```
יריעה חלקה x של \mathcal{O} של ביבה סביבה G\subseteq\mathbb{R}^k פתוחה וכן קיימת עבורה לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n עבורה לכל איימת x\in\mathcal{M}
                                                                              עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. \Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O} עבורה f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}
ight)
                                                                                 .C^{\omega}\left(A,B
ight)=\{f:A
ightarrow B\mid סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי f\} אנליטית אזי
יריעה אנליטית x-מימת סביבה \mathcal{O} של xוכן קיימת עבורה לכל x\in\mathcal{M} פיימת איימת x\in\mathcal{M} עבורה לכל אוכן x\in\mathcal{M}
                                                        עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. \Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O} אנליטית מקומית עבורה f:G	o\mathbb{R}^{n-k}
                                                                                                                                                        . עקומה: יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n שהינה חד־מימדית \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                                                          . שהינה דו־מימדית \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n משטח: יריעה
                                                                                                                      . מימדית n-1 שהינה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n מימדית מימר n-1
                                                                                                                                                           . טענה: \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n הינה היפר־משפט חלק\mathbb{S}^n
                                                                                                                                              הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.
יריעה לכל \mathcal{M}\cap\mathcal{U}_{lpha} אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_{lpha} פתוחות עבורן פתוחות לכל אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M} וכן \mathcal{M} יריעה לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                                                         .(\alpha \in \Lambda
                                                           (יריעה), אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (בורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} יריעה) קיימת סביבה x \in \mathcal{M} יריעה), יריעה
                  עבורה r\in C^m (G,\mathbb{R}^n) אני פתוחה אזי G\subseteq\mathbb{R}^k מימדית ותהא T־יריעה T-יריעה T-יריעה T-יריעה ארייריעה ארייריעה פרמטריזציה: תהא
                                                                                                                                                                                                                .r(G) = \mathcal{M}
       \operatorname{Lank}\left(\mathcal{D}_{r}\left(x
ight)
ight)=k מתקיים x\in G מתקיים עבורה לכל r\in C^{1}\left(G,\mathbb{R}^{n}
ight) פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית: תהא
                                                        f^{-1}\in C\left(B,A
ight) הפיכה עבורה f\in C\left(A,B
ight) אזי אזי B\subseteq\mathbb{R}^{m} ותהא A\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                      . פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית r:G	o A שהינה הומאומורפיזם. פתוחה אזי פרמטריזציה ותהא מובה: תהא A\subseteq\mathbb{R}^n שהינה הומאומורפיזם.
וכן קיימות \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha עבורן ביחס ל־\mathcal{M} עבורן קיימות (קיימות קיימות יריעה) אזי אזי \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי אזי (\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha) פתוחות ביחס ל־\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha אזי (\mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha) פתוחות ביחס ל־
                                          \mathcal{U}_{lpha}\left(G_{lpha}
ight)=\mathcal{U}_{lpha} עבורן r_{lpha}\subseteq C^{m}\left(G_{lpha},\mathbb{R}^{n}
ight) טובות טובות פרמטריזציות פרמטריזציות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות \left\{G_{lpha}\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{k}
ight)
                         . (עבורה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} יריעה)\iff (לכל \mathcal{M} \in \mathcal{M} קיימת סביבה \mathcal{M} עבורה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי אזי (לכל אזי מובה).
(f_1\dots f_{n-k})(x)=0 המקיימת x\in\mathcal{U} עבורה לכל עבורה אזי \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית: תהא
                                                                                                                                                                                    מתקיים כי \{\nabla f_i(x)\} בת"ל.
עבורו x\in\mathcal{U} עבורו (לכל איזי איזי אויית משוואות אויf_1\dots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורו f_1\dots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}
                                                                                                                 . (rank \left(\mathcal{D}_{(f_1\dots f_{n-k})}\left(x
ight)
ight)=n-k מתקיים \left(f_1\dots f_{n-k}
ight)\left(x
ight)=0
                            רית מערכת משוואות אזי מערכת פתוחה אזי מערכת הצגה הצגה הותהא באי מיריעה C^m תהא מערכת משוואות הצגה הצגה הצגה הגולרית:
                                                                                                                                  \{(f_1\dots f_{n-k})=0\}=\mathcal{M} עבורה \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                 .(לכל \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n בעלת הצגה סתומה רגולרית) קיימת סביבה עבורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי (לכל
                                                                              \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\} אליפסואיד: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי a,b,c\in\mathbb{R} טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\}
                                                                           . \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1
ight\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} אזי היפרבולואיד דו־יריעתי: יהינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. מענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                                                                            .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} אזי \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1
ight\} אזי .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\} טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                             f(t,
ho)=egin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(
ho) \\ \gamma_1(t)\sin(
ho) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} המוגדרת f:I	imes(0,2\pi)	o\mathbb{R}^3 עקומה אזי \gamma:I	o(0,\infty)	imes\mathbb{R} המוגדרת
\gamma של f אזי משפט הסיבוב עקומה עבורה \gamma:Im\left(\gamma
ight) פרמטריזציה טובה של \gamma:I\to(0,\infty)	imes\mathbb{R} אזי משפט הסיבוב
                                                                                                                                                                                  \operatorname{Im}\left(f\right) פרמטריזציה טובה של
                                                  f(x)=-rac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,rac{\|x\|^2-1}{2}
ight) כך f:\mathbb{R}^n	o\mathbb{S}^n נגדיר n\in\mathbb{N}_+ נגדיר n\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                                                                                   \mathbb{S}^1 טורוס: משטח הסיבוב של
```

עבורה לכל  $M\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה וכן קיימת סביבה  $M\subseteq\mathbb{R}^n$  עבורה לכל  $M\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה וכן קיימת של  $T^m$ 

. עבורה  $\Gamma_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$  עבורה של קואורדינטות עד כדי פרמוטציה על  $f \in C^m \left( G, \mathbb{R}^{n-k} \right)$ 

```
\forall x \in \mathcal{M}. (|N\left(x
ight)| = 1) \land (N\left(x
ight) \perp x) המקיימת N \in C\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n
ight) על־משטח אזי \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n המקיימת \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n היי יהי
                                                                                                                               למה: טבעת מוביוס אינו משטח קו־אוריינטבילי.
                                                                                                       . טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} יריעה דו־מימדית
                                                             טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M} אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.
                                                                            . טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M} אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.
                                                                                                          a 	imes b = \left(egin{array}{c} a_2b_3 - a_3b_2 \ a_3b_1 - a_1b_3 \ a_1b_2 - a_2b_1 \end{array}
ight) אזי a,b \in \mathbb{R}^3 יהיו יהיו
                                                                                                              (u 	imes v) \perp u וכן (u 	imes v) \perp v אזי u,v \in \mathbb{R}^3 וכן יהיו
                                                                                                         (u \times v = 0) \iff (u \in \text{span}(v)) אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                       \det(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 > 0 אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיי
                                                                                                        \|v \times u\| = \|v\| \|u\| \sin(\angle(v,u)) אזי u,v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
וכן קיים א פתוחה המקיימת \mathcal{U}\subset \mathbb{R}^n פתוחה המקיימת איז קבוצה A\subset \mathbb{R}^n קבוצה איים פמימד איז פתוחה ממימד איז דיפאומורפיזם ממימד וכן קיים
                                                                                             f(A) = f(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}) דיפאומורפיזם עבורו f: \mathcal{U} \to \mathcal{V}
עבורה P מתקיימת מקומית: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n קבוצה אזי פרידיקט עבורו לכל עבורו לכל A\subseteq\mathbb{R}^n עבורה על
                                                                                                                                                                                            A \cap \mathcal{U}
                                                                                                                                   משפט: תהא k\in\mathbb{N}_+ ויהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n התב"ש
                                                                                                                                                             .יריעה k־מימדית \mathcal{M}
                                             . עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. עד f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}
ight) איז פונקציה של פונקציה \mathcal{M}
                                                                                           x:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^n מקומית בעלת פרמטריזציה טובה \mathcal M • מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית \mathcal M • מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית \mathcal M • מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל-\mathbb R^k
מסקנה: תהא W\subseteq\mathbb{R}^n של (a,0_{n-k}) של וקיים דיפאומורפיזם קיימת סביבה a\in G אזי לכל זיים דיפאומורפיזם r:G	o\mathbb{R}^n
                                                                                                              .s_{\restriction_{W\cap (G	imes 0_{n-k})}}=r עבורו s:W	o s\left(W
ight) הינה s:w	o s\left(W
ight) הערה: יריעה 0-מימדית הינה קבוצה של נקודות
                                           \mathcal{U}=W\cap A פתוחה עבורה אזיW\subseteq\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזיA\subseteq\mathbb{R}^d אזיA\subseteq\mathbb{R}^d אזי
                                             \mathcal{U}=W\cap A סגורה עבורה סגורה אזי W\subset\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזי A\subset\mathbb{R}^d אזי אזי סגורה סגורה סגורה אזי
                                        (\forall x \in \mathcal{U}. \exists r > 0.B_r(x) \cap A \subseteq \mathcal{U}) \Longleftrightarrow (Aמשפט: תהא \mathcal{U} \subseteq A ותהא \mathcal{U} \subseteq A אזי שמיט: תהא אוי ווהא משפט: משפט מחוחה ביחס ל
                                            \mathcal{U}\in\{A,\varnothing\} פתוחה מתקיים A\subseteq \mathbb{R}^d מתקיים A\subseteq\mathbb{R}^d עבורה לכל קבוצה קשירה:
                      \mathcal{U},\mathcal{U}\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית לA\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי (A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית לA\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי (A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\}
פתוחה f^{-1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יחסית ל־B פתוחה יחסית ל־f:A	o B אזי ותהא f:A	o B ותהא אזי ותהא
arphi^{-1} וכן פתוחה arphi פתוחה יריעה arphi:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^k החסית ותהא שפה: תהא יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה איריעה איריעה איריעה מימדית מחחה יחסית ותהא
                                                                                                                                                        (\mathcal{U}, \varphi) פרמטרזיציה טובה אזי
                                                    \mathcal{A} אטלס: תהא \mathcal{A} = \mathcal{M} יריעה \mathcal{A}־מימדית אזי קבוצה של מפות אינ איי איי איי א\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n אטלס:
             . מפה. (r(\mathcal{U}),r^{-1}) אזי r(\mathcal{U}) אזי רגולרית של פרמטריזציה חח"ע פרמטריזציה ותהא מפהk יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מפה.
                                                                                                         \mathbb{RP}^n = \left\{ vv^T \mid v \in \mathbb{S}^n 
ight\} אזי n \geq 2 המרחב הפרוייקיבי: יהי
                                                                                                                . יריעה n מימדית. \mathbb{RP}^n\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^2} אזי n\geq 2 יריעה n מימדית.
                                              arphi_{1,2}=arphi_2\circarphi_1^{-1} המוגדרת arphi_{1,2}:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^k מפות אזי מפות (\mathcal{U}_1,arphi_1), (\mathcal{U}_2,arphi_2) המיינה העתקת מעבר:
                                                                       i\in\{1,2\} טענה: תהיינה arphi_i\left(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2
ight) מפות אזי מפות \left(\mathcal{U}_1,arphi_1
ight),\left(\mathcal{U}_2,arphi_2
ight) פתוחה עבור
                                                                                                    . סענה: תהיינה (\mathcal{U}_1, arphi_1), (\mathcal{U}_2, arphi_2) דיפאומורפיזם מפות מינה סענה: תהיינה
C^lpha הינה f\circarphi^{-1} מתקיים כי תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מיריעה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מיריעה: תהא
                                                                    C^{lpha} הינה לכל היותר אזי f:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^m אזי אזי C^{lpha} הינה לכל היותר מדרגת יריעה
עבורו \mathcal M של \{(\mathcal U_lpha,arphi_lpha)\}_{lpha\in\Lambda} יריעה \mathcal M יריעה f:\mathcal M	o\mathbb R^m אזי ותהא f:\mathcal M	o\mathbb R^m של \mathcal M\subseteq\mathbb R^n יריעה \mathcal M\subseteq\mathbb R^n יריעה
                                                                                                                                                      \alpha \in \Lambda לכל C^{\alpha} הינה f \circ \varphi^{-1}
```

. אטלס $\mathcal{M}$ יריעה  $\mathcal{M}$ ־מימדית אזי קיים ל $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  אטלס.

