```
.\overline{\Pi}_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid orall j\in [n]\,.a_i\leq x_i\leq b_i\} אזי a,b\in\mathbb{R}^n תיבה סגורה: יהיו
                                       נקודה פנימית. תהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי x נקודה פנימית. תהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי x נקודה פנימית.
                                                                          {M} = \{x \in M \mid M \; פנים של קבוצה: תהא M \subseteq \mathbb{R}^n אזי M \subseteq \mathbb{R}^n פנים של קבוצה
                                                                                                                                M=\stackrel{\circ}{M} עבורה M\subset\mathbb{R}^n קבוצה פתוחה:
                          נקודה חיצונית: תהא \exists r>0.B_r\left(x
ight)\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת x\in\mathbb{R}^n ותהא ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי M\subseteq\mathbb{R}^n אזי נקודה חיצונית:
                     נקודה מבודדת: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת x\in M המהא ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי x נקודה מבודדת.
                                    . נקודת אזי x נקודת אזי אזי ג נקודה פנימית ולא נקודה אזי אזי x\in\mathbb{R}^n ותהא ותהא אזי שפה: תהא
                                                                           .\partial M=\{x\in M\mid M שפה של קבוצה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n אזי M\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                               AM\subseteq M עבורה סגורה: קבוצה M\subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                        \overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M אזי אזי M \subseteq \mathbb{R}^n סגור של קבוצה: תהא
                                                            (\mathbb{R}^n \backslash M) טענה: תהא M \subseteq \mathbb{R}^n אזי (x נקודה חיצונית של אזי (x נקודה פנימית של אזי (x נקודה חיצונית של
                                                                                                                 . מסקנה: תהא M^{\mathcal{C}} אזי (M פתוחה)\Longrightarrow תהא M\subseteq\mathbb{R}^n סגורה).
                                                                                                    \exists r>0.M\subseteq B_{r}\left(0
ight) המקיימת M\subseteq\mathbb{R}^{n} קבוצה חסומה:
                                                                                                                              . סגורה וחסומה קבוצה קבוצה קבוצה קומפקטית: קבוצה קומפקטית
טענה היינה בורל: תהא K\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n אזי (K\subseteq\mathbb{R}^n אזי לכל לכל היינה בורל: תהא אזי K\subseteq\mathbb{R}^n אזי אזי (לכל
                                                                                                                                                             \mathcal{A} : \exists \mathcal{B} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0} (\Lambda) . A \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{B}} I_n
                                                                                                                                             a^{(k)}=a\left(k
ight) אזי a\in\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{\mathbb{N}} סימונ: תהא a\in\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{\mathbb{N}}
                                          \lim_{k	o\infty}a^{(k)}=L אזי \lim_{k	o\infty}\|a^{(k)}-L\|=0 עבורן L\in\mathbb{R}^n אוו אזי a\in(\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} גבול: תהא
                                                                         0 \xrightarrow[x 	o a]{} \lim_{x 	o a} נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר באותם סימני גבול כמו
                                           a\in \mathbb{R}^n משפט: תהא a\in (\mathbb{R}^n) ויהי a\in \mathbb{R}^n אזי משפט: תהא a\in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} ויהי a\in \mathbb{R}^n אזי מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"אa\in \mathbb{R}^n מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א
                . \left(\forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \left\|a^{(m)} - a^{(p)}\right\| < \varepsilon\right) \Longleftrightarrow (\mathsf{DR}) \text{ (In } a) אזי (a \in (\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} )
                                                                                    משפט בולצאנו ווירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.
     a^{(k_i)}\in K המקיימת a^{(k_i)}\in K אזי (לכל קומפקטית) קיימת a\in K^\mathbb{N} קיימת אזי (לכל קומפקטית) אזי אזי K\subseteq \mathbb{R}^n המקיימת
       f_i:A	o\mathbb{R} כאשר f=\langle f_1,\dots,f_m
angle הערה: תהא f:A	o\mathbb{R}^m כאשר f:A	o\mathbb{R}^m הערה: תהא
                                                                                   אזי L\in\mathbb{R}^m ותהא a\in\mathbb{R}^n תהא f:A	o\mathbb{R}^m תהא A\subseteq\mathbb{R}^n אזי
                                                          \lim_{x\to a} f(x) = L אזי \forall x \in A^{\mathbb{N}}. (x^{(k)} \to a) \Longrightarrow (f(x^{(k)}) \to L) היינה: אם
                 \lim_{x \to a} f\left(x
ight) = L אזי \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in A \setminus \{a\}. \ \|x - a\| < \delta \Longrightarrow \|f\left(x
ight) - L\| < \varepsilon סושי: אם •
                                                                                                        מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.
                                                A = \lim_{x \to a} f(x) עבורה A \in A אזי A \in \mathbb{R}^n תהא A \subseteq \mathbb{R}^n תהא רציפות בנקודה:
       A\subseteq C(B) (ביפה נקודתית עבור כל B\subseteq A אוי ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n אוי ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n אוי ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n איי ותהא
                              A\subseteq A משפט: תהא A\subseteq \mathbb{R}^n תהא A\subseteq \mathbb{R}^m ותהא A\subseteq \mathbb{R}^n אזי A\subseteq \mathbb{R}^n משפט: תהא
                                                                                                   מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.
                                 . וכן f,f^{-1} הפיכה עבורה f:A	o B אזי B\subset\mathbb{R}^n וכן A\subset\mathbb{R}^n הפיכה עבורה A\subset\mathbb{R}^n רציפות.
                                                                                                                            A:I	o\mathbb{R}^m עקומה פרמטרית: יהיI\subseteq\mathbb{R} יהי
                                                                                                                                                                מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.
```

