```
המקיימת \mathcal{F}\subseteq 2^\Omega המקיימת קבוצה \Omega המקיימת
                                                                                                                                                                 \Omega \in \mathcal{F} \bullet
                                                                                                                                                  \forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \bullet
                                                                                                                 .\bigcup E \in \mathcal{F} בת מנייה מתקיים E \subseteq \mathcal{F} לכל
                                                                                                                                 \varnothing\in\mathcal{F} אזי \sigma אלגברה אזי '\sigma
                                                                                          A \cap E \in \mathcal{F} אזי אזי B \subset \mathcal{F} בת מנייה אזי \sigma
                                                                                             \Omega מעל מעל הינה אלגברה מעל \mathcal F הינה אלגברה מעל מעל \sigma
         \mu\left(\biguplus_{i=1}^nB_i
ight)=\sum_{i=1}^n\mu\left(B_i
ight) פונקציה אדטיבית: פונקציה \mu:\mathcal{A}	o\mathbb{R} המקיימת לכל פונקציה ארטיבית: פונקציה המקיימת לכל
                                                                                        . אדטיבית \mu:\mathcal{F} 	o [0,\infty] אזי אלגברה תהא אדטיבית אלגברה אלגברה אזי
       \mu(igoplus_{i=1}^\infty B_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(B_i) מתקיים מתקיים אזרות \{B_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{A} המקיימת לכל \mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R} המקיים פונקציה \sigma-אדטיבית: פונקציה
                                                                             . אדטיבית: תהא \sigma \mu:\mathcal{F} 	o [0,\infty] אזי מידה על \sigma אדטיביה: תהא
                                                                                                            (\Omega, \mathcal{F}) אזי \Omega אזי מרחב מדיד: תהא \sigma \mathcal{F} אזי מרחב
                                                                                                         E \in \mathcal{F} אזי \Omega אזי \sigma אלגברה מדידה: תהא \sigma
                                                                               .\mu\left(arnothing
ight)=0 אזי \exists E\in\mathcal{F}.\mu\left(E
ight)<0 המקיימת \mathcal{F} המקיימת \mu מידה על
                                                                                                         . אדטיבית \mu אזי \mathcal F אזי מעל \sigma־אלגברה מעל מידה \mu
                                                                             \mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right) אזי A\subseteq B עבורן A,B\in\mathcal{F} למה: תהא \mu מידה ותהיינה
                                                                                             סדרת קבוצות מונוטונית: תהא \mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A}:\mathbb{N} 
ightarrow \mathcal{A} אזי
                                                                                                               \forall n \in \mathbb{N}. A_n \subseteq A_{n+1} שונוטונית עולה חלש: •
                                                                                                             \forall n \in \mathbb{N}. A_{n+1} \subseteq A_n מונוטונית יורדת חלש: •
                                                                                  \sup\left(A
ight)=igcup_{i=0}^{\infty}A_{i} אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A} קבוצה ותהא
                                                                                   \inf\left(A
ight)=igcap_{i=0}^{\infty}A_{i} אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא \mathcal{A} קבוצה ותהא
                                                          \limsup_{n	o\infty}A_n=igcap_{n=0}^\inftyigcup_{i=n}^\infty A_i אזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא קבוצה ותהא ליון: תהא
                                                          \liminf_{n	o\infty}A_n=igcup_{n=0}^\inftyigcap_{i=n}^\infty A_i אזי איזי A:\mathbb{N}	o\mathcal{A} קבוצה ותהא קבוצה ותהא A:\mathbb{N}	o\mathcal{A}
        \lim_{n \to \infty} A_n = \liminf_{n \to \infty} A_n אזי \lim\inf_{n \to \infty} A_n = \limsup_{n \to \infty} A_n עבורה A: \mathbb{N} \to \mathcal{A} אזי A: \mathbb{N} \to \mathcal{A}
                  \lim_{n \to \infty} \mu\left(A_n
ight) = \mu\left(B
ight) אזי \lim_{n \to \infty} A_n = B עבורה A: \mathbb{N} 	o \mathcal{F} ותהא לגברה \sigma־אלגברה מעל מידה מעל
                                                              (\Omega, \mathcal{F}, \mu) אזי איזי \mathcal{F} מידה \mu מידה מעל \Omega ותהא א אלגברה \sigmaראלגברה אלגברה
                                                   \mathbb{P}\left(\Omega
ight)=1 המקיימת \mathcal{F}:\mathcal{F}	o[0,\infty] האי מידה \sigma אזי מידה מעל \sigma המקיימת מידת הסתברות: תהא
                                                                                         מרחב הסתברות: מרחב מידה (\Omega, \mathcal{F}, \mu) עבורו \mu מידת הסתברות.
                                                                                                        \Omega אזי אזי \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} מרחב הסתברות אזי \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}
                                                                                                             E \in \mathcal{F} מרחב הסתברות אזי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מאורע: יהי
                                                                                                      \mathcal{F} אזי אחב הסתברות מרחב (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) יהי
A+b\subseteq (0,1] באשר b\in (0,1] אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות b\in (0,1] עבורו לכל A\subseteq (0,1] עבורו לכל
                                                                                                                                                         \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A+b)
                                                                  . טענה: לכל מרחב הסתברות ((0,1],2^{(0,1]},\mathbb{P}) לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.
                                                                                     . \forall x \in A. \exists arepsilon > 0. \, (x-arepsilon, x+arepsilon) \subseteq A עבורה עבורה אבוצה פתוחה: A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                                                            קבוצה סגורה: A\subseteq\mathbb{R} עבורה A^{\mathcal{C}} פתוחה.
                                                                \Omega טענה: תהיינה \sigma־אלגברה מעל מעל מעל מעל מעל הינה \sigma־אלגברה מעל סענה: תהיינה \sigma
   \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i כל ה\sigma־אלגבראות מעל \mathbb{R} המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי \{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} כל ה\sigma-אלגבראות מעל מעל אויינה בורלית מעל
                                                                                                                                                  B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} :קבוצה בורלית
```

אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ המקיימת

. | או סופית מתקיים $E\subseteq\mathcal{F}$ לכל סופית סופית

 $A \cap E \in \mathcal{F}$ אוזי סופית אזי ההא למה: תהא אלגברה ותהא למה:

 $\Omega \in \mathcal{F} \bullet$

 $\forall E \in \mathcal{F}.E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{F} \bullet$

 $\varnothing \in \mathcal{F}$ אלגברה אזי \mathcal{F} אלגברה

```
\mathfrak{B}_{(0,1]}=\{B\cap(0,1]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}: (0,1] אלגברה בורלית מעל\sigma
                                                                                A(B)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i-a_i\right)\mid B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i,b_i\right)
ight\} אזי B\in\mathfrak{B} מידת לבג: תהא
                                                                                                                 . מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות מרחב ((0,1],\mathfrak{B}_{(0,1]},\lambda) :
                                                                                                                                        A: (A, \mathfrak{B}_A, \lambda) אזי A\subseteq \mathbb{R} מרחב אחיד על
\sigma(\mathcal{T})=igcap_{i\in I}\mathcal{F}_i אזי \mathcal{T} אזי אויי המכילות מעל \Omega המכילות מעל \Omega המכילות את \mathcal{T} אזיי \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega ותהיינה \mathcal{T} ותהיינה \mathcal{T} בל ה\sigma-אלגברה נוצרת:
                                                                                             \mathcal{T} אזי \sigma(\mathcal{T}) אזי אלגברה הלגברה הנוצרת: תהא \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega אזי איזי אלגברה הנוצרת
                                                               נסמן lpha+1 נסמן, אכל סודר לכל \mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\} נסמן לכל \mathcal{T}\subseteq 2^\Omega נסמן \Omega
באשר \sigma\left(\mathcal{T}
ight)=\mathcal{F}_{\omega_{1}} איי איז \mathcal{F}_{\lambda}=igcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha} נסמן \lambda נסמן \mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_{\alpha}\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}\cup\left\{igcap_{n=1}^{\infty}A_{n}\mid A_{n}\in\mathcal{F}_{\alpha}\right\}
                                                                                                                                              . הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה \omega_1
    . orall A \in \sigma \left( \mathcal{T} 
ight). \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A אזי orall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A טענה: תהא orall A \in \mathcal{T}. \omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A ויהיו \mathcal{T} \subseteq 2^\Omega ויהיו
                             A : \mathcal{A} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1} [B] \in \mathcal{F} עבורה X: \Omega \to \mathbb{R} אזי משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי והי (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות אזי
                                                                                                  A : \forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.arphi^{-1}\left[B
ight] \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} המקיימת arphi: \mathbb{R} 	o \mathbb{R} בונקציה מדידה בורל:
                             \mathbb{P}_X\left(B
ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B
ight]
ight) כך \mathfrak{P}_X:\mathfrak{B}_\mathbb{R}	o\mathbb{R} מרחב הסתברות ויהי X:\Omega	o\mathbb{R} מ"מ נגדיר מ"מ נגדיר מ"מ מרחב
                                                         . מרחב הסתברות (\mathbb{R},\mathfrak{B}_\mathbb{R},\mathbb{P}_X) מייה מ"מ אזי X:\Omega 	o \mathbb{R} ויהי מחבר הסתברות (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות יהי
                                                                                                                                           טענה: תהא A,B\subseteq\mathbb{R} ותהיינה f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} אזי
                                                                                                                                                   f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \bullet
                                                                                                                                                   f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] \bullet
                                                                                                                                                                         f^{-1}[A^{\mathcal{C}}] = f^{-1}[A]^{\mathcal{C}} \bullet
                                       \mathbb{R} טענה: יהי \{E\subseteq\mathbb{R}\mid X^{-1}\left[E
ight]\in\mathcal{F}\} אזי X:\Omega	o\mathbb{R} אזי מרחב מדיד ותהא מעל מענה: יהי
                                   (\forall t \in \mathbb{R}.X^{-1} \, [(-\infty,t)] \in \mathcal{F}) \Longleftrightarrowמשפט: יהי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות ותהא X:\Omega \to \mathbb{R} אזי ותהא
        \sigma(X)=\sigma\left(\left\{X^{-1}\left[B
ight]\mid B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}
ight\}
ight) אזי \left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}
ight) אזי \sigma(X)=\sigma(X) מ"מ על מרחב הסתברות \sigma(X)=\sigma(X)
                                                                                                                           (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) טענה: יהיו X,Y מ"מ על מרחב הסתברות מ"מ אזי
                                                                                                                                                                         יהי cX אזי c\in\mathbb{R} מ"מ. ullet
                                                                                                                                                                                           .מ"מ X+Y
                                                                                                                                                                                                .מ"מ XY
                                                                                                                                        מ"מ. f\circ X אזי (\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu) מ"מ. \bullet
                                                                                                           . פתוחה f^{-1}\left[\mathcal{U}
ight] פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R} פתוחה f\in C\left(\mathbb{R}
ight) פתוחה \mathcal{U}
```