 $\mathbb{T}^2$  סימוו: נסמו טורוס בעזרת

```
\dim\left(\mathcal{M}
ight)=k יריעה k־מימדית אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}
עבורה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעה \mathcal{M}'\subset\mathbb{R}^m יריעה \mathcal{M}'\subset\mathbb{R}^m יריעה \mathcal{M}'\subset\mathbb{R}^n יריעה אזי יריעה
                                                                                                                                                                                                         .C^lpha הינה f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^m
                          g\circ f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}''
ight) אזי g\in C^{lpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''
ight) ותהא ותהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) יריעות תהא יריעות יריעות תהא
p של p של p\in \mathbb{R}^n של p\in \mathcal{M} פיימת סביבה p\in \mathcal{M} של אזי p\in \mathcal{M} של p\in \mathcal{M} של אזי p\in \mathcal{M}
                                                                                                                                                                          g_{\upharpoonright_{\mathcal{M} \cap \mathcal{U}}} = f המקיימת g \in C^{lpha}\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight)
 \mathcal{M}' של \mathcal{M} ולכל מפה \mathcal{M}' של \mathcal{M} ולכל מפה אזי (\mathcal{U}, \varphi) של אזי (\mathcal{U}, \varphi) של \mathcal{M}' אזי (f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}' ולכל מפה \mathcal{M}, \mathcal{M}' יריעות ותהא
                                                                                                                                                                                      מתקיים כי \psi \circ f \circ \varphi^{-1} הינה מתקיים
                                                              f,f^{-1}\in C^{lpha} עבורה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעות אזי \mathcal{M},\mathcal{M}' עבורה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' איריעות יריעות אזי יריעות אזי
                                                                                                        \dim\left(\mathcal{M}
ight)=\dim\left(\mathcal{M}'
ight) איריעות דיפאומורפיות אזי \mathcal{M},\mathcal{M}' מסקנה: תהיינה
                             סטענה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}־מימדית תהא p\in\mathcal{M} ותהיינה p\in\mathcal{M} סביבות של \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מפות באשר \mathcal{M}
                                                                                                                                                                        \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)
                                         אזי p מפה באשר \mathcal U סביבה של ותהא p\in\mathcal M ותהא מימדית יריעה \mathcal M\subseteq\mathbb R^n יריעה אייי איי
                                                                                                                                                                                              T_p(\mathcal{M}) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi(p)}\left(\varphi^{-1}\right)\right)
                                                                                                         T_p\left(\mathcal{M}
ight)\subseteq\mathbb{R}^n אזי p\in\mathcal{M} איי ותהא m\in\mathcal{M} יריעה m\in\mathcal{M} יריעה m\in\mathcal{M} יריעה
                                                                                                  \dim\left(T_n\left(\mathcal{M}
ight)
ight)=\dim\left(\mathcal{M}
ight) אזי p\in\mathcal{M} יריעה ותהא \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n אזי \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n
                                     טענה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה k יריעה מימדית תהא ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעה M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזיי
                                                                                                                                                                                                         T_p(\mathcal{M}) = \ker \left( \mathcal{D}_p(f) \right)
                                                                                                                                 \dot{\gamma}=rac{d\gamma}{dt} אזי C^1 מסילה \gamma:(a,b)	o \mathcal{M} אהירות: תהא
                                                                                                                             \dot{\gamma}\left(t
ight)\in T_{\gamma\left(t
ight)}\left(\mathcal{M}
ight) אזי C^{1} מסילה \gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathcal{M} אהא
                T_p\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{\dot{\gamma}\left(0
ight)\mid\left(\gamma\in C^1\left(\left(-arepsilon,arepsilon
ight),\mathcal{M}
ight)
ight)\wedge\left(\gamma\left(0
ight)=p
ight)
ight\} אזי p\in\mathcal{M} אזי אינים: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}^n יריעה
\gamma_{i}\left(0
ight)=p מסילות המקיימות מיינה \gamma_{1},\gamma_{2}:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o\mathcal{M} ותהיינה ותהיינה f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) תהא ותהיp\in\mathcal{M} מסילות המקיימות יריעות תהא
                                                                                                                                         \left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0
ight)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}
ight)\right)\left(0
ight) אזי \dot{\gamma}_{i}\left(0
ight)=v וכן
\mathcal{D}_p f: T_p\left(\mathcal{M}
ight) 	o T_{f(p)}\left(\mathcal{M}'
ight) אזי f \in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p \in \mathcal{M} ותהא יריעות: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא
                                         \dot{\gamma}\left(0
ight)=v וכן \gamma\left(0
ight)=p המקיימת \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} עבור מסילה \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} אבור מסילה עבור מסילה
                                                                . אוי \mathcal{D}_v f אוי f \in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}') ותהא ותהא p \in \mathcal{M} העתקה לינארית. תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' איזי
                                             משפט כלל השרשרת: תהיינה M, \mathcal{M}', \mathcal{M}'' יריעות תהא f \in C^{lpha}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') משפט כלל השרשרת: תהיינה איי
                                                                                                                                                                                         \mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right) = \mathcal{D}_{f(p)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)
                                                       \mathcal{D}_{p}f\left(v
ight)=\mathcal{D}_{p}\left(f
ight)\cdot v אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעות תהא \mathcal{M},\mathcal{M}' מסקנה:
                                                 טענה: תהא p \subseteq \mathcal{M} יריעה תהא אזיי דייעה חומה הצגה \{F=0\} ותהא ותהא p \in \mathcal{M} יריעה יריעה אזיי יריעה אזיי
                                                                                                                                                       T_{p}\left(\mathcal{M}\right) = \operatorname{span}\left(\left\{\nabla F_{1}\left(p\right), \dots, \nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\}^{\perp}\right)
\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{1}
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{k}
ight)\} אזי p\in\mathcal{M} יריעה תהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא מענה: תהא
                                                                                                                                                                                                                      T_{p}\left(\mathcal{M}\right) בסיס של
                                                               T_p\left(\mathcal{M}
ight) אל הסטנדרטי הבסיס הסטנדרטי להיות \left\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_1
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_k
ight)
ight\} הערה: נגדיר את
 (\mathcal{V},\psi) עתהא p \in \mathcal{M} סביבה של סביבה ב־\mathcal{M} מפה ב־\mathcal{M} מפה מפה לענה: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא f \in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right) מפה ב־\mathcal{M}
[\mathcal{D}_p f]_{i,j} = rac{\partial \left(\psi \circ f \circ arphi^{-1}
ight)_i}{\partial x_j} אזי f\left(p
ight) אזי f\left(p
ight) באשר \mathcal{M}' \subseteq \mathbb{R}^n באשר g \in C^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) ותהא g \in \mathcal{C}^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) ותהא g \in \mathcal{C}^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) באשר g \in \mathcal{C}^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) ותהא g \in \mathcal{C}^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) ותהא
                                                                                             \mathcal{D}_pf=\left(\mathcal{D}_pg\right)_{\restriction_{T_p(\mathcal{M})}} אזי g_{\restriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}=f וכן p סביבה של p נגזרת ביוונית: תהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אזי f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אזי
                      L_vf=\sum_{i=1}^k v_i\cdot rac{\partial \left(f\circarphi^{-1}
ight)}{\partial x_i} אוי v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) מפה בסביבה של p מפה בסביבה של f\in C^lpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אוי f\in C^lpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight)
                                                                                                                       c.rac{\partial f}{\partial v}=L_v f אזי v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) ותהא f\in C^lpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אזי
                                                                         v \perp T_p\left(\mathcal{M}
ight) עבורו v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} אזי p \in \mathcal{M} על־משטח על־משטח על־משטח על־משטח עבורו
                                           \|v\|=1 עבורו עבורו v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} אזי וקטור נורמל עבורו על־משטח על־משטח על־משטח על־משטח עבורו אזי יהי M\subseteq\mathbb{R}^n
טענה: יהי M\subseteq\mathbb{R}^n אזי p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא על־משטח תהא אזי p\in\mathcal{M} ותהא וותהא אזי אוידה p\in\mathcal{M} אזי וקטור נורמל יחידה
```

.p-ל

 $\mathcal{M}$  אזי קו־אוריינטציה של אזי אזי  $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$  קו־אוריינטציה אזי הצגה סתומה הצגה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  קו־אוריינטציה של  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ 

טענה: יהי  $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),...,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p),-1\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^2}}$  אזי אזי  $p\in\mathcal{M}$  אזי וקטור נורמל יחידה  $p\in\mathcal{M}$  על־משטח תהא

 $\mathcal{M}$  אזי  $\frac{\left(rac{\partial f}{\partial x_1},...,rac{\partial f}{\partial x_{n-1}},-1
ight)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}$  אזי אזי  $\mathcal{M}$  אזי קו־אוריינטציה של  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  מסקנה: יהי

$$v_1 imes \dots imes v_{n-1} = \sum_{i=1}^n {(-1)}^{i+1} \det egin{pmatrix} (v_1)_1 & \dots & (v_{n-1})_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{i-1} & \dots & (v_{n-1})_{i-1} \\ v_1)_{i+1} & \dots & (v_{n-1})_{i+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_1)_n & \dots & (v_{n-1})_n \end{pmatrix}} e_i$$
 אזי בצורה לא פורמלית מתקיים  $\begin{pmatrix} e_1 & | & | & | \\ \vdots & v_1 & \dots & v_{n-1} \\ \vdots & v_1 & \dots & v_{n-1} \end{pmatrix}$  הערה: יהיו  $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.  $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ 

$$\Gamma(v_1\dots v_m)=\detegin{pmatrix} \langle v_1,v_1 
angle & \ldots \langle v_1,v_m 
angle \ dots & dots \ \langle v_1,v_1 
angle & \ldots \langle v_m,v_m 
angle \end{pmatrix}$$
 איז  $v_1\dots v_m\in \mathbb{R}^n$  איז  $v_1\dots v_{n-1}\in \mathbb{R}^n$  טענה: יהיו  $v_1\dots v_{n-1}\in \mathbb{R}^n$  איז

 $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \perp v_i$  מתקיים  $i \in [n-1]$  לכל

- $||v_1 \times \ldots \times v_{n-1}|| = \sqrt{\Gamma(v_1 \ldots v_{n-1})} \bullet$ 
  - $\det(v_1 \times ... \times v_{n-1}, v_1, ..., v_{n-1}) \ge 0$

טענה: יהי  $\frac{\partial r}{\partial x_1}(p) imes \ldots imes \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}(p)$  אזי של־משטח תהא  $p \in \mathcal{M}$  ותהא  $p \in \mathcal{M}$  וקטור על־משטח על־משטח על־משטח וותהא וותהא  $p \in \mathcal{M}$ 

 $\mathcal{M}$  של קו־אוריינטציה קו־אוריינטציה אזי  $rac{\partial r}{\partial x_1} imes \ldots imes rac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$  אזי פרמטריזציה של  $\mathcal{M}$  פרמטריזציה של אזי  $\mathcal{M}\subseteq \mathbb{R}^n$  אזי אוריינטציה של

 $\partial^{lpha}f=rac{\partial^{|lpha|}}{\partial x^{lpha}}\left(f
ight)$  אזי  $lpha\in\mathbb{N}^{k}$  ותהא  $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$  איזי

סימון: תהא (או)  $f\in\mathcal{C}$  (או) סימון:  $(\alpha)_{\alpha}$  (או)  $f\in\mathcal{C}$  (או) סימון: סימון: תהיינה  $(\alpha)_{\beta}$  אוי  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) אופרטור דיפרנציאלי: תהא  $(\alpha)_{\beta}$  פתוחה אוי  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) המקיימת  $(\alpha)_{\beta}$  (אופרטור דיפרנציאלי: תהא  $(\alpha)_{\beta}$  פתוחה אוי  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) המקיימת  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) פתוחה אוי  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) המקיימת  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) פתוחה אוי  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) המקיימת  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) פתוחה אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) פתוחה אוי  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) המקיימת  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) אוי  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) אוי  $(\alpha)_{\beta}$  (אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) פתוחה אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) פתוחה אוי  $(\alpha)_{\beta}$ ) המקיימת  $(\alpha)_{\beta}$ וכן  $a_{\alpha}$  חלקות.  $m \in \mathbb{N}$ 

אופרטור  $\overline{\mathcal{U}}$  אופרטור  $\mathcal{U}$ על  $\mathcal{M}$ על  $\mathcal{M}$ על אוי  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל מפה  $\mathcal{M}$ עבורה אזי  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  אופרטור דיפרנציאלי: תהא . תקיים  $a_{lpha}$  חלקות.  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים  $m\in\mathbb{N}$  איז  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  וכן לכל מפה  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים כי  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  איז  $m\in\mathbb{N}$  מתקיים כי  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  איז עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  איז עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  עבור  $m\in\mathbb{N}$  איז עבור  $m\in\mathbb{N}$  וכן לכל מפה  $m\in\mathbb{N}$ 

 $.C^{m}$  העתקה  $x \mapsto \mathcal{D}_{x} \varphi \left( v \left( x \right) \right)$ 

 הינה  $L_v\left(f
ight)(x)=L_{v(x)}\left(f
ight)$  המוגדרת  $L_v:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$  אזי חלק אזי שדה וקטורי חלק אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  המוגדרת  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  הינה אופרטור דיפרנציאלי.