 $\gamma\left(t
ight)=\left(1-t
ight)a+tb$  כך כך  $\gamma:\left[0,1
ight] o \mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר: יהיו  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה  $a,b\in\mathbb{R}^m$  יהיו  $a,b\in\mathbb{R}^m$  ותהא  $a,b\in\mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a,b\in\mathbb{R}^m$ 

 $.B_r\left(a
ight)=\{x\in\mathbb{R}\mid \|x-a\|< r\}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $a\in\mathbb{R}^n$  ויהי  $\overline{B}_r\left(a
ight)=\{x\in\mathbb{R}\mid \|x-a\|\leq r\}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $a\in\mathbb{R}^n$  מבור סגור: יהי  $a\in\mathbb{R}^n$  ויהי  $a\in\mathbb{R}^n$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $r\in\mathbb{R}$  ויהי  $r\in\mathbb{R}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$  אזי  $r\in\mathbb{R}$ 

 $\Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n] \ .a_i < x_i < b_i\}$  אזי  $a,b \in \mathbb{R}^n$  יהיו תיבה פתוחה: יהיו

```
A,b\in M. [a,b]\subseteq M המקיימת M\subseteq \mathbb{R}^n קבוצה קמורה: קבוצה
                                                                                         . טענה: יהי B_{r}\left(a\right),\overline{B}_{r}\left(a\right) אזי r\in\mathbb{R} ויהי a\in\mathbb{R}^{n} קבוצות קמורות
       \gamma\left(1
ight)=y וכן \gamma\left(0
ight)=x המקיימת \gamma:\left[0,1
ight]	o M קיימת מסילה x,y\in M וכן עבורה לכל M\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                         תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.
                            . \biguplus \mathcal{A} = M פתוחה אזי קיימת \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_{<leph_0}\left(\mathbb{R}^n
ight) פתוחה אזי קיימת M \subseteq \mathbb{R}^n קבוצה של תחומים ארים עבורה
                     [f(a),f(b)]\subseteq f([a,b]) מתקיים f(a)< f(b) עבורן a,b\in A מבקיימת לכל f:A	o\mathbb{R}
                                                                טענה: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) קשירה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n
                                         עבורם x,y\in\mathcal{K} אזי קיימים אזי f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}
ight) עבורם אזי קומפקטית תהא אזי קיימים אזי קומפקטית עבורם
                                                                                                                                                                     f(\mathcal{K}) = [f(x), f(y)]
                                                                               רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n אזי המקיימת
                                                                                    \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in \mathcal{M}. \|x - y\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon
                                                                          . טענה: תהא f \in C(\mathcal{K},\mathbb{R}^m) אזי קומפקטית ותהא \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n אזי \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n
                          מתקיים \lambda \in \mathbb{R} ולכל a \in L מרחב יהי עבורה לכל v: L 	o \mathbb{R} אזי מעל n מתקיים וקטורי נוצר סופית מעל
                                                                                                                      (\upsilon(a) > 0) \land ((\upsilon(a) = 0) \iff (a = 0)) \bullet
                                                                                                                                           .\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right) הומוגניות:
                                                                                                  v\left(a+b\right)\leq v\left(a\right)+v\left(b\right) אי שיוויון המשולש (אש"מ): •
                                                                 \forall x \in \mathbb{R}^n. v\left(x
ight) \leq c \left\|x\right\| עבורו עבורו v: \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} נורמה אזי קיים v: \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R}
                                                                                                                       v \in C\left(\mathbb{R}^n
ight) נורמה אזי v:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} טענה: תהא
                                                                  \forall x \in \mathbb{R}^n.c \, \|x\| \leq v \, (x) עבורו c>0 נורמה אזי קיים v:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} עהא
                                             a\cdot \eta \leq v \leq b\cdot \eta נורמות שקולות: v,\eta:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} נורמות עבורן קיימים u,\eta:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R}
