```
(a\in\{a_1,\ldots,a_n\})\Longleftrightarrow ((a=a_1)\vee\ldots\vee(a=a_n)) מתקיים \{a_1,\ldots,a_n\} מתקיים \Sigma^*=\bigcup_{i=0}^\infty\Sigma^i אוז \Sigma^*=0 מימון: תהא \Sigma^*=\bigcup_{i=0}^\infty\Sigma^i אוז קיימת ויחידה S\subseteq \Sigma^*=0 המקיימת S\subseteq \Sigma^*=0 ותהא S\subseteq \Sigma^*=0 וכן S\subseteq \Sigma^*=0 אוז S\subseteq \Sigma^*=0 אוז S\subseteq \Sigma^*=0 וכן S\subseteq \Sigma^*=0 ותהא S\subseteq \Sigma^*=0 ות
```

 Σ אזי $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i} o\Sigma^*\mid i\in I\}$ ותהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $E=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i} o\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $E=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i} o\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $E=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i} o\Sigma^*\mid i\in I\}$ איז $E=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i} o\Sigma^*\mid i\in I\}$ איז איז $E=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i} o\Sigma^*\mid i\in I\}$ איז $E=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i} o\Sigma^*\mid E\in I\}$ איז $E=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i} o\Sigma^*\mid E\in I\}$ איז $E=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i} o\Sigma^*\mid E\in I\}$

 $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid (B\subseteq Y)\land (F$ סענה: תהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ ותהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $B\subseteq Y$ אינווריאנטה: יהי עולם $E\subseteq Y$ ותהא $E\subseteq Y$ ותהא $E\subseteq Y$ ותהא $E\subseteq Y$ אינווריאנטה אזי $E\subseteq Y$ אינווריאנטה מבנית: יהי עולם $E\subseteq Y$ ותהא $E\subseteq Y$ אינווריאנטה אזי $E\subseteq Y$ אינווריאנטה מבנית: יהי עולם $E\subseteq Y$ ותהא $E\subseteq Y$ אינווריאנטה אזי $E\subseteq Y$

 $(p\ (0)\land (\forall n\in\mathbb{N}.p\ (n)\Longrightarrow p\ (n+1)))\Longrightarrow (\forall n\in\mathbb{N}.p\ (n))$ אוי $(p\ (n))\land (p\ (n))$ מסקנה משפט האינדוקציה: תהא (a_i,\ldots,a_n) טענה על $(a_i\in B)$ מתקיים $(a_i\in B)$ מתקיים (a_i,\ldots,a_n) אוי (a_i,\ldots,a_n) על (a_i,\ldots,a_{i-1}) וכן לכל (a_i,\ldots,a_{i-1}) .

.(aימת סדרת יצירה ל־ $(a \in X_{B,F})$ אזי אזי $a \in \Sigma^*$ יהי יהי

 $X_{B,F} = igcup_{n=1}^\infty \left\{ a \in \Sigma^* \mid n$ מסקנה: $a \in \mathbb{Z}^*$ בעלת סדרת יצירה באורך

 $.\Sigma = \{\wedge,ee,\neg,\Longrightarrow,(,)\} \cup \{p_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ צולם תחשיב הפסוקים:

 $a\in \Sigma^*$ יהי אזי הפסוקים תחשיב תחשיב יהי ביטוי:

אזי $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי הגדרה: יהיו

- $\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)"$
- $.\lor (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \lor \omega_2)"$ •
- $:\Longrightarrow (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \Longrightarrow \omega_2)" \bullet$
 - $\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)" \bullet$

.WFF = $X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$:פסוק: חוקי/פסוק המוגדרות היטב/ביטוי היטב/ביטוי המוגדרות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי

 $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ עבורו $p \in \mathrm{WFF}$ יסודי:

(") ונגמר עם "(") מתחיל עם אזי $p \in \mathsf{WFF}$ יהי טענה: יהי $p \in \mathsf{WFF}$ אזי אזי ($p \in \mathsf{WFF}$ יהי

 $q_1(q_2 \notin \mathsf{WFF}$ אזי $q_1,q_2 \in \mathsf{WFF}$ מסקנה: יהיו

משפט הקריאה היחידה: יהי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה: יהי

- . פסוק אטומיlpha
- $.\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ ימים ויחידים •
- $.\alpha = (\beta \vee \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ ימים ויחידים •
- $\alpha = (\beta \Longrightarrow \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in WFF$ קיימים ויחידים
 - $\alpha = (\neg \beta)$ עבורו $\beta \in \mathsf{WFF}$ •

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי $\mathcal{O}\left(\operatorname{len}\left(\alpha\right)\right)$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Ω

הערה סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

- .¬ .1
- $.\wedge, \vee$.2
- .⇒ .3

T, true :סימון אמת

F, false :סימון שקר

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתיותו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

הגדרה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

 $\neg q$ false

true

true false

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \lor p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

 $.TT_{\circ}$ אזי טבלת האמת של $\circ \in \{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow\}$ סימון: תהא

 $v:\{p_i\} \rightarrow \{F,T\}$ השמה: פונקציה

המוגדרת $\overline{v}: \mathsf{WFF} \to \{F,T\}$ השמה אזי פונקציה השמה לפסוק: תהא השמת ערך אמת לפסוק:

- $\overline{v}(p) = v(p)$ יהי p פסוק אטומי אזי •
- $.\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$ יהי α פסוק אזי
- $.\overline{v}\left(\beta\circ\gamma\right)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\beta\right),\overline{v}\left(\gamma\right)\right)$ יהיו אזי פעולה בינארית פעולה בינארית אזי •

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=T$ עבורה עבורה אזי עבורה עבורה עבורה v השמה מספקת פסוק:

 $v \models \alpha$ אזי אזי מסופקת על ידי מסופקת מחותהא $\alpha \in \mathsf{WFF}$ השמה v השמה מסופקת על ידי

 $v \not\models \alpha$ אזי v אזי אזי מסופקת על מסופקת על ידי א מימון: תהא $\alpha \in \mathsf{WFF}$

המוגדרת Var : WFF o $\mathcal{P}\left(\{p_i\}
ight)$ המוגדרת פנסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה

- .Var $(p) = \{p\}$ יהי p פסוק אטומי אזי •
- . $Var(\neg \alpha) = Var(\alpha)$ אזי פסוק מיהי •
- . $\operatorname{Var}(\beta \circ \gamma) = \operatorname{Var}(\beta) \cup \operatorname{Var}(\gamma)$ יהיו אזי פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה β, γ יהיו •

 $\overline{v_1}(lpha)=\overline{v_2}(lpha)$ אזי $orall p\in {
m Var}(lpha)$ עבורו $lpha\in {
m WFF}$ עבורו עויהי v_1,v_2 אזי v_2 אזי v_1,v_2 אזי v_2 $.TT_{lpha}$ על ידי על את איז ניתן לייצג א $lpha\in \mathsf{WFF}$ אזי ניתן מסקנה:

 $TT=TT_{lpha}$ עבורו קיים $lpha\in WFF$ עבורה לכל טבלת אמת עבורה לכל עבורה קבוצה קבוצה קבוצה אמרכת קשרים שלמה פונקציונלית: טענה: $\{\land, \lor, \neg, \Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

. טענה: תהא K שלמה פונקציונלית עבורה עבורה אזי $\neg,\wedge,\vee\in K$ מערכת קשרים עבורה

 $v \models \alpha$ עבורו השמה v המקיימת עבורו קיימת עבורו $\alpha \in \mathsf{WFF}$