.supp  $(f) = \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \neq 0\}}$  אזי  $f \in C(\mathcal{M})$  תומך: תהא

 $C_C^\infty\left(\mathcal{U}
ight)=\{f\in C^\infty\left(\mathcal{U}
ight)\mid$  קומפקטית supp  $(f)\}$  פתוחה אזי  $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$  יריעה ותהא  $\mathcal{M}$  יריעה איזי

 $f_{
ho_\mathcal{U}}=g_{
ho_\mathcal{U}}$  עבורן עבורן  $f,g\in C_C^\infty$  פתוחה ולכל לכל עבורה לכל עבורה  $L:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$  עבורן אופרטור מקומי: תהא  $\mathcal{M}$  יריעה אזי  $L\left(f\right)_{\restriction_{\mathcal{U}}}=L\left(g\right)_{\restriction_{\mathcal{U}}}$  מתקיים

 $\|f\|_{W,n}=\sup_{\substack{x\in w\\ |lpha|\leq n}}\|(\partial^{lpha}f)\left(x
ight)\|$  אזי  $n\in\mathbb{N}$  ויהי  $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}
ight)$  פתוחה תהא  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ 

 $\alpha$ טענה: תהא  $\alpha \leq n$  פתוחה תהא  $\alpha \leq n$  ויהי  $\alpha \in \mathcal{U}$  עבורה  $\alpha \in \mathcal{U}$  עבורה  $\alpha \leq n$  ויהי  $\alpha \in \mathcal{U}$  אזי קיימת  $\alpha \in \mathcal{U}$  אזי קיימת עבורה  $g\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}
ight)$  וכן  $\delta\in\left(0,arepsilon
ight)$ 

- $.g_{\restriction_{B_{\frac{\delta}{2}}(x)}} = 0 \bullet$   $.g_{\restriction_{\mathcal{W} \backslash B_{\delta}(x)}} = 0 \bullet$
- $.\|f-g\|_{W,n}<\varepsilon \ \bullet$

 $oxedsymbol{\alpha}_{eta}(lpha) = \prod_{i=1}^k inom{lpha_i}{eta_i}$  אזי  $lpha, eta \in \mathbb{N}^k$  סימון: יהיו

משפט פיטרה: תהא  $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$  יריעה ותהא יריעה ותהא  $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ 

- . אופרטור מקומי L
- .supp  $(L(f)) \subseteq \text{supp}(f)$  מתקיים  $f \in C^{\infty}(\mathcal{M})$  לכל
  - .אופרטור דיפרנציאלי L

x סענה: תהא  $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$  פתוחה יהי ענה  $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$  אופרטור לינארי מקומי ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$  אזי קיימת סענה:  $\mathcal{U}=\mathcal{U}$  פתוחה יהי עבורה  $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$  פתוחה יהי עבורה  $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$  וכן  $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$  עבורה עבורה  $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$  פתוחה יהי עבורה עבורה עבורה של פומפקטית וכן קיים  $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$  וכן  $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$ 

וכן  $n\in\mathbb{N}$  פתוחה עבורה קיימים  $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$  פתוחה אופרטור לינארי אופרטור לינארי  $L:C^\infty\left(\mathcal{V}\right)\to C^\infty\left(\mathcal{V}\right)$  פתוחה עבורה קיימים  $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$  אופרטור דיפרנציאלי מסדר  $f\in C^\infty_C\left(\mathcal{W}\right)$  עבורם לכל C>0

עבורן  $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathbb{R}^n
ight)$  אזי קיימות של X אזי קיימות אויהי ויהי  $X\subseteq\mathbb{R}^n$  עבורן  $X\subseteq\mathbb{R}^n$ 

- $0 \leq \rho_i \leq 1$  מתקיים  $i \in \mathbb{N}$  לכל
- .supp  $(\rho_i)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$  עבורו  $\alpha\in\Lambda$  קיים  $i\in\mathbb{N}$  •
- $|\{i\in\mathbb{N}\mid 
  ho_i\left(\mathcal{W}
  ight)
  eq0\}|\in\mathbb{N}$  עבורה  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה סביבה איימת לכל  $x\in X$ 
  - $\sum_{i\in\mathbb{N}}
    ho_{i}\left(x
    ight)=1$  מתקיים  $x\in X$  לכל

. אופרטור דיפרנציאלי מקומי אזי אופרטור לינארי אופרטור ביפרנציאלי ויהי  $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}
ight) o C^{\infty}\left(\mathcal{V}
ight)$  אופרטור אופרטור מסקנה: תהא

עבורן  $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$  אזי קיימות של X של  $\mathcal{M}$ כיסוי פתוח כיסוי  $X\subseteq\mathcal{M}$  ויהי ויהי א יריעה תהא א יריעה  $X\subseteq\mathcal{M}$  ויהי א יריעה  $X\subseteq\mathcal{M}$ 

- $0 \leq 
  ho_i \leq 1$  מתקיים  $i \in \mathbb{N}$  לכל
- .supp  $(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$  עבורו  $\alpha \in \Lambda$  קיים  $i \in \mathbb{N}$  •
- $|\{i\in\mathbb{N}\mid \rho_i\left(\mathcal{W}
  ight)
  eq 0\}|\in\mathbb{N}$  עבורה  $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$  שביבה פתוחה  $x\in X$  לכל
  - $\sum_{i\in\mathbb{N}} 
    ho_i\left(x
    ight) = 1$  מתקיים  $x\in X$  לכל

 $\Pi(v_1\dots v_k)=\left\{\sum_{i=1}^k t_iv_i\mid orall i\in [k]\ .t_i\in [0,1]
ight\}$  איז  $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$  מקבילון: יהיו  $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$  איז  $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$  נפת מקבילון: יהיו

טענה: יהיו  $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^k$  אזי

- $\operatorname{Vol}_k\left(\left(\begin{smallmatrix}v_1\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right),\ldots,\left(\begin{smallmatrix}v_k\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right)\right) = \left|\det\left(v_1\ldots v_k\right)\right| \bullet$
- $\operatorname{Vol}_k\left(Tv_1,\ldots,Tv_k
  ight)=\operatorname{Vol}_k\left(v_1,\ldots,v_k
  ight)$  אזי  $T\in O\left(n
  ight)$  תהא

זניחה  $\varphi\left(E\cap\mathcal{U}\right)$  מתקיים כי מפה ליריעה:  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  זניחה מניחה ביחס ליריעה: תהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אניחה ביחס ליריעה:  $\mathbb{R}^k$ ב-

(לכל  $(\mathcal{M}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$  אזי אזי  $E \subseteq \mathcal{M}$  אזי ותהא  $\mathcal{M}$  ותהא איזי אטלס של  $\{(\mathcal{U}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \Lambda}$  יריעה  $\mathcal{M}$ ־מתקיים כי  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  זניחה ב $\mathbb{R}^k$ .

 $\mathcal{M}$ טענה: תהא  $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$  אזי ליחות ביחס ל $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}
ight)$  זניחה איריעה יריעה יריעה ותהיינה אינה אניחות ביחס ל

 $\mathcal{M}$  יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  טענה: תהא

 $B_f=\{x\in\mathcal{M}\mid x$  אינה רציפה על  $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$  יריעה ותהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אינה רציפות: תהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  עבורה  $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ 

- .חסומה  $f \bullet$
- . קומפקטי supp (f)
- $.\mathcal{M}$ זניחה ביחס ל־ $B_f$

M עבורה  $1_E$  אינטגרבילית רימן על יריעה: תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה אזי אינטגרבילית יריעה אינטגרבילית על יריעה: תהא

 $arphi\left(E
ight)$ טענה: תהא  $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$  אזי שפה ותהא  $E\subseteq\mathcal{U}$  מפה ותהא מפה ותהא מפה ותהא מדידה ז'ורדן ב־E אזי מדידה E מדידה ז'ורדן ב־E

.supp  $(f)\subseteq\mathcal{U}$  אבורה  $(\mathcal{U},\varphi)$  עבורה (קיימת מפה אזי  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  עבורה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\in\mathcal{M}$  עבורה  $\mathcal{M}\in\mathcal{M}$  נוחה.

 $u_i\in\mathbb{N}$  נוחה לכל  $\mathcal{U}_i$  נוחה איז קיים אטלס בן־מנייה  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  של  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  נוחה לכל  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ 

מסקנה: תהא  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  נוחות ואינטגרביליות רימן איי קיימות  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  נוחות ואינטגרביליות רימן איי קיימות  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  עבורן גורן גורן ביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטגרביליות הימן איינטגרביליות ואינטגרביליות ואינטג

וכן  $G_i\subseteq\mathbb{R}^k$  באשר איניות טובות פרמטרזיציות מובה תהיינה היינה ענה: תהא איריעה  $G_i\subseteq\mathbb{R}^k$  באשר אינים פרמטרזיציה איריעה וכן  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  אינטגרבילית רימן אזי  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  ותהא