                                                                                                                                        טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.
                                                                                                                 . מסקנה: תהא v:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} נורמה אזי v:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} שקולות
                            (v\left(x^{(k)}
ight)	o 0) \Longleftrightarrow (
ho\left(x^{(k)}
ight)	o 0) אזי x\in(\mathbb{R}^n)^\mathbb{N} נורמות ותהא v,
ho:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} אזי מסקנה:
                                                           \|v\|_p=(\sum_{i=1}^n|v_i|^p)^{rac{1}{p}} כך \|\cdot\|_p:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} נגדיר נורמה p\in\mathbb{N}_+ עבור \ell_p
                                    \|v\|_{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|v\|_{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|v\|_{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כך \|v\|_{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}|v_i| כורמת \gamma'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h} אזי \alpha\in(0,1) ויהי \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m מסקנה: תהא \gamma'(a)=\begin{pmatrix}\gamma'_1(a)\\\vdots\\\gamma'_m(a)\end{pmatrix} אזי \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m מסקנה: תהא \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m ויהי \gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m
      המקיימת L\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) עבורה קיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} אזי a\in\mathcal{U} תחום ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת
                                                                                                                                  f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)
                                                       f\in\mathcal{D}\left(a
ight) אזי a\in\mathcal{U} איני f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יהי
                                                      f\in\mathcal{D}\left(a
ight)\Longrightarrow f\in C\left(a
ight) אזי a\in\mathcal{U} ויהי f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי
                                      \operatorname{grad} f(a) = [L]_{\operatorname{ct}} אזי אזי f: \mathcal{U} 	o \mathbb{R} ותהא ותהא a \in \mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי יהי

abla f\left(a
ight)=\mathrm{grad}f\left(a
ight) אזי דיפרנציאבילית דיפרנציאביל ותהא a\in\mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n דיפרנציאבילית יהי
                           .rac{\partial f}{\partial x_i}\left(a
ight)=\lim_{h	o 0}rac{f(a+hx_i)-f(a)}{h} אזי a\in\mathcal{U} ויהי ווהי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n נגזרת חלקית: יהי
                                                                                                    .f'_{x_i}=rac{\partial f}{\partial x_i} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n הערה: יהי
                                           a_{i}=a_{i}משפט: יהי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי
                .
abla f\left(a
ight) = \left(rac{\partial f}{\partial x_{1}}\left(a
ight),\ldots,rac{\partial f}{\partial x_{n}}\left(a
ight)
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R} תחום ותהא
                                \mathcal{U} = \mathcal{U}(a) (a) איי (a \in \mathcal{U} איי ויהי a \in \mathcal{U} ויהי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n הערה: יהי
המקיימת L\in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) עבורה קיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m אזי a\in\mathcal{U} תחום ויהי עוב יהי יהי יהי יהי יהי
                                                                                                                                  f(x) = f(a) + L(x - a) + o(||x - a||)
               (f\in\mathcal{D}\left(a
ight))\Longleftrightarrow (orall i\in\{1\dots m\}\,.f_i\in\mathcal{D}\left(a
ight)) אזי a\in\mathcal{U} וויהי וויהי f:\mathcal{U}\to\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מענה: יהי \mathcal{D}_f\left(a
ight)=egin{pmatrix} -
abla f_i\in\mathcal{D}\left(a
ight)\\ \vdots\\ -
abla f_m\left(a
ight) = \end{pmatrix} אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^m המקיימת ותהא
                                                       f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^mמסקנה: יהי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m אזי ותהא
```

```
(\forall x \in \mathcal{U}.f(x) = Ax + c) \Longrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = A) אזי A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) תהא
                                                                       \mathcal{D}_f \in C\left(\mathcal{U}
