(Ω,\mathbb{P}) מרחב הסתברות (מ"ה): תהא Ω קבוצה ותהא \mathbb{P} פונקציית הסתברות אזי Ω מרחב מדגם: יהי Ω,\mathbb{P} מרחב הסתברות אזי Ω $|\Omega| \leq \aleph_0$ עבורו (Ω, \mathbb{P}) מרחב הסתברות בדיד מרחב מרחב מרחב $|\Omega|\in\mathbb{N}$ עבורו (Ω,\mathbb{P}) מרחב הסתברות סופי מרחב מרחב מרחב הערה: בקורס זה כל מרחבי ההסתברות הינם בדידים. $.2^{A}=\mathcal{P}\left(A
ight) :$ סימון $\mathbb{P}\left(A
ight)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}\left(\omega
ight)$ אזי $A\subseteq\Omega$ מאורע: תהא $[n] = \{1, \dots, n\}$: סימוו A,B משפט: יהי מרחב הסתברות (Ω,\mathbb{P}) ומאורעות $\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}
ight)=1-\mathbb{P}\left(A
ight):$ משלים • $\mathbb{P}(A \uplus B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$: אדטיביות $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B \cap A) \bullet$ $(A \subseteq B) \implies (\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B))$: מונוטוניות $\mathbb{P}\left(A\cup B
ight)=\mathbb{P}\left(A
ight)+\mathbb{P}\left(B
ight)-\mathbb{P}\left(A\cap B
ight)$: הכלה והדחה $\mathbb{P}\left(\varnothing
ight)=0$ אזי אזי הסתברות פונקציית הסתברות מסקנה: תהא פונקציית מסקנה $\mathbb{P}\left(E
ight)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(E_{i}
ight)$ משפט סיגמא־אדטיביות: יהיו $E=\biguplus_{i=1}^{\infty}E_{i}$ מאורעות אזי ושפט $E=\biguplus_{i=1}^{\infty}E_{i}$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^{n}A_{i}
ight)=\sum_{\varnothing
eq I\subseteq[n]}\left(\left(-1
ight)^{|I|+1}\mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_{i}
ight)
ight)$ מאורעות אזי מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^{n}A_{i}
ight)=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(-1
ight)^{k+1}inom{n}{k}a_{k}
ight)$ אזי לו איזי לו הדחה סימטרית: נניח כי $\mathbb{P}\left(A_{I}
ight)=a_{k}$ הכלה והדחה סימטרית: נניח כי $.orall A\in 2^\Omega.\mathbb{P}\left(A
ight)=rac{|A|}{|\Omega|}$ עבורו (Ω,\mathbb{P}) עבורו מרחב הסתברות אחיד מרחב מרחב מרחב מרחב הסתברות אחיד מרחב הסתברות סופי S_n על אחיד המרחב האחיד על אקראי: המרחב האחיד על $\mathbb{P}\left(A\cup B
ight)\leq\mathbb{P}\left(A
ight)+\mathbb{P}\left(B
ight)$ משפט חסם האיחוד : יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^n A_i
ight) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(A_i
ight)$ מסקנה: יהיו $A_1 \dots A_n$ מסקנה $\mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^\infty A_i
ight) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}\left(A_i
ight)$ מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות אזי 1 < k < n אי שוויונות בונפרוני: יהיו $A_1 \dots A_n$ מאורעות ויהי . $\mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^{n}A_{i}
ight)\leq\sum_{i=1}^{k}\left(-1
ight)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_{i}
ight)$ אזי $k\in\mathbb{N}_{odd}$ • $\mathbb{P}\left(igcup_{i=1}^nA_i
ight)\geq\sum_{i=1}^k\left(-1
ight)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\|I|=k}}^{|I|=k}\mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_i
ight)$ אזי $k\in\mathbb{N}_{even}$ • משפט רציפות פונקציית ההסתברות: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ מאורעות $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \bullet$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\right) \bullet$ $h \in [m]^{[n]}: \mathbf{hash}$ פונקציית גיבוב $h\left(i
ight)=h\left(j
ight)$ עבורם i
eq j עבור גיבוב אזי פונקציית פונקציית גיבוב אזי ו $a.rac{n(n-1)}{2m} \geq \mathbb{P}\left($ התנגשות $a) \geq 1 - e^{-rac{n(n-1)}{2m}}$ פונקציית גיבוב אזי $a \in [m]^{[n]}$ פרדוקס יום ההולדת: תהא $R(t)=\min\left\{n\mid n$ מספר ראמזי: נגדיר $R:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך $R:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ בביעה של בשני צבעים יש $.2^{\frac{t-3}{2}} < R(t) \le c \cdot \frac{4^t}{\sqrt{t}}$:משפט