 $v \models \alpha$ טאוטולוגיה: פסוק $\alpha \in \mathsf{WFF}$ עבורו לכל השמה v מתקיים

 $\perp = \alpha$ טאוטולוגיה אזי $\alpha \in \mathsf{WFF}$ טאוטולוגיה

 $\models (\neg \alpha)$ עבורו $\alpha \in \mathsf{WFF}$ פסוק

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=\overline{v}\left(eta
ight)$ מתקיים שקולים: פסוקים $lpha,eta\in\mathsf{WFF}$ עבורם לכל השמה v

 $\alpha \equiv \beta$ שקולים אזי $\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}$ סימון: יהיו

 $.v \models lpha$ מתקיים $lpha \in \Gamma$ עבורה עבורה לכל $\Gamma \subseteq WFF$ מתקיים $lpha \in \Gamma$

 $v \models \Gamma$ אזי א איז השמה על ידי ספיקה קבוצה קבוצה ר $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ תהא

 $v \models \alpha$ מתקיים $v \models \Gamma$ מתקיים אוי איי איי איי $\alpha \in \mathsf{WFF}$ אוי $\gamma \models \alpha$ מתקיים עבורו לכל השמה v מתקיים אוי

 $\Gamma \models \alpha$ אזי מ־ר מכטית מים פסוק נובע מסוק ויהי ויהי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ אזי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$

טענה: יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$ אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \bullet$
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \bullet$
 - $.(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \bullet$
 - $(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha) \bullet$
 - $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \bullet$
 - $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \bullet$
 - $\neg (\neg \alpha) \equiv \alpha \bullet$
 - $\neg (\alpha \land \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor (\neg \beta) \bullet$
 - $\neg (\alpha \lor \beta) \equiv (\neg \alpha) \land (\neg \beta) \bullet$
 - $(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor \beta \bullet$

```
\Gamma \models (\neg \alpha) אזי \Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta) וכן ויהיו \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta עבורם \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} ויהיו \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} עבורם טענה:
                                                                                                      (\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta)) אזי \alpha, \beta \in WFF טענה: יהיו
                                                                                                     אטומי אזי פסוק פסוק פסוק: יהיו יהיו lpha, arphi \in \mathsf{WFF} יהיו
                                                                                                                                            .lpha\left[arphi/p
ight]=arphi אז lpha=p אם •
                                                                                                               lpha\left[arphi/p
ight]=lpha אזי lpha
eq p אטומי וכן lpha פסוק אטומי וכן •
                                                                                               lpha\left[arphi/p
ight]=
egeta\left[arphi/p
ight] אזי lpha=
egeta עבורו eta\in\mathsf{WFF} אם קיים
                                   \alpha [\varphi/p]=\beta [\varphi/p]\circ\gamma אם קיימים \beta,\gamma\in WFF אם קיימים פעולה בינארית פעולה בינארית \beta,\gamma\in WFF
                                                                                                     lpha\left[arphi/p
ight]\in\mathsf{WFF} אזי p\in\mathsf{Var}\left(lpha
ight) ויהי lpha,arphi\in\mathsf{WFF} אזי היו
                                                                    הצבת בסוקים בפסוק: יהיו p_1 \dots p_n ויהיו lpha, arphi_1 \dots arphi_n \in \mathsf{WFF} יהיו יהיו יהיו
                                                                                                    lpha \left[ arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight] = arphi_i אזי i \in [n] עבור lpha = p_i אם lpha = p_i
                                                                          lpha \left[ arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight] = lpha אזי אז i \in [n] לכל מכן אטומי וכן lpha 
eq p_i
                                                            lpha\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight]=\lnoteta\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight] אם קיים eta\in WFF אם קיים eta\in
                                                                           אזי \alpha=\beta\circ\gamma אזי אם קיימים פעולה בינארית או וקיימת פעולה \beta,\gamma\in \mathrm{WFF}
                                     .\alpha\left[{}^{\varphi_1/p_1}\ldots{}^{\varphi_n/p_n}\right]=\beta\left[{}^{\varphi_1/p_1}\ldots{}^{\varphi_n/p_n}\right]\circ\gamma\left[{}^{\varphi_1/p_1}\ldots{}^{\varphi_n/p_n}\right] . v\left[\overline{v}(\varphi)/p_i\right]\left(p_j\right)=\left\{\begin{smallmatrix} v(p_j) & i\neq j \\ \overline{v}(\varphi) & i=j \end{smallmatrix}\right. היי \alpha,\varphi\in\mathrm{WFF} יהיי \alpha,\varphi\in\mathrm{WFF} יהיי מותהא שמה אזי ההשמה אזי ההשמה אזי הרשמה יהיי
                                                        \overline{v}\left(lpha\left(arphi/p
ight)
ight)=\overline{v}\left[\overline{v}(arphi)/p
ight]\left(lpha
ight) השמה אזי v הטומי פסוק אטומי מענה: יהיו lpha,arphi\in\mathsf{WFF} יהי מינה פסוק אטומי ותהא
v\left[\overline{v}(arphi_1)/p_1,\ldots,\overline{v}(arphi_1)/p_1
ight](p_j)=v השמה אזי ההשמה v הטומים ותהא v פסוקים אטומים p_1\ldots p_n יהיו lpha,arphi_1\ldotsarphi_n יהיו
                    מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: יהיו יהיו lpha, arphi_1 \dots arphi_n יהיו יהיו מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: יהיו
                                                                                                            \overline{v}\left(\alpha\left[\varphi_{1}/p_{1}\ldots\varphi_{n}/p_{n}\right]\right)=\overline{v\left[\overline{v}(\varphi_{1})/p_{1},\ldots,\overline{v}(\varphi_{1})/p_{1}\right]}\left(\alpha\right)
        . טאוטולוגיה \alpha \left[ arphi_1/p_1 \dots arphi_n/p_n 
ight] אטוטולוגיה אטומים מסקנה: יהי \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathsf{WFF} יהיו יהיו יהיו
                                                                                                     \mathsf{NNF} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\land, \lor\}} וארה הנורמלית: \mathsf{NNF} = \mathsf{NNF}
                                                                                                              lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{NNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF} אזי קיים
                                                                                                                                .Conj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}} יימון:
                                                                                                                                  .DNF = X_{\mathrm{Conj},\{\vee\}} :DNF הצורה הנורמלית
                                                                                                              lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m DNF} אזי קיים אזי משפט: יהי lpha\in {
m WFF}
                                                                                                                                 Disj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\lor\}} יימון:
                                                                                                                                   .CNF = X_{\mathrm{Disj},\{\wedge\}} :CNF הצורה הנורמלית
                                                                                                              lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{CNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF} אזי קיים
                            הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.
                                                                                      N מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                      A אזי אוכחה מערכת הוכחה (\Sigma, N, A, F) אקסיומת של מערכת הוכחה
                                                                                    \Sigmaבללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                .X_{A,F} אזי המשפטים: תהא מערכת (\Sigma,N,A,F) אזי תהא
                                                                                                        \vdash \varphi אזי משפט \varphi \in Nויהי הוכחה מערכת מערכת S משפט סימון: תהא
                                            (\Sigma,N,A,F,\Gamma) אזי איי \Gamma\subseteq N מערכת הוכחה מערכת (\Sigma,N,A,F) מערכת הנחות: תהא
                                              X_{A\cup\Gamma,F} מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הנחות אזי
                                 arphi מערכת של אזי סדרת ויהי arphi\in N יכיח מערכת הוכחה מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הגדרה הוכחה:
```

 $\Gamma \vdash_{\rm c} \varphi$ יכיח אזי $\varphi \in N$ הנחות ויהי הנכחה תהיינה מערכת מערכת מערכת הוכחה הנחות ויהי $\Gamma \subseteq N$

