

פולינום טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על a אזי $P_n(f, a)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

שארית טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על a אזי $R_n(f, a)(x) = f(x) - P_n(f, a)(x)$

טור טיילור: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ חלקה על a אזי $P(f, a)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$

פונקציה קדומה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F' = f$

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G' = f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}. G = F + c)$

חלוקה: יהי $[a, b]$ אזי $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ המקיימות $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

סימון: תהא $\{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

מדד העדינות: תהא $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi) = \max_{i=1}^n |\Delta x_i|$

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2) \leq \lambda(\Pi_1)$

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1 \dots t_n\}$ המקיימות $\forall i \in \{1 \dots n\}. t_i \in [x_{i-1}, x_i]$

סכום רימן: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum f(t_i) \Delta x_i$

אינטגרליות רימן: $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L \in \mathbb{R}$ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f, \Pi, \{t_i\}) - L| < \varepsilon$

אינטגרל רימן מסוים: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרליות רימן אזי $L = \int_a^b f(t) dt$

הערה: יהיו $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרל על פי המשתנה φ $\int_a^b f(\varphi) d\varphi$

סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרליות רימן אזי $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a, b]) = \{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \mid f \text{ אינטגרליות רימן}\}$

הערה: ניתן להגדיר אינטגרליות רימן בסימון $\int_a^b f(t) dt = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S(f, \Pi, \{t_i\})$

טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c \cdot dt = c(b-a)$

טענה: $D(x) \notin R(\mathbb{R})$

משפט: תהא $f \in R([a, b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\bar{\Sigma}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_i, x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$

סכום דרבו תחתון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_i, x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

$$\bar{\Sigma}(f, \Pi) = \sup_{\text{נקודות מתאימות } \{t_i\}} S(f, \Pi, \{t_i\}) \cdot$$

$$\underline{\Sigma}(f, \Pi) = \inf_{\text{נקודות מתאימות } \{t_i\}} S(f, \Pi, \{t_i\}) \cdot$$

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהינה $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ חלוקות

$$\bar{\Sigma}(f, \Pi_1) \geq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2) \cdot$$

$$\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \underline{\Sigma}(f, \Pi_2) \cdot$$

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהינה Π_1, Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2)$

האינטגרל העליון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\bar{I}(f) = \inf_{\Pi \text{ חלוקה}} \bar{\Sigma}(f, \Pi)$

האינטגרל התחתון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f) = \sup_{\Pi \text{ חלוקה}} \underline{\Sigma}(f, \Pi)$

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi)$

קריטריון דרבו: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f \in R([a,b])) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים $\bar{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi) < \varepsilon$.

תנודה: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f, J) = \sup_{x,y \in J} (f(x) - f(y))$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0 \in J$ אזי f רציפה על x_0 $\iff (\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = 0)$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי f רציפה במ"ש $\iff (\forall I \subseteq J. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \text{len}(I) < \delta \implies \omega(f, I) < \varepsilon)$.

תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f, \Pi) = \bar{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi)$.

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \cup \{p\} = \Pi_2$ חלוקות

- $\bar{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2) + \lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$
- $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \geq \underline{\Sigma}(f, \Pi_2) - \lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \cup \{p_1 \dots p_m\} = \Pi_2$ חלוקות

- $\bar{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2) + m\lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$
- $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \geq \underline{\Sigma}(f, \Pi_2) - m\lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}(f, \Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \underline{\Sigma}(f, \Pi) + \varepsilon$
- $\bar{\Sigma}(f, \Pi) \geq \bar{I}(f) \geq \bar{\Sigma}(f, \Pi) - \varepsilon$

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ אזי $f \in R([a, b])$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\bar{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi) < \varepsilon$ אזי $f \in R([a, b])$.

משפט: $C([a, b]) \subseteq R([a, b])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי $f \in R([a, b])$.

סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b \in [a, c]$ עבורה $f|_{[a,b]} \in R([a, b])$ אזי $f \in R([a, b])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b \in [a, c]$ עבורה $(f \in R([a, b])) \wedge (f \in R([b, c]))$ אזי $f \in R([a, c])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b < c \in [a, d]$ עבורה $f \in R([a, d])$ אזי $f \in R([b, c])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $f \in R([a, b])$ $\forall b \in (a, c)$ אזי $f \in R([a, c])$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $f \in R([b, c])$ $\forall b \in (a, c)$ אזי $f \in R([a, c])$.

טענה: תהא $f \in R([a, c])$ נגדיר $g(x) = \begin{cases} y & x = b \\ f(x) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g \in R([a, c])$.

מסקנה: נגדיר $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אזי $f \in R([-1, 1])$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f \in R([a, b])$.

משפט: תהיינה $f, g \in R([a, b])$ תהא $H \in C(\mathbb{R})$ וכן $c \in \mathbb{R}$

- $(f + g), (cf) \in R([a, b])$
- $(f \cdot g), (H \circ f), |f| \in R([a, b])$

קבוצה ממידה אפס: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $\{(a_i, b_i)\}_{i=0}^\infty$ עבורם $A \subseteq \bigcup (a_i, b_i)$ וכן $\sum (b_i - a_i) < \varepsilon$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $|A| \leq \aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A \subseteq B$ המקיימת $|b - a| < \varepsilon$ $\forall b \in B. \forall \varepsilon > 0. \exists a \in A$.

טענה: תהייה $f, g \in R([a, b])$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f|_A = g|_A$ אזי $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

מסקנה: תהא $f \in R([a, c])$ נגדיר $g(x) = \begin{cases} y_i & x \in \{b_1 \dots b_m\} \\ f(x) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_a^c f(x) dx = \int_a^c g(x) dx$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהייה $f, g \in R([a, b])$ ויהי $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ אזי $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

משפט לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f \in R([a, c])$ ויהי $b \in (a, c)$ אזי $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f \in R([a, b])$ אזי $\int_a^b f = - \int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f \in R([a, b])$ המקיימת $f \geq 0$ אזי $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהייה $f, g \in R([a, b])$ המקיימות $f \geq g$ אזי $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

טענה: תהא $f \in R([a, b])$ המקיימת $m \leq f \leq M$ אזי $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f \in R([a, b])$ אזי $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f| \leq \sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f \in R([a, b])$ נגדיר $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ אזי $F \in C([a, b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f \in C([a, b])$ ותהא $0 \leq g \in R([a, b])$ אזי קיים $x_0 \in [a, b]$ עבורו $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(x_0) \int_a^b g(x) dx$.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0 \leq g \in R([a, b])$ אזי קיים $x_0 \in [a, b]$ עבורו $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^{x_0} g(x) dx + f(b) \int_{x_0}^b g(x) dx$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f \in R([a, b])$ ותהא $x_0 \in [a, b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ אזי $F'(x_0) = f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f \in R([a, b])$ ותהא F קדומה של f על $[a, b]$ אזי $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

מסקנה: תהא $f \in R([a, b])$ יהיו $x_1 \dots x_n \in [a, b]$ ותהא F קדומה של f על $[a, b] \setminus \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $f|_a^b = f(b) - f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהייה $f, g \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f', g' \in R([a, b])$ אזי $\int_a^b f'g = [f \cdot g]|_a^b - \int_a^b fg'$.

הלמה של בונה: תהא $f \in C^1([a, b])$ עבורה $(f' \geq 0) \vee (f' \leq 0)$ ותהא $g \in C([a, b])$ אזי קיים $x_0 \in [a, b]$ עבורו $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(a) \int_a^{x_0} g(x) dx + f(b) \int_{x_0}^b g(x) dx$.

טענה: תהא $f \in C^{n+1}([a, b])$ אזי $R_n(f, a)(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f \in C([a, b])$ ותהא $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$ המקיימת $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ אזי $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$.