 $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}\left(\omega
ight)=1$ המקיימת $\mathbb{P}\in\left[0,1
ight]^{\Omega}$: פונקציית הסתברות נקודתית

```
\mathbb{P}\left(\omega\mid F
ight)=egin{cases} rac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(F)} & \omega\in F \\ 0 & else \end{cases}אזי אזי \mathbb{P}\left(F
ight)>0 מאורע המקיים מותנית: יהי
                                                                         . פונקציית הסתברות מותנית הינה פונקציית הסתברות.
                                (\Omega,\mathbb{P}\left(\cdot\mid F
ight)) אזי F\in 2^{\Omega} מרחב הסתברות ויהי (\Omega,\mathbb{P}
ight) אזי
                                                                                    טענה: מרחב הסתברות מותנית הוא מרחב הסתברות.
                                                                                 \mathbb{P}\left(E\mid F
ight)=rac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)} משפט יהיו E,F מאורעות אזי
                                                   \mathbb{P}\left(A\cap B
ight)=\mathbb{P}\left(A\mid B
ight)\mathbb{P}\left(B
ight) כלל השרשרת יהיו A,B מאורעות אזי
\mathbb{P}\left(igcap_{i=1}^nA_i
ight)=\mathbb{P}\left(A_1
ight)\prod_{i=2}^n\mathbb{P}\left(A_i\midigcap_{j=1}^{i-1}A_i
ight) מאורעות אזי A_1\ldots A_n מאורעות אזי A_1\ldots A_n
                          \mathbb{P}\left(B
ight)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(B\mid A_{i}
ight)\mathbb{P}\left(A_{i}
ight)אזי ללה: יהיו \left\{A_{i}
ight\}_{i=1}^{\infty} המקיימות \left\{A_{i}
ight\}_{i=1}^{\infty} אזי ללה: יהיו
                                                                       .\mathbb{P}\left(E\mid F\right)=\frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F\mid E)}{\mathbb{P}(F)} אזי מאורעות E,Fיהיי יהיי כלל בייס
 \mathbb{P}\left(\left(\cdot\mid B
ight)\mid C
ight)=\mathbb{P}\left(\cdot\mid B\cap C
ight)\mathbb{P}\left(C\mid B
ight) אזי \mathbb{P}\left(A
ight),\mathbb{P}\left(B
ight)>0 מאורעות עבורם A,B מאורעות עבורם
                         \mathbb{P}\left(B\mid A
ight)>\mathbb{P}\left(B
ight) המקיים \mathbb{P}\left(A
ight)>0 מאורע אזי מאורע אזי מאורע אזי מאורע מחזק: יהי
                               \mathbb{P}\left(A\cap B
ight)=\mathbb{P}\left(A
ight)\mathbb{P}\left(B
ight) המקיימים A,B האורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות
                                                                                                                                     AB = A \cap B : סימון
                                                            Aטענה : יהי A מאורע אזי (A ב"ת עם עצמו) שנה A טענה : יהי A
                                                    A,B טענה יהיו A,B מאורעות זרים וב"ת אזי (\mathbb{P}\left(A
ight)=0) טענה
                                                                                                                  oldsymbol{u}טענה: יהיו A,B מאורעות התב"ש
                                                                                                                                .בלתי תלויים A, B
                                                                                                                              . בלתי תלויים A^{\mathcal{C}}, B
                                                                                                                            . בלתי תלויים A^{\mathcal{C}}. B^{\mathcal{C}}
                                                                                                                              .בלתי תלויים A.B^{\mathcal{C}}
                                \forall i 
eq j. \mathbb{P}\left(A_i A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_i\right) \mathbb{P}\left(A_i\right) אי תלות בזוגות: מאורעות A_1 \dots A_n המקיימים
                                  .orall i 
eq j.\mathbb{P}\left(A_iA_j
ight) = \mathbb{P}\left(A_i
ight)\mathbb{P}\left(A_j
ight) המקיימים \left\{A_i
ight\}_{i\in I} אי תלות בזוגות מאורעות
  .orall I\subseteq [n]\,.\mathbb{P}\left(igcap_{i\in I}A_i
ight)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}\left(A_i
ight) מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות המקיימים A_1\ldots A_n מאורעות
       A_i: A_i \subseteq I. (|J| \in \mathbb{N}_+) \implies \left(\mathbb{P}\left(igcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}\left(A_i\right)
ight) המקיימים \left\{A_i
ight\}_{i \in I} המללה מאורעות
                                                                                            A^1=A \wedge (A^{-1}=A^{\mathcal{C}}) הערה: נסמן זמנית
                          A_1 \dots A_nטענה: (\forall arepsilon \in \{\pm 1\}^n . \mathbb{P}\left(igcap_{i=1}^n A_i^{arepsilon_i}
ight) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}\left(A_i^{arepsilon_i}
ight)) \iff (טענה: A_1 \dots A_n
          \mathbb{P}_{\Omega_1 	imes \Omega_2}\left((\omega_1,\omega_2)
ight) = \mathbb{P}_1\left(\omega_1
ight)\mathbb{P}_2\left(\omega_2
ight) מ"ה אזי \left(\Omega_1,\mathbb{P}_1
ight), \left(\Omega_2,\mathbb{P}_2
ight) יהיו מכפלה: יהיו
                                                                          טענה: פונקציית הסתברות מכפלה היא פונקציית הסתברות.
               (\Omega_1,\mathbb{P}_1)\otimes (\Omega_2,\mathbb{P}_2)=(\Omega_1	imes\Omega_2,\mathbb{P}_{\Omega_1	imes\Omega_2}) מייה אזי \left(\Omega_1,\mathbb{P}_1
ight),\left(\Omega_2,\mathbb{P}_2
ight) מרחב מכפלה: יהיו
                                                                                                      טענה: מרחב מכפלה הוא מרחב הסתברות.
                                              . טענה איי igotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathbb{P}_i) מ"ה איי מ"ה (\Omega_1, \mathbb{P}_1) \dots (\Omega_n, \mathbb{P}_n) מרחב הסתברות יהיי
                                                  .\exists A\subset\Omega_1.\exists B\subset\Omega_2.C=A\times B מלבן: מאורע C\subset\Omega_1\times\Omega_2 המקיים
                                                    \mathbb{P}\left(A \times B\right) = \mathbb{P}_1\left(A\right)\mathbb{P}_2\left(B\right) טענה : יהי A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 מלבן אזי
      \overline{A}=\Omega_1	imes\ldots	imes\Omega_{i-1}	imes A	imes\Omega_{i+1}	imes\ldots	imes\Omega_n אזי A\subseteq\Omega_i מ"ה ויהי מigotimes_{i-1}^n(\Omega_i,\mathbb{P}_i) יהי יהי
```

```
.igotimes_{i-1}^n(\Omega_i,\mathbb{P}_i) ב"ת מעל \overline{A},\overline{B} אזי B\subseteq\Omega_i ויהי A\subseteq\Omega_i יהי מסקנה: יהי
                                                                                                                      \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}_i(A) אזי A \subseteq \Omega_i טענה: יהי
                                                                                                                   \mathbb{P}\left(\left(\omega_{1}\ldots\omega_{n}
ight)
ight)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_{i}\left(\omega_{i}
ight):מסקנה
                                                          A_1 \ldots \overline{A_n} אזי \forall i \in [n] . A_i \subseteq \Omega_i משפט: יהיו אזי A_1 \ldots A_n משפט: יהיו
\mathbb{P}(A\cap B\mid C)=\mathbb{P}(A\mid C)\,\mathbb{P}(B\mid C) עבורם A,B אזי מאורעות \mathbb{P}(C)>0 אזי יהי בהתנייה בהתנייה בלתי תלויים בהתנייה אורעות
             \bigotimes_{i=1}^n\left(\left\{0,1
ight\},f
ight) אזי אזי f\left(k
ight)=egin{cases} p & k=1 \ 1-p & k=0 \end{cases} כך כך f\in[0,1]^{\left\{0,1
ight\}} אזי 0\leq p\leq 1 אזי n . \left(M_n-\log_{\frac{1}{p}}\left(n
ight)
ight)	o 0 אזי M_n=n אזי M_n=n ביותר של 1 ביn ניסויי ברנולי"
           A_{i,j} = egin{cases} 1 & \{i,j\} \in E \\ 0 & else \end{cases} המקיים A \in M_{|V|}\left(\{0,1\}\right) אזי מטריצת שכנויות יהי יהי G = (V,E) גרף לא מכוון אזי
                                                                  .\Big\{(A_{i,j})_{1\leq i< j\leq n}\mid A_{i,j}\in\{0,1\}\Big\} אזי n\in\mathbb{N} אזי היים על n
                            \mathbb{P}\left(\{\omega\in\mathbb{C}, 1\} \mid \omega_{i,j}=1\}\right)=p אזי p\in[0,1] יהי יהי ויהי בהתסברות p יהי יהי ויהי ויהי אזי p\in[0,1]
              G(n,p)=(n,p) ויהי n\in\mathbb{N} ויהי n\in\mathbb{N} אזי הימצאות קשת בהתסברות n\in\mathbb{N} גרף מקרי: יהי
                                                                                    \mathbb{P}\left(\omega
ight)=p^{|E_{\omega}|}\cdot(1-p)^{inom{n}{2}-|E_{\omega}|}טענה : יהי\omega\in G\left(n,p
ight) אזי
                                                                                                                        מסקנה: גרף מקרי הינו מרחב הסתברות.
                                                                                       f \in \Omega 	o S משתנה מקרי (מ"מ): יהי (\Omega, \mathbb{P}) מ"ה בדיד אזי
                                                                                                 \mathbb{P}\left(X=s
ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\left\{s
ight\}
ight)
ight) אזי מ"מ אזי מי"מ אזי
                                                  \mathbb{1}_{A}\left(\omega
ight)=egin{cases}1&\omega\in A\0&else\end{cases} המוגדר \mathbb{1}_{A}\in\left\{ 0,1
ight\} ^{\Omega} מאורע אזי A\subseteq\Omega המוגדר A\subseteq\Omega
                                                                                                     .(\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}) \wedge (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \uplus B}):טענה
                                      . supp (f)=\{s\in S\mid f\left(s\right)\neq 0\} אזי f:S	o\mathbb{R} התמך: תהא f:S	o\mathbb{R} אזי \mu:S	o\{0,1\} המקיימת \mu:S	o\{0,1\} התפלגות בדידה \mu:S	o\{0,1\}
                            \mu_X(s)=\mathbb{P}\left(X=s
ight) המוגדרת \mu:\operatorname{Im}\left(X
ight)
ightarrow \left[0,1
ight] התפלגות של משתנה מקריX יהי
                                                                                            טענה: ההתפלגות של משתנה מקרית היא התפלגות בדידה.
                                                                                                           .supp (X) = \text{supp}(\mu_X) סימון: יהי X מ"מ אזי
                                                                .orall \omega \in \Omega.X\left(\omega
ight)=Y\left(\omega
ight) משתנים מקריים שווים: X,Y\in S^{\Omega}
                           . orall s \in S. \mu_X\left(s
ight) = \mu_Y\left(s
ight)משתנים מקריים שווי התפלגות מ"מ עם אותה תמונה המקיימים X,Y:
                                                                                                       X\sim Y סימון: יהיו X,Y מ"מ שווי התפלגות אזי
                                  \mu\left(k
ight)=egin{cases} rac{1}{b-a+1} & {}_{k\in[a,b]\cap\mathbb{Z}} \ & nהתפלגות אחידה בדידה : יהיו a,b\in\mathbb{Z} אזי a,b\in\mathbb{Z} התפלגות אחידה בדידה ויהיו
                                                                              X \sim \mathrm{Uni}\left(a,b
ight) סימוןX \sim \mathrm{Uni}\left(a,b
ight) מתפלג אחיד בדיד אזי
                                                    -\left(\mu=egin{cases} x_1 & p_1 \ dots & dots \end{cases}
ight)\equiv\left(\mu\left(k
ight)=egin{cases} p_i & k=x_i \ 0 & else \end{cases}
ight)ימון: תהא \mu התפלגות אזי
```

```
\mu = egin{cases} 1 & p \ 0 & 1-p \end{cases}התפלגות ברנולי\mu \in [0,1]^{\{0,1\}} אזי p \in [0,1] התפלגות ברנולי
                                                                                    X\sim \mathrm{Ber}\left(p
ight) יהי אזי מ"מ עבורו \mu_{X} מתפלג ברנולי אזי אזי יהי X
                                              \mu\left(k
ight)=\left(1-p
ight)^{k-1}p המקיימת \mu\in\left[0,1
ight]^{\mathbb{N}_{+}} אזי p\in\left[0,1
ight] התפלגות גאומטרית: יהי
                                                                             X\sim \mathrm{Geo}\left(p
