

פונקציה קדומה:

- תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F' = f$.
- תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x) = f(x)$ לכל $x \in (a,b)$ ומקיימת $F'_+(a) = f(a)$ וכן $F'_-(b) = f(b)$.

אינטגרל לא מסוים: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי $\int f = \{F \in \mathbb{R}^I \mid F' = f\}$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G' = f) \iff (\exists c \in \mathbb{R}. G = F + c)$.

הערה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $F \in \int f$ אזי מקובל לסמן $\int f = F + c$ עבור $c \in \mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ בעלות פונקציות קדומות אזי

$$\bullet \int (f + g) = \left(\int f\right) + \left(\int g\right)$$

$$\bullet \int (\alpha f) = \alpha \left(\int f\right) \text{ יהי } \alpha \in \mathbb{R} \text{ אזי}$$

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u, v \in \mathbb{R}^I$ גזירות אזי $\int uv' = u \cdot v - \int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $F \in \int f$ אזי $F \circ g = \int ((f \circ g) \cdot g')$.

חלוקה: יהי $[a, b]$ אזי $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ המקיימות $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

סימון: תהא $\{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi) = \max_{i=1}^n |\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2) \leq \lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0, \dots, x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1 \dots t_n\}$ המקיימות $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $\forall i \in \{1 \dots n\}$.

סכום רימן: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f, \Pi, \{t_i\}) = \sum f(t_i) \Delta x_i$.

אינטגרליות רימן: $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L \in \mathbb{R}$ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi) < \delta$ לכל נקודות

מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f, \Pi, \{t_i\}) - L| < \varepsilon$.

אינטגרל רימן מסוים: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרליות רימן אזי $L = \int_a^b f$.

סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרליות רימן אזי $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$.

הערה: יהיו $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi) d\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ .

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a, b]) = \{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \mid f \text{ אינטגרליות רימן}\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרליות רימן בסימון $S(f, \Pi, \{t_i\}) = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S(f, \Pi, \{t_i\})$.

טענה: יהי $c \in \mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c \cdot dt = c(b - a)$.

טענה: $D(x) \notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f \in R([a, b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\bar{\Sigma}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_i, x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_i, x_{i-1}]}(f) \cdot \Delta x_i$.

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

$$\bullet \bar{\Sigma}(f, \Pi) = \sup_{\text{נקודות מתאימות } \{t_i\}} S(f, \Pi, \{t_i\})$$

$$\bullet \underline{\Sigma}(f, \Pi) = \inf_{\text{נקודות מתאימות } \{t_i\}} S(f, \Pi, \{t_i\})$$

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ חלוקות

$$\bullet \bar{\Sigma}(f, \Pi_1) \geq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2)$$

$$\bullet \underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \underline{\Sigma}(f, \Pi_2)$$

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1, Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\bar{I}(f) = \inf_{\Pi \text{ חלוקה}} \bar{\Sigma}(f, \Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f) = \sup_{\Pi \text{ חלוקה}} \underline{\Sigma}(f, \Pi)$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f, \Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f \in R([a, b])) \iff (\forall \varepsilon > 0 \text{ קיימת } \delta > 0 \text{ לכל } \Pi \text{ חלוקה המקיימת } \lambda(\Pi) < \delta$

מתקיים $|\bar{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi)| < \varepsilon$).

מסקנה: תהא $f \in R([a, b])$ חסומה אזי $\int_a^b f = \underline{I}(f) = \bar{I}(f)$

תנודה: תהא $f \in R^J$ חסומה אזי $\omega(f, J) = \sup_{x, y \in J} (f(x) - f(y))$

משפט: תהא $f \in R^J$ חסומה ויהי $x_0 \in J$ אזי f רציפה על x_0 $\iff (\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) = 0)$

משפט: תהא $f \in R^J$ חסומה אזי f רציפה במ"ש $\iff (\forall I \subseteq J. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \text{len}(I) \cdot \omega(f, I) < \varepsilon)$

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f \in R^{[a, b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \omega(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i$

מסקנה: תהא $f \in R^{[a, b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f, \Pi) = \bar{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi)$

למה: תהא $f \in R^{[a, b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \cup \{p\} = \Pi_2$ חלוקות

- $\bar{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2) + \lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$
- $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \geq \underline{\Sigma}(f, \Pi_2) - \lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$

מסקנה: תהא $f \in R^{[a, b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1 \cup \{p_1 \dots p_m\} = \Pi_2$ חלוקות

- $\bar{\Sigma}(f, \Pi_1) \leq \bar{\Sigma}(f, \Pi_2) + m\lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$
- $\underline{\Sigma}(f, \Pi_1) \geq \underline{\Sigma}(f, \Pi_2) - m\lambda(\Pi_1) \omega(f, [a, b])$

טענה: תהא $f \in R^{[a, b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi) < \delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}(f, \Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \underline{\Sigma}(f, \Pi) + \varepsilon$
- $\bar{\Sigma}(f, \Pi) \geq \bar{I}(f) \geq \bar{\Sigma}(f, \Pi) - \varepsilon$

מסקנה: תהא $f \in R^{[a, b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ אזי $f \in R([a, b])$

קריטריון דרבו משופר: תהא $f \in R^{[a, b]}$ חסומה אזי $(f \in R([a, b])) \iff (\forall \varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\bar{\Sigma}(f, \Pi) - \underline{\Sigma}(f, \Pi) < \varepsilon)$

משפט: $C([a, b]) \subseteq R([a, b])$

משפט: תהא $f \in R^{[a, b]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f \in R([a, b])$

סימון: תהא $f \in R^{[a, c]}$ חסומה ויהי $b \in [a, c]$ עבורה $f|_{[a, b]} \in R([a, b])$ אזי $f \in R([a, b])$

משפט: תהא $f \in R^{[a, c]}$ חסומה ויהי $b \in [a, c]$ עבורה $(f \in R([a, b])) \wedge (f \in R([b, c]))$ אזי $f \in R([a, c])$

משפט: תהא $f \in R^{[a, d]}$ חסומה ויהיו $b < c \in [a, d]$ עבורה $f \in R([a, d])$ אזי $f \in R([b, c])$

