

**כדור פתוח:** יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $r \in \mathbb{R}$  אזי  $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$

**כדור סגור:** יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $r \in \mathbb{R}$  אזי  $\bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$

**ספירה:** יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $r \in \mathbb{R}$  אזי  $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$

**תיבה פתוחה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j < x_j < b_j\}$

**תיבה סגורה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\bar{\Pi}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j \leq x_j \leq b_j\}$

**נקודה פנימית:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $x \in M$  המקיימת  $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq M$

**פנים של קבוצה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $\text{int}(M) = \overset{\circ}{M} = \{x \in M \mid M \text{ נקודה פנימית של } x\}$

**קבוצה פתוחה:** קבוצה  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  עבורה  $M = \overset{\circ}{M}$

**נקודה חיצונית:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$  המקיימת  $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M$  אזי  $x$  נקודה חיצונית.

**נקודה מבודדת:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $x \in M$  המקיימת  $\exists r > 0. B_r(x) \cap M = \{x\}$  אזי  $x$  נקודה מבודדת.

**נקודת שפה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $x \in \mathbb{R}^n$  לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי  $x$  נקודת שפה.

**שפה של קבוצה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $\partial M = \{x \in M \mid M \text{ נקודת שפה של } x\}$

**קבוצה סגורה:** קבוצה  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  עבורה  $\partial M \subseteq M$

**סגור של קבוצה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $\bar{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$

**טענה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(x \text{ נקודה חיצונית של } M) \iff (x \text{ נקודה פנימית של } M^c)$

**מסקנה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(M \text{ פתוחה}) \iff (M^c \text{ סגורה})$

**קבוצה חסומה:** קבוצה  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  המקיימת  $\exists r > 0. M \subseteq B_r(0)$

**קבוצה קומפקטית:** קבוצה  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  סגורה וחסומה.

**טענה היינה בורל:** תהא  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ קבוצות פתוחות עבורן } A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ מתקיים } \exists B \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda). A \subseteq \bigcup_{n \in B} I_n)$

**סימון:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  אזי  $a^{(k)} = a(k)$

**גבול:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  ותהא  $L \in \mathbb{R}^n$  עבורן  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{(k)} - L\| = 0$  אזי  $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)} = L$

**הערה:** נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר  $\lim_{x \rightarrow a}$  וכן  $\lim_{x \rightarrow a}$

**משפט:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  ויהי  $b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\left( a^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b \right) \iff \left( \forall j \in [n]. a_j^{(k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} b_j \right)$

**מסקנה:** כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א מתקיימות.

**משפט קושי:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a \text{ מתכנסת}) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a^{(m)} - a^{(p)}\| < \varepsilon)$

**מסקנה:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a \text{ מתכנסת}) \iff \left( \forall j \in [n]. \forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a_j^{(m)} - a_j^{(p)}\| < \varepsilon \right)$

**משפט בולצאנו וויירשטראס:** לכל סדרה חסומה קיימת תת-סדרה מתכנסת.

**משפט:** תהא  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } a \in K^{\mathbb{N}} \text{ קיימת תת-סדרה } a^{(k_i)} \text{ המקיימת } \lim_{i \rightarrow \infty} a^{(k_i)} \in K)$

**הערה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  נחשוב על  $f$  כקטור של פונקציות  $f = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  כאשר  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$

**גבול:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ותהא  $L \in \mathbb{R}^m$  אזי

- היינה: אם  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  אזי  $\forall x \in A^{\mathbb{N}}. (x^{(k)} \rightarrow a) \implies (f(x^{(k)}) \rightarrow L)$
- קושי: אם  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  אזי  $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in A \setminus \{a\}. \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - L\| < \varepsilon$

**מסקנה:** כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

**רציפות בנקודה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  אזי  $a \in A$  עבורה  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

**סימון:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ותהא  $B \subseteq A$  אזי  $(f \text{ רציפה נקודתית עבור כל } b \in B) \iff (f \in C(B))$

**משפט:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ותהא  $B \subseteq A$  אזי  $(f \in C(b)) \iff (f_1, \dots, f_m \in C(b))$

**מסקנה:** כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

**פונקציה הומאומורפית:** תהינה  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  וכן  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  אזי  $f : A \rightarrow B$  הפיכה עבורה  $f, f^{-1}$  רציפות.

**עקומה פרמטרית:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע אזי  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$

**מסילה:** עקומה פרמטרית רציפה.

**מסילה של קו ישר:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^m$  נגדיר  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  כך  $\gamma(t) = (1-t)a + tb$

**טענה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^m$  ותהא  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a$  ל- $b$  אזי  $\gamma$  מסילה.

**סימון:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^m$  ותהא  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a$  ל- $b$  אזי  $[a, b] = \text{Im}(\gamma)$

**קבוצה קמורה:** קבוצה  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  המקיימת  $\forall a, b \in M. [a, b] \subseteq M$ .

**טענה:** יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $r \in \mathbb{R}$  אזי  $B_r(a), \overline{B}_r(a)$  קבוצות קמורות.

**קבוצה קשירה:**  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  עבורה לכל  $x, y \in M$  קיימת מסילה  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  המקיימת  $\gamma(0) = x$  וכן  $\gamma(1) = y$ .  
**תחום:** קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

**טענה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה אזי קיימת  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_{\leq \aleph_0}(\mathbb{R}^n)$  קבוצה של תחומים זרים עבורה  $\bigcup \mathcal{A} = M$ .

**תכונת דרבו:**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת לכל  $a, b \in A$  עבורן  $f(a) < f(b)$  מתקיים  $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$ .

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  קשירה ותהא  $f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  אזי  $f$  מקיימת את תכונת דרבו.

**משפט וירשטראס:** תהא  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$  קומפקטית ותהא  $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R})$  אזי קיימים  $x, y \in \mathcal{K}$  עבורם  $f(\mathcal{K}) = [f(x), f(y)]$ .

**רציפה במידה שווה (במ"ש):** תהא  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  המקיימת

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in \mathcal{M}. \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

**טענה:** תהא  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$  קומפקטית ותהא  $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R}^m)$  אזי  $f$  רציפה במ"ש.

**נורמה:** יהי  $L$  מרחב וקטורי נוצר סופית מעל  $\mathbb{R}$  אזי  $v : L \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה לכל  $a \in L$  ולכל  $\lambda \in \mathbb{R}$  מתקיים

$$\bullet (v(a) \geq 0) \wedge ((v(a) = 0) \iff (a = 0))$$

$$\bullet \text{הומוגניות: } v(\lambda a) = |\lambda| \cdot v(a)$$

$$\bullet \text{אי שיוויון המשולש (אש"מ): } v(a + b) \leq v(a) + v(b)$$

**טענה:** תהא  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמה אזי קיים  $c > 0$  עבורו  $v(x) \leq c \|x\|$   $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**טענה:** תהא  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמה אזי  $v \in C(\mathbb{R}^n)$ .