ight) יהי אזי מתפלג אומטרית מתפלג מ"מ עבורו עבורו \mu_X
                           \mu\left(k
ight)=inom{n}{k}p^{k}\left(1-p
ight)^{n-k} המפלגות בינומית: יהי p\in\left[0,1
ight]^{\mathbb{N}} ויהי ויהי p\in\left[0,1
ight] אזי p\in\left[0,1
ight]
                                                                             X\sim \mathrm{Bin}\left(n,p
ight) אזי בינומית מתפלג בינומית מ"מ עבורו \mu_X מתפלג מ"מ יהי
                                                                       \mu(k) = rac{\lambda^k}{h!}e^{-\lambda} המקיים \mu \in [0,1]^{\mathbb{N}} אזי \lambda > 0 התפלגות פואסון: יהי
                                                                              X\sim \mathrm{Pois}\left(\lambda
ight) יהי מים מעבורו מתפלג פואסונית מ"מ עבורו מ"מ מים יהי אזי מ"מ
                                      \lim_{n	o\infty}\mu_{\mathrm{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{2}
ight)}\left(k
ight)=\mu_{\mathrm{Pois}(\lambda)}\left(k
ight) אזי \lambda>0 ויהי ויהי k\in\mathbb{N} משפט קירוב בינום פואסון: יהי
                                            \mu(k)=rac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}} המקיים \mu\in[0,1]^{\mathbb{N}} אזי r,n,m\in\mathbb{N} המקיים \mu\in[0,1]^{\mathbb{N}} התפלגות היפרגאומטרית מ"מ עבורו \mu_X מתפלג היפרגאומטרית אזי \mu_X מתפלג היפרגאומטרית איזי \mu_X
                 \mu\left(k
ight)=inom{k-1}{r-1}p^r\left(1-p
ight)^{k-r} התפלגות בינומית שלילית: יהיp\in\left[0,1
ight]^{\mathbb{N}} אזי וכן p\in\left[0,1
ight] אזי
                                                                   X \sim \mathrm{NB}\left(r,p
ight) אזי שלילית מתפלג בינומית מתפלג בינומית עבורו \mu_X מתפלג מ"מ X
                             \mu\left(x
ight)=rac{\binom{x-1}{k-1}\binom{m-x}{r-k}}{\binom{m}{r}} המקיים \mu\in\left[0,1
ight]^{\mathbb{N}} התפלגות היפרגאומטרית שלילית: יהיו x,k,m\in\mathbb{N} אזי r,k,m\in\mathbb{N} המקיים \mu\in\left[0,1
ight]^{\mathbb{N}} המים \mu מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי \mu מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי \mu מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי \mu
                                                 X \in A^{\Omega}טרנספורמציה של משתנה מקריX \in A^{\Omega} ותהא אזיX \in A^{\Omega} טרנספורמציה של משתנה מקרי
                                                                   .\mu_{f\left(X
ight)}\left(k
ight)=\sum_{r\in f^{-1}\left(\left\{k
ight\}
ight)}\mu_{X}\left(r
ight)אזי f\in B^{A} אינ משפט יהי X משפט יהי להי
                                                                     \operatorname{supp}\left(f\left(X\right)\right)=f\left(\operatorname{supp}\left(X\right)\right) אזי f\in B^{A} מסקנה: יהי X מ"מ ויהי
                                                X:\Omega 	o A וכן אזיY:\Omega 	o B משתנים מקריים אזיX:\Omega 	o A וכן
                                                        \mu_{X,Y}\left(x,y
ight)=\mathbb{P}\left(X=x,Y=y
ight) זוג מ"מ אזי \left(X,Y
ight) זוג מיימ אזי התפלגות משותפת: יהי
                                              \mu_{X_1\dots X_n}\left(x_1\dots x_n
ight)=\mathbb{P}\left(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n
ight)הכללה: יהיו X_1\dots X_n מ"מ אזי
                                                                                                \mu_X, \mu_Y זוג מ"מ אזי (X,Y) זוג מוליות: התפלגויות שוליות:
                                                                                                                      .\mu_{X}\left(x
ight)=\sum_{y\in S}\mu_{X,Y}\left(x,y
ight):טענה
                                                                      \mu_{XY} = \mu_X \mu_Y אוג מ"מ עבורו (X,Y): משתנים מקריים בלתי תלויים
                                                                                \mu_{X_1\dots X_n}=\mu_{X_1}\cdot\ldots\cdot\mu_{X_n} מ"מ המקיימים X_1\dots X_n : הכללה
                                           i 
eq j ב"ת לכל בלתי מקריים מקריים מקריים בזוגות: X_i : X_i : X_i משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות
                                            . מאורעות ב"ת. \{X_i \in E_i\} מאורעות ב"ת קבוצות הייו משפט ב"ת מ"מ ב"ת ויהיו משפט מ"מ ב"ת ויהיו
                                                 f\left(X
ight),q\left(Y
ight) מ"מ אזי f\left(X
ight),q\left(Y
ight) ב"ת ויהיו ב"ת ויהיו למשפט משפט ב"ת ויהיו
                                                                               \mathbb{1}_{A_1}\dots\mathbb{1}_{A_n} מ"מ ב"ת) משפט A_1\dots A_n משפט מאורעות ב"ת) משפט
.(\mu_1*\mu_2)\,(z)=\sum_x\mu_1\,(x)\,\mu_2\,(z-x) קונבולוציה : יהיו \mu_1,\mu_2 התפלגויות אזי
                                                                                               \mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1 טענה: יהיו \mu_1, \mu_2 התפלגויות אזי
                                                                                                 \mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y מ"מ ב"ת אזי אזי איני X, Y מיני יהיו
                                                                                                 \operatorname{Bin}(n,p)+\operatorname{Bin}(m,p)\sim\operatorname{Bin}(n+m,p):טענה
                                                                                                                      .\operatorname{Bin}\left(n,p\right) \sim \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ber}\left(p\right) :מסקנה
```

```
.NB (n,p) \sim \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Geo}(p) : טענה
                                                                                           X_{\restriction_A} משתנה מקרי מותנה: יהי A מאורע ויהי מקרי מותנה:
                                                                                               \mu_{X_{\mathbb{N}_A}} יהי מ"מ מ"מ מאורע ויהי א מאורע יהי התפלגות מותנית: יהי
                                                                                                   .\mu_{X_{
estriction_{Y=y}}}\left(x
ight)=rac{\mu_{X,Y}\left(x,y
ight)}{\mu_{Y}\left(y
ight)}טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                                                                                            .\mu_{X_{\restriction_Y}}(x\mid y)=\mu_{X_{\restriction_{Y=y}}}(x) מ"מ אזי X,Y מינוו: יהיו
                             \mu\left(k_1\dots k_n
ight)=inom{n}{k_1\dots k_n}\prod_{i=1}^n p_i^{k_i} התפלגות מולטינומית: יהיו p_1\dots p_n אזי \mu\in[0,1]^{\mathbb{N}^n} אזי
                                                                F_{X}\left(x
ight)=\mathbb{P}\left(X\leq x
ight) כך כך F_{X}:\left[0,1
ight]^{\mathbb{R}} מ"מ אזי X מ"מ אזי התפלגות מצטברתF_{X}:\left[0,1
ight]
                                                                                                                                                      טענה: יהי X מ"מ
                                                                                                                                         . מונוטונית עולה F_X
                                                                                                                                       \lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1 •
                                                                                                                                     .\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0 \bullet
                                                                    \mu_{X}\left(s\right)=F_{X}\left(s\right)-\lim_{arepsilon
ightarrow0^{+}}F_{X}\left(s-arepsilon
ight)אזי s\in\operatorname{supp}\left(X\right) יהי
                                                                                      .\lambda_{X}\left(t
ight)=1-F_{X}\left(t
ight) מ"מ אזי X מ"ה ההישרדות: יהי מוקציית ההישרדות:
                                                                                       .Geo (1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)) \sim \min_{i=1}^{n} \{\text{Geo}(p_i)\} : מסקנה
                                               X_{1} \times Y_{N-n} \sim \mathrm{Bin}\left(n,p\right) וכן X+Y \sim \mathrm{Poiss}\left(\lambda\right) מ"מ עבורם X,Y וכן יהיו
                                                                                                                            .Y_{\mid X+Y=n} \sim \operatorname{Bin}(n,1-p) \bullet
                                                                                                                                            X \sim \text{Poiss}(p\lambda) \bullet
                                                                                                                                  Y \sim \text{Poiss}((1-p)\lambda) \bullet
                                           \mu:[0,1]^{S^2} צימוד בין התפלגויות\mu:[0,1]^S יהיו \mu_1,\mu_2:[0,1]^S התפלגויות אזי התפלגויות
                                                                                       .(\mu_1(\omega) = \sum_{s \in S} \mu(\omega, s)) \wedge (\mu_2(\omega) = \sum_{s \in S} \mu(s, \omega))
                                        X(X'\sim X) \wedge (Y'\sim Y) בימוד בין משתנים : יהיו X,Y מ"מ אזי זוג מ"מ (X',Y') המקיים
                                                     טענה : יהי X מ"מ על \Omega_1 \otimes \Omega_2 ויהי Y מ"מ על \Omega_2 נגדיר X',Y' מ"מ ב"ת על \Omega_1 \otimes \Omega_1 כך
                                                   (X',Y') אזי (X'(\omega_1,\omega_2)=X(\omega_1))\wedge (Y'(\omega_1,\omega_2)=Y(\omega_2))
                                            \mathbb{P}\left(X>t
ight)>\mathbb{P}\left(Y>t
ight) התפלגות שולטת סטוכסטית: יהי X מ"מ אזי מ"מ Y המקיים
                                                         \mathbb{P}\left(Y'>X'
ight)=0 צימוד מונוטוני: יהיו X,Y מ"מ אזי צימוד מימ מאזי צימוד מונוטוני
                                           . טענה אזי קיים איים בעל התפלגות שולטת סטוכסטית בהתפלגות איי קיים איים מונוטוני. מ"מ בעל התפלגות שולטת סטוכסטית בהתפלגות איים בעל התפלגות שולטת סטוכסטית בהתפלגות איי
      \delta\left(\mu,v
ight)=\sum_{x\in S}\left|\mu\left(x
ight)-v\left(x
ight)
ight| התפלגויות אזי \mu,v:\left[0,1
ight]^{S} ויהיו וויהיו איזי והשתנות הכוללת: תהא
                                                                                                          למה: מטריקת ההשתנות הכוללת הינה מטריקה.
                                                                                                   \delta\left(X,Y
ight)=\delta\left(\mu_{X},\mu_{Y}
ight) אזי מ"מ אזי X,Y סימון: יהיו
                                                         \delta\left(X,Y
ight)=2\sup_{E\subset S}\left|\mathbb{P}\left(X\in E
ight)-\mathbb{P}\left(Y\in E
ight)
ight|טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                                         \delta\left(X,Y
ight)=\delta\left(X',Y'
ight)\leq2\mathbb{P}\left(X'
eq Y'
ight) צימוד אזי \left(X',Y'
ight) צימוד איזי איזי איזי איזי מ"מ ויהי מ"מ ויהי
                                             \delta\left(\sum_{i=1}^n X_i,\sum_{i=n+1}^{2n} X_i
ight) \leq 2\sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(X_i 
eq Y_i
ight)מסקנה : יהיו אזי מ"מ אזי אזי מ"מ אזי
\delta\left(\sum_{i=1}^n X_i, T
ight) \leq 2\sum_{i=1}^n p_i^2 אזי איזי T \sim \mathrm{Pois}\left(\sum_{i=1}^n p_i
ight)מ"מ ויהי \{X_i \sim \mathrm{Ber}\left(p_i
ight)\}_{i=1}^n יהיו המספרים הקטנים: יהיו
             -\left(\mathbb{P}\left(X\geq m
ight)\geqrac{1}{2}
ight)\wedge\left(\mathbb{P}\left(X\leq m
ight)\geqrac{1}{2}
ight) המקיים m\in\mathrm{supp}\left(X
ight) היים אזי מ"מ אזי מ"מ אזי חציון של משתנה מקרי
                                                                      . מתכנס בהחלט משתנה בעל תוחלת מ"מ עבורו\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)\mathbb{P}\left(\omega\right) מתכנס בהחלט משתנה
```

