כדור פתוח: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\left\|x-a\right\|<r\right\}$.

כדור סגור: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\left\|x-a\right\|\le r\right\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_r\left(a\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\left\|x-a\right\|=r\right\}$.

תיבה פתוחה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j<x_j<b_j\right\}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{\Pi}_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\le x_j\le b_j\right\}$.

נקודה פנימית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r\left(x\right)\subseteq M$.

פנים של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\left\{x \text{ נקודה פנימית של } M \mid x\in M\right\}=\overset{\circ}{M}=\operatorname{int}\left(M\right)$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $M=\overset{\circ}{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.B_r\left(x\right)\subseteq\mathbb{R}^n\backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r\left(x\right)\cap M=\left\{x\right\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\partial M=\left\{x \text{ נקודת שפה של } M \mid x\in M\right\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M\subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{M}=\overset{\circ}{M}\cup\partial M$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (x נקודה חיצונית של M)$\Longleftrightarrow$(x נקודה פנימית של $\mathbb{R}^n\backslash M$).

מסקנה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (M פתוחה)$\Longleftrightarrow$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.M\subseteq B_r\left(0\right)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\left\{I_n\right\}_{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$).

סימון: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{(k)}=a\left(k\right)$.

גבול: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k\to\infty}\left\|a^{(k)}-L\right\|=0$ אזי $\lim_{k\to\infty}a^{(k)}=L$.

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x\to a}$ וכן $\xrightarrow[x\to a]{}$.

משפט: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right)\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_j\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a^{(m)}-a^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a_j^{(m)}-a_j^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $a\in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_i)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty}a^{(k_i)}\in K$).

הערה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f=\left\langle f_1,\ldots,f_m\right\rangle$ כאשר $f_i:A\to\mathbb{R}$.

גבול: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ תהא $a\in\mathbb{R}^n$ ותהא $L\in\mathbb{R}^m$ אזי

- היינה: אם $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{(k)}\to a\right)\Longrightarrow\left(f\left(x^{(k)}\right)\to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A\backslash\left\{a\right\}.\left\|x-a\right\|<\delta\Longrightarrow\left\|f\left(x\right)-L\right\|<\varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in A$ עבורה $f\left(a\right)=\lim_{x\to a}f\left(x\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי (f רציפה נקודתית עבור כל $b\in B$)$\Longleftrightarrow\left(f\in C\left(B\right)\right)$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי $\left(f\in C\left(b\right)\right)\Longleftrightarrow\left(f_1,\ldots,f_m\in C\left(b\right)\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f:A\to B$ הפיכה עבורה f,f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$.

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ כך $\gamma\left(t\right)=\left(1-t\right)a+tb$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b]=\operatorname{Im}\left(\gamma\right)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a,b\in M.\left[a,b\right]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r\left(a\right),\overline{B}_r\left(a\right)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:\left[0,1\right]\to M$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\gamma\left(1\right)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_0}\left(\mathbb{R}^n\right)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\biguplus\mathcal{A}=M$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f\left(a\right)<f\left(b\right)$ מתקיים $\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]\subseteq f\left(\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ קשירה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ווירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f\left(\mathcal{K}\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\left\Vert x-y\right\Vert<\delta\Longrightarrow\left\Vert f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\Vert<\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^m\right)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $\left(\upsilon\left(a\right)\geq0\right)\wedge\left(\left(\upsilon\left(a\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(a=0\right)\right)$.
- הומוגניות: $\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon\left(a+b\right)\leq\upsilon\left(a\right)+\upsilon\left(b\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.\upsilon\left(x\right)\leq c\left\Vert x\right\Vert$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon\in C\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^n.c\left\Vert x\right\Vert\leq\upsilon\left(x\right)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\leq\upsilon\leq b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon,\left\Vert\cdot\right\Vert$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in\left(\mathbb{R}^n\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\upsilon\left(x^{(k)}\right)\to0\right)\Longleftrightarrow\left(\rho\left(x^{(k)}\right)\to0\right)$.