 $\Gamma \vdash_S \varphi$ אזי $\Delta \subseteq \Gamma$ ותהא ותהא עבורה עבורה $\Delta \subseteq N$ אחזי מונוטוניות: תהא $\Delta \vdash_S \varphi$ עבורה עבורה $\Delta \vdash_S \varphi$ עבורה עבורה $\Delta \vdash_S \varphi$ אזי קיימת עבורה עבורה $\Gamma \vdash_S \varphi$ עבורה עבורה פומפקטיות: תהא $\Gamma \vdash_S \varphi$

arphiטענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי

 $.\gamma \models \alpha$ מתקיים $lpha \in \mathsf{WFF}$ למה: יהי $\gamma \in \mathsf{WFF}$ סתירה אזי לכל

 $\Gamma \models \beta$ אזי $\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ עבורם $\alpha, \beta \in \mathsf{WFF}$ ויהיו $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ עבורם.

```
מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך
```

- $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\}$ אלפבית:
 - $N = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Longrightarrow\}}$:נוסחאות:
 - :אקסיומות

$$A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$
 -

$$A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$$

$$.A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha)) -$$

 $.F = \{MP\}$ כללי היסק:

אזי HPC־טענה: יהיו lpha,eta נוסחאות ב

 $. \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \alpha) \bullet$ $. \vdash_{\mathrm{HPC}} ((\neg \alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta)) \bullet$ $. \{\neg \alpha\} \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet$ $. \{\alpha\} \vdash_{\mathrm{HPC}} \alpha \Longrightarrow \beta \vdash_{\mathrm{HPC}} (\neg \alpha) + \text{איי} \beta \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta)$.

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון ⊢ הוא במערכת HPC. הערה: בקורס זה ניתן להניח כי

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$ אזי HPC משפט הדידוקציה: תהיינה העל HPC משפט הדידוקציה: תהיינה .Ded $(\Gamma)=\{\alpha\in N\mid \Gamma\vdash\alpha\}$ אזי $\Gamma\subseteq N$ ותהא ותהא מערכת הוכחה S

 $\vdash ((\neg (\neg \alpha)) \Longrightarrow \alpha)$ אזי HPC טענה: תהא α נוסחה מעל

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

 $.\Big(\Gamma \mathrel{\mathop{\vdash}\limits_{\mathsf{HPC}}} \alpha\Big) \Longrightarrow (\Gamma \mathrel{\mathop{\models}\limits_{}} \alpha)$ אזי איר HPC משפט הנאותות: תהיינה הנחות מעל

אזי HPC אזי מעל $lpha,eta,\gamma$ נוחסאות מעל HPC למה: תהיינה הנחות מעל

$$.((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))$$

אזי HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה רהיינה Γ

$$((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \land (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)$$

 $\Gamma \not\models \alpha$ המקיימת S נוסחה מעל עבורה קיימת מעל קבוצת הנחות אזי Γ אזי אזי הוכחה מערכת תהא מערכת הנחות מעל אזי Γ סענה: תהא מערכת הוכחה α ותהיינה β הנחות מעל β אזי ווהיינה β הנחות מעל β המקיימת β המקיימת מערכת הוכחה מערכת הוכחה מעל β . $\left(\Gamma \vdash_S (\neg \alpha)\right) \land \left(\Gamma \vdash_S \alpha\right)$ טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ עקבית) אזי (לכל $\Gamma \supseteq \Delta \subseteq \Gamma$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מעל מערכת הנחה אז אי Γ קבוצת הנחות עקבית מערכת הנחה מערכת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה אז Γ $\Gamma = \Delta$ מתקיים $\Gamma \subseteq \Delta$ ממקיימת S מעל

 $.lpha\in\Gamma$ אזי אזי HPC אזי הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי אזי הנחות עקבית מקסימלית מעל אזי $\Gamma\vdash\alpha$

 $(\alpha \in \Gamma) \lor (\neg \alpha \in \Gamma)$ אזי (HPC איזי מקסימלית מעל אינ מקסימלית מעל מקסימלית מעל מקסימלית מעל איזי (חבצת הנחות עקבית מקסימלית מעל

אזי HPC אזי מעל הנחות עקבית מקסימלית מעל אורC אזי מקסימלית עקבית הנחות עקבית הנחות עקבית הנחות עקבית חדר אזי α, β

$$(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \iff ((\neg \alpha \in \Gamma) \lor (\beta \in \Gamma))$$

אזי Γ ספיקה. אזי HPC טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית עקבית

 $\Gamma\subseteq \Delta$ אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי הנחות עקבית מקסימלית Δ עבורה Γ

. ספיקה Γ אזי HPC טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית הנחות סענה:

מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ עקבית) מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי ($\Gamma \models \alpha$) משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא ותהא α נוסחה מעל

 $(\Gamma dashlpha) \Longleftrightarrow (\Gamma dashlpha)$ אזי איר HPC מסקנה: תהיינה הנחות מעל HPC ותהא ותהא ותהא הנחות מעל

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי אי (Γ ספיקה) (לכל Γ \subseteq Δ סופית Δ ספיקה).

.Ass
$$(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \to \{F,T\} \mid v \models \Gamma\}$$
 אזי $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ תהא

 $\{p_i\} o \{F,T\}$ טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\} o \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על

```
כך arphi_G:E	o {
m WFF} אזי אוי (v,u)\in E חח"ע ויהיו f:V	o {
m WFF} תהא מכוון תהא
                                                                                                          .\varphi_G((v,u)) = "f(v) \Longrightarrow f(u)"
           . (סענה: יהי G) ענה: יהי G ספיקה) על מכוון ותהא איז (G) על אזי G ספיקה וותהא איז (G) טענה: יהי G
                    .(סופי G' סופי G' סופי G' סופי G' הינו G הינו G הינו G הינו G מסקנה: יהי G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי
                      .(סטענה: סטופי G' סופי G' סופי G' סופי G' הינו G' בריע) אזי G' הינו G' הינו G' סטענה: ארף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי
                           K=\operatorname{Ass}\left(\Gamma
ight) המקיימת \Gamma\subseteq\operatorname{WFF} המקיימת א עבורה K\subseteq\left\{ p_{i}
ight\} 
ightarrow\left\{ F,T
ight\} המקיימת
                                                                                                                                  טענה: Ø גדירה.
                                                                                                                . גדירה \{p_i\} \rightarrow \{F,T\} גדירה טענה
                                                                                                              . גדירה \{v\} השמה \{v\} גדירה לכל
                                                                                   טענה: קיימת K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) שאינה גדירה.
                                                                          K_{\text{finite}} = \left\{ v \in \{p_i\} \to \{F, T\} \mid \left| v^{-1} \left( \{T\} \right) \right| < \aleph_0 \right\} סימון:
                                                                                                                      .טענה גדירה K_{\mathrm{finite}} טענה
K=\mathrm{Ass}\,(\Gamma) סופית המקיימת סופי. קבוצה איימת עבורה קיימת עבורה איימת K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) סופית המקיימת אדירה באופן סופי.
                                                                                            משפט: תהא K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) התב"ש
                                                                                                                . גזירה וכו K^{\mathcal{C}} גדירה K
                                                                                                                   . גדירה באופן סופיK ullet
                                                                                                           . גדירה על ידי פסוק יחיד K
                      \{c_i\in\Sigma\mid i\in\mathbb{N}\},\{R_{n,i}\subseteq\Sigma^n\mid i,n\in\mathbb{N}\},\{f_{n,i}\subseteq\Sigma^n	o\Sigma\mid i,n\in\mathbb{N}\}\} מילון: יהי \Sigma אלפבית אזי
                                                                                           C מילון אזי (C,R,F) מילון: יהי
                                                                                             R סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי
                                                                                        F מילון אזי (C,R,F) סימני פונקציה במילון: יהי
                                                                    מילון סופי של סימנים. \Sigma אלפבית אזי מילון \sigma בעל מספר סופי של סימנים.
                                                                             מילון יחסי: יהי \Sigma אלפבית אזי מילון \sigma חסר סימני פונקציה.
               \{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}, \{"(",")"\}, \{\neg,\lor,\land,\Longrightarrow\}, \{\forall,\exists\},\sigma\} מילון אזי \sigma מילון אזי \Sigma אלפבית ויהי לוגיקה מסדר ראשון: יהי
                                                                                              \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} משתנים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                               סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: {"(",")"}.
                                                                                 \{\neg,\lor,\land,\Longrightarrow\} קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                                        כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: {∃,∀}.
                                                  .בה. \sigma בה אזי המילון אזי המילון לוגיקה מסדר האשון המילון בה. בה.
                                                              X_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i|i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}|i,n\in\mathbb{N}\}} שמות עצם מעל מילון: יהי \sigma מילון אזי
                               משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי \sigma מילון ויהי שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה לשמות עצם:
                                                                                                                                  .משתנה t
                                                                                                                              .סימן קבוע t
                                                t=f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight) עבורם t_{1}\dots t_{n} ושמות עצם f_{i,n} ושמות סימן פונקציה ullet
                                                                                       אזי \alpha \in \sigma אזי משתנה ותהא \sigma מילון יהי \sigma מילון יהי
                                                                                                                      \forall (\alpha, x) = \forall x \alpha •
```