.Pois (λ_1) + Pois (λ_2) ~ Pois $(\lambda_1 + \lambda_2)$: טענה

```
\mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{\omega \in \Omega} X\left(\omega
ight) \mathbb{P}\left(\omega
ight) אזי תוחלת מ"מ בעל תוחלת מ"מ בעל תוחלת אזי מ"מ בעל תוחלת מ"מ בעל תוחלת אזי
                                                                                                                                  c\in\mathbb{R} למה: יהיו X,Y מ"מ ויהי
                                                                                                                           \mathbb{E}\left[cX\right]=c\mathbb{E}\left[X\right]:הומוגניות •
                                                                                                       \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] : חיבוריות
                                                                                            (X \leq Y) \implies (\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]) מונוטוניות:
                                                                           \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i
ight] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[X_i
ight]מסקנה : יהיו X_1 \dots X_n מים מים אזי
                                                                                        \mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{s \in \mathsf{supp}(X)} s \cdot \mu_X\left(s
ight)משפט : יהי X מ"מ אזי
                                                                                                                                                           טענה: יהיX מ"מ
                                                                                                 (X \sim \operatorname{Uni}(0,\ldots,n)) \implies (\mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}) \bullet
                                                                                                                (X \sim \operatorname{Ber}(p)) \implies (\mathbb{E}[X] = p) \bullet
                                                                                                        (X \sim \text{Bin}(n, p)) \implies (\mathbb{E}[X] = np) \bullet
                                                                                                  \begin{array}{ccc} .(X \sim \operatorname{Geo}\left(p\right)) \implies \left(\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{1}{p}\right) & \\ .(X \sim \operatorname{HG}\left(n, m, r\right)) \implies \left(\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{nr}{m}\right) & \\ \end{array}
                                                                                                              (X \sim \text{Pois}(\lambda)) \implies (\mathbb{E}[X] = \lambda) \bullet
                                     \mathbb{E}\left[f\left(X
ight)
ight] = \sum_{s \in \mathrm{supp}(X)} f\left(s
ight) \mu_X\left(s
ight)משפט : יהי X מ"מ ותהא f טרנספורמציה אזי
                                             \mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(X \geq n
ight) אזי אוי (X \geq n נוסחאת הזנב: יהי
                                                                                       \mathbb{E}\left[XY
ight]=\mathbb{E}\left[X
ight]\mathbb{E}\left[Y
ight]משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי
                                       \mathbb{E}\left[X\mid A
ight]=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega
ight)\mathbb{P}\left(\omega\mid A
ight) תוחלת מותנית : יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי
                                                                                    \mathbb{E}\left[X\mid A
ight]=rac{\mathbb{E}\left[X\cdot\mathbb{I}_{A}
ight]}{\mathbb{P}(A)}טענה : יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי
                                                                                           \mathbb{E}\left[X\mid A
ight]=\mathbb{E}\left[X
ight]מסקנה : יהיו X,\mathbb{1}_A מ"מ ב"ת אזי
\mathbb{E}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[X\mid A
ight]\mathbb{P}\left(A
ight)+\mathbb{E}\left[X\mid A^{\mathcal{C}}
ight]\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}
ight)נוסחאת התוחלת השלמה: יהיX מ"מ ויהי
              \mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[X\mid A_i
ight]\mathbb{P}\left(A_i
ight) ויהי X מ"מ אזי ויהי H_{i=1}^{\infty}A_i = \Omega המקיימות \{A_i\}_{i=1}^{\infty}
                     \mathbb{E}\left[X\mid Y
ight](\omega)=\mathbb{E}\left[X\mid Y=Y\left(\omega
ight)
ight]מ"מ אזי X,Y מ"מ הירו במשתנה במשתנה במשתנה: יהיו
                                                                \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X\mid Y
ight]
ight]=\mathbb{E}\left[X
ight]משפט/נוסחאת ההחלקה: יהיו X,Y מ"מ אזי
                              \mathbb{E}\left[X\cdot g\left(Y
ight)\mid Y
ight]=g\left(Y
ight)\cdot\mathbb{E}\left[X\mid Y
ight]טענה : יהיו X,Y מ"מ ותהא g טרנספורמציה אזי
                                                                                          \mathbb{E}\left[\left|X
ight|^k
ight]<\infty משתנה בעל מומנט k : מ"מ משתנה בעל מומנט
                                                                                                        ec{X} \in \ell^k סימון: יהיX משתנה בעל מומנט אוייX אזי
                                                                                                                             \mathbb{E}\left[X^k
ight] אזי X\in\ell^k מומנט k: יהי
                                                                                                                        \ell^k \subset \ell^m אזיm < k \in \mathbb{N} טענה: יהיו
                                                    |\mathbb{E}\left[XY
ight]| \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2
ight]}\sqrt{\mathbb{E}\left[Y^2
ight]} אי שיוויון קושי שוורץ : יהיו
                                                                                                              \mathbb{E}\left[X
ight]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2
ight]אזי X \in \ell^2 מסקנה: יהי
                                                                                          .\operatorname{Var}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)^{2}
ight] אזי X\in\ell^{2} שונות: יהי
                                                                                             .\operatorname{Var}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[X^2
ight]-\mathbb{E}\left[X
ight]^2טענה: יהיX\in\ell^2 אזי
                                                                                                        .\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var}\left[X
ight]} אזיX \in \ell^2 סטיית תקן: יהי
                                                                                    \exists c. \mathbb{P} \left( X = c \right) = 1 משתנה דטרמיניסטי: מ"מ
                                                                                                                                      למה: יהי X \in \ell^2 יהי : למה
```