ight) וכן f \in \mathcal{D}\left(\mathcal{U}
ight) המקיימת המקיימת שזי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n תחום אזי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n וכן
                                                                                                                  f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) אזי ברציפות אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n גזירה ברציפות
                                                                             . orall i \in [m] \,. orall j \in [n] \,. rac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C \left( \mathcal{U} 
ight) איז f \in C^1 \left( \mathcal{U}, \mathbb{R}^m 
ight) תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n איז f \in \mathcal{D} \left( \mathcal{U} 
ight) איז \forall i \in [m] \,. orall j \in [n] \,. rac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C \left( \mathcal{U} 
ight) עבורה f : \mathcal{U} 	o \mathbb{R}^m איז שפט: יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m עבורה \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n משפט: יהי
                                                 \mathcal{L}_{i}\left(orall i\in\left[m
ight].orall j\in\left[n
ight].rac{\partial f_{i}}{\partial x_{i}}\in C\left(\mathcal{U}
ight)
ight)\Longleftrightarrow\left(f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}
ight)
ight) אזי f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{m} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                                  d_{\overline{\partial v}}(a)=\lim_{h	o 0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h} אזי a\in \mathcal{U} ויהי v\in \mathbb{S}^{n-1} יהי f:\mathcal{U}	o \mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                         .rac{\partial f}{\partial v}(a)=
abla f\left(a
ight)\cdot v אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} ותהא v\in\mathbb{S}^{n-1} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מענה: יהי
                                                 \frac{\partial f}{\partial x}(a)=\mathcal{D}_f(a)\cdot v אזי f\in\mathcal{D}(a) המקיימת f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m ותהא v\in\mathbb{S}^{n-1} ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מסקנה: יהי
                                                                                                                                 .(טענה: יהי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n תחום אזי \mathcal{U} קשירה מסילתית אזי \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n יהי יהי
                                       (orall x\in\mathcal{U}.f(x)=c) \Longleftarrow (orall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0) משפט: יהי \mathcal{U}=\mathcal{U}ת תחום תהא \mathcal{U}=\mathcal{U}ויהי ויהי \mathcal{U}=\mathcal{U}
                                 \mathcal{U}(x) \in \mathcal{U}(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}(x) \in \mathcal{U}(x) = 0) אזי c \in \mathbb{R}^m ויהי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n מסקנה: יהי
             A: \mathcal{U}. ויהי A: \mathcal{U}. 
        A\in\mathcal{U}.f\left(x
ight)=Ax+c\Longleftrightarrow\left(orall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x
ight)=A
ight) אזי C\in\mathbb{R}^{m} ויהי A\in M_{m	imes n}\left(\mathbb{R}
ight) תהא f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{m} מסקנה: תהא
                                                                                                                         .rac{\partial\left(rac{\partial f}{\partial x_i}
ight)}{\partial x_i}=rac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} גזירה אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} סימון: תהא
                                                                                  rac{\partial \left(rac{\partial f}{\partial x_j}
ight)}{\partial x_i}=rac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} גזירה אזי rac{\partial f}{\partial x_j} באשר ויהיו f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} גזירה אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                                                                                                                                                                    \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}} הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה מוכלל
                                  \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\left(a
ight) = rac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\left(a
ight) איז a \in \mathcal{U} ויהי \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^1\left(\mathcal{U}
ight) עבורן i,j \in \{1\dots n\} וכך 