. הינה קומפקטית $\{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

 $X_{\{R_{n,i}(t_1...t_n)|(i,n\in\mathbb{N})\land(u_2),t_1...t_n)\},\{\land,\lor,\neg,\Longrightarrow,\forall,\exists\}}$ משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא

. נוסחה אטומית lpha

 $\exists (\alpha, x) = \exists x \alpha$ •

- $\alpha = "(\neg \beta)$ " עבורה β עבורה נוסחה β
- $\alpha = (\beta \circ \gamma)$ עבורן β, γ וכן פעולה בולינארית β, γ וכן נוסחאות α

 $\{R_{n,i}\left(t_1\dots t_n
ight)\mid (i,n\in\mathbb{N})\land ($ נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי ויהי $t_1\dots t_n\}$ שמות עצם

 $\alpha = "Qxeta"$ עבורם Q עבורם Q וכן משתנה Q וכן משתנה Q וכן משתנה Q וכן משתנה Q

```
כך FV : \{t\mid\sigma שם עצם במילון שt\}	o\mathcal{P}\left(\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}
ight) כד כגדיר הופשי בשם עצם: נגדיר
                                                                                                                         FV(c)=\varnothing יהי קבוע אזי סימן סימן c\in\sigma יהי
                                                                                                                          . \mathrm{FV} \left( x \right) = \left\{ x \right\} יהי x \in \sigma משתנה אזי
                                                     \operatorname{FV}(f(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \operatorname{FV}(t_i) איי איי פונקציה איי f \in \sigma ייהיו שמות עצם ויהי t_1 \dots t_n
                                                                 כך FV : \{arphi \mid \sigma \mid \sigma נוסחה במילון arphi \} 	o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}\right) כך כך
                                                          \mathrm{FV}(R(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \mathrm{FV}(t_i) אזי יחס אזי אינ ויהי R \in \sigma שמות עצם ויהי שמות ע
                                                                                                                         FV(\neg \varphi) = FV(\varphi) אזי (וסחה \varphi נוסחה \varphi נוסחה \varphi
                                                            \mathsf{FV}\left(\varphi\circ\psi\right)=\mathsf{FV}\left(\varphi\right)\cup\mathsf{FV}\left(\psi\right) אזי אזי פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה •
                                                                        .\mathrm{FV}\left(Qx\varphi\right)=\mathrm{FV}\left(\varphi\right)\backslash\left\{ x\right\} אזי כמת Qויהי משתנה xיהי משתנה \varphiיהי נוסחה •
                                                                                                                          \mathrm{FV}\left(\varphi\right)=\varnothing עבורה עבורה: נוסחה סגורה:
                                                                          הערה סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות
                                                                                                                                                                         .∀,∃ .1
                                                                                                                                                                            .¬ .2
                                                                                                                                                                         .\land,\lor .3
F:\{f_{n,i}\}	o (D^n	o D) וכן n\in\mathbb{N} לכל R:\{R_{n,i}\}	o D^n וכן C:\{c_i\}	o D ותהא ותהא D
eq\varnothing מבנה עבור מילון: יהי \sigma מילון יהי
                                                                                                                  (D, C(c_0), \dots, R(R_{1,0}), \dots, f(f_{0,0}) \dots) איי
                                                                                                         D אזי \sigma מבנה על \sigma מבנה מהינה \sigma מילון ויהי
                                                                                        D^M=D אזי אזי מילון ויהי D מבנה על \sigma בעל תחום D אזי מילון ויהי
                      (C(c_0),\ldots,R(R_{2,0}),\ldots,f(f_{0,0})) אזי מבנה: יהי \sigma מילון ויהי M מבנה על \sigma מילון על ידי מבנה: יהי \sigma מילון ויהי
                                          f_{n,i}^M=F\left(f_{n,i}
ight) וכן R_{n,i}^M=R\left(R_{n,i}
ight) וכן אזי c_i^M=C\left(c_i
ight) אזי \sigma אזי מבנה על \sigma אזי מילון ויהי \sigma מילון ויהי
                                                                                     v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}	o D^M אזי מבנה על מבנה M מילון ויהי מילון יהי
                                                                           השמה v יהי ותהא השמה ערך לשם עצם: יהי \sigma מילון יהי מבנה על מבנה מילון יהי מילון יהי
                                                                                                                       .\overline{v}\left(c_{i}
ight)=c_{i}^{M} יהי c_{i}\in\sigma סימן קבוע אזי c_{i}\in\sigma
                                                                                                                       \overline{v}(x_i) = v(x_i) יהי x_i \in \sigma משתנה אזי x_i \in \sigma
                                    \overline{v}\left(f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight)
ight)=f^{M}\left(\overline{v}\left(t_{1}
ight)\dots\overline{v}\left(t_{n}
ight)
ight) יהיו שמות עצם ויהי f\in\sigma סימן פונקציה אזי t_{1}\dots t_{n}
```

 $orall x \in \mathsf{FV}\left(t
ight).v_1\left(x
ight) = v_2\left(x
ight)$ שם עצם עבורו t שם עצם תהיינה v_1,v_2 משפט משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה $.\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t)$ אזי

> השמה אזי נגדיר איזי ויהי $d\in D^M$ מבנה איזי יהי a משתנה ויהי a משתנה על a מבנה על מבנה על השמה מתוקנת: יהי a $v\left[\frac{d}{x_{j}}\right]\left(x_{i}\right) = \begin{cases} v(x_{i}) & i \neq j \\ d & \text{else} \end{cases}$

ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על השמה v השמה אזי לנוסחה: יהי σ

