

אלפבית: קבוצה Σ המקיימת $0 < |\Sigma| < \aleph_0$.

מילים: יהי Σ אלפבית אזי $\Sigma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma^n$.

אורך של מילה: יהי Σ אלפבית ותהא $w \in \Sigma^n$ מילה אזי $|w| = n$.

המילה הריקה: יהי Σ אלפבית אזי $\varepsilon \in \Sigma^*$ עבורה $|\varepsilon| = 0$.

היפוך מילה: תהא $\langle w_1 \dots w_n \rangle \in \Sigma^*$ אזי $\langle w_n \dots w_1 \rangle^R = \langle w_1 \dots w_n \rangle$.

שרשור מילים: תהיינה $\langle w_1 \dots w_n \rangle, \langle \omega_1 \dots \omega_m \rangle \in \Sigma^*$ אזי $\langle w_1 \dots w_n, \omega_1 \dots \omega_m \rangle = \langle w_1 \dots w_n \rangle \langle \omega_1 \dots \omega_m \rangle$.

חזקה של מילה: תהא $\langle w_1 \dots w_n \rangle \in \Sigma^*$ ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $\langle w_1 \dots w_n \rangle^m = \prod_{i=1}^m \langle w_1 \dots w_n \rangle$.

מספר המופעים של אות במילה: תהא $w \in \Sigma^n$ ותהא $\sigma \in \Sigma$ אות אזי $\#_{\sigma}(w) = |\{i \in [n] \mid w_i = \sigma\}|$.

שפה: יהי Σ אלפבית אזי $L \subseteq \Sigma^*$.

היפוך שפה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

שרשור שפות: תהיינה $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ שפות אזי $L_1 \parallel L_2 = L_1 L_2 = \{w\omega \mid (w \in L_1) \wedge (\omega \in L_2)\}$.

חזקה של שפה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $L^m = \left\{ \prod_{i=1}^m w_i \mid \forall i \in [m]. w_i \in L \right\}$.

סגור קליני של שפה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$.

שפת הרישוא: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $\text{prefix}(L) = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^*. yx \in L\}$.

שפת הסיפא: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $\text{suffix}(L) = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^*. xy \in L\}$.

אלגוריתם מכריע שפה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי אלגוריתם $A : \Sigma^* \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$ המקיים

• מקבל: לכל $x \in L$ מתקיים $A(x) = \text{true}$.

• דוחה: לכל $x \notin L$ מתקיים $A(x) = \text{false}$.

פונקציה בוליאנית: תהיינה $n, m \in \mathbb{N}$ אזי $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m$.

בסיס פונקציות בוליאניות: תהיינה $f_1 \dots f_n$ פונקציות בוליאניות אזי $\{f_1 \dots f_n\}$.

בסיס דה־מורגן: $\mathcal{B} = \{\wedge, \vee, \neg\}$.

הערה: תמיד נוסיף לבסיס את הפונקציות הקבועות.

מעגל בוליאני: יהי \mathcal{B} בסיס פונקציות בוליאניות תהיינה $k_1 \dots k_n \in \mathbb{N}_+$ תהיינה $f_1 \dots f_n \in \mathcal{B}$ באשר $f_i : \{0, 1\}^{k_i} \rightarrow \{0, 1\}$ לכל

$i \in [n]$ ותהיינה $x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k \in \{0, 1\}$ אזי גרף מכוון G מעל $\{f_1 \dots f_n, x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k\}$ המקיים

• G חסר מעגלים מכוונים.

• לכל $i \in [m]$ מתקיים $\deg^-(x_i) = 0$.

• לכל $i \in [n]$ מתקיים $\deg^-(f_i) = k_i$.

• לכל $i \in [k]$ מתקיים $\deg^-(y_i) = 1$ וכן $\deg^+(y_i) = 0$.

שערים במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $f_1 \dots f_n$.

קלטים במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $x_1 \dots x_m$.

פלטים במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $y_1 \dots y_k$.

חוטים במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $E(C)$.

fan-out במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $\max_{v \in V(C)} \deg^+(v)$.

נוחסאות במעגל בוליאני: יהי C מעגל בוליאני אזי $\{G \leq C \mid 1 \text{ הוא } G \text{ של fan-out}\}$.

שערוך מעגל בוליאני על קלט: יהי C מעגל בוליאני ויהי $v \in \{0, 1\}^m$ אזי $(x_1 \dots x_m) = v$ וכן y_i הינו הפלט הנוצר מהפעלת

הפונקציות הבוליאניות על הקודקודים הנכנסים.

סימון: יהי C מעגל בוליאני ויהי $v \in \{0, 1\}^m$ אזי השערוך של C על v הוא $C(v) = (y_1 \dots y_k)$.

מעגל מקבל מילה: יהי C מעגל בעל פלט יחיד אזי $w \in \{0, 1\}^n$ עבורו $C(w) = 1$.

שפה של מעגל: יהי C מעגל בעל פלט יחיד אזי C מקבל את $x \in \{0, 1\}^n$ $L(C) = \{x \in \{0, 1\}^n \mid x \text{ מקבל את } C\}$.

מעגל מחשב פונקציה: תהא $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי מעגל בוליאני C עבורו לכל $v \in \{0, 1\}^n$ מתקיים $C(v) = f(v)$.

משפט אוניברסליות דה־מורגן: תהא $f : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^k$ אזי קיים מעגל בוליאני C מעל בסיס דה־מורגן עבורו לכל $v \in \{0, 1\}^m$

מתקיים $C(v) = f(v)$.

הערה: מכאן והלאה כל המעגלים הם בוליאניים ומעל בסיס דה־מורגן.

משפחה של מעגלים: מעגלים $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ עבורם C_i מקבל קלט באורך i .

שפה של משפחת מעגלים: תהא \mathcal{C} משפחה של מעגלים אזי $L(\mathcal{C}) = \{x \in \{0, 1\}^* \mid x \in L(C_{|x|})\}$.

משפחה מכריעה שפה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \{0, 1\}^*$ שפה אזי משפחה של מעגלים \mathcal{C} עבורה $L(\mathcal{C}) = \mathcal{L}$.

הערה מודל לא יוניפורמי: משפחה של מעגלים \mathcal{C} עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ יש אלגוריתם שונה.

הערה מודל יוניפורמי: משפחה של מעגלים \mathcal{C} עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ יש אלגוריתם זהה.

גודל מעגל: יהי מעגל בוליאני C אזי $|C|$ מספר השערים ומספר הקלטות ב- C .

חסם עליון לגודל משפחת מעגלים: תהא \mathcal{C} משפחה של מעגלים אזי $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה $|\mathcal{C}_n| \leq S(n)$.

טענה: תהא $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיים מעגל C שמחשב את f בגודל $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \{0, 1\}^n$ אזי קיים מעגל C עבורו $L(C) = \mathcal{L}$ וכן $|C| = \mathcal{O}(n \cdot 2^n)$.

טענה: תהא $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיים מעגל C שמחשב את f בגודל $\mathcal{O}(2^n)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \{0, 1\}^n$ אזי קיים מעגל C עבורו $L(C) = \mathcal{L}$ וכן $|C| = \mathcal{O}(2^n)$.

משפט לופיאנוב: תהא $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ אזי קיים מעגל C שמחשב את f בגודל $\mathcal{O}\left(\frac{2^n}{n}\right)$.

טענה שאנון: קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו קיימת $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ שאינה ניתנת לחישוב בעזרת מעגל C בגודל קטן מאשר $\frac{2^n}{10n}$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי (אס"ד): תהא $Q \neq \emptyset$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית תהא $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ יהי $q \in Q$ ותהא $F \subseteq Q$ אזי $(Q, \Sigma, \delta, q, F)$.

מצבים באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, q, F)$ אס"ד אזי Q .

אלפבית באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, q, F)$ אס"ד אזי Σ .

פונקציית מעברים באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, q, F)$ אס"ד אזי δ .

מצב התחלתי באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, q, F)$ אס"ד אזי q .

מצבים מקבלים באוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, q, F)$ אס"ד אזי F .

פונקציית המעברים המורחבת: יהי $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ אס"ד אזי $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ עבורה לכל $q \in Q$ מתקיים $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$ וכן לכל $x \in \Sigma^n$ מתקיים $\hat{\delta}(q, x) = \delta(\hat{\delta}(q, x_1 \dots x_{n-1}), x_n)$.

אוטומט סופי דטרמיניסטי מקבל מילה: יהי $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ אס"ד אזי $x \in \Sigma^*$ המקיים $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$.

טענה: יהי A אס"ד ויהי $x \in \Sigma^n$ אזי $(A$ מקבל את $x) \iff (q_1 \dots q_n \in Q$ עבורם $\delta(q_{i-1}, x_i) = q_i$ לכל $i \in [n]$ וכן $q_n \in F)$.

שפה של אוטומט סופי דטרמיניסטי: יהי A אס"ד אזי $L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ מקבל את } A\}$.

שפה רגולרית: יהי Σ אלפבית אזי שפה $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ עבורה קיים אס"ד A המקיים $L(A) = \mathcal{L}$.

טענה: \emptyset רגולרית.

טענה: $\{\varepsilon\}$ רגולרית.

טענה: $\{x \mid \#_1(x) = 1 \pmod{2}\}$ רגולרית.

טענה: $\{y 1 0^{2k} \mid (y \in \{0, 1\}^*) \wedge (k \in \mathbb{N})\}$ רגולרית.

טענה: יהיו $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ שפות אזי $L_1(L_2L_3) = (L_1L_2)L_3$.

טענה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה באשר $L \neq \emptyset$ וכן $L \neq \{\varepsilon\}$ אזי L^* אינסופית.

משפט: תהינה $L, \mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפות רגולריות אזי

• $L \cup \mathcal{L}$ רגולרית.

• $L \cap \mathcal{L}$ רגולרית.

• \bar{L} רגולרית.

• $L \|\mathcal{L}$ רגולרית.

• לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי L^n רגולרית.

• L^* רגולרית.

מסקנה: $\{x \mid \#_1(x) = 0 \pmod{2}\}$ רגולרית.

אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מינוס (אסלד"ם): תהא $Q \neq \emptyset$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית תהא $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ ותהינה $S, F \subseteq Q$ אזי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$.