נורמה ℓ_p: עבור $p\in\mathbb{N}_+$ נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_p=\left(\sum_{i=1}^n\left|v_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמה ℓ_∞: נגדיר נורמה $\left\Vert\cdot\right\Vert_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\left|v_i\right|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma(a+h)-\gamma(a)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(a)\\ \vdots\\ \gamma_m'(a)\end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert\right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)\Longrightarrow f\in C\left(a\right)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\mathrm{grad}f\left(a\right)=\left[L\right]_{\mathrm{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f\left(a\right)=\mathrm{grad}f\left(a\right)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hx_i)-f(a)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $f'_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)=\left(\nabla f\left(a\right)\right)_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(a\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\left(a\right)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)\right.$ קיימת לכל $\left.i\right)\not\Longleftarrow\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left\{1\ldots m\right\}.f_i\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\mathcal{D}_f\left(a\right)=\begin{pmatrix}-\nabla f_1(a)-\\ \vdots\\ -\nabla f_m)a(-\end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_f\left(a\right)\right)_{i,j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי
- אם $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $f\in C(a)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}(a)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}(a)$.
- $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)$.
- תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$ וכן $\mathcal{D}_f\in C(\mathcal{U})$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות אזי $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$ אזי $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי $\left(f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\nabla f(a)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\mathcal{D}_f(a)\cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ קשירה מסילתית)$\Longleftrightarrow$($\mathcal{U}$ קשירה פוליגונלית).

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0)\Longleftrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)$.

טענה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)\Longrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A)\Longleftrightarrow(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)$.

סימון: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in\{1\dots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_i}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\{1\dots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהיו $i,j\in\{1\dots n\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_i},\frac{\partial f}{\partial x_j}\in C^1(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ אזי $|K|=\sum_{i=1}^n K_i$ וכן $\partial x^K=\partial x_1^{K_1}\dots\partial x_n^{K_n}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_f\in C^k(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{|K|}f}{\partial x^K}(a)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\|Av\|_{\text{st}}\le\|A\|_{\text{st}}\cdot\|v\|_{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^k$ עבורן $f\in\mathcal{D}(a)$ וכן $g\in D(f(a))$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}(a)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}(a)=\mathcal{D}_g(f(a))\cdot\mathcal{D}_f(a)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mid(x\in\mathcal{U})\wedge(f(x)=y)\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $\Pi_c=\{x\in\mathcal{U}\mid f(x)=c\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $y-f(a)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $N_a=(-\nabla f(a),1)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a)\perp\Pi_{f(a)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f(x)\ge f(a)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f(x)\le f(a)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f(a)=0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in[m]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_i.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in[m]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_i.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_f(a)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_f(a)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ נגדיר $\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^n\\|V|=k}}\binom{k}{V_1,\dots,V_n}\prod_{i=1}^n(a_i-b_i)^{V_i}\frac{\partial^k}{\partial x^V}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\left(\sum_{i=1}^n\left(a_i-b_i\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^k$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה $f\in C^{k+1}\left(a\right)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in[x,a]$ עבורו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^k\frac{1}{i!}\mathcal{D}^i_{(x,a)}f\left(a\right)+\frac{1}{(k+1)!}\mathcal{D}^{k+1}_{(x,a)}f\left(c\right)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_f\right)_{i,j}=f''_{x_i,x_j}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in[x,a]$ עבורו $f\left(x\right)=f\left(a\right)+\left(x-a\right)^t H_f\left(c\right)\left(x-a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- ($H_f\left(a\right)$ חיובית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מינימום).
- ($H_f\left(a\right)$ שלילית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)>0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)<0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_f\left(a\right)\right)\neq0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ וקיימת $f\in C^1\left(I_x,I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)\neq0$ ויהיו $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(I_x,I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f'\left(x\right)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ על I_x.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)\neq0$ ויהיו $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(I_x,I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f\left(x\right)\in C^k\left(I_x,I_y\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1}\in I_y$ וקיימת $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ ויהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1}\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי לכל $i\in[n]$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right)=-\frac{F'_{x_i}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ על $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underbrace{\mathcal{D}_f\left(a\right)}_{m\times(n+m)}=\left(\underbrace{F'_x\left(a\right)}_{m\times n},\underbrace{F'_y\left(a\right)}_{m\times m}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ וקיימת $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)$ הפיכה יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ ותהא $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $\mathcal{D}_f\left(x\right)=-F'_y\left(x,f\left(x\right)\right)^{-1}\cdot F'_x\left(x,f\left(x\right)\right)$ על $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $\nabla F\left(a\right)\neq0$ אזי משוואת המישור המשיק למשטח $\{F=0\}$ הינו $\sum_{i=1}^n F'_{x_i}\left(a\right)\left(x_i-a_i\right)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^1\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

