הצרנה: הפיכת פסוק מילולי לשפה של צורות מתמטיות.

פסוק יסודי: טענה עצמית שיכולה להיות אמת או שקר.

קשר הדיסיונקציה/או: $A \vee B$.

קשר הקוניונקציה/גם: $A \wedge B$.

קשר האימפליקציה/גרירה: $A \implies B$.

סימון: סיפא $\implies$ רישא.

קשר השלילה: $\neg A$.

תחשיב הפסוקים: צירופים של פסוקים יסודיים וקשרים.

השמה של ערך אמת: עבור פסוק A נגדיר אם הוא אמת או שקר.

סימון: נסמן ב־$V(A)$ את ההשמה של ערך האמת של A.

הערה: במערכת הלוגיקה שלנו $((V(A)=T)\vee(V(A)=F))\wedge((V(A)\neq T)\vee(V(A)\neq F))$.

טענה: יש 2^n השמות ערכי אמת לפסוקים היסודיים $A_1,\ldots,A_n$.

הערה: $(V(A)=F) \implies (V(A \implies B)=T)$.

שקילות: נאמר כי $C\equiv D$ אם $V(C)=V(D)$ לכל השמה של ערכי אמת.

טענה:

- $A \implies B\equiv(\neg A)\vee B$.
- $A \implies B\equiv(\neg B) \implies (\neg A)$.
- $\neg(\neg A)\equiv A$.
- $A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$.
- $A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$.
- $\neg(A \implies B)\equiv A\wedge(\neg B)$.
- $A\wedge B\equiv B\wedge A$.
- $A\vee B\equiv B\vee A$.
- $A\wedge(B\wedge C)\equiv(A\wedge B)\wedge C$.
- $A\vee(B\vee C)\equiv(A\vee B)\vee C$.

כללי דה מורגן: $\neg(A\wedge B)\equiv(\neg A)\vee(\neg B)$, $\neg(A\vee B)\equiv(\neg A)\wedge(\neg B)$.

אם ורק אם (אם"ם): $A \iff B\equiv(A \implies B)\wedge(B \implies A)$.

טאוטולוגיה: פסוק A שבעבור כל השמת ערכי אמת מקיים $V(A)=T$.

סתירה: פסוק A שבעבור כל השמת ערכי אמת מקיים $V(A)=F$.

הערה: (A סתירה) $\iff$ ($\neg A$ טאוטולוגיה).

טענה: $P \implies P$, $P\vee\neg P$ הן טאוטולוגיות.

נובע סמנטית: פסוק α שמקיים כי (כל השמה שמקיימת $V(\alpha_1)=\ldots=V(\alpha_n)=T$) $\Longleftarrow$ ($V(\alpha)=T$).

פרידיקט n־מקומי: טענה ב־n פסוקים.

כמת קיים: קיים אובייקט שמקיים את הפרידיקט.

סימון: כמת קיים מסומן $\exists$.

כמת לכל: לכל אובייקט מתקיים הפרידיקט.

סימון: כמת לכל מסומן $\forall$.

תחום הכימות/עולם הדיון: קבוצת האובייקטים שמהווים את המקור להצבות של משתנים.

סימון: D תחום הכימות של $p(x)$ מסומן $D \models p(x)$.

אינטרפרטציה של פרידיקט: השמת ערכי אמת מתחום הכימות.

שקילות: נאמר כי $\beta \equiv \alpha$ אם לכל תחום כימות D ואינטרפרטציה של α, β מתקיים $\beta \iff D \models \alpha$.

טענה:

- $\neg(\exists x.P(x)) \equiv \forall x.\neg P(x)$.
- $\neg(\forall x.P(x)) \equiv \exists x.\neg P(x)$.
- $\forall x.\forall y.\phi(x,y) \equiv \forall y.\forall x.\phi(x,y)$.
- $\exists x.\exists y.\phi(x,y) \equiv \exists y.\exists x.\phi(x,y)$.
- $\forall x.(\phi(x) \wedge \psi(x)) \equiv (\forall x.\phi(x)) \wedge (\forall y.\psi(y))$.
- $\exists x.(\phi(x) \vee \psi(x)) \equiv (\exists x.\phi(x)) \vee (\exists y.\psi(y))$.

הוכחת טענת קיים: $\exists x.P(x)$ נציג x עבורו מתקיים $P(x)$.

הוכחת טענת לכל: $\forall x.P(x)$ נציג עבור x כללי בתחום הכימות.

קיים יחיד: $\exists! x.\phi(x) \equiv (\exists x.\phi(x)) \wedge (\forall x,y.\phi(x) \wedge \phi(y) \implies x = y)$.

כתיב יוטא: $(\exists! x.\phi(x)) \implies (\phi(\iota x.\phi(x)))$.

מערכת האקסיומות: ZFC היא המערכת שאנו נעבוד איתה.

קבוצה: אוסף של איברים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות.

שייך: תהא A קבוצה אזי $a \in A$ אם a נמצאת ב־A.

הערה: $a \notin A \equiv \neg(a \in A)$.

רישום קבוצה:

- רשימת איברים, $\{a_1,\ldots,a_n\}$ מתקיים $a \in \{a_1,\ldots,a_n\} \iff a = a_1 \vee \ldots \vee a = a_n$.
- עקרון ההפרדה, $\{x \in A \mid \phi(x)\}$ מתקיים $a \in \{x \in A \mid \phi(x)\} \iff a \in A \wedge \phi(a)$.
- עיקרון ההחלפה, $\{f(x) \mid x \in A\}$ מתקיים $a \in \{f(x) \mid x \in A\} \iff \exists x \in A.f(x) = a$.

קבוצה ריקה: $\varnothing = \{\}$.

הגדרה:

- $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$.
- $\mathbb{N}_+ = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$.
- $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}_+.((1 < n < p) \implies n \nmid p)\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}_+\right\}$.
- $\mathbb{R} =$"כל המספרים הממשיים".
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

קטע/אינטרוול:

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.

הכלה: $A\subseteq B\iff\forall x\left(x\in A\implies x\in B\right)$.

טענה: $\forall A.\varnothing\subseteq A$.

הערה: $A\nsubseteq B\equiv\neg\left(A\subseteq B\right)$.

מוכל ממש: $A\subset B\equiv\left(A\subseteq B\right)\land\left(B\nsubseteq A\right)$.

טענה: $A\subseteq B\land B\subseteq C\implies A\subseteq C$.

שיוויון/עקרון האקסטנציונליות: $\left(A=B\right)\equiv\left(\forall x.x\in A\iff x\in B\right)\equiv\left(A\subseteq B\right)\land\left(B\subseteq A\right)$.

טענה: $\forall X\left(\forall y.y\notin X\implies X=\varnothing\right)$.

חיתוך: $A\cap B=\left\{ x\in A\mid x\in B\right\}$.

איחוד: $A\cup B=\left\{ x\mid x\in A\lor x\in B\right\}$.

חיסור: $A\backslash B=\left\{ x\in A\mid x\notin B\right\}$.

משלים: $A^{\mathcal{C}}=\left\{ x\in\mathcal{U}\mid x\notin A\right\}$.

הפרש סימטרי: $A\triangle B=\left(A\backslash B\right)\cup\left(B\backslash A\right)$.

טענה:

- $A\cap\left(B\cap C\right)=\left(A\cap B\right)\cap C$, $A\cup\left(B\cup C\right)=\left(A\cup B\right)\cup C$.
- $A\cap\left(B\cup C\right)=\left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap C\right)$, $A\cup\left(B\cap C\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right)$.
- $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.
- $\left(A\cup B\right)^{\mathcal{C}}=A^{\mathcal{C}}\cap B^{\mathcal{C}}$, $\left(A\cap B\right)^{\mathcal{C}}=A^{\mathcal{C}}\cup B^{\mathcal{C}}$.