למה: תהא $f \in C^1([0, 2\pi])$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = - \int_0^{2\pi} f'(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f \in C^1([0, 2\pi])$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $|\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx| \leq \frac{2\pi \sup(|f'|)}{n}$.

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $k!! = \prod_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} (k-2n)$.

למה: יהי $m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^m dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^m dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$.

משפט מכפלת וואליס: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot (2n-1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I = [a, \infty)$ וכן $f \in R([a, b]) \forall b \in [a, \infty)$ אזי $\int_a^\infty f = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I = (-\infty, b]$ וכן $f \in R([a, b]) \forall a \in (-\infty, b]$ אזי $\int_{-\infty}^b f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f$.

- דו צדדי: נניח $I = \mathbb{R}$ וכן $(a < b) \implies (f \in R([a, b]))$ אזי $\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^{\infty} f$
- לא חסום משמאל: נניח $I = (a, b]$ וכן $f \in R([c, b]) \forall c \in I$ אזי $\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f$
- לא חסום מימין: נניח $I = [a, b)$ וכן $f \in R([a, c]) \forall c \in I$ אזי $\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f$

סימון: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\int_I f$ קיים וסופי $\{f \in \mathbb{R}^I \mid \int_I f \text{ קיים וסופי}\} = R(I)$.

הערה: מכאן כל המשפטים יהיו חד צדדים ימינה אך תקפים לכל סוגי הקטעים עם שינויים קלים.

משפט: יהיו $\omega, \eta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ אזי

- לינאריות האינטגרל: תהייה $f, g \in R([a, \omega])$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\omega f + \beta \int_a^\omega g$
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f \in R([a, \omega])$ ויהי $c \in (a, \omega)$ אזי $\int_a^\omega f = \int_a^c f + \int_c^\omega f$
- מונוטוניות: תהייה $f, g \in R([a, \omega])$ המקיימות $f \geq g$ אזי $\int_a^\omega f \geq \int_a^\omega g$
- ניוטון לייבניץ: תהא $f \in R([a, \omega])$ ותהא $F \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ עבורה $F'(x) = f(x)$ על $[a, \omega]$ אזי $\int_a^\omega f = \lim_{b \rightarrow \omega} F(b) - F(a)$
- אינטגרציה בחלקים: תהייה $f, g \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ גזירות עבורן $f', g' \in R([a, \omega])$ אזי $\int_a^\omega f'g = \lim_{b \rightarrow \omega} [f \cdot g]_a^b - \int_a^\omega fg'$
- שינוי משתנה: תהא $f \in R([a, \omega])$ ותהא $\varphi \in C^1([c, \eta])$ המקיימת $\varphi(c) = a$ ו- $\lim_{b \rightarrow \eta} \varphi(b) = \omega$ אזי $\int_a^\omega f = \int_c^\eta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימת $f \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ אזי

$$(f \in R([a, \omega])) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists B \in (a, \omega). \forall b_1, b_2 \in [B, \omega). \left| \int_{b_1}^{b_2} f \right| < \varepsilon)$$

התכנסות בהחלט: $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימת $f \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ עבורה $\int_a^\omega |f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימת $f \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ עבורה $\int_a^\omega |f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left| \int_a^\omega f \right| \leq \int_a^\omega |f|$

טענה: תהא $0 \leq f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימת $f \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ אזי $\left(\int_a^\omega f < \infty \right) \iff F(x) = \int_a^x f(t) dt \iff$ חסומה על $[a, \omega]$.