**טענה:** תהא  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמה אזי קיים  $c > 0$  עבורו  $v(x) \leq c \|x\|$   $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**נורמות שקולות:**  $v, \eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמות עבורן קיימים  $a, b > 0$  המקיימים  $a \cdot \eta \leq v \leq b \cdot \eta$ .

**טענה:** שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

**מסקנה:** תהא  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמה אזי  $\|\cdot\|, v$  שקולות.

**מסקנה:** תהיינה  $v, \rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמות ותהא  $x \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  אזי  $(\rho(x^{(k)}) \rightarrow 0) \iff (v(x^{(k)}) \rightarrow 0)$ .

**נורמת  $\ell_p$ :** עבור  $p \in \mathbb{N}_+$  נגדיר נורמה  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $\|v\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ .

**נורמת  $\ell_\infty$ :** נגדיר נורמה  $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ .

**דיפרנציאל של עקומה:** תהא  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  ויהי  $a \in (0, 1)$  אזי  $\gamma'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h}$ .

**מסקנה:** תהא  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  ויהי  $a \in (0, 1)$  אזי  $\gamma'(a) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(a) \\ \vdots \\ \gamma'_m(a) \end{pmatrix}$ .

**פונקציה דיפרנציאבילית:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה קיימת  $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  המקיימת  $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$ .

**סימון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית על  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f \in \mathcal{D}(a)$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f \in \mathcal{D}(a) \implies f \in C(a)$ .

**גרדיאנט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית אזי  $\text{grad} f(a) = [L]_{\text{st}}$ .

**סימון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית אזי  $\nabla f(a) = \text{grad} f(a)$ .

**נגזרת חלקית:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hx_i) - f(a)}{h}$ .

**הערה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $f'_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

**משפט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\nabla f(a))_i$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ .

**הערה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a))$  קיימת לכל  $i$   $\nRightarrow f \in \mathcal{D}(a)$ .

**פונקציה דיפרנציאבילית:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  עבורה קיימת  $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  המקיימת  $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $(f \in \mathcal{D}(a)) \iff (\forall i \in \{1 \dots m\}. f_i \in \mathcal{D}(a))$ .

**דיפרנציאל/יעקוביאן:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\mathcal{D}_f(a) = \begin{pmatrix} -\nabla f_1(a) \\ \vdots \\ -\nabla f_m(a) \end{pmatrix}$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $(\mathcal{D}_f(a))_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ .

**משפט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהייה  $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  ויהי  $c \in \mathbb{R}^m$  אזי

• אם  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $f \in C(a)$ .

• אם  $f, g \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $cf, f + g \in \mathcal{D}(a)$ .

•  $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \implies (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$ .

• תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  אזי  $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \implies (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$ .

**פונקציה גזירה ברציפות:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום אזי  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$  וכן  $\mathcal{D}_f \in C(\mathcal{U})$ .

**סימון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  גזירה ברציפות אזי  $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$  אזי  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U})$   $\forall i \in [m]. \forall j \in [n]$ .

**משפט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  עבורה  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U})$   $\forall i \in [m]. \forall j \in [n]$  אזי  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  אזי  $(f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)) \iff (\forall i \in [m]. \forall j \in [n]. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(\mathcal{U}))$ .

**נגזרת כיוונית:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \mathcal{D}_f(a) \cdot v$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום אזי  $(\mathcal{U}$  קשירה מסילתית)  $\iff (\mathcal{U}$  קשירה פוליגונית).

**משפט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ויהי  $c \in \mathbb{R}^m$  אזי  $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ויהי  $c \in \mathbb{R}^m$  אזי  $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$ .

**טענה:** תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  ויהי  $c \in \mathbb{R}^m$  אזי  $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \implies (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$ .

**מסקנה:** תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  ויהי  $c \in \mathbb{R}^m$  אזי  $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$ .

**סימון:** תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $i \in \{1 \dots n\}$  באשר  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  גזירה אזי  $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ .

**נגזרת מעורבת:** תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהיו  $i, j \in \{1 \dots n\}$  באשר  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  גזירה אזי  $\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_j})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ .

**הערה:** הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר  $k$  בצורה  $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ .

**משפט:** תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  יהיו  $i, j \in \{1 \dots n\}$  עבורן  $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^1(\mathcal{U})$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ .

**סימון:** יהי  $K \in \mathbb{N}^n$  אזי  $|K| = \sum_{i=1}^n K_i$  וכן  $\partial x^K = \partial x_1^{K_1} \dots \partial x_n^{K_n}$ .

**מסקנה:** יהי  $K \in \mathbb{N}^n$  תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה  $\mathcal{D}_f \in C^k(\mathcal{U})$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא  $\frac{\partial^{|K|} f}{\partial x^K}(a)$ .

**טענה:** תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  ויהי  $v \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\|Av\|_{\text{st}} \leq \|A\|_{\text{st}} \cdot \|v\|_{\text{st}}$ .

**משפט:** יהיו  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$  תחומים תהא  $a \in \mathcal{U}$  ותהייה  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$  עבורן  $f \in \mathcal{D}(a)$  וכן  $g \in \mathcal{D}(f(a))$  אזי

$\mathcal{D}_{g \circ f}(a) = \mathcal{D}_g(f(a)) \cdot \mathcal{D}_f(a)$  וכן  $g \circ f \in \mathcal{D}(a)$ .

**גרף פונקציה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid (x \in \mathcal{U}) \wedge (f(x) = y)\}$ .

**עקומות/משטחי גובה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $c \in \mathbb{R}$  אזי  $\Pi_c = \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) = c\}$ .

**משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי

$y - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i)$ .

**וקטור הנורמל לגרף בנקודה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $N_a = (-\nabla f(a), 1)$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\nabla f(a) \perp \Pi_{f(a)}$ .

**נקודת קיצון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי

• נקודת מינימום מקומי:  $a \in \mathcal{U}$  עבורה קיימת סביבה  $\mathcal{O}$  המקיימת  $\forall x \in \mathcal{O}. f(x) \geq f(a)$ .

• נקודת מקסימום מקומי:  $a \in \mathcal{U}$  עבורה קיימת סביבה  $\mathcal{O}$  המקיימת  $\forall x \in \mathcal{O}. f(x) \leq f(a)$ .

**משפט פרמה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  קיצון אזי  $\nabla f(a) = 0$ .

**נקודת קיצון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  אזי

• נקודת מינימום מקומי:  $a \in \mathcal{U}$  עבורה לכל  $i \in [m]$  מתקיים  $a$  נקודת מינימום מקומי של  $f_i$ .