משפט האינדוקציה: יהי $P\left(x\right)$ פרידיקט אזי $\left(P\left(0\right)\land\left(\forall n\in\mathbb{N}.P\left(n\right)\implies P\left(n+1\right)\right)\right)\implies\left(\forall n\in\mathbb{N}.P\left(n\right)\right)$.

עוצמה: $\left|A\right|$ היא כמות האיברים ב־A.

קבוצת החזקה: $\mathcal{P}\left(A\right)=\left\{ B\mid B\subseteq A\right\}$.

הערה: $\left|\mathcal{P}\left(A\right)\right|=2^{\left|A\right|}$.

טענה: $A\subseteq B\iff\mathcal{P}\left(A\right)\subseteq\mathcal{P}\left(B\right)$.

חיתוך מוכלל: $\bigcap_{i\in I}A_{i}=\left\{ x\mid\forall i\in I.x\in A_{i}\right\}$.

איחוד מוכלל: $\bigcup_{i\in I}A_{i}=\left\{ x\mid\exists i\in I.x\in A_{i}\right\}$.

סימון: אם $A=\left\{ A_{i}\mid i\in I\right\}$ אזי $\bigcap A=\bigcap_{i\in I}A_{i}$, $\bigcup A=\bigcup_{i\in I}A_{i}$.

סימון: אם $A=\left\{ A_{i}\mid i\in\mathbb{N}\right\}$ אזי $\bigcap_{i=0}^{\infty}A_{i}=\bigcap_{i\in I}A_{i}$, $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_{i}=\bigcup_{i\in I}A_{i}$.

ערך שלם תחתון: $\left\lfloor x\right\rfloor =\max\left(n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\right)$.

ערך שלם עליון: $\left\lceil x\right\rceil =\min\left(n\in\mathbb{Z}\mid x\le n\right)$.

משפט: קיימת טענה $\phi\left(x\right)$ כך ש־$\left\{ x\mid\phi\left(x\right)\right\}$ איננה קבוצה.

פרדוקס ראסל: הקבוצה $\left\{ x\mid x\notin x\right\}$ איננה מוגדרת.

מסקנה: קבוצת כל הקבוצות איננה מוגדרת.

זוג סדור: $\left\langle x,y\right\rangle =\left\{ \left\{ x\right\} ,\left\{ x,y\right\} \right\}$.

טענה: $\left\langle a,b\right\rangle =\left\langle c,d\right\rangle \iff a=c\land b=d$.

מכפלה קרטזית: $A\times B=\left\{ \left\langle a,b\right\rangle \mid a\in A\land b\in B\right\}$.

חזקה: $A^{1}=A$, $A^{n}=A^{n-1}\times A$.

טענה: $A\times\left(B\cup C\right)=\left(A\times B\right)\cup\left(A\times C\right)$, $A\times\left(B\cap C\right)=\left(A\times B\right)\cap\left(A\times C\right)$.

איחוד זר: אם $A\cap B=\varnothing$ אז $A\uplus B=A\cup B$.

הערה: $|A_1\times\ldots\times A_n|=|A_1|\cdot\ldots\cdot|A_n|$.

המישור הממשי: $\mathbb{R}^n$.

יחס: $R\subseteq A\times B$.

הגדרה:

- $<_{\mathbb{N}}=\{\langle n,m\rangle\in\mathbb{N}^2\mid\exists k\in\mathbb{N}_+.n+k=m\}$.
- $\leq_{\mathbb{N}}=\{\langle n,m\rangle\in\mathbb{N}^2\mid\exists k\in\mathbb{N}.n+k=m\}$.
- $Id_A=\{\langle n,n\rangle\mid\in A\}$.

סימון: $aRb\iff\langle a,b\rangle\in R$.

מקור/תחום: יהי $R\subseteq A\times B$ אז $\text{Dom}\left(R\right)=\{a\in A\mid\exists b\in B.aRb\}$.

תמונה: יהי $\subseteq A\times B$ אז $\text{Im}\left(R\right)=\{b\in B\mid\exists a\in A.aRb\}$.

יחס הופכי: $R^{-1}=\{\langle b,a\rangle\mid aRb\}$.

טענה: $\left(R^{-1}\right)^{-1}=R$, $\text{Dom}\left(R^{-1}\right)=\text{Im}\left(R\right)$.

הרכבה: יהי $R\subseteq A\times B$ ויהי $S\subseteq B\times C$ אזי $S\circ R=\{\langle a,c\rangle\in A\times C\mid\exists b\in B.aRb\wedge bSc\}$.

טענה: $\left(R\circ S\right)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$, $R\circ Id_A=R=Id_A\circ R$.

יחס רפלקסיבי: $R\subseteq A^2$ שמקיים $\forall a\in A.aRa$.

יחס סימטרי: $R\subseteq A^2$ שמקיים $\forall a,b\in A.aRb\implies bRa$.

יחס טרנזיטיבי: $R\subseteq A^2$ שמקיים $\forall a,b,c\in A.aRb\wedge bRc\implies aRc$.

יחס שקילות: (רפלקסיבי)$\wedge$(סימטרי)$\wedge$(טרנזיטיבי).

מחלק: $\forall n,m\in\mathbb{Z}.n|m\iff\exists k\in\mathbb{Z}.kn=m$.

משפט: $\forall n\in\mathbb{Z}.\forall k\in\mathbb{Z}\backslash\left\{0\right\}.\exists!r\in\left\{0,\ldots,k\right\}.\exists!q\in\mathbb{Z}.n=k\cdot q+r$.

טענה: יהי $R\subseteq A^2$

- R רפלקסיבי $\iff Id_A\subseteq R$.
- R סימטרי $\iff R^{-1}=R$.
- R טרנזיטיבי $\iff R\circ R\subseteq R$.

מחלקת שקילות: יהי $R\subseteq A^2$ יחס שקילות ויהי $x\in A$ אזי $[x]_R=\{y\in A\mid xRy\}$.

קבוצת מנה/מודולו: יהי $R\subseteq A^2$ יחס שקילות אזי $A/R=\{[x]_R\mid x\in A\}$.

טענה: יהי $R\subseteq A^2$ יחס שקילות ויהיו $a,b\in A$

- $\left([a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing\right)\implies[a]_R=[b]_R$.
- $aRb\iff b\in[a]_R\iff[a]_R=[b]_R\iff a\in[b]_R\iff bRa$.
- $\neg\left(aRb\right)\iff[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$.

מערכת נציגים: יהי $R\subseteq A^2$ יחס שקילות אזי A' המקיימת $\left(\forall a,b\in A'.\,[a]\cap[a']=\varnothing\right)\wedge\left(\forall a\in A.\exists b\in A.aRb\right)$.

חלוקה: תהא A קבוצה אזי $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(A\right)\backslash\left\{\varnothing\right\}$ המקיים $\left(\biguplus\Pi=A\right)\wedge\left(\forall X,Y\in\Pi.X\neq Y\implies X\cap T=\varnothing\right)$.

המשפט היסודי של האריתמטיקה: $\forall t\in\mathbb{N}_+.\exists!k\in\mathbb{N}.\exists!\left\langle a_1,\ldots,a_k\right\rangle\in\mathbb{P}^k.a_1\cdot\ldots\cdot a_k=t$.

משפט: יש אינסוף ראשוניים.

החלוקה המושרית מהיחס: יהי $R\subseteq A^2$ יחס שקילות אזי A/R חלוקה.

היחס המושרה מהחלוקה: תהא Π חלוקה אזי $R_\Pi=\biguplus_{X\in\Pi}X^2$ יחס שקילות.

