פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_{+}(a)=f(a)$ וכן $F'_{-}(b)=f(b)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^{I}\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\iff(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int(f+g)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int(\alpha f)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int((f\circ g)\cdot g')$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^{n}|\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\ldots t_n\}$ המקיימות $\forall i\in\{1\ldots n\}.t_i\in[x_{i-1},x_i]$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-L|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a,b])=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid \text{אינטגרבילית רימן } f\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot\mathrm{d}t=c(b-a)$.

טענה: $D(x)\notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f\in R([a,b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f \in R([a,b])$ חסומה אזי $\int_a^b f = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.

תנודה: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f,J) = \sup_{x,y\in J}(f(x)-f(y))$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0 \in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\iff(\lim_{\delta\to 0}\omega(f,[x_0-\delta,x_0+\delta])=0)$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\iff(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}(I).\omega(f,I)<\varepsilon)$.

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

למה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p_1\dots p_m\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+m\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-m\lambda(\Pi_1)\,\omega(f,[a,b])$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)\ge\overline{I}(f)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$ אזי $f\in R([a,b])$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

משפט: $C([a,b])\subseteq R([a,b])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f\in R([a,b])$.

סימון: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $f_{\upharpoonright_{[a,b]}}\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $(f\in R([a,b]))\wedge(f\in R([b,c]))$ אזי $f\in R([a,c])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in[a,d]$ עבורה $f\in R([a,d])$ אזי $f\in R([b,c])$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,c])$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([b,c])$ אזי $f\in R([a,c])$.

טענה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases}y & x=b\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $g\in R([a,c])$.

מסקנה: נגדיר $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ אזי $f\in R([-1,1])$.

מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ תהא $H\in C(\mathbb{R})$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $(f+g),(cf)\in R([a,b])$.
- $(f\cdot g),(H\circ f),|f|\in R([a,b])$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\{(a_i,b_i)\}_{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup(a_i,b_i)$ וכן $\sum(b_i-a_i)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $|A|\le\aleph_0$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.|b-a|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\upharpoonright_A}=g_{\upharpoonright_A}$ אזי $\int_a^b f=\int_a^b g$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,c])$ נגדיר $g(x)=\begin{cases}y_i & x\in\{b_1\dots b_m\}\\ f(x) & \text{else}\end{cases}$ אזי $\int_a^c f=\int_a^c g$.

משפט ליניאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^b \alpha f+\beta g=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,c])$ ויהי $b\in(a,c)$ אזי $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$.

הגדרה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f=-\int_b^a f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $f\ge 0$ אזי $\int_a^b f\ge 0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^b f\ge\int_a^b g$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ רציפה המקיימת $f\ge 0$ וכן $\int_a^b f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\le\sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R([a,b])$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F\in C([a,b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b(f\cdot g)=f(x_0)\int_a^b g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ יהיו $x_1\ldots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]|_a^b=f(b)-f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\varphi\in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ המקיימת $(\varphi(\alpha)=a)\wedge(\varphi(\beta)=b)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty).f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b].f\in R([a,b])$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.(a<b)\Longrightarrow(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R([a,c])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\mid\int_I f\ \text{קיים וסופי}\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ויהי $c\in(a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^\omega f\ge\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'(x)=f(x)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F(b)-F(a)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,\omega))$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}[f\cdot g]|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $\varphi\in C^1([c,\eta),[a,\omega))$ המקיימת $\varphi(c)=a$ וכן $\lim_{b\to\eta}\varphi(b)=\omega$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in(a,\omega).\forall b_1,b_2\in[B,\omega).\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow(f\in R([a,\omega)))$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\le\int_a^\omega|f|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftrightarrow$($F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega).f,g\in R([a,b])$ אזי

- $\left(\int_a^\omega g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega f<\infty\right)$.
- $\left(\int_a^\omega f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\int_1^\infty f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

משפט אבל: תהא $g\in C([a,\omega))\cap R([a,\omega))$ ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C([a,\omega))$ עבורה $G(x)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$ אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

למה של בונה: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ באשר $g\ge 0$ וכן g יורדת אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

למה של אבל: תהא $a_n\ge 0$ סדרה יורדת ותהא b_n סדרה עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.m<\sum_{k=1}^n b_k<M$ אזי $a_1 m<\sum_{k=1}^n a_k b_k<a_1 M$.

משפט ערך ביניים שני: תהיינה $f,g\in R([a,b])$ באשר g מונוטונית אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $\varphi\in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ עולה ממש המקיימת $(\varphi(\alpha)=a)\wedge(\varphi(\beta)=b)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ אזי $R_n(f,a)(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1}(k-2n)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^m\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^m\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}=\prod_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

משפט אבל: תהא $g\in R([a,\omega))$ ותהא $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ מונוטונית וחסומה אזי $fg\in R([a,\omega))$.

משפט דיריכלה: תהא $\forall b\in[a,\omega).g\in R([a,b])$ עבורה $G(x)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$ אזי $fg\in R([a,\omega))$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta(s)(s-1)=1$.

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\iff\left(\forall x\in I.\lim_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{p.w.}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C(I))\not\Longrightarrow(f\in C(I))$.
- אינטגרביליות רימן: $(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I))\not\Longrightarrow(f\in R(I))$.
- גבול האינטגרל: נניח $f\in R(I)$ וכן $\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I)$ אזי $\left(\int_I f=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $(f'(x)=L)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\iff(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.|f_n(x)|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\wedge\left(g_n\xrightarrow{u}g\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{u}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon)\iff\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{u}f\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C(I)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in C(I)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהי $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ ותהא $f\in C([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ וכן $\forall n<m.f_m<f_n$ אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ באשר $f\in C([a,b])$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f_n\in R([a,b])$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a\in(0,1)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cos(b^k\pi x)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0(4^k x)}{4^k}\right)\wedge(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0(x+1)=\triangle_0(x))\wedge\left(\triangle_0(x)=\left\{\begin{smallmatrix}x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1-x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{smallmatrix}\right.\right)$.

טענה: $\triangle_n\xrightarrow{u}\triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט: תהיינה $f_n\in C^1([a,b])$ עבורה $f_n'\xrightarrow{u}g$ ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n\xrightarrow{u}f$ וכן $f'=g$.

סימון: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n}f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty}f_n=f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b\sum_{i=0}^{\infty}u_n=\sum_{i=0}^{\infty}\int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}u_i$.

משפט בוחן M של ויירשטראס: תהיינה $u_n\in\mathbb{R}^I$ ותהא $M\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}M_n<\infty$ וכן $\forall x\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.|u_n(x)|\le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m(b_k-b_{k+1})$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n}f_ig_i$ מתכנס במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n\xrightarrow{u}0$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n}f_ig_i$ מתכנס במ"ש.

למה: תהא $f\in C([0,1])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין עבורה $\max|f-\varphi|<\varepsilon$.

למה: תהא $f\in C([0,1])$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ נגדיר $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין כך $\varphi(x)=f(0)+N\sum_{k=0}^{N-1}(f(a_{k+1})-2f(a_k)+f(a_{k-1}))\max\{x-a_k,0\}$ אזי $\forall m\in\{0\ldots N\}.\varphi(a_m)=f(a_m)$.

למה: קיימות $p_n\in\mathbb{R}[x]$ עבורן $\lim_{n\to\infty}\max_{[-1,1]}|p_n(x)-|x||=0$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי $\exists p\in\mathbb{R}[x].\max_{[a,b]}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ אזי קיימות $p_n\in\mathbb{R}[x]$ עבורן $p_n\xrightarrow{u}f$.

הגדרה: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n\xrightarrow{u}f$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R([a,\omega))$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi\in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.|f_n|\le\Psi$ אזי $(\forall b\in[a,\omega).f\in R([a,b]))\wedge\left(\int_a^{\omega}f\text{ מתכנסת בהחלט}\right)\wedge\left(\int_a^{\omega}f=\lim_{n\to\infty}\int_a^{\omega}f_n\right)$.

טענה: $\int_0^{\infty}e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q\in\mathbb{R}$ ויהי $r<|q|$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|,|r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי קיים $R\in[0,\infty]$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases}\text{מתכנס} & x\in(-R,R)\\ \text{מתבדר} & x\notin[-R,R]\end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי $R\in[0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמר: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right)\Longrightarrow(R=0)\right)\wedge\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right)\Longrightarrow(R=\infty)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}a_{k+m}x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty}a_k<0$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־$-R$).

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ מתכנס בהחלט ותהא $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח״ע ועל אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_i=\sum_{i=0}^{\infty}a_{p(i)}$.

טענה מכפלות קושי: יהיו $p,q\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_nx^n,\sum b_nx^n$ טורי חזקות מתכנסים בהחלט על I אזי $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)$.

סכים לפי אבל: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim\limits_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$.

התכנסות צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$.

סכים לפי צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

סימון: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $(C)\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(C)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$.

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(A)\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$ וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.

משפט: יהי $\sum a_kz^k$ טור טור חזקות מרוכב המתכנס עבור $w\in\mathbb{C}$ ויהי $r<|w|$ אזי $\sum a_kz^k$ מתכנס בהחלט ובמ״ש על $\overline{B}_r(0)$.

משפט אוילר: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.
- $\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R([a,b])$ אזי $u+iv\in R([a,b])$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\int_a^b(u+iv)=\int_a^bu+i\int_a^bv$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי

- $\int_a^b(f+g)=\int_a^bf+\int_a^bg$.
- $\int_a^bf=\int_a^cf+\int_c^bf$.
- $\int_a^bcf=c\int_a^bf$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^bf}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\frac{d}{dx}(u+iv)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $|f|\in R([a,b])$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^xf(t)\,\mathrm{d}t\right)'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^bf(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\int_a^bf'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^bfg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\left|\int_a^bf\right|\le\int_a^b|f|$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f(x+T)=f(x)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R(\mathbb{T})=\{f\in R([0,2\pi])\mid\forall x\in\mathbb{R}.f(x+2\pi)=f(x)\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n(t)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n(t)\in R(\mathbb{T})$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\{c_n\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $(c_m\neq0)\vee(c_{-m}\neq0)$ אזי m.

טענה: $R(\mathbb{T})$ מ״ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R(\mathbb{T})$ אזי $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

טענה: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על $C(\mathbb{T})$.

טענה: $\langle e_n,e_m\rangle=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}(m)=\langle f,e_m\rangle$.

טענה: יהי $f(t)=\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}(k)=c_k$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f(t)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)e_n(t)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\langle f,g\rangle=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\|f\|^2=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}(n)\right|^2$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $\hat{f}(m)=\langle f,e_m\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $(S_mf)(t)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)e_n(t)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ אזי $\hat{f}(-n)=\overline{\hat{f}(n)}$.

מסקנה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$(S_mf ממשית).

טענה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ ויהי $|k|\leq m$ אזי $(f-S_mf)\perp e_k$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $(f-S_mf)\perp S_mf$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $\|f\|^2=\|S_mf\|^2+\|f-S_mf\|^2$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2\leq\|f\|^2$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}(n)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_2: תהיינה $f_n,g\in R([0,2\pi])$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{L_2}g\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\|f_n-g\|=0\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_2 איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R(\mathbb{T})$ אזי $\|g\|\leq\sup|g|$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in R([0,2\pi])$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\implies\left(f_n\xrightarrow{L_2}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי קיימת $p_n\in\mathbb{C}[x]$ עבורה $p_n\xrightarrow{L_2}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t\in[0,2\pi]}|p(t)-f(t)|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R([0,2\pi])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\|p-f\|<\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי קיימים פולינומים טריגונומטריים p_n עבורם $p_n\xrightarrow{L_2}f$.

משפט: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $\lim_{m\to\infty}\|S_mf-f\|=0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R([0,2\pi])$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2=\|f\|^2$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

מסקנה: תהיינה $f,g\in R([0,2\pi])$ המקיימות $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}(n)=\hat{g}(n)$ אזי בכל נקודת רציפות של f,g מתקיים $f=g$.

טענה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\{c_n\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\|f-\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\right\|^2\geq\|f-S_mf\|^2$.

מסקנה: תהיינה $f_m,g\in R([0,2\pi])$ עבורן $\|f_m-g\|\xrightarrow[m\to\infty]{}0$ אזי $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}_m(n)\xrightarrow[m\to\infty]{}\hat{g}(n)$.

טור פורייה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ עבורה $S_Nf\xrightarrow{p.w.}g$ כאשר $g\in R(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int}$.

מסקנה: תהא $f\in C(\mathbb{T})$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|<\infty$ אזי $S_Nf\xrightarrow{u}f$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[-\pi,\pi)}$ המוגדרת $f(t)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_+.\hat{f}(n)=\frac{(-1)^n i}{n}\right)\wedge\left(\hat{f}(0)=0\right)$.
- $S_mf(t)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}\sin(nt)}{n}$.
- יהי $r\in[0,\pi)$ אזי $S_mf\xrightarrow{u}f$ על $[-r,r]$.
- $S_mf\xrightarrow{p.w.}f$ על $(-\pi,\pi)$.

מסקנה: $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ המוגדרת $f(t)=\frac{(\pi-t)^2}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_+.\hat{f}(n)=\frac{1}{2n^2}\right)\wedge\left(\hat{f}(0)=\frac{\pi^2}{12}\right)$.
- $S_mf(t)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos(nt)}{n^2}$.

- $S_m f \xrightarrow{u} f$ על $[0,2\pi]$.

מסקנה: $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

מסקנה: $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

טענה: יהי $\alpha \notin \mathbb{Z}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$.

למה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$.

מסקנה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $S_m(f') = (S_m f)'$.

למה: תהא $f \in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f^{(k)}}(n) = i^k n^k \hat{f}(n)$.

מסקנה: תהא $f \in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \hat{f}(n) = 0$.

משפט: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \hat{f}(n) = 0$ אזי $f \in C^{k-2}(\mathbb{T})$.

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| < \infty$.

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $S_m f \xrightarrow{u} f$.

תנאי ליפשיץ מקומי: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי $a \in \mathbb{R}$ עבורה $\exists\delta > 0.\exists M > 0.\forall x \in (a-\delta, a+\delta) . |f(x) - f(a)| < M|x-a|$.

הערה: יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהא $f \in C^1((a-\delta, a+\delta))$ אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a.

משפט: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in \mathbb{T}$ עבורן f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a אזי $S_N f(a) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(a)$.

קונבולוציה: תהיינה $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי $(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי

- $f * g = g * f$.
- $f * (g+h) = f * g + f * h$.
- $(cf) * g = c(f * g)$.
- $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- $f * g \in C(\mathbb{T})$.
- $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$.

גרעין דיריכלה: נגדיר $D_N \in R(\mathbb{T})$ כך $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$.

למה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $D_N * f = S_N f$.

למה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $\widehat{D_N}(n) = \begin{cases} 1 & |n| \le N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $|D_N(y)| \le 2N+1$.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $D_N(y) = \begin{cases} 2N+1 & y = 0 \\ \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & y \ne 0 \end{cases}$.

מסקנה: D_N זוגית ממשית וכן מתקיים $\left(y \in \left\{\frac{2\pi k}{2N+1} \mid k \in \{-N, \ldots, N\}\right\}\right) \iff (D_N(y) = 0)$.

למה: D_N בעלת N מינימום מקומיים וכן $N+1$ מקסימום מקומיים.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $|D_N(y)| \le \left|\frac{1}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right|$.

מסקנה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $|D_N(y)| \le \frac{\pi}{|y|}$.

טענה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

טענה: $\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)|\,\mathrm{d}y \ggg 1$.

סכומי פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(x)$.

גרעין פייר: נגדיר $F_N \in R(\mathbb{T})$ כך $F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x)$.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $F_N(y) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right)^2$.

למה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

למה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f = f * F_N$.

למה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $\widehat{F_N}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N+1} & |n| \le N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$.

למה: יהי $\delta > 0$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $N \ge N_0$ מתקיים $\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\pi} F_N(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon$.

משפט פייר: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f \xrightarrow{u} f$.

משפט פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in [-\pi, \pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל אזי $\sigma_N f(a) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)}{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ותהא $a\in\left[-\pi,\pi\right]$ בה f רציפה מימין ומשמאל וכן ℓ אזי $S_{N}f\left(a\right)\to\ell$. $\ell=\frac{\lim_{x\to a^{+}}f(x)+\lim_{x\to a^{-}}f(x)}{2}$.

מסקנה: $\left\{ e_{n}\right\} _{n=-\infty}^{\infty}$ צפופים במ"ש ב־$C\left(\mathbb{T}\right)$.

טענה: $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

מטריקה/מרחק: תהא A קבוצה אזי $d:A^{2}\to\left[0,\infty\right)$ המקיימת

- חיוביות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)\ge0$.
- חיוביות ממש: $\forall x,y\in A.\left(d\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(x=y\right)$.
- סימטריות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$.
- אי־שיוויון המשולש: $\forall x,y,z\in A.d\left(x,y\right)\le d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right)$.

מרחב מטרי: תהא X קבוצה ותהא $d:X^{2}\to\left[0,\infty\right)$ מטריצה אזי $\left(X,d\right)$.

גבול: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in X$ עבורן $d\left(a_{n},L\right)\to0$ אזי $a_{n}\to L$.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ויהיו $L_{1},L_{2}\in X$ עבורם $\left(a_{n}\to L_{1}\right)\wedge\left(a_{n}\to L_{2}\right)$ אזי $L_{1}=L_{2}$.

מרחק מנהטן: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $d_{1}\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$.

סימון: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $d_{p}\left(x,y\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ אזי $\ell_{p}^{n}=\left(\mathbb{R}^{n},d_{p}\right)$.

טענה: ℓ_{p}^{n} מרחב מטרי.

מרחק יוניפורמי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $d_{\infty}\left(x,y\right)=\max_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$.

סימון: $\ell_{\infty}^{n}=\left(\mathbb{R}^{n},d_{\infty}\right)$.

טענה: ℓ_{∞}^{n} מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sup\left|f-g\right|$ אזי $C\left(\left[a,b\right]\right)=\left(C\left(\left[a,b\right]\right),d\right)$.

טענה: $C\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sqrt{\int_{a}^{b}\left|f-g\right|^{2}}$ ונגדיר יחס שקילות $\left(f\sim g\right)\iff\left(d\left(f,g\right)=0\right)$ אזי $L_{2}\left(\left[a,b\right]\right)=\left(\nicefrac{R\left(\left[a,b\right]\right)}{\sim},d\right)$.

טענה: $L_{2}\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.

טענה: יהי V מ"ו ותהא $\nu:V\to\left[0,\infty\right)$ נורמה על V נגדיר $d\left(x,y\right)=\nu\left(x-y\right)$ אזי $\left(V,d\right)$ מרחב מטרי.

נורמת ℓ_{p}^{n}: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert x\right\Vert _{p}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_{∞}^{n}: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert x\right\Vert _{\infty}=\max_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|$.

למה: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי

- $\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\le\left\Vert x\right\Vert _{2}\le\sqrt{n}\left\Vert x\right\Vert _{\infty}$.
- $\left\Vert x\right\Vert _{2}\le\left\Vert x\right\Vert _{1}\le\sqrt{n}\left\Vert x\right\Vert _{2}$.

מסקנה: תהא $\left\{ x^{(m)}\right\} \subseteq\mathbb{R}^{n}$ סדרה ותהא $y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(\lim_{m\to\infty}\left\Vert x^{(m)}-y\right\Vert _{2}=0\right)\iff\left(\forall i\in\left[n\right].\lim_{m\to\infty}x_{i}^{(m)}=y_{i}\right)$.

כדור פתוח: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)<r\right\}$.

כדור סגור: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)\le r\right\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)=r\right\}$.

נקודה פנימית: תהא $A\subseteq X$ אזי $x\in A$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\subseteq A$.

פנים של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\left\{ x\in A\mid A\text{ נקודה פנימית של }x\right\}$ $=\overset{\circ}{A}=\mathrm{int}\left(A\right)$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $A=\mathrm{int}\left(A\right)$.

למה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{int}\left(\mathrm{int}\left(A\right)\right)=\mathrm{int}\left(A\right)$.

משפט: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי

- יהיו $\left\{ A_{i}\right\}$ פתוחות אזי $\bigcup A_{i}$ פתוחה.
- יהיו $\left\{ A_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ פתוחות אזי $\bigcap A_{i}$ פתוחה.
- $X,\varnothing$ פתוחות.

סביבה: יהי $a\in X$ אזי $A\subseteq X$ פתוחה עבורה $a\in A$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{int}\left(A\right)=\bigcup\left\{ B\subseteq A\mid B\text{ פתוחה}\right\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $X\backslash A$ פתוחה.

נקודת סגור: תהא $A\subseteq X$ אזי $a\in X$ עבורה $\forall r>0.B_{r}\left(a\right)\cap A\neq\varnothing$.

סגור של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{cl}\left(A\right)=\overline{A}=\left\{ a\in X\mid a\text{ נקודת סגור של }A\right\}$.

משפט: תהא $X \subseteq A$ אזי (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($A=\overline{A}$).

למה: תהא $X \subseteq A$ אזי $\overline{A}=X\backslash\text{int}\left(X\backslash A\right)$ וכן $\text{int}\left(A\right)=X\backslash\overline{\left(X\backslash A\right)}$.

טענה: תהא $X \subseteq A$ אזי $\overline{A}=\bigcap\left\{ A\subseteq B\mid B\text{ סגורה}\right\}$.

משפט: תהא $X \subseteq A$ ותהא $a\in X$ אזי ($a\in\overline{A}$)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_{n}\in A$ עבורה $x_{n}\to a$).

נקודת הצטברות: תהא $X \subseteq A$ אזי $a\in X$ המקיימת $\forall r>0.\left(B_{r}\left(a\right)\backslash\left\{ a\right\} \right)\cap A\neq\varnothing$.

טענה: תהא $X \subseteq A$ ותהא $a\in X$ אזי (a הצטברות של A)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_{n}\in A\backslash\left\{ a\right\}$ עבורה $x_{n}\to a$).

שפה של קבוצה: תהא $X \subseteq A$ אזי $\partial A=\overline{A}\cap\overline{X\backslash A}=\overline{A}\backslash\text{int}\left(A\right)$.

קבוצה צפופה: קבוצה $Y\subseteq X$ עבורה $\overline{Y}=X$.

טענה: תהא $Y\subseteq X$ אזי (Y צפופה)$\Longleftrightarrow$(לכל $A\subseteq X$ פתוחה באשר $A\neq\varnothing$ מתקיים $Y\cap A\neq\varnothing$).

מרחב מטרי ספרבילי: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו קיימת $Y\subseteq X$ צפופה לכל היותר בת מנייה.

קבוצה חסומה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $\exists r>0.\exists a\in X.A\subseteq B_{r}\left(a\right)$.

קוטר של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ חסומה אזי $\text{diam}\left(A\right)=\sup\left\{ d\left(x,y\right)\mid x,y\in A\right\}$.

טענה: תהא $\left\{ x^{\left(m\right)}\right\} \subseteq\mathbb{R}^{n}$ סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה $x^{\left(m_{j}\right)}$ מתכנסת.

מסקנה: לכל קבוצה חסומה ואינסופית קיימת נקודת הצטברות.

סדרת קושי: סדרה $\left\{ x_{n}\right\} \subseteq X$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall k,m\geq N.d\left(x_{k},x_{m}\right)<\varepsilon$.

למה: סדרת קושי הינה חסומה.

טענה: סדרה מתכנסת הינה סדרת קושי.

מרחב מטרי שלם: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו כל סדרת קושי מתכנסת.

משפט: $\mathbb{R}^{n}$ סטנדרטי שלם, $C\left(\left[a,b\right]\right)$ שלם, ℓ_{2} שלם.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי שלם ותהא $Y\subseteq X$ אזי ($\left(Y,d\right)$ שלם)$\Longleftrightarrow$(Y סגורה).

מרחבים מטריים איזומטריים: מרחבים מטריים $\left(X,d\right),\left(Y,\rho\right)$ עבורם קיימת $f:X\to Y$ חח"ע ועל המקיימת $\forall x,y\in X.d\left(x,y\right)=d\left(\left(x\right),f\left(y\right)\right)$.

השלמה של מרחב מטרי: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי $\left(Y,\rho\right)$ מרחב מטרי שלם עבורו $X\subseteq Y$ צפופה וכן $\rho_{\restriction_{X^{2}}}=d$.

משפט: לכל מרחב מטרי קיימת השלמה.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי בעל השלמות $\left(Y,\rho\right),\left(Z,\zeta\right)$ אזי $\left(Y,\rho\right),\left(Z,\zeta\right)$ איזומטריים.

נקודת שבת: תהא $f:X\to X$ אזי $a\in X$ עבורה $f\left(x\right)=x$.

העתקה מכווצת: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי $A\in\text{Hom}\left(X\right)$ עבורה קיים $\lambda<1$ המקיים $\forall x,y\in X.d\left(Ax,y\right)\leq\lambda d\left(x,y\right)$.

משפט נקודת השבת של בנך: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A\in\text{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת אזי קיים ויחיד $x\in X$ עבורו $Ax=x$.

מסקנה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $A\in\text{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת ותהא $x\in X$ עבורה $Ax=x$ אזי לכל $y\in X$ מתקיים $x=\lim_{n\to\infty}A^{n}z$.

מסקנה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $A\in\text{Hom}\left(X\right)$ העתקה מכווצת ותהא $x\in X$ עבורה $Ax=x$ אזי לכל $y\in X$ מתקיים $d\left(A^{n}y,x\right)\leq\frac{\lambda^{n}}{1-\lambda}d\left(y,Ay\right)$.

כיסוי פתוח: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ אזי קבוצות $\left\{ A_{\alpha}\right\} _{\alpha\in I}$ עבורן $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}A_{\alpha}$.

מרחב קומפקטי: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו לכל $\left\{ A_{\alpha}\right\} _{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X קיימות $\left\{ \beta_{i}\right\} _{i=1}^{m}\in I$ עבורן $X=\bigcup_{i=1}^{m}A_{\beta_{i}}$.

קבוצה קומפקטית: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי $B\subseteq X$ עבורו $\left(B,d\right)$ מרחב קומפקטי.

טענה קבוצה פתוחה יחסית: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $Y\subseteq X$ אזי ($U\subseteq Y$ פתוחה ב־$\left(Y,d\right)$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $V\subseteq X$ פתוחה עבורה $U=V\cap Y$).

טענה קבוצה סגורה יחסית: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי ותהא $Y\subseteq X$ אזי ($U\subseteq Y$ סגורה ב־$\left(Y,d\right)$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $V\subseteq X$ סגורה עבורה $U=V\cap Y$).

טענה: תהא $K\subseteq X$ קומפקטית אזי K חסומה וכן K סגורה.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי ($\left(X,d\right)$ קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(לכל סדרה יורדת $\left\{ K_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq X$ סגורות לא ריקות אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}K_{i}\neq\varnothing$).

קומפקטיות סדרתית: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי ($\left(X,d\right)$ קומפקטי)$\Longleftrightarrow$($\left(X,d\right)$ קומפקטי סדרתית).

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(A סגורה וחסומה).

מרחב פרה־קומפקטי: מרחב מטרי $\left(X,d\right)$ עבורו לכל סדרה יש תת סדרה קושי.

אוסף פונקציות רציף במידה אחידה: סדרה $\{f_n\} \subseteq C([a,b])$ המקיימת $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall n \in \mathbb{N}. \forall s,t \in [a,b]. |s-t| < \delta \Longrightarrow |f_n(s) - f_n(t)| < t$.

משפט: תהא $\{f_n\} \subseteq C([a,b])$ סדרה אזי ($\{f_n\}$ פרה־קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($\{f_n\}$ חסומה במ"ש ורציפה במידה אחידה).

גבול: יהיו $(X,d), (Y,\rho)$ מרחבים מטריים תהא $f : X \to Y$ תהא $a \in X$ ותהא $L \in Y$ אזי
- קושי: $(\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in B(a,\delta). f(x) \in B(L,\varepsilon)) \Longleftrightarrow (\lim_{x\to a} f(x) = L)$.
- היינה: $\left(\forall x \in (X \backslash \{a\})^{\mathbb{N}}. (x_k \to a) \Longrightarrow (f(x_k) \to L)\right) \Longleftrightarrow (\lim_{x\to a} f(x) = L)$.

רציפות בנקודה: יהיו $(X,d), (Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f : X \to Y$ אזי $a \in X$ עבורה $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

משפט: יהיו $(X,d), (Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f : X \to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה).

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $f : X \to \mathbb{R}^m$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $i \in [m]$ מתקיים כי f_i רציפה).

רציפות במידה שווה: יהיו $(X,d), (Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $A \subseteq X$ אזי $f : A \to Y$ עבורה $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x,y \in A. (d(x,y) < \delta) \Longrightarrow (\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon)$.

משפט: תהיינה $f,g : X \to \mathbb{R}^n$ רציפות ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ אזי $\alpha f + \beta g$ רציפה וכן $\langle f,g \rangle$ רציפה.

משפט רציפות ההרכבה: יהיו $(X,d), (Y,\rho), (Z,\eta)$ מרחבים מטריים תהא $a \in X$ תהא $f : X \to Y$ רציפה על a ותהא $g : f(X) \to Z$ רציפה על $f(a)$ אזי $g \circ f$ רציפה על a.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קומפקטית.

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(לכל $f \in C(X,\mathbb{R})$ הינה חסומה).

משפט קנטור: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.

משפט ויירשטראס: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ותהא $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה אזי קיימים $a,b \in X$ עבורם $f(X) = [f(a), f(b)]$.

מסקנה: תהיו $\nu, \eta : X \to \mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $c, C \in \mathbb{R}$ עבורם $c\nu \le \eta \le C\nu$.

מסילה: פונקציה $\gamma \in C([a,b], X)$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma : [a,b] \to X$ עבורה $\gamma(a) = \gamma(b)$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma : [a,b] \to X$ עבורה $\gamma_{\restriction_{(a,b]}}, \gamma_{\restriction_{[a,b)}}$ חח"ע.

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma : [0,1] \to X$ מסילה אזי $-\gamma : [0,1] \to X$ המוגדרת $-\gamma(t) = \gamma(1-t)$.

מרחב מטרי קשיר מסילתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל $x,y \in X$ קיימת עקומה $\gamma : [0,1] \to X$ המקיימת $\gamma(0) = x$ וכן $\gamma(1) = y$.

משפט תכונת דרבו: יהי (X,d) מרחב מטרי קשיר מסילתית תהא $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה יהיו $x,y \in X$ ותהא $c \in \mathbb{R}$ עבורה $f(x) < c < f(y)$ אזי קיים $z \in X$ עבורו $f(z) = c$.

תחום: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה מסילתית.

מרחב מטרי קשיר: מרחב מטרי (X,d) עבורו הקבוצות היחידות שפתוחות וסגורות במקביל הן $X, \varnothing$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קשיר מסילתית)$\Longleftarrow$((X,d) קשיר).

טענה: תהא $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ אזי A רציפה.

טענה: תהיינה $A, B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

מסקנה: תהא $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $\left\|A^k\right\| \le \|A\|^k$.

משפט: תהא $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ ונגדיר $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ כך $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} x$ אזי f רציפה.

אקספוננט: תהא $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ נגדיר $e^A \in M_n(\mathbb{R})$ כך $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

מסקנה: תהא $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי e^A מתכנסת וכן $\left\|e^A\right\| \le e^{\|A\|}$.

הגדרה: תהא $\eta : [0,1] \to [0,1]^2$ מסילה אזי נגדיר מסילה $\Phi\eta : [0,1] \to [0,1]^2$ כך
$$\Phi\eta = \begin{cases} \frac{1}{2}(\eta_2(4t), \eta_1(4t)) & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-1), \eta_2(4t-1)) + \left(0, \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-2), \eta_2(4t-2)) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(-\eta_2(4t-3), -\eta_1(4t-3)) + \left(1, \frac{1}{2}\right) & \frac{3}{4} \le t \le 1 \end{cases}.$$

נורמה של עקומה: תהא $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ עקומה אזי $\|\gamma\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \|\gamma(t)\|$.

מרחק של עקומות: תהיינה $\gamma, \eta : [0,1] \to [0,1]^2$ עקומות אזי $d(\gamma,\eta) = \|\gamma - \eta\|_\infty$.

טענה: תהיינה $\gamma, \eta : [0,1] \to [0,1]^2$ עקומות אזי $d(\Phi\gamma, \Phi\eta) = \frac{1}{2} d(\gamma,\eta)$.

עקום פביאנו: תהא $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ עקומה אזי $\gamma_\infty = \lim_{n\to\infty} \Phi^n \gamma$.

טענה: תהא $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ עקומה אזי γ_∞ רציפה וכן $\gamma_\infty([0,1])$ קומפקטית.

משפט: תהא $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ עקומה אזי $\gamma_\infty([0,1])$ צפופה ב־$[0,1]^2$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל אזי (Y,ρ) קומפקטי וכן f^{-1} רציפה.

טענה: לא קיימת פונקציה רציפה חח"ע ועל ב־$[0,1]\to[0,1]^2$.

עקומה פוליגונלית: עקומה לינארית למקוטעין.

אורך עקומה פוליגונלית: תהא γ עקומה פוליגונלית בעלת חלקים לינאריים בקטעים $[\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)]$ אזי $L(\gamma)=\sum_{i=1}^{M}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$.

מסקנה: תהא γ עקומה פוליגונלית אזי $L(\gamma)=\int_0^1\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

עקומה בעלת אורך ביחס לחלוקה: תהא Π חלוקה של $[a,b]$ אזי עקומה γ עבורה קיים חסם עליון לאורך של עקומה פוליגונלית בין הנקודות $\{\gamma(t_i)\}$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^m)$ עקומה אזי $L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.