משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימת $\text{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}_n\left(A_i\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)$.

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $k\in\mathbb{N}$ קיימות $X_1\ldots X_k,Y_1\ldots Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ וקיימות $\varphi_1\ldots\varphi_k$ איזומטריות המקיימות $X=\biguplus_{i=1}^{k}X_i$ וכן $Y=\biguplus_{i=1}^{k}Y_i$ וכן $\forall j\in[k].Y_j=\varphi_j\left(X_j\right)$.

סימון: תהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חופפות בחלקים אזי $X\equiv Y$.

משפט פרדוקס בנך־טרסקי: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1,2\right\}$ ותהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\text{int}\left(X\right)\neq\varnothing$ וכן $\text{int}\left(Y\right)\neq\varnothing$ אזי $X\equiv Y$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1,2\right\}$ אזי לא קיימת $\text{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(A\uplus B\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)+\text{Vol}_n\left(B\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)$.

משפט בנך: יהי $n\in\left\{1,2\right\}$ אזי קיימת $\text{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(A\uplus B\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)+\text{Vol}_n\left(B\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)$.

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהיינה $A,B\in\mathcal{A}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{A}$.

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

σ־אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$ σ־אלגברה אזי $\mathcal{A}$ אלגברה.

σ־אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהיינה $\left\{\mathcal{A}_{\alpha}\right\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ σ־אלגבראות אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_{\alpha}$ σ־אלגברה.

σ־אלגברה נוצרת: תהא X קבוצה תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ ותהיינה $\left\{\mathcal{A}_{\alpha}\right\}_{\alpha\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל X המכילות את A אזי $\sigma\left(A\right)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_{\alpha}$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $\sigma\left(A\right)$ הינה ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את A.

σ־אלגברה בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathcal{B}\left(X\right)=\sigma\left(\left\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}\left(X\right)\mid \text{פתוחה } \mathcal{O}\right\}\right)$.

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על X.
- $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r>0\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_{+}\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$.
- תהא $Y\subseteq X$ צפופה אזי $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_{+}\right)\wedge\left(a\in Y\right)\right\}\right)$.

קבוצה G_{δ}: $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\left\{\mathcal{O}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ פתוחות המקיימות $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

קבוצה F_δ: $X \subseteq A$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סגורות המקיימות $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

מסקנה: תהא A קבוצה G_δ ותהא B קבוצה F_δ אזי $A,B\in\mathcal{B}(X)$.

טענה: הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על $\mathbb{R}^n$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{Q}\right\}\right)$.

משפט: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ותהא $C(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid f \text{ רציפה ב־} x\}$ אזי

- $C(f)\in G_\delta$.
- תהא $X\in G_\delta$ אזי קיימת f עבורה $C(f)=X$.

קבוצה דלילה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ המקיימת $\text{int}\left(\overline{A}\right)=\varnothing$.

קבוצה מקטגוריה ראשונה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ דלילות עבורן $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$.

קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ שאינה מקטגוריה ראשונה.

קבוצה שיורית: יהי X מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $A^{\mathcal{C}}$.

למה: יהי X מרחב מטרי אזי

- תהא $A\subseteq X$ דלילה ותהא $B\subseteq A$ אזי B דלילה.
- תהיינה $A_1\ldots A_n\subseteq X$ דלילות אזי $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ דלילה.
- תהא $A\subseteq X$ דלילה אזי $\overline{A}$ דלילה.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא $A\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $\text{int}(A)=\varnothing$.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות σ־אידיאל.

מסקנה: $\mathbb{Q}\notin G_\delta$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי קיימת $F\subseteq\mathbb{R}$ מקטגוריה ראשונה וקיימת $N\subseteq\mathbb{R}$ זניחה עבורה $A=F\uplus N$.

משפט בנך: במרחב המטרי $C([0,1])$ עם נורמת מקסימום הקבוצה $\{f\in C([0,1])\mid \exists x\in(0,1).f\in\mathcal{D}(x)\}$ היא מקטגוריה ראשונה.

הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבוצה בעלת תכונת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $A\subseteq X$ עבורה קיימת $G\subseteq X$ פתוחה וקיימת $Q\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A=G\triangle Q$.

משפט:תהא $A\subseteq X$ אזי (ל־A יש את תכונת בייר)$\Longleftrightarrow$(קיימת $F\subseteq X$ סגורה וקיימת $P\subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A=F\triangle P$).

מסקנה: תהא $A\subseteq X$ בעלת תכונת בייר אזי $A^{\mathcal{C}}$ בעלת תכונת בייר.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\{A\subseteq X\mid \text{בעלת תכונת בייר } A\}=\sigma\left(\{A\subseteq X\mid (\text{פתוחה } A)\vee(\text{מקטגוריה ראשונה } A)\}\right)$.

משפט: תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ נסמן $\mathcal{F}_0=\mathcal{T}\cup\{\varnothing,\Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha+1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1}=\mathcal{F}_\alpha\cup\left\{A^{\mathcal{C}}\mid A\in\mathcal{F}_\alpha\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\mid A_n\in\mathcal{F}_\alpha\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_\alpha$ אזי $\sigma(\mathcal{T})=\mathcal{F}_{\omega_1}$ כאשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא X קבוצה עבורה $|X|=\aleph$ אזי $|\sigma(X)|=\aleph$.