משפט: $R_{(A/S)}=S$, $A/R_\Pi=\Pi$.

יחס מלא: $R\subseteq A\times B$ שמקיים $\forall a\in A.\exists b\in B.aRb$.

פונקציה חלקית/יחס חד ערכי (ח"ע): $R\subseteq A\times B$ שמקיים $\forall a\in A.\forall b_1,b_2\in B.aRb_1\wedge aRb_2\implies b_1=b_2$.

סימון: תהא f ח"ע אזי $afb\iff f\left(a\right)=b$.

פונקציה: $R\subseteq A\times B$ המקיים (מלא)$\wedge$(ח"ע).

הגדרה: $A\to B=\left\{ f\in\mathcal{P}\left(A\times B\right)\mid \text{יחס מלא וח"ע } f\right\}$.

סימון: ${}^{B}A=A^{B}=A\to B$.

הערה: $\left|A^{B}\right|=\left|A\right|^{\left|B\right|}$.

סימון: $f:A\to B\equiv f\in A\to B$.

כתיב למבדא: $\left(\lambda x\in A.f\left(x\right)\right)=\left\{ \left\langle x,f\left(x\right)\right\rangle \mid x\in A\right\}$.

שיווין פונקציות: יהיו f,g פונקציות אזי $f=g\iff\left(\mathrm{Dom}\left(f\right)=\mathrm{Dom}\left(g\right)\right)\wedge\left(\forall x\in\mathrm{Dom}\left(f\right).f\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

תמונה: אם $f\left(a\right)=b$ אזי b.

מקור: אם $f\left(a\right)=b$ אזי a.

קבוצת התמונות: תהא $f\in A\to B$ ותהא $X\subseteq A$ אזי $f\left[X\right]=\left\{ f\left(a\right)\mid a\in X\right\}$.

קבוצת המקורות: תהא $f\in A\to B$ ותהא $Y\subseteq B$ אזי $f^{-1}\left[Y\right]=\left\{ a\in A\mid f\left(a\right)\in Y\right\}$.

טווח: תהא f פונקציה אזי X שמקיימת $X\supseteq\mathrm{Im}\left(f\right)$.

סימון: אם X טווח של f אז $\mathrm{Range}(f)=X$.

סימון: $f\left(a,b\right)=f\left(\left\langle a,b\right\rangle \right)$.

פונקציית curry: $\mathrm{curry}:C^{A\times B}\to\left(C^{B}\right)^{A}$ שמוגדרת $\mathrm{curry}=\lambda f\in C^{A\times B}.\lambda a\in A.\lambda b\in A.f\left(\left\langle a,b\right\rangle \right)$.

צמצום: תהא $f:A\to B$ ותהא $X\subseteq A$ נגדיר $f_{\restriction X}:X\to B$ כך $f_{\restriction X}=\lambda x\in X.f\left(x\right)$.

משפט: תהנא $f\in A\to B$, $g\in B\to C$ אזי $\forall a\in A.\left(g\circ f\right)\left(a\right)=g\left(f\left(a\right)\right)$.

משפט: תהנא $f:A\to B$, $g:B\to C$ אזי $g\circ f:A\to C$.

טענה: תהנא $h:A\to B$, $g:B\to C$, $f:C\to D$ אזי $f\circ\left(g\circ h\right)=\left(f\circ g\right)\circ h$.

פונקציה חד חד ערכית (חח"ע): $f:A\to B$ שמקיימת $\forall a_1,a_2.f\left(a_1\right)=f\left(a_2\right)\implies a_1=a_2$.

פונקציה nערכית: $f:A\to B$ שמקיימת $\forall b\in B.\left|f^{-1}\left[\left\{ b\right\} \right]\right|=n$.

פונקציה על: $f:A\to B$ שמקיימת $\forall b\in B.\exists a\in A.f\left(a\right)=b$.

משפט: תהא $f:A\to B$
- f חח"ע $\iff$ f^{-1} ח"ע.
- f על $\iff$ f^{-1} מלאה.
- f חח"ע ועל $\iff$ $f^{-1}:B\to A$.

הפיכות: תהא $f:A\to B$
- הפיכה משמאל: $\exists g\in B\to A.g\circ f=Id_{A}$.
- הפיכה מימין: $\exists g\in B\to A.f\circ g=Id_{B}$.
- זיווג/הפיכה: (הפיכה משמאל)$\wedge$(הפיכה מימין).

משפט: יהיו $A,B\neq\varnothing$ ותהא $f:A\to B$
- f חח"ע $\iff$ f הפיכה משמאל.
- f על $\iff$ f הפיכה מימין.
- f חח"ע ועל $\iff$ f הפיכה.

משפט: אם קיימת פונקציה הופכית אז היא יחידה.

חלוקה למקרים: $\begin{cases} f(x) & Q(x) \\ g(x) & P(x) \end{cases}$ אם $Q(x)$ אז $f(x)$ ואחרת אם $P(x)$ אז $g(x)$.

הגדרה: else בחלוקה למקרים היא כל המקרים שלא צויינו עוד.

סימון: $\begin{cases} f(x) & Q(x) \\ g(x) & P(x) \\ h(x) & R(x) \end{cases} = \begin{cases} f(x) & Q(x) \\ \begin{cases} g(x) & P(x) \\ h(x) & R(x) \end{cases} & P(x) \vee R(x) \end{cases}$.

הגדרה: יהיו A, B קבוצות

- $|A| = |B| \iff$ קיימת $f : A \to B$ הפיכה.
- $|A| \le |B| \iff$ קיימת $f : A \to B$ חח"ע.
- $|A| \ne |B| \equiv \neg(|A| = |B|)$.
- $|A| < |B| \equiv (|A| \le |B|) \wedge (|A| \ne |B|)$.

טענה: $\forall A. |A| = |A|$, $A \subseteq B \implies |A| \le |B|$, $|B| = |A| \iff |A| = |B|$.

טענה: $|A| \le |B| \wedge |B| \le |C| \implies |A| \le |C|$.

משפט: $|A| \le |B| \iff$ קיימת $f : B \to A$ על.

טענה: יהיו A, A', B, B' כך שמתקיים $|A| = |A'| \wedge |B| = |B'|$ אזי

- $|A \times B| = |A' \times B'|$.
- $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$.
- $\left|A^B\right| = \left|A'^{B'}\right|$.
- $|A \uplus B| = |A' \uplus B'|$.

משפט קנטור ברנשטיין שרדר (קב"ש): $|A| \le |B| \wedge |B| \le |A| \implies |A| = |B|$.

סימון: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

בת מנייה: קבוצה A שמקיימת $|A| = \aleph_0$.

קבוצה סופית: קבוצה A כך שמתקיים $\exists n \in \mathbb{N}. |A| = n$.

מסקנה: $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}_{even}| = |\mathbb{N}_{odd}| = \aleph_0$.

משפט:

- A סופית $\iff |A| < \aleph_0$.
- A אינסופית $\iff \aleph_0 \le |A|$.
- A אינסופית $\iff \exists B \subset A. |A| = |B|$.

מסקנה: נניח כי $|A| = n$, $|B| = m$ אזי

- $n \le_{\mathbb{N}} m \iff |A| \le |B|$.
- $n =_{\mathbb{N}} m \iff |A| = |B|$.
- $n <_{\mathbb{N}} m \iff |A| < |B|$.

משפט: $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(B). (|\mathcal{A}| \le \aleph_0) \wedge (\forall X \in \mathcal{A}. |X| \le \aleph_0) \implies \left|\bigcup \mathcal{A}\right| \le \aleph_0$.