. טענה אזי X בעל תוחלת משתנה על מ"ה סופי אזי X

```
.Var [X] > 0 •
```

$$(\operatorname{Var}[X] = 0) \iff$$
 (אדטרמיניסטי X) •

$$.Var[aX] = a^2Var[X] \bullet$$

$$\operatorname{Var}[X+a] = \operatorname{Var}[X] \bullet$$

$$\mathbb{E}\left[\left(X-a
ight)^2
ight]$$
אזי $X\in\ell^2$ איזי: יהי

 $\mathbb{E}\left[X
ight]$ אזי המינימום של פונקציית ההפסד מתקבלת בערך אזי המינימום משפט יהי $X\in\ell^2$ יהי

 $\mathbb{E}\left[|X-a|
ight]$ מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה אזי הערך עבורו חציון: יהי

.Median (X) סימון: יהי X מ"מ אזי החציון הוא

.max |X-a| יהי : Range Mid ערך אמצעי: פונקציה מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל יהי יהי יהי יהי יהי אוי אוי יהי

 $\mathsf{MR}\left(X
ight)$ מ"מ אזי הערך האמצעי הוא מ"מ מ"מ סימון: יהי

 $\mathbb{P}\left(X
eq a
ight)$ מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה מ"מ מ"מ מ"מ שכיח: יהי

 $\operatorname{Mode}\left(X\right)$ סימון: יהי X מ"מ אזי השכיח הוא

 $\mathbb{E}[X,Y]=\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ מ"מ אזיX,Y מ"מ אזיX,Y שונות משותפת: יהיו

.
Var
$$[X+Y]=\operatorname{Var}\left[X\right]+2\operatorname{Cov}\left[X,Y\right]+\operatorname{Var}\left[Y\right]$$
 משפט

.
$$\operatorname{Cov}\left[X,Y\right]=\mathbb{E}\left[\left(X-\mathbb{E}\left[X\right]\right)\left(Y-\mathbb{E}\left[Y\right]\right)
ight]$$
 : טענה

 $\operatorname{Cov}\left[X,Y
ight]=0$ משתנים בלתי מתואמים X,Y:

משפט: יהיו X,Y ב"ת אזי X,Y בלתי מתואמים.