 $F_X(t)=\mathbb{P}\left(X\leq t
ight)$ המקיימת המטברת (פה"מ): יהיX מ"מ על מרחב הסתברות ($\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}$) אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ המקיימת מטברת (פה"מ): יהי

למה: תהא $\mathcal{F}\subseteq 2^\Omega$ סגורה להפרשים וסגורה לחיתוכים סופיים עבורה $\Omega\in\mathcal{F}_0$ ותהא חבוצה עבורה להפרשים וסגורה לגבולות

. supp $(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid \forall \varepsilon>0.\mathbb{P}\,(t-\varepsilon< X< t+\varepsilon)>0\}$ תומך של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי מ"מ אזי supp $(X)=\{t\in\mathbb{R}\mid \forall \varepsilon>0.\mathbb{P}\,(t-\varepsilon< X< t+\varepsilon)>0\}$ טענה: יהי X מ"מ אזי ואי הקבוצה הסגורה המינימלית ב־ \mathbb{R} עבורה supp (X)

 \mathbb{R} טענה: σ ־אלגברה בורלית הינה σ ־אלגברה מעל

 $(\mathbb{R},\mathfrak{B}_{\mathbb{R}},\mu)$ מסקנה: תהא $f\in C\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי איי $f\in C\left(\mathbb{R}
ight)$

 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות

 $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ עבורם

 $(\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y) \Longleftrightarrow (F_X = F_Y)$ מיימ אזי X,Y טענה: יהיו

 $\mathbb{P}\left(X=t
ight)>0$ אטום של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $t\in\mathbb{R}$ המקיים $A_X=\{t\in\mathbb{R}\mid X$ אטום של $t\}$ אטום יהי X מ"מ אזי אוי קבוצת האטומים: יהי t

 $\lim_{t \to \infty} F_X\left(t\right) = 1$ • $\lim_{t \to -\infty} F_X\left(t\right) = 0$ • מונוטונית עולה. F_X •

 $\lim_{t\to a^+} F_X(t) = F_X(a) \bullet$

 $\sigma\left(\mathcal{F}_{0}
ight)\subset\mathcal{F}$ אזי אינסופיים עבורה $\mathcal{F}_{0}\subset\mathcal{F}$

 $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{F}$ אוי הפתוחות אזי המכילה את את המכילה מעל המכילה אזי σ

