x = b \\ f(x) & \text{else} \end{cases}$  אזי  $g \in R([a, c])$ .

**מסקנה:** נגדיר  $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  אזי  $f \in R([-1, 1])$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי  $f \in R([a, b])$ .

**משפט:** תהיינה  $f, g \in R([a, b])$  תהא  $H \in C(\mathbb{R})$  וכן  $c \in \mathbb{R}$

- $(f + g), (cf) \in R([a, b])$  •
- $(f \cdot g), (H \circ f), |f| \in R([a, b])$  •

**קבוצה ממידה אפס:**  $A \subseteq \mathbb{R}$  עבורה לכל  $\varepsilon > 0$  קיימים  $\{(a_i, b_i)\}_{i=0}^\infty$  עבורם  $A \subseteq \bigcup (a_i, b_i)$  וכן  $\sum (b_i - a_i) < \varepsilon$ .

**טענה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}$  המקיימת  $|A| \leq \aleph_0$  אזי  $A$  ממידה אפס.

**קבוצה צפופה:** תהא  $B \subseteq \mathbb{R}$  אזי  $A \subseteq B$  המקיימת  $|b - a| < \varepsilon$   $\forall b \in B. \forall \varepsilon > 0. \exists a \in A$ .

**טענה:** תהיינה  $f, g \in R([a, b])$  עבורן קיימת  $A$  צפופה עבורה  $f|_A = g|_A$  אזי  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in R([a, c])$  נגדיר  $g(x) = \begin{cases} y_i & x \in \{b_1 \dots b_m\} \\ f(x) & \text{else} \end{cases}$  אזי  $\int_a^c f(x) dx = \int_a^c g(x) dx$ .

**משפט לינאריות האינטגרנד:** תהיינה  $f, g \in R([a, b])$  ויהי  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  אזי  $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ .

**משפט לינאריות בתחום האינטגרציה:** תהא  $f \in R([a, c])$  ויהי  $b \in (a, c)$  אזי  $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ .

**הגדרה:** תהא  $f \in R([a, b])$  אזי  $\int_a^b f = - \int_b^a f$ .

**משפט חיוביות:** תהא  $f \in R([a, b])$  המקיימת  $f \geq 0$  אזי  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**מונוטוניות האינטגרל:** תהיינה  $f, g \in R([a, b])$  המקיימות  $f \geq g$  אזי  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

**טענה:** תהא  $f \in R([a, b])$  המקיימת  $m \leq f \leq M$  אזי  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in R([a, b])$  אזי  $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f| \leq \sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$ .

**משפט רציפות האינטגרל המסויים:** תהא  $f \in R([a, b])$  נגדיר  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  אזי  $F \in C([a, b])$ .

**משפט ערך ביניים ראשון:** תהא  $f \in C([a, b])$  ותהא  $0 \leq g \in R([a, b])$  אזי קיים  $x_0 \in [a, b]$  עבורו  $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(x_0) \int_a^b g(x) dx$ .

**הלמה של בונה:** תהא  $f$  מונוטונית ותהא  $0 \leq g \in R([a, b])$  אזי קיים  $x_0 \in [a, b]$  עבורו  $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^{x_0} g(x) dx + f(b) \int_{x_0}^b g(x) dx$ .

**המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי:** תהא  $f \in R([a, b])$  ותהא  $x_0 \in [a, b]$  נקודת רציפות של  $f$  נגדיר  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  אזי  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

**משפט ניוטון לייבניץ:** תהא  $f \in R([a, b])$  ותהא  $F$  קדומה של  $f$  על  $[a, b]$  אזי  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in R([a, b])$  יהיו  $x_1 \dots x_n \in [a, b]$  ותהא  $F$  קדומה של  $f$  על  $[a, b] \setminus \{x_1 \dots x_n\}$  אזי  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

**סימון:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  אזי  $f|_a^b = f(b) - f(a)$ .

**משפט אינטגרציה בחלקים:** תהיינה  $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  גזירות עבורן  $f', g' \in R([a, b])$  אזי  $\int_a^b f'g = [f \cdot g]|_a^b - \int_a^b fg'$ .

**הלמה של בונה:** תהא  $f \in C^1([a, b])$  עבורה  $(f' \geq 0) \vee (f' \leq 0)$  ותהא  $g \in C([a, b])$  אזי קיים  $x_0 \in [a, b]$  עבורו  $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^{x_0} g(x) dx + f(b) \int_{x_0}^b g(x) dx$ .