• נקודת מקסימום מקומי:  $a \in \mathcal{U}$  עבורה לכל  $i \in [m]$  מתקיים  $a$  נקודת מקסימום מקומי של  $f_i$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  קיצון אזי  $\mathcal{D}_f(a) = 0$ .

**נקודה קריטית/חשודה לקיצון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  אזי  $a \in \mathcal{U}$  המקיימת  $\mathcal{D}_f(a) = 0$ .

**הגדרה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$  ויהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  נגדיר  $\frac{\partial^k f}{\partial x^V} a, b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\mathcal{D}_{(a,b)}^k f = \sum_{|V|=k} \binom{k}{V_1, \dots, V_n} \prod_{i=1}^n (a_i - b_i)^{V_i} \frac{\partial^k f}{\partial x^V}$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$  ויהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\mathcal{D}_{(a,b)}^k f = \left( \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^k$   
**משפט טיילור:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in \mathcal{U}$  תהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  עבורה  $f \in C^{k+1}(\mathcal{U})$  תהא  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$  סביבה קמורה של  $a$  ותהא  $x \in \mathcal{O}$  אזי קיים  $c \in [x, a]$  עבורו  $f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \mathcal{D}_{(x,a)}^i f(a) + \frac{1}{(k+1)!} \mathcal{D}_{(x,a)}^{k+1} f(c)$   
**הסינא:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית פעמיים אזי  $(H_f)_{i,j} = f''_{x_i, x_j}$   
**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  קריטית אזי קיים  $c \in [x, a]$  עבורו  $f(x) = f(a) + (x-a)^t H_f(c) (x-a)$

**משפט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  קריטית אזי

- $(H_f(a)) \Leftarrow$  (חיובית ממש)  $\Leftarrow$  (נקודת מינימום).
- $(H_f(a)) \Leftarrow$  (שלילית ממש)  $\Leftarrow$  (נקודת מקסימום).
- $(\det(H_f(a)) \neq 0) \wedge$  (לא אחד מהמקרים מלעיל)  $\Leftarrow$  (אינה נקודת קיצון).

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  תחום תהא  $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  קריטית אזי

- $((\det(H_f(a)) > 0) \wedge (f''_{x,x}(a) > 0)) \Leftarrow$  (נקודת מינימום).
- $((\det(H_f(a)) > 0) \wedge (f''_{x,x}(a) < 0)) \Leftarrow$  (נקודת מקסימום).
- $(\det(H_f(a)) \neq 0) \wedge$  (לא אחד מהמקרים מלעיל)  $\Leftarrow$  (אינה נקודת קיצון).

**נקודה קריטית לא מנוונת:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  אזי  $a \in \mathcal{U}$  קריטית עבורה  $\det(H_f(a)) \neq 0$

**משפט פונקציה סתומה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  תחום תהא  $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $F(a) = 0$  וכן  $F'_y(a) \neq 0$  אזי קיימים  $I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$  פתוחים עבורם  $a_1 \in I_x$  וכן  $a_2 \in I_y$  וקיימת  $f \in C^1(I_x, I_y)$  עבורה לכל  $(x, y) \in I_x \times I_y$  מתקיים  $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  תחום תהא  $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $F(a) = 0$  וכן  $F'_y(a) \neq 0$  יהיו  $I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$  פתוחים עבורם  $a_1 \in I_x$  וכן  $a_2 \in I_y$  ותהא  $f \in C^1(I_x, I_y)$  עבורה לכל  $(x, y) \in I_x \times I_y$  מתקיים  $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$  אזי  $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$  על  $I_x$

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  תחום תהא  $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $F(a) = 0$  וכן  $F'_y(a) \neq 0$  יהיו  $I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$  פתוחים עבורם  $a_1 \in I_x$  וכן  $a_2 \in I_y$  ותהא  $f \in C^1(I_x, I_y)$  עבורה לכל  $(x, y) \in I_x \times I_y$  מתקיים  $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$  אזי  $f(x) \in C^k(I_x, I_y)$

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  תחום תהא  $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $F(a) = 0$  וכן  $F'_{x_{n+1}}(a) \neq 0$  אזי קיימים  $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}, I_y \subseteq \mathbb{R}$  פתוחים עבורם לכל  $i \in [n]$  מתקיים  $a_i \in I_{x_i}$  וכן  $a_{n+1} \in I_y$  וקיימת  $f \in C^k(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, I_y)$  עבורה לכל  $(x, y) \in (\prod_{i=1}^n I_{x_i}) \times I_y$  מתקיים  $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  תחום תהא  $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $F(a) = 0$  וכן  $F'_{x_{n+1}}(a) \neq 0$  יהיו  $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}, I_y \subseteq \mathbb{R}$  פתוחים עבורם לכל  $i \in [n]$  מתקיים  $a_i \in I_{x_i}$  וכן  $a_{n+1} \in I_y$  ותהא  $f \in C^1(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, I_y)$  עבורה לכל  $(x, y) \in (\prod_{i=1}^n I_{x_i}) \times I_y$  מתקיים  $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$  על  $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$

**סימון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  תחום תהא  $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $\mathcal{D}_f(a) = \begin{pmatrix} F'_x(a) & F'_y(a) \\ m \times n & m \times m \end{pmatrix}$

**משפט פונקציה סתומה כללי:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  תחום תהא  $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $F(a) = 0$  וכן  $F'_y(a)$  הפיכה אזי קיימים  $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}, I_{y_1}, \dots, I_{y_m} \subseteq \mathbb{R}$  פתוחים עבורם לכל  $i \in [n]$  מתקיים  $a_i \in I_{x_i}$  ולכל  $j \in [m]$  מתקיים  $a_{j+n} \in I_{y_j}$  וקיימת  $f \in C^k(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, \prod_{j=1}^m I_{y_j})$  עבורה לכל  $(x, y) \in (\prod_{i=1}^n I_{x_i}) \times (\prod_{j=1}^m I_{y_j})$  מתקיים  $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  תחום תהא  $F \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $F(a) = 0$  וכן  $F'_y(a)$  הפיכה יהיו  $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}, I_{y_1}, \dots, I_{y_m} \subseteq \mathbb{R}$  פתוחים עבורם לכל  $i \in [n]$  מתקיים  $a_i \in I_{x_i}$  ולכל  $j \in [m]$  מתקיים  $a_{j+n} \in I_{y_j}$  ותהא  $f \in C^k(\prod_{i=1}^n I_{x_i}, \prod_{j=1}^m I_{y_j})$  עבורה לכל  $(x, y) \in (\prod_{i=1}^n I_{x_i}) \times (\prod_{j=1}^m I_{y_j})$  מתקיים  $(F(x, y) = 0) \iff (y = f(x))$  אזי  $\mathcal{D}_f(x) = -F'_y(x, f(x))^{-1} \cdot F'_x(x, f(x))$  על  $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in \mathcal{U}$  עבורה  $F(a) = 0$  וכן  $\nabla F(a) \neq 0$  אזי משוואת המישור המשיק למשטח  $\{F = 0\}$  הינו  $\sum_{i=1}^n F'_x_i(a) (x_i - a_i) = 0$