מסקנה: תהייה $0 \leq f \leq g \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימות $f, g \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ אזי $\left(\int_a^\omega g < \infty \right) \implies \left(\int_a^\omega f < \infty \right)$

מסקנה: תהייה $0 \leq f \leq g \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימות $f, g \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ אזי $\left(\int_a^\omega f = \infty \right) \implies \left(\int_a^\omega g = \infty \right)$

משפט: תהא $0 \leq f \in \mathbb{R}^{[1, \infty]}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \right) \iff \left(\int_1^{\infty} f < \infty \right)$

טענה: תהא $0 \leq f \in \mathbb{R}^{[1, \infty]}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

טענה: $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s)(s-1) = 1$

משפט אבל: תהא $g \in C([a, \omega]) \cap R([a, \omega])$ ותהא $f \in C^1([a, \omega])$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg < \infty$

משפט דיריכלה: תהא $g \in C([a, \omega])$ עבורה $G(x) = \int_a^x g$ חסומה ותהא $f \in C^1([a, \omega])$ מונוטונית עבורה

$$\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = 0 \text{ אזי } \int_a^\omega fg < \infty$$

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi} \text{ מסקנה:}$$

שאיפה נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g \in \mathbb{R}^I$ ויהי $f \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\forall x \in I. \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x) \right) \iff \left(f_n \xrightarrow{\text{pointwise}} g \right)$

$$\left(f_n \xrightarrow{\text{p.w.}} f \right) \iff \left(f_n \xrightarrow{\text{pointwise}} f \right) \text{ סימון:}$$

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $f_n \in \mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

• רציפות: $(\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in C(I)) \not\Rightarrow (f \in C(I))$

• אינטגרביליות רימן: $(\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in R(I)) \not\Rightarrow (f \in R(I))$

- גבול האינטגרל: נניח $\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in R(I)$ אזי $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = L \right) \not\Rightarrow \left(\int_I f = L \right)$
- נגזרת: יהי $x \in I$ נניח f גזירה ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = L \right) \not\Rightarrow (f'(x) = L)$
- **שאיפה במידה שווה (במ"ש):** יהי I קטע מוכלל תהא $g \in \mathbb{R}^I$ ויהי $f \in (\mathbb{R}^I)^\mathbb{N}$ אזי $\left(f_n \xrightarrow{\text{uniform}} g \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \right)$
- **סימון:** $\left(f_n \xrightarrow{u} f \right) \Leftrightarrow \left(f_n \xrightarrow{\text{uniform}} f \right)$
- **טענה:** תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\left(f_n \xrightarrow{u} f \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall x \in A. \forall n > N. |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$
- **חסומה במידה אחידה:** $f_n \in \mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. \forall x \in I. |f_n(x)| \leq M$
- **למה:** תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M \in \mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n \xrightarrow{u} f \right) \wedge \left(g_n \xrightarrow{u} g \right)$ אזי $f_n g_n \xrightarrow{u} f g$
- **משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה:** תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ אזי $\left(\exists f \in \mathbb{R}^I. f_n \xrightarrow{u} f \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m > N. \forall x \in I. |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon)$
- **משפט:** תהיינה $f_n \in C(I)$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $f \in C(I)$
- **קבוצה קומפקטית:** $A \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ קטעים פתוחים עבורם $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ $\exists B \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda). A \subseteq \bigcup_{n \in B} I_n$
- **הלמה של היינה-בורל:** יהיו $a < b$ אזי $[a, b]$ קומפקטית.
- **משפט דיני:** תהיינה $f_n \in C([a, b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{\text{p.w.}} f$ באשר $f \in C([a, b])$ אזי $f_n \xrightarrow{u} f$
- **מסקנה:** תהיינה $f_n \in C([a, b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{\text{p.w.}} f$ באשר $f \in C([a, b])$ וכן לכל $x \in [a, b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n \xrightarrow{u} f$
- **טענה:** תהיינה $f_n \in R([a, b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $f \in R([a, b])$
- **משפט:** תהיינה $f_n \in R([a, b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$
- **משפט מז'ורנטה:** תהיינה $f_n \in R([a, \omega))$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ על $[a, b]$ ותהא $\Psi \in R([a, \omega))$ עבורה $\forall n \in \mathbb{N}. |f_n| \leq \Psi$ אזי $\left(\int_a^\omega f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\omega f_n \right) \wedge \left(\int_a^\omega f \text{ מתכנסת בהחלט} \right) \wedge (\forall b \in [a, \omega). f \in R([a, b]))$
- **טענה:** $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
- **משפט:** תהיינה $f_n \in C^1([a, b])$ עבורה $f'_n \xrightarrow{u} g$ ותהא $x_0 \in [a, b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת אזי $f'_n \xrightarrow{u} g$ $\exists f \in \mathbb{R}^{[a, b]}. f'_n \xrightarrow{u} f$
- **סימון:** תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ עבורה $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\sum_{i=0}^\infty f_n = f$ במ"ש.
- **משפט אינטגרציה איבר איבר:** תהיינה $u_n \in C([a, b])$ עבורה $\sum_{i=0}^\infty u_n = f$ במ"ש אזי $\int_a^b f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b u_n(t) dt$
- **משפט גזירה איבר איבר:** תהיינה $u_n \in C([a, b])$ עבורה $\sum_{i=0}^\infty u_n = f$ במ"ש אזי $\int_a^b f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b u_n(t) dt$
- **משפט M בוחן של וירשטראס:** תהיינה $u_n \in \mathbb{R}^I$ ותהא $M \in \mathbb{R}_+^\mathbb{N}$ עבורה $\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$ וכן $\forall x \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \leq M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.
- **למה התמרת אבל:** תהיינה $a, b \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ אזי $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k a_m (b_k - b_{k+1})$
- **משפט קריטריון אבל:** תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^\infty f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x \in [a, b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^\infty f_i g_i$ מתכנסת במ"ש.
- **משפט קריטריון דיריכלה:** תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^\infty f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n \xrightarrow{u} 0$ וכן לכל $x \in [a, b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^\infty f_i g_i$ מתכנסת במ"ש.
- **פונקציית וירשטראס:** יהי $a \in (0, 1)$ ויהי $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ עבורם $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x) = \sum_{k=0}^\infty a^k \cos(b^k \pi x)$
- **הגדרה:** נגדיר $\Delta_n \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ כך $\Delta_k = \frac{\Delta_0(4^k x)}{4^k}$ $\left(\Delta_0(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \right) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}. \Delta_0(x+1) = \Delta_0(x)) \wedge \left(\Delta_k = \frac{\Delta_0(4^k x)}{4^k} \right)$