A איזי $\{E\cap A\mid E\in\mathcal{F}\}$ איזי חינה מעל Ω ותהא הינה σ ־אלגברה מעל σ הינה σ -אלגברה מעל

```
|A_X| \leq leph_0 טענה: יהיX מ"מ אזי
```

 $\mathbb{.P}\left(X\in A_X
ight)=1$ משתנה מקרי מקרי משתנה מקרי משתנה מקרי משתנה מקרי

 $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x
ight)\mathrm{d}x=1$ וכן $f\geq0$ וכן המקיימת למקוטעין רציפה למקוטעין הציפות: $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$

משתנה מקרי רציף: משתנה מקרי A < b עבורו קיימת פונקציית צפיפות עבורה לכל a < b מתקיים משתנה מקרי משתנה מקרי A

 $.\mathbb{P}\left(a < X < b\right) = \int_{a}^{b} f\left(x\right) dx$

X סימון: יהי א מ"מ רציף אזי f_X פונקציית הצפיפות של

.($\mathbb{P}\left(X\in A_X\right)=0$) \Longleftrightarrow טענה: יהי X מ"מ אזי (X רציף)

 $0 < \mathbb{P}\left(X \in A_X\right) < 1$ זה ובמקרה או רציף, ובמקרה הוא בדיד או משתנה מקרה לא כל

טענה: יהי X מ"מ רציף אזי

- $\mathbb{P}\left(X=t
 ight)=0$ יהי $t\in\mathbb{R}$ יהי
 - $.F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) \, \mathrm{d}x \bullet$

 $.F_{X}^{\prime}\left(a
ight)=f_{X}\left(a
ight)$ אזי $f_{X}\in C\left(a
ight)$ עבורה $a\in\mathbb{R}$ עבורה מ"מ רציף ותהא מ"מ רציף ותהא

 $.F_{X}\left(x_{n}
ight)=p$ המקיים $x_{n}\in\mathbb{R}$ אזי $p\in(0,1)$ וויהי ויהי אשר $F_{X}=1$ עולה ממש עד אשר עד אשר $F_{X}=1$

 $x_p = \sup \{t \mid F_X(t) \leq p\}$ אזי $p \in (0,1)$ עולה ויהי עבורו F_X מ"מ עבורו הי"מ מ"מ אזי יהי

טענה: תהא $\lim_{x \to \infty} F\left(x
ight) = 1$ מונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $\lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 1$ וכן $\lim_{x \to -\infty} F\left(x
ight) = 1$ איז קיים מ"מ X על $F_X = F$ עבורו $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות

אזי $\lim_{x \to \infty} F\left(x\right) = 1$ וכן $\lim_{x \to -\infty} F\left(x\right) = 0$ אזי אונוטונית עולה רציפה מימין עבורה $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

 $X^{\star}(s) = \sup\{t \mid F(t) \le s\}$

טענה: תהא $\lim_{x o\infty}F\left(x
ight)=1$ וכן $\lim_{x o-\infty}F\left(x
ight)=0$ מיימ על הציפה מימין עבורה $F:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ וכן $F:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ $.((0,1),\mathfrak{B}_{(0,1)},\lambda)$

 $.F_{X^\star}=F$ אזי $\lim_{x o\infty}F\left(x
ight)=1$ וכן $\lim_{x o\infty}F\left(x
ight)=0$ אזי $\lim_{x o\infty}F\left(x
ight)=0$ משפט: תהא אזי $p \in [0,1]$ אזי התפלגות ברנולי: יהי

- 1-p וסיכוי האנדיקטור המשתנה בניסוי בעל היכוי להצלחה אינדיקטור להצלחה אינדיקטור אינדיקטור להצלחה אינדיקטור להצלחה בניסוי אינדיקטור להצלחה אינדיקטור להצלחה בניסוי המשתנה המקרי:
 - $\mathbb{P}(X=0)=1-p$, $\mathbb{P}(X=1)=p$:פונקציית הסתברות
 - $X\sim \mathrm{Ber}\left(p
 ight)$ סימון:

אזי $n\in\mathbb{N}_+$ ויהי $p\in[0,1]$ אזי התפלגות בינומית: יהי

- . ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה שצלחו בביצוע n ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p לניסויי המשתנה המקרי: X
 - $\mathbb{P}\left(X=k
 ight)=inom{n}{k}p^k\left(1-p
 ight)^{n-k}$ אזי $k\in\{0,\ldots,n\}$ יהי
 - $X\sim \mathrm{Bin}\left(n,p
 ight)$ סימון: •