**דיפאומורפיזם:** יהיו  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$  הפיכה עבורה  $f^{-1} \in C^1(\mathcal{V}, \mathcal{U})$

**דיפאומורפיזם  $C^k$ :** יהיו  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{V})$  הפיכה עבורה  $f^{-1} \in C^k(\mathcal{V}, \mathcal{U})$

**משפט פונקציה הפוכה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$  עבורה  $\mathcal{D}_f(a)$  הפיכה אזי קיימת סביבה  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$  של  $a$  עבורה  $f$  דיפאומורפיזם על  $\mathcal{O}$

**מסקנה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in U$  תהא  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$  עבורה  $\mathcal{D}_f(a)$  הפיכה ותהא  $\mathcal{O} \subseteq U$  סביבה של  $a$  עבורה  $f$  דיפאומורפיזם אזי  $\mathcal{D}_{f^{-1}}(f(x)) = \mathcal{D}_f(x)^{-1}$  על  $\mathcal{O}$ .

**טענה:** יהיו  $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : U \rightarrow V$  דיפאומורפיזם אזי

•  $(A \text{ פתוחה}) \iff (f(A) \text{ פתוחה})$ .

•  $(A \text{ סגורה}) \iff (f(A) \text{ סגורה})$ .

•  $(A \text{ קומפקטית}) \iff (f(A) \text{ קומפקטית})$ .

• אם  $\partial A \subseteq U$  אזי  $\partial(f(A)) = f(\partial A)$ .

**פונקציה פתוחה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום אזי  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  המקיימת לכל  $\tilde{U} \subseteq U$  פתוחה מתקיים  $f(\tilde{U})$  פתוחה.

**משפט פונקציה פתוחה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in U$  ותהא  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$  עבורה  $\text{rank}(\mathcal{D}_f(a)) = m$  אזי קיימת סביבה  $\mathcal{O} \subseteq U$  של  $a$  עבורה  $f$  פתוחה על  $\mathcal{O}$ .

**נקודה קריטית בתנאי:** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  תהא  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$  אזי  $a \in U$  המקיימת  $g(a) = 0$  וכן  $\nabla f(a) \in \text{span}\{\nabla g_i(a)\}$ .

**משפט:** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  תהא  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$  ותהא  $a \in U$  המקיימת  $g(a) = 0$  וכן  $\{\nabla g_i(a)\}$  בת"ל וכן קיימת סביבה  $\mathcal{O} \subseteq U$  של  $a$  עבורה  $a$  קיצון בקבוצה  $\text{sols}(g) \cap \mathcal{O}$  נקודה קריטית של  $f$  בתנאי  $g = 0$ .

**פונקציית לגראנז':** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  ותהא  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$  נגדיר  $L \in C^1(U \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  כך  $L(x_1 \dots x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1 \dots x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1 \dots x_n)$ .

**מסקנה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$  תהא  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$  ותהא  $a \in U$  אזי  $a$  נקודה קריטית של  $f$  בתנאי  $g = 0 \iff (a, \lambda)$  עבורה  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  נקודה קריטית של  $L$ .

**דרגה של פונקציה:** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $a \in U$  ותהא  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$  אזי  $\text{rank}(f(a)) = \text{rank}(\mathcal{D}_f(a))$ .

**משפט:** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $a \in U$  ותהא  $f \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$  עבורה  $\text{rank}(f(x)) = k$   $\forall x \in U$  אזי קיימת סביבה  $\mathcal{O} \subseteq U$  של  $a$  קיימת  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}$  סביבה של  $f(a)$  קיימים דיפאומורפיזמים  $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  וכן  $\psi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$  וקיימת  $\mathcal{W} \subseteq \varphi(\mathcal{O})$  סביבה של  $\varphi(a)$  עבורם  $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$  על  $\mathcal{W}$ .

**הלמה של הדמר:** תהא  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  סביבה קמורה של 0 יהי  $p \geq 1$  ותהא  $f \in C^p(U, \mathbb{R})$  עבורה  $f(0) = 0$  אזי קיימת  $g \in C^{p-1}(U, \mathbb{R}^n)$  עבורה  $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g(x)$  וכן  $g(0) = \nabla f(0)$ .

**הלמה של מורס:** יהי  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהא  $f \in C^3(U, \mathbb{R})$  ותהא  $a \in U$  נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת  $\mathcal{O} \subseteq U$  סביבה של  $a$  וגם  $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$  סביבה של 0 וכן דיפאומורפיזם  $g : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  המקיים  $(f \circ g)(x) - f(a) = \sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2$ .

**תיבה סגורה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $P_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j \leq x_j \leq b_j\}$ .

**תיבה מנוונת:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  עבורם  $a_i = b_i$   $\exists i \in [n]$  אזי  $P_{a,b}$ .

**חלוקה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  לכל  $i \in [n]$  תהיינה  $\{t_i^0, \dots, t_i^{\ell_i}\}$  חלוקה של  $[a_i, b_i]$  אזי  $\{[t_i^{m_i}, t_i^{m_i+1}] \mid \forall i \in [n]. m_i \in [\ell_i - 1]\}$ .

**מידה/נפח של תיבה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $V(P) = \text{Vol}(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$ .

**טענה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  ותהא  $\{A_1, \dots, A_k\}$  חלוקה של  $P$  אזי  $\text{Vol}(P) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(A_i)$ .

**הערה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  עבורם  $P_{a,b}$  תיבה מנוונת אזי  $\text{Vol}(P_{a,b}) = 0$ .

**סכום רימן:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  תהא  $\Pi = \{A_1, \dots, A_k\}$  חלוקה ויהיו  $x^{(j)} \in A_j$  אזי  $S(f, \Pi, \{x^{(i)}\}) = \sum_{j=1}^k f(x^{(j)}) \text{Vol}(A_j)$ .

**קוטר קבוצה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $d(M) = \sup_{x, y \in M} \|x - y\|$ .

**מדד העדינות:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  ותהא  $\Pi = \{A_1, \dots, A_k\}$  חלוקה אזי  $\lambda(\Pi) = \max_{i \leq k} d(A_i)$ .

**אינטגרליות רימן:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $\int_P f(x) dx = \lim_{\lambda(\Pi) \rightarrow 0} S(f, \Pi, x^{(j)})$ .