**טענה:** תהא  $f \in C^{n+1}([a, b])$  אזי  $R_n(f, a)(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$ .

**משפט שינוי משתנה:** תהא  $f \in C([a, b])$  ותהא  $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$  המקיימת  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$  אזי  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ .

**למה:** תהא  $f \in C^1([0, 2\pi])$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = - \int_0^{2\pi} f'(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx$ .

**טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות:** תהא  $f \in C^1([0, 2\pi])$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $|\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx| \leq \frac{2\pi \sup(|f'|)}{n}$ .

**סימון:** יהי  $k \in \mathbb{N}_+$  אזי  $k!! = \prod_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} (k-2n)$ .

**למה:** יהי  $m \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^m dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^m dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$ .

**משפט מכפלת וואליס:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot (2n-1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}$ .

**אינטגרל רימן לא אמיתי:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  ותהא  $f \in \mathbb{R}^I$  אזי

- חד צדדי חיובי: נניח  $I = [a, \infty)$  וכן  $f \in R([a, b]) \forall b \in [a, \infty)$  אזי  $\int_a^\infty f = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$ .
- חד צדדי שלילי: נניח  $I = (-\infty, b]$  וכן  $f \in R([a, b]) \forall a \in (-\infty, b]$  אזי  $\int_{-\infty}^b f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f$ .

- דו צדדי: נניח  $I = \mathbb{R}$  וכן  $\forall a, b \in \mathbb{R}. (a < b) \implies (f \in R([a, b]))$  אזי  $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f$
- לא חסום משמאל: נניח  $I = (a, b]$  וכן  $\forall c \in I. f \in R([c, b])$  אזי  $\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f$
- לא חסום מימין: נניח  $I = [a, b)$  וכן  $\forall c \in I. f \in R([a, c])$  אזי  $\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f$

**סימון:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  אזי  $\int_I f = \{f \in \mathbb{R}^I \mid \text{קיים וסופי}\}$

**הערה:** מכאן כל המשפטים יהיו חד צדדים ימינה אך תקפים לכל סוגי הקטעים עם שינויים קלים.

**משפט:** יהיו  $\omega, \eta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  אזי

- לינאריות האינטגרל: תהייה  $f, g \in R([a, \omega))$  ויהיו  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  אזי  $\int_a^\omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\omega f + \beta \int_a^\omega g$
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא  $f \in R([a, \omega))$  ויהי  $c \in (a, \omega)$  אזי  $\int_a^\omega f = \int_a^c f + \int_c^\omega f$
- מונוטוניות: תהייה  $f, g \in R([a, \omega))$  המקיימות  $f \geq g$  אזי  $\int_a^\omega f \geq \int_a^\omega g$
- ניוטון לייבניץ: תהא  $f \in R([a, \omega))$  ותהא  $F \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  עבורה  $F'(x) = f(x)$  על  $[a, \omega)$  אזי  $\int_a^\omega f = \lim_{b \rightarrow \omega} F(b) - F(a)$
- אינטגרציה בחלקים: תהייה  $f, g \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  גזירות עבורן  $f', g' \in R([a, \omega))$  אזי  $\int_a^\omega f'g = \lim_{b \rightarrow \omega} [f \cdot g]_a^b - \int_a^\omega fg'$
- שינוי משתנה: תהא  $f \in R([a, \omega))$  ותהא  $\varphi \in C^1([c, \eta))$  המקיימת  $\varphi(c) = a$  ו- $\lim_{b \rightarrow \eta} \varphi(b) = \omega$  אזי  $\int_a^\omega f = \int_c^\eta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

**משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  המקיימת  $f \in R([a, b])$   $\forall b \in (a, \omega)$  אזי

$$(f \in R([a, \omega))) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists B \in (a, \omega). \forall b_1, b_2 \in [B, \omega). \left| \int_{b_1}^{b_2} f \right| < \varepsilon)$$

**התכנסות בהחלט:**  $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  המקיימת  $f \in R([a, b])$   $\forall b \in (a, \omega)$  עבורה  $\int_a^\omega |f|$  מתכנס.

**התכנסות בתנאי:**  $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  המקיימת  $f \in R([a, b])$   $\forall b \in (a, \omega)$  עבורה  $\int_a^\omega |f|$  אינו מתכנס אך  $\int_a^\omega f$  מתכנס.