. $\operatorname{Var}\left[X+Y\right]=\operatorname{Var}\left[X\right]+\operatorname{Var}\left[Y\right]$ מסקנה: יהיו X,Y בלתי מתואמים אזי

למה: יהיו X,Y,Z מ"מ ויהיו למה:

$$.Cov[X, X] = Var[X] \bullet$$

.
$$\operatorname{Cov}\left[X,Y\right]=\operatorname{Cov}\left[Y,X\right]:$$
סימטריות •

.
Cov
$$[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha \text{Cov}\left[X, Z\right] + \beta \text{Cov}\left[Y, Z\right]$$
 : ביילינאריות

.
Cov
$$[X+\alpha,Y]=\mathrm{Cov}\,[X,Y]$$
: סקלר להוספת אינווריאנטיות •

$$|\operatorname{Cov}[X,Y]| \le \sqrt{\operatorname{Var}[X]} \sqrt{\operatorname{Var}[Y]} \bullet$$

$$|\operatorname{Cov}\left[X,Y
ight]| \leq \sqrt{\operatorname{Var}\left[X
ight]}\sqrt{\operatorname{Var}\left[Y
ight]}$$
י מקדם המתאם : יהיו X,Y מ"מ אזי X,Y מ"מ אזי X,Y

למה: יהיו X,Y מ"מ ויהיו למה:

$$|\rho_{X,Y}| \leq 1 \bullet$$

$$(
ho_{X,Y}=0)\iff$$
בלתי מתואמים) א בלתי בלתי בלתי

$$(\rho_{X,Y} = \pm 1) \iff (Y = aX + b) \bullet$$

למה: יהי X מ"מ

.
$$\operatorname{Var}\left[X
ight] = rac{n^2-1}{12}$$
 אזי $X \sim \operatorname{Uni}\left([n]
ight)$ •

.
Var
$$(X)=np\left(1-p\right)$$
 אזי $X\sim \mathrm{Bin}\left(n,p\right)$ •

.
$$\operatorname{Var}\left(X\right)=\lambda$$
 אזי $X\sim\operatorname{Pois}\left(\lambda\right)$ •

.
$$\operatorname{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$
 אזי $X \sim \operatorname{Geo}(p)$

 $.g_{X}\left(t
ight)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{X}\left(n
ight)t^{n}$ אזי אויף אור מ"מ עבורו מ"מ עבורו מ"מ עבורו

טענה: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת

 $|t| \leq 1$ מתכנס עבור $g_X(t)$

```
.q_X \in C^{\infty}((-1,1)) •
```

. יהי t^X מ"מ בעל תוחלת $t \in [-1,1]$ יהי

 $g_{X}\left(t
ight)=\mathbb{E}\left[t^{X}
ight]$ יהי משפט בעל פונקציה יוצרת משפט מ"מ בעל מ"מ משפט

למה: יהיו X,Y מ"מ ב"ת בעלי פונקציה יוצרת

$$.\mu_X(n) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!} \bullet$$

$$.g_{X+Y} = g_X \cdot g_Y \bullet$$

$$\lim_{t\to 1^{-}} g_X(t) = g_X(1) = 1$$
 •

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1}\left(X-i
ight)
ight]=\lim_{t
ightarrow1^{-}}g_{X}^{(k)}\left(t
ight)$$
אזי אזי איז פניח כי X בעל מומנט א

מסקנה: יהי $X \in \ell^2$ בעל פונקציה יוצרת

$$.\mathbb{E}\left[X\right] = \lim_{t \to 1^{-}} g_{X}'\left(t\right) \bullet$$

.Var
$$[X] = \lim_{t \to 1^{-}} (g''_X(t) + g'_X(t) - (g'_X(t))^2)$$
 •

 $M_{X}\left(t
ight)=\mathbb{E}\left[e^{tX}
ight]$ פונקציה יוצרת מומנטים : יהי X מ"מ אזי

$$M_{X}\left(t
ight)=\left(1-p+pe^{t}
ight)^{n}$$
 אזי $X\sim\operatorname{Bin}\left(n,p
ight)$ יטענה: יהי

למה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת

$$.M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y \bullet$$

$$M_{X}^{\left(n
ight)}\left(0
ight)=\mathbb{E}\left[X^{n}
ight]$$
אזי $M_{X}\in C^{n}\left(I
ight)$ וכן $0\in I$ אזי יהי I

$$M_{X}\left(t
ight)=\sum_{n=0}^{\infty}rac{\mathbb{E}\left[X^{n}
ight]}{n!}t^{n}$$
 אזי $M_{X}\in C^{\infty}\left(I
ight)$ וכן $0\in I$ מסקנה: יהי

$$\mathbb{P}(X\geq t)\leq rac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(t)}$$
 אזי בעל תוחלת אזי $f\in [0,\infty)^{\mathbb{R}}$ מסקנה בעל תוחלת אזי $f\in [0,\infty)$

$$\mathbb{R}^{(a)}(|X-\mathbb{E}\left[X
ight]|\geq b)\leq rac{ ext{Var}[X]}{b^2}$$
איישוויון צ'בישב : יהי $X\in\ell^2$ ויהי ויהי $b>0$ אזי

$$\mu = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i
ight]$$
 סימון : יהיו $X_1 \dots X_n$ מ"מ אזי

 $\mathbb{P}\left(|\sum_{i=1}^n X_i - n\mu| \geq b
ight) \leq rac{n\sigma_1^2}{b^2}$ אזי μ אזי מתואמים בזוגות עם תוחלת משותפת א אזי $X_1 \sim \ldots \sim X_n$ טענה יהיו

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq (1+t)\,\mu
ight) \leq \exp\left(-rac{t^2}{2+t}\mu
ight)$$
 אזי $\left\{X_i \sim \mathrm{Ber}\left(p_i
ight)
ight\}_{i=1}^n$ אישוויון צ'רנוף: יהיו

$$\mathbb{P}\left(X\geq a
ight)\leq rac{M_X(s)}{e^{sa}}$$
 אזי $s\in\mathbb{R}$ מ"מ ויהי X מ"מ ויהי הכללה יהי

 $. \forall x,y \in I. \forall \lambda \in \left[0,1
ight]. arphi\left(\lambda x + \left(1-\lambda
ight)y
ight) \leq \lambda arphi\left(x
ight) + \left(1-\lambda
ight)arphi\left(y
ight)$ בונקציה קמורה: יהי I קטע אזי $arphi \in \mathbb{R}^{I}$ עבורה

 $rac{d}{dy}\cdot rac{d}{y-x} \leq rac{d}{y-x}$ אזי x < y < z אויהיו $arphi \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ שענה הא

 $arphi \in C\left((a,b)
ight)$ מסקנה : תהא $arphi \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי

 $.(arphi\left(x_{0}
ight)=ax_{0}+b)\wedge(orall x\in I.arphi\left(x
ight)\geq ax+b)$ עבורם $a,b\in\mathbb{R}$ אזי קיימים עבורה ותהא $x_{0}\in\mathbb{R}$ אזי קיימים למה

 $.arphi\left(\mathbb{E}\left[X
ight]
ight)\leq\mathbb{E}\left[arphi\left(X
ight)
ight]$ בעל תוחלת אזי $arphi\left(X
ight)$ בעל תוחלת יהי אישוויון ינסן: יהי מים בעל תוחלת ותהא יהי $arphi\in\mathbb{R}^{I}$

$$rac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$
 אזי $a_1 \dots a_n > 0$ איישוויון הממוצעים יהיו

 $|\mathbb{E}\left[X
ight]|<\mathbb{E}\left[|X|
ight]$ אישיוויון המשולש: יהי X מ"מ אזי