$$\int_{G_{1}}\left(f\circ r_{1}\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r_{1}\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r_{1}\right)\right)}\mathrm{d}q = \int_{G_{2}}\left(f\circ r_{2}\right)\left(q\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r_{2}\right)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r_{2}\right)\right)}\mathrm{d}q$$

```
אינטגרבילית רימן f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} ותהא אG\subseteq\mathbb{R}^k באשר f:G	o\mathcal{M} באטר פרמטריזציה טובה בעלת פרמטריזציה אינטגרל: תהא
                                                                                                                                                                                         \int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}\left(f\circ r
ight)\left(q
ight)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r
ight)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r
ight)
ight)}\mathrm{d}q איי
אינטגרבילית רימן f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} ותהא G\subseteq\mathbb{R}^k באשר f:G	o\mathcal{M} באשר בילית פרמטריזציה פרמטריזציה בעלת יריעה אינטגרבילית מסקנה:
                                                                                                                                                                                                       \int_{\mathcal{M}} f = \int_{G} \left( f \circ r \right) \left( q \right) \cdot \sqrt{\Gamma \left( rac{\partial r}{\partial x_{1}} \dots rac{\partial r}{\partial x_{k}} 
ight)} \mathrm{d}q איי
                             R_{\mathcal{U}}=\{f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}\mid(\mathrm{supp}\,(f)\subseteq\mathcal{U})\wedge(\mathsf{pridential}) נוחה ואינטגרבילית מפה (\mathcal{U},arphi) מפה אזי (\mathcal{U},arphi) מפה מיינון: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא
                                                                                                                                                                         טענה: תהא R_{\mathcal{U}} מרחב אזי מפה (\mathcal{U}, arphi) מרחב לינארי. \mathcal{M} מרחב לינארי.
                                                                                                                  . מסקנה: תהא M יריעה ותהא (\mathcal{U}, arphi) מפה אזי הינו פונקציונל לינארי תהא מסקנה: תהא
טענה: תהא f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} נוחות ואינטגרביליות רימן ותהיינה f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} טענה: תהא f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} יריעה תהא
                                                                                                                                                \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{M}} g_i אזי f = \sum_{i=1}^m g_i וכן f = \sum_{i=1}^n f_i עבורן
עבורן נוחות ואינטגרביליות רימן פורן f_1\dots f_n:\mathcal{M}	o\mathbb{R} אינטגרלי רימן אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרבילייות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליים אינטגרביליות רימן אינטגרבילי
                                                                                                                                                                                                                                   \int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i אז f = \sum_{i=1}^n f_i
                                                                                                                                        R\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{ f:\mathcal{M}
ightarrow\mathbb{R}\mid סימון: תהא fיריעה אזי לfינטגרבילית רימן \mathcal{M}יריעה אזי
                                                                                                                                                                                                                 . טענה: תהא \mathcal{M} יריעה אזי R(\mathcal{M}) מרחב לינארי.
                                                                                                                                                        . מסקנה: תהא M יריעה אזי\mathcal{M} הינו פונקציונל לינארי\mathcal{M} הינו פונקציונל לינארי
                                                                                                                                                               \int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}f\mathrm{dVol}_{k} אזי איז f\in R\left(\mathcal{M}
ight) יריעה ותהא \mathcal{M} יריעה ותהא
 \bigcup_{i=1}^\infty E_i = \mathcal{M} יריעה איי אירדן של יריעה: תהא איי אירדן אייריעה איי אירדן אייראן איי סדרת קבוצות עולה ומדידות אייריעה איי\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n מיצוי זיורדן של יריעה: תהא
עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של L\in\mathbb{R} אינטגרל לא אמיתי: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n אינטגרל לא אמיתי: תהא
                                                                                                                      \int_{\mathcal{M}}f=L אזי אוו\lim_{i	o\infty}\int_{E_i}f\cdot 1\!\!1_{E_i}=L מתקיים של אוו של (E_i)_{i=1}^\infty
                             טענה: תהא M\subseteq \mathbb{R}^n יריעה ותהא ותהא f\in R(\mathcal{M}) אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות M\subseteq \mathbb{R}^n של M
                                                                                                                                                  \int_{\mathcal{M}}f=\lim_{i	o\infty}\int_{\mathcal{M}}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}נפח של יריעה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{M}
```

 $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=arnothing$  עבורן  $(\mathcal{U},arphi)\,,(\mathcal{V},\psi)$  מפות זרות: מפות

טענה: תהיינה  $f_{\upharpoonright_{\mathcal{M}\setminus(S\cup(\biguplus_{i=1}^n\mathcal{U}_i))}}=0$  מפות זרות בזוגות על איז תהא תהא איינה  $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$  אזי מפות זרות בזוגות על מפות זרות בזוגות על מענה:  $\int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{U}_i} f$ 

 $\int_{\gamma}f\mathrm{dVol}_1$  אינטגרבילית אזי  $f:\mathrm{Im}\,(\gamma) o\mathbb{R}$  ותהא  $\gamma:[a,b] o\mathbb{R}^n$  אינטגרבילית אזי

. Length  $(\gamma)=\lim_{m o\infty}\sup_{a=t_0<\ldots< t_m=b}\sum_{i=1}^m\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\|$  איזי  $\gamma\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$  שימון: תהא  $\gamma\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$ 

.Length  $(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'\left(t\right)\|\,\mathrm{d}t$  אזי  $\gamma\in C^1\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$  טענה: תהא

.Length  $(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_1\left(\mathcal{M}\right)$  אזי אזי חד־מימדית יריעה  $\mathcal{M}$  יריעה  $\mathcal{M}$ 

.Length  $(\mathcal{M})=$  Length  $(\gamma)$  יריעה טובה אזי  $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$  ותהא ותהא יריעה חד־מימדית ענה: תהא  $\mathcal{M}$ 

.Length  $(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'\left(t
ight)
ight)^2}\mathrm{d}t$  אזי  $f\in C^1\left(\mathcal{U}
ight)$  פתוחה ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$  אהי

 $\|\gamma'\|=\sqrt{r^2+r'}$  אאי  $\gamma\left(t
ight)=\left(r\left(t
ight)\cos\left( heta\left(t
ight)
ight),r\left(t
ight)\sin\left( heta\left(t
ight)
ight)
ight)$  כך  $\gamma:\left(a,b
ight) o\mathbb{R}^2$  אאי  $\gamma:\left(a,b
ight) o\mathbb{R}^2$  מסקנה: תהיינה

.Area  $(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_2\left(\mathcal{M}
ight)$  אזי חד־מימדית יריעה יריעה  $\mathcal{M}$  יריעה  $\mathcal{M}$ 

 $G\subseteq\mathbb{R}^2$  אזי טענ $G:G\subseteq\mathbb{R}^2$  יריעה איריאציה וותהא אזי וותהא אזי יריעה דו־מימדית יריעה אזי יריעה אזי  $M\subseteq\mathbb{R}^3$  אזי

.Area  $(\mathcal{M}) = \int_{G} \left| \frac{\partial r}{\partial x_{1}} (x) \times \frac{\partial r}{\partial x_{2}} (y) \right| dx dy$ 

.Area  $(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|
abla f\left(x,y
ight)
ight\|^{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$  אאי  $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$  פתוחה ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$  אהי  $\det\left(I+uv^T
ight)=1+\langle u,v
angle$  אזי  $u,v\in\mathbb{R}^n$  טענה: תהיינה

 $\mathrm{Vol}_k\left(\Gamma_f
ight)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|
abla f\left(x
ight)
ight\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$  אזי  $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}
ight)$  פתוחה ותהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$  מסקנה: תהא

x בנקודה  $\alpha$  (x) באשר  $\alpha:\Gamma_f o \mathbb{R}$  ותהא ווהא  $f\in C^1$  ( $\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}$ ) פתוחה תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$  באשר  $\alpha:\Gamma_f$  $\left\| \sqrt{1+\left\| 
abla f\left( x
ight) 
ight\| ^{2}}=rac{1}{\cos \left( lpha \left( x
ight) 
ight) }$ ציר  $e_{k+1}$  ציר

 $P_1$  בין  $P_1$  ל־ $P_2$  אזי השטח הכלוא על  $\mathbb{S}^2$  בין  $P_1$  ל־ $P_2$  אזי הוורים מקבילים במרחק אוריים את מישורים מקבילים במרחק אוריים מקבילים מקבילים במרחק אוריים מקבילים מקבילים

 $R\cdot\mathbb{S}^2$  בין  $R\cdot\mathbb{S}^2$  בין  $R\cdot\mathbb{S}^2$  אזי הייו  $R\cdot\mathbb{S}^2$  ויהי  $R\cdot\mathbb{S}^2$  בין במרחק לכדים מקבילים מקבילים מחותכים את .Area  $(\mathcal{M}) = 2\pi hR$ 

```
. Width (K)=\inf_{\{K\subset P\mid קמור P\}} (Width (P)) גוף קמור אזי גוף אווי אוי יהי K\subseteq\mathbb{R}^n יהי
משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהיK\subseteq igcup_{i=1}^m P_i גוף קמור קומפקטי ויהיו P_1\dots P_m קורות עבורן K\subseteq igcup_i אזי
                                                                                                                                                                                                                                                 .Width (K) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{Width}(P_i)
                                                                                                                                             רוחב יחסי של קורה: יהי K\subseteq\mathbb{R}^n גוף קמור קומפקטי ותהא קורה אזי
                                                                                                                                                             .Width<sub>K</sub> (P) = \inf_{m \in \mathbb{R}_+} \{ m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists a \in \mathbb{R}^n . K \subseteq m \cdot P + a \}
השערת באנג: יהי K\subseteq \bigcup_{i=1}^m Width_K(P_i) אזי אוי קורות עבורן קומפקטי ויהיו ויהיו יויהיו קומפקטי ויהיו R_1\dots P_m קורות עבורן
1 \le \sum_{i=1}^m WidthK(P_i) אזי אוי איך קמור קומפקטי עבורו אויהיו אויהיו אויהיו אויהיו אויהיו אוי קמור קומפקטי עבורו אזי אוי איזי אויהיו א
                                                                                                . על־משטח על־משטח על־משטח אזי 
abla^{-1}(t) אזי 
abla^{-1}(t) אזי על־משטח על־משטח ענה: תהא 
abla^{-1}(t) אזי על־משטח
טענה: יהי p\in\mathcal{V} אזי קיים \delta>0 באשר \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) אזי קיים \delta>0 עבורו לכל \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) אזי קיים \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R})
.\int_{B_{\delta}(p)}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר
\int_{\mathcal{V}}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t אוי u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) לכל u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight) עבורו u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) לכל u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight) עבורו u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) לכל u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight)

abla x הוא arphi בנקודה x הוא x\in\mathcal{M} ותהא ותהא arphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) הוא יריעה תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי הגרדיאנט של
\psi_{ \restriction u \cap \mathcal{M} } = arphi_{ \restriction u}  באשר \psi \in C^1 \left( \mathcal{U}, \mathbb{R} 
ight) ותהא x \in \mathcal{M} סביבה של \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n תהא \varphi \in C^1 \left( \mathcal{M}, \mathbb{R} 
ight) באשר יריעה תהא יריעה תהא

abla_x \varphi = \operatorname{Proj}_{T_x(\mathcal{M})} (\nabla_x \psi) אזי
ותהא arphi\left(\mathcal{M}
ight)=(a,b) וכן 
ablaarphi\neq0 באשר arphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה תהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} וכן משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא
\int_{\mathcal{M}}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t איי איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי supp f\in R\left(\mathcal{V}
ight) תחום תהא f\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר באשר g\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}^{k}
ight) באשר \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n} מסקנה: יהי
                                                                                                                                                                              \int_{\mathcal{V}} f = \int_{\varphi(\mathcal{V})} \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\sqrt{\det((\mathcal{D}_x \varphi) \cdot (\mathcal{D}_x \varphi)^T)}} dVol_{n-1}(x) dt
                                                    \int_{\mathbb{S}^n} f\left(x
ight) \mathrm{dVol}_n = \int_{\mathbb{S}^n} f\left(Ax
ight) \mathrm{dVol}_n אינטגרבילית רימן ותהא f:\mathbb{S}^n 	o \mathbb{R} אזי f:\mathbb{S}^n 	o \mathbb{R}
                                                                                                                                                 \operatorname{Vol}_n\left(r\cdot\mathbb{S}^n
ight)=r^n\cdot\operatorname{Vol}_n\left(\mathbb{S}^n
ight) אזי r>0 טענה: יהי r>0 אזי r>0 טענה שטח פנים של ספירה: יהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ איז n\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                                                              .\mathrm{Vol}_n\left(B_1\left(0
ight)
ight)=rac{\pi^{rac{n}{2}}}{\Gamma\left(rac{n}{2}+1
ight)} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי סענה נפח של ספירה: יהי
                                                                                                           \mathfrak{X}^lpha\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{v:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^k\mid\mathcal{M} מעל C^lpha מעל v\} יריעה אזי v יריעה אזי v
                                                                                                                                                          d^{2}\cdot d^{2}\cdot d^{2}י יריעה \mathcal{M} יריעה \mathcal{M} ותהא \mathcal{M} מפה אזי \mathcal{M} מפה \mathcal{M}
                            (C^lpha)טענה: יהי v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M}) אזי v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M}) הינה i\in[k] ולכל מפה (\mathcal{U},arphi) ולכל מפה אזי (v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M}) אזי (v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})).
                                                                                                                            (C^{lpha}) הינה v:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^kיהינה v:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^k הינה אזי v:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^k
\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} סביבה סביבה עבורה v\left(x
ight)\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) שדה וקטורי v\left(x
ight)\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) אזי v:A	o\mathbb{R}^{k} אזי A\subseteq\mathcal{M} אזי מעל תת־קבוצה: תהא
                                                                                                                                                                                                                       .u_{
estriction_{A\cap\mathcal{U}}}=v_{
estriction_{A\cap\mathcal{U}}} עבורו עבורו u\in\mathfrak{X}^{m}\left(\mathcal{U}
ight)
Mוקיימת A\subseteq \mathcal{U} פתוחה בA\subseteq \mathcal{U} מעל (A) מעל C^lpha מעל v:A	o \mathbb{R}^k ותהא ותהא A\subseteq \mathcal{M} ותהא אזי v:A	o \mathbb{R}^k

abla 
abla arphi \in \mathfrak{X}^0\left(\mathcal{M}
ight) אזי arphi \in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה ותהא \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                            .(סענה: יהי \mathcal{M} על־משטח קשיר אזי (\mathcal{M} בעל 0 קו־אוריינטציות) על־משטח קשיר אזי (\mathcal{M} בעל 0 אזי (\mathcal{M} בעל 1 קו־אוריינטציות)
                                    עבורו F שדה וקטורי דרך M אזי F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) אזי אוריינטציה של M קו־אוריינטציה של M\subseteq\mathbb{R}^n אזי על־משטח תהא
```