אזי $p \in [0,1]$ אזי אומטרית: יהי

- . מספר ניסויי ברנולי בלתי תלויים בסיכוי הצלחה p שנדרשו עד הצלחה הראשונה כולל. מספר מספרי: X
 - $\mathbb{P}\left(X=k
 ight)=\left(1-p
 ight)^{k-1}p$ אזי $k\in\mathbb{N}_{+}$ יהי הסתברות: פונקציית הסתברות:
 - $X \sim \text{Geo}(p)$:סימון

התפלגות פואסונית: יהי $\lambda>0$ אזי

- λ המשתנה המקרי: X מספר האירועים שקרו בפרק זמן נתון בעל קצב אירועים בפרק זמן זה \star
 - $\mathbb{P}\left(X=k
 ight)=e^{-\lambda}rac{\lambda^{k}}{k!}$ אזי $k\in\mathbb{N}$ יהי הסתברות: הסתברות:
 - $.X\sim\operatorname{Poi}\left(\lambda
 ight)$ סימון: •

 $\mathbb{P}\left(X_n=k
ight) \xrightarrow[n o \infty]{} \mathbb{P}\left(X=k
ight)$ אזי $k \in \mathbb{N}$ אזי ויהי $X \sim \mathrm{Poi}\left(\lambda
ight)$ מ"מ יהי $X_n \sim \mathrm{Bin}\left(n, rac{\lambda}{n}
ight)$ יהיי $\lambda > 0$ יהי יהי t אמ מספר האירועים בלתי תלויים שקרו עד אמן המ"מ המ"מ $t\in\mathbb{R}_+$ כך שלכל $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ כך שלכל מספר האירועים בלתי מספר האירועים בלתי מקריים האירועים בלתי תלויים המ"ז מו . אמן. זמן ליחידת אירועים אירועים א באשר $N_{t+s}-N_s\sim \mathrm{Poi}\left(\lambda t
ight)$ וכן וכן $N_0=0$

התפלגות אחידה: יהיו a < b אזי

- (a,b) בחירה של נקודה בקטע בחירה X בחירה המשתנה
 - $F_X\left(t
 ight)=egin{cases} 0&t\leq a\\ \frac{t-a}{b-a}&t\in(a,b)&:$ פונקציית התפלגות מצטברת: $t\geq b\\ 0& ext{else} \end{cases}$. $f_X\left(t
 ight)=egin{cases} \frac{t}{b-a}&t\in(a,b)\\ 0& ext{else} \end{cases}$

```
X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) עבורו \lambda > 0 איי קיים \forall a,b > 0. \mathbb{P}(X>a+b \mid X>a) = \mathbb{P}(X>b) עבורו \lambda > 0 עבורו
                                                            .
Exp (\lambda) אמן זמן ליחידת מופעים עם קצב א תהליך פואסון עם הבינמופעי של הדינמופעי של הליך פואסון עם א
                                        f_{arphi\circ X}(t)=rac{f_X\left(arphi^{-1}(t)
ight)}{arphi'\left(arphi^{-1}(t)
ight)} יאנה: יהי X מ"מ רציף ותהא arphi: arph
                                                                                                                 X^{-} = \min\{X,0\} , X^{+} = \max\{X,0\} מ"מ אזי X^{-} = \min\{X,0\}
                                                                                                                        \mathbb{E}\left[X
ight] = \sum_{c \in A_X} c \cdot \mathbb{P}\left(X = c
ight) תוחלת: יהי X מ"מ בדיד אזי
                                                                                                                                     \mathbb{E}\left[X
ight]=\mathbb{E}\left[X^{+}
ight]+\mathbb{E}\left[X^{-}
ight]טענה: יהי X מ"מ בדיד אזי
                                                                                                                                   משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ בדיד X עבורו \mathbb{E}\left[X
ight] סופי.
                                          A : \mathbb{R} אזי משתנה מקרי סימטרי: יהי a \in \mathbb{R} אזי מ"מ X עבורו משתנה מקרי יהי a \in \mathbb{R} אזי מי"מ משתנה מקרי סימטרי: יהי
                                                                                \mathbb{E}\left[X
ight]=a אזי חביב אינטגרבילי סימטרי מ"מ בדיד מ"מ מ"מ a\in\mathbb{R} ויהי a\in\mathbb{R}
                                \mathbb{E}\left[aX+b
ight]=a\mathbb{E}\left[X
ight]+b אינטגרבילי איז מ"מ בדיד אינטגרבילי a,b\in\mathbb{R} ויהי ויהי a,b\in\mathbb{R}
                                                                                                            X \leq X אם איז אולט על אולט אזי משתנה מקרי שולט: יהיו X,Y יהיו
                                                                                                  \mathbb{E}\left[X
ight] \geq \mathbb{E}\left[Y
ight] אזי בדידים אזי איי יהיו אוי איי איי טענה מונוטוניות התוחלת: יהיו
                                                                                                                                                                                                                    תוחלת: יהי X מ"מ אזי
                                                                                                              \mathbb{E}[X^+] = \sup \{ \mathbb{E}[Y] \mid (0 < Y < X^+) \land (Y^+) \} \bullet
                                                                                                    \mathbb{E}[X^-] = -\sup\{\mathbb{E}[Y] \mid (0 \le Y \le -X^-) \land (מ"מ בדיד Y)\}
                                                                                                                                                                                         \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^+] + \mathbb{E}[X^-] \bullet
                                                                                                                                                משתנה מקרי אינטגרבילי: מ"מ X עבורו \mathbb{E}\left[X
ight] סופי.
                                             \mathbb{E}\left[aX+b
ight]=a\mathbb{E}\left[X
ight]+b אינטגרבילי איז a,b\in\mathbb{R} ויהי יהיו מיים לינאריות התוחלת:
                                                                                                                    .
\mathbb{E}\left[X
ight] \geq \mathbb{E}\left[Y
ight] מ"מ אזי מונוטוניות התוחלת: יהיו יהיו א מX \geq Y
                                                       \mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{0}^{\infty}\left(1-F_{X}\left(t
ight)
ight)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\left(0-F_{X}\left(t
ight)
ight)\mathrm{d}tטענה נוסחת הזנב: יהי
                                                                                                                                         \mathbb{E}\left[X
ight] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X\left(t
ight) \mathrm{d}t מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי
                                                 F_Y \geq F_X משתנה מקרי שולט סטוכסטית: יהיו X,Y מ"מ אזי X שולט סטוכסטית על אם
                                                                                    X טענה: יהיו X,Y מ"מ עבורם \mathbb{P}\left(Y\leq X
ight)=1 אזי א מ"מ עבורם X,Y טענה: יהיו
```