אזי μ אזי המספרים הלש של מ"מ ב"ת אוני ההיון ייהיו יהיו הגדולים: יהיו המספרים הגדולים: החוק החלש של המספרים הגדולים: יהיו

$$|.\forall \delta > 0.\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| \ge \delta\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

 $.orall \delta>0.\mathbb{P}\left(\left|rac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\mu\right|\geq\delta
ight) \xrightarrow[n\to\infty]{}0$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $arepsilon,\delta>0$ קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $X\in\ell^1$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל

 $\mathbb{.P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) < \varepsilon$ ולכל מתואמים בלתי מתואמים בלתי מנה אמים ($\{X_i \sim X\}_{i=1}^n$ ולכל בלתי מסקנה אוי ויהי ($\{X_i \sim X\}_{i=1}^n$ מסקנה יהי ויהי ($\{X_i \sim X\}_{i=1}^n$ אוי ויהי אוי ויהי ($\{X_i \sim X\}_{i=1}^n$

 $\sup_{x\in[0,1]}\mathbb{P}\left(\left|rac{X}{n}-p
ight|\geq\delta
ight) \xrightarrow{x}0$ אזי $\delta>0$ אזי $X\sim \mathrm{Bin}\left(n,p
ight)$ יהי $x\in[0,1]$ למה: יהי

```
A : \forall E \subseteq \mathbb{R}.\mathbb{P} \ (X \in E) = \int_E f \ (x) \ dx עבורה f : \mathbb{R} \to [0,1] עבורה פונקצית עבורו קיימת פונקצית צפיפות אפיפות f : \mathbb{R} \to [0,1]
                                               F(t)=\mathbb{P}\left(X\leq t
ight)=\int_{-\infty}^{t}f\left(x
ight)dx פונקציית ההתפלגות המצטברת: יהיX מ"מ רציף אזי
                                                                                               \mathbb{P}\left(a \leq X \leq b
ight) = F\left(b
ight) - F\left(a
ight)מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                                      f\left(x
ight)=egin{cases} rac{1}{|I|}&x\in I\ 0&	ext{else} \end{cases} עבורו אחיד רציף: מ"מ רציף X:I	o\mathbb{R} עבורו
                                                                                                        \mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{\mathbb{R}}xf\left(x
ight)dx תוחלת רציפה: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                       \mathbb{E}\left[X^p\right]=\int_{\mathbb{R}}x^pf\left(x\right)dxאזי מ"מ רציף: יהי מ"מ מומנט רציף: יהי מ"מ רציף אזי אזי f\left(x\right)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} המקיימת f\in[0,1]^{\mathbb{R}} אזי \sigma^2,\mu\in\mathbb{R}
                                                                                  Z \sim N\left(\mu,\sigma^2
ight) מתפלג נורמלית מ"מ ביפון עבורו לf\left(x
ight)עבורו מ"מ מ"מ ביפון יהי
                                                                                                                                                               .\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}:גאוסיאן
                                                                                        Z\sim N\left(0,1
ight) אזי אזי פונקציית פונקציית מ"מ רציף עם פונקציית מיים מ"מ רציף עם פונקציית אזי אזי
                                                                      .\Phi\left(x\right)=\mathbb{P}\left(Z\leq x\right)=\int_{-\infty}^{x}\phi\left(t\right)dtאזי רציף אזי לZ\sim N\left(0,1\right)יהי : יהי הגדרה כיהי למיים רציף אזי
                                                                                                                                                                                    t\in\mathbb{R} טענה: יהי
                                                                                                                .(\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=1)\wedge(\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=0) •
                                                                                                                           (\Phi \in C(\mathbb{R})) \wedge (\Phi > 0) \wedge (\Phi > 0) • עולה ממש)
                                                                                                                                                                .\Phi(t) = 1 - \Phi(-t) \cdot
                                                                                                                                       .(\Phi(\infty)=1) \wedge (\Phi(-\infty)=0):הגדרה
                                                 .\mathbb{P}\left(a\leq Z\leq b\right)=\Phi\left(b\right)-\Phi\left(a\right)=\int_{a}^{b}\phi\left(t\right)dtמסקנה: יהי עיף אזי מ רציף אזי מרציף אזי ביף מסקנה עיהי מ
                                                                                              (\mathbb{E}\left[X
ight]=0)\wedge(\mathrm{Var}\left[X
ight]=1) משתנה מתוקנן: X\in\ell^2 המקיים
                                                                                                                                               .\widehat{X} = rac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma} אזי X \in \ell^2 יהי
                                                                                                                                                     . טענה\widehat{X} אזי \widehat{X} מתוקנןX\in\ell^2 יהי
                                           . \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\left(x\right) dx = \frac{\pi}{4^n} \binom{2n}{n} \right) \wedge \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\left(x\right) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \right) למה: יהי n \in \mathbb{N} אזי
                                                                                                                                                           .	ext{lim}_{n	o\infty}rac{rac{\pi}{4^n}inom{2n}{n}}{rac{2}{2n+1}rac{4^n}{(2n)}}=1:טענה
            \mathbb{P}\left(a \leq \widehat{S_N} \leq b
ight) \xrightarrow[N 	o \infty]{} \Phi\left(b
ight) - \Phi\left(a
ight) אזי \{S_N \sim \mathrm{Bin}\left(N,p
ight)\}_{N=1}^\infty ויהי a \leq b ויהי וויהי a \leq b אזי משפט דה־מואבר לפלס: יהיו
\mathbb{P}\left(f\left(rac{S_{N}-Np}{p\sqrt{N}}
ight)
ight) \xrightarrow[N	o\infty]{} \int_{a}^{b}f\left(t
ight)\phi\left(t
ight)dtאזי לוהי a\leq b ויהי a\leq b ויהי חסומה יהיו a\leq b אזי חסומה יהיו
                                                                                                      \|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| חסומה אזי f \in C(\mathbb{R}) הגדרה: תהא
```

 $N>N_0$ כך שלכל כך אזי החזק של המספרים הגדולים: יהי אוי מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל מ"מ עם החזק אזי להמספרים הגדולים: יהי

 $\mathbb{P}\left([a,b]
ight)=\int_a^b f\left(x
ight)dx$ אזי אזי ותהא $[a,b]\subseteq I$ פונקציית צפיפות פונקציית האא ותהא f:I o [0,1] אזי

 $B_{k,n}\left(x
ight)=inom{n}{k}x^k\left(1-x
ight)^{n-k}$ אזי $k< n\in\mathbb{N}$ פולינום ברנשטיין: יהיו $Q_n\left(t
ight)=\sum_{k=0}^nf\left(rac{k}{n}
ight)inom{n}{k}t^k\left(1-t
ight)^{n-k}$ אזי $f\in C\left([0,1]
ight)$ הגדרה: תהא

 $.orall arepsilon>0.\exists n\in\mathbb{N}.\sup_{t\in\left[0,1
ight]}\left|f\left(t
ight)-Q_{n}\left(t
ight)
ight|\leqarepsilon$ אזי $f\in C\left(\left[0,1
ight]
ight)$ משפט : תהא

 $\mathbb{P}\left(\max_{n\in\{N_0...N\}}\left|rac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}-\mu
ight|\geq \delta
ight)<arepsilon$ מ"מ ב"ת מתקיים $\{X_i\sim X\}_{i=1}^N$ ולכל

 $\int_{I}f\left(x
ight)\overset{1}{dx}=1$ רציפה המקיימת $f:I
ightarrow\left[0,1
ight]:$ פונקציית צפיפות רציפה