M אזי דרך M שדות וקטוריים דרך  $F_1,F_2\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight)$  ויהיו של אוריינטציה של אוריינטציה על־משטח ערהא אוריינטציה של אוריינטציה של אויהיו

עבורו  $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight)$  על־משטחים ארים עד כדי קבוצה אניחה בעלי קו־אוריינטציה אויהי על־משטחים ארים עד כדי קבוצה אניחה בעלי איינטציה  $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\subseteq\mathbb{R}^n$ 

 $P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \max\{d\left(x,H_1
ight),d\left(x,H_2
ight)\}\leq d\left(H_1,H_2
ight)\}$  קורה: יהיו  $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$  על־משטחים מקבילים אזי

.Width  $(P_{H_1,H_2})=d\left(H_1,H_2
ight)$  אזי על־משטחים אזי  $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$  יהיו

 $\operatorname{.Flux}_{F}\left(\mathcal{M}\right) = \int_{\mathcal{M}} \left\langle F\left(x\right), N\left(x\right) \right\rangle d\operatorname{Vol}_{n-1}\left(x\right)$ 

 $.Flux_{\alpha F_1 + \beta F_2}(\mathcal{M}) = \alpha Flux_{F_1}(\mathcal{M}) + \beta Flux_{F_2}(\mathcal{M})$ 

 $\operatorname{Flux}_F(M_1 \cup \mathcal{M}_2) = \operatorname{Flux}_F(\mathcal{M}_1) + \operatorname{Flux}_F(\mathcal{M}_2)$  אזי  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  שדה וקטורי דרך F

```
\mathrm{div}\left(F
ight)(x)=\sum_{i=1}^{n}rac{\partial F_{i}}{\partial x_{i}}\left(x
ight) אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי תהא
                 \mathrm{div}\left(F
ight)(x)=\mathrm{trace}\left(\mathcal{D}_{x}\left(f
ight)
ight) אזי f\left(x
ight)=F\left(x
ight) כך כך f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{n} נגדיר F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} נגדיר
                                      \operatorname{div}(A\circ F)\left(A^{-1}x
ight)=\operatorname{div}(F)\left(x
ight) איז A\in\operatorname{GL}(\mathbb{R}^n) ותהא F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יהי
                                         \operatorname{div}\left(f\cdot F
ight)=f\cdot\operatorname{div}\left(F
ight)+\left\langle 
abla f,F
ight
angle אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) ותהא F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי לענה: תהא
                                                                                                       \Delta f=\sum_{i=1}^{n}rac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}} אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}
                                                                                                               \Delta f=\operatorname{div}\left(
abla f
ight) אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}
                                              \mathrm{Cube}_\ell\left(x
ight)=\{Q\subseteq\mathbb{R}^n\mid(x\in Q)\land(\ell הוא Q הוא אזי Q קובייה Q קובייה אורך הצלע של הוא Q אזי אזי אזי אז אזי אזייה אורך הצלע של
באשר \{E_i\} פאות עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני אזי הוערה: תהא Q\in \mathsf{Cube}_\ell(x) ויהי x\in \mathbb{R}^n אזי הערה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                        .Q-b
                                                   \operatorname{div}\left(F
ight)\left(x
ight)=\lim_{Q\in\operatorname{Cube}_{\ell}\left(x
ight)}\frac{1}{\operatorname{Vol}_{n}\left(Q
ight)}\operatorname{Flux}_{F}\left(\partial Q
ight) אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי \mathcal{U}
עבורה f\in C^1(\mathcal{W},\mathbb{R}) ועבורה \mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n סביבה של x\in\partial\mathcal{U} עבורה אזי x\in\partial\mathcal{U} פתוחה אזי x\in\partial\mathcal{U} עבורה קיימת
                                                                                                                                                    \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\} \text{ ich } f(x) = 0 \text{ ich } \nabla_x f \neq 0
                                                                                                   \mathcal{J}^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}=\{x\in\partial\mathcal{U}\mid מקודת שפה חלקה x\} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n סימון: תהא
f\left(x
ight)=0 וכן 
abla_{x}f
eq0 המקיימת x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} וכן ותהא x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} וכן פתוחה תהא של \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} באשר ש
                                                                                                                                               .Smooth_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f) אזי \mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{f<0\} וכן
                                  . סענה: תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n פתוחה ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי קיימת x \in \partial^{\mathrm{sm}} \mathcal{U} פתוחה ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n סביבה של
                                                                                                                                   \partial \mathcal{U}טענה: תהא \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה ל
                                                                                                                                                         . יריעה \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} יריעה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה מסקנה: תהא
                                                                                                                                    \mathcal{AU}=\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} עבורה עבורה פתוחה פתוחה קבוצה חלקה:
                                       \lim_{arepsilon 	o 0} rac{1}{arepsilon} \mathrm{Vol}_n \left( \left( \partial \mathcal{U} ackslash \partial^\mathrm{sm} \mathcal{U} 
ight) + B^n_arepsilon \left( 0 
ight) 
ight) = 0 עבורה עלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n
             \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}:\mathcal{W}\cap\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n אזי איי ההאמרה עבורה עבורה x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} עבורה עבורה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי איי הא
                        קורה לכל X\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} עבורה לכל עבורה אזי N:\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n פתוחה אזי עבורה אונית קנונית לשפה חלקה: תהא
                                                                                                                                              .N_{
estriction_{\mathcal{W}\cap\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}}}=rac{
abla f}{\|
abla f\|} מתקיים Smooth_{\mathcal{U}}\left(x
ight)=\left(\mathcal{W},f
ight)
                                       שטף: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathcal{W} ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} אזי פתוחה באשר \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} ויהי שטף: עלת שפה כמעט חלקה תהא
                                                                                                                                                                                           .Flux_F(\partial \mathcal{U}) = Flux_F(\partial^{sm}\mathcal{U})
A\in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^n
ight) ותהא \mathcal{M} קו־אוריינטציה של F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) יהי של \mathcal{M} יהי קו־אוריינטציה על־משטח תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n עבורו
                                                                                                                                                                            \operatorname{Flux}_{A \circ F} (A \cdot \mathcal{M}) = \operatorname{Flux}_F (\mathcal{M}) אזי
\mathrm{supp}\left(F\right)\subseteq B_{r}\left(a\right) באשר F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right) יההי i\in\left[n\right] לכל לכל g\in C^{1}\left(B_{r}\left(a\right),\mathbb{R}\right) תהא r>0 יהי a\in\mathbb{R}^{n} לכל מענה:
                                                                                                                                                                   .Flux_F(\partial \{g < 0\}) = \int_{\{g < 0\}} \operatorname{div}(F) איז
r>0 אזי קיים אזי פתוחה עם אזי פתוחה אזי אוי a\in\partial\mathcal{U}ackslash\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} תהא \mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}
ight)<\infty אזי קיים אזי קיים
              \operatorname{SHux}_F(\partial\mathcal{U})=\int_\mathcal{U}\operatorname{div}(F) מתקיים supp (F)\subseteq B_r\left(a
ight) המקיים F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight) ולכל \overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W} המקיים \mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n
                                          אזי F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight) אזי \overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W} מסקנה: תהא \mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n וויהי וחלקה תהא חסומה באשר מסקנה:
                                                                                                                                                                                                \operatorname{Flux}_F(\partial \mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \operatorname{div}(F)
                                                                                                      למה: תהא X+B_{arepsilon}(0) אזי arepsilon>0 אזי קומפקטית ז'ורדן. X\subset\mathbb{R}^n מדידה א'ורדן.
                                                   המקיימת \psi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}
ight) קיימת לכל לכל עבורו C\in\mathbb{R} המקיימת אזי קיים אוי קיים למה: תהא
                                                                                                                                                                                                               .0 < \psi < 1  •
                                                                                                                                                                                                       \psi_{\uparrow_{X+B_{\sigma}(0)}} = 1 \bullet
                                                                                                                                                                       .\psi_{\restriction_{\mathbb{R}^n\setminus(X+B_{3arepsilon}(0))}}=0 • .\Big|rac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big|\leq rac{C}{arepsilon}מתקיים i\in[n] לכל •
```

עבורו F שדה וקטורי דרך  $M \subset \mathbb{R}^n$  אזי  $M \subset \mathbb{R}^n$  עבורו איזי אוריינטציה  $M \subset \mathbb{R}^n$  אזי

 $.Flux_F(\mathcal{M}, N) = Flux_F(\mathcal{M}, -N)$ 

 $\mathcal{U}$ טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא N ויהי N נורמל חיצוני ל־Vol $_{n-1}$  ( $\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}$ )  $<\infty$  חסומה עם שפה כמעט חלקה עבורה עם N חסומה פתוחה עם ענה נוסחת גאוס לנפח: N ויהי N נורמל חיצוני ל־N ויהי N נורמל חיצוני ל־N אזי N וויהי N נורמל חיצוני ל־N וויהי N נורמל חיצוני ל-N וויהי N וויהי N וויהי N וויהי N נורמל חיצוני ל-N וויהי N וויחי N וויהי N וויהי N וויחי N

משפט הדיברגנץ: תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה עבורה  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא משפט פתוחה באשר  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ 

 $\operatorname{Flux}_F\left(\partial\mathcal{U}
ight)=\int_{\mathcal{U}}\operatorname{div}\left(F
ight)$  אזי  $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight)$  ויהי  $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$ 

 $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\infty$  Vol $_{n-1}$  ( $\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}$ )  $<\infty$  חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathbb{W}=\mathcal{W}$  ענה היינה  $\mathbb{W}=\mathcal{W}$  ויהי  $f,g\in C^1$  ויהי  $f,g\in C^1$  ויהי  $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי עכה נוסחאות גרין: תהא  $\mathbb{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathbb{W}=\mathbb{R}^n$  עפתוחה עוני ל $\mathbb{W}=\mathbb{R}^n$  ותהיינה  $\mathbb{W}=\mathbb{R}^n$  אזי  $\mathbb{W}=\mathbb{R}^n$  עפתוחה עפתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathbb{W}=\mathbb{R}^n$  עפתוחה עודר עדרה עדרים עדרים

- $\int_G \Delta u = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial N}$ אזי  $C^2$ הינה u כי .1
- $\int_G \langle \nabla u, \nabla v \rangle = -\int_G u \cdot \Delta v + \int_{\partial G} u \cdot rac{\partial v}{\partial N}$  אזי  $C^1$  אזי  $C^2$  הינה  $C^2$  הינה  $C^2$  .2
  - $\int_G (u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u)=\int_{\partial G} \left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial N}
    ight)$  אזי  $C^2$  הן u,v כי גניח כי