טענה: יהיו X,Y מ"מ

 $\mathbb{E}\left[Y\right] \leq \mathbb{E}\left[X\right]$ אזי Y אטוכסטית שולט X • •

 $\mathbb{P}\left(X\geq b
ight)\leq rac{\mathbb{E}[X]}{b}$ אזי b>0 אזי מינטגרבילי מים מ"מ אינטגרבילי יהי יהי מרקוב: יהי

. $\mathbb{E}\left[\varphi\circ X
ight]=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(t
ight)f_{X}\left(t
ight)\mathrm{d}t$ אזי אזי עענה: יהי X מיענה: יהי מ"מ רציף ותהא ערביפה למקוטעין אזי

 $\mathbb{E}\left[arphi\circ X
ight]=\sum_{c\in A_X}arphi\left(c
ight)\cdot\mathbb{P}\left(X=c
ight)$ אינ מ"מ אינטגרבילי בדיד ותהא arphi מדידה בורל אי

. $\mathbb{E}\left[Y\right] \leq \mathbb{E}\left[X\right]$ אזי $\mathbb{P}\left(Y \leq X\right) = 1$ אם • . $\mathbb{E}\left[X + Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[Y\right]$ • חיבוריות:

 $\mathbb{E}\left[X
ight]=\int_{0}^{1}X^{\star}\left(t
ight)\mathrm{d}t$ אוי חסום מינה: יהי יהי מ"מ מינה

 $\mathbb{E}\left[X
ight]=\lim_{arepsilon o 0}\int_0^{1-arepsilon}X^\star\left(t
ight)\mathrm{d}t$ אזי חסום מלרע מ"מ מ"מ חסום מלעיל אזי $\mathbb{E}\left[X
ight]=\lim_{arepsilon o 0}\int_{0+arepsilon}^1X^\star\left(t
ight)\mathrm{d}t$ אזי מ"מ חסום מלעיל אזי מ"גה: יהי X מ"מ חסום מלעיל אזי