**סימון:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרלית רימן אזי  $f \in R(P)$ .

**טענה:** תהא  $P$  תיבה ותהא  $f \in R(P)$  אזי  $f$  חסומה על  $P$ .

**סכום דרבו עליון:** תהא  $P$  תיבה תהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ותהא  $\{A_1, \dots, A_n\}$  חלוקה אזי  $\overline{S}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \sup_{P_j} (f) \text{Vol}(P_j)$ .

**סכום דרבו תחתון:** תהא  $P$  תיבה תהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ותהא  $\{A_1, \dots, A_n\}$  חלוקה אזי  $\underline{S}(f, \Pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{P_j} (f) \text{Vol}(P_j)$ .

**טענה:** תהא  $P$  תיבה תהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ותהא  $\Pi$  חלוקה ויהיו  $x^{(j)}$  נקודות מתאימות אזי  $\underline{S}(f, \Pi) \leq S(f, \Pi, \{x^{(i)}\}) \leq \overline{S}(f, \Pi)$ .

**טענה:** תהא  $P$  תיבה תהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ותהיינה  $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$  חלוקות אזי  $\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \underline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_2) \leq \overline{S}(f, \Pi_1)$ .

**טענה:** תהא  $P$  תיבה תהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ותהיינה  $\Pi_1, \Pi_2$  חלוקות אזי  $\underline{S}(f, \Pi_1) \leq \overline{S}(f, \Pi_2)$ .

**אינטגרל דרבו עליון:** תהא  $P$  תיבה ותהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה אזי  $\overline{I}(f) = \inf_{\Pi} \overline{S}(f, \Pi)$ .

**אינטגרל דרבו תחתון:** תהא  $P$  תיבה ותהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה אזי  $\underline{I}(f) = \sup_{\Pi \text{ חלוקה}} \underline{S}(f, \Pi)$

**מסקנה:** תהא  $P$  תיבה תהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ותהא  $\Pi$  חלוקה אזי  $\underline{S}(f, \Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \bar{S}(f, \Pi)$

**קריטריון דרבו:** תהא  $P$  תיבה ותהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה אזי  $(f \in R(P)) \iff (\underline{I}(f) = \bar{I}(f))$

**מסקנה:** תהא  $P$  תיבה ותהא  $f \in R(P)$  חסומה אזי  $\int_P f = \underline{I}(f) = \bar{I}(f)$

**טענה:** יהי  $a, b \in \mathbb{R}$  ויהי  $\lambda > 0$  אזי  $\text{Vol}(P_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \text{Vol}(P_{a, b})$

**טענה:** יהי  $P_1 \dots P_n$  תיבות עבורן לכל  $i \neq j$  מתקיים  $\text{int}(P_i) \cap \text{int}(P_j) = \emptyset$  וכן  $\bigcup_{i=1}^n P_i$  תיבה אזי

$$\text{Vol}(\bigcup_{i=1}^n P_i) = \sum_{i=1}^n \text{Vol}(P_i)$$

**מסקנה:** יהי  $P_1 \dots P_n$  תיבות ותהא  $P \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$  תיבה אזי  $\text{Vol}(P) \leq \sum_{i=1}^n \text{Vol}(P_i)$

**טענה:** יהי  $P_1, P_2$  תיבות אזי  $P_1 \cap P_2$  תיבה.

**הערה:** תהא  $P$  תיבה אזי  $\text{Vol}(P \setminus \text{int}(P)) = 0$

**קבוצה זניחה:**  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  עבורה לכל  $\varepsilon > 0$  קיימות תיבות  $\{P_i\}_{i=0}^\infty$  המקיימת  $E \subseteq \bigcup_{i=0}^\infty P_i$  וכן  $\sum_{i=0}^\infty \text{Vol}(P_i) < \varepsilon$

**סימון:**  $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid E \text{ זניחה}\}$

**טענה:**  $\emptyset \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ , יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\{a\} \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$

**טענה:** תהינה  $\{E_i\}_{i=0}^\infty$  זניחות אזי  $\bigcup_{i=0}^\infty E_i \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$

**טענה:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(E \text{ זניחה}) \iff (\text{לכל } \varepsilon > 0 \text{ קיימות תיבות } \{P_i\}_{i=0}^\infty \text{ המקיימת } E \subseteq \bigcup_{i=0}^\infty \text{int}(P_i) \text{ וכן } \sum_{i=0}^\infty \text{Vol}(P_i) < \varepsilon)$

**מסקנה:** תהא  $E \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$  קומפקטית אזי לכל  $\varepsilon > 0$  קיימות תיבות  $\{P_i\}_{i=0}^n$  המקיימת  $E \subseteq \bigcup_{i=0}^n \text{int}(P_i)$  וכן  $\sum_{i=0}^n \text{Vol}(P_i) < \varepsilon$

**טענה:** תהא  $E \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$  ותהא  $A \subseteq E$  אזי  $A \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$

**טענה:**  $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ , תהא  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  תיבה לא מנוונת אזי  $P \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$

**טענה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  עבורה קיימת נקודה פנימית אזי  $M \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$

**מסקנה:** תהא  $M \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$  אזי  $\text{int}(M) = \emptyset$

**טענה:** תהא  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  תיבה ותהא  $f \in C(P, \mathbb{R})$  אזי  $\Gamma_f \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{n+1})$

**מסקנה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה ותהא  $f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  אזי  $\Gamma_f \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^{n+1})$

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה אזי קיימות קוביות  $\{C_i\}_{i=0}^\infty$  בעלות אורך צלע  $2^{-e_i}$  עבור  $e_i \in \mathbb{N}$  עבורן לכל  $i \neq j$  מתקיים

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^\infty C_i \text{ וכן } \text{int}(P_i) \cap \text{int}(P_j) = \emptyset$$

**מסקנה:**  $\mathbb{S}^{n-1} \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ , קבוצת קנטור זניחה.

**תנודה של פונקציה בנקודה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $a \in A$  ותהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $\omega(f, a) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, B_\delta(a) \cap A)$

**טענה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  תהא  $a \in A$  ותהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $(f \text{ רציפה על } a) \iff (\omega(f, a) = 0)$

**למה של קנטור:** תהא  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  קומפקטית יהי  $M > 0$  ותהא  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $\forall k \in K. \omega(f, k) \leq M$

$$\forall x \in K. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \omega(f, B_\delta(x) \cap K) < \omega_0 + \varepsilon$$

**כמעט לכל:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ויהי  $\psi$  פרידיקט אזי נאמר כי " $\psi$  מתקיים כמעט על כל  $A$ " אם קיימת  $E \subseteq A$  זניחה עבורה  $\psi$  מתקיים

$$\text{לכל } E \setminus A$$

**סימון:** תהא  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  תיבה סגורה תהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ויהי  $\varepsilon > 0$  אזי  $B_{f, \varepsilon} = \{x \in P \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$

**למה:** תהא  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  תיבה סגורה תהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ויהי  $\varepsilon > 0$  אזי  $B_{f, \varepsilon}$  קומפקטית.