דיפאומורפיזם C^k: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^k\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $\mathcal{D}_f\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x\right)\right)=\mathcal{D}_{f}\left(x\right)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $A\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי
- (A פתוחה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ קומפקטית).
- אם $\partial A\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\partial\left(f\left(A\right)\right)=f\left(\partial A\right)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ עבורה $\text{rank}\left(\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\right)=m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g\left(a\right)=0$ וכן $\nabla f\left(a\right)\in\text{span}\left\{\nabla g_{i}\left(a\right)\right\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g\left(a\right)=0$ וכן $\left\{\nabla g_{i}\left(a\right)\right\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\text{sols}\left(g\right)\cap\mathcal{O}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ נגדיר $L\in C^{1}\left(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^{m},\mathbb{R}\right)$ כך $L\left(x_{1}\ldots x_{n},\lambda_{1},\ldots\lambda_{m}\right)=f\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_{i}g_{i}\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\lambda\in\mathbb{R}^{m}$ עבורה $\left(a,\lambda\right)$ נקודה קריטית של L).

דרגה של פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי $\text{rank}\left(f\left(a\right)\right)=\text{rank}\left(\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ עבורה $\forall x\in\mathcal{U}.\text{rank}\left(f\left(x\right)\right)=k$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a קיימת $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של $f\left(a\right)$ קיימים דיפאומורפיזמים $\varphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n}$ וכן $\psi:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^{m}$ וקיימת $\mathcal{W}\subseteq\varphi\left(\mathcal{O}\right)$ סביבה של $\varphi\left(a\right)$ עבורם $\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)=\left(x_{1},\ldots,x_{k},0,\ldots,0\right)$ על $\mathcal{W}$.

הלמה של הדמר: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה קמורה של 0 יהי $p\geq1$ ותהא $f\in C^{p}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ עבורה $f\left(0\right)=0$ אזי קיימת $g\in C^{p-1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $g\left(0\right)=\nabla f\left(0\right)$ וכן $f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}x_{i}g\left(x\right)$.

הלמה של מורס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{3}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a וגם $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סביבה של 0 וכן דפיאומורפיזם $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{n}$ המקיים $\left(f\circ g\right)\left(x\right)-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^{k}x_{i}^{2}-\sum_{i=k+1}^{n}x_{i}^{2}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $P_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^{n}\mid\forall j\in\left[n\right].a_{j}\leq x_{j}\leq b_{j}\right\}$.

תיבה מנוונת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ עבורם $\exists i\in\left[n\right].a_{i}=b_{i}$ אזי $P_{a,b}$.

חלוקה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ לכל $i\in\left[n\right]$ תהיינה $\left\{t_{i}^{0},\ldots,t_{i}^{\ell_{i}}\right\}$ חלוקה של $\left[a_{i}.b_{i}\right]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[t_{i}^{m_{i}},t_{i}^{m_{i}+1}\right]\mid\forall i\in\left[n\right].m_{i}\in\left[\ell_{i}-1\right]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $V\left(P\right)=\text{Vol}\left(P\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(b_{i}-a_{i}\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $\left\{A_{1},\ldots,A_{k}\right\}$ חלוקה של P אזי $\text{Vol}\left(P\right)=\sum_{i=1}^{k}\text{Vol}\left(A_{i}\right)$.