משפט: תהא $f \in R^{[a, c]}$ חסומה המקיימת $f \in R([a, b])$ $\forall b \in (a, c)$ אזי $f \in R([a, c])$

מסקנה: תהא $f \in R^{[a, c]}$ חסומה המקיימת $f \in R([b, c])$ $\forall b \in (a, c)$ אזי $f \in R([a, c])$

טענה: תהא $f \in R([a, c])$ נגדיר $g(x) = \begin{cases} y & x = b \\ f(x) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g \in R([a, c])$

מסקנה: נגדיר $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אזי $f \in R([-1, 1])$

מסקנה: תהא $f \in R^{[a, b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f \in R([a, b])$

משפט: תהיינה $f, g \in R([a, b])$ תהא $H \in C(\mathbb{R})$ וכן $c \in \mathbb{R}$

- $(f + g), (cf) \in R([a, b])$
- $(f \cdot g), (H \circ f), |f| \in R([a, b])$

קבוצה ממידה אפס: $A \subseteq \mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^\infty$ עבורם $A \subseteq \bigcup (a_i, b_i)$ וכן $\sum (b_i - a_i) < \varepsilon$

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ המקיימת $|A| \leq \aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי $A \subseteq B$ המקיימת $\forall b \in B. \forall \varepsilon > 0. \exists a \in A. |b - a| < \varepsilon$

טענה: תהיינה $f, g \in R([a, b])$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f|_A = g|_A$ אזי $\int_a^b f = \int_a^b g$

מסקנה: תהא $f \in R([a, c])$ נגדיר $g(x) = \begin{cases} y_i & x \in \{b_1 \dots b_m\} \\ f(x) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_a^c f = \int_a^c g$

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f, g \in R([a, b])$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ אזי $\alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g = \int_a^b (\alpha f + \beta g)$

משפט לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f \in R([a, c])$ ויהי $b \in (a, c)$ אזי $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

הגדרה: תהא $f \in R([a, b])$ אזי $\int_a^b f = - \int_b^a f$

משפט חיוביות: תהא $f \in R([a, b])$ המקיימת $f \geq 0$ אזי $\int_a^b f \geq 0$

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f, g \in R([a, b])$ המקיימות $f \geq g$ אזי $\int_a^b f \geq \int_a^b g$

טענה: תהא $f \in R([a, b])$ רציפה המקיימת $f \geq 0$ וכן $\int_a^b f = 0$ אזי $f = 0$

טענה: תהא $f \in R([a, b])$ המקיימת $m \leq f \leq M$ אזי $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f \in R([a, b])$ אזי $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq \sup_{[a, b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f \in R([a, b])$ נגדיר $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ אזי $F \in C([a, b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f \in C([a, b])$ ותהא $0 \leq g \in R([a, b])$ אזי קיים $x_0 \in [a, b]$ עבורו $\int_a^b (f \cdot g) = f(x_0) \int_a^b g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f \in R([a, b])$ ותהא $x_0 \in [a, b]$ נקודת רציפות של f נגדיר

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt \quad \text{אזי} \quad F'(x_0) = f(x_0)$$

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f \in R([a, b])$ ותהא F קדומה של f על $[a, b]$ אזי $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

מסקנה: תהא $f \in R([a, b])$ יהיו $x_1 \dots x_n \in [a, b]$ ותהא F קדומה של f על $[a, b] \setminus \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ אזי $[f]_a^b = f(b) - f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ גזירות עבורן $f', g' \in R([a, b])$ אזי $\int_a^b f'g = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f \in C([a, b])$ ותהא $\varphi \in C^1([\alpha, \beta], [a, b])$ המקיימת $(\varphi(\alpha) = a) \wedge (\varphi(\beta) = b)$ אזי $\int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

למה: תהא $f \in C^1([0, 2\pi])$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = - \int_0^{2\pi} f'(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx$.

טענה דעיכת מקדמי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f \in C^1([0, 2\pi])$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left| \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \right| \leq \frac{2\pi \sup(|f'|)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I = [a, \infty)$ וכן $f \in R([a, b]) \forall b \in [a, \infty)$ אזי $\int_a^\infty f = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$.

- חד צדדי שלילי: נניח $I = (-\infty, b]$ וכן $f \in R([a, b]) \forall a \in (-\infty, b]$ אזי $\int_{-\infty}^b f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f$.

- דו צדדי: נניח $I = \mathbb{R}$ וכן $(f \in R([a, b])) \implies (a < b) \implies \int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f$ אזי $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

- לא חסום משמאל: נניח $I = (a, b]$ וכן $f \in R([c, b]) \forall c \in I$ אזי $\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f$.

- לא חסום מימין: נניח $I = [a, b)$ וכן $f \in R([a, c]) \forall c \in I$ אזי $\int_a^b f = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f$.

סימון: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $\int_I f = \{f \in \mathbb{R}^I \mid \text{קיים וסופי}\}$.

משפט: יהיו $\omega, \eta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

- לינאריות האינטגרל: תהיינה $f, g \in R([a, \omega])$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^\omega f + \beta \int_a^\omega g$.

- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f \in R([a, \omega])$ ויהי $c \in (a, \omega)$ אזי $\int_a^\omega f = \int_a^c f + \int_c^\omega f$.

- מונוטוניות: תהיינה $f, g \in R([a, \omega])$ המקיימות $f \geq g$ אזי $\int_a^\omega f \geq \int_a^\omega g$.

- ניוטון לייבניץ: תהא $f \in R([a, \omega])$ ותהא $F \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ עבורה $F'(x) = f(x)$ על $[a, \omega]$ אזי $\int_a^\omega f = \lim_{b \rightarrow \omega} F(b) - F(a)$.

- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ גזירות עבורן $f', g' \in R([a, \omega])$ אזי $\int_a^\omega f'g = [f \cdot g]_a^\omega - \int_a^\omega fg'$.