**טענה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  עבורה  $\int_a^\omega f$  מתכנס בהחלט אזי  $\int_a^\omega f$  מתכנס.

**מסקנה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  עבורה  $\int_a^\omega f$  מתכנס בהחלט אזי  $\left| \int_a^\omega f \right| \leq \int_a^\omega |f|$

**טענה:** תהא  $0 \leq f \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  המקיימת  $\forall b \in (a, \omega). f \in R([a, b])$  אזי  $\left( \int_a^\omega f < \infty \right) \iff \left( \int_a^x f(t) dt = F(x) \text{ חסומה על } [a, \omega) \right)$

**מסקנה:** תהייה  $0 \leq f \leq g \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  המקיימות  $f, g \in R([a, b])$   $\forall b \in (a, \omega)$  אזי  $\left( \int_a^\omega g < \infty \right) \implies \left( \int_a^\omega f < \infty \right)$

**מסקנה:** תהייה  $0 \leq f \leq g \in \mathbb{R}^{[a, \omega)}$  המקיימות  $f, g \in R([a, b])$   $\forall b \in (a, \omega)$  אזי  $\left( \int_a^\omega f = \infty \right) \implies \left( \int_a^\omega g = \infty \right)$

**משפט:** תהא  $0 \leq f \in \mathbb{R}^{[1, \infty)}$  יורדת אזי  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \right) \iff \left( \int_1^{\infty} f < \infty \right)$

**טענה:** תהא  $0 \leq f \in \mathbb{R}^{[1, \infty)}$  יורדת אזי  $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

**פונקציית זטא של רימן:** נגדיר  $\zeta : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

**טענה:**  $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s)(s-1) = 1$

**משפט אבל:** תהא  $g \in C([a, \omega)) \cap R([a, \omega))$  ותהא  $f \in C^1([a, \omega))$  מונוטונית וחסומה אזי  $\int_a^\omega fg < \infty$

**משפט דיריכלה:** תהא  $g \in C([a, \omega))$  עבורה  $G(x) = \int_a^x g$  חסומה ותהא  $f \in C^1([a, \omega))$  מונוטונית עבורה

$$\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = 0 \text{ אזי } \int_a^\omega fg < \infty$$

**טענה נוסחאת סטירלינג:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi} \text{ מסקנה:}$$

**התכנסות נקודתית:** יהי  $I$  קטע מוכלל תהא  $g \in \mathbb{R}^I$  ויהי  $f \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$  אזי  $\left( \forall x \in I. \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x) \right) \iff \left( f_n \xrightarrow{\text{pointwise}} g \right)$

$$\left( f_n \xrightarrow{\text{p.w.}} f \right) \iff \left( f_n \xrightarrow{\text{pointwise}} f \right) \text{ סימון:}$$

**טענה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^I$  ותהא  $f_n \in \mathbb{R}^I$  מתכנסת נקודתית אל  $f$  אזי

$$(\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in C(I)) \not\Rightarrow (f \in C(I)) \text{ רציפות:}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in R(I)) \not\Rightarrow (f \in R(I)) \text{ אינטגרביליות רימן:}$$