הערה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ עבורם $P_{a,b}$ תיבה מנוונת אזי $\text{Vol}\left(P_{a,b}\right)=0$.

סכום רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ תהא $\Pi=\left\{A_{1},\ldots,A_{k}\right\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)}\in A_{j}$ אזי $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)=\sum_{j=1}^{k}f\left(x^{(j)}\right)\text{Vol}\left(A_{j}\right)$.

קוטר קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $d\left(M\right)=\sup_{x,y\in M}\left\Vert x-y\right\Vert$.

מדד העדינות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $\Pi=\left\{A_{1},\ldots,A_{k}\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i\leq i\leq k}d\left(A_{i}\right)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אזי $\int_{P}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\left(\Pi\right)\to0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f\in R\left(P\right)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\left\{A_{1},\ldots,A_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\overline{S}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{P_{j}}\left(f\right)\text{Vol}\left(P_{j}\right)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\left\{A_{1},\ldots,A_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\underline{S}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{P_{j}}\left(f\right)\text{Vol}\left(P_{j}\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi\right)\leq S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$ חלוקות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi_{1}\right)\leq\underline{S}\left(f,\Pi_{2}\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_{2}\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_{1}\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_{1},Π_{2} חלוקות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi_{1}\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_{2}\right)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}\left(f\right)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{S}\left(f,\Pi\right)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{S}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\overline{I}\left(f\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(P\right)\right)\iff\left(\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ חסומה אזי $\int_{P}f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\text{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^{n}\text{Vol}\left(P_{a,b}\right)$.

טענה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.

מסקנה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות ותהא $P\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\right)\le\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.

טענה: יהיו P_{1},P_{2} תיבות אזי $P_{1}\cap P_{2}$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\backslash\text{int}\left(P\right)\right)=0$.

קבוצה זניחה: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}P_{i}$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\text{זניחה }E\right\}$.

טענה: $\varnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\{ a\right\} \in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהיינה $\left\{ E_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}E_{i}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{ P_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $A\subseteq E$ אזי $A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: $\mathbb{Q}^{n}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה לא מנוונת אזי $P\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

מסקנה: תהא $M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\text{int}\left(M\right)=\varnothing$.

טענה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה ותהא $f\in C\left(P,\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_{f}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_{f}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\left\{ C_{i}\right\} _{i=0}^{\infty}$ בעלות אורך צלע $2^{-e_{i}}$ עבור $e_{i}\in\mathbb{N}$ עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_{i}$.

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, קבוצת קנטור זניחה.

תנודה של פונקציה בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי $\omega\left(f,a\right)=\lim_{\delta\to0^{+}}\omega\left(f,B_{\delta}\left(a\right)\cap A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\iff$($\omega\left(f,a\right)=0$).

למה של קנטור: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית יהי $M>0$ ותהא $f:K\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall k\in K.\omega\left(f,k\right)\le M$ אזי $\forall x\in K.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\omega\left(f,B_{\delta}\left(x\right)\cap K\right)<\omega_{0}+\varepsilon$.

כמעט לכל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E\subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A\backslash E$.

סימון: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}=\left\{ x\in P\mid\omega\left(f,x\right)\ge\varepsilon\right\}$.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}$ קומפקטית.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהי $k\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left\{ A\in\Pi\mid\left(A\cap B_{f,\frac{1}{k}}\ne\varnothing\right)\wedge\left(\omega\left(f,A\right)\ge\frac{1}{2k}\right)\right\}$ כיסוי של $B_{f,\frac{1}{k}}$.

קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\iff$($f\in R\left(P\right)$).

קבוצה מדידת ז'ורדן: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה עבורה ∂E זניחה.

טענה: תהיינה $E_{1},E_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי

- ∂E_{1} סגורה.
- $\partial\left(E_{1}\backslash E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cup E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cap E_{2}\right)\subseteq\partial E_{1}\cup\partial E_{2}$.