**למה:** תהא  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  תיבה סגורה תהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה תהא  $\Pi$  חלוקה ויהי  $k \in \mathbb{N}_+$  אזי

$$\left\{ B_{f, \frac{1}{k}} \mid A \in \Pi \mid \left( A \cap B_{f, \frac{1}{k}} \neq \emptyset \right) \wedge \left( \omega(f, A) \geq \frac{1}{2k} \right) \right\}$$

**קריטריון לבג לאינטגרליות רימן בתיבה:** תהא  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  תיבה סגורה ותהא  $f : P \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה אזי  $(f \text{ רציפה כמעט על כל } P) \iff (f \in R(P))$

**קבוצה מדידת ז'ורדן:**  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  חסומה עבורה  $\partial E$  זניחה.

**טענה:** תהינה  $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי

$$\bullet \partial E_1 \text{ סגורה}$$

$$\bullet \partial(E_1 \setminus E_2), \partial(E_1 \cup E_2), \partial(E_1 \cap E_2) \subseteq \partial E_1 \cup \partial E_2$$

**סימון:**  $J(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid E \text{ ז'ורדן}\}$

**מסקנה:** תהינה  $A, B \in J$  אזי  $A \setminus B, A \cup B, A \cap B \in J$

**פונקציית אפיון/אינדיקטור:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$  כך  $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

**טענה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $\chi_A \in C(\text{int}(A))$  וכן  $\chi_A \in C(\mathbb{R}^n \setminus A)$



**אינטגרליות רימן:** תהא  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  תיבה סגורה תהא  $A \subseteq P$  חסומה ותהא  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה  $f \cdot \chi_A \in R(P)$  אזי

$$\int_A f = \int_P f \cdot \chi_A$$

**טענה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  חסומה תהיינה  $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  תיבות סגורות עבורן  $A \subseteq P_1, P_2$  ותהא  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  אזי

- $(f \cdot \chi_A \in R(P_1)) \iff (f \cdot \chi_A \in R(P_2))$
- $\int_{P_1} f \cdot \chi_A = \int_{P_2} f \cdot \chi_A$

**מידה/נפח של תיבה:** תהא  $A \in J(\mathbb{R}^n)$  אזי  $V(A) = \text{Vol}(A) = \int_A dx$

**משפט:** תהא  $A \in J(\mathbb{R}^n)$  ותהיינה  $f, g \in R(A)$

- יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $af + bg \in R(A)$  וכן  $\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g$
- נניח כי  $f \geq 0$  אזי  $\int_A f \geq 0$
- נניח כי  $f \geq g$  אזי  $\int_A f \geq \int_A g$
- נניח כי  $m \leq f \leq M$  אזי  $m \text{Vol}(A) \leq \int_A f \leq M \text{Vol}(A)$

**טענה:** תהיינה  $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$  ותהא  $f \in R(A) \cap R(B)$  אזי  $f \in R(A \cup B)$  וכן  $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$

**מסקנה:** תהיינה  $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$  עבורן  $\text{Vol}(A \cap B) = 0$  אזי  $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$

**משפט ערך הביניים:** יהי  $A \in J(\mathbb{R}^n)$  תחום ותהא  $f \in C(A, \mathbb{R})$  אזי  $\int_A f = f(c) \text{Vol}(A)$   $\exists c \in A$

**טענה:** תהא  $A \in J(\mathbb{R}^n)$  ויהי  $f \in R(A)$  אזי  $|f| \in R(A)$  וכן  $|\int_A f| \leq \int_A |f|$

**טענה:** תהא  $A \in J(\mathbb{R}^n)$  ותהיינה  $f, g \in R(A)$  כמעט על כל  $A$  אזי  $\int_A f = \int_A g$

**משפט:** תהא  $A \in J(\mathbb{R}^n)$  אזי  $\int_{\text{int}(A)} f = \int_A f = \int_{\bar{A}} f$

**טענה:** תהיינה  $A_1 \dots A_k \in J(\mathbb{R}^n)$  אזי  $\bigcup_{i=1}^k A_i, \bigcap_{i=1}^k A_i \in J(\mathbb{R}^n)$

**מסקנה:** תהיינה  $A_1 \dots A_k \in J(\mathbb{R}^n)$  עבורן לכל  $i \neq j$  מתקיים  $\text{Vol}(A_i \cap A_j) = 0$  אזי  $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \text{Vol}(A_i)$

**טענה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $a \in \mathbb{R}^n$  אזי  $(A \in J(\mathbb{R}^n)) \iff (A + a \in J(\mathbb{R}^n))$

**מסקנה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $a \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\text{Vol}(A) = \text{Vol}(A + a)$

**משפט יחידות פונקציית נפח:** תהא  $\nu : J(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה  $\nu([0, 1]^n) = 1$  אזי  $\nu = \text{Vol}$

**טענה:** תהא  $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$  אורתוגונלית ותהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  חסומה אזי  $T(A)$  חסומה.

**מסקנה:** תהא  $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$  אורתוגונלית ותהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $T(\partial A) = \partial(T(A))$

**מסקנה:** תהא  $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$  אורתוגונלית ותהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  זניחה וחסומה אזי  $T(E)$  זניחה וחסומה.

**משפט:** תהא  $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$  אורתוגונלית ותהא  $A \in J(\mathbb{R}^n)$  אזי  $T(A) \in J(\mathbb{R}^n)$  וכן  $\text{Vol}(T(A)) = \text{Vol}(A)$

**משפט פוביני:** תהיינה  $P \subseteq \mathbb{R}^n, Q \subseteq \mathbb{R}^m$  תיבות ותהא  $f \in R(P \times Q)$  עבורה  $\iint_{P \times Q} f$  קיים אזי

$$\iint_{P \times Q} f = \int_P \int_Q f(x, y) dy dx = \int_Q \int_P f(x, y) dx dy = \int_P \int_Q f(x, y) dy dx, \int_Q \int_P f(x, y) dx dy$$

**מסקנה:** תהיינה  $P \subseteq \mathbb{R}^n, Q \subseteq \mathbb{R}^m$  תיבות ותהא  $f \in R(P \times Q)$  אזי  $\int_Q \int_P f(a, y) dy$  קיים כמעט לכל  $a \in P$