 dמסקנה: יהי K\in\mathbb{N}^n תהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורה \mathcal{D}_f\in C^k ויהי \mathcal{D}_f\in\mathcal{C}^k ויהי \mathcal{D}_f\in\mathcal{C}^k אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא
                                                                                                                                                  \|Av\|_{
m st} \leq \|A\|_{
m st} \cdot \|v\|_{
m st} איז v \in \mathbb{R}^n ויהי A \in M_{m 	imes n}\left(\mathbb{R}
ight) טענה: תהא
אזי g\in D\left(f\left(a
ight)
ight) וכן f\in\mathcal{D}\left(a
ight) עבורן g:\mathcal{V}	o\mathbb{R}^k אזי g\in\mathcal{D}\left(f\left(a
ight)
ight) וכן \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m עבורן אזי \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m אזי \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m אזי
                                                                                                                                                                                                  \mathcal{D}_{g \circ f}\left(a\right) = \mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right) \cdot \mathcal{D}_{f}\left(a\right) וכן g \circ f \in \mathcal{D}\left(a\right)
                                                    \Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n 	imes \mathbb{R} \mid (x \in \mathcal{U}) \land (f(x) = y)\} אזי f: \mathcal{U} \to \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                                 \Pi_c=\{x\in\mathcal{U}\mid f(x)=c\} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{R} אזי תחום תהא
משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום יהי עבורה f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורה משיק לגרף הפונקציה בנקודה:
                                                                                                                                                                                                                                    y - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i)
                  N_a = (-
abla f\left(a
ight), 1) אזי f \in \mathcal{D}\left(a
ight) עבורה f : \mathcal{U} 	o \mathbb{R} אותהא a \in \mathcal{U} תחום יהי עG \subseteq \mathbb{R}^n אזי עבורה יהי

abla f\left(a
ight) \perp \Pi_{f\left(a
ight)} אזי f\in\mathcal{D}\left(a
ight) עבורה f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} אחי a\in\mathcal{U} תחום יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n טענה: יהי
                                                                                                                                                                                            נקודת קיצון: יהי f:\mathcal{U} 	o \mathbb{R} תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n יהי
                                                                                       \forall x \in \mathcal{O}.f\left(x\right) \geq f\left(a\right) המקיימת סביבה עבורה קיימת סביבה a \in \mathcal{U} צבורה מינימום מקומי:
                                                                                   . \forall x \in \mathcal{O}. f\left(x\right) \leq f\left(a\right) המקיימת שביבה \mathcal{O} המקיימת עבורה קיימת a \in \mathcal{U} . עבורה קיימת
                                                                                                         .
abla f\left(a
ight)=0 משפט פרמה: יהי a\in\mathcal{U} תחום תהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n משפט פרמה:
                                                                                                                                                                                       נקודת קיצון: יהי f:\mathcal{U} 	o \mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי
                                                                                   aנקודת מינימום מקומי: a \in \mathcal{U} עבורה לכל i \in [m] מתקיים a \in \mathcal{U} נקודת מינימום מקומי.
                                                                            f_i נקודת מקסימום מקומי: u \in [m] עבורה לכל עבורה i \in [m] מתקיים a \in \mathcal{U} נקודת מקסימום מקומי
                                                                                                                  \mathcal{D}_f\left(a
ight)=0 אזי קיצון אזי a\in\mathcal{U} ותהא f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m מסקנה: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום תהא
                                                                \mathcal{D}_f(a)=0 המקיימת a\in\mathcal{U} אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^m תחום ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n המקיימת יהי
\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^n\|V|=k}}inom{k!}{V_1,...,V_n}\prod_{i=1}^n\left(a_i-b_i
ight)^{V_i}rac{\partial^k}{\partial x^V}f נגדיר a,b\in\mathbb{R}^n ויהיו f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) תחום תהא
```