הגדרה: $\mathbb{F}_n[x] = \{\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \mid \forall i \in \mathbb{N}. \alpha_i \in \mathbb{F}\}$, $\mathbb{F}[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n[x]$.

מספר אלגברי: $x_0 \in \mathbb{R}$ שמקיים כי $\exists p \in \mathbb{Z}[x]. p(x_0) = 0$.

הערה: כל $q \in \mathbb{Q}$ הוא מספר אלגברי.

משפט: $\forall p \in \mathbb{R}[x] . |\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\}| \leq \deg(p)$.

טענה: $|\mathbb{Z}[x]| = \aleph_0$.

משפט האלכסון של קנטור: $\aleph_0 < |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$.

משפט: $2^{|A|} = |A \to \{0,1\}| = |\mathcal{P}(A)|$.

סימון: $|\mathbb{R}| = א = \mathfrak{c}$.

עוצמת הרצף: קבוצה A שמקיימת $|A| = א = 2^{\aleph_0}$.

משפט: $|\mathbb{N} \to \{0,1\}| = |\mathbb{R}^n| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = א$.

פונקציית האינדיקטור: נגדיר $\chi : \text{set} \to \left(\{0,1\}^A\right)^{\mathcal{P}(A)}$ כך $\chi = \lambda A.\lambda B \in \mathcal{P}(A) .\lambda a \in A. \begin{cases} 1 & a \in B \\ 0 & else \end{cases}$.

סימון: $\chi_B^A = \chi(A)(B)$.

סימון: $\chi = \mathbb{1}$.

משפט קנטור: $\forall A. |A| < |\mathcal{P}(A)|$.

מסקנה: יש אינסוף עוצמות אינסופיות.

משפט: $\forall A.\aleph_0 \leq |A| . |A^n| = |A|$.

משפט: $\forall a < b \in \mathbb{R}. |(a,b)| = |[a,b)| = |(a,b]| = |[a,b]| = 2^{\aleph_0}$.

השערת הרצף: $\neg(\exists a.\aleph_0 < a < א)$.

משפט: ניתן להוכיח כי לא ניתן להוכיח את השערת הרצף וגם כי לא ניתן להפריך את השערת הרצף מתוך ZFC.

משפט אי השלמות הראשון של גדל: בכל מערכת אקסיומות T אם T מספיק איכותית כדי לתאר את $\mathbb{N}$ אז קיימת טענה α כך ש־T לא מוכיחה את α וגם T לא מוכיחה את $\neg\alpha$.

חשבון עוצמות: יהיו A, B קבוצות

- $|A| + |B| = |A \times \{0\} \uplus B \times \{1\}|$.
- $|A| \cdot |B| = |A \times B|$.
- $|A|^{|B|} = |B \to A|$.

טענה: יהיו a, b, c עוצמות

- אסוציטיביות: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- חילופיות: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.
- חוק הפילוג והקיבוץ: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- $\forall n \in \mathbb{N}_+ .a \cdot n = \underbrace{a + \ldots + a}_{n}$.

משפט: אם $a \leq b$, $c \leq d$ אזי

- $a + c \leq b + d$.
- $a \cdot c \leq b \cdot d$.
- $a^c \leq b^d$.

משפט: $\aleph_0 \cdot m = \aleph_0 + n = \aleph_0$, $א \cdot m = א + n = א$.

משפט: יהיו a, b עוצמות אינסופית אזי $a \cdot b = \max(a,b)$, $a + b = \max(a,b)$.

משפט: $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$, $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.

מסקנה: $\forall a \geq \aleph_0 .\forall n \in \mathbb{N}.a + n = a$.

מסקנה: $|\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}| = א$.

מסקנה : האי רציונליים צפופים בממשיים.

יחס אנטי סימטרי חלש : $R\subseteq A^{2}$ שמקיים $\forall a,b\in A.aRb\wedge bRa\implies a=b$.

יחס אנטי סימטרי חזק : $R\subseteq A^{2}$ שמקיים $\forall a,b\in A.aRb\implies\neg bRa$.

יחס אנטי רפלקסיבי : $\forall a\in A.\neg aRa$.

יחס סדר חלש : (רפלקסיבי)$\wedge$(אנטי סימטרי חלש)$\wedge$(טרנזיטיבי).

יחס סדר חזק : (אנטי רפלקסיבי)$\wedge$(אנטי סימטרי חזק)$\wedge$(טרנזיטיבי).

טענה : (אנטי סימטרי חזק) $\iff$ (אנטי סימטרי חלש)$\wedge$(אנטי רפלקסיבי).

מסקנה : (R יחס סדר חזק $\Longleftarrow$ $R\cup Id_{A}$ יחס סדר חלש)$\wedge$(R יחס סדר חלש $\Longleftarrow$ $R\backslash Id_{A}$ יחס סדר חזק).

היחס המילוני : $x<z\vee(x=z\wedge y<w)\iff\langle x,y\rangle<_{\text{Lex}}\langle z,w\rangle$.

הערה : היחס המילוני הוא יחס סדר חזק.

יחס השליטה בכל מקום : $\forall f,g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}.f\leq g\iff\forall n\in\mathbb{N}.f\left(n\right)\leq g\left(n\right)$.

הערה : יחס השליטה בכל מקום הוא יחס סדר חלש.

יחס השליטה כמעט בכל מקום : $\forall f,g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}.f\leq^{*}g\iff\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.f\left(n\right)\leq g\left(n\right)$.

הערה : יחס השליטה כמעט בכל מקום הוא יחס סדר חזק.

יחס קווי/טוטלי/לינארי : $\forall a,b\in A.aRb\vee bRa\vee a=b$.

איבר מקסימלי/מירבי : $x\in X\subseteq A$ שמקיים $\forall y\in X.\neg\left(xRy\right)\vee y=x$.

מקסימום : $x\in X\subseteq A$ שמקיים $\forall y\in X.yRx\vee y=x$.

סימון : המקסימום של X עם היחס R הוא $\max_{R}\left(X\right)$.

איבר מינימלי : $x\in X\subseteq A$ שמקיים $\forall y\in X.\neg\left(yRx\right)\vee y=x$.

מינימום : $x\in X\subseteq A$ שמקיים $\forall y\in X.xRy\vee y=x$.

סימון : המינימום של X עם היחס R הוא $\min_{R}\left(X\right)$.

טענה : (x,y מקסימום של X $\Longleftarrow$ $x=y$)$\wedge$(x,y מינימום של X $\Longleftarrow$ $x=y$).

חסם עליון/מלעיל : $x\in A$ שמקיים $\forall y\in X.y=x\vee yRx$.

סופרמום : $x\in A$ שמקיים (חסם עליון)$\wedge$(לכל חסם עליון y מתקיים $xRy\vee x=y$).

סימון : הסופרמום של X עם היחס R הוא $\sup_{R}\left(X\right)$.

חסם תחתון/מלרע : $x\in A$ שמקיים $\forall y\in X.y=x\vee xRy$.

אינפימום : $x\in A$ שמקיים (חסם תחתון)$\wedge$(לכל חסם תחתון y מתקיים $yRx\vee x=y$).

סימון : האינפימום של X עם היחס R הוא $\inf_{R}\left(X\right)$.

שלמות הממשיים : לכל $\varnothing\neq X\subseteq\mathbb{R}$ (קיימים ל־X חסם עליון ותחתון) $\Longleftarrow$ (קיימים ל־X סופרמום ואינפימום).

סימון : $\langle A,R\rangle$ זה היחס R מעל A.

הומומורפיזם/פונקציה שומרת סדר : פונקציה $f:A\to B$ שמקיימת $\forall a_{1},a_{2}\in A.a_{1}Ra_{2}\iff f\left(a_{1}\right)Sf\left(a_{2}\right)$.