. $\operatorname{Var}(X)=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2
ight]$ אינטגרבילי איז מ"מ אינטגרבילי איז $\sigma(X)=\sqrt{\operatorname{Var}(X)}$ סטיית תקן: יהי X מ"מ אינטגרבילי איז מ"מ אינטגרבילי איז X מ"מ אינטגרבילי איז X מ"מ אינטגרבילי איז מ"מ אונטגרבילי אינטגרבילי איז מ"מ אינטגרבילי איז מ"מ"מ אינטגרב

 $X \sim \mathrm{Uni}\,(a,b)$ סימון: \bullet אזי $\lambda > 0$ אזי התפלגות מעריכית: יהי

. משך חיים ממן יחידות א משך חיים של מהליך הנמשך א יחידות משך משך המשתנה המקרי: X

 $\mathbb{.P}\left(X>a+b\mid X>a
ight)=\mathbb{P}\left(X>b
ight)$ אזי אי היי $X\sim \mathrm{Exp}\left(\lambda
ight)$ יהיי היי $\lambda>0$ יהי היי

 $.F_X\left(t
ight)=\left\{egin{array}{ll} 1-e^{-\lambda t} & t\geq 0 \ 0 & t<0 \end{array}
ight.$ פונקציית התפלגות מצטברת: $f_X\left(t
ight)=\left\{egin{array}{ll} \lambda e^{-\lambda t} & t\geq 0 \ 0 & t<0 \end{array}
ight.$ פונקציית צפיפות: $.f_X\left(t
ight)=\left\{egin{array}{ll} \lambda e^{-\lambda t} & t\geq 0 \ 0 & t<0 \end{array}
ight.$

```
.\operatorname{Var}\left(aX+b\right)=a^{2}\operatorname{Var}\left(X\right) אזי a,b\in\mathbb{R} ויהיו מ"מ אינטגרבילי ויהיו מ"מ אינטגרבילי ויהיו
                            \mathbb{P}\left(|X-\mathbb{E}\left[X
ight]|\geq a
ight)\leq rac{	ext{Var}(X)}{a^2} אזי a>0 אזי מ"מ אינטגרבילי ובעל שונות ויהי a>0
                                                         M_X\left(t
ight)=\mathbb{E}\left[e^{tX}
ight] המוגדרת M_X:\mathbb{R}	o\mathbb{R} מ"מ אזי מ"מ ממנטים: יהי יהי מומנטים: יהי
                                                      M_{_{\mathbf{X}}}^{(n)}\left(0
ight)=\mathbb{E}\left[X^{n}
ight] אזי M_{X}\in C^{n}\left(I
ight) וכן 0\in I וכן עבורו X מיענה: יהי X מ"מ ויהי X
                              n\in\mathbb{N} טענה: יהי X מ"מ ויהי I קטע עבורו 0\in I וכן 0\in I וכן 0\in I מתכנס לכל מ"מ ויהי X מ"מ ויהי
                                       M_X\left(t
ight)=\sum_{n=0}^{n}rac{t^n\mathbb{E}[X^n]}{n!} אזי \left(-arepsilon,arepsilon
ight) אזי קיים וסופי על M_X\left(t
ight) עבורו arepsilon>0 עבורו
X:\Omega	o\mathbb{R}^n משתנה מקרי n מימדי: יהי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות אזי X:\Omega	o\mathbb{R}^n משתנה מקרי
          X: \Omega 	o \mathbb{R}^n. מרחב הסתברות ותהא X: \Omega 	o \mathbb{R}^n אזי וויי מרחב (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) מרחב הסתברות ותהא X: \Omega 	o \mathbb{R}^n אזי ווייט
                 \mathbb{P}_X\left(B
ight)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left[B
ight]
ight) כך \mathbb{P}_X:\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}	o\mathbb{R}^n סימון: יהי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות ויהי X:\Omega	o\mathbb{R}^n מיינון מרחב
                                       . מרחב הסתברות (\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n},\mathbb{P}_X) מ"מ איז X:\Omega 	o \mathbb{R}^n מרחב הסתברות (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) מרחב הסתברות ייהי
                                              המקיימת F:\mathbb{R}^n 	o [0,1] אזי (\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) המקיימת התפלגות מצטברת משותפת: יהי
                                                                                                                        F_X(t) = \mathbb{P}\left(X_1 \le t_1, \dots, X_n \le t_n\right)
                                                                                                                                        טענה: יהי (X,Y) מ"מ אזי
                                                                                                          \lim_{k\to-\infty}F_{X,Y}\left(k,\ell
ight)=0 יהי \ell\in\mathbb{R} יהי
                                                                                                          \lim_{\ell\to-\infty}F_{X,Y}\left(k,\ell\right)=0 יהי k\in\mathbb{R} יהי
                                                                                                                    \lim_{\ell \to \infty} \lim_{k \to \infty} F_{X,Y}(k,\ell) = 1 \bullet
                                                        \lim_{k\to p^+}\lim_{\ell\to q^+}F_{X,Y}\left(k,\ell
ight)=F_{X,Y}\left(p,q
ight) אזי p,q\in\mathbb{R} רציפות מימין: יהיו
