הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע אזי $|X|\le|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ועל אזי $|X|=|Y|$.

סימון: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $\neg(|X|=|Y|)$ אזי $|X|\neq|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|X|\neq|Y|$ אזי $|X|<|Y|$.

הערה: נקרא לביטוי $|X|$ העוצמה של X.

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין (קש"ב): תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|Y|\le|X|$ אזי $|X|=|Y|$.

סימון: $\aleph_0=|\mathbb{N}|$.

קבוצה בת מנייה: קבוצה X עבורה $|X|=\aleph_0$.

קבוצה סופית: קבוצה A עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $|\{0,\ldots,n-1\}|=n$.

קבוצה אינסופית: קבוצה A עבורה לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$.

טענה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אינסופית אזי B בת מנייה.

מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהא A בת מנייה תהא B קבוצה ותהא $f:A\to B$ על אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\cup B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות בנות מנייה אזי $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ בת מנייה.

טענה: תהא $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i\in\mathbb{N}$ ותהא $\langle f_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת פונקציות באשר $f_n:\mathbb{N}\to A_n$ על לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ סופית או בת מנייה.

מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid(a\in A)\wedge(b\in B)\}$.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\times B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ בנות מנייה אזי $A_1\times\ldots\times A_n$ בת מנייה.

הגדרה: תהא A קבוצה אזי $A^1=A$.

הגדרה: תהא A קבוצה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $A^n=A\times A^{n-1}$.

טענה: $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{N}^n$ בת מנייה.

מסקנה: $|\{A\subseteq\mathbb{N}\mid A \text{ סופית}\}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

מספר אלגברי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו קיים $p\in\mathbb{Z}[x]$ המקיים $p(a)=0$.

מספר טרנסצנדנטי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו לכל $p\in\mathbb{Z}[x]$ מתקיים $p(a)\neq0$.

משפט קנטור: $|\{a\in\mathbb{C}\mid a \text{ אלגברי}\}|=\aleph_0$.

יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי $\preccurlyeq\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ באשר

- רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $x\preccurlyeq x$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq z$ אזי $x\preccurlyeq z$.
- אנטי סימטריות חלשה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq x$ אזי $x=y$.

יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי $\prec\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\prec\rangle$ באשר

- אנטי רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $\neg(x\prec x)$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\prec y$ וכן $y\prec z$ אזי $x\prec z$.
- אנטי סימטריות חזקה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\prec y$ אזי $\neg(y\prec x)$.

יחס סדר קווי חלקי/חלש: יחס סדר חלקי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\vee(y\preccurlyeq x)$.

יחס סדר קווי חזק: יחס סדר חזק $\langle A,\prec\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\prec y)\vee(y\prec x)\vee(x=y)$.

טענה: $\langle\mathbb{N},\le_{\mathbb{N}}\rangle$ יחס סדר קווי חלקי.

טענה: תהא A קבוצה אזי $\langle\mathcal{P}(A),\subseteq\rangle$ יחס סדר חלקי.

פונקציה שומרת סדר: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים אזי $f:A\to B$ חח"ע עבורה לכל $a,b\in A$ מתקיים $(aRb)\iff(f(a)Sf(b))$.

סדרים חלקיים איזומורפיים: סדרים $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ עבורם קיימת $\pi:A\to B$ הפיכה שומרת סדר.

סימון: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים איזומורפיים אזי $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$.