טענה : אם $f:A\to B$,$g:B\to C$ שומרות סדר אזי $g\circ f$ שומרת סדר.

איזומורפיזם : (הומומורפיזם)$\wedge$(זיווג).

סימון : אם קיים איזומורפיזם $f:A\to B$ אזי $A\cong B$.

יחס סדר טוב : $\langle A,R\rangle$ שמקיים (יחס סדר חזק)$\wedge$(יחס קווי)$\wedge$(לכל $\varnothing\neq X\subseteq A$ קיים מינימום).

אינדוקציה טרנספיניטית : יהי $\langle A,R\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $P\left(x\right)$ פרידיקט אזי

$(P\left(\min\left(A\right)\right)\wedge\left(\forall a,b\in A.\left(P\left(a\right)\wedge aRb\right)\implies P\left(b\right)\right))\implies\left(\forall a\in A.P\left(a\right)\right)$.

קבוצה טרנזיטיבית : A המקיימת $\forall B\in A.\forall x\in B.x\in A$.

סודר : קבוצה α המקיימת (טרנזיטיביות)$\wedge$($\langle\alpha,\in\rangle$ יחס סדר טוב).

סודר עוקב : יהי α סודר אזי $S\left(\alpha\right)=\alpha\cup\left\{ \alpha\right\}$.

טענה : יהי α סודר אזי $S\left(\alpha\right)$ סודר.

הערה : לכל α סודר מתקיים $\alpha\in S\left(\alpha\right)$.

סודר גבולי : סודר שאינו עוקב.

סודר סופי : $0=\varnothing$, $n+1=S\left(n\right)$.

הגדרה : $\omega=\mathbb{N}$ הוא סודר גבול של כל המספרים הטבעיים.

טיפוס סדר : יהי $\langle A,R\rangle$ יחס סדר טוב אזי הסודר α היחידי המקיים $\langle A,R\rangle\cong\langle\alpha,\in\rangle$.

סימון : טיפוס הסדר של $\langle A,R\rangle$ הוא $\mathrm{ord}\left(A,R\right)$.

טענה : תהא A קבוצה של סודרים אזי $\bigcap A$ סודר.

טענה : תהא A קבוצה של סודרים אזי $\bigcap A=\min A$.

עוצמה : תהא A קבוצה אזי $\left|A\right|=\min\left\{ \mathrm{ord}\left(A,R\right)\mid A\text{ יחס סדר טוב על }R\right\}$.

אקסיומת הבחירה : $\forall A.\left(\forall X\in A.X\neq\varnothing\right)\implies\left(\exists F:A\to\bigcup A.\forall X\in A.F\left(X\right)\in X\right)$.

עיקרון הסדר הטוב : לכל קבוצה A קיים סדר טוב R על A.

חופפות בחלקים : $X,Y\subseteq\mathbb{R}^{n}$ כך שקיימות $X_{1},\ldots X_{k},Y_{1},\ldots,Y_{k}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ שמקיימות $X=X_{1}\uplus\ldots\uplus X_{k}$, $Y=Y_{1}\uplus\ldots\uplus Y_{k}$ וקיימות איזומטריות $\varphi_{1},\ldots,\varphi_{k}$ כך שמתקיים $\forall1\le j\le k.Y_{j}=\varphi_{j}X_{j}$.

פנים : תהא קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אז פני הצורה שנוצרת על ידי A היא A°.

סימון : $X,Y\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חופפות בחלקים $\iff X\equiv Y$.

פרדוקס בנך טרסקי : לכל $X,Y\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומות, $(X^{\circ},Y^{\circ}\neq\varnothing)\Longleftarrow(X\equiv Y)$.

מסקנה : $\left\{ \langle x,y,z\rangle\in\mathbb{R}^{3}\mid x^{2}+y^{2}+z^{2}<2\right\} \equiv\left\{ \langle x,y,z\rangle\in\mathbb{R}^{3}\mid x^{2}+y^{2}+z^{2}<1\right\}$.

טענה : (אקסיומת הבחירה) $\equiv$ (עיקרון הסדר הטוב) $\equiv$ (פרדוקס בנך טרסקי).

שרשרת : יהי $\langle\Sigma,R\rangle$ יחס אזי $C\subseteq\Sigma$ שמקיימת $\langle C,R\rangle$ יחס לינארי.

הלמה של צורן : יהי $\langle\Sigma,R\rangle$ יחס סדר, $(\Sigma\neq\varnothing\wedge$ לכל שרשרת $X\subseteq\Sigma$ יש חסם עליון$)\Longleftarrow$ (קיים איבר מקסימלי ב־Σ).

מסקנה : $\forall A,B.\left|A\right|\le\left|B\right|\vee\left|B\right|\le\left|A\right|$.

טענה : (אקסיומת הבחירה) $\equiv$ (הלמה של צורן).

סימון : $[n]=\left\{ 1,\ldots,n\right\}$.

הערה : כל הקבוצות מעכשיו הן סופיות.

עיקרון החיבור : $\forall A_{1}\ldots A_{n}.\left|\biguplus_{i=1}^{n}A_{i}\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|A_{i}\right|$.

עיקרון המשלים : $\forall A,B.A\subseteq B\implies\left|A\right|+\left|B\backslash A\right|=\left|B\right|$.

עיקרון הכפל : נניח כי $A=\biguplus_{i=1}^{n}A_{i}$ אזי $\left(\left|A\right|=n\cdot\left|A_{1}\right|\right)\implies\left(\forall i,j\in\left[n\right].\left|A_{i}\right|=\left|A_{j}\right|\right)$.

הכללה : יהי $R\subseteq A^{2}$ יחס שקילות אזי $\left(\forall x\in A.\left|A\right|=\left|\left[x\right]_{R}\right|\cdot\left|{}^{A}/_{R}\right|\right)\implies\left(\forall x,y\in A.\left|\left[x\right]_{R}\right|=\left|\left[y\right]_{R}\right|\right)$.

הכללה : תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(A\right)$ חלוקה אזי $\left(\forall X\in\Pi.\left|A\right|=\left|\Pi\right|\cdot\left|X\right|\right)\implies\left(\forall X,Y\in\Pi.\left|X\right|=\left|Y\right|\right)$.

עיקרון החלוקה/שיקולי סימטריה : נניח כי $A=\biguplus_{i=1}^{n}A_{i}$ אזי $\left(\frac{\left|A\right|}{n}=\left|A_{1}\right|\right)\implies\left(\forall i,j\in\left[n\right].\left|A_{i}\right|=\left|A_{j}\right|\right)$.

תמורה/פרמוטציה : פונקציה $f:A\to A$ חח"ע ועל.

הערה : n^{k} זו ספירה עם חשיבות לסדר ועם חזרה.

טענה : $\left|\left\{ f\in\left[n\right]\to\left[n\right]\mid f\text{ חח"ע ועל}\right\} \right|=n!$.

חליפות: $|\{f \in [k] \to [n] \mid f\text{חח"ע}\}| = P(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

הערה: $P(n,k)$ זו ספירה עם חשיבות לסדר ובלי חזרה.

הגדרה: $\mathcal{P}_k(A) = \{B \in \mathcal{P}(A) \mid |B| = k\}$.

צירופים: $|\mathcal{P}_k([n])| = C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

הערה: $\binom{n}{k}$ זו ספירה בלי חשיבות לסדר ובלי חזרה.

חלוקות: $|\{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = k\}| = S(n,k) = \binom{k+n-1}{k}$.

הערה: $S(n,k)$ זו ספירה בלי חשיבות לסדר ועם חזרה.

מולטי קבוצה: תהא A קבוצה ותהא $f : A \to \mathbb{N}_+$ אזי $B = (A,f)$ זאת קבוצה עם $f(a)$ פעמים האיבר a.