- גבול האינטגרל: נניח  $\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in R(I)$  אזי  $(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = L) \not\Rightarrow (\int_I f = L)$ .
- נגזרת: יהי  $x \in I$  נניח  $f$  גזירה ולכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $f_n$  גזירה אזי  $(f'(x) = L) \not\Rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = L)$ .
- התכנסות במידה שווה (במ"ש):** יהי  $I$  קטע מוכלל תהא  $g \in \mathbb{R}^I$  ויהי  $f \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$  אזי  $(f_n \xrightarrow{\text{uniform}} g) \Leftrightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0)$ .
- סימון:**  $(f_n \xrightarrow{u} f) \Leftrightarrow (f_n \xrightarrow{\text{uniform}} f)$ .
- טענה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}$  אזי  $(f_n \xrightarrow{u} f) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall x \in A. \forall n > N. |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$ .
- חסומה במידה אחידה:**  $f_n \in \mathbb{R}^I$  המקיימת  $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. \forall x \in I. |f_n(x)| \leq M$ .
- למה:** תהיינה  $f_n, g_n \in \mathbb{R}^I$  חסומות במידה אחידה על ידי  $M \in \mathbb{R}$  עבורן  $(f_n \xrightarrow{u} f) \wedge (g_n \xrightarrow{u} g)$  אזי  $f_n g_n \xrightarrow{u} f g$ .
- משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה:** תהיינה  $f_n \in \mathbb{R}^I$  אזי  $(\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m > N. \forall x \in I. |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \Leftrightarrow (\exists f \in \mathbb{R}^I. f_n \xrightarrow{u} f)$ .
- משפט:** תהיינה  $f_n \in C(I)$  עבורן  $f_n \xrightarrow{u} f$  אזי  $f \in C(I)$ .
- קבוצה קומפקטית:**  $A \subseteq \mathbb{R}$  כך שלכל  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  קטעים פתוחים עבורם  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$   $\exists B \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda). A \subseteq \bigcup_{n \in B} I_n$ .
- הלמה של היינה-בורל:** יהיו  $a < b$  אזי  $[a, b]$  קומפקטית.
- משפט דיני:** תהיינה  $f_n \in C([a, b])$  עבורן  $f_n \xrightarrow{\text{p.w.}} f$  באשר  $f \in C([a, b])$  אזי  $f_n \xrightarrow{u} f$ .
- מסקנה:** תהיינה  $f_n \in C([a, b])$  עבורן  $f_n \xrightarrow{\text{p.w.}} f$  באשר  $f \in C([a, b])$  וכן לכל  $x \in [a, b]$  הסדרה  $\{f_n\}_{n=0}^\infty$  מונוטונית אזי  $f_n \xrightarrow{u} f$ .
- טענה:** תהיינה  $f_n \in R([a, b])$  עבורן  $f_n \xrightarrow{u} f$  אזי  $f \in R([a, b])$ .
- משפט:** תהיינה  $f_n \in R([a, b])$  עבורן  $f_n \xrightarrow{u} f$  אזי  $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$ .
- משפט מז'ורנטה:** תהיינה  $f_n \in R([a, \omega))$  עבורן  $f_n \xrightarrow{u} f$  על  $[a, b]$  ותהא  $\Psi \in R([a, \omega))$  עבורה  $\forall n \in \mathbb{N}. |f_n| \leq \Psi$  אזי  $(\int_a^\omega f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\omega f_n) \wedge (\int_a^\omega f \text{ מתכנסת בהחלט}) \wedge (\forall b \in [a, \omega). f \in R([a, b]))$ .
- טענה:**  $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .
- משפט:** תהיינה  $f_n \in C^1([a, b])$  עבורה  $f'_n \xrightarrow{u} g$  ותהא  $x_0 \in [a, b]$  עבורה  $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$  מתכנסת אזי  $f_n \xrightarrow{u} f$  וכן  $f' = g$ .
- סימון:** תהיינה  $f_n \in \mathbb{R}^I$  עבורה  $f_n \xrightarrow{u} f$  אזי  $\sum_{i=0}^n f_n = f$  במ"ש.
- משפט אינטגרציה איבר איבר:** תהיינה  $u_n \in C([a, b])$  עבורה  $\sum_{i=0}^\infty u_n$  במ"ש אזי  $\int_a^b \sum_{i=0}^\infty u_n = \sum_{i=0}^\infty \int_a^b u_i$ .
- משפט גזירה איבר איבר:** תהיינה  $u_n \in C^1([a, b])$  עבורה  $\sum u'_i$  במ"ש ותהא  $x_0 \in [a, b]$  עבורה  $\sum u_i(x_0)$  מתכנס אזי  $\sum u_i \text{ במ"ש וכן } \frac{d}{dx} (\sum_{i=0}^\infty u_i) = \sum_{i=0}^\infty \frac{d}{dx} u_i$ .
- משפט  $M$  בוחן של וירשטראס:** תהיינה  $u_n \in \mathbb{R}^I$  ותהא  $M \in \mathbb{R}_+^\mathbb{N}$  עבורה  $\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$  וכן  $\forall x \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \leq M_n$  אזי  $\sum u_n$  מתכנס בהחלט ובמ"ש.
- למה התמרת אבל:** תהיינה  $a, b \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$  אזי  $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k a_m (b_k - b_{k+1})$ .
- משפט קריטריון אבל:** תהיינה  $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a, b]}$  עבורן  $\sum_{i=0}^n f_i$  מתכנסת במ"ש וכן לכל  $x \in [a, b]$  הסדרה  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי  $\sum_{i=0}^n f_i g_i$  מתכנסת במ"ש.
- משפט קריטריון דיריכלה:** תהיינה  $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a, b]}$  עבורן  $\sum_{i=0}^n f_i$  חסומה במידה אחידה וכן  $g_n \xrightarrow{u} 0$  וכן לכל  $x \in [a, b]$  הסדרה  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  מונוטונית אזי  $\sum_{i=0}^n f_i g_i$  מתכנסת במ"ש.
- פונקציית וירשטראס:** יהי  $a \in (0, 1)$  ויהי  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  עבורם  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$  אזי  $W(x) = \sum_{k=0}^\infty a^k \cos(b^k \pi x)$ .