         F_{X,Y}\left(k_2,\ell_2
ight)+F_{X,Y}\left(k_1,\ell_1
ight)\geq F_{X,Y}\left(k_2,\ell_1
ight)+F_{X,Y}\left(k_1,\ell_2
ight) איז \ell_1<\ell_2 וכך \ell_1<\ell_2 וכך \ell_1<\ell_2 איז \ell_1<\ell_2 מ"מ ויהיי ואריע (\ell_1<\ell_2) מ"מ ויהיי
                                                                           \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y משתנים מקריים שווי התפלגות: X,Y מ"מ n מימדיים עבורם
                                                                               (\mathbb{P}_X=\mathbb{P}_Y)\Longleftrightarrow (F_X=F_Y) אזי איזי X,Y מימדיים n מימדיים מימדיים יהיו מימ
                                                                                                        . טענה: יהי X מ"מ n מימדי אזי X_i מ"מ חד־מימדי מימדי
                                                                                                           X_i משתנה מקרי שולי: יהי X מ"מ n מימדי אזי
                                                                                     פונקציית התפלגות מצטברת שולית: יהי מצטברת מצטברת אזי מיים דו־מימדי אזי
                                                                                                                        .F_X(t) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(t,y) \bullet
                                                                                                                        .F_Y(t) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,t) \bullet
                                                                                       \mathbb{P}\left(X=a
ight)>0 עבורו a\in\mathbb{R}^n אטום: יהי X מ"מ n מימדי אזי
                                                                                   A_X = \{t \in \mathbb{R} \mid X אטום של t מ"מ אזי מ"מ מים: יהי X יהי קבוצת האטומים:
                                                                                                                 |A_X| \leq \aleph_0 טענה: יהי X מ"מ n מימדי אזי
                                                                                         \mathbb{P}\left(X\in A_X
ight)=1 משתנה מקרי בדיד: X מימדי עבורו
                                                                             . orall a \in A_X. \mathbb{P}_X \, (a) = \mathbb{P} \, (X=a) טענה: יהי X מ"מ n מימדי בדיד אזי
                                                                  (i \in [n] טענה: יהי X מ"מ n מימדי אזי (X מ"מ בדיד) איי (X_i מ"מ בדיד לכל וi \in [n] טענה:
    \int_{-\infty}^\infty\ldots\int_{-\infty}^\infty f\left(x_1,\ldots,x_n
ight)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n=1 וכן וכן f\geq 0 וכע המקוטעין המקוטעין רציפה למקוטעין המקיימת f:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R}
\mathbb{P}(a_1 < X_1 < b_1, \dots, a_n < X_n < b_n) = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n
                                                                                   \mathbb{P}\left(X=a
ight)=0 אזי a\in\mathbb{R}^n מימדי ויהי n מ"מ X מ"ם: הי
                                                   .F_{X}\left(a
ight)=\int_{-\infty}^{a_{n}}\ldots\int_{-\infty}^{a_{1}}f_{X}\left(x_{1}\ldots x_{n}
ight)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n} איי מימדי רציף איז מימדי מימדי מימדי רציף איז
         F_X\left(a
ight)=\int_{-\infty}^{a_{p(n)}}\dots\int_{-\infty}^{a_{p(n)}}f_X\left(x_1\dots x_n
ight)\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n עבורה אזי p:[n]	o [n] אזי p:[n]	o [n] מיענה: יהי p:[n] מיענה: יהי p:[n] עבורה p:[n] עבורה p:[n] עבורה p:[n] אזי p:[n] אזי p:[n] מימדי רציף ותהא p:[n] עבורה p:[n] עבורה p:[n]
                                                                                       i \in [n] טענה: יהי X מ"מ מימדי רציף אזי מ"מ מימדי מימד מ"מ מ
                                                                                                   פונקציית צפיפות שולית: יהי (X,Y) מ"מ דו־מימדי אזי
                                                                                                                          .f_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,y) \, \mathrm{d}y \bullet
.f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,t) \, \mathrm{d}x \bullet
```