סידור עצמים בשורה: כמות האפשרויות לסדר n עצמים בשורה היא $n!$.

סידור עצמים במעגל: כמות האפשרויות לסדר n עצמים בשורה היא $(n-1)!$.

בחירה: כמות האפשרויות לבחור k עצמים מתוך n עצמים היא $\binom{n}{k}$.

חלוקת כדורים לתאים: כמות האפשרויות לחלק k כדורים זהים לתוך n תאים שונים היא $S(n,k)$.

טענה: $\forall k \le n. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

זהות פסקל: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

משפט: $\binom{n}{k} \le \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

הבינום של ניוטון: $\forall a,b \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

משפט: $|\{X \in \mathcal{P}([n]) \mid |X| \in \mathbb{N}_{even}\}| = 2^{n-1}$.

מולטינום: $\binom{n}{k_1,\ldots,k_\ell} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!}$.

מעל א"ב: עולם הדיון.

טענה: $\binom{n}{k_1,\ldots,k_\ell}$ הוא מספר המחרוזות באורך n מעל א"ב $\{1,\ldots,\ell\}$ עם k_i פעמים i במחרוזות.

נוסחת המולטינום: $$(x_1+\ldots+x_\ell)^n = \sum_{\substack{\langle k_1,\ldots,k_\ell\rangle \in \mathbb{N}^\ell \\ k_1+\ldots+k_\ell = n}} \left(\binom{n}{k_1,\ldots,k_\ell} \prod_{i=1}^\ell x_i^{k_i}\right).$$

טענה: $\forall A,B. |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

נוסחת ההכלה וההדחה: $$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{\varnothing \ne I \subseteq [n]} \left((-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|\right).$$

נוסחת ההכלה וההדחה הסימטרית: אם $\forall I,J \in \mathcal{P}_k([n]). \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \left|\bigcap_{i \in J} A_i\right|$ אזי $$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left|\bigcap_{i=1}^k A_i\right|\right).$$

נקודת שבת: $f(x) = x$.

שובך היונים: אם מחלקים $n+1$ יונים ל־n שובכים אז קיים שובך עם לפחות 2 יונים.

שובך היונים המוכלל: אם מחלקים m יונים ל־n שובכים אז קיים שובך עם לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יונים.

פונקציית מידה: $\mu(A)$ זה השטח של A.

הערה: $\mu\left(\biguplus_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$.

טענה: $A \subseteq B \implies \mu(A) \le \mu(B)$.

שובך היונים הגאומטרי: $\forall A \subseteq \mathbb{R}^2. \forall A_1,\ldots,A_m \subseteq A. \left(\sum_{i=1}^m \mu(A_i) > \mu(A)\right) \implies (\exists i \ne j. A_i \cap A_j \ne \varnothing)$.

טענה: $\forall A. |A| = \aleph_0 \implies \mu(A) = 0$.

עצרת נופלת: $\forall r \in \mathbb{R}. \forall k \in \mathbb{N}. r^{\underline{k}} = r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-k+1)$.

מקדם בינומי מוכלל: $\forall\alpha\in\mathbb{R}.\forall k\in\mathbb{N}.\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha^k}{k!}$.

הבינום השלילי: $\forall x,y\in\mathbb{R}.\forall\alpha\in\mathbb{R}.\,(x+y)^\alpha=\sum_{k=0}^\infty\binom{\alpha}{k}x^ky^{\alpha-k}$.

סימון: עולם הדיון הוא $\mathcal{U}$.

טענה: $\left|\bigcap_{i=1}^n A_i^{\mathcal{C}}\right|=|\mathcal{U}|+\sum_{\varnothing\neq I\subseteq[n]}\left((-1)^{|I|}\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|\right)$.

מספר קטלן: $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$.

הערה: C_n הוא מספר המסלולים מ־$\langle 0,0\rangle$ ל־$\langle n,n\rangle$ כאשר כל צעד במסלול הוא $\langle x,y\rangle\mapsto\begin{cases}\langle x+1,y\rangle\\ \langle x,y+1\rangle\end{cases}$ וגם תמיד $y\le x$.

משפט: $C_n=\sum_{i=1}^n C_{i-1}-C_{n-i}$, $C_0=C_1=1$.

סדרה מאוזנת: פונקציה $f\in\{f:[n]\to\{0,1\}\mid\forall i\in[n].\,(a_i=0)\implies(\exists j>i.a_j=1)\}$.

הערה: כמות הסדרות המאוזנות באורך $2n$ היא C_n.

מצולע קמור: מצולע כך שהישר בין כל שתי נקודות בתוך הצורה לא יוצא מן הצורה.

מצולע קעור: מצולע שאינו קמור.

קבוצת סידון: $\forall\{a,b\},\{x,y\}\in\mathcal{P}_2(A).a+b=x+y$.

סימון: אם $f:A\to B$ חח"ע נסמן $f:A\xrightarrow{1-1}B$.

סימון: אם $f:A\to B$ על נסמן $f:A\xrightarrow[\text{onto}]{}B$.

משפט ארדש סקרש: תהא $f:[a\cdot b+1]\xrightarrow{1-1}\mathbb{R}$ אזי (קיימים $k_1<\ldots<k_{a+1}$ כך ש־$f_{\restriction_{\{k_1,\ldots,k_{a+1}\}}}$ מונוטונית עולה)$\vee$(קיימים $k_1<\ldots<k_{b+1}$ כך ש־$f_{\restriction_{\{k_1,\ldots,k_{b+1}\}}}$ מונוטונית יורדת).

טור הנדסי: $\sum_{i=0}^n x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $\sum_{i=0}^\infty x^i=\frac{1}{1-q}$.

סדרה: פונקציה a המקיימת $\text{Dom}(a)=\mathbb{N}$.

טור חזקות: $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$.

פונקציה יוצרת: תהא $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ אזי $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$.

נוסחה: $\frac{1}{(1-x)^m}=\sum_{n=0}^\infty S(m,n)\,x^n$.

משפט: נניח כי $f(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ ו־$g(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.b_n$

- $f(x)\pm g(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n\pm b_n$.
- $cf(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.c\cdot a_n$.
- $x^mf(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}0 & n<n\\ a_{n-m} & else\end{cases}$.
- $f(x)\,g(x)$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\sum_{k=0}^n a_kb_{n-k}$.
- $\frac{f(x)}{1-x}$ יוצרת את $\lambda n\in\mathbb{N}.\sum_{k=0}^n a_k$.

פירוק לשברים חלקיים: יהי $P\in\mathbb{C}_n[x]$ ויהיו $\alpha_1,\ldots\alpha_n\in\mathbb{C}$ נמצא $A_1,\ldots A_n$ עבורם $\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^n(x-\alpha_i)}=\sum_{i=1}^n\frac{A_i}{x-\alpha_i}$.

פונקציה יוצרת מעריכית: תהא $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ אזי $\sum_{n=0}^\infty a_n\frac{x^n}{n!}$.

נוסחה סגורה: סדרה $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ כך ש־a_n לא תלויה ב־$a_1,\ldots,a_{n-1}$.

נוסחת נסיגה: סדרה $\lambda n\in\mathbb{N}.a_n$ כך ש־a_n תלויה ב־$a_1,\ldots,a_{n-1}$.

עומק הרקורסיה: אם i הוא האינדקס המינימלי כך ש־a_n תלוי ב־a_i אזי $n-i$.

תנאי התחלה: תהא נוסחת נסיגה a_n עם עומק רקורסיה i אזי חובה להגדיר את $a_1,\ldots,a_i$.

בעיית התחלה: נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה.