- שינוי משתנה: תהא $f \in R([a, \omega])$ ותהא $\varphi \in C^1([c, \eta], [a, \omega])$ המקיימת $\varphi(c) = a$ וכן $\lim_{b \rightarrow \eta} \varphi(b) = \omega$ אזי

$$\int_a^\omega f = \int_c^\eta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימת $f \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ אזי

$$(f \in R([a, \omega])) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists B \in (a, \omega). \forall b_1, b_2 \in [B, \omega). \left| \int_{b_1}^{b_2} f \right| < \varepsilon)$$

התכנסות בהחלט: $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימת $f \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ עבורה $\int_a^\omega |f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימת $f \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ עבורה $\int_a^\omega |f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left| \int_a^\omega f \right| \leq \int_a^\omega |f|$.

טענה: תהא $0 \leq f \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימת $f \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ אזי $(\int_a^\omega f < \infty) \iff (F(x) = \int_a^x f(t) dt)$ חסומה על $[a, \omega)$.

מסקנה: תהיינה $0 \leq f \leq g \in \mathbb{R}^{[a, \omega]}$ המקיימות $f, g \in R([a, b]) \forall b \in (a, \omega)$ אזי

$$\left(\int_a^\omega g < \infty \right) \implies \left(\int_a^\omega f < \infty \right)$$

$$\left(\int_a^\omega f = \infty \right) \implies \left(\int_a^\omega g = \infty \right)$$

משפט: תהא $0 \leq f \in \mathbb{R}^{[1, \infty)}$ יורדת אזי $(\sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty) \iff (\int_1^\infty f < \infty)$.

טענה: תהא $0 \leq f \in \mathbb{R}^{[1, \infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f(n) \leq \int_1^\infty f \leq \sum_{n=1}^\infty f(n)$.

משפט אבל: תהא $g \in C([a, \omega]) \cap R([a, \omega])$ ותהא $f \in C^1([a, \omega])$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

משפט דיריכלה: תהא $g \in C([a, \omega])$ עבורה $G(x) = \int_a^x g$ חסומה ותהא $f \in C^1([a, \omega])$ מונוטונית עבורה $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = 0$ אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

למה של בונה: תהייה $f, g \in R([a, b])$ באשר $0 \leq g$ וכן g יורדת אזי קיים $x_0 \in [a, b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{x_0} f(x)dx$

למה של אבל: תהא $a_n \geq 0$ סדרה יורדת ותהא b_n סדרה עברה $\forall n \in \mathbb{N}. m < \sum_{k=1}^n b_k < M$ אזי $a_1 m < \sum_{k=1}^n a_k b_k < a_1 M$

משפט ערך ביניים שני: תהייה $f, g \in R([a, b])$ באשר g מונוטונית אזי קיים $x_0 \in [a, b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{x_0} f(x)dx + g(b) \int_{x_0}^b f(x)dx$

משפט שינוי משתנה: תהא $f \in R([a, b])$ ותהא $\varphi \in C^1([\alpha, \beta], [a, b])$ עולה ממש המקיימת $(\varphi(\alpha) = a) \wedge (\varphi(\beta) = b)$ אזי $\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$

טענה: תהא $f \in C^{n+1}([a, b])$ אזי $R_n(f, a)(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

סימון: יהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $k!! = \prod_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} (k-2n)$

למה: יהי $m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^m dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^m dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{even}} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} \end{cases}$

משפט מכפלת ואליס: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1)} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{2}$

משפט אבל: תהא $g \in R([a, \omega))$ ותהא $f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית וחסומה אזי $f \cdot g \in R([a, \omega))$

משפט דיריכלה: תהא $g \in R([a, b])$ $\forall b \in [a, \omega)$ עבורה $G(x) = \int_a^x g$ חסומה ותהא $f : [a, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית עברה $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = 0$ אזי $f \cdot g \in R([a, \omega))$

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \leq n! \leq \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}$

מסקנה: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ כך $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

טענה: $\lim_{s \rightarrow 1+} \zeta(s)(s-1) = 1$

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g \in \mathbb{R}^I$ ויהי $f \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$ אזי $(f_n \xrightarrow{\text{pointwise}} g) \iff (\forall x \in I. \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x))$

סימון: $(f_n \xrightarrow{p.w.} f) \iff (f_n \xrightarrow{\text{pointwise}} f)$

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $f_n \in \mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $(\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in C(I)) \not\Rightarrow (f \in C(I))$
- אינטגרביליות רימן: $(\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in R(I)) \not\Rightarrow (f \in R(I))$
- גבול האינטגרל: נניח $f \in R(I)$ וכן $\forall n \in \mathbb{N}. f_n \in R(I)$ אזי $(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = L) \not\Rightarrow (\int_I f = L)$
- נגזרת: יהי $x \in I$ נניח f גזירה ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $(\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = L) \not\Rightarrow (f'(x) = L)$

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g \in \mathbb{R}^I$ ויהי $f \in (\mathbb{R}^I)^{\mathbb{N}}$ אזי $(f_n \xrightarrow{\text{uniform}} g) \iff \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \right)$

סימון: $(f_n \xrightarrow{u} f) \iff (f_n \xrightarrow{\text{uniform}} f)$

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(f_n \xrightarrow{u} f) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall x \in A. \forall n > N. |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

חסומה במידה אחידה: $f_n \in \mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. \forall x \in I. |f_n(x)| \leq M$

למה: תהייה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M \in \mathbb{R}$ עבורן $(f_n \xrightarrow{u} f) \wedge (g_n \xrightarrow{u} g)$ אזי $f_n g_n \xrightarrow{u} f g$

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהייה $f_n \in \mathbb{R}^I$ אזי $(\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m > N. \forall x \in I. |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon) \iff (\exists f \in \mathbb{R}^I. f_n \xrightarrow{u} f)$

משפט: תהייה $f_n \in C(I)$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $f \in C(I)$

קבוצה קומפקטית: $A \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ קטעים פתוחים עבורם $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ מתקיים $\exists B \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda). A \subseteq \bigcup_{n \in B} I_n$

הלמה של היינה-בורל: יהיו $a < b$ אזי $[a, b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהייה $f_n \in C([a, b])$ ותהא $f \in C([a, b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ וכן $\forall n < m. f_m < f_n$ אזי $f_n \xrightarrow{u} f$

מסקנה: תהייה $f_n \in C([a, b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{p.w.} f$ באשר $f \in C([a, b])$ וכן לכל $x \in [a, b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $f_n \xrightarrow{u} f$

טענה: תהייה $f_n \in R([a, b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $f \in R([a, b])$

משפט: תהייה $f_n \in R([a, b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$

פונקציית ויירשטראס: יהי $a \in (0, 1)$ ויהי $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ עבורם $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$
הגדרה: נגדיר $\Delta_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\Delta_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\Delta_k = \frac{\Delta_0(4^k x)}{4^k}$
טענה: $\Delta_n \xrightarrow{u} \Delta$

מסקנה: Δ רציפה בכל נקודה.