סימון: $J\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{ E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid\text{ז'ורדן }E\right\}$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J$ אזי $A\backslash B,A\cup B,A\cap B\in J$.

פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}:\mathbb{R}^{n}\to\left\{ 0,1\right\}$ כך $\chi_{A}\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in A\\0 & x\notin A\end{cases}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}\in C\left(\text{int}\left(A\right)\right)$ וכן $\chi_{A}\in C\left(\mathbb{R}^{n}\backslash A\right)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $A \subseteq P$ חסומה ותהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ עבורה $f \cdot \chi_A \in R(P)$ אזי $\int_A f = \int_P f \cdot \chi_A$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה תהיינה $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבות סגורות עבורן $A \subseteq P_1, P_2$ ותהא $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ אזי

- $(f \cdot \chi_A \in R(P_1)) \iff (f \cdot \chi_A \in R(P_2))$.
- $\int_{P_1} f \cdot \chi_A = \int_{P_2} f \cdot \chi_A$.

מידה/נפח של תיבה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $V(A) = \text{Vol}(A) = \int_A \mathrm{d}x$.

משפט: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהיינה $f, g \in R(A)$ אזי

- יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $af + bg \in R(A)$ וכן $\int_A (af + bg) = a \int_A f + b \int_A g$.
- נניח כי $f \geq 0$ אזי $\int_A f \geq 0$.
- נניח כי $f \geq g$ אזי $\int_A f \geq \int_A g$.
- נניח כי $m \leq f \leq M$ אזי $m\text{Vol}(A) \leq \int_A f \leq M\text{Vol}(A)$.

טענה: תהיינה $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהא $f \in R(A) \cap R(B)$ אזי $f \in R(A \cap B)$ וכן $f \in R(A \cup B)$.

מסקנה: תהיינה $A, B \in J(\mathbb{R}^n)$ עבורן $\text{Vol}(A \cap B) = 0$ אזי $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A \in J(\mathbb{R}^n)$ תחום ותהא $f \in C(A, \mathbb{R})$ אזי $\exists c \in A. \int_A f = f(c) \text{Vol}(A)$.

טענה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ ויהי $f \in R(A)$ אזי $|f| \in R(A)$ וכן $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.

טענה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ ותהיינה $f, g \in R(A)$ כמעט על כל A אזי $\int_A f = \int_A g$.

משפט: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\int_{\text{int}(A)} f = \int_A f = \int_{\overline{A}} f$.

טענה: תהיינה $A_1 \ldots A_k \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $\bigcup_{i=1}^k A_i, \bigcap_{i=1}^k A_i \in J(\mathbb{R}^n)$.

מסקנה: תהיינה $A_1 \ldots A_k \in J(\mathbb{R}^n)$ עבורן לכל $i \neq j$ מתקיים $\text{Vol}(A_i \cap A_j) = 0$ אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Vol}(A_i)$.

טענה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $(A \in J(\mathbb{R}^n)) \iff (A + a \in J(\mathbb{R}^n))$.

מסקנה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}(A) = \text{Vol}(A + a)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu : J(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu([0,1]^n) = 1$ אזי $\nu = \text{Vol}$.

טענה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ חסומה אזי $T(A)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי $T(\partial A) = \partial(T(A))$.

מסקנה: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ זניחה וחסומה אזי $T(E)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אורתוגונלית ותהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ אזי $T(A) \in J(\mathbb{R}^n)$ וכן $\text{Vol}(T(A)) = \text{Vol}(A)$.

משפט פוביני: תהיינה $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f \in R(P \times Q)$ עבורה $\iint_{P \times Q} f$ קיים אזי $\int_P \int_Q f(x,y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x, \int_Q \int_P f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ קיימים ובפרט $\iint_{P \times Q} f = \int_P \int_Q f(x,y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_Q \int_P f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהיינה $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות ותהא $f \in R(P \times Q)$ אזי $\int_Q f(a,y)\, \mathrm{d}y$ קיים כמעט לכל $a \in P$.

מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_1, \varphi_2 : B \to \mathbb{R}$ תהא $A = \{(x,y) \in B \times \mathbb{R} \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ ותהא $f \in R(A)$ אזי $\int_A f = \int_B \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $A \in J(\mathbb{R}^n)$ תהא $A \subseteq \prod_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $A \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\}\right) \in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ כמעט לכל $y \in P_n$ ובפרט $\text{Vol}(A) = \int_{P_n} \text{Vol}\left(A \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{y\}\right)\right) \mathrm{d}y$.

שטח: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $S(D) = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי $m(D) = \iint_D \rho(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מומנט מסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי ציר x: $M_x(D) = \iint_D y \cdot \rho(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- מומנט מסה לפי ציר y: $M_x(D) = \iint_D x \cdot \rho(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מרכז המסה: תהא $D \subseteq \mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_y(D)}{m(D)}, \frac{M_x(D)}{m(D)}\right)$.

נפח: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ אזי $V(E) = \iiint_E \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מסה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי $m(E) = \iiint_E \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מומנט מסה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהא $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי המישור $\{z = 0\}$: $M_{xy}(E) = \iiint_E z \cdot \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\{y = 0\}$: $M_{xz}(E) = \iiint_E y \cdot \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\{x = 0\}$: $M_{yz}(E) = \iiint_E x \cdot \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$.

מקבילון: יהיו $v_1\ldots v_n\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Par}\left(v_1\ldots v_n\right)=\left\{\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i\mid\forall i\in[n].\alpha_i\in[0,1]\right\}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_n\in\mathbb{R}^n$ אזי מתקיים $\mathrm{Vol}\left(\mathrm{Par}\left(v_1\ldots v_n\right)\right)=\left|\det\begin{pmatrix}- & v_1 & -\\ & \vdots & \\ - & v_n & -\end{pmatrix}\right|$.

תומך: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\mathrm{supp}\left(f\right)=\overline{\left\{x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)\neq0\right\}}$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $E\subseteq A$ אזי

- (E זניחה)$\Longleftarrow$($\varphi\left(E\right)$ זניחה).
- ($\left(\mathrm{Vol}\left(E\right)=0\right)\wedge\left(\overline{E}\subseteq A\right)$)$\Longleftarrow$($\left(\mathrm{Vol}\left(\varphi\left(E\right)\right)=0\right)\wedge\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)$).
- ($\left(\overline{E}\subseteq A\right)\wedge$($E$ ז'ורדן))$\Longleftarrow$($\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)\wedge$($\varphi\left(E\right)$ ז'ורדן)).

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_\varphi\right|\in R\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\varphi'\right|\in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_Bf=\int_Af\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\varphi'\right|\mathrm{d}t$.

דיפאומורפיזם אלמנטרי: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות אזי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם עבורו קיימת $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\varphi\left(x\right)=\left(x_1,\ldots,\psi\left(x_i\right),\ldots x_n\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\int_Bf=\int_Af\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B,C\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהיו $\varphi:B\to C$, $\psi:A\to B$ דיפאומורפיזמים אלמנטריים ותהא $f\in R\left(A\right)$ אזי $\int_Cf=\int_Af\left(\left(\varphi\circ\psi\right)\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi\circ\psi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ויהי $a\in A$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq A$ סביבה של a וכן $\psi_1\ldots\psi_m$ דיפאומורפיזמים אלמנטריים עבורם $\varphi=\psi_1\circ\ldots\circ\psi_m$ על $\mathcal{O}$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\int_Bf=\int_Af\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם תהא $E\subseteq A$ עבורה $\overline{E}\subseteq A$ ותהא $f\in R\left(\varphi\left(E\right)\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_\varphi\right|\in R\left(E\right)$ ובפרט $\int_{\varphi(E)}f=\int_Ef\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A\backslash E\right)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על $A\backslash E$ ותהא $f\in R\left(S\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_\varphi\right|\in R\left(A\backslash E\right)$ ובפרט $\int_Bf=\int_{A\backslash E}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A\backslash E\right)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם על $A\backslash E$ ותהא $f\in R\left(S\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_\varphi\right|\in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_Bf=\int_Af\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

קואורדינטות קוטביות/פולריות: יהי $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ אזי $(\rho,\phi)\in(0,\infty]\times[0,2\pi]$ עבורן $x=\rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי $\left|\det\mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right|=\rho$.