יחס סדר קווי בעל איבר ראשון/מינימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $a\in A$ באשר לכל $b\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון $a\in A$ אזי $\min(A)=a$.
טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle B,S\rangle\simeq\langle A,R\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר ראשון.
יחס סדר קווי בעל איבר אחרון/מקסימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $b\in A$ באשר לכל $a\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון $a\in A$ אזי $\max(A)=a$.
טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle B,S\rangle\simeq\langle A,R\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר אחרון.
יחס סדר קווי צפוף: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ המקיימים xRy קיים $z\in A$ עבורו xRz וכן zRy.
טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי צפוף ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle B,S\rangle\simeq\langle A,R\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ צפוף.
טענה: $\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
מסקנה: $\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle\not\simeq\langle\mathbb{N},\leq_{\mathbb{N}}\rangle$.
משפט קנטור: יהי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle\simeq\langle A,\preccurlyeq\rangle$.
משפט קנטור: יהי $\langle A,\prec\rangle$ סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle\mathbb{Q},<_{\mathbb{Q}}\rangle\simeq\langle A,\prec\rangle$.
חסם מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\overline{B}_X=\{a\in A\mid X \text{ חסם מלעיל של } a\}$.
קבוצה חסומה מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\overline{B}_X\neq\varnothing$.
חסם מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\underline{B}_X=\{a\in A\mid X \text{ חסם מלרע של } a\}$.
קבוצה חסומה מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\underline{B}_X\neq\varnothing$.
קבוצה חסומה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ בעלת חסם מלרע וחסם מלעיל.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\sup(X)=\min\left(\overline{B}_X\right)$.
סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\inf(X)=\max\left(\underline{B}_X\right)$.
יחס סדר קווי שלם: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $X\subseteq A$ חסומה מלעיל קיים $\sup(X)$.
טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי ($\langle A,R\rangle$ סדר שלם)$\Longleftrightarrow$(לכל $X\subseteq A$ חסומה קיימים $\sup(X),\inf(X)$).
קבוצה צפופה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה לכל $x,y\in A$ באשר xRy קיים $z\in X$ המקיים xRz וכן zRy.
השלמה של יחס סדר קווי חלקי: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי סדר חלקי $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ המקיים
- $P\subseteq L$.
- לכל $x,y\in P$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\Longleftrightarrow(x\sqsubseteq y)$.
- $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
- $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ צפוף ב־$\langle L,\sqsubseteq\rangle$.

משפט יחידות השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה $\langle L,\sqsubseteq\rangle,\langle L^*,\sqsubseteq^*\rangle$ השלמות אזי קיים איזומורפיזם $\pi:L\to L^*$ עבורו $\pi(p)=p$ לכל $p\in P$.
משפט קיום השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.
חתך דדקינד: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $A,B\subseteq P$ לא ריקות אזי $\langle A,B\rangle$ באשר
- $A\cap B=\varnothing$.
- $A\cup B=P$.
- לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ מתקיים $a\preccurlyeq b$.
- $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]=\langle(-\infty,p),[p,\infty)\rangle$.
טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]$ חתך דדקינד.
הגדרה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $\langle A,B\rangle,\langle C,D\rangle$ חתכי דדקינד באשר $A\subseteq C$ אזי $\langle A,B\rangle\preccurlyeq\langle C,D\rangle$.
טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle P,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle\{[p]\mid p\in P\},\preccurlyeq\rangle$.
הערה: נשתמש בהתאמה מעל בתור שיכון של P בחתכי הדדקינד שלה.
סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\mathrm{Ded}(P)=\{\langle A,B\rangle\mid \text{חתך דדקינד } \langle A,B\rangle\}$.
טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי.
טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}(P),\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ צפופה ב־$\langle \mathrm{Ded}\left(P\right),\preccurlyeq\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle \mathrm{Ded}\left(P\right),\preccurlyeq\rangle$ סדר שלם.

טענה: יהי $\langle A,\prec\rangle$ סדר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון $\langle B,\sqsubset\rangle$ עבורו קיימת $f:A\to B$ שומרת סדר.

מספרים ממשיים: $\langle \mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}}\rangle$ הינה ההשלמה של $\langle \mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי $\langle P,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle \mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}}\rangle$.

טענה: $|\mathbb{R}|\neq\aleph_0$.

קבוצת החזקה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}\left(X\right)=\{Y\mid Y\subseteq X\}$.

סימון: תהא X קבוצה אזי ${}^{X}2=\{f\mid f:X\to\{0,1\}\}$.

טענה: תהא X קבוצה אזי $|\mathcal{P}\left(X\right)|=\left|{}^{X}2\right|$.

משפט קנטור: תהא X קבוצה אזי $|X|<|\mathcal{P}\left(X\right)|$.