- $.(\overline{v}\left(R\left(t_{1}\ldots t_{n}
 ight))=T)\Longleftrightarrow\left((\overline{v}\left(t_{1}
 ight),\ldots,\overline{v}\left(t_{n}
 ight))\in R^{M}
 ight)$ יהיו שמות עצם ויהי $R\in\sigma$ סימן יחס אזי סימן יחס אזי
 - $.\overline{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\overline{v}(\alpha))$ אזי (וסחה α נוסחה α
 - $.\overline{v}\left(lpha\circeta
 ight)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(lpha
 ight),\overline{v}\left(eta
 ight)
 ight)$ אזי קשר בינארי אזי קשר נוסחאות ויהי lpha,eta
 - $.(\overline{v}\left(\exists x\varphi\right)=T)\Longleftrightarrow\left(\exists d\in D^{M}\left(\overline{v\left[d/x\right]}\left(\varphi\right)=T\right)\right)$. (מסחה אזי $.(\overline{v}\left(\forall x\varphi\right)=T)\Longleftrightarrow\left(\forall d\in D^{M}\left(\overline{v\left[d/x\right]}\left(\varphi\right)=T\right)\right)$. תהא φ נוסחה אזי \bullet

 $orall x\in \mathsf{FV}\left(t
ight).v_1\left(x
ight)=v_2\left(x
ight)$ משפט התלות הסופית: יהי $\overset{.}{\sigma}$ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1,v_2 השמות ותהא $.\overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi)$ אזי

 $.\overline{v}\left(arphi
ight)=T$ מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי נוסחה מבנה: יהי M מבנה מבנה נוסחה ספיקה במבנה:

 $M,v\models arphi$ אזי M מבנה על מילון σ תהא תהא σ וותהא σ נוסחה ספיקה ב־M מבנה על מילון

 $M,v \models arphi$ מבנה ותהא v השמה עבורם $M,v \models arphi$ מילון תהא σ מילון תהא σ נוסחה יהי מילון מבנה ותהא σ

 $\overline{v}\left(arphi
ight)=T$ מתקיים מתקיים עבורה לכל T עבורה לכל עבורה לכל σ מתקיים תהא v מתקיים תהא σ מתקיים מתקיים עבורה לכל מתקיים ת $M,v\models\Gamma$ אאי אילון מבנה על מילון σ תהא σ השמה ותהא σ קבוצת נוסחאות ספיקה ב־

 $M,v\models arphi$ מילח עבורם v והשמה שנים מבנה M השמה עבורם מילון אזי נוסחה מילון אי

```
\Gamma \models \varphi אזי \varphi מודל של t
                                                               \{arphi\} \stackrel{t}{\models} \psi וכן \{\psi\} \stackrel{t}{\models} \varphi עבורן \varphi, \psi עבורן ותהא v השמה v מילון ותהא מילון ותהא יהי \sigma מילון ותהא יהי
                                .arphi מבנה על \sigma ולכל \sigma השמה מתקיים עבורה לכל \sigma עבורה לכל \sigma עבורה לכל \sigma אזי נוסחה \sigma מילון אזי נוסחה \sigma עבורה לכל
                                                                                                                                                            \stackrel{\iota}{\models} \varphi אזי \sigmaיתקפה היהי נוסחה \varphi מילון ותהא \sigmaיהי יהי סימון: יהי
                                                           M,v\models arphi מבנה: יהי מתקיים ממלון אזי נוסחה arphi עבורה לכל ממקיים מתקיים ממנה: מוסחה ממנה: מוסחה מיטחה מחלים מיטחה ממנה: יהי
                                                                                                                   M \models \varphi אזי M מבנה על מילון \sigma ותהא \sigma נוסחה נכונה ב־M אזי \sigma
                                                                                                              M\models arphi עבורו M עבורו \sigma מילון תהא \sigma נוסחה אזי מבנה \sigma
                            M\models arphi מתקיים arphi\in \Gamma עבורה לכל עבורה נוסחאות מבנה על מילון מילון מבנה על מילון מבנה מבנה: יהי
                                                                                               M\models\Gamma אזי M מבנה על מילון \sigma ותהא ותהא \Gamma קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי מבנה על
                                                                                                     M\models arphi עבורו קיים מבנה M עבורו מילון אזי נוסחה arphi עבור קיים מבנה M
\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi אזי \varphi אזי \sigma מתקיים כי M מתקיים לימון: יהי \sigma מילון תהא \sigma נוסחה עבורה לכל עבורה לכל \sigma
                                                                                              \{arphi\}\stackrel{v}{\models}\psi וכן \{\psi\}\stackrel{v}{\models}arphi עבורן arphi,\psi עבורן אזי מילון מילון מילון אזי נוסחאות arphi,\psi
                                                                    arphi מתקיים M מתקיים מבנה על מבנה לכל עבורה עבורה מילון אזי נוסחה מילון אזי נוסחה מבנה על מבנה על מילון אזי נוסחה מילון אוויים מילון 
                                                                            .FV (arphi)=arphi עבורה arphi עבורה מילון אזי נוסחה arphi
                                                                               . \left(\Gamma \stackrel{t}{\models} \varphi\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi\right) טענה: יהי \sigma מילון תהא \Gamma קבוצת פסוקים ותהא \varphi נוסחה מילון יהי \sigma
                                                  \Gamma = \Gamma מילון תהא \Gamma = \Gamma קבוצת נוסחאות ותהא \varphi נוסחה אזי וועהא \Gamma = \Gamma הינה \Gamma מילון תהא \Gamma סענה: יהי \sigma מילון תהא יהי
                                                                              . (\varphi\Longleftrightarrow\psi))\Longleftrightarrow(סענה: יהי \sigma מילון ותהיינה \varphi,\psi נוסחאות אזי (\varphi,\psi הון היינה \sigma יהי מילון ותהיינה מילון ותהיינה אזי (\varphi,\psi
                                              .arphi^orall=orall x_1orall x_2\dotsorall x_narphi אזי איזי הי א הסגור האוניברסלי: יהי \sigma מילון ותהא מילון ותהא עבורה עבורה אוניברסלי: יהי מילון ותהא
                                                          .arphi^\exists=\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_narphi אזי איזי היישי: יהי \sigma מילון ותהא arphi נוסחה עבורה arphi נוסחה עבורה
                                                                                                                         .\Gamma^{orall}=\left\{arphi^{orall}\midarphi\in\Gamma
ight\} יהי \sigma מילון ותהא \Gamma קבוצת נוסחאות אזי מילון יהי \sigma
                                                                                             (M\models\varphi)לשנה: יהי \sigma מילון תהא \varphi נוסחה ויהי M מבנה אזי (\varphi^{\forall} ספיק ב־\sigma
                                                          .igg(\Gamma\stackrel{v}{\models}arphiigg) \Longleftrightarrow igg(\Gamma^orall\stackrel{v}{\models}arphi^orall איי נוסחא ותהא arphi נוסחאות ותהא arphi מילון תהא \sigma מילון ויהיו G:D^M \to D^N מבנים מעל \sigma איי מילון ויהיו \sigma מילון ויהיו \sigma מילון ויהיו מורפיזם בין מבנים: יהי
                                                                                                                                                            G\left(c^{M}
ight)=c^{N} מתקיים c\in\sigma לכל סימן קבוע
                                  G\left(f^{M}\left(a_{1}\ldots a_{n}
ight)
ight)=f^{N}\left(G\left(a_{1}
ight)\ldots G\left(a_{n}
ight)
ight) מתקיים a_{1}\ldots a_{n}\in D^{M} ולכל f\in\sigma ולכל סימן פונקציה f\in\sigma
                        .((a_1\dots a_n)\in R^M)\Longleftrightarrow ((G(a_1)\dots G(a_n))\in R^N) מתקיים a_1\dots a_n\in D^M ולכל R\in\sigma ולכל סימן יחס
                                                                  Mל מ־M מילון איז מבנים איזומורפיים: יהי \sigma מילון איז מבנים M,N מעל מעל מילון איז מילון איז מבנים איזומורפיים: יהי
                                                         M,N מבנים איזומורפיים מעל \sigma ויהי \sigma פסוק אזי מבנים M,N מבנים מבנים מעל מילון יהי
                                  .= איחס בעזרת ונסמן את ונסמן וול\mathrm{Id}^M=\mathrm{Id}_M נגדיר ונסמן את היחס בעזרת בעזרת שיוויון וויסמן איז לכל מבנה וויסמן איז לכל מבנה מילון איז מילון בעל אחס שיוויון
                                                                                                               הערה: אלא אם כו נאמר אחרת מכאו והלאה כל המילונים הם חסרי שיוויוו.
                                                                                                                                       אזי משתנה x משתנה אזי רהיו r,s יהיו משתנה אזי משתנה אזי
```