משפט: יהי  $a\in\mathcal{U}$  יהי  $f,g:\mathcal{U} o\mathbb{R}^m$  משפט: יהי תחום תהיינה  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי יהי

 $.f\in C\left( a
ight)$  אזי  $f\in \mathcal{D}\left( a
ight)$  •

 $.cf, f + g \in \mathcal{D}(a)$  אמ  $f, g \in \mathcal{D}(a)$  אם •

 $.(\forall x \in \mathcal{U}.f(x) = c) \Longrightarrow (\forall x \in \mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x) = 0) \bullet$ 

```
\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\left(\sum_{i=1}^n\left(a_i-b_i\right)rac{\partial f}{\partial x_i}
ight)^k אזי a,b\in\mathbb{R}^n ויהיו f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n משפט טיילור: יהי f\in\mathcal{U} תחום יהי f\in\mathcal{U} תהא f\in\mathcal{U} תהא f\in\mathcal{U} חום יהי f\in\mathcal{U} תהא משפט טיילור: יהי
                                                               f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{i}f\left(a\right)+\frac{1}{\left(k+1\right)!}\mathcal{D}_{\left(x,a\right)}^{k+1}f\left(c\right) עבורו c\in\left[x,a\right] אזי קיים x\in\mathcal{O}
                                                       (H_f)_{i,j}=f''_{x_i,x_i} יהי פעמיים אזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} הסיאן: יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n תחום ותהא
                                                 עבורו c\in[x,a] איי קיים a\in\mathcal{U} ותהא ותהא f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} יהי
                                                                                                                             f(x) = f(a) + (x - a)^{t} H_{f}(c) (x - a)
                                                                                 משפט: יהי a\in\mathcal{U} תחום תהא f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                                                                                                                 .(מנימום) חיובית ממש) חיובית ממש) חיובית ממש).
                                                                                                              .(מקסימום) שלילית ממש) שלילית שלילית H_f(a)
                                                                   .(לא אחד מהמקרים מלעיל)) (\det(H_f(a)) \neq 0)) (לא אחד מהמקרים מלעיל)) (\det(H_f(a)) \neq 0))
                                                                                מסקנה: יהיu\in\mathcal{U} תחום תהא f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2 יהי
                                                                                     .(det (H_f(a)) > 0) \land (f''_{x,x}(a) > 0) •
                                                                                   .(det (H_f(a)) > 0) \land (f''_{x,x}(a) < 0) •
                                                                   (לא אחד מהמקרים מלעיל)) \wedge (\det(H_f(a)) \neq 0) (לא אחד מהמקרים מלעיל)) •
משפט פונקציה סתומה: יהי F(a)=0 וכן F(a)=0 ותהא ותהא F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) משפט פונקציה סתומה: יהי
מתקיים (x,y)\in I_x	imes I_y עבורה לכל f\in C^1(I_x,I_y) וקיימת a_2\in I_y וכן a_1\in I_x פתוחים עבורם ווען קיימים פיימים
                                                                                                                                         .(F(x,y)=0) \iff (y=f(x))
פתוחים I_x,I_y\subseteq\mathbb{R} יהיו F'_y(a)
eq 0 וכן F(a)=0 עבורה a\in\mathcal{U} תהא F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) יהיו \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2 יהי יהי
עבורם (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in I_{x}\times I_{y} עבורה לכל f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}
ight) ותהא a_{2}\in I_{y} וכן a_{1}\in I_{x}
                                                                                                                                                 I_x על f'(x)=-rac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}
I_x,I_y\subseteq\mathbb{R} יהיו F_y'(a)
eq 0 וכן F(a)=0 וכן F(a)=0 יהיו F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}) יהיו \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2 יהיו