טענה: $|\mathbb{R}|=\left|{}^{\mathbb{N}}2\right|$.

טענה: תהיינה A,B קבוצות זרות ותהיינה C,D קבוצות זרות באשר $|A|=|C|$ וכן $|B|=|D|$ אזי $|A\cup B|=|C\cup D|$.

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות זרות אזי $|A|+|B|=|A\cup B|$.

טענה: תהא A קבוצה אזי $|A\times\{0\}|=|A|$.

הגדרה חיבור: תהיינה A,B קבוצות אזי $|A|+|B|=|A\times\{0\}|+|B\times\{1\}|$.

טענה: תהיינה A,B,C,D קבוצות באשר $|A|=|C|$ וכן $|B|=|D|$ אזי $|A\times B|=|C\times D|$.

הגדרה כפל: תהיינה A,B קבוצות אזי $|A|\cdot|B|=|A\times B|$.

הערה: נאמר כי κ היא עוצמה אם קיימת קבוצה A עבורה $|A|=\kappa$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa+\kappa=2\cdot\kappa$.

טענה: תהיינה κ,λ,μ עוצמות אזי $\kappa\cdot(\lambda+\mu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\mu$.

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי ${}^{B}A=\{f\mid f:B\to A\}$.

טענה: תהיינה A,B,C,D קבוצות באשר $|A|=|C|$ וכן $|B|=|D|$ אזי $\left|{}^{B}A\right|=\left|{}^{D}C\right|$.

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי $|A|^{|B|}=\left|{}^{B}A\right|$.

מסקנה: $|\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa\cdot\kappa=\kappa^2$.

טענה: תהיינה κ,λ,μ עוצמות אזי $\kappa^{(\lambda+\mu)}=\kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\mu}$ וכן $\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu}=\kappa^{(\lambda\cdot\mu)}$ וכן $(\kappa\cdot\lambda)^{\mu}=(\kappa^{\mu})\cdot(\lambda^{\mu})$

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\aleph_0+n=\aleph_0$ וכן $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0\cdot n=\aleph_0$ וכן $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0^n=\aleph_0$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $2^{\aleph_0}+n=2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0}+\aleph_0=2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $2^{\aleph_0}\cdot n=2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0}\cdot\aleph_0=2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0}\cdot2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\left(2^{\aleph_0}\right)^n=2^{\aleph_0}$ וכן $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq2}$ אזי $n^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$ וכן $\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

טענה: $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\left(2^{\aleph_0}\right)}>2^{\aleph_0}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $|\mathbb{R}^n|=2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{C}|=2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{N}\to\mathbb{R}|=2^{\aleph_0}$ וכן $\left|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}\right|=2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא B קבוצה באשר $|B|=2^{\aleph_0}$ ותהא $A\subseteq B$ באשר $|A|\leq\aleph_0$ אזי $|B\backslash A|=2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a\in\mathbb{C}\mid \text{מספר טרנסצנדנטי } a\}|=2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a\in\mathbb{R}\mid \text{אי־רציונלי } a\}|=2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f\mid(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})\wedge(\text{רציפה } f)\}|=2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f\mid(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})\wedge(\text{מונוטונית } f)\}|=2^{\aleph_0}$.

טענה: $|\{A\mid(A\subseteq\mathbb{R})\wedge(\text{פתוחה } A)\}|=2^{\aleph_0}$.

יחס סדר טוב: סדר קווי $\langle W,\prec\rangle$ עבורו לכל $A\subseteq W$ באשר $A\neq\varnothing$ קיים איבר קטן ביותר.

טענה: $\langle\mathbb{N},<_{\mathbb{N}}\rangle$ סדר טוב.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\langle\mathbb{N}_{\leq n},<_{\mathbb{N}_{\leq n}}\right\rangle$ סדר טוב.

רישה של יחס סדר טוב: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב אזי $S\subseteq W$ המקיימת

- $S\neq W$.
- לכל $a\in S$ ולכל $b\in W$ אם $b\prec a$ אזי $b\in S$.