**מסקנה:** תהא  $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  חסומה תהיינה  $\varphi_1, \varphi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$  תהא  $A = \{(x, y) \in B \times \mathbb{R} \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$  ותהא  $f \in R(A)$  אזי

$$\int_A f = \int_B \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

**מסקנה:** תהא  $A \in J(\mathbb{R}^n)$  תהא  $A \subseteq \prod_{i=1}^n P_i$  תיבה אזי  $A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\}) \in J(\mathbb{R}^{n-1})$  כמעט לכל  $y \in P_n$  ובפרט

$$\text{Vol}(A) = \int_{P_n} \text{Vol}(A \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\})) dy$$

**שטח:** תהא  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  אזי  $S(D) = \iint_D dx dy$

**מסה:** תהא  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ותהא  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  צפיפות אזי  $m(D) = \iint_D \rho(x, y) dx dy$

**מומנט מסה:** תהא  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ותהא  $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי ציר  $x$ :  $M_x(D) = \iint_D y \cdot \rho(x, y) dx dy$
- מומנט מסה לפי ציר  $y$ :  $M_y(D) = \iint_D x \cdot \rho(x, y) dx dy$

**מרכז המסה:** תהא  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  אזי  $\left(\frac{M_y(D)}{m(D)}, \frac{M_x(D)}{m(D)}\right)$

**נפח:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  אזי  $V(E) = \iiint_E dx dy dz$

**מסה:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  ותהא  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  צפיפות אזי  $m(E) = \iiint_E \rho(x, y, z) dx dy dz$

**מומנט מסה:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  ותהא  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי המישור  $\{z = 0\}$ :  $M_{xy}(E) = \iiint_E z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$
- מומנט מסה לפי המישור  $\{y = 0\}$ :  $M_{xz}(E) = \iiint_E y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$
- מומנט מסה לפי המישור  $\{x = 0\}$ :  $M_{yz}(E) = \iiint_E x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$

**מרכז המסה:** תהא  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  אזי  $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xz}(E)}{m(E)}, \frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$ .

**מקבילון:** יהיו  $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\text{Par}(v_1 \dots v_n) = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid \forall i \in [n]. \alpha_i \in [0, 1]\}$ .

**טענה:** יהיו  $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$  אזי מתקיים  $\text{Vol}(\text{Par}(v_1 \dots v_n)) = \left| \det \begin{pmatrix} -v_1 & \dots & -v_n \\ \vdots & & \vdots \\ -v_n & \dots & -v_1 \end{pmatrix} \right|$ .

**תומך:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathcal{U} \mid f(x) \neq 0\}}$ .

**טענה:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי  $\varphi: A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם ותהא  $E \subseteq A$  אזי

- $(E \text{ זניחה}) \iff (\varphi(E) \text{ זניחה}).$
- $((\text{Vol}(\varphi(E)) = 0) \wedge (\overline{\varphi(E)} \subseteq B)) \iff ((\text{Vol}(E) = 0) \wedge (\overline{E} \subseteq A)).$
- $((E \text{ זורדן}) \wedge (\overline{\varphi(E)} \subseteq B)) \iff ((E \text{ זורדן}) \wedge (\overline{E} \subseteq A)).$

**מסקנה:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי  $\varphi: A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם ותהא  $f \in R(B)$  אזי  $(f \circ \varphi) |\det \mathcal{D}_\varphi| \in R(A)$ .

**טענה:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  פתוחות וחסומות יהי  $\varphi: A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם ותהא  $f \in R(B)$  אזי  $(f \circ \varphi) |\varphi'| \in R(A)$  ובפרט  $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\varphi'| dt$ .

**דיפאומורפיזם אלמנטרי:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  פתוחות וחסומות אזי  $\varphi: A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם עבורו קיימת  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $\varphi(x) = (x_1, \dots, \psi(x_i), \dots, x_n)$ .

**טענה:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי  $\varphi: A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא  $f \in R(B)$  אזי  $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| dt$ .

**טענה:** תהיינה  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהיו  $\varphi: B \rightarrow C, \psi: A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם אלמנטריים ותהא  $f \in R(A)$  אזי  $\int_C f = \int_A f((\varphi \circ \psi)(t)) |\det \mathcal{D}_{\varphi \circ \psi}(t)| dt$ .

**טענה:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי  $\varphi: A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם ויהי  $a \in A$  אזי קיימת  $\mathcal{O} \subseteq A$  סביבה של  $a$  וכן  $\psi_1 \dots \psi_m$  דיפאומורפיזם אלמנטריים עבורם  $\varphi = \psi_1 \circ \dots \circ \psi_m$  על  $\mathcal{O}$ .

**משפט:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי  $\varphi: A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם ותהא  $f \in R(B)$  אזי  $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| dt$ .

**מסקנה:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות יהי  $\varphi: A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם תהא  $E \subseteq A$  עבורה  $\overline{E} \subseteq A$  ותהא  $f \in R(\varphi(E))$  אזי  $(f \circ \varphi) |\det \mathcal{D}_\varphi| \in R(E)$  ובפרט  $\int_{\varphi(E)} f = \int_E f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| dt$ .

**משפט:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות תהא  $\varphi: A \rightarrow B$  תהיינה  $E \subseteq A, S \subseteq B$  זניחות עבורן  $A \setminus E, S \setminus B$  פתוחות וכן  $\varphi(A \setminus E) = S \setminus B$  כמו כן  $\varphi$  דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על  $A \setminus E$  ותהא  $f \in R(S)$  אזי  $(f \circ \varphi) |\det \mathcal{D}_\varphi| \in R(A \setminus E)$  ובפרט  $\int_B f = \int_{A \setminus E} f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| dt$ .

**מסקנה:** תהיינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות וחסומות תהא  $\varphi: A \rightarrow B$  בעל דיפרנציאל חסום תהיינה  $E \subseteq A, S \subseteq B$  זניחות עבורן  $A \setminus E, S \setminus B$  פתוחות וכן  $\varphi(A \setminus E) = S \setminus B$  כמו כן  $\varphi$  דיפאומורפיזם על  $A \setminus E$  ותהא  $f \in R(S)$  אזי  $(f \circ \varphi) |\det \mathcal{D}_\varphi| \in R(A)$  ובפרט  $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| dt$ .

**קואורדינטות קוטביות/פולריות:** יהי  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  אזי  $(\rho, \phi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi]$  עבורן  $x = \rho \cos(\phi)$  וכן  $y = \rho \sin(\phi)$ .

**טענה:** תהא  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי  $|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| = \rho$ .

**קואורדינטות גליליות:** יהי  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  אזי  $(\rho, \phi, \iota) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \{z\}$  עבורן  $x = \rho \cos(\phi)$  וכן  $y = \rho \sin(\phi)$ .

**טענה:** תהא  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי  $|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| = \rho$ .