עבורם (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow(y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in I_{x}	imes I_{y} עבורה לכל f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}
ight) ותהא a_{2}\in I_{y} ומתקיים a_{1}\in I_{x}
אזי קיימים F(a)=0 וכן F(a)=0 ותהא F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}) אזי קיימים תחום תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1} ותהא
עבורה f\in C^k (\prod_{i=1}^n I_{x_i},I_y) וכן a_i\in I_y וכן a_i\in I_{x_i} מתקיים עבורם לכל i\in [n] מתקיים i\in [n]
                                                                               (F(x,y)=0)\Longleftrightarrow (y=f(x)) מתקיים (x,y)\in (\prod_{i=1}^n I_{x_i})\times I_y לכל
I_{x_1},\dots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R} יהיו יהיי F'_{x_{n+1}}\left(a
ight)
eq0 וכן F\left(a
ight)=0 וכן a\in\mathcal{U} ותהא ותהא ותהא F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) יהיו יהיי יהיי
(x,y)\in (\prod_{i=1}^nI_{x_i})	imes I_y עבורה לכל f\in C^1 עבורה לכל a_i\in I_x ותהא ותהא a_{n+1}\in I_y וכך a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x על a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x אזי לכל a_i\in I_x מתקיים a_i\in I_x
                                      \mathcal{D}_f(a) = \left(F_x'(a), F_y'(a)
ight) אזי a \in \mathcal{U} אותהא f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m) תחום תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m} יימון: יהי
משפט פונקציה סתומה כללי: יהי F\left(a
ight)=0 תחום תהא ותהא F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight) תחום תהא עבורה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m} וכן
קיימת a_{j+n}\in I_{y_i} מתקיים j\in [m] ולכל מתקיים מתקיים לכל פתוחים עבורם לכל פתוחים עבורם לכל ווכל i\in [n]
      (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow (y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in (\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}})	imes \left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight) עבורה לכל f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight)
                            F'_y(a) וכן F(a)=0 הפיכה יהיו F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m) הפיכה יהיו \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m} וכן הפיכה יהיו
                ותהא a_{j+n}\in I_{y_j} מתקיים j\in [m] ולכל ולכל מתקיים מתקיים לכל פתוחים עבורם לכל i\in [n] מתקיים עבורם לכל פתוחים אולכל ולכל מתקיים ולכל מתקיים אולכל ווהא
אזי (F\left(x,y
ight)=0)\Longleftrightarrow(y=f\left(x
ight)) מתקיים (x,y)\in(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}})	imes\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight) אזי f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}
ight)
                                                                                                      \prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}} על \mathcal{D}_{f}\left(x
ight)=-F_{y}'\left(x,f\left(x
ight)
ight)^{-1}\cdot F_{x}'\left(x,f\left(x
ight)
ight)
מסקנה: יהי 
abla F\left(a
ight) 
eq 0 אזי משוואת המשטח המשיק וכך A\in\mathcal{U} ותהא ותהא ותהא F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight) אזי משוואת המשטח המשיק יהי
                                                                                                                           \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(a) (x_i - a_i) = 0 לגרף ב־a לגרף
מסקנה: יהי הפיכה אזי משוואת המשטח F(a)=0 ותהא a\in\mathcal{U} ותהא ותהא F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m) הפיכה אזי משוואת המשטח \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m} יהי
                                                                                                               \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(a) (x_i - a_i) = 0 המשיק לגרף ב־a הינו
                                                                 f^{-1}\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}
ight) הפיכה עבורה f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}
ight) אזי \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n} היי
```