סימון: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a\in W$ אזי $W\left[a\right]=\left\{b\in W\mid b\prec a\right\}$.

מסקנה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a\in W$ אזי $W\left[a\right]$ רישה ב־W.

טענה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ותהא S רישה ב־W אזי קיים $x\in W$ עבורו $S=W\left[x\right]$.

טענה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ותהא $f:W\to W$ שומרת סדר אזי $(x\prec f(x))\vee(x=f(x))$ לכל $x\in W$.

מסקנה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a\in W$ אזי $W\not\simeq W\left[a\right]$.

מסקנה: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי $f:W\to W$ איזומורפיזם אזי $f=\mathrm{Id}$.

מסקנה: יהיו $\langle W,\prec\rangle,\langle A,\sqsubset\rangle$ יחסי סדר טובים ויהיו $f,g:W\to A$ איזומורפיזמים אזי $f=g$.

משפט ההשוואה: יהיו $\langle W,\prec\rangle,\langle A,\sqsubset\rangle$ יחסי סדר טובים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\langle W,\prec\rangle\simeq\langle A,\sqsubset\rangle$.
- קיים $w\in W$ עבורו $\langle W\left[w\right],\prec\rangle\simeq\langle A,\sqsubset\rangle$.
- קיים $a\in A$ עבורו $\langle W,\prec\rangle\simeq\langle A\left[a\right],\sqsubset\rangle$.

קבוצה טרנזיטיבית: קבוצה X עבורה לכל $A\in X$ ולכל $y\in A$ מתקיים $y\in X$.

סודר: קבוצה טרנזיטיבית X עבורה $\langle X,\in\rangle$ יחס סדר טוב.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha\cup\{\alpha\}$ סודר.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha\notin\alpha$.

טענה: יהי α סודר ויהי $x\in\alpha$ אזי x סודר.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $\beta\notin\alpha$.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\beta\subsetneq\alpha$ אזי $\alpha\in\beta$.

טענה משפט ההשוואה: יהיו α,β סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\alpha=\beta$.
- $\alpha\in\beta$.
- $\beta\in\alpha$.

טענה: תהא S קבוצה לא ריקה של סודרים אזי $\min(S)$ קיים.

הגדרה: $\mathcal{O}_n=\{\alpha\mid \alpha\text{ סודר}\}$.

סימון: $\mathcal{O}_n=\mathrm{Ord}$.

טענה פרדוקס גוראלי־פורטי: $\mathcal{O}_n$ אינה קבוצה.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $(\alpha\cup\{\alpha\}\in\beta)\vee(\alpha\cup\{\alpha\}=\beta)$.

סימון: יהי α סודר אזי $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$.

טענה: תהא S קבוצת סודרים אזי קיים סודר α עבורו לכל $\beta\in S$ מתקיים $\beta\in\alpha$.

טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב אזי סודר α עבורו $\langle\alpha,\in\rangle\simeq\langle W,\prec\rangle$.

משפט: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל־$\langle W,\prec\rangle$.

סימון: יהי $\langle W,\prec\rangle$ יחס סדר טוב ויהי α סודר טיפוס של $\langle W,\prec\rangle$ אזי $\mathrm{opt}(\langle W,\prec\rangle)=\alpha$.

אקסיומת ההחלפה: תהא P נוסחה באשר לכל קבוצה X קיימת ויחידה קבוצה Y עבורה $P(X,Y)$ אזי לכל קבוצה A קיימת קבוצה B באשר לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ המקיים $P(a,b)$. זוהי אינה טענה

אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי $\{a\in A\mid P(a)\}$ קבוצה. זוהי אינה טענה

משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר α מתקיים $(\forall\beta\in\alpha.P(\beta))\Longrightarrow(P(\alpha))$ אזי לכל סודר γ מתקיים $P(\gamma)$.

סודר עוקב: סודר α עבורו קיים סודר $\beta\in\alpha$ המקיים $\alpha=\beta+1$.

סודר גבולי: סודר α עבורו לכל סודר $\beta\in\alpha$ מתקיים $\alpha\neq\beta+1$.

משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת

- $P(\varnothing)$.
- לכל סודר α מתקיים $P(\alpha)\Longrightarrow P(\alpha+1)$.

- לכל סודר גבולי α מתקיים $\left(\forall\beta\in\alpha.P\left(\beta\right)\right)\Longrightarrow\left(P\left(\alpha\right)\right)$.

אזי לכל סודר γ מתקיים $P\left(\gamma\right)$.

אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה S באשר $\varnothing\in S$ וכן לכל $x\in S$ מתקיים $x+1\in S$. זוהי אינה טענה

טענה: תהא S קבוצה באשר $\varnothing\in S$ וכן לכל $x\in S$ מתקיים $x+1\in S$ ויהי δ הסודר הראשון באשר $\delta\notin S$ אזי δ סודר גבולי.

סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו $\varnothing$ הינו ω.

סימון: $0=\varnothing$.

הגדרה: $\omega=\mathbb{N}$.

הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה $n+1=n\cup\left\{ n\right\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

סימון: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $\alpha<\beta$.

הגדרה חיבור: יהי α סודר אזי

- $\alpha+0=\alpha$.
- יהי β סודר אזי $\alpha+\left(\beta+1\right)=\left(\alpha+\beta\right)+1$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha+\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha+\gamma\right)$.

טענה: $\omega=\omega+0$ וכן $\omega=\omega+1$ וכן $\omega+1>\omega$.

הגדרה כפל: יהי α סודר אזי

- $\alpha\cdot0=0$.
- יהי β סודר אזי $\alpha\cdot\left(\beta+1\right)=\left(\alpha\cdot\beta\right)+\alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha\cdot\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha\cdot\gamma\right)$.

טענה: $0=\omega\cdot0$ וכן $\omega=\omega\cdot1$ וכן $\omega=\omega\cdot2$ וכן $\omega\cdot2=\omega+\omega$.

טענה: יהי $n<\omega$ אזי $\omega+n<\omega+\omega$.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha+\omega$ סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי α סודר אזי

- $\alpha^{0}=1$.
- יהי β סודר אזי $\alpha^{\beta+1}=\alpha^{\beta}\cdot\alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha^{\beta}=\bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha^{\gamma}\right)$.

טענה: $1=1^{\omega}$ וכן $\omega=2^{\omega}$ וכן $\omega=\omega^{1}$ וכן $\omega^{2}=\omega\cdot\omega$ וכן $\omega^{2}>2^{\omega}$.

מונה: סודר α עבורו לכל $\beta<\alpha$ מתקיים $|\beta|<|\alpha|$.

סימון: $\aleph_{0}=\omega$.

הערה: ההגדרה מלעיל מתלכדת עם היות $|\omega|=\omega$, לשם נוחות נשתמש פה בסימון זה ובהמשך נצדיקו.

טענה: יהיו α,β סודרים בני מנייה אזי $\alpha+\beta,\alpha\cdot\beta,\alpha^{\beta}$ סודרים בני מנייה.

טענה: קיים סודר α המקיים $\alpha>\omega$ באשר α אינו בן מנייה.

טענה: יהי δ סודר אזי קיים מונה κ באשר $\delta<\kappa$.

סימון: יהי α סודר אזי α^{+} הינו המונה הראשון עבורו $\alpha<\alpha^{+}$.

הגדרה א: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha+1}=\aleph_{\alpha}^{+}$.

הגדרה א: יהי α סודר גבולי אזי $\aleph_{\alpha}=\bigcup_{\beta<\alpha}\aleph_{\beta}$.

טענה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha}$ מונה.

טענה: יהי κ מונה אזי קיים סודר α עבורו $\kappa=\aleph_{\alpha}$.

סימון: יהי α סודר אזי $\omega_{\alpha}=\aleph_{\alpha}$.

משפט: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\alpha}=\aleph_{\alpha}$.

משפט: יהיו κ,λ מונים אינסופיים אזי

- $\kappa+\lambda=\max\left\{ \kappa,\lambda\right\}$.
- $\kappa\cdot\lambda=\max\left\{ \kappa,\lambda\right\}$.