סדרת פיבונאצ'י: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $a_1=1$, $a_0=0$.

משפט: לכל בעיית התחלה קיים פתרון יחיד.

נוסחת נסיגה לינארית: יהיו $\alpha_0,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ אזי $a_n=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i a_i+\alpha_n$.

נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית: $a_n=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i a_i$.

פולינום אופייני: תהא נוסחת נסיגה הומוגנית $a_n=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i a_i$ אזי $x^n=\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i x^i$.

פתרון לבעיית ההתחלה: תהא נוסחת נסיגה הומוגנית a_n בעומק i אזי יהיו $\beta_1,\ldots,\beta_i$ פתרונות של הפולינום האופייני אזי $\exists A_1,\ldots,A_j.a_n=\sum_{j=1}^{i}A_j\beta_j^n$.

פתרון לסדרת פיבונאצ'י: $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

יחס הזהב: $\varphi=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

משפט: תהנא $S_0,\ldots,S_k\subseteq\mathbb{N}$ נסמן ב־a_n את מספר הפתרונות של $n=\sum_{i=0}^{k}x_i$ בעבור $x_i\in S_i$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathbb{1}_{S_i}(\ell)\,x^{\ell}\right)$.

גרף מכוון: תהא V ותהא $E\subseteq V^2$ אזי $\langle V,E\rangle$.

גרף לא מכוון: תהא V ותהא $E\subseteq\mathcal{P}_2(V)$ אזי $\langle V,E\rangle$.

מולטי גרף: ...

הערה: בקורס מדובר רק על גרפים לא מכוונים אלא אם כן מצויין אחרת.

קודקודים/צמתים: יהי $\langle V,E\rangle$ גרף אזי V.

סימון: יהי G גרף אזי $V(G)$ היא קבוצת הקודקודים.

קשתות/צלעות: יהי $\langle V,E\rangle$ גרף אזי E.

סימון: יהי G גרף אזי $E(G)$ היא קבוצת הקשתות.

שרוך: $\langle[n],\{\{k,k+1\}\mid k\in[n-1]\}\rangle$.

גרף מעגל: $C_n=\langle[n],\{\{k,k+1\}\mid k\in[n-1]\}\cup\{\{0,n\}\}\rangle$.

גרף n־צדדי: $\langle V_1\uplus\ldots\uplus V_n,E\rangle$ המקיים $\forall e\in E.\exists i\neq j.\,|e\cap V_i|=|e\cap V_j|$.

גרף n־צדדי מלא: $\langle V_1\uplus\ldots\uplus V_n,E\rangle$ גרף n־צדדי המקיים $E=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=i+1}^{n}\{\{e_1,e_2\}\mid e_1\in V_i\wedge e_2\in V_j\}$.

סימון: יהי $G=\langle V_1\uplus\ldots\uplus V_n,E\rangle$ גרף n־צדדי מלא נסמנו $K_{|V_1|,\ldots|V_n|}$.

קליקה: K_n.

קבוצת השכנים: יהי G גרף ויהי $v\in V(G)$ אזי $N_G(v)=\{u\in V(G)\mid\{u,v\}\in E(G)\}$.

לולאה: יהי G גרף מכוון ויהי $v\in V(G)$ אזי $\langle v,v\rangle\in E(G)$.

גרף פשוט: גרף לא מכוון חסר לולאות.

דרגה: יהי G גרף ויהי $v\in V(G)$ אזי $\deg(v)=d_G(v)=|N(v)|$.

קודקוד מבודד: $v\in V(G)$ המקיים $d(v)=0$.

עלה: $v\in V(G)$ המקיים $d(v)=1$.

טענה: יהי G גרף אזי $\forall v\in V(G).0\le d(v)\le|V(G)|-1$.

נוסחת לחיצות הידיים: יהי G גרף מתקיים $2|E(G)|=\sum_{v\in V(G)}(d(v))$.

תת גרף: יהי G גרף אזי G' המקיימת $(V(G')\subseteq V(G))\wedge(E(G')\subseteq E(G)\cap\mathcal{P}_2(V(G')))$.

תת הגרף הנפרש: יהי G גרף ותהא $V'\subseteq V(G)$ אזי $G[V']=\langle V',\mathcal{P}_2(V')\cap E(G)\rangle$.

גרף משלים: יהי G גרף אזי $\overline{G}=\langle V(G),\mathcal{P}_2(V(G))\backslash E(G)\rangle$.

טיול: יהי G גרף ויהיו $a_1,a_n\in V(G)$ אזי $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\in V(G)^n$ המקיימת $\forall i\in[n-1].\{a_i,a_{i+1}\}\in E(G)$.

אורך טיול: יהי $\sigma = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ טיול אזי $\ell(\sigma) = n - 1$.

מסלול: יהי G גרף ויהיו $a_1, a_n \in V(G)$ אזי מסלול המקיים $\forall i \neq j \in [n-1] . \{a_i, a_{i+1}\} \neq \{a_j, a_{j+1}\}$.

תת מסלול: יהי $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ מסלול אזי $\langle a_i, \ldots, a_j \rangle$.

מעגל: יהי G גרף ויהי $v \in V(G)$ אזי מסלול בין v ל־v.

מסלול פשוט: (מסלול)$\wedge$(כל תת מסלול שלו אינו מעגל).

מעגל פשוט: מעגל $\langle a_1, \ldots, a_n, a_1 \rangle$ המקיים $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ מסלול פשוט.

משפט: יהי G גרף ויהיו $v_1, v_2 \in V(G)$

- (קיים מסלול פשוט מ־v_1 ל־v_2) $\iff$ (קיים טיול מ־v_1 ל־v_2).
- (קיים מעגל פשוט מ־v_1 ל־v_1) $\iff$ (קיים מעגל מ־v_1 ל־v_1).

משפט: יהי G גרף חסר מעגלים אזי $|E(G)| < |V(G)|$.

למה: יהי G גרף חסר מעגלים אזי קיימים $v, u \in V(G)$ שונים כך ש־v, u עלים.

יחס הקשירות: יהי G גרף אזי (קיים טיול מ־v ל־u) $\iff$ $\forall u, v \in V(G) . v \underset{G}{\to} u$.

טענה: יחס הקשירות הוא יחס שקילות.

רכיב קשירות: מחלקת שקילות ביחס הקשירות.

מסקנה: יהי G גרף ויהי $K \in {}^{V(G)}/_{\underset{G}{\to}}$ אזי $\forall v \in K . d_{G[K]}(v) = d_G(v)$.

גרף קשיר: גרף G המקיים $\left| {}^{V(G)}/_{\underset{G}{\to}} \right| = 1$.

הגדרה: יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף ותהא $E' \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ אזי $G + E' = \langle V, E \cup E' \rangle$.

הגדרה: יהי $G = \langle V, E \rangle$ גרף ותהא $E' \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ אזי $G - E' = \langle V, E \backslash E' \rangle$.

טענה: יהי G גרף ויהיו $v, u \in V(G)$

1. אם $u \underset{G}{\to} v$ אז $[v]_{\underset{G}{\to}} = [v]_{\underset{G+\{\{v,u\}\}}{\longrightarrow}}$.
2. אם $\neg\left(v \underset{G}{\to} u\right)$ אז $[v]_{\underset{G}{\to}} \uplus [u]_{\underset{G}{\to}} = [v]_{\underset{G+\{\{v,u\}\}}{\longrightarrow}}$.

מסקנה: יהי G גרף אזי $\left| {}^{V(G)}/_{\underset{G}{\to}} \right| \geq |V(G)| - |E(G)|$.

אלגוריתם דייקסטרה: ...

מסקנה: יהי G גרף אם $|V(G)| - 1 > |E(G)|$ אז G לא קשיר.