פתוחה באשר  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^\mathrm{sm}G\right)<\infty$  עבורה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  תהא  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה באשר . $\int_G\left\|\nabla v\right\|^2$  אזיי  $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$  ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  אזיי  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  אזיי

 $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$  פתוחה באשר  $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^\mathrm{sm} G\right)<\infty$  חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $G\subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $G\subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה באשר  $\mathcal{S}_G \|\nabla v\|^2 = -\int_G v\cdot\Delta v + \int_{\partial G} v\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$  אזי  $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$  ותהא ותהא  $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ 

 $\Delta u=0$  המקיימת  $u\in C^{2}\left(G,\mathbb{R}
ight)$  פתוחה אזי מתוחה הרמונית: תהא  $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$  המקיימת

יהי  $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$  פתוחה באשר עם שפה כמעט חלקה עבורה  $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $\mathrm{Vol}_{n-1}$   $(\partial^\mathrm{sm} G)<\infty$  חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה  $u\in C^2$  ותהא  $G\subseteq \mathbb{R}^n$  וורמל חיצוני ל־ $G\subseteq \mathcal{W}$  ותהא  $G\subseteq \mathcal{W}$  וורמל חיצוני ל־ $G\subseteq \mathcal{W}$ 

- $.\operatorname{Flux}_{\nabla u}\left(\partial G\right)=0$  •
- .Gב מקומית קבועה u אזי וויט  $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}}=0$  נניח כי •
- Gנניח כי  $u_{\restriction\partial G}$  קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב- •

 $f:\mathcal{J}_\mathcal{U}$   $f=rac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{U})}\int_\mathcal{U} f$  אינטגרבילית רימן אזי  $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}$  תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  סימון: תהא

הרמונית  $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$  ותהא ותהא  $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$  פתוחה באשר  $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$  יהי  $a\in\mathbb{R}^n$  יהי  $a\in\mathbb{R}^n$  ותהא ותהא u (a) u (a)

 $u\left(a
ight)=\int_{B_{r}\left(a
ight)}u$  יהי  $a\in\mathbb{R}^{n}$  יה  $a\in\mathbb{R}^{n}$  יהי  $a\in\mathbb{R}^{n}$  יהי  $a\in\mathbb{R}^{n}$  יהי  $a\in\mathbb{R}^{n}$  יהי  $a\in\mathbb{R}^{n}$  יהי a

u אזי  $\max\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$  וכן G וכן G וכן u הרמונית בי $\overline{G}$  תחום ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי u המקטימום: יהי  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי אזי u הבועה.

u אזי  $\min\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$  וכן Gכן אזי הרמונית בישר  $u:\overline{G} o\mathbb{R}$  תחום ותהא  $G\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי המינמום: יהי המינמום: יהי החום ותהא קבועה.

. משפט ליוביל: תהא  $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$  הרמונית וחסומה מלרע אזי קבועה.

. מסקנה: תהא  $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$  הרמונית וחסומה  $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ 

טענה אינטגרל פואסון: יהי אוי אוי באשר אוי באשר באשר ער תהא וותהא  $a\in\mathbb{R}^n$  תהא  $n\geq 3$  יהי יהי אינטגרל פואסון: יהי אינטגרל אינטגרל אינטגרל אינטגרל אינטגרל פואסון: יהי

 $u\left(a\right) = \frac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta u(x)}{|x-a|^{n-2}} dx$ 

מתקיים  $a\in B^n_1\left(0
ight)$  משפט גרעין פואסון: תהא  $u_{\restriction_{B^n_1\left(0
ight)}}$  רציפה באשר  $u:\overline{B^n_1\left(0
ight)} o\mathbb{R}$  מתקיים

 $.u\left(a\right) = \tfrac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\left(x\right) \cdot \tfrac{1-\|a\|^2}{\|x-a\|^n} \mathrm{dVol}_{n-1}$ 

 $u\left(x
ight)=rac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y
ight)\cdotrac{1-\|x\|^{2}}{\|y-x\|^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y
ight)$  הינה  $u\left(x
ight)=rac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y
ight)\cdotrac{1-\|x\|^{2}}{\|y-x\|^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y
ight)$  הרמונית וכן  $u\left(x
ight)=\frac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y
ight)\cdotrac{1-\|x\|^{2}}{\|y-x\|^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y
ight)$  הרמונית וכן  $u\left(x
ight)=\frac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y
ight)\cdotrac{1-\|x\|^{2}}{\|y-x\|^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y
ight)$ 

 $V^* = \operatorname{\mathsf{Hom}}(V,\mathbb{R})$  אזי ממשי ממשי היהי V יהי המרחב הדואלי:

 $V^*$  טענה: יהי V מ"ו ממשי ויהי  $\{e_1\dots e_n\}$  בסיס של  $\{e_1\dots e_n\}$  בסיס של

 $T_p\left(\mathcal{M}
ight)^*$  אזי  $p\in\mathcal{M}$  יריעה ותהא יריעה  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אהי המרחב הקו־משיק:

 $T_{p}^{*}\left(\mathcal{M}
ight)=T_{p}\left(\mathcal{M}
ight)^{*}$  אזי  $p\in\mathcal{M}$  יריעה ותהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}^{n}$ 

 $v\in T_{n}^{*}\left(\mathcal{M}
ight)$  אזי  $p\in\mathcal{M}$  יריעה ותהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  אזי תהא

 $\omega\left(x
ight)\in T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}
ight)$  המקיימת  $\omega:\mathcal{M} o\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{*}$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  המקיימת  $\mathcal{M}$ 

 $\omega_x=\omega\left(x
ight)$  אזי א אוי אותהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  ותהא איזי איריעה תהא יריעה תהא בימון: תהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה תהא

 $\omega_x \in T^*_x(\mathcal{M})$  אלא  $\omega_x \in \left(\mathbb{R}^n\right)^*$  הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים

. טענה: יהי  $\omega_x\left(u\right)=\left\langle v\left(x\right),u\right\rangle$  אזי  $v\in\mathfrak{X}\left(\mathcal{M}\right)$  יהי יהי טענה: יהי ענה אזי אזי יהי

 $\left(\mathrm{d}f
ight)(x)\left(v
ight)=rac{\partial f}{\partial v}\left(x
ight)$  המוגדרת  $\mathrm{d}f:\mathcal{M} o\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{*}$  אזי  $f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight)$  המוגדרת

```
\mathcal{U}טענה: תהא (\mathcal{U}, arphi) מפה על \mathcal{M} ויהי ויהי i \in [k] אזי זיפרנציאלית ב־(\mathcal{U}, arphi) מפה על
                                                                                             rac{\partial}{\partial x_i}\left(p
ight)=rac{\partial arphi^{-1}}{\partial x_i}\left(arphi\left(p
ight)
ight) אזי i\in[n] ויהי p\in\mathcal{M} תהא \mathcal{M} מפה על \mathcal{M} מפה על
                                                                                                                       \mathrm{d}x_i|_p=\mathrm{d}x_i\left(p
ight) אזי p\in\mathcal{U} ויהי i\in[k] יהי על \mathcal{M} מפה על (\mathcal{U},arphi) מפה מפה על
                                                                                            T_x^*\left(\mathcal{M}
ight) בסיס של \{\mathrm{d}x_1|_x,\ldots,\mathrm{d}x_k|_x\} אזי x\in\mathcal{U} ויהי \mathcal{M} ויהי מפה על
                              \mathrm{d}x_i|_p=\left(rac{\partial}{\partial x_i}\left(p
ight)
ight)^* אזי p\in\mathcal{U} אויהי i\in[k] מפה על \mathcal{M} מפה על \mathcal{M} יהי ויהי i\in[k] ויהי ויהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מפה לכל מפה \mathcal{M} של \mathcal{M} ולכל \mathcal{M}1-תבנית דיפרנציאלית \mathcal{M}:\mathcal{C}^m תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזי 1-תבנית דיפרנציאלית ש
                                                                                                                       f_1 \dots f_k \in C^m\left(\mathcal{U}
ight) מתקיים \omega = \sum_{i=1}^k f_i \cdot \mathrm{d} x_i באשר באשר f_1 \dots f_k \in \mathcal{U} 	o \mathbb{R}
עבורו לכל \{(\mathcal{U}_lpha,arphi_lpha)\}_{lpha\in\Lambda} אטלס אטלס אייים אטלס אזי דיפרנציאלית אזי דיפרנציאלית שלח דיפרנציאלית אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                   \omega = \sum_{i=1}^k f_i \cdot \mathrm{d} x_i באשר באשר f_1 \dots f_k \in \mathcal{U}_lpha 	o \mathbb{R} ולכל lpha \in \Lambda
                                                                                           .\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight)=\{\omega\mid\mathcal{M} על C^{\infty} על דיפרנציאלית דיפרנציא אזי איי איי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} על \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}
                                                                                                                \mathrm{d}f=\sum_{i=1}^k rac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\mathrm{d}x_i איז שפה על \mathcal{M} איז f\in C^1\left(\mathcal{M}
ight) מפה ל\mathcal{M} מסקנה: תהא f\in C^{m} איז אלית \mathrm{d}f איז איז \mathrm{d}f איז איז \mathrm{d}f איז איז איז מסקנה: תהא
F^*:\Omega^1\left(\mathcal{N}
ight)	o\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight) אזי F\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{N}
ight) יריעה תהא \mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m אזי (pull back) משיכה לאחור
                                                                                                                                                                                              .F^{st}\left(\omega,x,v
ight)=\omega_{F\left(x
ight)}\left(\mathcal{D}_{x}\left(F
ight)\cdot v
ight) המוגדרת
                    .(F^*_\omega)_x\left(v
ight)=F^*\left(\omega,x,v
ight) אזי אזי F\in C^1\left(M,N
ight) יריעה תהא יריעה תהא אינטגרל קווי מסוג שני: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n מסילה \gamma:[a,b]\to\mathcal{M} מסילה \gamma:[a,b]\to\mathcal{M} אזי שני. תהא אינטגרל קווי מסוג שני: תהא א
                                                                           . טענה: תהא \gamma:[a,b]	o \Omega הינו פונקציונל לינארי מסילה \gamma:[a,b]	o \mathcal{M} הינו מסילה מענה: תהא
טענה \psi:[lpha,eta]	o [a,b] מסילה למקוטעין מסילה \psi:[lpha,eta]	o [a,b] מסילה למקוטעין מסילה \gamma:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה
                                                                                                                                                                                                          \int_{\gamma}\omega=\int_{\gamma\circ\psi}\omega אזי \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight) ותהא
                                                                                                       \det\left(\left[arphi
ight]_{\mathrm{sr}}
ight)>0 עבורה arphi\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) העתקה לינארית שומרת אוריינטציה: העתקה
x\in\mathcal{U} או שומרת אוריינטציה: תהיינס אוריינטרציה לכל \mathcal{U},\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n אוי דיפאומורפיזם אוריינטרציה שומר אוריינטרציה לכל
O\left(x
ight) \in A רציפה למקוטעין עבורה O: \mathrm{Im}\left(\gamma
ight) 
ightarrow \mathbb{R}^n מסילה פשוטה אזי \gamma: [a,b] 
ightarrow \mathcal{M} רציפה למקוטעין עבורה
                                                                                                                                                                                                                                                              \{\pm\dot{\gamma}(\gamma^{-1}(x))\}
                                                                                                                   הערה: אם המסילה לא פשוטה נפרק אותה מספר מסילות פשוטות ונחבר בסוף.
                      המוגדרת O:\operatorname{Im}\left(\gamma
ight)	o\mathbb{R}^n למקוטעין אזי \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} המוגדרת מסילה: תהא מסילה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                    O(x) = \dot{\gamma} (\gamma^{-1}(x))
                                 ar{\gamma}(t)=\gamma\left(a+b-t
ight) המוגדרת ar{\gamma}:[a,b]	o\mathcal{M} מסילה מסילה \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} מסילה מסיל
                                                                                                                                      \int_{\overline{\gamma}}\omega=-\int_{\gamma}\omega אזי אזי מסילה \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} מסילה מענה: תהא
                                                                                                                                                 \int_a^b \omega = -\int_b^a \omega אזי \omega \in \Omega^1\left([a,b]
ight) ותהא a,b \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
                                             שרשור מסילות: תהא \gamma_2:[b,c]	o \mathcal{M} מסילה למקוטעין אזי \gamma_1:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה למקוטעין אזי \gamma_2:[b,c]	o \mathcal{M}
(\gamma_1\cup\gamma_2)\,(t)=egin{cases} \gamma_1(t)&t\in[a,b]\\ \gamma_2(t)&t\in[b,c] \end{cases} אזי \omega\in\Omega^1\,(\mathcal{M}) מסילה C^1 למקוטעין ותהא \gamma_2:[b,c]	o \mathcal{M} אזי \gamma_2:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה \gamma_3:[a,b]	o \mathcal{M} אזי
\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\omega=\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega בינה f באשר לכל f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} באשר למקוטעין ותהא \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} בינה הינה מסילה \gamma:[a,b]	o\mathcal{M}
                                                                                                                                                                                                             \int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) אזי C^1
                                                             \left\|\omega_{x}\right\|_{\infty}=\max\left\{ \omega_{x}\left(v\right)\mid\left(v\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight)
ight)\wedge\left(\left\|v\right\|=1
ight)
ight\} אזי x\in\mathcal{M} ותהא \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight) ותהא \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight)
                         \int_{\gamma}\omega\leq \mathrm{Length}\left(\gamma
ight)\cdot\max_{t\in[a,b]}\left\|\omega_{\gamma(t)}
ight\|_{\infty} אזי \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight) למקוטעין ותהא \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} אזי \gamma:[a,b]
```