**הגדרה:** נגדיר  $\Delta_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  כך  $\Delta_k = \frac{\Delta_0(4^k x)}{4^k}$   $\Delta_0(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \wedge (\forall x \in \mathbb{R}. \Delta_0(x+1) = \Delta_0(x)) \wedge (\Delta_k = \frac{\Delta_0(4^k x)}{4^k})$

**טענה:**  $\Delta_n \xrightarrow{u} \Delta$

**מסקנה:**  $\Delta$  רציפה בכל נקודה.

**משפט:**  $\Delta$  אינה גזירה באף נקודה.

**משפט וירשטראס:** תהא  $f \in C([a, b])$  ויהי  $\varepsilon > 0$  אזי  $\exists p \in \mathbb{R}[x]. \max_{[a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$

**משפט וירשטראס:** תהא  $f \in C([a, b])$  אזי קיימת  $p_n \in \mathbb{R}[x]$  עבורה  $p_n \xrightarrow{u} f$

**הגדרה:** תהא  $f \in C([0, 1])$  אזי  $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

**משפט:** תהא  $f \in C([0, 1])$  אזי  $B_n \xrightarrow{u} f$

**משפט:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות המתכנס עבור  $q \in \mathbb{R}$  ויהי  $r < |q|$  אזי  $\sum a_k x^k$  מתכנס בהחלט ובמ"ש על  $[-|r|, |r|]$

**משפט אבל:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות אזי קיים  $R \in [0, \infty]$  כך שלכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים  $\begin{cases} \text{מתכנס} & x \in (-R, R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R, R] \end{cases}$

**רדיוס ההתכנסות:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות אזי  $R \in [0, \infty]$  המקיים את משפט אבל.

**משפט קושי הדמרד:** יהי  $\sum a_n x^n$  טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא  $\frac{1}{\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$

**הערה:** יהי  $\sum a_n x^n$  טור חזקות אזי  $\left(\left(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0\right) \Rightarrow (R = \infty)\right) \wedge \left(\left(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty\right) \Rightarrow (R = 0)\right)$

**טענה:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$  הינו  $R$ )  $\Leftrightarrow$  (רדיוס ההתכנסות של  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$  הינו  $R$ )

**מסקנה:** יהי  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f$  עם רדיוס  $R$  אזי  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = f'(x)$  על  $(-R, R)$

**משפט:** יהי  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f$  עם רדיוס  $R$  ויהי  $m \in \mathbb{N}$  אזי  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k = f^{(m)}(x)$  על  $(-R, R)$

**מסקנה טור טיילור של טור חזקות:** יהי  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f$  עם רדיוס  $R$  אזי  $P(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  על  $(-R, R)$

**טענה:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות עם רדיוס  $R$  אשר לא מתכנס ב- $R$  אזי  $\sum a_k x^k$  אינו מתכנס במ"ש על  $[0, R)$

**טענה:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות עם רדיוס  $R$  אשר לא מתכנס ב- $-R$  אזי  $\sum a_k x^k$  אינו מתכנס במ"ש על  $(-R, 0]$

**משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות מתכנס ב- $R$  אזי  $\sum a_k x^k$  מתכנס במ"ש על  $[0, R]$

**משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות מתכנס ב- $-R$  אזי  $\sum a_k x^k$  מתכנס במ"ש על  $[-R, 0]$

**מסקנה:** תהא  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  המקיימת  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < 0$  אזי  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$

**טענה:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות אזי  $\left(\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}\right)$  מתכנס ב- $R$   $\Leftrightarrow$   $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$  מתכנס ב- $R$