קואורדינטות גליליות: יהי $(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$ אזי $(\rho,\phi,\iota)\in(0,\infty]\times[0,2\pi]\times\{z\}$ עבורן $x=\rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי $\left|\det\mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right|=\rho$.

קואורדינטות כדוריות: יהי $(x,y,z)\in\mathbb{R}^2$ אזי $(\rho,\phi,\theta)\in(0,\infty]\times[0,2\pi]\times[0,\pi]$ עבורן $x=\rho\sin\left(\theta\right)\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\theta\right)\sin\left(\phi\right)$ וכן $z=\rho\cos\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי $\left|\det\mathcal{D}_\varphi\left(t\right)\right|=\rho^2\sin\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $S\subseteq\mathbb{R}^2$ ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר z בקואורדינטות גליליות אזי $\mathrm{Vol}\left(E\right)=2\pi\iint_S\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$.

מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ עבורן $f\leq g$ תהא $E\subseteq\mathbb{R}^3$ סביב S סביב ציר x אזי $\mathrm{Vol}\left(E\right)=\pi\int_a^b\left(g^2\left(x\right)-f^2\left(x\right)\right)\mathrm{d}x$.

משפט פאפוס: תהא $S\subseteq\mathbb{R}^2$ יהי $c\in\mathbb{R}^2$ מרכז המסה של S ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^3$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\mathrm{Vol}\left(E\right)=2\pi R_c\cdot\mathrm{Vol}\left(S\right)$ באשר R_c רדיוס סיבוב c.

מיצוי ז'ורדן: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\left(E_k\right)_{k=1}^\infty$ סדרת קבוצות מדידות ז'ורדן עולה עבורה $\bigcup_{k=1}^\infty E_k=E$.

טענה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ ויהי $\left(E_k\right)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E אזי $\lim_{k\to\infty}\mathrm{Vol}\left(E_k\right)=\mathrm{Vol}\left(E\right)$.

מסקנה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^n\right)$ יהי $\left(E_k\right)_{k=1}^\infty$ מיצוי ז'ורדן של E ותהא $f\in R\left(E\right)$ אזי $\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f=\int_Ef$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ עבורם לכל $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E מתקיים $\forall k\in\mathbb{N}.f\in R\left(E_{k}\right)$ וכן $\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$ קיים ושווה אזי $\int_{E}f=\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ של E המקיימת $\forall k\in\mathbb{N}.f\in R\left(E_{k}\right)$ וכן $\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$ קיים אזי $\int_{E}f$ מתכנס.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\int_{\mathbb{R}^{n}}e^{-\left\Vert x\right\Vert ^{2}}\mathrm{d}x=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^{2}}\mathrm{d}t\right)^{n}=\pi^{\frac{n}{2}}$.

משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהיינה $f,g:E\to\mathbb{R}$ עבורן $\left|f\right|\le g$ וכן $\forall A\in\mathcal{P}\left(E\right)\cap J\left(\mathbb{R}^{n}\right).\left(f\in R\left(A\right)\right)\Longleftrightarrow\left(g\in R\left(A\right)\right)$ וכן $\int_{E}g$ מתכנס אזי $\int_{E}\left|f\right|,\int_{E}f$ מתכנסים.

מסקנה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ אזי ($\int_{E}\left|f\right|$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_{E}f$ מתכנס).

טענה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $f\in R\left(E\right)$ אזי $\forall\varepsilon>0.\forall A\subseteq E.\left|\int_{A}f\right|>\frac{1}{2}\int_{E}\left|f\right|-\varepsilon$.

משפט: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי ($\int_{E}f$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_{E}\left|f\right|$ מתכנס).

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהיינה $f,g:E\to\mathbb{R}$ עבורן $\int_{E}f,\int_{E}g$ מתכנסים אזי $\int_{E}\left(f+g\right)=\int_{E}f+\int_{E}g$.

הערה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה E בעלת מיצוי ז'ורדן.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f:B\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $E\subseteq B$ ז'ורדן וקומפקטית מתקיים $f\in R\left(E\right)$ וכן $\int_{B}f$ מתכנס אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$.

פונקציית גאמא: יהי $t>0$ אזי $\Gamma\left(t\right)=\int_{0}^{\infty}x^{t-1}e^{-x}\mathrm{d}x$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\Gamma\left(n\right)=\left(n-1\right)!$.

טענה: יהי $t>0$ אזי $\Gamma\left(t\right)$ מתכנס.

פונקציית בטא: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)=\int_{0}^{\infty}x^{t-1}\left(1-x\right)^{s-1}\mathrm{d}x$.

טענה: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ ותהא $t_{n}\in\left[c,d\right]^{\mathbb{N}}$ עבורה $t_{n}\to\ell$ אזי $\forall x\in\left[a,b\right].f\left(x,t_{n}\right)\xrightarrow{u}f\left(x,\ell\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\in C\left(\left[c,d\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t}\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\in C^{1}\left(\left[c,d\right]\right)$ וכן $\frac{d}{dt}\left(\int_{a}^{b}f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\right)=\int_{a}^{b}\frac{\partial f}{\partial t}\left(x,t\right)\mathrm{d}x$.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ עבורה $\frac{\partial f}{\partial t}\in C\left(\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\right)$ ותהיינה $\alpha,\beta\in C^{1}\left(\left[c,d\right],\left[a,b\right]\right)$ אזי מתקיים $\frac{d}{dt}\left(\int_{\alpha\left(t\right)}^{\beta\left(t\right)}f\left(x,t\right)\mathrm{d}x\right)=f\left(\beta\left(t\right),t\right)\beta'\left(t\right)-f\left(\alpha\left(t\right),t\right)\alpha'\left(t\right)+\int_{\alpha\left(t\right)}^{\beta\left(t\right)}\frac{\partial f}{\partial t}\left(x,t\right)\mathrm{d}x$.

מסקנה: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)=\frac{\Gamma\left(t\right)\Gamma\left(s\right)}{\Gamma\left(t+s\right)}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\mathrm{Vol}\left(B_{1}^{n}\left(0\right)\right)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

סימפלקס: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\Delta_{n}=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}\mid\left(\forall i\in\left[n\right].x_{i}\ge0\right)\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i}\le1\right)\right\}$.

טענה נוסחת דירכלה: יהיו $p_{1}\ldots p_{n}>0$ אזי $\int\cdots\int_{\Delta_{n}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}^{p_{i}-1}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(p_{i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}p_{i}\right)}$.

מסקנה: יהיו $p_{1}\ldots p_{n}>0$ ויהיו $\gamma_{1}\ldots\gamma_{n}>0$ אזי $\int\cdots\int_{\substack{x_{1},\ldots x_{n}\ge0\\ \sum x_{i}^{\gamma_{i}}\le1}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}^{p_{i}-1}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\gamma_{i}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{p_{i}}{\gamma_{i}}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_{i}}{\gamma_{i}}\right)}$.

טענה: יהיו $p_{1}\ldots p_{n}>0$ ותהא $\psi:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד אזי $\int\cdots\int_{\Delta_{n}}\psi\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}^{p_{i}-1}\right)\mathrm{d}x_{1}\ldots\mathrm{d}x_{n}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(p_{i}\right)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}p_{i}\right)}\int_{0}^{1}\psi\left(u\right)u^{\left(\sum p_{i}\right)-1}\mathrm{d}u$.