מצבים באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מינוס: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ם אזי Q .

אלפבית באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מינוס: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ם אזי Σ .

פונקציית מעברים באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מינוס: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ם אזי δ .

מצבים התחלתיים באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מינוס: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ם אזי S .

מצבים מקבלים באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מינוס: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ם אזי F .

פונקציית המעברים המורחבת: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ם אזי $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ עבורה לכל $T \subseteq Q$ מתקיים $\hat{\delta}(T, \varepsilon) = T$ וכן לכל $x \in \Sigma^n$ מתקיים $\hat{\delta}(q, x) = \bigcup_{q \in \delta(T, x_1 \dots x_{n-1})} \delta(q, x_n)$.
אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מינוס מקבל מילה: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ם אזי $x \in \Sigma^*$ המקיים $\hat{\delta}(S, x) \cap F \neq \emptyset$.
טענה: יהי M אסלד"ם ויהי $x \in \Sigma^n$ אזי $(M \text{ מקבל את } x) \iff (x \text{ קיימים } q_0 \dots q_n \in Q \text{ עבורם } q_0 \in S \text{ וכן } q_i \in \delta(q_{i-1}, x_i) \text{ לכל } i \in [n])$.

שפה של אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מינוס: יהי M אסלד"ם אזי $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ מקבל את } M\}$.
אוטומט סופי דטרמיניסטי מינוס החזקה: יהי $M = (Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ם אזי אסלד"ד $(Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ באשר

$$Q' = \mathcal{P}(Q) \bullet$$

$$\delta'(T, x) = \bigcup_{q \in T} \delta(q, x) \bullet$$

$$q_0 = S \bullet$$

$$F' = \{T \subseteq Q \mid T \cap F \neq \emptyset\} \bullet$$

למה: יהי M אסלד"ם יהי A אסלד"ד החזקה של M תהא $T \subseteq Q_N$ ויהי $x \in \Sigma^*$ אזי $\hat{\delta}_A(T, x) = \hat{\delta}_M(T, x)$.
משפט: יהי M אסלד"ם אזי קיים אסלד"ד A עבורו $L(M) = L(A)$.

סימון: יהי Σ אלפבית אזי $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי (אסלד"ד): תהא $Q \neq \emptyset$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית תהא $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ ותהיינה $S, F \subseteq Q$ אזי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$.

מצבים באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ד אזי Q .

אלפבית באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ד אזי Σ .

פונקציית מעברים באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ד אזי δ .

מצבים התחלתיים באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ד אזי S .

מצבים מקבלים באוטומט סופי לא-דטרמיניסטי: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ד אזי F .

סביבת ε : יהי N אסלד"ד ויהי $q \in Q$ אזי $E(q) = \{q' \in Q \mid \exists a \in Q^{k+1}. (a_0 = q) \wedge (\forall i \in [k]. a_i \in \delta(a_{i-1}, \varepsilon)) \wedge (a_k = q')\}$.

סביבת ε : יהי N אסלד"ד ויהי $T \subseteq Q$ אזי $E(T) = \bigcup_{q \in T} E(q)$.

פונקציית המעברים המורחבת: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ד אזי $\hat{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ עבורה לכל $T \subseteq Q$ מתקיים

$$\hat{\delta}(q, x) = E\left(\bigcup_{q \in \delta(T, x_1 \dots x_{n-1})} \delta(q, x_n)\right) \text{ וכן לכל } x \in \Sigma^n \text{ מתקיים } \hat{\delta}(T, \varepsilon) = E(T)$$

אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי מקבל מילה: יהי $(Q, \Sigma, \delta, S, F)$ אסלד"ד אזי $x \in \Sigma^*$ המקיים $\hat{\delta}(S, x) \cap F \neq \emptyset$.

סימון: יהי $x \in \Sigma^*$ יהיו $\sigma_1 \dots \sigma_n \in \Sigma \setminus \{\varepsilon\}$ ויהיו $k_0 \dots k_n \in \mathbb{N}$ עבורם $x = \varepsilon^{k_0} \sigma_0 \varepsilon^{k_1} \sigma_1 \varepsilon^{k_2} \dots \sigma_n \varepsilon^{k_n}$ אזי $x^\# = \sigma_1 \dots \sigma_n$.

טענה: יהי A אסלד"ד ויהי $x \in \Sigma^n$ אזי $(A \text{ מקבל את } x) \iff (x \text{ קיימים } q_0 \dots q_n \in Q \text{ עבורם } q_0 \in S \text{ וכן } q_i \in \delta(q_{i-1}, x_i^\#) \text{ לכל } i \in [n])$.

שפה של אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי: יהי A אסלד"ד אזי $L(A) = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ מקבל את } A\}$.

משפט: יהי N אסלד"ד אזי קיים אסלד"ם M עבורו $L(N) = L(M)$.

מסקנה: יהי N אסלד"ד אזי קיים אסלד"ד A עבורו $L(A) = L(N)$.

מסקנה: יהי Σ אלפבית ותהא Σ^* שפה $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(\mathcal{L} \text{ רגולרית}) \iff (L(N) = \mathcal{L} \text{ המקיים } N \text{ אסלד"ד})$.

ביטוי רגולרי (ב"ר): יהי Σ אלפבית אזי

$$\emptyset \bullet$$

$$a \text{ יהי } a \in \Sigma_\varepsilon \bullet$$

$$R_1, R_2 \text{ ביטויים רגולריים אזי } R_1 \cup R_2 \bullet$$

$$R_1, R_2 \text{ ביטויים רגולריים אזי } R_1 R_2 \bullet$$

$$R \text{ ביטוי רגולרי אזי } R^* \bullet$$

שפה נוצרת מביטוי רגולרי: יהי Σ אלפבית אזי

$$L(\emptyset) = \emptyset \bullet$$

$$a \in \Sigma_\varepsilon \text{ אזי } L(a) = \{a\} \bullet$$

$$R_1, R_2 \text{ ביטויים רגולריים אזי } L(R_1 \cup R_2) = L(R_1) \cup L(R_2) \bullet$$

$$R_1, R_2 \text{ ביטויים רגולריים אזי } L(R_1 R_2) = L(R_1) L(R_2) \bullet$$

$$R \text{ ביטוי רגולרי אזי } L(R^*) = L(R)^* \bullet$$

סימון: יהי Σ אלפבית אזי $R(\Sigma) = \{r \in \Sigma^* \mid r \text{ ביטוי רגולרי}\}$.

הערה: קיים סדר פעולות לביטויים רגולריים

- סגור קליני.
- שרשור.
- איחוד.

משפט: יהי Σ אלפבית ותהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(\mathcal{L} \text{ רגולרית}) \iff (L(r) = \mathcal{L} \text{ עבורו } r \in R(\Sigma))$.

שפה ניתנת לניפוח: שפה \mathcal{L} וקבוע $\ell > 0$ עבורם לכל $w \in \mathcal{L}$ באשר $|w| \leq \ell$ קיימים $x, y, z \in \Sigma^*$ באשר $|y| > 0$ וכן $|xy| \leq \ell$ וכן $xyz = w$ וכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $xy^kz \in \mathcal{L}$.

טענה למת הניפוח: תהא \mathcal{L} שפה רגולרית אזי קיים $\ell > 0$ עבורו \mathcal{L} ניתנת לניפוח ℓ .

קבוע הניפוח: תהא \mathcal{L} שפה רגולרית אזי $\min \{\ell \in \mathbb{N}_+ \mid \mathcal{L} \text{ ניתנת לניפוח } \ell\}$.

טענה: $\{x \in \{0, 1\}^* \mid \#_0(x) = \#_1(x)\}$ אינה רגולרית.

טענה: $\{0^i 1^j \mid i > j\}$ אינה רגולרית.

טענה: $\{a^p \mid a \in \Sigma, p \text{ ראשוני}\}$ אינה רגולרית.

טענה: השפה $\{a^i b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_+\} \cup \{b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ ניתנת לניפוח 1 וכן אינה רגולרית.

הגדרה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $\sim_L = \{(x, y) \in (\Sigma^*)^2 \mid \forall z \in \Sigma^*. (yz \in L) \iff (xz \in L)\}$

טענה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי \sim_L הינו יחס שקילות.

הגדרה: יהי A אס"ד אזי $\sim_A = \{(x, y) \in (\Sigma^*)^2 \mid \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)\}$

טענה: יהי A אס"ד ויהיו $x, y \in \Sigma^*$ עבורם $x \sim_A y$ אזי $x \sim_{L(A)} y$.

מסקנה: יהי A אס"ד אזי $|\Sigma^*/\sim_A| \geq |\Sigma^*/\sim_{L(A)}|$.

מסקנה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה רגולרית אזי Σ^*/\sim_L סופית.

משפט מייהל-נרוד: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(L \text{ רגולרית}) \iff (\Sigma^*/\sim_L \text{ סופית})$.

סימון: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה באשר Σ^*/\sim_L סופית תהא $\{x_1 \dots x_n\}$ קבוצת נציגים של Σ^*/\sim_L ויהי $y \in \Sigma^*$ עבורו $x_i \sim_L y$ אזי $\text{Class}(y) = i$

אוטומט סופי דטרמיניסטי המחלקות: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה באשר Σ^*/\sim_L סופית ותהא $\{x_1 \dots x_n\}$ קבוצת נציגים של Σ^*/\sim_L אזי אס"ד

$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ באשר

• $Q = |\Sigma^*/\sim_L|$

• $\delta(i, \sigma) = \text{Class}(x_i \sigma)$

• $q_0 = \text{Class}(\varepsilon)$

• $F = \{i \in Q \mid x_i \in L\}$

טענה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה באשר Σ^*/\sim_L סופית תהא $\{x_1 \dots x_n\}$ קבוצת נציגים של Σ^*/\sim_L יהי A אס"ד המחלקות של L ויהי $y \in \Sigma^*$ אזי $\hat{\delta}_A(q_0, y) = \text{Class}(y)$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי קיים אסל"ד N מעל $[n]$ באשר $|Q| = n$ עבורו $L(N) = \{x \in [n]^* \mid \exists \sigma \in \Sigma. \#_\sigma(x) = 0\}$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי A אס"ד מעל $[n]$ עבורו $L(A) = \{x \in [n]^* \mid \exists \sigma \in \Sigma. \#_\sigma(x) = 0\}$ אזי $|Q| \geq 2^n$.

מכונת טיורינג (מ"ט): תהא $Q \neq \emptyset$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma \subseteq \Gamma$ וכן $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$ יהיו $q_0, q_a, q_r \in Q$

באשר $q_a \neq q_r$ ותהא $\delta : (Q \setminus \{q_a, q_r\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ אזי $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$.

מצבים במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי Q .

אלפבית במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי Σ .

אלפבית סרט במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי Γ .

פונקציית מעברים במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי δ .

מצב התחלתי במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי q_0 .

מצב מקבל במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי q_a .

מצב דוחה במכונת טיורינג: תהא $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ מ"ט אזי q_r .

קונפיגורציה: תהא M מ"ט אזי $c \in \Gamma^* Q \Gamma^*$.

קונפיגורציה התחלתית: תהא M מ"ט אזי קונפיגורציה $c \in \Gamma^* Q \Gamma^*$ עבורה קיים $v \in \Sigma^*$ המקיימת $c = q_0 v$.

קונפיגורציה מקבלת: תהא M מ"ט אזי קונפיגורציה $c \in \Gamma^* Q \Gamma^*$ עבורה קיימים $u, v \in \Sigma^*$ המקיימים $c = u q_a v$.

קונפיגורציה דוחה: תהא M מ"ט אזי קונפיגורציה $c \in \Gamma^* Q \Gamma^*$ עבורה קיימים $u, v \in \Sigma^*$ המקיימים $c = uq_r v$.

הערה: תהא M מ"ט ותהא c קונפיגורציה אזי נזהה את \perp עם c .

קונפיגורציה עוברת/צעד: תהא M מ"ט תהא c קונפיגורציה אזי קונפיגורציה c' המקיימת אחד הבאים

- קיימים $a, b, b' \in \Gamma$ וקיימים $u, v \in \Gamma^*$ וקיימים $q, q' \in Q$ עבורם $c = uaqbv$ וכן $\delta(q, b) = (q', b', L)$ וכן $c' = uq'ab'v$
- קיימים $b, b' \in \Gamma$ וקיימים $u, v \in \Gamma^*$ וקיימים $q, q' \in Q$ עבורם $c = qbv$ וכן $\delta(q, b) = (q', b', L)$ וכן $c' = q'b'v$
- קיימים $b, b' \in \Gamma$ וקיימים $u, v \in \Gamma^*$ וקיימים $q, q' \in Q$ עבורם $c = uqbv$ וכן $\delta(q, b) = (q', b', R)$ וכן $c' = ub'q'v$

מכונת טיורינג מקבלת מילה: תהא M מ"ט אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו קיימות $c_0 \dots c_n$ קונפיגורציות באשר $c_0 = q_0 x$ וכן c_{i-1} עוברת ל- c_i לכל $i \in [n]$ וכן c_n קונפיגורציה מקבלת.

מכונת טיורינג דוחה מילה: תהא M מ"ט אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו קיימות $c_0 \dots c_n$ קונפיגורציות באשר $c_0 = q_0 x$ וכן c_{i-1} עוברת ל- c_i לכל $i \in [n]$ וכן c_n קונפיגורציה דוחה.

שפה של מכונת טיורינג: תהא M מ"ט אזי $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ מקבל את } M\}$

מכונת טיורינג לא עוצרת על קלט: תהא M מ"ט אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו M לא מקבלת ולא דוחה את x .

מודלים שקולים: מודלים M, M' עבורם לכל A מסוג M וכן לכל B מסוג M' מתקיים

- קיימת A' מסוג M' המקיימת $L(A) = L(A')$
- קיימת B' מסוג M המקיימת $L(B) = L(B')$

מסקנה: אס"ד, אסל"ד ואסלד"ס הינם מודלים שקולים.

מכונת טיורינג נחה: תהא $Q \neq \emptyset$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma \subseteq \Gamma$ וכן $\perp \in \Gamma \setminus \Sigma$ יהיו $q_0, q_a, q_r \in Q$ באשר $q_a \neq q_r$ ותהא $\delta : (Q \setminus \{q_a, q_r\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$ אזי $\delta : (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ **הערה:** את כל הפעולות ממכונת טיורינג נכליל בצורה הטבעית עבור מכונת טיורינג נחה.

מסקנה: מכונת טיורינג ומכונת טיורינג נחה הינן מודלים שקולים.

מכונת טיורינג רב-סרטית: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ תהא $Q \neq \emptyset$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma \subseteq \Gamma$ וכן $\perp \in \Gamma \setminus \Sigma$ יהיו $q_0, q_a, q_r \in Q$ באשר $q_a \neq q_r$ ותהא $\delta : (Q \setminus \{q_a, q_r\}) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$ אזי $\delta : (k, Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$ **הערה:** את כל הפעולות ממכונת טיורינג נכליל בצורה הטבעית עבור מכונת טיורינג רב-סרטית.

קונפיגורציה במכונת טיורינג רב-סרטית: תהא M מ"ט k -סרטית ותהייה $c_1 \dots c_k \in \Gamma^* Q \Gamma^*$ באשר $c_i \cap Q = c_j \cap Q$ לכל $i, j \in [k]$ אזי $c_1 \$ c_2 \$ \dots \$ c_k$

קונפיגורציה התחלתית במכונת טיורינג רב-סרטית: תהא M מ"ט רב-סרטית אזי קונפיגורציה c עבורה קיים $v \in \Sigma^*$ המקיימת $c = q_0 \perp \$ q_0 \perp \$ \dots \$ q_0 \perp$

מסקנה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי מכונת טיורינג ומכונת טיורינג רב-סרטית הינן מודלים שקולים.

מודל RAM: יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהייה $\pi_1 \dots \pi_p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $(k, (\pi_1 \dots \pi_p))$

מספר הרגיסטרים במודל RAM: יהי (k, Π) מודל RAM אזי k .

פקודות במודל RAM: יהי (k, Π) מודל RAM אזי Π .

קונפיגורציה במודל RAM: יהי (k, Π) מודל RAM יהיו $R_0 \dots R_k \text{ PC} \in \mathbb{N}$ ותהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $(T, \{R_1 \dots R_k\}, \text{PC})$.

מונה התוכנית בקונפיגורציה: יהי (k, Π) מודל RAM ותהא (T, R, PC) קונפיגורציה אזי PC .

רגיסטרים בקונפיגורציה: יהי (k, Π) מודל RAM ותהא (T, R, PC) קונפיגורציה אזי R .

זיכרון בקונפיגורציה: יהי (k, Π) מודל RAM ותהא (T, R, PC) קונפיגורציה אזי T .

קונפיגורציה עוברת במודל RAM: יהי (k, Π) מודל RAM ותהא (T, R, PC) קונפיגורציה אזי קונפיגורציה (T', R', PC') באשר $\text{PC}' = \text{PC} + 1$

• קיים $i \in [k]$ עבורו לכל $j \in [k] \setminus \{i\}$ מתקיים $R'_j = R_j$ וכן קיים $\pi \in \Pi \cup \{\text{Id}\}$ המקיים $R'_i = \pi(R_i)$

• קיים $i \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}$ מתקיים $T'(j) = T(j)$ וכן קיים $\pi \in \Pi \cup \{\text{Id}\}$ המקיים $T'(i) = \pi(T(i))$

אלגוריתם במודל RAM: יהי (k, Π) מודל RAM אזי פונקציה δ מקונפיגורציות לקונפיגורציות עבורה לכל קונפיגורציה C מתקיים C עוברת ל- $\delta(C)$

סימון: יהי (k, Π) מודל RAM ויהי $x \in \mathbb{N}$ נגדיר $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך $T(n) = \begin{cases} x & n=0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ אזי $\text{Start}_x = (T, \{0\}, 0)$

סימון: יהי (k, Π) מודל RAM יהי A אלגוריתם ויהי $x \in \mathbb{N}$ אזי $A_{\text{stop}} = \min \{n \in \mathbb{N} \mid A^{(n+1)}(\text{Start}_x) = A^{(n)}(\text{Start}_x)\}$

ריצה של מודל RAM: יהי (k, Π) מודל RAM יהי A אלגוריתם ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A^{(A_{\text{stop}})}(\text{Start}_x)$

הערה: ריצת מודל RAM זהה לריצת מעבד MIPS.

טענה: מכונת טיורינג ומודל RAM הם מודלים שקולים.

מכונת טיורינג לא-דטרמיניסטית (מטל"ד): תהא $Q \neq \emptyset$ קבוצה סופית יהי Σ אלפבית יהי Γ אלפבית עבורו $\Sigma \subseteq \Gamma$ וכן $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$ יהיו $q_0, q_a, q_r \in Q$ באשר $q_a \neq q_r$ ותהא $\delta : (Q \setminus \{q_a, q_r\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ אזי $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_a, q_r)$.
קונפיגורציה עוברת: תהא N מטל"ד תהא $q \in Q$ ותהא $b \in \Gamma$ ותהינה $u, v \in \Gamma^*$ באשר $uqbv$ קונפיגורציה אזי קונפיגורציה c' עבורה קיימת $\delta' : (Q \setminus \{q_a, q_r\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ $\delta'(q, b) \in \delta(q, b)$ וכן $uqbv$ הינה δ' -עוברת ל- c' .
עץ חישוב: תהא N מטל"ד ויהי $x \in \Sigma^*$ אזי עץ קונפיגורציות $T_{N,x}$ עם שורש q_0x עבורו לכל c, c' קונפיגורציות מתקיים c צאצא של $c' \iff c'$ עוברת ל- c .

מכונת טיורינג לא-דטרמיניסטית מקבלת מילה: תהא N מטל"ד אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו קיים עלה מקבל ב- $T_{N,x}$.

מכונת טיורינג לא-דטרמיניסטית דוחה מילה: תהא N מטל"ד אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו $T_{N,x}$ סופי וכן x אינו מתקבל על ידי N .

שפה של מכונת טיורינג לא-דטרמיניסטית: תהא N מטל"ד אזי $L(N) = \{x \in \Sigma^* \mid x \text{ מקבל את } N\}$.

מכונת טיורינג לא-דטרמיניסטית לא עוצרת על קלט: תהא N מטל"ד אזי $x \in \Sigma^*$ עבורו N לא מקבלת ולא דוחה את x .

טענה: מכונת טיורינג ומכונת טיורינג לא-דטרמיניסטית הינן מודלים שקולים.

שפות כריעות למחצה/שפות ניתנות למניה רקורסיבית/שפות ניתנות לקבלה: יהי Σ אלפבית אזי

$\mathcal{RE} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L = L(M) \text{ עבורה } M \text{ קיימת מ"ט}\}$ עבודה

מכונת טיורינג מכריע שפה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מ"ט M עבורה $L = L(M)$ וכן לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים כי M עוצרת על x .

שפות כריעות/שפות רקורסיביות: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{R} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ המכריעה את } M \text{ קיימת מ"ט}\}$

מסקנה: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{RE}$

מונה עבור שפה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מ"ט E מעל האלפבית $\Sigma \cup \{\$, \}$ עבורו

• לכל $q \in Q$ ולכל $\sigma \in \Gamma$ מתקיים $\delta(q, \sigma) = (q', \sigma', R)$

• הרצת E על הקונפיגורציה ε מקיימת

- לכל $x \in L$ מתקיים כי $\$x\$$ על הסרט לאחר מספר סופי של צעדים.

- לכל $x \notin L$ מתקיים כי $\$x\$$ לא על הסרט לעולם.

טענה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(L \in \mathcal{RE}) \iff (L \text{ קיים ל-} \mathcal{L} \text{ מונה})$.

מונה לקסיקוגרפי: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מונה E עבור L עבורו לכל $x, y \in L$ באשר $x \leq_{\text{lex}} y$ מתקיים כי $\$x\$$ רשום על הסרט לפני $\$y\$$.

טענה: תהא $L \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(L \in \mathcal{R}) \iff (L \text{ קיים ל-} \mathcal{L} \text{ מונה לקסיקוגרפי})$.

שפה $\text{co}\mathcal{RE}$: יהי Σ אלפבית אזי $\text{co}\mathcal{RE} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in \mathcal{RE}\}$

טענה: $\mathcal{R} = \mathcal{RE} \cap \text{co}\mathcal{RE}$

קידוד בינארי של מכונת טיורינג: פונקציה $f : \{M \mid M \text{ מ"ט}\} \rightarrow \{0, 1\}^*$ f חח"ע עד כדי שינוי שמות.

סימון: תהא M מ"ט אזי $\langle M \rangle$ הינו הקידוד הבינארי של M .

הערה: נשתמש בסימון $\langle \cdot \rangle$ על מנת לקודד כל אובייקט לקידוד בינארי.

הערה: נניח כי קידוד ופענוח הן פעולות פשוטות ובדיקת נכונות קידוד היא \mathcal{R} .

סימון: תהא M מ"ט ותהא x מילה אזי $\langle M, x \rangle$ הינו הקידוד הבינארי של M מאותחל עם x .

משפט מכונת טיורינג אוניברסלית: קיימת מ"ט U מעל $\{0, 1\}$ עבורה

• לכל מ"ט M ולכל קלט x של M מתקיים $(U \text{ מקבלת את } \langle M, x \rangle) \iff (M \text{ מקבלת את } x)$.

• לכל מ"ט M ולכל קלט x של M מתקיים $(U \text{ דוחה את } \langle M, x \rangle) \iff (M \text{ דוחה את } x)$.

• לכל מ"ט M ולכל קלט x של M מתקיים $(U \text{ לא עוצרת עבור } \langle M, x \rangle) \iff (M \text{ לא עוצרת עבור } x)$.

• לכל $x \in \{0, 1\}^*$ באשר $x \notin \text{Im}(f)$ מתקיים כי U דוחה את x .

טענה: קיימת $L \subseteq \{0, 1\}^*$ שפה עבורה $L \notin \mathcal{RE} \cup \text{co}\mathcal{RE}$.

הגדרה: $\text{ACC} = \{\langle M, x \rangle \mid (M \text{ מ"ט}) \wedge (x \text{ מילה}) \wedge (x \text{ מקבלת את } M)\}$

טענה: $\text{ACC} \in \mathcal{RE}$

למה: לא קיימת מ"ט M מעל $\{0, 1\}$ עבורה $L(M) = \{\langle N \rangle \mid \langle N \rangle \notin L(N)\}$.

למה: תהא M מ"ט המכריעה את ACC אזי קיימת מ"ט N המכריעה את $\{\langle N \rangle \mid \langle N \rangle \notin L(N)\}$.

טענה: $\text{ACC} \notin \mathcal{R}$

הגדרה: $\text{HALT} = \{\langle M, x \rangle \mid (M \text{ מ"ט}) \wedge (x \text{ מילה}) \wedge (x \text{ עוצרת על } M)\}$

טענה: $\text{HALT} \in \mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{EMPTY} = \{\langle M \rangle \mid (M \text{ מ"ט}) \wedge (L(M) = \emptyset)\}$.

טענה: $\text{EMPTY} \notin \mathcal{R}$.

מכונת טיורינג מחשבת פונקציה: תהא M מ"ט ותהא $D \subseteq \Sigma$ אזי $f : D \rightarrow (\Gamma \setminus \{\sqcup\})^*$ עבורה לכל $x \in D$ מתקיים כי M עוצרת על x וכן הסרט בסוף הריצה הינו $\sqcup^* f(x)$.

פונקציה חשיבה: תהא $D \subseteq \Sigma$ אזי $f : D \rightarrow (\Gamma \setminus \{\sqcup\})^*$ עבורה קיימת מ"ט M המחשבת את f .

רדוקציית מיפוי: יהיו Δ, Σ אלפביתים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה אזי $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ חשיבה עבורה לכל $x \in \Sigma^* \iff (f(x) \in B)$ מתקיים.

סימון: יהיו Δ, Σ אלפביתים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה אזי $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ רדוקציית מיפוי אזי $A \leq_m B$.

טענה: $\text{EMPTY} \in \text{co}\mathcal{RE}$.

טענה: תהיינה A, B שפות באשר $B \in \mathcal{R}$ וכן $A \leq_m B$ אזי $A \in \mathcal{R}$.

מסקנה: תהיינה A, B שפות באשר $A \notin \mathcal{R}$ וכן $A \leq_m B$ אזי $B \notin \mathcal{R}$.

הערה: יש דבר כזה רדוקציה כללית שמכלילה את רדוקציית המיפוי, לא עברנו על זה פורמלית, מסומן \leq .

מסקנה: $\{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle \notin L(M)\} \leq \text{ACC}$.

מסקנה: $\text{ACC} \leq_m \text{HALT}$.

מסקנה: $\text{ACC} \leq \text{EMPTY}$.

הגדרה: $\text{REG} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \text{ רגולרית}\}$.

טענה: $\text{REG} \notin \mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{EQ} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$.

טענה: $\text{EQ} \notin \mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{HALT}_\varepsilon = \{\langle M \rangle \mid M \text{ עוצר על } \varepsilon\}$.

טענה: $\text{HALT} \leq_m \text{HALT}_\varepsilon$.

טענה: תהא $A \in \mathcal{R}$ ותהא $B \in \mathcal{P}(\Sigma^*) \setminus \{\Sigma^*, \emptyset\}$ אזי $A \leq_m B$.

למה: תהיינה A, B שפות ותהא f רדוקציית מיפוי מ- A ל- B אזי f רדוקציית מיפוי מ- \overline{A} ל- \overline{B} .

טענה: תהיינה A, B שפות באשר $A \leq_m B$ אזי

• אם $B \in \mathcal{RE}$ אזי $A \in \mathcal{RE}$.

• אם $B \in \text{co}\mathcal{RE}$ אזי $A \in \text{co}\mathcal{RE}$.

טענה: $\text{ACC} \leq_m \text{EQ}$ וכן $\overline{\text{ACC}} \leq_m \text{EQ}$.

מסקנה: $\text{EQ} \notin \mathcal{RE} \cup \text{co}\mathcal{RE}$.

תכונה סמנטית: יהי Σ אלפבית אזי $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$.

הגדרה: תהא \mathcal{C} תכונה סמנטית אזי $L_{\mathcal{C}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) \in \mathcal{C}\}$.

משפט רייס: תהא $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{RE}) \setminus \{\mathcal{RE}, \emptyset\}$ תכונה סמנטית אזי $L_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{C} \in \{\mathcal{RE}, \emptyset\}$ אזי $L_{\mathcal{C}} \in \mathcal{R}$.

הגדרה: $\text{PRIME} = \{(p)_2 \mid p \in \mathbb{P}\}$.

הערה: קידוד מספרים תמיד יעשה בבסיס 2.

הגדרה: $\text{EQPRIME} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \text{PRIME}\}$.

טענה: $\text{EQPRIME} \notin \mathcal{R}$.

טענה משפט רייס הרחבה ראשונה: תהא $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{RE} \setminus \{\emptyset\}) \setminus \{\emptyset\}$ אזי $L_{\mathcal{C}} \notin \text{co}\mathcal{RE}$.

טענה משפט רייס הרחבה שנייה: תהא $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{RE}) \setminus \{\mathcal{RE}\}$ באשר $\emptyset \in \mathcal{C}$ אזי $L_{\mathcal{C}} \notin \mathcal{RE}$.

מסקנה: $\text{REG} \notin \mathcal{RE}$.

הגדרה: $\text{ALL} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$.

למה: $\overline{\text{HALT}} \leq_m \text{ALL}$.

טענה: $\text{ALL} \notin \mathcal{RE} \cup \text{co}\mathcal{RE}$.

חסם עליון לזמן ריצה של מכונת טיורינג: תהא M מ"ט אזי $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \Sigma^n$ מתקיים כי M על הקלט x מבצעת לכל היותר $T(n)$ צעדים.

הגדרה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $\{M \mid \text{מ"ט שרצה בזמן } \mathcal{O}(T(n)) \mid L(M)\} = \text{DTime}(T(n))$.
טענה: $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\} \in \text{DTime}(n^2)$.

מסקנה: $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\} \in \text{DTime}(n \log(n))$.

משפט: תהא $t(n) = o(n \log(n))$ ותהא $L \in \text{DTime}(t(n))$ אזי L רגולרית.

מסקנה: תהא $t(n) = o(n \log(n))$ אזי $\{0^k 1^k \mid k \geq 0\} \notin \text{DTime}(t(n))$.

פונקציה חשיבה בזמן: פונקציה $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה קיימת מ"ט M המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי M על הקלט 1^n מחשבת את $(T(n))_2$ בזמן $\mathcal{O}(T(n))$.

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן שאינה קבועה אזי $T(n) = \Omega(n)$.

משפט מכונת טיורינג אוניברסלית עם טיימר: קיימת מ"ט אוניברסלית U וקיים $C \in \mathbb{R}$ עבורם לכל מ"ט M ולכל קלט x באשר M עוצרת על הקלט x לאחר t צעדים מתקיים כי U עוצרת על הקלט $\langle M, x \rangle$ תוך $C \cdot t$ צעדים.

משפט: קיימת מ"ט אוניברסלית U וקיים $C \in \mathbb{R}$ עבורם לכל מ"ט M לכל קלט x ולכל $t \in \mathbb{N}$ מתקיים

• אם M עוצרת על הקלט x לאחר לכל היותר t צעדים אזי U מקבלת את $\langle M, x, t \rangle$.

• אם M דוחה את x או לא עוצרת לאחר t צעדים אזי U דוחה את $\langle M, x, t \rangle$.

• U עוצרת לאחר $C \cdot t \log(t)$ צעדים.

משפט היררכיית הזמן: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן ותהא $t(n) = o\left(\frac{T(n)}{\log(T(n))}\right)$ אזי $\text{DTime}(t(n)) \subsetneq \text{DTime}(T(n))$.

מסקנה: יהיו $1 \leq c < d$ אזי $\text{DTime}(n^c) \subsetneq \text{DTime}(n^d)$.

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באשר $T(n) \geq n$ ותהא M מ"ט רב-סרסית שרצה בזמן $T(n)$ אזי קיימת מ"ט M' שרצה בזמן $\mathcal{O}(T^2(n))$ עבורה $L(M) = L(M')$.

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באשר $T(n) \geq n$ ותהא M מודל RAM שרצה בזמן $T(n)$ אזי קיימת מ"ט M' שרצה בזמן $\mathcal{O}(T^3(n))$ עבורה $L(M) = L(M')$.

חסם עליון לזמן ריצה של מכונת טיורינג לא-דטרמיניסטית: תהא N מטל"ד אזי $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \Sigma^n$ מתקיים כי $T_{N,x}(n)$ בעומק לכל היותר $T(n)$.

הגדרה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $\{N \mid \text{מטל"ד שרצה בזמן } \mathcal{O}(T(n)) \mid L(N)\} = \text{NTime}(T(n))$.

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באשר $T(n) \geq n$ ותהא N מטל"ד שרצה בזמן $T(n)$ אזי קיימת מ"ט M שרצה בזמן $2^{\mathcal{O}(T(n))}$ עבורה $L(N) = L(M)$.

שפה \mathcal{P} : $\mathcal{P} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DTime}(n^c)$.

הגדרה: $\text{PATH} = \{\langle G, s, t \rangle \mid t \text{ מסלול מ-} s \text{ ל-} t\}$.

טענה: $\text{PATH} \in \mathcal{P}$.

משפט: $\text{PRIME} \in \mathcal{P}$.

שפה \mathcal{NP} : $\mathcal{NP} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NTime}(n^c)$.

מסקנה: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$.

הגדרה: $\text{HAMPATH} = \{\langle G, s, t \rangle \mid t \text{ מסלול המילטוני מ-} s \text{ ל-} t\}$.

טענה: $\text{HAMPATH} \in \mathcal{NP}$.

השערה: $\text{HAMPATH} \notin \mathcal{P}$. השערה פתוחה

שפה \mathcal{EXP} : $\mathcal{EXP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{DTime}(2^{n^k})$.

שפה \mathcal{NEXP} : $\mathcal{NEXP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{NTime}(2^{n^k})$.

טענה: $\mathcal{EXP} \subseteq \mathcal{NEXP}$.

מסקנה: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP} \subseteq \mathcal{NEXP}$.

טענה: $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{EXP}$.

טענה: $\mathcal{NP} \subsetneq \mathcal{NEXP}$.

טענה: $(\mathcal{P} = \mathcal{NP}) \implies (\mathcal{EXP} = \mathcal{NEXP})$.

סימון: תהא M מ"ט ויהי $x \in \Sigma^*$ אזי $M(x)$ הינו ריצת M על x .

מוודא לשפה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מ"ט V מעל אלפבית $\{', '\}\cup \Sigma$ המקיים

• שלמות: יהי $x \in \mathcal{L}$ אזי קיים $w \in \Sigma^*$ עבורו $V(x, w)$ מקבלת.

• נאותות: יהי $x \notin \mathcal{L}$ אזי לכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים כי $V(x, w)$ דוחה.

טענה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(\mathcal{L} \in \mathcal{RE}) \iff (\text{קיים מוודא ל-}\mathcal{L})$.

מדווא פולינומי לשפה: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מוודא V ל- \mathcal{L} עבורו קיים $p \in \mathbb{N}[x]$ המקיים כי לכל $x, w \in \Sigma^*$ מתקיים כי $V(x, w)$ עוצרת לכל היותר אחרי $p(|x|)$ צעדים.

הגדרה: $\text{CLIQUE} = \{\langle G, k \rangle \mid k \text{ גודל } G \text{ גרף לא מכוון בעל קליקה מגודל } k\}$.

טענה: קיים מוודא פולינומי ל- CLIQUE .

קבוצת צמתים בלתי תלויה (ב"ת): יהי G גרף אזי $I \subseteq V$ עבורה לכל $u, v \in I$ מתקיים $(u, v) \notin E$.

הגדרה: $\text{IS} = \{\langle G, k \rangle \mid k \text{ גודל } G \text{ גרף לא מכוון בעל קבוצה ב"ת מגודל } k\}$.

טענה: קיים מוודא פולינומי ל- IS .

הגדרה: $\text{FACTOR} = \{\langle N, k \rangle \mid \exists d \in [k]. (d|N)\}$.

טענה: קיים מוודא פולינומי ל- FACTOR .

הגדרה: $\text{SUBSETSUM} = \{\langle S, t \rangle \mid (S \subseteq \mathbb{N}) \wedge (\exists T \subseteq S. \sum_{i \in T} i = t)\}$.

טענה: קיים מוודא פולינומי ל- SUBSETSUM .

משפט: תהא $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(\mathcal{L} \in \mathcal{NP}) \iff (\text{קיים מוודא פולינומי ל-}\mathcal{L})$.

מסקנה: $\text{CLIQUE}, \text{IS}, \text{FACTOR}, \text{SUBSETSUM} \in \mathcal{NP}$.

השערה: $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$. השערה פתוחה

פונקציה חשיבה פולינומית: תהא $D \subseteq \Sigma$ אזי $f : D \rightarrow (\Gamma \setminus \{\sqcup\})^*$ עבורה קיימת מ"ט M המחשבת את f וכן קיים $p \in \mathbb{N}[x]$ המקיים כי לכל $x \in \Sigma^*$ עוצרת לכל היותר אחרי $p(|x|)$ צעדים.

רדוקציית מיפוי פולינומית: יהיו Δ, Σ אלפבייטים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה אזי רדוקציית מיפוי f מ- A ל- B חשיבה פולינומית.

סימון: יהיו Δ, Σ אלפבייטים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה ותהא $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ רדוקציית מיפוי פולינומית אזי $A \leq_p B$.

טענה: $\text{CLIQUE} \leq_p \text{IS}$.

טענה: תהיינה A, B שפות באשר $B \in \mathcal{P}$ וכן $A \leq_p B$ אזי $A \in \mathcal{P}$.

שפה \mathcal{NP} -קשה: $\mathcal{NPH} = \{\mathcal{L} \mid \forall L \in \mathcal{NP} (L \leq_p \mathcal{L})\}$.

שפה \mathcal{NP} -שלמה: $\mathcal{NPC} = \mathcal{NP} \cap \mathcal{NPH}$.

טענה: תהא $\mathcal{L} \in \mathcal{NPC}$ אזי $(\mathcal{L} \in \mathcal{P}) \iff (\mathcal{P} = \mathcal{NP})$.

הגדרה: קיים w עבורו $M(x, w)$ מקבלת לכל היותר אחרי t צעדים $\text{ACC}_{\mathcal{NP}} = \{\langle M, x, 1^t \rangle \mid \dots\}$.

טענה: $\text{ACC}_{\mathcal{NP}} \in \mathcal{NPC}$.

טענה: תהיינה $A, B \in \mathcal{NP}$ שפות באשר $A \in \mathcal{NPC}$ וכן $A \leq_p B$ אזי $B \in \mathcal{NPC}$.

מעגל ספיק: מעגל C עבורו קיים $x \in \{0, 1\}^n$ המקיים $C(x) = 1$.

פסוק $k\text{-CNF}$: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי פסוק $\varphi \in \text{CNF}$ עבורו קיים $m \in \mathbb{N}$ וקיימת $A \in M_{m \times k}(\{p_i\} \cup \{\neg p_i\})$ המקיימת $\varphi = \bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^k (A)_{i,j}$.

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $k\text{SAT} = \{\langle \varphi \rangle \mid (\varphi \in k\text{CNF}) \wedge (\varphi \text{ ספיקה})\}$.

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $k\text{SAT} \in \mathcal{NP}$.

טענה: $2\text{SAT} \in \mathcal{P}$.

משפט קוק-לויין: $3\text{SAT} \in \mathcal{NPC}$.

טענה: יהיו $k, \ell \in \mathbb{N}_+$ באשר $k \leq \ell$ אזי $k\text{SAT} \leq_p \ell\text{SAT}$.

מסקנה: יהי $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ אזי $k\text{SAT} \in \mathcal{NPC}$.

משפט: $3\text{SAT} \leq_p \text{CLIQUE}$.

מסקנה: $\text{CLIQUE}, \text{IS} \in \mathcal{NPC}$.

מספר הפסוקיות המסופקות: יהיו $k, m \in \mathbb{N}_+$ תהא $A \in M_{m \times k}(\{p_i\} \cup \{\neg p_i\})$ ותהא v השמה אזי

$\text{CI} \left(\bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^k (A)_{i,j}, v \right) = \left| \left\{ i \in [m] \mid \bar{v} \left(\bigvee_{j=1}^k (A)_{i,j} \right) = \text{True} \right\} \right|$
הגדרה: $C - \text{CNF} = \{\langle \varphi, k \rangle \mid (\varphi \in \text{CNF}) \wedge (\exists v (\text{CI}(\varphi, v) = k))\}$.

טענה: $C - \text{CNF} \in \mathcal{NPC}$

הגדרה: $\text{DNFSAT} = \{ \langle \varphi \rangle \mid (\varphi \in \text{DNF}) \wedge (\exists \text{ ספיקה } \varphi) \}$

טענה: $\text{DNFSAT} \in \mathcal{P}$

הגדרה: $C - \text{DNF} = \{ \langle \varphi, k \rangle \mid (\varphi \in \text{DNF}) \wedge (\exists v (\text{CI}(\varphi, v) = k)) \}$

טענה: $C - \text{CNF} \leq_p C - \text{DNF}$

מסקנה: $C - \text{DNF} \in \mathcal{NPC}$

הגדרה: $\text{PARTITION} = \{ S \subseteq \mathbb{N} \mid (S \text{ מולטי קבוצה}) \wedge (\exists T \subseteq S \left(\sum_{i \in T} i = \sum_{i \in S \setminus T} i \right)) \}$

טענה: $\text{PARTITION} \in \mathcal{NPC}$

כיסוי קודקודים: יהי G גרף לא מכוון אזי $C \subseteq V$ עבורה לכל $\{u, v\} \in E$ מתקיים $(u \in C) \vee (v \in C)$.

הגדרה: $\text{VC} = \{ \langle G, k \rangle \mid k \text{ כיסוי קודקודים מגודל } k \}$

טענה: $\text{VC} \in \mathcal{NPC}$

בסיס פונקציות: יהי Σ אלפבית אזי $\Sigma^n \rightarrow \Sigma$ $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Sigma^n \rightarrow \Sigma)$

מעגל: יהי Σ אלפבית יהי B בסיס פונקציות מעל Σ תהיינה $k_1 \dots k_n \in \mathbb{N}_+$ תהיינה $f_1 \dots f_n \in B$ באשר $f_i : \Sigma^{k_i} \rightarrow \Sigma$ לכל $i \in [n]$ ותהיינה $x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k \in \Sigma$ אזי גרף מכוון G מעל $\{f_1 \dots f_n, x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_k\}$ המקיים

• G חסר מעגלים מכוונים.

• לכל $i \in [m]$ מתקיים $\deg^-(x_i) = 0$.

• לכל $i \in [n]$ מתקיים $\deg^-(f_i) = k_i$.

• לכל $i \in [k]$ מתקיים $\deg^-(y_i) = 1$ וכן $\deg^+(y_i) = 0$.

הערה: נשמור על הטרמינולוגיה ממעגל בוליאני כהכללה טבעית.

מטריצת הקונפיגורציות/טאבלו: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \leq T(n)$ תהא M מ"ט שרצה בזמן $T(n)$ יהי $z \in \{0, 1\}^n$

ותהיינה $c_1 \dots c_i$ קונפיגורציות הריצה של $M(z)$ אזי $(\Sigma \uplus \Gamma)$ $\tau_{M,z} \in M_{T(n)+1}$ המקיימת $R_i(\tau_{M,z}) = c_i$.

הערה: במטריצת הקונפיגורציות נניח כי $\delta(q_a, \sigma) = (q_a, \sigma, R)$ וכן $\delta(q_r, \sigma) = (q_r, \sigma, R)$.

הגדרה: $\text{CIRSAT} = \{ \langle C, x \rangle \mid (C \text{ מעגל בוליאני}) \wedge (\exists w \in \{0, 1\}^* (C(x, w) = 1)) \}$

הגדרה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \leq T(n)$ ותהא M מ"ט רצה בזמן $T(n)$ נגדיר מעגלים מעל $\Sigma \uplus \Gamma$ כך

• יהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ אזי $C_{\text{inp}}(z) = R_0(\tau_{M,z})$

• יהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ ויהי $i \in \{0, \dots, T(n) - 1\}$ אזי $C_{\text{next}}(R_i(\tau_{M,z})) = R_{i+1}(\tau_{M,z})$

• יהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ אזי $C_{\text{out}}(R_{T(n)}(\tau_{M,z})) = M(z)$

• יהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ אזי $C_{M,n}^{\Sigma \uplus \Gamma}(z) = (C_{\text{out}} \circ C_{\text{next}} \circ \dots \circ C_{\text{next}} \circ C_{\text{inp}})(z)$

טענה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \leq T(n)$ ותהא M מ"ט רצה בזמן $T(n)$ אזי $|C_{M,n}^{\Sigma \uplus \Gamma}| = \mathcal{O}(T^2(n))$ וכן קיימת

פונקציה f חשיבה בזמן $\text{poly}(T(n))$ עבורה $f(1^n) = \langle C_{M,n}^{\Sigma \uplus \Gamma} \rangle$.

מסקנה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \leq T(n)$ ותהא M מ"ט רצה בזמן $T(n)$ ויהי $z \in \Sigma \uplus \Gamma$ אזי $C_{M,n}^{\Sigma \uplus \Gamma}(z) = M(z)$

טענה: יהי Π אלפבית אזי קיימת פונקציה חשיבה פולינומית f עבורה לכל מעגל בוליאני C מתקיים כי $f(C)$ מעגל בוליאני מעל

בסיס דה-מורגן באשר $C(z) = f(C)$ לכל $z \in \{0, 1\}^n$ וכן $|f(C)| = \mathcal{O}(|C|)$.

למה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \leq T(n)$ ותהא M מ"ט רצה בזמן $T(n)$ אזי קיימת פונקציה חשיבה f בזמן

$\text{poly}(T(n))$ עבורה $f(1^n) = \langle C_{M,n} \rangle$ באשר $C_{M,n}$ מעגל עבורו $|C_{M,n}| = \mathcal{O}(T^2(n))$ וכן לכל $z \in \{0, 1\}^n$ מתקיים $M(z)$

מקבלת $(C_{M,n}(z) = 1) \iff (C(z) = 1)$.

טענה: $\text{CIRSAT} \in \mathcal{NPC}$

מסקנה: תהא $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה בזמן באשר $n \leq T(n)$ ותהא $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}$ לא ניתנת לחישוב על ידי משפחת מעגלים

מגודל $\mathcal{O}(T(n))$ אזי f לא ניתנת לחישוב על ידי מ"ט בזמן $\sqrt{T(n)}$.

טענה: $\text{CIRSAT} \leq_p 3\text{SAT}$

טענה: $3\text{SAT} \leq_p \text{SUBSETSUM}$

מסקנה: $\text{SUBSETSUM} \in \mathcal{NPC}$

טענה: $3\text{SAT} \leq_p \text{HAMPATH}$

מסקנה: $\text{HAMPATH} \in \mathcal{NPC}$

שפה $\text{coNP} = \{ L \mid \bar{L} \in \mathcal{NP} \}$

השערה: $\text{co}\mathcal{NP} \neq \mathcal{NP}$. השערה פתוחה

טענה: תהיינה A, B שפות באשר $A \leq_p B$ אזי

• אם $B \in \mathcal{NP}$ אזי $A \in \mathcal{NP}$.

• אם $B \in \text{co}\mathcal{NP}$ אזי $A \in \text{co}\mathcal{NP}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{L} \in \mathcal{NPC}$ אזי $(\mathcal{L} \in \text{co}\mathcal{NP}) \iff (\mathcal{L} \in \mathcal{NP})$.

טענה: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \cap \text{co}\mathcal{NP}$.

טענה: $\text{FACTOR} \in \mathcal{NP} \cap \text{co}\mathcal{NP}$.

השערה: $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP} \cap \text{co}\mathcal{NP}$. השערה פתוחה

הגדרה: $\text{MATMULT} = \{ \langle A, B, C \rangle \mid (A, B, C \in M_n(\mathbb{Z})) \wedge (A \cdot B = C) \}$.

טענה: תהא $D \in M_n(\mathbb{Z})$ באשר $D \neq 0$ אזי $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^n} (D \cdot r = 0) \leq 0.5$

מסקנה: קיימת מ"ט M אשר רצה בזמן $\mathcal{O}(n^2)$ עבורה

• לכל $x \in \{0,1\}^*$ אשר אינו קידוד של שלשת מטריצות $M(x)$ דוחה.

• לכל $x \in \{0,1\}^*$ עבורו קיימות $A, B, C \in M_n(\mathbb{Z})$ המקיימות $A \cdot B = C$ וכן $x = \langle A, B, C \rangle$ מתקיים $M(x)$ מקבלת.

• לכל $x \in \{0,1\}^*$ עבורו קיימות $A, B, C \in M_n(\mathbb{Z})$ המקיימות $A \cdot B \neq C$ וכן $x = \langle A, B, C \rangle$ מתקיים

$$\mathbb{P}(M(x)) \leq 2^{-100}$$

נוסחה אריתמטית: יהי \mathbb{F} שדה ויהי C מעגל מעל \mathbb{F} עם הבסיס $\{+, \times\}$ אזי נוסחה ב- C .

סימון: תהא φ נוסחה אריתמטית מעל \mathbb{F} עבורה לכל $x_1 \dots x_n \in \mathbb{F}$ מתקיים $\varphi(x_1 \dots x_n) = 0$ אזי $\varphi \equiv 0$.

הגדרה: $\text{ZE}_{\mathbb{F}} = \{ \langle \varphi \rangle \mid \varphi \equiv 0 \text{ עבורה } \mathbb{F} \}$

טענה: $\overline{\text{ZE}_{\mathbb{Z}_2}} \in \mathcal{NPC}$.

טענה: תהא φ נוסחה אריתמטית בעומק h מעל \mathbb{F} אזי φ מחשבת פולינום מדרגה לכל היותר 2^h .

טענה: תהא φ נוסחה אריתמטית מעל \mathbb{F} המחשבת $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ באשר $\deg(f) < |\mathbb{F}|$ אזי $(\varphi \equiv 0) \iff (f = 0)$.

מסקנה: יהי \mathbb{F} שדה אינסופי אזי $\text{ZE}_{\mathbb{F}} \in \mathcal{R}$.

דרגה טוטאלית של מונום: יהיו $d_1 \dots d_n \in \mathbb{N}$ אזי $\deg\left(\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}\right) = \sum_{i=1}^n d_i$

דרגה טוטאלית של פולינום: תהא $d \in M_{k \times n}(\mathbb{N})$ אזי $\deg\left(\sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^n x_j^{d_{i,j}}\right) = \max\left\{\deg\left(\prod_{j=1}^n x_j^{d_{i,j}}\right) \mid i \in [k]\right\}$

למה שוורץ-זיפל: יהי $f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ באשר $f \neq 0$ ותהא $S \subseteq \mathbb{F}$ סופית אזי $\mathbb{P}_{a_1, \dots, a_n \leftarrow S} (f(a_1 \dots a_n) = 0) \leq \frac{\deg(f)}{|S|}$

מסקנה: קיימת מ"ט M עבורה לכל $x \in \{0,1\}^*$ מתקיים

• אם x אינו קידוד של נוסחה אריתמטית מעל \mathbb{R} מתקיים $M(x)$ דוחה.

• אם קיימת φ נוסחה אריתמטית מעל \mathbb{R} המקיימת $\varphi \equiv 0$ וכן $x = \langle \varphi \rangle$ מתקיים $M(x)$ מקבלת בזמן $\text{poly}(|\varphi|)$.

• אם קיימת φ נוסחה אריתמטית מעל \mathbb{R} המקיימת $\varphi \not\equiv 0$ וכן $x = \langle \varphi \rangle$ מתקיים $M(x) \leq 0.01$ (מקבלת) בזמן $\text{poly}(|\varphi|)$.

מכונת טיורינג אקראית: תהא $T(n)$ חשיבה בזמן אזי מ"ט דו-סרטית M בעלת זמן ריצה T עם קונפיגורציה התחלתית $x\$r$ באשר $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$.

חסם עליון לזמן ריצה של מכונת טיורינג אקראית: תהא $T(n)$ חשיבה בזמן ותהא M מכונת טיורינג אקראית אזי T .

סימון: תהא M מ"ט אקראית עם זמן ריצה $T(n)$ יהי $x \in \{0,1\}^*$ ויהי $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$ אזי $M(x;r) = M(x\$r)$

קלט של מכונת טיורינג אקראית: תהא M מ"ט אקראית עם זמן ריצה $T(n)$ יהי $x \in \{0,1\}^*$ ויהי $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$ אזי x .

אקראיות של מכונת טיורינג אקראית: תהא M מ"ט אקראית עם זמן ריצה $T(n)$ יהי $x \in \{0,1\}^*$ ויהי $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$ אזי r .

סימון: תהא M מ"ט אקראית עם זמן ריצה $T(n)$ יהי x קלט אזי $M(x)$ משתנה מקרי לקבלת $M(x;r)$ עבור $r \in \{0,1\}^{T(|x|)}$ אקראית.

הגדרה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ ותהא שפה \mathcal{L} עבורה קיימת מ"ט אקראית M עם זמן ריצה פולינומי $T(n)$ המקיימת כי החל ממקום מסוים $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

• לכל $x \in \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}} (M(x;r)) \geq \alpha(n)$ (מקבלת)

• לכל $x \notin \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $M(x;r) = 0$ (מקבלת) $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}}$

אזי $\mathcal{L} \in \mathcal{RP}(\alpha)$.

טענה: תהיינה $\alpha, \beta : \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ באשר $\alpha \leq \beta$ החל ממקום מסוים אזי $\mathcal{RP}(\beta) \subseteq \mathcal{RP}(\alpha)$.

טענה: $\mathcal{RP}(1) = \mathcal{P}$.

טענה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow [0,1]$ באשר $0 < \alpha$ החל ממקום מסוים אזי $\mathcal{RP}(\alpha) \subseteq \mathcal{NP}$.

הגדרה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{coRP}(\alpha) = \{\bar{L} \mid L \in \text{RP}(\alpha)\}$.

טענה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ותהא שפה \mathcal{L} אזי $\mathcal{L} \in \text{coRP}(\alpha)$ אם"ם קיימת מ"ט אקראית M עם זמן ריצה פולינומי $T(n)$ המקיימת כי החל ממקום מסויים $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

- לכל $x \in \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}}(M(x;r)) = 1$ (מקבלת $M(x;r)$)
- לכל $x \notin \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}}(M(x;r)) \leq 1 - \alpha(n)$ (מקבלת $M(x;r)$)

טענה: $\text{ZER} \in \text{coRP}(0.99)$.

טענה: יהיו $c, d \in \mathbb{N}$ אזי $\text{RP}(n^{-c}) = \text{RP}(1 - 2^{-n^d})$.

שפה RP : $\text{RP} = \text{RP}(0.5)$.

שפה coRP : $\text{coRP} = \text{coRP}(0.5)$.

הגדרה: תהיינה $\alpha, \beta : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ ותהא שפה \mathcal{L} עבורה קיימת מ"ט אקראית M עם זמן ריצה פולינומי $T(n)$ המקיימת כי החל ממקום מסויים $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

- לכל $x \in \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}}(M(x;r)) \geq \beta(n)$ (מקבלת $M(x;r)$)
 - לכל $x \notin \mathcal{L} \cap \Sigma^n$ מתקיים $\mathbb{P}_{r \leftarrow \{0,1\}^{T(n)}}(M(x;r)) \leq \alpha(n)$ (מקבלת $M(x;r)$)
- אזי $\mathcal{L} \in \text{BPP}(\alpha, \beta)$.

שפה BPP : $\text{BPP} = \text{BPP}(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

טענה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{RP}(\alpha) = \text{BPP}(0, \alpha)$.

טענה: תהא $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ אזי $\text{coRP}(\alpha) = \text{BPP}(1 - \alpha, 1)$.

טענה: תהיינה $\alpha, \beta, \gamma, \delta : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ עבורן $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$ אזי $\text{BPP}(\alpha, \delta) \subseteq \text{BPP}(\beta, \gamma)$.

משפט צ'רנוף-הופדינג: יהי $\delta > 0$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_1, \dots, A_n \sim \text{Ber}(p)$ אזי $\mathbb{P}(|p - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i| \geq \delta) \leq 2^{-\Theta(\delta^2 n)}$.

טענה: יהיו $c, d \in \mathbb{N}$ ותהא $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ חשיבה בזמן פולינומי באשר $n^{-c} \leq \alpha(n) \leq 1 - n^{-c}$ החל ממקום מסויים אזי $\text{BPP}(\alpha(n) - n^{-c}, \alpha(n) + n^{-c}) \subseteq \text{BPP}(2^{-n^d}, 1 - 2^{-n^d})$.

סימון: תהא M מ"ט k -סרטית ותהא $c_1 \$ c_2 \$ \dots \$ c_k$ קונפיגורציה אזי $(c_1 \$ c_2 \$ \dots \$ c_k)^i = c_i$.

סימון: תהא $x \in \Sigma^*$ ותהא $A \subseteq \Sigma^*$ אזי $x \setminus A$ הינה המחזורות x ללא אברי A .

מכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי מ"ט תלת-סרטית M עבורה לכל קונפיגורציות $c_0 \dots c_n$ באשר $c_0 = q_0 x$ וכן c_{i-1} עוברת ל- c_i לכל $i \in [n]$ מתקיים

- סרט לקריאה בלבד: לכל $i \in [n]$ מתקיים $c_i^1 = x \setminus Q$.
 - סרט חסום במקום: לכל $i \in [n]$ מתקיים $|c_{i-1}^2| \leq S(n) + 1$.
 - סרט לכתובה חד-פעמית: לכל $i \in [n]$ ולכל $j \in [|c_{i-1}^3|]$ מתקיים $(c_{i-1}^3 \setminus Q)_j = (c_i^3 \setminus Q)_j$.
- חסם עליון למקום ריצה של מכונת טיורינג:** תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא M מ"ט בעלת סיבוכיות מקום S אזי S .

הערה: נקרא למכונת טיורינג בעלת סיבוכיות מקום מכונת טיורינג.

הגדרה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי M מ"ט שרצה במקום $\mathcal{O}(S(n))$ $\text{DSpace}(S(n)) = \{L(M) \mid \mathcal{O}(S(n))\}$.

שפה PSPACE : $\text{PSPACE} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{DSpace}(n^c)$.

שפה LOGSPACE : $\text{LOGSPACE} = \text{DSpace}(\log(n))$.

סימון: $\text{LOGSPACE} = \text{LSPACE} = \mathcal{L}$.

טענה: $\text{DSpace}(1) = \text{DSpace}(\log(\log(n))) = \{L \mid \text{רגולרית } L\}$.

טענה: תהא T חשיבה בזמן אזי $\text{DTime}(T(n)) \subseteq \text{DSpace}(T(n))$.

טענה: $\mathcal{NP} \subseteq \text{PSPACE}$.

טענה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ באשר $S \geq \log$ אזי $\text{DSpace}(S(n)) \subseteq \text{DTime}(2^{\mathcal{O}(S(n))})$.

מסקנה: $\text{LSPACE} \subseteq \mathcal{P}$.

מסקנה: $\text{PSPACE} \subseteq \mathcal{EXPTIME}$.

פונקציה חשיבה במקום: פונקציה $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה קיימת מ"ט M המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי M על הקלט 1^n מחשבת את $(S(n))_2$ במקום $\mathcal{O}(S(n))$.

משפט היררכיית המקום: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה במקום ותהא $t(n) = o(S(n))$ אזי $\text{DSpace}(t(n)) \subsetneq \text{DSpace}(T(n))$.

מסקנה: $\text{LSPACE} \subsetneq \text{PSPACE}$.

מסקנה: לפחות אחד מהבאים נכון

$$\bullet \text{ LSPACE} \subsetneq \mathcal{P}$$

$$\bullet \mathcal{P} \subsetneq \text{PSPACE}$$

השערה: $\text{LSPACE} \subsetneq \mathcal{P}$ השערה פתוחה

השערה: $\mathcal{P} \subsetneq \text{PSPACE}$ השערה פתוחה

פונקציה חשיבה במקום S : תהא $D \subseteq \Sigma$ אזי $f : D \rightarrow (\Gamma \setminus \{\perp\})^*$ עבורה קיימת מ"ט M בעלת סיבוכיות מקום $S(n)$ המחשבת את f .

רדוקציית מיפוי במקום לוגריתמי: יהיו Δ, Σ אלפבייטים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה אזי רדוקציית מיפוי f מ- A ל- B חשיבה במקום לוגריתמי.

סימון: יהיו Δ, Σ אלפבייטים באשר $\Sigma \subseteq \Delta$ תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה ותהא $B \subseteq \Delta^*$ שפה ותהא $f : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ רדוקציית מיפוי במקום לוגריתמי אזי $A \leq_L B$.

טענה: תהיינה A, B שפות עבורן $A \leq_L B$ אזי $A \leq_p B$.

שפה \mathcal{P} -קשה: $\mathcal{PH} = \{\mathcal{L} \mid \forall L \in \mathcal{P} (L \leq_L \mathcal{L})\}$

שפה \mathcal{P} -שלמה: $\mathcal{PC} = \mathcal{P} \cap \mathcal{PH}$

טענה: תהא f חשיבה במקום $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ תהא g חשיבה במקום $R : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ עבורה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in \Sigma^n$ מתקיים $|f(x)| \leq m(n)$ אזי $g \circ f$ חשיבה במקום $\mathcal{O}(S(n) + \log(m(n)) + R(m(n)))$.

טענה: תהיינה A, B שפות באשר $B \in \text{LSPACE}$ וכן $A \leq_L B$ אזי $A \in \text{LSPACE}$.

מסקנה: תהיינה A, B, C שפות באשר $A \leq_L B$ וכן $B \leq_L C$ אזי $A \leq_L C$.

טענה: תהא $A \in \mathcal{PC} \cap L$ אזי $\mathcal{P} = \text{LSPACE}$.

הגדרה: $\text{CVAL} = \{\langle C, x \rangle \mid (C \text{ מעגל בוליאני}) \wedge (C(x) = 1)\}$

למה קוק-לייון: תהא M מ"ט רצה בזמן פולינומי אזי קיימת פונקציה חשיבה f במקום לוגריתמי עבורה $f(1^n) = \langle C_{M,n} \rangle$ באשר $C_{M,n}$ מעגל עבורו לכל $z \in \{0, 1\}^n$ מתקיים $(M(z)) \iff (C_{M,n}(z) = 1)$.

טענה: $\text{CVAL} \in \mathcal{PC}$

סימון: תהא M מטל"ד k -סרטית ותהא $c_1 \$ c_2 \$ \dots \$ c_k$ קונפיגורציה אזי $(c_1 \$ c_2 \$ \dots \$ c_k)^i = c_i$

מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית בעלת סיבוכיות מקום: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי מטל"ד תלת-סרטית M עבורה לכל קונפיגורציות

$c_0 \dots c_n$ באשר $c_0 = q_0 x$ וכן c_{i-1} עוברת ל- c_i לכל $i \in [n]$ מתקיים

• סרט לקריאה בלבד: לכל $i \in [n]$ מתקיים $c_i^1 = x \setminus Q$

• סרט חסום במקום: לכל $i \in [n]$ מתקיים $|c_{i-1}^2| \leq S(n) + 1$

• סרט לכתיבה חד-פעמית: לכל $i \in [n]$ ולכל $j \in [|c_{i-1}^3|]$ מתקיים $(c_{i-1}^3 \setminus Q)_j = (c_i^3 \setminus Q)_j$

חסם עליון למקום ריצה של מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ותהא M מטל"ד בעלת סיבוכיות מקום S אזי S .

הערה: נקרא למכונת טיורינג לא דטרמיניסטית בעלת סיבוכיות מקום מכונת טיורינג לא דטרמיניסטית.

הגדרה: תהא $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ אזי $\{M \text{ מטל"ד הרצה במקום } \mathcal{O}(S(n)) \mid L(M)\} = \text{NSpace}(S(n))$

שפה NPSpace : $\text{NPSpace} = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{NSpace}(n^c)$

שפה \mathcal{NL} : $\mathcal{NL} = \text{NSpace}(\log(n))$

השערה: $\text{LSPACE} = \mathcal{NL}$ השערה פתוחה

סימון: תהא M מ"ט יהיו $x, y \in \Gamma^*$ ויהי $q \in Q$ אזי $\text{find}_Q(xqy) = |x| + 1$

מוודא במקום לוגריתמי: תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי מ"ט תלת-סרטית V עבורה לכל קונפיגורציות $c_0 \dots c_n$ באשר $c_0 = q_0 x$ וכן c_{i-1} עוברת ל- c_i לכל $i \in [n]$ מתקיים

• סרט לקריאה בלבד: לכל $i \in [n]$ מתקיים $c_i^1 = x \setminus Q$

• סרט עד: לכל $i \in [n]$ מתקיים $\text{find}_Q(c_{i-1}^2) \leq \text{find}_Q(c_i^2)$

• סרט עבודה: לכל $i \in [n]$ מתקיים $|c_{i-1}^3| \leq S(n) + 1$

וכן לכל $x \in \Sigma^*$ מתקיים $(x \in A) \iff (x \in \Sigma^* \text{ עבורו } V(x\$w) \text{ מקבלת})$.

סימון: תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה יהי V מוודא בזמן לוגריתמי ויהיו $x, w \in \Sigma^*$ אזי $V(x, w) = V(x\$w)$

טענה: תהא $A \subseteq \Sigma^*$ שפה אזי $(A \in \mathcal{NL}) \iff (A \leq_L A^*)$ (קיים ל- A^* מוודא לוגריתמי).

הגדרה: $\text{STCON} = \{\langle G, s, t \rangle \mid (G \text{ גרף מכוון}) \wedge (t \text{ ל-} s \text{ מסלול מ-} s \text{ ל-} t)\}$

טענה: $\text{STCON} \in \mathcal{NL}$

שפה \mathcal{NL} -קשה: $\mathcal{NLH} = \{\mathcal{L} \mid \forall L \in \mathcal{NL} (L \leq_L \mathcal{L})\}$

שפה \mathcal{NL} -שלמה: $\mathcal{NLC} = \mathcal{NL} \cap \mathcal{NLH}$

טענה: $\text{STCON} \in \mathcal{NLC}$

מסקנה: $\mathcal{NL} \subseteq \mathcal{P}$

אלגוריתם לקיום מסלול עם חסם לאורכו בגרף מכוון: יהי G גרף מכוון יהיו $s, t \in V$ ויהי $\ell \in \mathbb{N}_+$ אזי

```
function Reach( $G, s, t, \ell$ ):
    if  $\ell = 1$  then
        if  $(s, t) \in E$  then return True
        return False
    for  $v \in V$  do
         $b_1 \leftarrow \text{Reach}(G, s, v, \lceil \frac{\ell}{2} \rceil)$ 
         $b_2 \leftarrow \text{Reach}(G, v, t, \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor)$ 
        if  $b_1 \wedge b_2$  then return True
    end
    return False
```

טענה: יהי G גרף מכוון יהיו $s, t \in V$ ויהי $\ell \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{Reach}(G, s, t, \ell) = \text{True} \iff$ קיים מסלול מ- s ל- t באורך לכל היותר ℓ .
משפט סאביץ': $\text{STCON} \in \text{DSpace}(\log(n)^2)$

מסקנה: $\mathcal{NL} \subseteq \text{DSpace}(\log(n)^2)$

מסקנה: תהא $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חשיבה במקום באשר $S \geq \log$ אזי $\text{NSpace}(S(n)) \subseteq \text{DSpace}(S^2(n))$

מסקנה: $\text{PSPACE} = \text{NPSpace}$

הגדרה: $\text{coNL} = \{L \mid \bar{L} \in \mathcal{NL}\}$

משפט אימרמן-סלפצ'ני: $\overline{\text{STCON}} \in \mathcal{NL}$

מסקנה: $\mathcal{NL} = \text{coNL}$

פסוק EkcCNF : יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי פסוק $\varphi \in \text{CNF}$ עבורו קיים $m \in \mathbb{N}$ וקיימת $A \in M_{m \times k}(\{p_i\} \cup \{\neg p_i\})$ המקיימת

$i \in [m]$ לכל $\left| \text{FV}\left(\bigvee_{j=1}^k (A)_{i,j}\right) \right| = k$ וכן $\varphi = \bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^k (A)_{i,j}$

הגדרה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{EksAT} = \{\langle \varphi \rangle \mid (\varphi \in \text{EkcCNF}) \wedge (\varphi \text{ ספיקה})\}$

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{EksAT} \in \mathcal{NPH}$

טענה: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ תהא $\varphi \in \text{EksAT}$ אזי $\mathbb{P}_{v: \{p_i\} \rightarrow \{\text{True}, \text{False}\}}(\bar{v}(\varphi) = \text{True}) = \frac{k}{8}$

יחס הפסוקיות המסופקות: יהיו $k, m \in \mathbb{N}_+$ תהא $A \in M_{m \times k}(\{p_i\} \cup \{\neg p_i\})$ ותהא v השמה אזי

$\text{RCl}\left(\bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^k (A)_{i,j}, v\right) = \frac{1}{m} \cdot \text{Cl}\left(\bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^k (A)_{i,j}, v\right)$

משפט PCP: קיימת רדוקציה פולינומית f מ- 3CNF ל- E3CNF המקיימת

• תהא $\varphi \in 3\text{CNF}$ ספיקה אזי $f(\varphi)$ ספיקה.

• תהא $\varphi \in 3\text{CNF}$ לא ספיקה ותהא v השמה אזי $\text{RCl}(f(\varphi), v) \leq \frac{7.01}{8}$

מסקנה: תהא f רדוקציה פולינומית מ- 3CNF ל- E3CNF עבורה $f(\varphi)$ ספיקה לכל $\varphi \in 3\text{CNF}$ ספיקה וכן קיימת $\varphi \in 3\text{CNF}$ לא ספיקה

וקיימת השמה v עבורן $\text{RCl}(f(\varphi), v) > \frac{7.01}{8}$ אזי $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$