**טענה:** יהי  $\sum a_k x^k$  טור חזקות אזי  $\left(\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}\right)$  מתכנס ב- $-R$   $\Leftrightarrow$   $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$  מתכנס ב- $-R$

**סכים לפי אבל:** תהא  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  אזי  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$   $(A)$

**התכנסות צ'זארו:** תהא  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$   $(C)$

**סכים לפי צ'זארו:** תהא  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  אזי  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i$   $(C)$

**סימון:** תהא  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  אזי  $\sigma_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i$

**משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני:** תהא  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  עבורה  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n} = \ell$   $(C)$

**משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני:** תהא  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  עבורה  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$  אזי  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$   $(C)$

**משפט:** תהא  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  עבורה  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$  אזי  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$   $(A)$

**משפט טאובר:** תהא  $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  עבורה  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho$  וכן  $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$  אזי  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho$

**טענה:** תהא  $f \in \mathbb{C}^{[a, b]}$  אזי  $f = u + iv$   $\exists! u, v \in \mathbb{R}^{[a, b]}$

**סימון:** יהיו  $u, v \in R([a, b])$  אזי  $u + iv \in R([a, b])$



**אינטגרל:** יהיו  $u, v \in R_{\mathbb{R}}([a, b])$  אזי  $\int_a^b (u + iv) = \int_a^b u + i \int_a^b v$

**טענה:** תהיינה  $f, g \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$  אזי

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f$$

$$\int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}$$

**נגזרת:** יהיו  $u, v \in R_{\mathbb{R}}([a, b])$  אזי  $\frac{d}{dx}(u + iv) = \frac{du}{dx} + i \frac{dv}{dx}$

**למה:** תהא  $f \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$  אזי  $\|f\| \in R([a, b])$

**המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי:** תהא  $f \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$  ותהא  $x_0 \in [a, b]$  נקודת רציפות של  $f$  אזי

$$\left( \int_{x_0}^x f(t) dt \right)' (x_0) = f(x_0)$$

**משפט ניוטון לייבניץ:** תהא  $f \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$  ותהא  $F$  קדומה של  $f$  על  $[a, b]$  אזי  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

**משפט אינטגרציה בחלקים:** תהיינה  $f, g \in C^{[a, b]}$  גזירות עבורן  $f', g' \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$  אזי  $\int_a^b f'g = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b fg'$

**מסקנה:** תהא  $f \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$  אזי  $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$

**פונקציה מחזורית:**  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$  עבורה  $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$   $\exists T \in \mathbb{R}$

**טורוס חד מימדי/מעגל:**  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

**סימון:**  $R(\mathbb{T}) = \{f \in R([0, 2\pi]) \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x + 2\pi) = f(x)\}$

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{Z}$  אזי  $e_n(t) = e^{int}$

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{Z}$  אזי  $e_n(t) \in R(\mathbb{T})$

**פולינום טריגונומטרי:** יהי  $m \in \mathbb{N}$  ויהיו  $\{c_n\}_{n=-m}^m \in \mathbb{C}$  אזי  $\sum_{n=-m}^m c_n e_n(t)$

**דרגה של פולינום טריגונומטרי:** יהי  $\sum_{n=-m}^m c_n e_n(t)$  פולינום טריגונומטרי עבורו  $(c_m \neq 0) \vee (c_{-m} \neq 0)$  אזי  $m$

**טענה:**  $R(\mathbb{T})$  מ"ו מעל  $\mathbb{C}$

**הגדרה:** יהיו  $f, g \in R(\mathbb{T})$  אזי  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$

**טענה:**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  מכפלה פנימית על  $R(\mathbb{T})$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

**מקדם פורייה ה- $m$ :** יהי  $f$  פולינום טריגונומטרי אזי  $\langle f, e_m \rangle$

**סימון:** יהי  $f$  פולינום טריגונומטרי אזי  $\hat{f}(m) = \langle f, e_m \rangle$

**טענה:** יהי  $f(t) = \sum_{n=-m}^m c_n e_n(t)$  פולינום טריגונומטרי אזי  $\hat{f}(k) = c_k$

**מסקנה:** יהי  $f$  פולינום טריגונומטרי אזי  $f(t) = \sum_{n=-m}^m \hat{f}(n) e_n(t)$

**מסקנה:** יהיו  $f, g$  פולינומים טריגונומטריים אזי  $\langle f, g \rangle = \sum_{n=-m}^m \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$