טענה: $\Delta_n \xrightarrow{u} \Delta$.

מסקנה: Δ רציפה בכל נקודה.

משפט: Δ אינה גזירה באף נקודה.

משפט וירשטראס: תהא $f \in C([a, b])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $\exists p \in \mathbb{R}[x]$ $\max_{[a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

משפט וירשטראס: תהא $f \in C([a, b])$ אזי קיימת $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורה $p_n \xrightarrow{u} f$.

הגדרה: תהא $f \in C([0, 1])$ אזי $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f \in C([0, 1])$ אזי $B_n \xrightarrow{u} f$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ ויהי $r < |q|$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|, |r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס} & x \in (-R, R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R, R] \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0, \infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right) = 0 \right) \Rightarrow (R = \infty) \right) \wedge \left(\left(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right) = \infty \right) \Rightarrow (R = 0) \right)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ הינו R) \Leftrightarrow (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f$ עם רדיוס R אזי $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = f'(x)$ על $(-R, R)$.

משפט: יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f$ עם רדיוס R ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k = f^{(m)}(x)$ על $(-R, R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f$ עם רדיוס R אזי $P(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ על $(-R, R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב- R אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0, R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב- $-R$ אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R, 0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב- R אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[0, R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב- $-R$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[-R, 0]$.

מסקנה: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < 0$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $(\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1})$ מתכנס ב- R \Leftrightarrow $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)$ מתכנס ב- R .

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $(\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1})$ מתכנס ב- $-R$ \Leftrightarrow $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k)$ מתכנס ב- $-R$.

סכים לפי אבל: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ (A).

התכנסות צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n}$ (C).

סכים לפי צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i$ (C).

סימון: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ (C).

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$ (C).

משפט: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$ (A).

משפט טאובר: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho$ וכן $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho$.