משפט: Δ אינה גזירה באף נקודה.

משפט: תהייה $f_n \in C^1([a, b])$ עבורה $f'_n \xrightarrow{u} g$ ותהא $x_0 \in [a, b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n \xrightarrow{u} f$ וכן $f' = g$.
סימון: תהייה $f_n \in \mathbb{R}^I$ עבורה $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי $\sum_{i=0}^n f_n = f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהייה $u_n \in C([a, b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty} u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} u_n = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b u_i$

משפט גזירה איבר איבר: תהייה $u_n \in C^1([a, b])$ עבורה $\sum u'_i$ במ"ש ותהא $x_0 \in [a, b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}(\sum_{i=0}^{\infty} u_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} u_i$

משפט בוחן M של ויירשטראס: תהייה $u_n \in \mathbb{R}^I$ ותהא $M \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ וכן $|u_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהייה $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k a_m (b_k - b_{k+1})$

משפט קריטריון אבל: תהייה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x \in [a, b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^n f_i g_i$ מתכנס במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהייה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a, b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n \xrightarrow{u} 0$ וכן לכל $x \in [a, b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^n f_i g_i$ מתכנס במ"ש.

למה: תהא $f \in C([0, 1])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין עבורה $\max |f - \varphi| < \varepsilon$.

למה: תהא $f \in C([0, 1])$ ויהי $N \in \mathbb{N}$ נגדיר $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין כך

$\forall m \in \{0 \dots N\} \cdot \varphi(a_m) = f(a_m)$ אזי $\varphi(x) = f(0) + N \sum_{k=0}^{N-1} (f(a_{k+1}) - 2f(a_k) + f(a_{k-1})) \max\{x - a_k, 0\}$

למה: קיימות $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורן $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{[-1, 1]} |p_n(x) - x| = 0$

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a, b])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $\max_{[a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$ $\exists p \in \mathbb{R}[x]$

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a, b])$ אזי קיימות $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורן $p_n \xrightarrow{u} f$

הגדרה: תהא $f \in C([0, 1])$ אזי $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

משפט: תהא $f \in C([0, 1])$ אזי $B_n \xrightarrow{u} f$

משפט מז'ורנטה: תהייה $f_n \in R([a, \omega))$ עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ על $[a, b]$ ותהא $\Psi \in R([a, \omega))$ עבורה $|f_n| \leq \Psi$ $\forall n \in \mathbb{N}$ אזי $\left(\int_a^\omega f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\omega f_n\right) \wedge \left(\int_a^\omega f\right) \wedge (\forall b \in [a, \omega) \cdot f \in R([a, b]))$

טענה: $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ ויהי $|q| < r$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-r, r]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס} & x \in (-R, R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R, R] \end{cases}$

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0, \infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמר: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0\right) \implies (R = \infty)\right) \wedge \left(\left(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty\right) \implies (R = 0)\right)$

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ הינו R) \iff (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ הינו R)

מסקנה: יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f$ עם רדיוס R אזי $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = f'(x)$ על $(-R, R)$.

משפט: יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f$ עם רדיוס R ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+m)!}{k!} a_{k+m} x^k = f^{(m)}(x)$ על $(-R, R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f$ עם רדיוס R אזי $P(f, 0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ על $(-R, R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב- R אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0, R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב- $-R$ אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R, 0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב- R אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[0, R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב- $-R$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[-R, 0]$.

מסקנה: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < 0$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ $\lim_{r \rightarrow 1^-}$

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $(\sum k a_k x^{k-1}) \Leftarrow (R-)$ מתכנס $\sum a_k x^k$ מתכנס ב- R .

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $(\sum k a_k x^{k-1}) \Leftarrow (-R-)$ מתכנס $\sum a_k x^k$ מתכנס ב- $-R$.

משפט: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ מתכנס בהחלט ותהא $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ חח"ע ועל אזי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{p(i)}$.

טענה מכפלות קושי: יהיו $p, q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות מתכנסים בהחלט על I אזי $\sum \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = (\sum a_n) (\sum b_n)$.

סכים לפי אבל: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ (A) .

התכנסות צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n}$ (C) .

סכים לפי צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i$ (C) .

סימון: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n (\sum_{k=0}^{\infty} a_k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n a_n = \ell$ (C) .

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_n a_k = \ell$ (C) .

משפט: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$ (A) .

משפט טאובר: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho$ וכן $a_k = o(\frac{1}{k})$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho$.

משפט: יהי $\sum a_k z^k$ טור טור חזקות מרוכב המתכנס עבור $w \in \mathbb{C}$ ויהי $r < |w|$ אזי $\sum a_k z^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $\overline{B}_r(0)$.

משפט אוילר: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי

$$\bullet \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\bullet \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

טענה: תהא $f \in \mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $f = u + iv$ $\exists! u, v \in \mathbb{R}^{[a,b]}$.

סימון: יהיו $u, v \in R([a, b])$ אזי $u + iv \in R([a, b])$.

אינטגרל: יהיו $u, v \in R_{\mathbb{R}}([a, b])$ אזי $\int_a^b (u + iv) = \int_a^b u + i \int_a^b v$.

טענה: תהיינה $f, g \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$

$$\bullet \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\bullet \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

$$\bullet \int_a^b c f = c \int_a^b f$$

$$\bullet \int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}$$

נגזרת: יהיו $u, v \in R_{\mathbb{R}}([a, b])$ אזי $\frac{d}{dx}(u + iv) = \frac{du}{dx} + i \cdot \frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$ אזי $|f| \in R([a, b])$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$ ותהא $x_0 \in [a, b]$ נקודת רציפות של f אזי

$$(\int_a^x f(t) dt)'(x_0) = f(x_0)$$

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$ ותהא F קדומה של f על $[a, b]$ אזי $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f, g \in \mathbb{C}^{[a, b]}$ גזירות עבורן $f', g' \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$ אזי $\int_a^b f' g = [f \cdot g]_a^b - \int_a^b f g'$.

מסקנה: תהא $f \in R_{\mathbb{C}}([a, b])$ אזי $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

פונקציה מחזורית: $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R(\mathbb{T}) = \{f \in R([0, 2\pi]) \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x + 2\pi) = f(x)\}$.

סימון: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $e_n(t) = e^{int}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $e_n(t) \in R(\mathbb{T})$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m \in \mathbb{N}$ והיו $\{c_n\}_{n=-m}^m \in \mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^m c_n e_n(t)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^m c_n e_n(t)$ פולינום טריגונומטרי עבורו $(c_m \neq 0) \vee (c_{-m} \neq 0)$ אזי m .

טענה: $R(\mathbb{T})$ מ"ו מעל \mathbb{C} .

הגדרה: יהיו $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

טענה: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מכפלה פנימית על $C(\mathbb{T})$.

$$\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} \quad \text{טענה:}$$

מקדם פורייה ה- m : יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}(m) = \langle f, e_m \rangle$.

טענה: יהי $f(t) = \sum_{n=-m}^m c_n e_n(t)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}(k) = c_k$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f(t) = \sum_{n=-m}^m \hat{f}(n) e_n(t)$.

מסקנה: יהיו f, g פולינומים טריגונומטריים אזי $\langle f, g \rangle = \sum_{n=-m}^m \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\|f\|^2 = \sum_{n=-m}^m |\hat{f}(n)|^2$.

מקדם פורייה ה- m : תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $\hat{f}(m) = \langle f, e_m \rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $(S_m f)(t) = \sum_{n=-m}^m \hat{f}(n) e_n(t)$.

טענה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $\hat{f}(-n) = \overline{\hat{f}(n)}$.

מסקנה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $f \leftarrow (S_m f)$ (ממשית).

טענה: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ ויהי $|k| \leq m$ אזי $(f - S_m f) \perp e_k$.

מסקנה: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ אזי $(f - S_m f) \perp S_m f$.

מסקנה: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ אזי $\|f\|^2 = \|S_m f\|^2 + \|f - S_m f\|^2$.

טענה אי־שוויון בסל: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \leq \|f\|^2$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ אזי $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |\hat{f}(n)| = 0$.

התכנסות בנורמת L_2 : תהיינה $f_n, g \in R([0, 2\pi])$ אזי $(f_n \xrightarrow{L_2} g) \iff (\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\| = 0)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_2 איננה יחידה.

למה: תהא $g \in R(\mathbb{T})$ אזי $\|g\| \leq \sup |g|$.

מסקנה: תהיינה $f_n \in R([0, 2\pi])$ אזי $(f_n \xrightarrow{u} f) \implies (f_n \xrightarrow{L_2} f)$.

מסקנה: תהא $f \in C_{\mathbb{C}}([a, b])$ אזי קיימת $p_n \in \mathbb{C}[x]$ עבורה $p_n \xrightarrow{L_2} f$.

משפט: תהא $f \in C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t \in [0, 2\pi]} |p(t) - f(t)| < \varepsilon$.

משפט: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\|p - f\| < \varepsilon$.

מסקנה: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ אזי קיימים p_n פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_n \xrightarrow{L_2} f$.

משפט: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ אזי $\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m f - f\| = 0$.

שיוויון פרסבל: $f \in R([0, 2\pi])$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2$.

מסקנה: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

מסקנה: תהיינה $f, g \in R([0, 2\pi])$ המקיימות $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) \forall n \in \mathbb{Z}$ אזי בכל נקודת רציפות של f, g מתקיים $f = g$.

טענה: תהא $f \in R([0, 2\pi])$ ויהי $m \in \mathbb{N}$ ויהי $\{c_n\}_{n=-m}^m \subset \mathbb{C}$ אזי $\|f - \sum_{n=-m}^m c_n e_n\|^2 \geq \|f - S_m f\|^2$.

מסקנה: תהיינה $f_m, g \in R([0, 2\pi])$ עבורן $\|f_m - g\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ אזי $\hat{f}_m(n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \hat{g}(n) \forall n \in \mathbb{Z}$.

טור פורייה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ עבורה $S_N f \xrightarrow{p.w.} g$ באשר $g \in R(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} = g$.

מסקנה: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$ אזי $S_N f \xrightarrow{u} f$.

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[-\pi, \pi]}$ המוגדרת $f(t) = t$ נמשיכה מחזורית על \mathbb{R} אזי

$$\bullet \left(\forall n \in \mathbb{N}_+. \hat{f}(n) = \frac{(-1)^n i}{n} \right) \wedge \left(\hat{f}(0) = 0 \right)$$

$$\bullet S_m f(t) = \sum_{n=1}^m \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nt)}{n}$$

$$\bullet \text{יהי } r \in [0, \pi) \text{ אזי } S_m f \xrightarrow{u} f \text{ על } [-r, r]$$

$$\bullet S_m f \xrightarrow{p.w.} f \text{ על } (-\pi, \pi)$$

$$\bullet \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{מסקנה:}$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{מסקנה:}$$

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[0, 2\pi]}$ המוגדרת $f(t) = \frac{(\pi-t)^2}{4}$ נמשיכה מחזורית על \mathbb{R} אזי

$$\bullet \left(\forall n \in \mathbb{N}_+. \hat{f}(n) = \frac{1}{2n^2} \right) \wedge \left(\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{12} \right)$$

$$\bullet S_m f(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^m \frac{\cos(nt)}{n^2}$$

• $S_m f \xrightarrow{u} f$ על $[0, 2\pi]$.

מסקנה: $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

מסקנה: $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

טענה: יהי $\alpha \notin \mathbb{Z}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$

למה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$

מסקנה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $S_m(f') = (S_m f)'$

למה: תהא $f \in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f^{(k)}}(n) = i^k n^k \widehat{f}(n)$

מסקנה: תהא $f \in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \widehat{f}(n) = 0$

משפט: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ המקיימת $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \widehat{f}(n) = 0$ אזי $f \in C^{k-2}(\mathbb{T})$

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)| < \infty$

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $S_m f \xrightarrow{u} f$

תנאי ליפשיץ מקומי: תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $a \in \mathbb{R}$ עבורה $|f(x) - f(a)| < M|x - a|$ $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$. $\exists \delta > 0, \exists M > 0$.

הערה: יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהא $f \in C^1((a - \delta, a + \delta))$ אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב- a .

משפט: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in \mathbb{T}$ עבורן f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב- a אזי $S_N f(a) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(a)$

קונבולוציה: תהיינה $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי $(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(x - t) dt$

טענה: תהיינה $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי

$$f * g = g * f$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

$$(cf) * g = c(f * g)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$f * g \in C(\mathbb{T})$$

$$\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$$

גרעין דיריכלה: נגדיר $D_N \in R(\mathbb{T})$ כך $D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}$

למה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $D_N * f = S_N f$

למה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $\widehat{D_N}(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $|D_N(y)| \leq 2N + 1$

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $D_N(y) = \begin{cases} 2N+1 & y=0 \\ \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})} & y \neq 0 \end{cases}$

מסקנה: D_N זוגית ממשית וכן מתקיים $(D_N(y) = 0) \iff (y \in \left\{ \frac{2\pi k}{2N+1} \mid k \in \{-N, \dots, N\} \right\})$

למה: D_N בעלת N מינימום מקומיים וכן $N + 1$ מקסימום מקומיים.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $|D_N(y)| \leq \left| \frac{1}{\sin(\frac{y}{2})} \right|$

מסקנה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $|D_N(y)| \leq \frac{\pi}{|y|}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) dy = 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)| dy \gg 1$$

סכומי פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n f(x)$

גרעין פייר: נגדיר $F_N \in R(\mathbb{T})$ כך $F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(x)$

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $F_N(y) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})} \right)^2$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(y) dy = 1$$

למה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f = f * F_N$

למה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $\widehat{F_N}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N+1} & |n| \leq N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$

למה: יהי $\delta > 0$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $N \geq N_0$ מתקיים $\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(x) dx + \int_{\delta}^{\pi} F_N(x) dx \leq \varepsilon$

משפט פייר: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f \xrightarrow{u} f$

משפט פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in [-\pi, \pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל אזי $\sigma_N f(a) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)}{2}$

מסקנה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in [-\pi, \pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל וכן $\ell \rightarrow S_N f(a)$ אזי $\ell = \frac{\lim_{x \rightarrow a+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a-} f(x)}{2}$

מסקנה: $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ צפופים במ"ש ב- $C(\mathbb{T})$.

טענה: $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

מטריקה/מרחק: תהא A קבוצה אזי $d: A^2 \rightarrow [0, \infty)$ המקיימת

• חיוביות: $\forall x, y \in A. d(x, y) \geq 0$

• חיוביות ממש: $\forall x, y \in A. (d(x, y) = 0) \iff (x = y)$

• סימטריות: $\forall x, y \in A. d(x, y) = d(y, x)$

• אי-שיוויון המשולש: $\forall x, y, z \in A. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

מרחב מטרי: תהא X קבוצה ותהא $d: X^2 \rightarrow [0, \infty)$ מטריצה אזי (X, d) .

גבול: יהי (X, d) מרחב מטרי תהא $a \in X^\mathbb{N}$ ותהא $L \in X$ עבורן $d(a_n, L) \rightarrow 0$ אזי $a_n \rightarrow L$

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי תהא $a \in X^\mathbb{N}$ והיו $L_1, L_2 \in X$ עבורם $(a_n \rightarrow L_1) \wedge (a_n \rightarrow L_2)$ אזי $L_1 = L_2$

מרחק מנהטן: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ אזי $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

סימון: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ אזי (\mathbb{R}^n, d_p) ℓ_p^n

טענה: ℓ_p^n מרחב מטרי.

מרחק יוניפורמי: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ אזי $d_\infty(x, y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$

סימון: (\mathbb{R}^n, d_∞) ℓ_∞^n

טענה: ℓ_∞^n מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f, g \in C([a, b])$ נגדיר $d(f, g) = \sup |f - g|$ אזי $d(f, g) = C([a, b]) = (C([a, b]), d)$

טענה: $C([a, b])$ מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f, g \in R([a, b])$ נגדיר $d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f - g|^2}$ ונגדיר יחס שקילות $(f \sim g) \iff (d(f, g) = 0)$ אזי $L_2([a, b]) = (R([a, b])/\sim, d)$

טענה: $L_2([a, b])$ מרחב מטרי.

טענה: יהי V מ"ו ותהא $\nu: V \rightarrow [0, \infty)$ נורמה על V נגדיר $d(x, y) = \nu(x - y)$ אזי (V, d) מרחב מטרי.

נורמת ℓ_p^n : יהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

נורמת ℓ_∞^n : יהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$

למה: יהי $x \in \mathbb{R}^n$

• $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$

• $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$

מסקנה: תהא $\{x^{(m)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ סדרה ותהא $y \in \mathbb{R}^n$ אזי $(\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - y\|_2 = 0) \iff (\forall i \in [n]. \lim_{m \rightarrow \infty} x_i^{(m)} = y_i)$

כדור פתוח: יהי $a \in X$ והי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < r\}$

כדור סגור: יהי $a \in X$ והי $r \in \mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) \leq r\}$

ספירה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ והי $r \in \mathbb{R}$ אזי $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) = r\}$

נקודה פנימית: תהא $A \subseteq X$ אזי $x \in A$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq A$

פנים של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}(A) = \overset{\circ}{A} = \{x \in A \mid x \text{ נקודה פנימית של } A\}$

קבוצה פתוחה: קבוצה $A \subseteq X$ עבורה $A = \text{int}(A)$

למה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$

משפט: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי

• יהיו $\{A_i\}$ פתוחות אזי $\bigcup A_i$ פתוחה.

• יהיו $\{A_i\}_{i=0}^n$ פתוחות אזי $\bigcap A_i$ פתוחה.

• \emptyset, X פתוחות.

סביבה: יהי $a \in X$ אזי $A \subseteq X$ פתוחה עבורה $a \in A$

טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}(A) = \bigcup \{B \subseteq A \mid B \text{ פתוחה}\}$

קבוצה סגורה: קבוצה $A \subseteq X$ עבורה $X \setminus A$ פתוחה.

נקודת סגור: תהא $A \subseteq X$ אזי $a \in X$ עבורה $a \in \overline{A} \cap A \neq \emptyset$

סגור של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\text{cl}(A) = \overline{A} = \{a \in X \mid a \text{ נקודת סגור של } A\}$

משפט: תהא $A \subseteq X$ אזי $(A = \overline{A}) \iff (A \text{ סגורה})$.

למה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A)$ וכן $\text{int}(A) = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A} = \bigcap \{A \subseteq B \mid B \text{ סגורה}\}$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ ותהא $a \in X$ אזי $(a \in \overline{A}) \iff (x_n \rightarrow a \text{ עבור } x_n \in A \text{ סדרה (קיימת סדרה)})$.

נקודת הצטברות: תהא $A \subseteq X$ אזי $a \in X$ המקיימת $(B_r(a) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ עבור $r > 0$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ ותהא $a \in X$ אזי $(a \text{ הצטברות של } A) \iff (x_n \rightarrow a \text{ עבור } x_n \in A \setminus \{a\} \text{ סדרה (קיימת סדרה)})$.

שפה של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$.

קבוצה צפופה: קבוצה $Y \subseteq X$ עבורה $\overline{Y} = X$.

טענה: תהא $Y \subseteq X$ אזי $(Y \text{ צפופה}) \iff (A \subseteq X \text{ לכל } A \text{ פתוחה באשר } A \neq \emptyset \text{ מתקיים } (Y \cap A \neq \emptyset))$.

מרחב מטרי ספרבילי: מרחב מטרי (X, d) עבורו קיימת $Y \subseteq X$ צפופה לכל היותר בת מנייה.

קבוצה חסומה: קבוצה $A \subseteq X$ עבורה $A \subseteq B_r(a)$ עבור $r > 0, \exists a \in X$.

קוטר של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ חסומה אזי $\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) \mid x, y \in A\}$.

טענה: תהא $\{x^{(m)}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה $x^{(m_j)}$ מתכנסת.

מסקנה: לכל קבוצה חסומה ואינסופית קיימת נקודת הצטברות.

סדרת קושי: סדרה $\{x_n\} \subseteq X$ המקיימת $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k, m \geq N, d(x_k, x_m) < \varepsilon$.

למה: סדרת קושי הינה חסומה.

טענה: סדרה מתכנסת הינה סדרת קושי.

מרחב מטרי שלם: מרחב מטרי (X, d) עבורו כל סדרת קושי מתכנסת.

משפט: \mathbb{R}^n סטנדרטי שלם, $C([a, b])$ שלם, ℓ_2 שלם.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי שלם ותהא $Y \subseteq X$ אזי (Y, d) שלם (סגורה).

מרחבים מטריים איזומטריים: מרחבים מטריים $(X, d), (Y, \rho)$ עבורם קיימת $f: X \rightarrow Y$ חח"ע ועל המקיימת

$$\forall x, y \in X, d(x, y) = d((x), f(y))$$

השלמה של מרחב מטרי: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי (Y, ρ) מרחב מטרי שלם עבורו $X \subseteq Y$ צפופה וכן $\rho|_{X^2} = d$.

משפט: לכל מרחב מטרי קיימת השלמה.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי בעל השלמות $(Y, \rho), (Z, \zeta)$ אזי $(Y, \rho), (Z, \zeta)$ איזומטריים.

נקודת שבת: תהא $f: X \rightarrow X$ אזי $a \in X$ עבורה $f(x) = x$.

העתקה מכווצת: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי $A \in \text{Hom}(X)$ עבורה קיים $\lambda < 1$ המקיים $\forall x, y \in X, d(Ax, y) \leq \lambda d(x, y)$.

משפט נקודת השבת של בנך: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא $A \in \text{Hom}(X)$ העתקה מכווצת אזי קיים ויחיד $x \in X$ עבורו $Ax = x$.

מסקנה: יהי (X, d) מרחב מטרי תהא $A \in \text{Hom}(X)$ העתקה מכווצת ותהא $x \in X$ עבורה $Ax = x$ אזי לכל $y \in X$ מתקיים

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n y$$

מסקנה: יהי (X, d) מרחב מטרי תהא $A \in \text{Hom}(X)$ העתקה מכווצת ותהא $x \in X$ עבורה $Ax = x$ אזי לכל $y \in X$ מתקיים

$$d(A^n y, x) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y, Ax)$$

כיסוי פתוח: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ אזי קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ עבורן $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

מרחב קומפקטי: מרחב מטרי (X, d) עבורו לכל $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של X קיימות $\{\beta_i\}_{i=1}^m \in I$ עבורן $X = \bigcup_{i=1}^m A_{\beta_i}$.

קבוצה קומפקטית: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי $B \subseteq X$ עבורו (B, d) מרחב קומפקטי.

טענה קבוצה פתוחה יחסית: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא $Y \subseteq X$ אזי $(U \subseteq Y)$ פתוחה ב- (Y, d) \iff קיימת $V \subseteq X$ פתוחה

$$\text{עבורה } (U = V \cap Y)$$

טענה קבוצה סגורה יחסית: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא $Y \subseteq X$ אזי $(U \subseteq Y)$ סגורה ב- (Y, d) \iff קיימת $V \subseteq X$ סגורה עבורה

$$(U = V \cap Y)$$

טענה: תהא $K \subseteq X$ קומפקטית אזי K חסומה וכן K סגורה.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי (X, d) קומפקטי \iff (לכל סדרה יורדת $\{K_i\}_{i=1}^\infty \subseteq X$ סגורות לא ריקות אזי $\bigcap_{i=1}^\infty K_i \neq \emptyset$).

קומפקטיות סדרתית: מרחב מטרי (X, d) עבורו לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי (X, d) קומפקטי \iff (X, d) קומפקטי סדרתית.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(A \text{ קומפקטית}) \iff (A \text{ סגורה וחסומה})$.

מרחב פרה-קומפקטי: מרחב מטרי (X, d) עבורו לכל סדרה יש תת סדרה קושי.

אוסף פונקציות רציף במידה אחידה: סדרה $\{f_n\} \subseteq C([a, b])$ המקיימת $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall n \in \mathbb{N}. \forall s, t \in [a, b]. |s - t| < \delta \implies |f_n(s) - f_n(t)| < \varepsilon$.

משפט: תהא $\{f_n\} \subseteq C([a, b])$ סדרה אזי $\{f_n\}$ פרה-קומפקטית $\iff \{f_n\}$ חסומה במ"ש ורציפה במידה אחידה.

גבול: יהיו $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים תהא $f : X \rightarrow Y$ תהא $a \in X$ ותהא $L \in Y$ אזי

• קושי: $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in B(a, \delta). f(x) \in B(L, \varepsilon))$.

• היינה: $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L) \iff \left(\forall x \in (X \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}. (x_k \rightarrow a) \implies (f(x_k) \rightarrow L) \right)$.

רציפות בנקודה: יהיו $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי $a \in X$ עבורה $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

משפט: יהיו $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי f רציפה \iff (לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה).

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי f רציפה \iff (לכל $i \in [m]$ מתקיים כי f_i רציפה).

רציפות במידה שווה: יהיו $(X, d), (Y, \rho)$ מרחבים מטריים ותהא $A \subseteq X$ אזי $f : A \rightarrow Y$ עבורה $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in A$ אזי $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ כאשר $|x - y| < \delta$.

$A. (d(x, y) < \delta) \implies (\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon)$

משפט: תהינה $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ רציפות ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ אזי $\alpha f + \beta g$ רציפה וכן $\langle f, g \rangle$ רציפה.

משפט רציפות ההרכבה: יהיו $(X, d), (Y, \rho), (Z, \eta)$ מרחבים מטריים תהא $a \in X$ תהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה על a ותהא

$g : f(X) \rightarrow Z$ רציפה על $f(a)$ אזי $g \circ f$ רציפה על a .

משפט קנטור: יהי (X, d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y, ρ) מרחב מטרי ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.

משפט וורשטראס: יהי (X, d) מרחב מטרי קומפקטי ותהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה אזי קיימים $a, b \in X$ עבורם $[f(a), f(b)] = f(X)$.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y, ρ) מרחב מטרי ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f(X)$ קומפקטית.

מסקנה: תהיו $\nu, \eta : X \rightarrow \mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $c, C \in \mathbb{R}$ עבורם $c\nu \leq \eta \leq C\nu$.

מסילה: פונקציה $\gamma \in C([a, b], X)$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ עבורה $\gamma(a) = \gamma(b)$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ עבורה $\gamma|_{(a, b)}, \gamma|_{[a, b]}$ חח"ע.

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ מסילה אזי $-\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ המוגדרת $-\gamma(t) = \gamma(1 - t)$.

מרחב מטרי קשיר מסילתית: מרחב מטרי (X, d) עבורו לכל $x, y \in X$ קיימת עקומה $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ המקיימת $\gamma(0) = x$ וכן

$\gamma(1) = y$.

משפט תכונת דרבו: יהי (X, d) מרחב מטרי קשיר מסילתית תהא $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה יהיו $x, y \in X$ ותהא $c \in \mathbb{R}$ עבורה

$f(x) < c < f(y)$ אזי קיים $z \in X$ עבורו $f(z) = c$.

תחום: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה מסילתית.

מרחב מטרי קשיר: מרחב מטרי (X, d) עבורו הקבוצות היחידות שפתוחות וסגורות במקביל הן X, \emptyset .

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי (X, d) קשיר מסילתית $\iff (X, d)$ קשיר.

טענה: תהא $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ אזי רציפה.

טענה: תהינה $A, B \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

מסקנה: תהא $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

משפט: תהא $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ ונגדיר $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ כך $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} x$ אזי f רציפה.

אקספוננט: תהא $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ נגדיר $e^A \in M_n(\mathbb{R})$ כך $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

מסקנה: תהא $A \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי e^A מתכנסת וכן $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

$$\Phi\eta = \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta_2(4t), \eta_1(4t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-1), \eta_2(4t-1)) + (0, \frac{1}{2}) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-2), \eta_2(4t-2)) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(-\eta_2(4t-3), -\eta_1(4t-3)) + (1, \frac{1}{2}) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{כך } \Phi\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2 \text{ מסילה אזי נגדיר מסילה } \eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$$

נורמה של עקומה: תהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ עקומה אזי $\|\gamma\|_{\infty} = \max_{t \in [0, 1]} \|\gamma(t)\|$.

מרחק של עקומות: תהינה $\gamma, \eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ עקומות אזי $d(\gamma, \eta) = \|\gamma - \eta\|_{\infty}$.

טענה: תהינה $\gamma, \eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ עקומות אזי $d(\Phi\gamma, \Phi\eta) = \frac{1}{2}d(\gamma, \eta)$.

עקום פביאנו: תהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ עקומה אזי $\Phi^n \gamma$ עקומה

טענה: תהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ עקומה אזי γ_{∞} רציפה וכן $\gamma_{\infty}([0, 1])$ קומפקטית.

משפט: תהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ עקומה אזי $\gamma_{\infty}([0, 1])$ צפופה ב- $[0, 1]^2$.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y, ρ) מרחב מטרי ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה חח"ע ועל אזי (Y, ρ) קומפקטי וכן f^{-1} רציפה.

טענה: לא קיימת פונקציה רציפה חח"ע ועל ב- $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$.

עקומה פוליגונלית: עקומה לינארית למקוטעין.

אורך עקומה פוליגונלית: תהא γ עקומה פוליגונלית בעלת חלקים לינאריים בקטעים $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ אזי

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^M \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

מסקנה: תהא γ עקומה פוליגונלית אזי $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$

עקומה בעלת אורך ביחס לחלוקה: תהא Π חלוקה של $[a, b]$ אזי עקומה γ עבורה קיים חסם עליון לאורך של עקומה פוליגונלית בין

הנקודות $\{\gamma(t_i)\}$.

טענה: תהא $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^m)$ עקומה אזי $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$