**מסקנה:** יהי  $f$  פולינום טריגונומטרי אזי  $\|f\|^2 = \sum_{n=-m}^m |\hat{f}(n)|^2$

**מקדם פורייה ה- $m$ :** תהא  $f \in R(\mathbb{T})$  אזי  $\hat{f}(m) = \langle f, e_m \rangle$

**פולינום פורייה:** תהא  $f \in R(\mathbb{T})$  ויהי  $m \in \mathbb{N}$  אזי  $(S_m f)(t) = \sum_{n=-m}^m \hat{f}(n) e_n(t)$

**טענה:** תהא  $f \in R_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$  אזי  $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$

**מסקנה:** תהא  $f \in R(\mathbb{T})$  אזי  $f \leftarrow (S_m f)$  (ממשית)

**טענה:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  ויהי  $|k| \leq m$  אזי  $(f - S_m f) \perp e_k$

**מסקנה:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  אזי  $(f - S_m f) \perp S_m f$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  אזי  $\|f\|^2 = \|S_m f\|^2 + \|f - S_m f\|^2$ .

**טענה אישיוויון בסל:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  אזי  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|^2$ .

**מסקנה הלמה של רימן ולבג:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |\hat{f}(n)| = 0$ .

**התכנסות בנורמת  $L_2$ :** תהיינה  $f_n, g \in R([0, 2\pi])$  אזי  $(f_n \xrightarrow{L_2} g) \iff (\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\| = 0)$ .

**הערה:** התכנסות בנורמת  $L_2$  איננה יחידה.

**למה:** תהא  $g \in R(\mathbb{T})$  אזי  $\|g\| \leq \sup |g|$ .

**מסקנה:** תהיינה  $f_n \in R([0, 2\pi])$  אזי  $(f_n \xrightarrow{u} f) \implies (f_n \xrightarrow{L_2} f)$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$  אזי קיימת  $p_n \in \mathbb{C}[x]$  עבורה  $p_n \xrightarrow{L_2} f$ .

**משפט:** תהא  $f \in C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$  ויהי  $\varepsilon > 0$  אזי קיים פולינום טריגונומטרי  $p$  עבורו  $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |p(t) - f(t)| < \varepsilon$ .

**משפט:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  ויהי  $\varepsilon > 0$  אזי קיים פולינום טריגונומטרי  $p$  עבורו  $\|p - f\| < \varepsilon$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  אזי קיימים  $p_n$  פולינומים טריגונומטריים עבורם  $p_n \xrightarrow{L_2} f$ .

**טענה:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  יהי  $m \in \mathbb{N}$  ויהיו  $\{c_n\}_{n=-m}^m \in \mathbb{C}$  אזי  $\|f - \sum_{n=-m}^m c_n e_n\|^2 \geq \|f - S_m f\|^2$ .

**משפט:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  אזי  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m f - f\| = 0$ .

**שיוויון פרסבל:**  $f \in R([0, 2\pi])$  עבורה  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2$ .

**מסקנה:** תהא  $f \in R([0, 2\pi])$  אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

**למה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[-\pi, \pi]}$  המוגדרת  $f(t) = t$  נמשיכה מחזורית על  $\mathbb{R}$  אזי

- $(\forall n \in \mathbb{N}_+ \cdot \hat{f}(n) = \frac{(-1)^n i}{n}) \wedge (\hat{f}(0) = 0)$ .
- $S_m f(t) = \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nt)}{n}$ .
- יהי  $r \in [0, \pi)$  אזי  $S_m f \xrightarrow{u} f$  על  $[-r, r]$ .
- $(-\pi, \pi)$  על  $S_m f \xrightarrow{\text{p.w.}} f$ .

**מסקנה:**  $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**מסקנה:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ .

**למה:** תהא  $f \in \mathbb{R}^{[0, 2\pi]}$  המוגדרת  $f(t) = \frac{(\pi-t)^2}{4}$  נמשיכה מחזורית על  $\mathbb{R}$  אזי

- $(\forall n \in \mathbb{N}_+ \cdot \hat{f}(n) = \frac{1}{2n^2}) \wedge (\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{12})$ .
- $S_m f(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^m \frac{\cos(nt)}{n^2}$ .
- $[0, 2\pi]$  על  $S_m f \xrightarrow{u} f$ .
- $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .
- $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ .