

C^m -יריעה k -מימדית: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in M$ קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה \mathcal{O} של x וכן קיימת $f \in C^m(G, \mathbb{R}^{n-k})$ עבורה $\Gamma_f = M \cap \mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

יריעה חלקה k -מימדית: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in M$ קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה \mathcal{O} של x וכן קיימת $f \in C^\infty(G, \mathbb{R}^{n-k})$ עבורה $\Gamma_f = M \cap \mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

סימון: תהייה A, B קבוצות אזי $f \in \text{אנליטית מקומית}$ $C^\omega(A, B) = \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ אנליטית מקומית}\}$.

יריעה אנליטית k -מימדית: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in M$ קיימת $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת סביבה \mathcal{O} של x וכן קיימת $f : G \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ אנליטית מקומית עבורה $\Gamma_f = M \cap \mathcal{O}$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

עקומה: יריעה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ שהינה חד-מימדית.

משטח: יריעה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ שהינה דו-מימדית.

היפר-משטח/על-משטח: יריעה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ שהינה $n-1$ מימדית.

טענה: $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ הינה היפר-משפט חלק.

הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ יריעה}) \iff \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ פתוחות עבורן $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ וכן $M \cap U_\alpha$ יריעה לכל $(\alpha \in \Lambda)$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ יריעה}) \iff (M \text{ יריעה}) \iff (M \text{ יריעה})$ (לכל $x \in M$ קיימת סביבה U עבורה $M \cap U$ יריעה).

הצגה פרמטרית/פרמטריזציה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ C^m -יריעה k -מימדית ותהא $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $r \in C^m(G, \mathbb{R}^n)$ עבורה $r(G) = M$.

פרמטריזציה רגולרית: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה $r \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ עבורה לכל $x \in G$ מתקיים $\text{rank}(\mathcal{D}_r(x)) = k$.

הומאומורפיזם: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $B \subseteq \mathbb{R}^m$ אזי $f \in C(A, B)$ הפיכה עבורה $f^{-1} \in C(B, A)$.

פרמטריזציה טובה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית $r : G \rightarrow A$ שהינה הומאומורפיזם.

משפט: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ יריעה}) \iff \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ פתוחות ביחס ל- M עבורן $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ וכן קיימות $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ פתוחות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות $r_\alpha \in C^m(G_\alpha, \mathbb{R}^n)$ עבורן $(r_\alpha(G_\alpha) = U_\alpha)$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ יריעה}) \iff (M \text{ יריעה}) \iff (M \text{ יריעה})$ (לכל $x \in M$ קיימת סביבה U עבורה $M \cap U$ בעלת פרמטריזציה טובה).

מערכת משוואות רגולרית: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\{f_i\}_{i=1}^{n-k} \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה לכל $x \in U$ המקיימת $(f_1 \dots f_{n-k})(x) = 0$ מתקיים כי $\{\nabla f_i(x)\}$ בת"ל.

טענה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f_1 \dots f_{n-k} \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $\{f_1 \dots f_{n-k}\}$ מערכת משוואות רגולרית $\iff (f_1 \dots f_{n-k})(x) = 0$ (לכל $x \in U$ עבורו $(f_1 \dots f_{n-k})(x) = 0$ מתקיים $\text{rank}(\mathcal{D}_{(f_1 \dots f_{n-k})}(x)) = n - k$).

הצגה סתומה רגולרית: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ C^m -יריעה k -מימדית ותהא $U \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי מערכת משוואות רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k} \subseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $\{(f_1 \dots f_{n-k}) = 0\} = M$.

משפט: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $(M \text{ יריעה}) \iff (M \text{ יריעה}) \iff (M \text{ יריעה})$ (לכל $x \in M$ קיימת סביבה U עבורה $M \cap U$ בעלת הצגה סתומה רגולרית).

אליפסואיד: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו-מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד חד-יריעתי: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

טענה: היפרבולואיד חד-יריעתי הינו יריעה דו-מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

היפרבולואיד דו-יריעתי: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\}$.

טענה: היפרבולואיד דו-יריעתי הינו יריעה דו-מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

קונוס: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}\}$.

טענה: קונוס הינו יריעה דו-מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה $(0, 0, 0)$.

גליל/צילינדר: יהיו $a, b, c \in \mathbb{R}$ אזי $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

טענה: גליל הינו יריעה דו-מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.

משטח סיבוב: תהא $\gamma : I \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$ עקומה אזי $f : I \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת $f(t, \rho) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \cos(\rho) \\ \gamma_1(t) \sin(\rho) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$.

טענה משטחי סיבוב: תהא $\gamma : I \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R}$ עקומה עבורה γ פרמטריזציה טובה של $\text{Im}(\gamma)$ אזי משפט הסיבוב של f של γ הינו פרמטריזציה טובה של $\text{Im}(f)$.

הטלה סטריאוגרפית: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ נגדיר $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ כך $f(x) = -\frac{2}{\|x\|^2+1} \left(x_1, \dots, x_n, \frac{\|x\|^2-1}{2}\right)$.

טורוס: משטח הסיבוב של \mathbb{S}^1 .

סימון: נסמן טורוס בעזרת \mathbb{T}^2 .

קו־אוריינטציה של יריעה: יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח אזי $N \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ המקיימת $N(x) \perp x$ ו- $|N(x)| = 1$ $\forall x \in M$.
למה: טבעת מוביוס אינו משטח קו־אוריינטבילי.

טענה: תהא M טבעת מוביוס אזי $M \setminus \partial M$ יריעה דו־מימדית.

טענה: תהא M טבעת מוביוס אזי $M \setminus \partial M$ אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.

טענה: תהא M טבעת מוביוס אזי $M \setminus \partial M$ אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.

מכפלה וקטורית: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^3$ אזי $a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

טענה: יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$ אזי $u \times v \perp v$ וכן $u \times v \perp u$

טענה: יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$ אזי $(u \times v = 0) \iff (u \in \text{span}(v))$

טענה: יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$ אזי $\det(u, v, u \times v) = \|u \times v\|^2 \geq 0$

טענה: יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$ אזי $|v \times u| = \|v\| \|u\| \sin(\angle(v, u))$

קבוצה ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם מממד k : קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה קיימת $U \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה המקיימת $A \subseteq U$ וכן קיים $f: U \rightarrow V$ דיפאומורפיזם עבורו $f(A) = f(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\})$.

תכונה מתקיימת מקומית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה אזי פרידיקט P עבורו לכל $a \in A$ קיימת סביבה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה P מתקיימת על $A \cap U$.

משפט: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ התב"ש

• M יריעה k -מימדית.

• M מקומית גרף של פונקציה $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף.

• M מקומית בעלת פרמטריזציה טובה $r: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.

• M מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית $\{f_i\}_{i=1}^{n-k} \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$.

• M מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל- \mathbb{R}^k .

מסקנה: תהא $r: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ פרמטריזציה טובה אזי לכל $a \in G$ קיימת סביבה $W \subseteq \mathbb{R}^n$ של $(a, 0_{n-k})$ וקיים דיפאומורפיזם $s: W \rightarrow s(W)$ עבורו $s|_{W \cap (G \times \{0_{n-k}\})} = r$.

הערה: יריעה 0-מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.

קבוצה פתוחה יחסית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $U \subseteq A$ עבורה קיימת $W \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה עבורה $U = W \cap A$.

קבוצה סגורה יחסית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $U \subseteq A$ עבורה קיימת $W \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה עבורה $U = W \cap A$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהא $U \subseteq A$ אזי $(U \text{ פתוחה ביחס ל-} A) \iff (\forall x \in U, \exists r > 0, B_r(x) \cap A \subseteq U)$.

קבוצה קשירה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^d$ עבורה לכל $U \subseteq A$ פתוחה וסגורה יחסית ל- A מתקיים $U \in \{A, \emptyset\}$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $(A \text{ קשירה}) \iff (A \text{ לא קיימות } U, V \subsetneq A \text{ פתוחות יחסית ל-} A \text{ עבורן } A = U \cup V)$.

טענה: תהינה $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ ותהא $f: A \rightarrow B$ אזי $(f \text{ רציפה}) \iff (U \subseteq B \text{ פתוחה יחסית ל-} B \text{ מתקיים כי } f^{-1}(U) \text{ פתוחה יחסית ל-} A)$.

מפה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית תהא $U \subseteq M$ פתוחה יחסית ותהא $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ הפיכה עבורה $\varphi(U)$ פתוחה וכן φ^{-1} פרמטריזציה טובה אזי (U, φ) .

אטלס: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית אזי קבוצה של מפות A עבורה $\bigcup \{C_1 \mid C \in A\} = M$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית ותהא $r: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ חח"ע פרמטריזציה רגולרית של $r(U)$ אזי $(r(U), r^{-1})$ מפה.

המרחב הפרוייקטיבי: יהי $n \geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^n = \{vv^T \mid v \in \mathbb{S}^n\}$.

טענה: יהי $n \geq 2$ אזי $\mathbb{RP}^n \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)^2}$ יריעה n מימדית.

העתקת מעבר: תהינה $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_{1,2}: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ המוגדרת $\varphi_{1,2} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$.

טענה: תהינה $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ מפות ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $\varphi_i(U_1 \cap U_2)$ פתוחה עבור $i \in \{1, 2\}$.

טענה: תהינה $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ מפות ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה אזי $\varphi_{1,2}$ דיפאומורפיזם.

פונקציה C^α מיריעה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית אזי $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ עבורה לכל מפה (U, φ) מתקיים כי $f \circ \varphi^{-1}$ הינה C^α .

הערה: נניח כי M יריעה C^α אזי $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ הינה לכל היותר מדרגת חלקות C^α .

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית ותהא $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי $(f \text{ הינה } C^\alpha) \iff \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ של M עבורו $f \circ \varphi^{-1}$ הינה C^α לכל $\alpha \in \Lambda$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית אזי קיים ל- M אטלס.

סימון: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית אזי $\dim(M) = k$.

פונקציה C^α בין יריעות: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית ותהא $M' \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה ℓ -מימדית אזי $f : M \rightarrow M'$ עברה $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ הינה C^α .

טענה: תהיינה M, M', M'' יריעות תהא $f \in C^\alpha(M, M')$ ותהא $g \in C^\alpha(M', M'')$ אזי $g \circ f \in C^\alpha(M, M'')$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי $(f \text{ הינה } C^\alpha) \iff$ לכל $p \in M$ קיימת סביבה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ של p עברה קיימת $g \in C^\alpha(U, \mathbb{R}^m)$ $(g|_{U \cap M} = f)$.

טענה: תהיינה M, M' יריעות ותהא $f : M \rightarrow M'$ אזי $(f \text{ הינה } C^\alpha) \iff$ לכל מפה (U, φ) של M ולכל מפה (V, ψ) של M' מתקיים כי $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^\alpha$.

דיפאומורפיזם C^α : תהיינה M, M' יריעות אזי $f : M \rightarrow M'$ עברה f הפיכה וכן $f, f^{-1} \in C^\alpha$.

מסקנה: תהיינה M, M' יריעות דיפאומורפיות אזי $\dim(M) = \dim(M')$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית תהא $p \in M$ ותהיינה $(U, \varphi), (V, \psi)$ מפות באשר U, V סביבות של p אזי $\text{Im}(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}(\varphi(p))) = \text{Im}(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}(\psi(p)))$.

המרחב המשיק: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית תהא $p \in M$ ותהא (U, φ) מפה באשר U סביבה של p אזי $T_p(M) = \text{Im}(\mathcal{D}_{\varphi(p)}(\varphi^{-1}))$.

הערה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית ותהא $p \in M$ אזי $T_p(M) \subseteq \mathbb{R}^n$.

מסקנה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p \in M$ אזי $\dim(T_p(M)) = \dim(M)$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית תהא $p \in M$ ותהא $\{f = 0\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $T_p(M) = \ker(\mathcal{D}_p(f))$.

וקטור מהירות: תהא $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ מסילה C^1 אזי $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$.

טענה: תהא $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ מסילה C^1 אזי $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}(M)$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית ותהא $p \in M$ אזי $T_p(M) = \{\dot{\gamma}(0) \mid (\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), M)) \wedge (\gamma(0) = p)\}$.

טענה: תהיינה M, M' יריעות תהא $p \in M$ ותהא $f \in C^1(M, M')$ ותהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ מסילות המקיימות $\gamma_i(0) = p$ וכן $\dot{\gamma}_i(0) = v$ אזי $(\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1))(0) = (\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2))(0)$.

נגזרת של פונקציה בין יריעות: תהיינה M, M' יריעות תהא $p \in M$ ותהא $f \in C^1(M, M')$ אזי $\mathcal{D}_p f : T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(M')$ המוגדרת $(\mathcal{D}_p f)(v) = (\frac{d}{dt}(f \circ \gamma))(0)$ עבור מסילה $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ המקיימת $\gamma(0) = p$ וכן $\dot{\gamma}(0) = v$.

טענה: תהיינה M, M' יריעות תהא $p \in M$ ותהא $f \in C^1(M, M')$ אזי $\mathcal{D}_p f$ העתקה ליניארית.

משפט כלל השרשרת: תהיינה M, M', M'' יריעות תהא $f \in C^\alpha(M, M')$ ותהא $g \in C^\alpha(M', M'')$ אזי $\mathcal{D}_p(g \circ f) = \mathcal{D}_{f(p)}(g) \cdot \mathcal{D}_p(f)$.

מסקנה: תהיינה M, M' יריעות תהא $p \in M$ ותהא $f \in C^1(M, M')$ אזי $(\mathcal{D}_p f)(v) = \mathcal{D}_p(f) \cdot v$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $p \in M$ ותהא $\{F = 0\}$ הצגה סתומה רגולרית עבור סביבה של p אזי $T_p(M) = \text{span}(\{\nabla F_1(p), \dots, \nabla F_{n-k}(p)\}^\perp)$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $p \in M$ ותהא (U, φ) מפה באשר U סביבה של p אזי $\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_1), \dots, \mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_k)\}$ בסיס של $T_p(M)$.

הערה: נגדיר את $\{\mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_1), \dots, \mathcal{D}_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(e_k)\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $T_p(M)$.

טענה: תהיינה M, M' יריעות תהא $f \in C^\alpha(M, M')$ תהא $p \in M$ ותהא (U, φ) מפה ב- M באשר U סביבה של p תהא (V, ψ) מפה ב- M' באשר V סביבה של $f(p)$ אזי $[D_p f]_{i,j} = \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_i}{\partial x_j}$.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $M' \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה תהא $f : M \rightarrow M'$ תהא $p \in M$ ותהא $g \in C^\alpha(U, \mathbb{R}^m)$ באשר $U \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של p וכן $g|_{U \cap M} = f$ אזי $\mathcal{D}_p f = (\mathcal{D}_p g)|_{T_p(M)}$.

נגזרת כיוונית: תהא $f \in C^\alpha(M, \mathbb{R}^m)$ ותהא $v \in T_p(M)$ אזי $L_v f = \mathcal{D}_p f(v)$.

טענה: תהא $f \in C^\alpha(M, \mathbb{R}^m)$ תהא (U, φ) מפה בסביבה של p ותהא $v \in T_p(M)$ אזי $L_v f = \sum_{i=1}^k v_i \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}$.

טענה: תהא $f \in C^\alpha(M, \mathbb{R}^m)$ ותהא $v \in T_p(M)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v} = L_v f$.

וקטור נורמל: יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח ותהא $p \in M$ אזי $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ עבורו $v \perp T_p(M)$.

וקטור נורמל יחידה: יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח ותהא $p \in M$ אזי וקטור נורמל $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ עבורו $\|v\| = 1$.

טענה: יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח תהא $p \in M$ ותהא $\{f = 0\}$ הצגה סתומה רגולרית בסביבה של p אזי $\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ וקטור נורמל יחידה ל- p .

מסקנה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח ותהא $\{f = 0\}$ הצגה סתומה רגולרית של \mathcal{M} אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ קו־אוריינטציה של \mathcal{M} .

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח תהא $p \in \mathcal{M}$ ותהא Γ_f הצגה כגוף בסביבה של p אזי $\frac{(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p), -1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(p)\|^2}}$ וקטור נורמל יחידה ל- p .

מסקנה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח ותהא Γ_f הצגה כגוף של \mathcal{M} אזי $\frac{(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}, -1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}$ קו־אוריינטציה של \mathcal{M} .

מכפלה מצולבת: יהיו $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי e_i
$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \det \begin{pmatrix} (v_1)_1 & \dots & (v_{n-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{i-1} & \dots & (v_{n-1})_{i-1} \\ (v_1)_{i+1} & \dots & (v_{n-1})_{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ (v_1)_n & \dots & (v_{n-1})_n \end{pmatrix} e_i$$

הערה: יהיו $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי בצורה לא פורמלית מתקיים
$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \det \begin{pmatrix} e_1 & | & \\ \vdots & v_1 & \dots & v_{n-1} \\ e_n & | & \end{pmatrix}$$

טענה: יהיו $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית.

דטרמיננט גראם: יהיו $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ אזי
$$\Gamma(v_1 \dots v_m) = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \dots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$$

טענה: יהיו $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$

• לכל $i \in [n-1]$ מתקיים $v_1 \times \dots \times v_{n-1} \perp v_i$

• $\|v_1 \times \dots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\Gamma(v_1 \dots v_{n-1})}$

• $\det(v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1}) \geq 0$

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח תהא $p \in \mathcal{M}$ ותהא r פרמטריזציה טובה בסביבה של p אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1}(p) \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}(p)$ וקטור נורמל ל- p .

מסקנה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח ותהא r פרמטריזציה טובה של \mathcal{M} אזי $\frac{\partial r}{\partial x_1} \times \dots \times \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ קו־אוריינטציה של \mathcal{M} .

סימון: תהא $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ ותהא $\alpha \in \mathbb{N}^k$ אזי $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}(f)$

סימון: תהייה $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i}{\beta_i}$

טענה כלל לייבניץ: תהייה $f, g \in C^\infty(\mathcal{M})$ ותהא $\alpha \in \mathbb{N}^k$ אזי
$$\partial^\alpha(f \cdot g) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^k \\ |\beta| \leq |\alpha|}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta(f) \partial^{\alpha-\beta}(g)$$

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה אזי $D : C^\infty(\mathcal{U}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{U})$ המקיימת
$$\mathcal{D}(f)(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^k \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \cdot \partial^\alpha f(x)$$
 עבור

$m \in \mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

אופרטור דיפרנציאלי: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $D : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ עבורה לכל מפה (\mathcal{U}, φ) על \mathcal{M} באשר $\bar{\mathcal{U}}$ קומפקטית מתקיים
$$\mathcal{D}(f \circ \varphi^{-1})(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^k \\ |\alpha| \leq m}} a_\alpha(x) \cdot \partial^\alpha(f \circ \varphi^{-1})(x)$$
 עבור $m \in \mathbb{N}$ וכן a_α חלקות.

שדה וקטורי C^m : תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $v : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ עבורה $v(p) \in T_p(\mathcal{M})$ לכל $p \in \mathcal{M}$ וכן לכל מפה (\mathcal{U}, φ) מתקיים כי
$$D_x \varphi(v(x))$$
 העתקה C^m .

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ויהי v שדה וקטורי חלק אזי $L_v : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ המוגדרת
$$L_v(f)(x) = L_{v(x)}(f)$$
 הינה אופרטור דיפרנציאלי.

תומך: תהא $f \in C(\mathcal{M})$ אזי $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \neq 0\}}$

סימון: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה אזי $\text{supp}(f)$ קומפקטית
$$C_c^\infty(\mathcal{U}) = \{f \in C^\infty(\mathcal{U}) \mid \text{supp}(f) \text{ קומפקטית}\}$$

אופרטור מקומי: תהא \mathcal{M} יריעה אזי $L : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ עבורה לכל $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ פתוחה ולכל $f, g \in C_c^\infty$ עבורו $f|_{\mathcal{U}} = g|_{\mathcal{U}}$ מתקיים
$$L(f)|_{\mathcal{U}} = L(g)|_{\mathcal{U}}$$

הגדרה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^\infty(\mathcal{W})$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי
$$\|f\|_{W,n} = \sup_{\substack{x \in \mathcal{W} \\ |\alpha| \leq n}} \|(\partial^\alpha f)(x)\|$$

טענה: תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה תהא $f \in C^\infty(\mathcal{W})$ תהא $x \in \mathcal{W}$ עבורה $(\partial^\alpha f)(x) = 0$ לכל $|\alpha| \leq n$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $\delta \in (0, \varepsilon)$ וכן $g \in C^\infty(\mathcal{W})$ עבורה

• $g|_{B_{\frac{\delta}{2}}(x)} = 0$

• $g|_{\mathcal{W} \setminus B_\delta(x)} = 0$

• $\|f - g\|_{W,n} < \varepsilon$

סימון: יהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$ אזי $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^k \binom{\alpha_i}{\beta_i}$

משפט פיטרה: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא $L : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M})$ לינארית התב"ש

• L אופרטור מקומי.

• לכל $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ מתקיים $\text{supp}(L(f)) \subseteq \text{supp}(f)$.

• L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $x \in \mathcal{V}$ אזי קיימת $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{W}}$ קומפקטית וכן קיים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_c^\infty(\mathcal{W} \setminus \{x\})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \leq C \|f\|_{\mathcal{W},n}$.

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה יהי $L : C^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ פתוחה עבורה קיימים $n \in \mathbb{N}$ וכן $C > 0$ עבורם לכל $f \in C_c^\infty(\mathcal{W})$ מתקיים $\|Lf\|_{\mathcal{W},0} \leq C \|f\|_{\mathcal{W},n}$ אזי L אופרטור דיפרנציאלי מסדר n .

משפט פירוק יחידה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ כיסוי פתוח של X אזי קיימות $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$ עבורן

• לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leq \rho_i \leq 1$.

• לכל $i \in \mathbb{N}$ קיים $\alpha \in \Lambda$ עבורו $\text{supp}(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$.

• לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $|\{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i(\mathcal{W}) \neq 0\}| \in \mathbb{N}$.

• לכל $x \in X$ מתקיים $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i(x) = 1$.

מסקנה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ויהי $L : C^\infty(\mathcal{V}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{V})$ אופרטור לינארי מקומי אזי L אופרטור דיפרנציאלי.

טענה: תהא \mathcal{M} יריעה תהא $X \subseteq \mathcal{M}$ ויהי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ כיסוי פתוח ב- \mathcal{M} של X אזי קיימות $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty \subseteq C^\infty(\mathcal{M})$ עבורן

• לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $0 \leq \rho_i \leq 1$.

• לכל $i \in \mathbb{N}$ קיים $\alpha \in \Lambda$ עבורו $\text{supp}(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$.

• לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$ עבורה $|\{i \in \mathbb{N} \mid \rho_i(\mathcal{W}) \neq 0\}| \in \mathbb{N}$.

• לכל $x \in X$ מתקיים $\sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i(x) = 1$.

מקבילון: יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ אזי $\{\sum_{i=1}^k t_i v_i \mid \forall i \in [k]. t_i \in [0, 1]\}$

נפח מקבילון: יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_k(\Pi(v_1 \dots v_k)) = \sqrt{\Gamma(v_1 \dots v_k)}$.

טענה: יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^k$ אזי

• $\text{Vol}_k\left(\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ 0^{n-k} \end{smallmatrix}\right), \dots, \left(\begin{smallmatrix} v_k \\ 0^{n-k} \end{smallmatrix}\right)\right) = |\det(v_1 \dots v_k)|$

• תהא $T \in O(n)$ אזי $\text{Vol}_k(Tv_1, \dots, Tv_k) = \text{Vol}_k(v_1, \dots, v_k)$.

קבוצה זניחה ביחס ליריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית אזי $E \subseteq \mathcal{M}$ עבורה לכל מפה (\mathcal{U}, φ) מתקיים כי $\varphi(E \cap \mathcal{U})$ זניחה ב- \mathbb{R}^k .

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית יהי $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ אטלס של \mathcal{M} ותהא $E \subseteq \mathcal{M}$ אזי $(E \text{ זניחה ביחס ל-}\mathcal{M}) \iff (E \text{ זניחה ביחס ל-}\mathbb{R}^k)$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהיינה $\{E_i\}_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$ זניחות ביחס ל- \mathcal{M} אזי $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ זניחה ביחס ל- \mathcal{M} .

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן-מנייה של \mathcal{M} .

קבוצת נקודות האי-רציפות: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ אזי f אינה רציפה על x אזי $B_f = \{x \in \mathcal{M} \mid x \text{ אינה רציפה על } x\}$.

פונקציה אינטגרבילית רימן: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה

• f חסומה.

• $\text{supp}(f)$ קומפקטי.

• B_f זניחה ביחס ל- \mathcal{M} .

קבוצה מדידה לזרדן על יריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $E \subseteq \mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_E$ אינטגרבילית רימן על \mathcal{M} .

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית תהא (\mathcal{U}, φ) מפה ותהא $E \subseteq \mathcal{M}$ עבורה $\overline{E} \subseteq \mathcal{U}$ אזי $(E \text{ מדידה לזרדן ב-}\mathcal{M}) \iff (\varphi(E) \text{ מדידה לזרדן ב-}\mathbb{R}^k)$.

פונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $\text{supp}(f)$ קומפקטית וכן קיימת מפה (\mathcal{U}, φ) עבורה $\text{supp}(f) \subseteq \mathcal{U}$.

קבוצה נוחה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $A \subseteq \mathcal{M}$ עבורה $\mathbb{1}_A$ נוחה.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי קיים אטלס בן-מנייה $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ של \mathcal{M} באשר \mathcal{U}_i נוחה לכל $i \in \mathbb{N}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימות $f_1 \dots f_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן $f = \sum_{i=1}^n f_i$.

טענה: תהא \mathcal{M} יריעה k -מימדית בעלת פרמטריזציה טובה תהיינה $r_i : G_i \rightarrow \mathcal{M}$ פרמטריזציות טובות באשר $G_i \subseteq \mathbb{R}^k$ וכן $i \in \{1, 2\}$ ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי

$$\int_{G_1} (f \circ r_1)(q) \cdot \sqrt{\Gamma(\mathcal{D}_q(r_1)^T \cdot \mathcal{D}_q(r_1))} dq = \int_{G_2} (f \circ r_2)(q) \cdot \sqrt{\Gamma(\mathcal{D}_q(r_2)^T \cdot \mathcal{D}_q(r_2))} dq$$

אינטגרל: תהא \mathcal{M} יריעה k -מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r : G \rightarrow \mathcal{M}$ באשר $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \int_G (f \circ r)(q) \cdot \sqrt{\Gamma \left(\mathcal{D}_q(r)^T \cdot \mathcal{D}_q(r) \right)} dq$

מסקנה: תהא \mathcal{M} יריעה k -מימדית בעלת פרמטריזציה טובה $r : G \rightarrow \mathcal{M}$ באשר $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \int_G (f \circ r)(q) \cdot \sqrt{\Gamma \left(\frac{\partial r}{\partial x_1} \dots \frac{\partial r}{\partial x_k} \right)} dq$

סימון: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא (\mathcal{U}, φ) מפה אזי $\{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid (\text{supp}(f) \subseteq \mathcal{U}) \wedge (f \text{ נוחה ואינטגרבילית רימן})\}$ $R_{\mathcal{U}} = \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid (\text{supp}(f) \subseteq \mathcal{U}) \wedge (f \text{ נוחה ואינטגרבילית רימן})\}$

טענה: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא (\mathcal{U}, φ) מפה אזי $R_{\mathcal{U}}$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא (\mathcal{U}, φ) מפה אזי $\int_{\mathcal{M}} : R_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהייה $f_1 \dots f_n, g_1 \dots g_m : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבור $f = \sum_{i=1}^n f_i$ וכן $f = \sum_{i=1}^m g_i$ אזי $\sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{M}} g_i$

אינטגרל: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהייה $f_1 \dots f_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבור $f = \sum_{i=1}^n f_i$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i$

סימון: תהא \mathcal{M} יריעה אזי $\{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ אינטגרבילית רימן}\}$ $R(\mathcal{M}) = \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ אינטגרבילית רימן}\}$

טענה: תהא \mathcal{M} יריעה אזי $R(\mathcal{M})$ מרחב לינארי.

מסקנה: תהא \mathcal{M} יריעה אזי $\int_{\mathcal{M}} : R(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

סימון: תהא \mathcal{M} יריעה ותהא $f \in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \int_{\mathcal{M}} f d\text{Vol}_k$

מיצוי ז'ורדן של יריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$ סדרת קבוצות עולה ומדידות ז'ורדן עבורה $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \mathcal{M}$

אינטגרל לא אמיתי: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ באשר B_f זניחה אזי אם קיים $L \in \mathbb{R}$ עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות סגורות $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ של \mathcal{M} מתקיים $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} f \cdot \mathbb{1}_{E_i} = L$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f = L$

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $f \in R(\mathcal{M})$ אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ של \mathcal{M} מתקיים $\int_{\mathcal{M}} f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} f \cdot \mathbb{1}_{E_i}$

נפח של יריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית אזי $\text{Vol}_k(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} 1$

מפות זרות: מפות $(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)$ עבורן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

טענה: תהייה $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^n$ מפות זרות בזוגות על \mathcal{M} תהא $S \subseteq \mathcal{M}$ זניחה ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $f|_{\mathcal{M} \setminus (S \cup (\bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i))} = 0$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{U}_i} f$

אינטגרל קווי מסוג ראשון: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ותהא $f : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית אזי $\int_{\gamma} f d\text{Vol}_1$

סימון: תהא $\gamma \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Length}(\gamma) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{a=t_0 < \dots < t_m=b} \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$

טענה: תהא $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Length}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

סימון: תהא \mathcal{M} יריעה חד-מימדית אזי $\text{Length}(\mathcal{M}) = \text{Vol}_1(\mathcal{M})$

טענה: תהא \mathcal{M} יריעה חד-מימדית ותהא $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה אזי $\text{Length}(\mathcal{M}) = \text{Length}(\gamma)$

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U})$ אזי $\text{Length}(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$

מסקנה: תהייה $r, \theta \in C^1(\mathbb{R})$ נגדיר $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך $\gamma(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)))$ אזי $\|\gamma'\| = \sqrt{r^2 + r'^2}$

סימון: תהא \mathcal{M} יריעה חד-מימדית אזי $\text{Area}(\mathcal{M}) = \text{Vol}_2(\mathcal{M})$

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ יריעה דו-מימדית ותהא $r : G \rightarrow \mathcal{M}$ פרמטריזציה טובה באשר $G \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\text{Area}(\mathcal{M}) = \int_G \left| \frac{\partial r}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial r}{\partial x_2}(y) \right| dx dy$

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ אזי $\text{Area}(\Gamma_f) = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} dx dy$

טענה: תהייה $u, v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\det(I + uv^T) = 1 + \langle u, v \rangle$

מסקנה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n-k})$ אזי $\text{Vol}_k(\Gamma_f) = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2} dx_1 \dots dx_k$

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{n-k})$ ותהא $\alpha : \Gamma_f \rightarrow \mathbb{R}$ באשר $\alpha(x)$ הזווית בין הנורמל של Γ_f בנקודה x לבין ציר e_{k+1} אזי $\sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|^2} = \frac{1}{\cos(\alpha(x))}$

משפט ארכימדס: יהיו P_1, P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את \mathbb{S}^2 ויהי \mathcal{M} השטח הכלוא על \mathbb{S}^2 בין P_1 ל- P_2 אזי $\text{Area}(\mathcal{M}) = 2\pi h$

מסקנה: יהיו P_1, P_2 מישורים מקבילים במרחק h החותכים את \mathbb{S}^2 ויהי \mathcal{M} השטח הכלוא על \mathbb{S}^2 בין P_1 ל- P_2 אזי $\text{Area}(\mathcal{M}) = 2\pi h R$

קורה: יהיו $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטחים מקבילים אזי $P_{H_1, H_2} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \max\{d(x, H_1), d(x, H_2)\} \leq d(H_1, H_2)\}$

רוחב קורה: יהיו $H_1, H_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטחים אזי $\text{Width}(P_{H_1, H_2}) = d(H_1, H_2)$

רוחב גוף: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור אזי $\text{Width}(K) = \inf_{\{K \subseteq P \mid \text{קורה } P\}} (\text{Width}(P))$

משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי והיו $P_1 \dots P_m$ קורות עבורן $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $\text{Width}(K) \leq \sum_{i=1}^m \text{Width}(P_i)$

רוחב יחסי של קורה: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי ותהא P קורה אזי

$$\text{Width}_K(P) = \inf_{m \in \mathbb{R}_+} \{m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists a \in \mathbb{R}^n. K \subseteq m \cdot P + a\}$$

השערת באנג: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי והיו $P_1 \dots P_m$ קורות עבורן $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1 \leq \sum_{i=1}^m \text{Width}_K(P_i)$ פתורה

טענה: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ גוף קמור קומפקטי עבורו $K = -K$ והיו $P_1 \dots P_m$ קורות עבורן $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m P_i$ אזי $1 \leq \sum_{i=1}^m \text{Width}_K(P_i)$

טענה: תהא $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\varphi \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ באשר $\nabla \varphi \neq 0$ אזי $\varphi^{-1}(t)$ על-משטח.

טענה: יהי $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ באשר $\nabla \varphi \neq 0$ וכן $\varphi(\mathcal{V}) = (a, b)$ ותהא $p \in \mathcal{V}$ אזי קיים $\delta > 0$ עבורו לכל $f \in R(V_\delta(p))$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית מתקיים $\int_{B_\delta(p)} f = \int_a^b \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\|\nabla \varphi(x)\|} d\text{Vol}_{n-1}(x) dt$

משפט נוחסאת קו־שטח: יהי $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R})$ באשר $\nabla \varphi \neq 0$ וכן $\varphi(\mathcal{V}) = (a, b)$ ותהא $f \in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}} f = \int_a^b \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\|\nabla \varphi(x)\|} d\text{Vol}_{n-1}(x) dt$

גרדיאנט: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ ותהא $x \in \mathcal{M}$ אזי $u \in T_x(\mathcal{M})$ עבורו $\langle u, v \rangle = L_v \varphi(x)$ לכל $v \in T_x(\mathcal{M})$

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ ותהא $x \in \mathcal{M}$ אזי הגרדיאנט של φ בנקודה x הוא $\nabla_x \varphi$

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של $x \in \mathcal{M}$ ותהא $\psi \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ באשר $\psi|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{M}} = \varphi|_{\mathcal{U}}$ אזי $\nabla_x \varphi = \text{Proj}_{T_x(\mathcal{M})}(\nabla_x \psi)$

משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ באשר $\nabla \varphi \neq 0$ וכן $\varphi(\mathcal{M}) = (a, b)$ ותהא $f \in R(\mathcal{M})$ אזי $\int_{\mathcal{M}} f = \int_a^b \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\|\nabla \varphi(x)\|} d\text{Vol}_{n-1}(x) dt$

מסקנה: יהי $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום תהא $\varphi \in C^1(\mathcal{V}, \mathbb{R}^k)$ באשר $\text{rank}(\mathcal{D}_x \varphi) = k$ ותהא $f \in R(\mathcal{V})$ באשר $\text{supp}(f)$ קומפקטית אזי $\int_{\mathcal{V}} f = \int_{\varphi(\mathcal{V})} \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\sqrt{\det((\mathcal{D}_x \varphi) \cdot (\mathcal{D}_x \varphi)^T)}} d\text{Vol}_{n-1}(x) dt$

טענה: תהא $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן ותהא $A \in O(n+1)$ אזי $\int_{\mathbb{S}^n} f(x) d\text{Vol}_n = \int_{\mathbb{S}^n} f(Ax) d\text{Vol}_n$

טענה: יהי $r > 0$ אזי $\text{Vol}_n(r \cdot \mathbb{S}^n) = r^n \cdot \text{Vol}_n(\mathbb{S}^n)$

טענה שטח פנים של ספירה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

טענה נפח של ספירה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{Vol}_n(B_1(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$

סימון: תהא \mathcal{M} יריעה אזי $\mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{M}) = \{v: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^k \mid v \text{ שדה וקטורי } C^\alpha \text{ מעל } \mathcal{M}\}$

טענה: תהא \mathcal{M} יריעה C^α ותהא (\mathcal{U}, φ) מפה אזי $\frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U})$

טענה: יהי $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ אזי $(v \text{ הוא } C^\alpha) \iff (v \text{ לכל מפה } (\mathcal{U}, \varphi) \text{ ולכל } i \in [k] \text{ מתקיים כי } \langle v(x), \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}(x) \rangle \text{ הינה } C^\alpha)$

טענה: יהי v שדה וקטורי על \mathcal{M} אזי $(v \text{ הוא } C^\alpha) \iff (v: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ הינה } C^\alpha)$

שדה וקטורי C^m מעל תת־קבוצה: תהא $A \subseteq \mathcal{M}$ אזי $v: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ עבורה $v(x) \in T_x(\mathcal{M})$ לכל $x \in A$ וכן לכל $p \in A$ קיימת סביבה $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$ וקיים $u \in \mathfrak{X}^m(\mathcal{U})$ עבורו $u|_{A \cap \mathcal{U}} = v|_{A \cap \mathcal{U}}$

טענה: תהא \mathcal{M} יריעה תהא $A \subseteq \mathcal{M}$ ותהא $v: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ אזי $(v \text{ שדה וקטורי } C^\alpha \text{ מעל } A) \iff (v \text{ קיימת } A \subseteq \mathcal{U} \text{ פתוחה ב-}\mathcal{M} \text{ וקיימת } u \in \mathfrak{X}^\alpha(\mathcal{U}) \text{ עבורה } u|_{\mathcal{U}} = v)$

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\varphi \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ אזי $\nabla \varphi \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{M})$

טענה: יהי \mathcal{M} על-משטח קשיר אזי $(\mathcal{M} \text{ בעל } 0 \text{ קו־אוריינטציות}) \vee (\mathcal{M} \text{ בעל } 2 \text{ קו־אוריינטציות})$

שטף: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח תהא N קו־אוריינטציה של \mathcal{M} והיו $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך \mathcal{M} אזי

$$\text{Flux}_F(\mathcal{M}) = \int_{\mathcal{M}} \langle F(x), N(x) \rangle d\text{Vol}_{n-1}(x)$$

טענה: יהי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח תהא N קו־אוריינטציה של \mathcal{M} והיו $F_1, F_2 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורם F_1, F_2 שדות וקטוריים דרך \mathcal{M} אזי $\text{Flux}_{\alpha F_1 + \beta F_2}(\mathcal{M}) = \alpha \text{Flux}_{F_1}(\mathcal{M}) + \beta \text{Flux}_{F_2}(\mathcal{M})$

טענה: יהיו $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטחים זרים עד כדי קבוצה זניחה בעלי קו־אוריינטציה N_1, N_2 בהתאמה והיו $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ אזי $\text{Flux}_F(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) = \text{Flux}_F(\mathcal{M}_1) + \text{Flux}_F(\mathcal{M}_2)$

טענה: יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח בעל קואוריינטציה N ויהי $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך M אזי $\text{Flux}_F(M, N) = \text{Flux}_F(M, -N)$.

דיברגנץ: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(U)$ אזי $\text{div}(F)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)$.

טענה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(U)$ נגדיר $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ כך $f(x) = F(x)$ אזי $\text{div}(F)(x) = \text{trace}(\mathcal{D}_x(f))$.

מסקנה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F \in \mathfrak{X}^1(U)$ ותהא $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{div}(A \circ F)(A^{-1}x) = \text{div}(F)(x)$.

טענה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה יהי $F \in \mathfrak{X}^1(U)$ ותהא $f \in C^1(U)$ אזי $\text{div}(f \cdot F) = f \cdot \text{div}(F) + \langle \nabla f, F \rangle$.

לפלסיאן: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C^1(U)$ אזי $\Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

טענה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f \in C^1(U)$ אזי $\Delta f = \text{div}(\nabla f)$.

סימון: תהא $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Cube}_\ell(x) = \{Q \subseteq \mathbb{R}^n \mid (x \in Q) \wedge (\ell \text{ הוא } Q \text{ של } (Q \text{ קובייה})) \wedge (\text{אורך הצלע של } Q \text{ הוא } \ell)\}$.

הערה: תהא $x \in \mathbb{R}^n$ ויהי $Q \in \text{Cube}_\ell(x)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial Q) = \sum \text{Flux}_F(E_i)$ באשר $\{E_i\}$ פאות Q עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני ל- Q .

טענה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $F \in \mathfrak{X}^1(U)$ אזי $\text{div}(F)(x) = \lim_{\substack{Q \in \text{Cube}_\ell(x) \\ \ell \rightarrow 0}} \frac{1}{\text{Vol}_n(Q)} \text{Flux}_F(\partial Q)$.

נקודת שפה חלקה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $x \in \partial U$ עבורה קיימת $W \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של x וקיימת $f \in C^1(W, \mathbb{R})$ עבורה $U \cap W = \{f < 0\}$ וכן $\nabla_x f \neq 0$ וכן $f(x) = 0$.

סימון: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $x \in \partial U$ נקודת שפה חלקה $| x \in \partial U$.

סימון: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x \in \partial^{\text{sm}} U$ ותהא $f \in C^1(W, \mathbb{R})$ באשר W סביבה של x המקיימת $\nabla_x f \neq 0$ וכן $f(x) = 0$ וכן $U \cap W = \{f < 0\}$ אזי $\text{Smooth}_U(x) = (W, f)$.

טענה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x \in \partial^{\text{sm}} U$ אזי קיימת $W \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של x עבורה $W \cap \partial U$ היפר-משטח.

טענה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}} U$ פתוחה ביחס ל- ∂U .

מסקנה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\partial^{\text{sm}} U$ יריעה.

קבוצה חלקה: קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\partial U = \partial^{\text{sm}} U$.

קבוצה בעלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \text{Vol}_n((\partial U \setminus \partial^{\text{sm}} U) + B_\varepsilon(0)) = 0$.

טענה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $x \in \partial^{\text{sm}} U$ עבורה $\text{Smooth}_U(x) = (W, f)$ אזי $\text{Smooth}_U(x) = (W, f)$ נורמל יחידה. $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}: W \cap \partial^{\text{sm}} U \rightarrow \mathbb{R}^n$

קואוריינטציה חיצונית קנונית לשפה חלקה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $N: \partial^{\text{sm}} U \rightarrow \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x \in \partial^{\text{sm}} U$ באשר $N|_{W \cap \partial^{\text{sm}} U} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ מתקיים $\text{Smooth}_U(x) = (W, f)$.

שטף: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ בעלת שפה כמעט חלקה ותהא $W \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\partial U \subseteq W$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(W)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial U) = \text{Flux}_F(\partial^{\text{sm}} U)$.

למה: יהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ על-משטח ותהא N קואוריינטציה של M יהי $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ עבורו F שדה וקטורי דרך M ותהא $A \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\text{Flux}_{A \circ F}(A \cdot M) = \text{Flux}_F(M)$.

טענה: תהא $a \in \mathbb{R}^n$ יהי $r > 0$ תהא $g \in C^1(B_r(a), \mathbb{R})$ באשר $\frac{\partial g}{\partial x_i} \neq 0$ לכל $i \in [n]$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{R}^n)$ באשר $\text{supp}(F) \subseteq B_r(a)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial \{g < 0\}) = \int_{\{g < 0\}} \text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} U) < \infty$ תהא $a \in \partial U \setminus \partial^{\text{sm}} U$ אזי קיים $r > 0$ עבורו לכל $W \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיים $\bar{U} \subseteq W$ ולכל $F \in \mathfrak{X}^1(W)$ המקיים $\text{supp}(F) \subseteq B_r(a)$ מתקיים $\text{Flux}_F(\partial U) = \int_U \text{div}(F)$.

מסקנה: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה וחלקה ותהא $W \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\bar{U} \subseteq W$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(W)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial U) = \int_U \text{div}(F)$.

למה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $X + B_\varepsilon(0)$ מדידה זיורדן.

למה: תהא $X \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית אזי קיים $C \in \mathbb{R}$ עבורו לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ המקיימת

$$0 \leq \psi \leq 1$$

$$\psi|_{X+B_\varepsilon(0)} = 1$$

$$\psi|_{\mathbb{R}^n \setminus (X+B_{3\varepsilon}(0))} = 0$$

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} \text{ לכל } i \in [n] \text{ מתקיים}$$

משפט הדיברגנץ: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} U) < \infty$ תהא $W \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\bar{U} \subseteq W$ ויהי $F \in \mathfrak{X}^1(W)$ אזי $\text{Flux}_F(\partial U) = \int_U \text{div}(F)$.

טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} U) < \infty$ ויהי N נורמל חיצוני ל- U אזי $\text{Vol}_n(U) = \frac{1}{n} \int_{\partial^{\text{sm}} U} \langle x, N \rangle d\text{Vol}_{n-1}(x)$.

טענה אינטגרציע בחלקים: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}\mathcal{U}) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\bar{\mathcal{W}} \subseteq \mathcal{W}$ תהיינה $f, g \in C^1(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ אזי
$$\int_{\mathcal{U}} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \cdot g \right) = \int_{\partial \mathcal{U}} (f \cdot g \cdot \langle N, v \rangle) - \int_{\mathcal{U}} \left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial v} \right)$$

טענה נוסחאות גרין: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}}G) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\bar{G} \subset \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל- G ותהיינה $u, v: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ אזי

1. נניח כי u הינה C^2 אזי $\int_G \Delta u = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial N}$
2. נניח כי v הינה C^2 וכן u הינה C^1 אזי $\int_G \langle \nabla u, \nabla v \rangle = - \int_G u \cdot \Delta v + \int_{\partial G} u \cdot \frac{\partial v}{\partial N}$
3. נניח כי u, v הן C^2 אזי $\int_G (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) = \int_{\partial G} \left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial N} - v \cdot \frac{\partial u}{\partial N} \right)$

אנרגיית דיריכלה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\bar{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל- G ותהא $v \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ אזי $\int_G \|\nabla v\|^2$.

מסקנה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\bar{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל- G ותהא $v \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ אזי $\int_G \|\nabla v\|^2 = -\int_G v \cdot \Delta v + \int_{\partial G} v \cdot \frac{\partial v}{\partial N}$.

פונקציה הרמונית: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $u \in C^2(G, \mathbb{R})$ המקיימת $\Delta u = 0$.

טענה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ תהא $W \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq W$ יהי N נורמל חיצוני ל- G ותהא $u \in C^2(W, \mathbb{R})$ הרמונית אזי

- $\text{Flux}_{\nabla u}(\partial G) = 0$
- נניח כי $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)|_{\partial G} = 0$ קבועה מקומית ב- G .
- נניח כי $u|_{\partial G}$ קבועה מקומית אזי u קבועה מקומית ב- G .

סימון: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $\int_{\mathcal{U}} f = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{U})} \int_{\mathcal{U}} f$.

משפט תכונת הערך הממוצע: תהא $a \in \mathbb{R}^n$ יהי $r > 0$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r(a)} \subseteq \mathcal{W}$ ותהא $u \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ הרמונית אזי $u(a) = f_{\partial B_r(a)} u$.

מסקנה: תהא $a \in \mathbb{R}^n$ יהי $r > 0$ תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{B_r(a)} \subseteq \mathcal{W}$ ותהא $u \in C^2(\mathcal{W}, \mathbb{R})$ הרמונית אזי $u(a) = f_{B_r(a)} u$.

טענה: תהא $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\Delta f(a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2n}{r^2} (f_{\partial B_r(a)} f - f(a))$.

מסקנה עקרון המקסימום: יהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u: \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב- G וכן $\max(u(\overline{G})) \in u(G)$ אזי u קבועה.

מסקנה עקרון המינמום: יהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום ותהא $u : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה באשר u הרמונית ב- G וכן $\min(u(\overline{G})) \in u(G)$ אזי u קבועה.

משפט ליוביל: תהא $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי u קבועה.

מסקנה: תהא $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלעיל אזי u קבועה.

טענה אינטגרל פואסון: יהי $n \geq 3$ תהא $u \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ באשר $\text{supp}(u)$ קומפקטי ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי

$$u(a) = \frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta u(x)}{|x-a|^{n-2}} dx$$

משפט גרעין פואסון: תהא $u: \overline{B_1^n(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה באשר $u|_{B_1^n(0)}$ הרמונית אזי לכל $a \in B_1^n(0)$ מתקיים

$$u(a) = \frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x) \cdot \frac{1 - \|a\|^2}{\|x - a\|^n} d\text{Vol}_{n-1}$$

מסקנה: תהא $f \in C^2(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{R})$ איז $u : \overline{B_1^n(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $u(x) = \frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(y) \cdot \frac{1 - \|x\|^2}{\|y - x\|^n} d\text{Vol}_{n-1}(y)$ הרמונית וכן $u|_{\mathbb{S}^{n-1}} = f$

המרחב הדואלי: יהי V מ"ו ממשי אזי $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$.

סימון: יהי V מ"ו ממשי יהי $\{e_1 \dots e_n\}$ בסיס של V ויהי $i \in [n]$ אזי $e_i^*: V \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

טענה: יהי V מ"ו ממשי ויהי $\{e_1 \dots e_n\}$ בסיס של V אזי $\{e_1^* \dots e_n^*\}$ בסיס של V^* .

המרחב הקו-משיק: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p \in M$ אזי $T_p(M)^*$

סימון: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p \in M$ אזי $T_p^*(M) = T_p(M)^*$

קו-וקטורים: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $p \in M$ אזי $v \in T_p^*(M)$

1-תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה איז $\omega : \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ המקיימת $\omega(x) \in T_x^*(\mathcal{M})$.

סימון: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω 1-תבנית דיפרנציאלית על M ותהא $x \in M$ אזי $\omega_x = \omega(x)$

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדויקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_x \in (\mathbb{R}^n)^*$ אלא $\omega_x \in T_x^*(\mathcal{M})$.

טענה: יהי $v \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ אזי $\omega_x(u) = \langle v(x), u \rangle$ 1-תבנית דיפרנציאלית.

נגזרת חיצונית: תהא $f \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ אזי $df: \mathcal{M} \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ המוגדרת $df(x)(v) = \frac{\partial f}{\partial v_i}(x) v_i$.

טענה: תהא $f \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ אזי df 1-תבנית דיפרנציאלית.

טענה כלל לייבניץ: תהיינה $f, g \in C^1(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ אזי $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$.

הטלה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $i \in [n]$ אזי $q_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $q_i(u) = u_i$.

סימון: תהא (\mathcal{U}, φ) מפה על \mathcal{M} אזי $x_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $x_i = q_i \circ \varphi$.

מערכת קואורדינטות מקומיות על יריעה: תהא (\mathcal{U}, φ) מפה על \mathcal{M} אזי $\{x_1 \dots x_k\}$.

סימון: תהא (\mathcal{U}, φ) מפה על \mathcal{M} תהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ תהא $p \in \mathcal{M}$ ויהי $i \in [k]$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$.

הערה: מטרת הסימונים מלעיל הינה לאפשר קואורדינטות $x_1 \dots x_k$ על \mathcal{M} כמו ב- \mathbb{R}^k .

טענה: תהא (\mathcal{U}, φ) מפה על \mathcal{M} ויהי $i \in [k]$ אזי dx_i 1-תבנית דיפרנציאלית ב- \mathcal{U} .

סימון: תהא (\mathcal{U}, φ) מפה על \mathcal{M} תהא $p \in \mathcal{M}$ ויהי $i \in [n]$ אזי $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x_i}(\varphi(p))$.

סימון: תהא (\mathcal{U}, φ) מפה על \mathcal{M} יהי $i \in [k]$ ויהי $p \in \mathcal{U}$ אזי $dx_i|_p = dx_i(p)$.

טענה: תהא (\mathcal{U}, φ) מפה על \mathcal{M} ויהי $x \in \mathcal{U}$ אזי $\{dx_1|_x, \dots, dx_k|_x\}$ בסיס של $T_x^*(\mathcal{M})$.

טענה: תהא (\mathcal{U}, φ) מפה על \mathcal{M} יהי $i \in [k]$ ויהי $p \in \mathcal{U}$ אזי $dx_i|_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)\right)^*$.

1-תבנית דיפרנציאלית C^m : תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי 1-תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה (\mathcal{U}, φ) של \mathcal{M} ולכל

$f_1 \dots f_k \in \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ באשר $\omega = \sum_{i=1}^k f_i \cdot dx_i$ מתקיים $f_1 \dots f_k \in C^m(\mathcal{U})$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא ω 1-תבנית דיפרנציאלית אזי $(\omega \in C^m) \iff (\text{קיים אטלס } \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda} \text{ של } \mathcal{M} \text{ עבורו לכל } \alpha \in \Lambda$

$f_1 \dots f_k \in \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ באשר $\omega = \sum_{i=1}^k f_i \cdot dx_i$ מתקיים $f_1 \dots f_k \in C^m(\mathcal{U}_\alpha)$).

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\Omega^1(\mathcal{M}) = \{\omega \mid \omega \text{ 1-תבנית דיפרנציאלית } C^\infty \text{ על } \mathcal{M}\}$.

טענה: תהא $f \in C^1(\mathcal{M})$ ותהא (\mathcal{U}, φ) מפה על \mathcal{M} אזי $df = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i$.

מסקנה: תהא $f \in C^{m+1}(\mathcal{M})$ אזי df הינה 1-תבנית דיפרנציאלית C^m .

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $F \in C^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ אזי $F^* : \Omega^1(\mathcal{N}) \rightarrow \Omega^1(\mathcal{M})$

המוגדרת $F^*(\omega, x, v) = \omega_{F(x)}(D_x(F) \cdot v)$.

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה תהא $N \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $F \in C^1(\mathcal{M}, N)$ אזי $(F^*_\omega)_x(v) = F^*(\omega, x, v)$.

אינטגרל קווי מסוג שני: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$.

טענה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\int_\gamma : \Omega^1(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ הינו פונקציונל לינארי.

טענה אי-תלות בבחירת פרמטריזציה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין תהא $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ מסילה C^1 למקוטעין

ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma \circ \psi} \omega$.

העתקה לינארית שומרת אוריינטציה: העתקה $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ עבורה $\det([\varphi]_{st}) > 0$.

דיפאומורפיזם שומר אוריינטציה: תהיינה $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי דיפאומורפיזם $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ עבורו $D_x(f)$ שומרת אוריינטציה לכל $x \in \mathcal{U}$.

אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה פשוטה אזי $O : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ רציפה למקוטעין עבורה $O(x) \in$

$\{\pm \dot{\gamma}(\gamma^{-1}(x))\}$.

הערה: אם המסילה לא פשוטה נפרק אותה מספר מסילות פשוטות ונחבר בסוף.

האוריינטציה הסטנדרטית של מסילה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה פשוטה C^1 למקוטעין אזי $O : \text{Im}(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^n$ המוגדרת

$O(x) = \dot{\gamma}(\gamma^{-1}(x))$.

טענה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי האוריינטציה הסטנדרטית של γ הינה אוריינטציה של $\text{Im}(\gamma)$.

היפוך אוריינטציה של מסילה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\bar{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ המוגדרת $\bar{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)$.

טענה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי $\int_{\bar{\gamma}} \omega = - \int_\gamma \omega$.

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ותהא $\omega \in \Omega^1([a, b])$ אזי $\int_a^b \omega = - \int_b^a \omega$.

שרשור מסילות: תהא $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין אזי

$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b, c] \end{cases}$.

טענה: תהא $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי

$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$.

טענה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ באשר לכל $t \in [a, b]$ קיימת \mathcal{U} סביבה של $\gamma(t)$ בה f הינה

C^1 אזי $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

סימון: תהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ ותהא $x \in \mathcal{M}$ אזי $\|\omega_x\|_\infty = \max\{\omega_x(v) \mid (v \in T_x(\mathcal{M})) \wedge (\|v\| = 1)\}$.

טענה: תהא $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי $\int_\gamma \omega \leq \text{Length}(\gamma) \cdot \max_{t \in [a, b]} \|\omega_{\gamma(t)}\|_\infty$.

הערה: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ אזי ניתן לחשוב על ∂G בתור איחוד סופי זר של מסילות סגורות.

אוריינטציה רגל שמאל: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ תהא N קו־אוריינטציה חיצונית של ∂G ותהינה $\gamma_1 \dots \gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup \gamma_i = \partial G$ אזי אוריינטציה $O : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^2$ עבורה $x \in \partial G$ לכל $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot O(x) = -N(x)$

טענה פרמטריזציה נורמלית: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ וכן ∂G הינה C^1 אזי קיימות $\gamma_1 \dots \gamma_m$ מסילות זרות וסגורות עבורן $\bigcup \gamma_i = \partial G$ ולכל $i \in [m]$ ולכל $t \in \text{Dom}(\gamma_i)$ מתקיים $\|\gamma'_i(t)\| = 1$.

משפט גרין: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\bar{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל- G ותהינה $P, Q \in C^1(\mathcal{W})$ אזי $\int_{\partial G} (Pdx + Qdy) = \int_G \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) dxdy$ כאשר ∂G עם אוריינטציה רגל שמאל.

מסקנה נוסחת גאוס: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^2$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ וכן ∂G הינה C^1 למקוטעין אזי $\text{Area}(G) = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (xdy - ydx)$ כאשר ∂G עם אוריינטציה רגל שמאל.

העתקה לינארית אנטי סימטרית: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} אזי $T \in \text{Hom}(V^k, \mathbb{R})$ עבורה לכל $u_1 \dots u_k \in V$ ולכל $i, j \in [k]$ שונים מתקיים $T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}\right) = -T\left(R_{i \leftrightarrow j} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}\right)$ כי $R_{i \leftrightarrow j} \in M_n(A)$ הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות i, j . **הערה:** יהיו $i, j \in [n]$ אזי $R_{i \leftrightarrow j} \in M_n(A)$ הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות i, j . **k-תבנית:** יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} אזי $\bigwedge^k V^* = \{\omega \in \text{Hom}(V^k, \mathbb{R}) \mid \omega \text{ אנטי סימטרית}\}$

סימון: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} אזי $\bigwedge^0 V^* = \mathbb{R}$

טענה: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} באשר $\dim(V) = n$ אזי $\det_n \in \bigwedge^n V^*$

טענה: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} יהיו $u_1 \dots u_k \in V$ תלויים לינארית ותהא $\omega \in \bigwedge^k V^*$ אזי $\omega(u_1 \dots u_k) = 0$

מכפלת וודג' / מכפלת יתד: יהיו $\varphi_1 \dots \varphi_k \in V^*$ אזי $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \in \bigwedge^k V^*$ כאשר $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k)(u_1 \dots u_k) = \det((\varphi_i(u_j))_{i,j \in [k]})$

טענה: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} יהי $e_1 \dots e_n$ בסיס של V ויהי $k \in [n]$ אזי $\{e_{a_1}^* \wedge \dots \wedge e_{a_k}^* \mid 1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq n\}$ בסיס של $\bigwedge^k V^*$

מסקנה: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} באשר $\dim(V) = n$ אזי $\dim(\bigwedge^k V^*) = \binom{n}{k}$

מסקנה: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} באשר $\dim(V) = n$ אזי $\bigwedge^n V^* = \text{span}\{\det_n\}$

טענה: יהי V מ"ו מעל \mathbb{R} ויהיו $k, \ell \in \mathbb{N}$ אזי קיימת ויחידה $\wedge : \bigwedge^k V^* \times \bigwedge^\ell V^* \rightarrow \bigwedge^{k+\ell} V^*$ עבורה

$\varphi_1 \dots \varphi_k, \psi_1 \dots \psi_\ell \in V^*$ לכל $(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k) \wedge (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_\ell) = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_\ell$

p-תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega : \mathcal{M} \rightarrow \text{Hom}((\mathbb{R}^n)^p, \mathbb{R})$ המקיימת $\omega(x) \in \bigwedge^p T_x^*(\mathcal{M})$

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω p-תבנית דיפרנציאלית על \mathcal{M} ותהא $x \in \mathcal{M}$ אזי $\omega_x = \omega(x)$

הערה: ההגדרה מלעיל לא מדויקת מכיוון ולא מתקיים $\omega_x \in \text{Hom}((\mathbb{R}^n)^p, \mathbb{R})$ אלא $\omega_x \in \bigwedge^p T_x^*(\mathcal{M})$

מכפלת וודג' / מכפלת יתד: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא ω p-תבנית דיפרנציאלית ותהא ν q-תבנית דיפרנציאלית אזי $\omega \wedge \nu$ הינה $(p+q)$ -תבנית דיפרנציאלית כאשר $(\omega \wedge \nu)_x = \omega_x \wedge \nu_x$

סימון: תהא $a : [p] \rightarrow [k]$ באשר $1 \leq a_1 < \dots < a_p \leq n$ אזי $dx_{a_1} \wedge \dots \wedge dx_{a_p} = dx_{\{a_1 \dots a_p\}}$

p-תבנית דיפרנציאלית: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי p-תבנית דיפרנציאלית ω עבורה לכל מפה (\mathcal{U}, φ) של \mathcal{M} ולכל

$I \in \mathcal{P}_p([k])$ לכל $f_I \in C^m(\mathcal{U})$ מתקיים $\omega = \sum_{I \in \mathcal{P}_p([k])} f_I \cdot dx_I$ כאשר $f \in \mathcal{P}_p([k]) \rightarrow (\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R})$

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי ω הינה p-תבנית דיפרנציאלית על \mathcal{M} על C^∞ אזי $\Omega^p(\mathcal{M}) = \{\omega \mid \omega \text{ הינה } p\text{-תבנית דיפרנציאלית על } \mathcal{M}\}$

משיכה לאחור (pull back): תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $F \in C^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ אזי $H^* : \Omega^p(\mathcal{N}) \rightarrow \Omega^p(\mathcal{M})$ המוגדרת $H^*(\omega, x, v_1 \dots v_p) = \omega_{H(x)}(D_x(H) \cdot v_1, \dots, D_x(H) \cdot v_p)$

סימון: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $H \in C^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ אזי $(H^*)_x(v) = H^*(\omega, x, v)$

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^m$ יריעה תהא $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^\ell$ יריעה תהא $H \in C^1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ותהא $G \in C^1(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ אזי $(G \circ H)^* = H^* \circ G^*$

נגזרת חיצונית: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $d : \Omega^p(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{U})$ המוגדרת $d\left(\sum_{I \in \mathcal{P}_p([k])} f_I \cdot dx_I\right) = \sum_{I \in \mathcal{P}_p([k])} (df_I \wedge dx_I)$ **טענה:** תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי d לינארית.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $\omega \in \Omega^p(\mathcal{U})$ אזי $d(d\omega) = 0$

סימון: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $\Omega(\mathcal{U}) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}_+} \Omega^p(\mathcal{U})$

אופרטור המקיים את כלל לייבניץ עבור תבניות דיפרנציאליות: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי $b : \Omega(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega(\mathcal{U})$ באשר $b(\omega) \in \Omega^{p+1}(\mathcal{U})$ לכל $\omega \in \Omega^p(\mathcal{U})$ המקיימת $b(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \wedge b(\alpha_i) \wedge \alpha_{i+1} \wedge \dots \wedge \alpha_k)$ לכל $\alpha_1 \dots \alpha_k \in \mathcal{U}^*$.

טענה כלל לייבניץ: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי d מקיימת את כלל לייבניץ.

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $b : \Omega(\mathcal{U}) \rightarrow \Omega(\mathcal{U})$ לינארית המקיימת את כלל לייבניץ וכן $b(b(\omega)) = 0$ לכל $\omega \in \Omega(\mathcal{U})$ וכן $b(f) = df$ לכל $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ אזי $b = d$.

טענה: תהינה $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega \in \Omega^p(\mathcal{V})$ אזי $d(F^*\omega) = F_{d\omega}^*$.

טענה: תהינה $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega \in \Omega^p(\mathcal{V})$ אזי $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$.

סימון: תהינה $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחות יהי $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega \in \Omega^p(\mathcal{V})$ אזי $F^{-*} = (F^{-1})^*$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ ותהינה $(\mathcal{U}_1, \varphi_1), (\mathcal{U}_2, \varphi_2)$ מפות אזי $\varphi_2^*(d(\varphi_1^{-*}(\omega))) = \varphi_1^*(d(\varphi_1^{-*}(\omega)))$.

הגדרה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ אזי $d\omega \in \Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ עבורה לכל מפה (\mathcal{U}, φ) מתקיים $\varphi^{-*}(d\omega) = d(\varphi^{-*}\omega)$.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא (\mathcal{M}, φ) מפה ותהא $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ אזי $d\omega = \varphi^*(d(\varphi^{-*}\omega))$.

הערה: בקבוצה \mathbb{R}^n עצמה p -תבנית היא שקולה ל- p -תבנית דיפרנציאלית מהיות ומתקיים $T_p(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

מסקנה: יהי V מ"מ מעל \mathbb{R} באשר $\dim(V) = n$ אזי $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \det_n$.

אינטגרל: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ותהא $f \in C(\mathcal{U})$ עבורה $f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ בעלת תומך קומפקטי אזי

$$\int_{\mathcal{U}} (f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = \int_{\mathcal{U}} f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

הערה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה ויהי $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$ אזי קיימת $f \in C(\mathcal{U})$ עבורה $\omega = f \cdot \det_k$.

טענה: יהיו $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ תחומים יהי $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ דיפאומורפיזם ותהא $\omega \in \Omega^k(\mathcal{U})$ בעלת תומך קומפקטי אזי

$$\int_{\mathcal{U}} \omega = \text{sign}(\det(\mathcal{D}(T))) \cdot \int_{\mathcal{V}} T_{\omega}^*$$

תבנית נפח: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית אזי $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ עבורה $\omega_x \neq 0$ לכל $x \in \mathcal{M}$.

תבניות נפח שקולות: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית אזי תבניות נפח $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(\mathcal{M})$ עבורן קיימת $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ באשר $f > 0$

$$\omega_2 = f \cdot \omega_1$$

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי שקילות תבניות נפח על \mathcal{M} הינו יחס שקילות.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה קשירה אזי קיימות לכל היותר 2 מחלקות שקילות של תבניות נפח על \mathcal{M} .

אוריינטציה של יריעה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה קשירה אזי מחלקת שקילות של תבניות נפח על \mathcal{M} .

האוריינטציה האוקלידית הסטנדרטית: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי מחלקת השקילות של \det_n .

תבנית נפח חיובית: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית עם אוריינטציה אזי תבנית נפח $\eta \in \Omega^k(\mathcal{M})$ השייכת לאוריינטציה.

מפה משמרת אוריינטציה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית עם אוריינטציה אזי מפה (\mathcal{U}, φ) עבורה לכל η תבנית נפח חיובית על \mathcal{U}

$$\text{supp}(\eta) \subseteq \mathcal{U} \text{ מתקיים כי } (\varphi^{-1})^*(\eta) \text{ תבנית נפח חיובית על } \mathbb{R}^k.$$

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית עם אוריינטציה ותהא (\mathcal{U}, φ) מפה אזי קיימת מפה משמרת אוריינטציה (\mathcal{U}, ψ) .

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית עם אוריינטציה תהינה $(\mathcal{V}, \psi), (\mathcal{U}, \varphi)$ מפות משמרות אוריינטציה ותהא $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$

$$\text{בעלת תומך קומפקטי עבורה } \text{supp}(\omega) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \text{ אזי } \int_{\varphi(\mathcal{U})} \varphi_{\omega}^{-*} = \int_{\psi(\mathcal{V})} \psi_{\omega}^{-*}$$

אינטגרל: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית עם אוריינטציה תהא (\mathcal{U}, φ) מפה משמרת אוריינטציה ותהא $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ בעלת תומך

$$\text{קומפקטי עבורה } \text{supp}(\omega) \subseteq \mathcal{U} \text{ אזי } \int_{\mathcal{M}} \omega = \int_{\varphi(\mathcal{U})} \varphi_{\omega}^{-*}$$

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית תהא ω k -תבנית יהיו $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty, \{(\mathcal{V}_i, \psi_i)\}_{i=1}^\infty$ כיסויים של $\text{supp}(\omega)$ יהי $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$

$$\text{פירוק יחידה של } \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty \text{ ויהי } \{\eta_i\}_{i=1}^\infty \text{ פירוק יחידה של } \{(\mathcal{V}_i, \psi_i)\}_{i=1}^\infty \text{ אזי } \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{M}} (\rho_i \cdot \omega) = \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{M}} (\eta_i \cdot \omega)$$

אינטגרל: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית תהא ω k -תבנית יהי $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$ כיסוי של $\text{supp}(\omega)$ ויהי $\{\rho_i\}_{i=1}^\infty$ פירוק יחידה של

$$\int_{\mathcal{M}} \omega = \sum_{i=1}^\infty \int_{\mathcal{M}} (\rho_i \cdot \omega) \text{ אזי } \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i=1}^\infty$$

משפט גרין בשפה של תבנית: תהא $G \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\text{Vol}_{n-1}(\partial^{\text{sm}} G) < \infty$ וכן ∂G הינה C^1

למקוטעין תהא $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה באשר $\overline{G} \subseteq \mathcal{W}$ יהי N נורמל חיצוני ל- G ותהא ω 1 -תבנית על \mathcal{W} אזי $\int_{\partial G} \omega = \int_G d\omega$ באשר

$$\partial G \text{ עם אוריינטציית רגל שמאל.}$$

1-תבנית דיפרנציאלית סגורה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ עבורה $d\omega = 0$.

1-תבנית דיפרנציאלית מדויקת: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ עבורה קיימת $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ המקיימת $\omega = df$.

מסקנה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ מדויקת אזי ω סגורה.

1-תבנית דיפרנציאלית משמרת: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ עבורה לכל מסילה סגורה C^1 למקוטעין γ מתקיים

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי ω (משמרת) \iff (קיימת $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה לכל $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ מסילה C^1 למקוטעין מתקיים $\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$).

טענה: תהא $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ סגורה אזי ω משמרת.

טענה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה ותהא $\omega \in \Omega^1(\mathcal{M})$ אזי ω (מדויקת) \iff (משמרת).

מסקנה: תהא $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ (סגורה) \iff (מדויקת) \iff (משמרת).

שפה גאומטרית/קצה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\partial_g \mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$.

נקודת קצה חלקה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי $x \in \partial_g(\mathcal{M})$ עבורה קיים $\delta > 0$ וקיימת יריעה $\mathcal{N} \subseteq B_\delta(x)$ באשר $\mathcal{M} \cap B_\delta(x) \subseteq \mathcal{N}$ וקיימת $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ וקיימת פרמטריזציה טובה $r: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{N}$ עבורן $r^{-1}(x) \in \partial^{\text{sm}}(r^{-1}(\mathcal{N}))$.

יריעה בעלת קצה חלק: יריעה $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה כל $x \in \partial_g \mathcal{M}$ הינה נקודת קצה חלקה.

מסקנה: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית בעלת קצה חלק אזי $\partial_g \mathcal{M}$ יריעה $(k-1)$ -מימדית.

אוריינטציה מושרית על קצה חלק: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית בעלת קצה חלק יהי N קו־אוריינטציה ותהא $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$ תבנית נפח אזי $\omega^\partial \in \Omega^{k-1}(\mathcal{M})$ המוגדרת $\omega_x^\partial(u_1 \dots u_{k-1}) = \omega_x(N(x), u_1 \dots u_{k-1})$.

משפט סטוקס: תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k -מימדית חסומה בעלת קצה חלק ותהא $\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial_g \mathcal{M}} \omega$.