 $Q_n\left(t
ight)\in\mathbb{R}_n\left[x
ight]$: טענה

```
I_{a,b,arepsilon}(x)=\psi\left(rac{b-x}{arepsilon}
ight)\psi\left(rac{x-a}{arepsilon}
ight) אזי a\leq b ויהיו arepsilon>0 : הגדרה
                                                                                                                           . (חסומה I_{a,b,arepsilon}) \wedge (I_{a,b,arepsilon}\in C^3\left(\mathbb{R}
ight)) אזי a\leq b ויהיו arepsilon>0 יהי יהי
                                                                                                                  \|I_{a,b,arepsilon}^{(3)}\| \leq rac{B}{arepsilon^3} מתקיים arepsilon>0 עבורו לכל a\leq b עבורו לכל B>0
                                                    \mathbb{1}_{[a+arepsilon,b-arepsilon]} \leq I_{a+arepsilon,b-arepsilon,arepsilon} \leq I_{[a,b]} \overset{\sim}{\leq} I_{[a,b,arepsilon]} \leq I_{[a-arepsilon,b+arepsilon]}אזי a \leq b ויהי a \leq b ויהי a \leq b ויהי a \leq b מסקנה: יהיו
משפט הגבול המרכזי: יהיו a \leq b נניח כי לכל N \in \mathbb{N} יהיו יהיו a \leq b מ"מ ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב"ב משפט הגבול המרכזי: יהיו N \in \mathbb{N} מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב"ב מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב"ב מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב"ב מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי N \in \mathbb{N} מ"ב"ב מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי מ"ב ב"ת עם תוחלת משותפת אזי מ"ב"ב מ"
                                                                                                           . orall x \in S. \sum_{y \in S} \mathcal{P}\left(x,y
ight) = 1 המקיימת \mathcal{P}: S^2 	o [0,1]:מטריצת מצבים
                                                      שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן ובעלת מרחב מצבים סופי במ"מ \{X_i\}_{i=0}^\infty ומטריצת מצבים עבורם שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן ובעלת מרחב מצבים סופי
                                                                                                                                                \mathbb{P}(X_0 = s_0 \dots X_n = s_n) = \mu_{X_0}(s_0) \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{P}(s_i, s_{i+1})
                                          \mathbb{P}\left(X_{n+1}=s_{n+1}\mid X_n=s_n\ldots X_0=s_0
ight)=\mathcal{P}\left(s_n,s_{n+1}
ight)שרשרת מרקוב אזי \left\{X_i
ight\}_{i=1}^\infty תהא \left\{X_i
ight\}_{i=1}^\infty
                                                                                                   (\mu_X)_i = \mathbb{P}\left(X=i-1
ight) נתייחס אל התפלגות באל וקטור שורה בא נתייחס אל התפלגות :
                                                                                                                                               \mu_{X_k} = \mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^k משפט : תהא שרשרת \{X_i\}_{i=1}^\infty שרשרת מרקוב אזי
                                                                                             \mathbb{P}\left(X_n=y\mid X_k=x
ight)=\mathcal{P}^{n-k}\left(x,y
ight)טענה : תהא \left\{X_i
ight\}_{i=1}^{\infty} שרשרת מרקוב אזי
                                                                                                                            \pi\cdot\mathcal{P}=\pi המקיימת S על \pi התפלגות התפלגות סטציונרית/עמידה התפלגות התפלגות
                                                                                               v\cdot A=lpha v המקיים v\in M_{1,n}\left(\mathbb{F}
ight) אזי A\in M_{n}\left(\mathbb{F}
ight) המאלי: תהא
                                                                               . (סענה סטציונרית) התפלגות מרקוב אזי (\mu_{X_0}\mathcal{P}^n	o\pi) שרשרת מרקוב אזי שרשרת איי (X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                                                                  \pi שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות סטציונרית \{X_i\}_{i=1}^\infty תהא משפט תהא שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות סטציונרית
                                                                                                                                  x 	o y אזי \exists n \in \mathbb{N}_+.\mathcal{P}^n\left(x,y
ight) > 0 אזי x,y \in S אזי איי
                                                                                                                                           \forall x,y \in S.x \rightarrow y מטריצת מעברים אי פריקה: שרשרת עבורה
                                                              \forall x \in S.\pi\left(x
ight) > 0 מטריצת מעברים אי פריקה ותהא \pi התפלגות סטציונרית אזי \mathcal{P}
                                                                                      \pi מטריצת מעברים אי פריקה אזי קיימת התפלגות סטציונרית יחידה משפט תהא {\mathcal P}
rac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{X_0}\cdot\mathcal{P}^k \xrightarrow[n	o\infty]{}\pi אזי \pi אזי \pi מטריצת מעברים בעלת התפלגות סטציונרית יחידה איזי \pi מטריצת מעברים בעלת התפלגות ממוצעים ו
                                                                                                                      f_i(f)_i=f_i(f) נתייחס אל טרנספורמציה ל כאל וקטור עמודה כך: הערה
                                                 טרנספורמציה אזי \pi ותהא חידה סטציונרית בעלת בעלת בעלת מרקוב בעלת שרשרת ארע ארע שרשרת אזי \{X_i\}_{i=1}^\infty
                                                                                                                                                   \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(X_{k}\right)
ight]\xrightarrow[n	o\infty]{}\pi\cdot f . gcd (\{n\in\mathbb{N}_{+}\mid\mathcal{P}^{n}\left(x,x\right)>0\}) אזי x\in S אזי x\in S
                                                                                                                                                                                                 x \in S: \mathbf{A}מצב חסר מחזור x \in S: \mathbf{A}אשר מחזורו
                                                                                                                               . שרשרת מחזור: שרשרת \left\{X_i\right\}_{i=1}^\infty עבורה כל מצב חסר מחזור: שרשרת חסרת מחזור
                           \mu_{X_0}\cdot \mathcal{P}^n \xrightarrow[n	o\infty]{} \pi איזי מרקוב מחזור איזי פריקה שרשרת אי\{X_i\}_{i=1}^\infty המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב תהא
```

 $Z\sim 2$ Ber $\left(rac{1}{2}
ight)-1$ יהיX מ"מ ויהי $f\in C^3\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי

 $. \left| \mathbb{E}\left[f\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right) \right] - \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Z}{\sqrt{N}}\right) \right] \right| \le \frac{1}{6N^{\frac{3}{2}}} \left\| f^{(3)} \right\| \left(1 + \mathbb{E}\left[|X - \mathbb{E}\left[X \right] |^3 \right] \right)$ $. \psi\left(x \right) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 1 + x - \frac{2\sin(2\pi x)}{3\pi} + \frac{\sin(4\pi x)}{12\pi} & -1 \le x \le 0 : \pi \end{cases}$

xמן החזרה : יהי $x \in S$ אזי T_x מ"מ הזמן הראשון בו חזרנו ל־x בהילוך שמתחיל ב־x

 $\mathbb{E}\left[T_x
ight]=rac{1}{\pi(x)}$ אזי π אאי פריקה בעלת התפלגות אינרית יחידה אוי פריקה בעלת משפט משפט.

x אזי הראשונה הראשונה על בהילוך שמתחיל ביז עד לחזרה הראשונה אל מספר הפעמים שנגיע למצב אזי יהיו אזי $x,y\in S$ אזי אזי מספר הפעמים שנגיע למצב

 $\mathbb{E}\left[T_{x,y}
ight] = rac{\pi(y)}{\pi(x)}$ אזי π אזי יחידה שרשרת בעלת התפלגות בעלת התפלגות אי פריקה בעלת התפלגות אי פריקה בעלת התפלגות אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה איזי