 $f^{-1}\in C^{k}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}
ight)$  הפיכה עבורה  $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}
ight)$  אזי איזי  $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$  הייו יהיו  $\mathcal{C}^{k}$ 

של  $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$  משפט פונקציה הפוכה: יהי  $\mathcal{D}_f\left(a\right)$  הפיכה אזי עבורה  $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n\right)$  ותהא ותהא  $a\in\mathcal{U}$  הפיכה אזי קיימת סביבה  $\mathcal{O}$  של  $\mathcal{O}$  של  $\mathcal{O}$  עבורה f דיפאומורפיזם על  $\mathcal{O}$ 

f אבורה  $\mathcal{D}_f(a)$  הפיכה ותהא  $\mathcal{D}_f(a)$  סביבה של a עבורה a עבורה a עבורה יהי  $\mathcal{D}_f(a)$  הפיכה של a עבורה a עבורה a עבורה עבורה a עבורה a עבורה עבורה a עבורה a עבורה עבורה עבורה עבורה a עבורה עבו

טענה: יהיו  $f:\mathcal{U} o\mathcal{V}$  תהא תהא  $A\subseteq\mathcal{U}$  תהא  $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$  יהיו

- פתוחה) f(A) פתוחה).
- .(א סגורה) f(A) סגורה) סגורה).
- .(א קומפקטית) קומפקטית) קומפקטית) f(A)
- $\partial (f(A)) = f(\partial A)$  אזי  $\partial A \subseteq \mathcal{U}$  אם  $\bullet$

פונקציה פתוחה: יהי  $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$  תחום אזי  $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$  המקיימת לכל  $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}$  פתוחה.  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  פתוחה: יהי  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  תחום אזי  $f\in\mathcal{U}$  ותהא  $f\in\mathcal{U}$  עבורה  $f\in\mathcal{U}$  עבורה  $f\in\mathcal{U}$  תחום יהי  $f\in\mathcal{U}$  תחום יהי  $g\in\mathcal{U}$  ותהא  $g\in\mathcal{U}$  ותהא  $g\in\mathcal{U}$  עבורה  $g\in\mathcal{U}$  פתוחה על  $g\in\mathcal{U}$ .

נקודה קריטית בתנאי: יהי  $a\in\mathcal{U}$  אזי  $g\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m
ight)$  תהא תהא  $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  המקיימת  $\mathcal{D}(a)\in\mathrm{Span}\left\{\nabla g_i\left(a\right)\right\}$ 

משפט: יהי  $g\left(a\right)=0$  וכן  $g\left(a\right)=0$  וכן  $g\left(a\right)=0$  ותהא המקיימת  $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$  תהא תהא  $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$  וכן  $g\left(a\right)=0$  בת"ל וכן יהי g=0 של g עבורה g=0 של g עבורה בקבוצה g=0 אזי g נקודה קריטית של g בתנאי g של g עבורה בקבוצה g משפט: יהי איי בקבוצה g משפט: יהי g של g עבורה g המקיימת סביבה g של g עבורה g המקיימת סביבה g של g המקיימת סביבה g המקיימת g המקיימת

בנקציית לגראנז': יהי  $g\in C^1(\mathcal{U} imes\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$  ותהא ותהא  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  יהי יהי  $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  ותהא  $L(x_1\ldots x_n,\lambda_1,\ldots\lambda_m)=f(x_1\ldots x_n)-\sum_{i=1}^m\lambda_ig_i(x_1\ldots x_n)$ 

מסקנה: יהי a) אזי ( $a\in\mathcal{U}$  אזי  $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$  תהא  $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$  תחום תהא  $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$  אזי (a) נקודה קריטית של a).  $\mathcal{U}\in\mathbb{R}^m$  אזי (a) עבורה a) עבורה (a) נקודה קריטית של a).