**קואורדינטות כדוריות:** יהי  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  אזי  $(\rho, \phi, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$  עבורן  $x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$  וכן  $z = \rho \cos(\theta)$  וכן  $y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$ .

**טענה:** תהא  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי  $|\det \mathcal{D}_\varphi(t)| = \rho^2 \sin(\theta)$ .

**טענה:** תהא  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  ותהא  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  סיבוב  $S$  סביב ציר  $z$  בקואורדינטות גליליות אזי  $\text{Vol}(E) = 2\pi \iint_S \rho d\rho dz$ .

**מסקנה נפח גוף סיבוב:** תהיינה  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  עבורן  $f \leq g$  תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  סיבוב  $S$  סביב ציר  $x$  אזי

$$\text{Vol}(E) = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx$$

**משפט פאפוס:** תהא  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  יהי  $c \in \mathbb{R}^2$  מרכז המסה של  $S$  ותהא  $E \subseteq \mathbb{R}^3$  סיבוב  $S$  סביב ציר  $x$  אזי  $\text{Vol}(E) = 2\pi R_c \cdot \text{Vol}(S)$  באשר  $R_c$  רדיוס סיבוב  $c$ .

**מיצוי זורדן:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(E_k)_{k=1}^\infty$  סדרת קבוצות מדידות זורדן עולה עבורה  $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = E$ .

**טענה:** תהא  $E \in J(\mathbb{R}^n)$  ויהי  $(E_k)_{k=1}^\infty$  מיצוי זורדן של  $E$  אזי  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Vol}(E_k) = \text{Vol}(E)$ .

**מסקנה:** תהא  $E \in J(\mathbb{R}^n)$  יהי  $(E_k)_{k=1}^\infty$  מיצוי זורדן של  $E$  ותהא  $f \in R(E)$  אזי  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f = \int_E f$ .



**אינטגרל לא אמיתי:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  עבורם לכל  $(E_k)_{k=1}^\infty$  מיצוי ז'ורדן של  $E$  מתקיים  $\forall k \in \mathbb{N}. f \in R(E_k)$  וכן  $\int_E f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$  קיים ושווה אזי  $\int_E f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$ .

**טענה:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן  $(E_k)_{k=1}^\infty$  של  $E$  המקיימת  $\forall k \in \mathbb{N}. f \in R(E_k)$  וכן  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f$  קיים אזי  $\int_E f$  מתכנס.

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} dx = \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt \right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}$ .

**משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהינה  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  עבורן  $|f| \leq g$  וכן  $\int_E g$  מתכנס אזי  $\int_E f, \int_E |f|$  מתכנסים.  $(f \in R(A)) \iff (g \in R(A))$   $\forall A \in \mathcal{P}(E) \cap J(\mathbb{R}^n)$ .

**מסקנה:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  אזי  $(\int_E |f|) \iff (\int_E f)$  מתכנס.

**טענה:** תהא  $E \in J(\mathbb{R}^n)$  ותהא  $f \in R(E)$  אזי  $\int_A f > \frac{1}{2} \int_E |f| - \varepsilon$   $\forall \varepsilon > 0, \forall A \subseteq E$ .

**משפט:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי  $(\int_E f) \iff (\int_E |f|)$  מתכנס.

**טענה:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהינה  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  עבורן  $\int_E f, \int_E g$  מתכנסים אזי  $\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$ .

**הערה:** תהא  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה  $E$  בעלת מיצוי ז'ורדן.

**משפט:** תהינה  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחות יהי  $\varphi : A \rightarrow B$  דיפאומורפיזם ותהא  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה לכל  $E \subseteq B$  ז'ורדן וקומפקטית

מתקיים  $\int_B f = \int_A f(\varphi(t)) |\det \mathcal{D}_\varphi(t)| dt$  מתכנס אזי  $\int_B f$  וכן  $f \in R(E)$ .

**פונקציית גאמא:** יהי  $t > 0$  אזי  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ .

**טענה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

**טענה:** יהי  $t > 0$  אזי  $\Gamma(t)$  מתכנס.

**פונקציית בטא:** יהיו  $t, s > 0$  אזי  $B(t, s) = \int_0^\infty x^{t-1} (1-x)^{s-1} dx$ .

**טענה:** יהיו  $t, s > 0$  אזי  $B(t, s)$  מתכנס.

**טענה:** תהא  $f \in C([a, b] \times [c, d])$  ותהא  $t_n \in [c, d]^\mathbb{N}$  עבורה  $t_n \rightarrow \ell$  אזי  $f(x, t_n) \xrightarrow{u} f(x, \ell)$   $\forall x \in [a, b]$ .

**טענה:** תהא  $f \in C([a, b] \times [c, d])$  אזי  $\int_a^b f(x, t) dx \in C([c, d])$ .

**טענה:** תהא  $f \in C([a, b] \times [c, d])$  עבורה  $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a, b] \times [c, d])$  אזי  $\int_a^b f(x, t) dx \in C^1([c, d])$  וכן

$\frac{d}{dt} \left( \int_a^b f(x, t) dx \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$ .

**משפט:** תהא  $f \in C([a, b] \times [c, d])$  עבורה  $\frac{\partial f}{\partial t} \in C([a, b] \times [c, d])$  ותהינה  $\alpha, \beta \in C^1([c, d], [a, b])$  אזי מתקיים

$\frac{d}{dt} \left( \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx \right) = f(\beta(t), t) \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$ .

**מסקנה:** יהיו  $t, s > 0$  אזי  $B(t, s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$ .

**משפט:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\text{Vol}(B_1^n(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}$ .

**סימפלקס:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall i \in [n]. x_i \geq 0) \wedge (\sum_{i=1}^n x_i \leq 1)\}$ .

**טענה נוסחת דירכלה:** יהיו  $p_1 \dots p_n > 0$  אזי  $\int \dots \int_{\Delta_n} \left( \prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1} \right) dx_1 \dots dx_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n p_i)}$ .

**מסקנה:** יהיו  $p_1 \dots p_n > 0$  ויהיו  $\gamma_1 \dots \gamma_n > 0$  אזי  $\int \dots \int_{\substack{x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \sum x_i^{\gamma_i} \leq 1}} \prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1} (dx_1 \dots dx_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n \gamma_i} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(\frac{p_i}{\gamma_i})}{\Gamma(1 + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\gamma_i})}$ .

**טענה:** יהיו  $p_1 \dots p_n > 0$  ותהא  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה כמעט תמיד אזי

$\int \dots \int_{\Delta_n} \psi(x_1 \dots x_n) \left( \prod_{i=1}^n x_i^{p_i-1} \right) dx_1 \dots dx_n = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(p_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^n p_i)} \int_0^1 \psi(u) u^{(\sum p_i)-1} du$ .