. טענה: תהא  $f \in C^1(\mathcal{M},\mathbb{R})$  אזי 1 מענה: תהא

 $\operatorname{d}(f\cdot q)=f\cdot\operatorname{d} q+q\cdot\operatorname{d} f$  אזי  $f,q\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight)$  תהיינה כלל לייבניץ': תהיינה

 $\{x_1 \dots x_k\}$  אזי  $\mathcal M$  מערכת קואורדינטות מקומיות על יריעה: תהא שוי מפה על

 $\mathbb{R}^{k}$ כמו ב- $\mathcal{M}$  על  $x_1 \dots x_k$  מטרת הסימונים מלעיל הינה לאפשר קואורדינטות

 $.rac{\partial f}{\partial x_i}\left(p
ight)=rac{\partial \left(f\circarphi^{-1}
ight)}{\partial x_i}\left(arphi\left(p
ight)
ight)$  איי  $i\in[k]$  ויהי  $p\in\mathcal{M}$  תהא  $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}$  תהא  $\mathcal{M}$  מפה על

 $q_i\left(u
ight)=u_i$  המוגדרת  $q_i:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}$  אזי  $i\in[n]$  אזי ויהי  $n\in\mathbb{N}$  המוגדרת  $x_i=q_i\circarphi$  מפה על  $\mathcal{M}$  אזי  $x_i:\mathbb{R}^n o\mathbb{R}$  המוגדרת  $\mathcal{U},arphi$  מפה על

```
אזי ניתן לחשוב על \partial G בתור איחוד סופי Vol_{n-1} (\partial^{
m sm}G)<\infty אזי ניתן שפה כמעט חלקה עבורה G\subseteq\mathbb{R}^n תהא
                                                                                                                                                                   זר של מסילות סגורות.
אוריינטציה N אוריינטציית רגל שמאל: תהא א Vol_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty חלקה עם שפה כמעט חלקה עם שפה G\subseteq\mathbb{R}^2 תהא
                       עבורה O:\partial G	o \mathbb{R}^2 אזי אוריינטציה אוריינטציה עבורן וסגורות וסגורות מסילות מסילות אוריינטציה \gamma_1\dots\gamma_m
                                                                                                                                      x \in \partial G לכל \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot O(x) = -N(x)
ינה C^1 אזי \partial G וכן \partial G = \mathbb{R}^2 אזי O(n-1) אינה פרמטריזציה נורמלית: תהא וכן G \subseteq \mathbb{R}^2 אחסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה
                  \|\gamma_i'(t)\|=1 מתקיים t\in {
m Dom}\,(\gamma_i) ולכל ולך לכל וכן לכל עבורן עבורן עבורן \gamma_i=\partial G מיימות ירות וסגורות עבורן
      משפט גרין: תהא \partial G וכן \partial G וכן \operatorname{Vol}_{n-1}(\partial^{\operatorname{sm}} G)<\infty משפט גרין: תהא שפה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה
\int_{\partial G}\left(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y
ight)=\int_{G}\left(rac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-rac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y פתוחה באשר G יהי N נורמל חיצוני לG ותהיינה \mathcal{D} ותהיינה \mathcal{D} פתוחה באשר איזי
                                                                                                                                           עם אוריינטציית רגל שמאל. באשר \partial G
למקוטעין C^1 וכן \partial G וכן \partial G וכן \partial C^1 וכן \partial C^1 וכן אוס: תהא G\subseteq \mathbb{R}^2 אחסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה
                                                                                  . באשר אוריינטציית עם אוריינטציית Area (G)=rac{1}{2}\int_{\partial G}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x) איי
שונים מתקיים i,j\in [k] ולכל ולנארית אנטי סימטרית: יהי V מ"ו מעל \mathbb R אזי שונים T\in \mathrm{Hom}\,(V^k,\mathbb R) שונים מתקיים ולכל
                                                                                                                                    T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}\right) = -T\left(R_{i\leftrightarrow j} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}\right)יכי
                                                             i,j הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות R_{i\leftrightarrow j}\in M_n(A) אזי אזי i,j\in [n] הינה מטריצת החלפת
                                                                    .igwedge^k V^* = ig\{\omega \in \mathrm{Hom}\,(V^k,\mathbb{R}) \mid \omega אנטי סימטרית אזי \omega\} אזי מ"ז מעל מ"ז מ"ז מ"ז מ"זי אזיי אנטי סימטרית.
                                                                                                                                     .igwedge^0 V^* = \mathbb{R} אזי \mathbb{R} מ"ו מעל V מ"ו מימון: יהי
                                                                                               \det_n \in \bigwedge^n V^* אזי \dim\left(V
ight) = n באשר מ"ז מעל מ"ז מ"ז מענה: יהי
                                       \omega\left(u_1\ldots u_k
ight)=0 אזי \omega\inigwedge^kV^* אזי מענה: יהי u_1\ldots u_k\in V יהיו u_1\ldots u_k\in V יהי מ"ז מענה: יהי
                                                                       באשר arphi_1\wedge\ldots\wedgearphi_k\in igwedge^k V^* אזי arphi_1\ldotsarphi_k\in V^* באשר מכפלת וודג'/מכפלת יתד: יהיו
                                                                                  u_1 \dots u_k \in V לכל (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) (u_1 \dots u_k) = \det ((\varphi_i (u_j))_{i,j \in [k]})
בסיס של \{e_{a_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{a_k}^* \mid 1 \leq a_1 < \ldots < a_k \leq n\} אזי k \in [n] בסיס של בסיס של e_1 \ldots e_n יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} יהי מ"ו מעל \mathbb{R}
                                                                                                                                                                                         . \bigwedge^k V^*
                                            (\varphi_1 \dots \varphi_k, \psi_1 \dots \psi_\ell \in V^*) לכל (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \wedge (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k) = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k
                             \omega\left(x
ight)\inigwedge^{p}T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}
ight) המקיימת \omega:\mathcal{M}
ightarrow\mathsf{Hom}\left(\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{p},\mathbb{R}
ight) יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} המקיימת \omega:\mathcal{M}
ightarrow\mathsf{Hom}\left(\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{p},\mathbb{R}
ight) יריעה אזי
                                              \omega_x=\omega\left(x
ight) איי איx\in\mathcal{M} ותהא \mathcal{M} ותהא \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n איי ריעה תהא \mathcal{M} יריעה תהא \mathcal{M}
                                        \omega_x\in \bigwedge^p T_x^*(\mathcal{M}) אלא \omega_x\in \mathrm{Hom}\left(\left(\mathbb{R}^n\right)^p,\mathbb{R}\right) הערה: ההגדרה מלעיל לא מדוייקת מכיוון ולא מתקיים
הינה \omega \wedge \nu יריעה אזי M \subseteq \mathbb{R}^n הינה דיפרנציאלית היהא \mu \wedge \nu יריעה תהא היער היער היער היער היער היער היער \mu \in \mathbb{R}^n
                                                                                                             (\omega \wedge \nu)_x = \omega_x \wedge \nu_x תבנית דיפרנציאלית באשר (p+q)
                                                  \mathrm{d}x_{\{a_1\dots a_n\}}=\mathrm{d}x_{a_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{a_n} איי 1\leq a_1<\ldots< a_k\leq n באשר a:[p]	o[k] איי a:[p]
                    ולכל מפה (\mathcal{U}, arphi) איז של \omega עבורה לכל מפה יריעה איז pיריעה איז יריעה איז \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n איז מפה יריעה איז יריעה איז \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n
                                          I\in\mathcal{P}_{p}\left(\left[k
ight]
ight) לכל f_{I}\in C^{m}\left(\mathcal{U}
ight) מתקיים \omega=\sum_{I\in\mathcal{P}_{n}\left(\left[k
ight]
ight)}f_{I}\cdot\mathrm{d}x_{I} באשר באשר f\in\mathcal{P}_{p}\left(\left[k
ight]
ight)
ightarrow\left(\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}
ight)
                                                     \Omega^p\left(\mathcal{M}
ight)=\{\omega\mid\mathcal{M} על C^\infty על דיפרנציאלית הינה \omega\} יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n על הינה \omega
H^*:\Omega^p\left(\mathcal{N}
ight)	o\Omega^p\left(\mathcal{M}
ight) אזי F\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{N}
ight) יריעה תהא \mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^m אזי (pull back) משיכה לאחור
                                                                                     .H^{st}\left(\omega,x,v_{1}\ldots v_{p}
ight)=\omega_{H\left(x
ight)}\left(\mathcal{D}_{x}\left(H
ight)\cdot v_{1},\ldots,\mathcal{D}_{x}\left(H
ight)\cdot v_{p}
ight) המוגדרת
                               M \in \mathcal{H}^*יריעה תהא M \subseteq \mathcal{H}^* אזי M \subseteq \mathcal{H}^* אזי אין יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא און: תהא
G\in C^1(\mathcal{N},\mathcal{L}) אזי H\in C^1(\mathcal{M},\mathcal{N}) יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא יריעה תהא \mathcal{N}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא
                                                                                                                                                                  .(G \circ H)^* = H^* \circ G^*
.d \left(\sum_{I\in\mathcal{P}_{p}([k])}f_{I}\cdot\mathrm{d}x_{I}
ight)=\sum_{I\in\mathcal{P}_{p}([k])}\left(\mathrm{d}f_{I}\wedge\mathrm{d}x_{I}
ight) המוגדרת חיצונית: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} פתוחה אזי \mathcal{U}=\mathbb{R}^{n} פתוחה אזי מוגדרת חיצונית: תהא
```