מסקנה: אם G קשיר אז $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

טענה: אם G חסר מעגלים אז $|E(G)| \leq |V(G)| - 1$.

עץ: (קשיר)$\wedge$(חסר מעגלים).

טענה: יהי G גרף אזי כל $K \in {}^{V(G)}/_{\underset{G}{\to}}$ הוא עץ.

מסקנה: אם T עץ אז $|E(G)| = |V(G)| - 1$.

עץ פורש: יהי G גרף ותהא $E' \subseteq E(G)$ אזי $T = \langle V(G), E' \rangle$ כך ש־T עץ.

יער: חסר מעגלים.

קשיר מינימלי: גרף G כך שלכל $e \in E(G)$ מתקיים כי $G - \{e\}$ לא קשיר.

חסר מעגלים מקסימלי: גרף G כך שלכל $v, u \in V(G)$ מתקיים כי $G + \{\{v, u\}\}$ בעל מעגל.

משפט העצים: יהי G גרף התב"ש (התנאים הבאים שקולים)

- G עץ.
- (G חסר מעגלים)$\wedge$($|E(G)| = |V(G)| - 1$).

- (G קשיר)$\wedge$($|E(G)| = |V(G)| - 1$).
- G קשיר מינימלי.
- G חסר מעגלים מקסימלי.
- בין כל שני קודקודים ב־G קיים מסלול יחיד.

גרף מישורי: גרף G כך שכל הקשתות בדיאגרמה של הגרף לא נחתכות אחת עם השנייה.

הגדרה: יהי G גרף אזי $\Delta(G) = \max(d_G(v) \mid v \in V(G))$.

הגדרה: יהי G גרף אזי $\delta(G) = \min(d_G(v) \mid v \in V(G))$.

מעגל המילטון: יהי G גרף אזי σ מעגל המקיים $\ell(\sigma) = |V(G)|$.

משפט דיראק: יהי G גרף על n קודקודים אזי ($\delta(G) \geq \frac{n}{2}$) $\Longleftarrow$ (קיים מעגל המילטון בגרף).

הגדרה: יהי G גרף ויהי קודקוד $v \in V(G)$ נגדיר $G + \{v\} = \langle V(G) \cup \{v\}, E(G)\rangle$.

הגדרה: יהי G גרף ויהי קודקוד $v \in V(G)$ נגדיר $G - \{v\} = \langle V(G) \setminus \{v\}, E(G) \setminus \{\{v,u\} \mid u \in V(G)\}\rangle$.

טענה: יהי T עץ ויהי $v \in V(T)$ עלה אזי $G - \{v\}$ עץ.

גרף ממושקל: גרף G ופונקציה $f : E(G) \to \mathbb{R}$.

אלגוריתם קרוסקל: ...

אלגוריתם פרים: ...

קידוד פרופר: שיטה לקידוד עץ בינארי למחרוזת, בכל שלב נבחר עלה בעל ערך קטן ביותר ונוסיף למחרוזת את הקודקוד היחידי שהוא מחובר אליו, לאחר מכן נמחק את אותו עלה ונמשיך ברקורסיה עד שישארו שני קודקודים בגרף.

משפט קיילי: כמות העצים על n קודקודים הוא $n^{(n-2)}$.

הערה: יהי G גרף אזי מספר המופעים של $v \in V(G)$ בקידוד פרופר הוא $\deg(v) - 1$.

מסלול אוילר: מסלול העובר על כל הקשתות בגרף.

מעגל אוילר: (מעגל)$\wedge$(מסלול אוילר).

משפט אוילר: יהי G גרף קשיר

- (ב־G יש מעגל אוילר) $\iff$ ($\forall v \in V(G).d(v) \in \mathbb{N}_{even}$).
- (ב־G יש מסלול אוילר) $\iff$ ($\exists! v,u \in V(G).(v \neq u) \wedge (d(v), d(u) \in \mathbb{N}_{odd})$)$\vee$(ב־$G$ יש מעגל אוילר).

הומומורפיזם: יהיו G_1, G_2 גרפים אזי $f : V(G_1) \to V(G_2)$ המקיימת $\forall \{v,u\} \in E(G_1).\{f(v), f(u)\} \in E(G_2)$.

איזומורפיזם: (הומומורפיזם)$\wedge$(זיווג).

טענה: יהיו G_1, G_2 גרפים ויהי $f : V(G_1) \to V(G_2)$ איזומורפיזם

- $|V(G_1)| = |V(G_2)|$.
- $|E(G_1)| = |E(G_2)|$.
- $\forall v \in V(G_1).d_{G_1}(v) = d_{G_2}(f(v))$.
- ($\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ טיול ב־G_1) $\iff$ ($\langle f(a_1), \ldots, f(a_n)\rangle$ טיול ב־G_2).
- (G_1 קשיר/עץ/חסר מעגלים) $\iff$ (G_2 קשיר/עץ/חסר מעגלים).

הגדרה: $\text{Graph}(V) = \{\langle V, E\rangle \mid E \subseteq \mathcal{P}_2(V)\}$.

גרף לא מסומן: $K \in {}^{\text{Graph}(V)}/_{\cong}$.

הערה: $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq \left|{}^{\text{Graph}([n])}/_{\cong}\right| \leq 2^{\binom{n}{2}}$.

צביעת קשתות: יהי G גרף אזי $f : E(G) \to A$.

תת גרף מונוכרומטי: יהי G גרף ותהא f צביעה אזי G' תת גרף של G כך שמתקיים $\forall e_1, e_2 \in E(G') . f(e_1) = f(e_2)$.

מספר ראמזי: לכל $s, t \geq 2$ נגדיר את $R(s,t)$ להיות ה־$n \in \mathbb{N}$ הקטן ביותר כך שלכל צביעת קשתות של K_n בשני צבעים ניתן למצוא קליקה מונוכרומטית K_s אדומה או קליקה מונוכרומטית K_t כחולה.

משפט: $R(3,3) = 6$.

משפט: $\forall s, t \geq 2 . R(s,t) = R(t,s)$.

משפט ראמזי: מתקיים $\forall s, t \geq 2 . \exists n \in \mathbb{N} . R(s,t) = n$.

משפט קוניגג: לכל $\forall f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{N}) \to \{0,1\} . \exists H \subseteq \mathbb{N} . (|H| = \aleph_0) \wedge (|f[\mathcal{P}_2(H)]| = 1)$.

משפט ארדש־ראדו: יהי G גרף שמקיים $\aleph < |V(G)|$ ותהא $f \in \mathcal{P}_2(V(G)) \to \mathbb{N}$ אזי קיימת $B \subseteq A$ מונוכרומטית המקיימת $\aleph_0 < |B|$.

צביעת קודקודים: יהי G גרף אזי $f : V(G) \to A$.

צביעת קודקודים חוקית: יהי G גרף אזי צביעת קודקודים $f : V(G) \to A$ המקיימת $\forall v, u \in V(G) . \{v, u\} \in E(G) \implies f(v) \neq f(u)$.

גרף k־צביע: גרף G המקיים כי קיימת צביעה חוקית של G ב־k צבעים.

הערה: לכל גרף G

- G 1־צביע $\iff$ $E(G) = \varnothing$.
- G 2־צביע $\iff$ G גרף דו צדדי.

משפט: G גרף דו צדדי $\iff$ אין ב־G מעגלים באורך אי־זוגי.

מספר הצביעה: יהי G גרף אזי $\chi(G)$ הינו המספר הטבעי n הכי קטן כך ש־G n־צביע.

הערה: יהי G גרף שמקיים $E(G) \neq \varnothing$ אזי $2 \leq \chi(G) \leq |V(G)|$.