.טענה: תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה אזי לינארית

.d  $(\mathrm{d}\omega)=0$  אזי  $\omega\in\Omega^p\left(\mathcal{U}\right)$  אזי  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי  $\omega\in\Omega^p\left(\mathcal{U}\right)$  פתוחה  $\Omega\left(\mathcal{U}\right)=\bigcup_{p\in\mathbb{N}_+}\Omega^p\left(\mathcal{U}\right)$  פתוחה אזי  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה אזי

```
\alpha_1\ldots\alpha_k\in\mathcal{U}^* לכל b (\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_k)=\sum_{i=1}^k\left(-1
ight)^{i+1}\left(lpha_1\wedge\ldots\wedgelpha_{i-1}\wedge\mathrm{b}\left(lpha_i
ight)\wedgelpha_{i+1}\wedge\ldots\wedgelpha_k
ight) לכל \omega\in\Omega^p\left(\mathcal{U}
ight)
                                                                                                . טענה כלל לייבניץ: תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n פתוחה אזי \mathbf{d} מקיימת את כלל לייבניץ
וכך \omega\in\Omega\left(\mathcal{U}
ight) לכל לייבניץ וכן b : \Omega\left(\mathcal{U}
ight) לכל לייבניץ וכן לינארית המקיימת \omega\in\Omega\left(\mathcal{U}
ight) לכל לינארית המקיימת שת לייבניץ וכן שתוחה ותהא
                                                                                                                                                   b = d אזי f \in C^{\infty}(\mathcal{U}) לכל b(f) = df
                                         \mathrm{d}\left(F_{\omega}^{*}
ight)=F_{\mathrm{d}\omega}^{*} אזי \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}
ight) ההיינה \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{V}
ight) בתוחות יהי F:\mathcal{U}	o\mathcal{V} בתוחות יהי
                                (F^{-1})^*=(F^*)^{-1} אזי \omega\in\Omega^p\left(\mathcal{V}
ight) אזי היינה F:\mathcal{U}	o\mathcal{V} פתוחות יהי \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n מענה: תהיינה
                                     .F^{-*}=\left(F^{-1}
ight)^* אזי \omega\in\Omega^p\left(\mathcal{V}
ight) אזי היינה \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחות יהי\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n דיפאומורפיזם ותהא
 .arphi_{2}^{st}\left(\mathrm{d}\left(arphi_{2}^{-st}\left(\omega
ight)
ight)
ight)=arphi_{1}^{st}\left(\mathrm{d}\left(arphi_{1}^{-st}\left(\omega
ight)
ight)
ight) מפות אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} יריעה תהא \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}
ight) ותהיינה \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}
ight) מפות אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}
.arphi^{-*}\left(\mathrm{d}\omega
ight)=\mathrm{d}\left(arphi^{-*}\omega
ight) מתקיים (\mathcal{U},arphi) מתקיים מ\omega\in\Omega^{p+1}\left(\mathcal{M}
ight) אזי \omega\in\Omega^{p}\left(\mathcal{M}
ight) אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} מתקיים לכל מפה
                                                         \mathrm{d}\omega=arphi^*\left(\mathrm{d}\left(arphi^{-*}\omega
ight)
ight) אזי \omega\in\Omega^p\left(\mathcal{M}
ight) מפה ותהא מפה \left(\mathcal{M},arphi
ight) יריעה תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
                                         T_n(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n עצמה עצמה מהיות ומתקיים דיפרנציאלית איקולה ל־T_n(\mathbb{R}^n) בקבוצה \mathbb{R}^n
                                                                                      \det_n = \mathrm{d} x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d} x_n אזי \dim(V) = n באשר מסקנה: יהי V מיינ מ"נ מיינ מעל
                                            עבורה f\cdot \mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_k עבורה ותהא f\in C\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא עומך פתוחה ותהא אינגטרל: תהא
                                                                                                                                    \int_{\mathcal{U}} (f \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = \int_{\mathcal{U}} f(x) dx_1 \ldots dx_k
                                                               \omega=f\cdot\det_{k} עבורה f\in C\left(\mathcal{U}
ight) אזי קיימת \omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{k} אזי קיימת
                                    טענה: יהיו \omega\in\Omega^k תחומים יהי \mathcal{U}	o\mathcal{V} דיפאומורפיזם ותהא בעלת \omega\in\Omega^k בעלת תומך קומפקטי אזי
                                                                                                                                                            \int_{\mathcal{U}} \omega = \operatorname{sign} \left( \det \left( \mathcal{D} \left( T \right) \right) \right) \cdot \int_{\mathcal{V}} T_{\omega}^{*}
                                                              \omega_x \in \mathcal{M} לכל \omega_x \neq 0 עבורה \omega \in \Omega^k \left( \mathcal{M} \right) יריעה \omega_x \neq 0 יריעה אזי אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n עבורה \omega_x \neq 0
f>0 באשר f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} עבורן קיימת \omega_1,\omega_2\in\Omega^k\left(\mathcal{M}
ight) באשר אזי תבניות נפח יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה
                                                                                                                                                                                   \omega_2 = f \cdot \omega_1 המקיימת
                                                                                     . יריעה אזי שקילות תבניות נפח על \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n יריעה אזי שקילות תבניות נפח על
                                              \mathcal{M} טענה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה קשירה אזי קיימות לכל היותר 2 מחלקות שקילות של תבניות נפח על
                                                         \mathcal{M} אוי נפח שקילות של על תבניות נפח יריעה קשירה אזי אוריינטציה של יריעה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה
                                                                               \det_n אזי מחלקת השקילות של יהי יהי האוקלידית הסטנדרטית: יהי האוריינטציה האוקלידית או
                  . העייכת לאוריינטציה \eta\in\Omega^k\left(\mathcal{M}\right) השייכת לאוריינטציה אזי תבנית נפח \eta\in\Omega^k\left(\mathcal{M}\right) השייכת לאוריינטציה אזי תבנית נפח
\mathcal U מפה משמרת אוריינטציה: תהא \mathcal M\subseteq\mathbb R^n יריעה \mathcal M\subseteq\mathbb R^n מימדית עם אוריינטציה אזי מפה \mathcal M\subseteq\mathbb R^n תבנית נפח חיובית על
                                                                                                                                     \mathbb{R}^k מתקיים כי \left(arphi^{-1}
ight)^*(\eta) תבנית נפח חיובית על
                  (\mathcal{U},\psi) מפה אזי קיימת מפה אוריינטציה עם אוריינטציה ותהא אוריינטציה ותהא \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n פענה: תהא \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n אוריינטציה ותהא
\omega\in\Omega^{k}\left(\mathcal{M}
ight) עענה: תהא משמרות אוריינטציה תהיינה עם אוריינטציה עם אוריינטציה מות משמרות משמרות אוריינטציה עם אוריינטציה אוריינטציה מינה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}
                                                                                      \int_{arphi(\mathcal{U})} arphi_\omega^{-*} = \int_{\psi(\mathcal{V})} \psi_\omega^{-*} אזי supp (\omega) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V} בעלת תומך קומפקטי עבורה
בעלת תומך \omega\in\Omega^k\left(\mathcal{M}
ight) יריעה \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n יריעה שוריינטציה עם אוריינטציה תהא ירינטציה משמרת אוריינטציה ותהא \omega\in\Omega^k\left(\mathcal{M}
ight)
\int_{\mathcal{M}}\omega=\int_{arphi(\mathcal{U})}arphi_{\omega}^{-*} אזי \mathrm{supp}\left(\omega
ight)\subseteq\mathcal{U} אזי \mathrm{supp}\left(\omega
ight)\subseteq\mathcal{U} קומפקטי עבורה אין \{(\mu_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}, איריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יהי יהיו
           \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{M}} \left( 
ho_i \cdot \omega 
ight) = \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{M}} \left( \eta_i \cdot \omega 
ight) אזי \{ (\mathcal{V}_i, \psi_i) \}_{i=1}^\infty פירוק יחידה של \{ (\mathcal{U}_i, \varphi_i) \}_{i=1}^\infty ויהי \{ (\mathcal{U}_i, \varphi_i) \}_{i=1}^\infty
אינטגרל: תהא \{
ho_i\}_{i=1}^\infty ויהי supp (\omega) ויהי אינטגרל: תהא א־תבנית הא \{(\mathcal{U}_i, arphi_i)\}_{i=1}^\infty פירוק יחידה של \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אינטגרל: תהא
                                                                                                                                         \int_{\mathcal{M}}\omega=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathcal{M}}\left(
ho_i\cdot\omega
ight) איז \{(\mathcal{U}_i,arphi_i)\}_{i=1}^{\infty}
C^1 משפט גרין בשפה של תבנית: תהא G\subseteq \mathbb{R}^n וכן G\subseteq \mathbb{R}^n וכן Vol_{n-1} (\partial^{	ext{sm}}G) משפט גרין בשפה איז תבנית: תהא
עם אוריינטציית רגל שמאל. \partial G
                                                                         \mathrm{d}\omega=0 עבורה שנית \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight) יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} עבורה: תהא
               \omega=\mathrm{d}f המקיימת f\in C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) עבורה קיימת \omega\in\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight) יריעה אזי אי יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת M\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת
```

מתקיים  $\gamma$  מתקיים סגורה לכל מסילה סגורה אזי  $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$  מתקיים משמרת: תהא

. מסקנה: תהא  $\omega \in \Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)$  יריעה ותהא יריעה  $\omega \in \Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)$  מדוייקת אזי  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ 

 $\int_{\gamma} \omega = 0$ 

לכל b $(\omega)\in\Omega^{p+1}(\mathcal{U})$  באשר באר המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות דיפרנציאליות: תהא שופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות דיפרנציאליות: אופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות ביפרנציאליות: אופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות ביפרנציאליות:

 $C^1$  מסילה  $\gamma:[a,b] o \mathcal{M}$  יריעה לכל  $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  עבורה לכל  $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$  אזי שמרת) אזי שמרת  $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$  אזי  $\omega\in\Omega^1(\mathcal{M})$  אזי למקוטעין מתקיים  $\omega: \int_{\gamma}\omega=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$ 

. משמרת  $\omega$  משמרת סגורה אזי  $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)$  משמרת

. (משמרת) יריעה  $\omega$ ) אזי ( $\omega$  מדוייקת) אזי  $\omega \in \Omega^1\left(\mathcal{M}\right)$  יריעה ותהא  $\omega \in \Omega^1\left(\mathcal{M}\right)$ 

 $\omega$ ) משמרת) מדייקת  $\omega$ ) אזי ( $\omega$  סגורה) אזי  $\omega$  מדייקת) משמרת) משקנה: תהא

 $\partial_q \mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} ackslash \mathcal{M}$  יריעה אזי  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  תהא שפה גאומטרית/קצה:

 $\mathcal{M}\cap B_{\delta}\left(x
ight)\subseteq\mathcal{N}$  באשר  $\mathcal{N}\subseteq B_{\delta}\left(x
ight)$  וקיימת יריעה  $\delta>0$  וקיים  $x\in\partial_{g}\left(\mathcal{M}
ight)$  יריעה אזי  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  באשר  $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{B}_{\delta}\left(x
ight)$  וקיימת אויימת פרמטריזציה טובה  $\mathcal{N}=\mathcal{N}$  עבורן  $\mathcal{N}=\mathcal{N}$  וקיימת פרמטריזציה טובה יריעה  $\mathcal{N}=\mathcal{N}$  עבורן וא עבורן יריעה  $\mathcal{N}=\mathcal{N}$  וקיימת פרמטריזציה טובה יריעה אויים אויים ווא יריעה אויי

. אינה נקודת קצה חלק: יריעה  $M\subseteq\mathbb{R}^n$  עבורה כל  $x\in\partial_a\mathcal{M}$  עבורה יריעה בעלת אינה נקודת אינה  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ 

. מסקנה: תהא  $\partial_a \mathcal{M}$  יריעה בעלת קצה בעלת בעלת הייעה k יריעה  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה מסקנה:

 $\omega\in\Omega^k\left(\mathcal{M}
ight)$  אוריינטציה מושרית על קצה חלק יריעה N יריעה N מימדית בעלת איריינטציה ותהא  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  יריעה  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$  אוריינטציה ותהא  $\omega^\partial_x\left(u_1\ldots u_{k-1}\right)=\omega_x\left(N\left(x\right),u_1\ldots u_{k-1}\right)$  המוגדרת  $\omega^\partial_x\left(u_1\ldots u_{k-1}\right)=\omega_x\left(N\left(x\right),u_1\ldots u_{k-1}\right)$ 

 $\int_{\mathcal{M}}\mathrm{d}\omega=\int_{\partial_{\sigma}\mathcal{M}}\omega$  אזי  $\omega\in\Omega^{k-1}\left(\mathbb{R}^{n}
ight)$  משפט סטוקס: תהא  $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$  אזי לייעה  $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  יריעה