(M,v) כי מתקיים כי Γ מתקיים לים מילון תהא של השמה תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה לכל σ מילון תהא σ השמה תהא σ

משתנה אזי אמות עצם בנוסחה: תהא φ נוסחה יהי r שמות עצם בנוסחה:

 $s\left[r/x
ight]=f\left(t_1\left[r/x
ight]\ldots t_n\left[r/x
ight]
ight)$ אם $s=f\left(t_1\ldots t_n
ight)$ אם •

 $s\left[r/x
ight]=s$ אם s סימן קבוע אזי s=s אם $s\left[r/x
ight]=r$ אזי s=x

s[r/x]=s משתנה אזי s
eq x ם

```
.arphi\left[ {^{r}\!/x} 
ight] = R\left( {t_1}\left[ {^{r}\!/x} 
ight] \ldots t_n\left[ {^{r}\!/x} 
ight] 
ight) אם arphi = R\left( {t_1} \ldots t_n 
ight) אם arphi
```

$$.arphi\left[r/x
ight]=
eg\left(lpha\left[r/x
ight]
ight)$$
 אזי $arphi=
eglpha$ אם $arphi=$

$$.arphi\left[r/x
ight]=lpha\left[r/x
ight]\circeta\left[r/x
ight]$$
 אם $arphi=lpha\circeta$ אם $arphi$

$$.arphi\left[r/x
ight]=orall xlpha$$
 אמ $arphi=orall xlpha$ או •

$$\varphi[r/x] = \exists x \alpha$$
 אזי $\varphi = \exists x \alpha$ אם •

$$.arphi\left[r/x
ight]=orall y\left(lpha\left[r/x
ight]
ight)$$
 אם $arphi=orall y\left(lpha\left[r/x
ight]
ight)$ אז באשר $arphi=arphi$

$$.arphi\left[r/x
ight]=\exists y\left(lpha\left[r/x
ight]
ight)$$
 אז אז $arphi=\exists ylpha$ באשר $arphi=\exists ylpha$

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא arphi נוסחה ויהי x משתנה אזי

$$.r$$
 אזי שם עצם $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight)$ אזי שם עצם •

$$lpha$$
אזי שם עצם r באשר אוי שם עצם אזי שה פרעבה בי $arphi$

$$.\beta$$
ב וכן ב־ α הבבה הופשי חופשי r שם עצם אזי שם $\varphi=\alpha\circ\beta$ אם •

$$.r$$
עצם שם אזי ב־ φ אזי חופשי או אינו מופיע או אינו $\varphi = \forall y \alpha$ • •

$$.r$$
 שם עצם אזי ב־ φ אזי חופשי או אינו מופיע או $\varphi=\exists y\alpha$ אס •

$$y\notin \mathrm{FV}\left(r
ight)$$
 וכן $lpha=\forall ylpha$ וכן אזי שם עצם אזי שם עצם אזי אזי $x\in \mathrm{FV}\left(arphi
ight)$ וכן $\varphi=\forall ylpha$

$$y\notin \mathrm{FV}\left(r
ight)$$
 וכן $lpha$ ה בה חופשי להצבה באשר אזי שם עצם אזי אזי אזי אזי פוכן $arphi=\exists ylpha$

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f:\{$ ווסחאות $\} o \mathcal{P}\left(\{x_i\}
ight)$ כך

$$.f\left(arphi
ight) =arphi$$
 אזי $arphi =R\left(t_{1}\ldots t_{n}
ight)$ אם •

$$.f\left(\varphi\right)=f\left(\alpha\right)$$
אזי $\varphi=\neg\alpha$ אם •

$$.f\left(\varphi\right)=f\left(\alpha\right)\cup f\left(\beta\right)$$
 אזי $\varphi=\alpha\circ\beta$ אם •

$$f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$$
 אזי $\varphi = \forall x \alpha$ אם φ

$$f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$$
 אזי $\varphi = \exists y \alpha$ אם •

עבור חדש עבור איז ($y \in \mathrm{FV}(r)$ לכל (φ כל האצבה בי φ למה: תהא שם עצם איז שם עצם איז שם עצם איז ($y \in \mathrm{FV}(r)$ למה: תהא עבור $y \in \mathrm{FV}(r)$ שם עצם איז ($y \in \mathrm{FV}(r)$ שם עבור חדש עבור עבור $y \in \mathrm{FV}(r)$ שם עצם איז ($y \in \mathrm{FV}(r)$ ($y \in \mathrm{FV}(r)$)

 $v\left[\overline{v}(r)/x
ight](y)=\left\{egin{array}{ll} v(y) & x
eq y \ \overline{v}(r) & ext{else} \end{array}
ight.$ היי s שם עצם אזי נגדיר השמה s יהי s שם עצם איי נגדיר השמה s יהי s שם עצם איי נגדיר השמה איי נגדיר השמה איי משתנה ויהי

 $.\overline{v}\left(s\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(s
ight)$ אזי שם עצם איז משתנה ויהי x משתנה יהי שם עצם איזי משתנה ויהי

 $.\overline{v}\left(arphi\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(arphi
ight)$ אזי arphi אזי arphi נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־arphi אזי arphi נוסחה יהי משתנה ויהי

 $\overline{v}(\varphi) = \overline{v\left[v(x)/y
ight]}\left(arphi\left[y/x
ight]
ight)$ אזי משתנה ויהי y משתנה ויהי y משתנה מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי ע משתנה אשר אינו מופיע ב־ φ אזי

$$.(\exists x\varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi [y/x])) \bullet$$

$$.(\forall x\varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi[y/x])) \bullet$$

 $X_{\{arphi\}}$ נוסחה חסרת כמתים יאפר: אורה הנורמלית יוסחה PNF: אופרה הצורה הנורמלית

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי (Q בצורת PNF) (קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן α משתנים וכן בצורת (קיימת בצורת φ). ($\varphi=Q_1x_1\dots Q_nx_n\alpha$

טענה: תהיינה ψ,ψ נוסחאות אזי

$$(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)) \bullet$$

$$(\exists x (\varphi \lor \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \lor (\exists x \psi)) \bullet$$

$$((\forall x\varphi) \lor \psi) \equiv^t (\forall x (\varphi \lor \psi))$$
 אזי $x \notin FV(\psi)$ תהא

$$((\exists x\varphi) \land \psi) \equiv^t (\exists x (\varphi \land \psi))$$
 אזי $x \notin FV(\psi)$ תהא

$$(\neg (\forall x\varphi)) \equiv^t (\exists x (\neg \varphi)) \bullet$$

$$(\neg (\exists x\varphi)) \equiv^t (\forall x (\neg \varphi)) \bullet$$

 $arphi \equiv^t lpha$ עבורה PNF בצורת נוסחה אזי קיימת נוסחה אזי קיימת נוסחה עבורה עבורה פשפט:

 $arphi=orall x_1\ldotsorall x_n\alpha$ המקיימת FV $(lpha)=\{x_1\ldots x_n\}$ הסרת כמתים באשר המקיימת קיימת עבורו קיימת נוסחה lpha חסרת כמתים באשר המקיימת FV $(lpha)=\{x_1\ldots\exists x_n\alpha$ המקיימת עבורו קיימת נוסחה lpha חסרת כמתים באשר המקיימת פסוק lpha עבורו קיימת נוסחה lpha חסרת כמתים באשר המקיימת פסוק lpha המקיימת מחסרת כמתים באשר המחסרת במתים באשר המקיימת מחסרת במתים באשר המחסרת כמתים באשר המחסרת במתים במחסרת במחסרת במתים במחסרת במתים במחסרת במתים במחסרת במחסרת במחסרת במתים במחסרת במחסרת

 $(\sigma \cup \{c\})$ ספיקה מעל φ ($\sigma \cup \{c\}$) ספיקה מעל סימן קבוע אזי סימן קבוע σ אזי σ ויהי סימן קבוע σ ויהי סימן קבוע

 $\sigma\cup\{f\}$ סטענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ אזי $\forall y_n (arphi [f(y_1...y_n)/x]))$ ספיק מעל $\forall y_1 ... \forall y_n \exists x arphi$ ספיק מעל מילון φ אזי $\forall y_n \exists x arphi$ באשר f פונקציה n־מקומית).

 $\operatorname{sk}(\varphi)$ א (פּפיק) עבורו σ' עבורו σ' מעל מילון σ ומחזיר פסוק אוניברסלי מעל מילון σ' עבורו (א המקבל נוסחה פעל מילון אוניברסלי מעל מילון ספיק).

.sk (arphi) מילון מוגדר מעליו המינימלי המילון המינימלי מעליו ותהא סקולמיזציה למילון: יהי מילון ותהא

המקיים WFF מעל FOLWFF המקבל נוסחה חסרת משתנים וכמתים φ ומחזיר פסוק המקבל נוסחה הסרת הענה: קיים אלגוריתם

- α ספיק) ספיק).
- .(טאוטולוגיה) מקפה) φ תקפה φ

 $v\left(p_{i}
ight)=$ כך WFF למה: תהא lpha נוסחה חסרת משתנים וכמתים המורכבת מהנוסחאות האטומיות $lpha_{1}\ldotslpha_{k}$ נגדיר השמה של $(M \models \varphi) \iff (\overline{v} (\text{FOLWFF} (\varphi)) = T)$ אזי $(M \models \alpha_i)$

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה M מילון אזי מבנה σ יהי מבנה מבנה מבנה

- $lpha^M=a$ לכל lpha=a קיים שם עצם סגור lpha=a
 - $lpha^M
 eq eta^M$ יהיו אזי שמות עצם שונים איי lpha, eta

. בן־מנייה מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ויהי M מבנה הרברנד של σ אזי מסקנה:

 $D^M = \{ \varphi \mid \sigma$ ם משתנים ב־ס חסר משתנים כי ניתן לכתוב לכתוב כי ניתן לכתוב מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב

 σ על M על מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן בעל מימן מסקנה: מסקנה

 $v\left(x_{i}
ight)=t_{i}$ אזי השמה עבורה σ ותהא מעלה: יהי M מבנה הרברנד מעל

- $.\overline{v}\left(r
 ight)=r\left[{}^{t_{1}}\!/x_{1},\ldots,{}^{t_{n}}\!/x_{n}
 ight]$ אזי $\mathrm{FV}\left(r
 ight)=\left\{x_{1}\ldots x_{n}
 ight\}$ שם עצם באשר r יהי \bullet
- $(M,v\models\varphi)\Longleftrightarrow (M\models\varphi\,[t_1/x_1,\ldots,t_n/x_n])$ אזי FV $(\varphi)=\{x_1\ldots x_n\}$ נוסחה באשר
 - . עבורו g עבורו g טפיקה) פפיקה ספיקה) פפיקה אזי (קיים שם עצם סגור שם עצם סגור g עבורו g
- . תקפה) $\varphi[s/x]$ עבורו s עבור g עבור (קיים שם עצם סגור g עבורו g עבור g תקפה).
 - . תהא φ נוסחה אזי ($\varphi[s/x]$ ספיקה) שם עצם סגור s מתקיים כי $\forall x \varphi$ ספיקה).
- . תקפה) $\varphi\left[s/x
 ight]$ מתקיים כי $\forall x \varphi$ מתקיים כי $\forall x \varphi$ תקפה) פחה עבורה $\varphi\left[s/x
 ight]$ תקפה).

משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי (φ ספיק) מילון ויהי σ מילון ויהי משפט הרברנד:

אזי FV $(arphi)=\{x_1\dots x_n\}$ מופעי בסיס: תהא arphi נוסחה חסרת כמתים באשר

.GroundInstance $(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma}$ GroundInstance (φ) אזי אוניברסליים אוניברסליים Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי

 Γ טענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים חסרי כמתים אזי (Γ ספיקה) ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- . ספיקה Γ
- ספיקה במבנה הרברנד. Γ
- .ספיקה GroundInstance (Γ)
- ספיקה במבנה הרברנד. GroundInstance (Γ)

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון תהא קבוצת נוחסאות ותהא σ נוסחה אזי

- . (מ ספיקה) לכל $\Delta \subseteq \Delta$ סופית Δ ספיקה). (מ ספיקה) לכל לכל $\Delta \subseteq \Delta$ סופית עבורה $C \models \varphi$ (קיימת $\Delta \subseteq \Delta$ סופית עבורה $C \models \varphi$).
- $\Delta \models \varphi$ סופית עבורה $\Delta \subseteq \Gamma$ (קיימת $\Delta \models \varphi$).

(x,y) משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\{E(\cdot,\cdot)\}$ המקיימת מעלנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות מעל מענה: יהיו עבורם $t_1 \dots t_n$ משפט: יהי σ מילון בעל קבוע תהא φ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי ($\exists x \varphi$) תקפה שמות עצם סגורים φ נוסחה ללא כמתים מעל תקפה). $\varphi\left[t_{1}/x\right]\vee\ldots\vee\varphi\left[t_{n}/x\right]$

 $a\in D^H$ עבורו עבורו לכל עבורו לכל עבור עבור אזי מבנה t עבורו אזי מבנה מילון אזי מבנה מעל σ עבורו לכל

 $|M| = |D^M|$ אזי σ אזי ויהי σ מילון ויהי σ מילון יהי

arphi בו M משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה מעל σ אזי (קיים מבנה לכל היותר בן־מנייה משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי ספיקה). משפט לוונהיים־סקולם העולה: יהי σ מילון יהי M מבנה בן־מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ באשר σ ספיקה ב־M אזי לכל עוצמה M'אינסופית eta קיים מבנה M' מעוצמה κ עבורו ϕ ספיקה ב

 $(|M|=\kappa)\Longleftrightarrow (M\models\Gamma)$ מסקנה: יהי σ מילון ותהא א עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות מסקנה: יהי σ מילון ותהא

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

.VALID = $\{\langle \sigma, \varphi \rangle \mid (\sigma \text{ tionn } \varphi) \wedge (\sigma, \varphi) \}$ שימון:

 $ext{.VALID} \in \mathcal{RE}$ משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי σ מילון אזי

.HALT \leq_m VALID משפט צ'רץ'־טיורינג:

.VALID $\notin \mathcal{R}$ מסקנה:

בעזרת $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ את ניתן לרצף אזי האם צבועה צבע שלהם וכן 1 וכן 1 בעלי צלע מאורך $R_1 \dots R_n$ יהיו יהיו יהיו הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

עבורה $f:\mathbb{N}^2 o [n]$ אזי $R:[n]^2 imes \{ ext{left, right, above, below}\} o \{ ext{yes, no}\}$ אוזי $n\in\mathbb{N}_+$ יהי הריצוף: יהי

- $R\left(f\left(rac{n}{m}
 ight),f\left(rac{n-1}{m}
 ight),\mathrm{left}
 ight)=$ yes מתקיים מתקיים $n\in\mathbb{N}_{+}$ ולכל
 - $.R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n+1\\m\end{smallmatrix}\right),\mathrm{right}\right)=\mathrm{yes}$ מתקיים $m,n\in\mathbb{N}$ לכל
- $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n\\m+1\end{smallmatrix}\right),\text{above}\right)= ext{yes}$ מתקיים $n\in\mathbb{N}_+$ ולכל $m,n\in\mathbb{N}$
 - $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n\\m-1\end{smallmatrix}\right),\mathsf{below}\right)=\mathsf{yes}$ מתקיים $n\in\mathbb{N}$ ולכל $m\in\mathbb{N}_{+}$

.TILING = $\{(n,R,f)\mid R$ סימון: $\{f\}$ פתרון לבעיית הריצוף עבור

.VALID \leq_m TILING :משפט

מסקנה: $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$.

יחס דו־מקומי חס דו־מקומי מילון אזי הייס מילון אזי הייס דו־מקומי יחס מילון אזי יהי σ

- $\forall x (E(x,x))$ רפלקסיבי:
- $\forall x \forall y (E(x,y) \Longrightarrow E(y,x))$ סימטרי:
- $\forall x \forall y \forall z ((E(x,y) \land E(y,z)) \Longrightarrow E(x,z)) :$ טרנזיטיבי:
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
 ight)
 ight) \Longrightarrow E\left(f\left(x_1 \ldots x_n
 ight), f\left(y_1 \ldots y_n
 ight)
 ight)
 ight)$ פימן פונקציה מתקיים $f \in \sigma$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\left(igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
 ight)\right) \Longrightarrow \left(R\left(x_1 \ldots x_n\right) \Longleftrightarrow R\left(y_1 \ldots y_n\right)\right)\right)$ סימן יחס מתקיים שליים לכל ס

הערה: בהינתן מילון עם שיוויון σ ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן σ_E את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

מעל σ_E מעל מבנה איז מבנה על σ מבנה על σ מם שיוויון ויהי מילון מחלקות מילון מחלקות מילון מילון

- $.f^{M'}\left([a_1]_E\,,\ldots,[a_n]_E
 ight)=\left[f^M\,(a_1\ldots a_n)
 ight]_E$ מתקיים של פונקציה לכל סימן פונקציה $f\in\sigma$
 - $R^{M'}\left([a_1]_E,\ldots,[a_n]_E
 ight)\Longleftrightarrow R^M\left(a_1\ldots a_n
 ight)$ מתקיים $R\in\sigma$ לכל סימן יחס

arphiסימני היחס החלפת שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא arphi נוסחה מעל מילון עם שיוויון σ באשר באשר החלפת שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא arphi נוסחה מעל מילון עם שיוויון ביחס קונגרואנציה $.arphi_E=arphi\left[E/=
ight]\wedge\left(n$ יחס שקילות יחס קונגרואנציה ביחס ליEיחס קונגרואנציה ביחס לEיחס קונגרואנציה ביחס ליEיחס קונגרואנציה ביחס ליEיחס קונגרואנציה ביחס לי

 $v_E:\{x_i\} o D^{M_E}$ נוסחה מעל מילון σ עם שיוויון יהי M מבנה מעל σ ותהא σ ותהא עוסחה מעל מילון עם שיוויון יהי $(M_E, v_E \models \varphi_E) \iff (M, v \models \varphi)$ אזי $v_E(x_i) = [v(x_i)]_E$

 σ' מעל מילון עם שיוויון ϕ ומחזיר נוסחה שיוויון באשר ψ מעל מילון מילון מילון מילון σ מעל מילון באשר שיוויון באשר שיוויון מעל מילון מילו ψ עבורו (φ ספיק) ספיק), עבורו

 Γ_E ספיקה) ספיקה (ספיקה) עם שיוויון אזי Γ ספיקה) משפט: תהא Γ

 Δ משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון עם שיוויון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי (Γ ספיקה) שיוויון תהא σ סופית σ

עבורו $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$ אזי מבנה $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$ עבורו יהי מילון

- $c_1^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = 1$ וכן $c_0^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = 0$ וכן $D^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = \mathbb{N}$
 - $.f_{+}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\left(a,b\right)=a+b$ •

 - $.f_{\times}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a,b) = a \times b \bullet$ $.\left((a,b) \in R_{>}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}\right) \Longleftrightarrow (a > b) \bullet$

 $\mathsf{AT} = \{lpha \mid (\mathcal{M}_\mathbb{N} \models lpha) \land (\mathsf{FV}(lpha) = \varnothing)\}$ אזי $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ פסוקים נכונים אריתמטית: יהי מילון $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$ מודל לא סטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$ אזי מבנה $M\models$ וכן אינו איזומורפי ל־ $|D^M|>leph_0$ אזי אזי שענה: יהי מודל לא סטדנרטי של מודל מודל אזי יהי

.Gen : $\frac{\alpha}{\forall x \alpha}$ נוסחה אזי מילון ותהא α מילון יהי כלל ג'ן: יהי

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי σ מילון אזי

- $\Sigma = \sigma$:אלפבית
- $N=X_{\{t\mid$ שם עצם $t\},\{\lnot,\Longrightarrow,orall\}}$:נוסחאות:
 - :אקסיומות
 - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$ -

$$A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$$

$$A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$$

- $A_4 = ((orall x lpha) \Longrightarrow lpha [t/x])$ יהי אזי חופשי להצבה במקום x ב־מ
 - $A_5 = ((\forall x (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow (\forall x \beta)))$ אזי $x \notin FV(\alpha)$ יהי
 - $.F = \{ MP, Gen \}$ כללי היסק:

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

 $\left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$ אזי או HC משפט הנאותות: יהי σ מילון תהיינה Γ הנחות מעל ותהא הנאותות: יהי σ

 $\alpha \in \mathrm{VFF}$ טענה: יהי $\alpha \in \mathrm{VFF}$ פסוק באשר $\alpha \in \mathrm{VFF}$ וכן $\alpha \in \mathrm{VFF}$ ויהיו $\alpha \in \mathrm{VFF}$ ויהיו $\alpha \in \mathrm{VFF}$ פסוק באשר $\alpha \in \mathrm{VFF}$ וכן בהוכחה לא הופעל כלל Gen משפט הדידוקציה: תהיינה $\alpha \in \mathrm{VFF}$ הנחות מעל HC ותהיינה α, β וותהיינה α, β וותחיינה α, β וותהיינה α, β וותהיינה α, β וותהיינה α, β וותחיינה α, β וותחיינ

. $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \Longrightarrow \beta)$ על משתנה חופשי ב־ α אזי אזי ($\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \Longrightarrow \beta)$ אזי החופשי ב- $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \Longrightarrow \beta)$ וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה: תהיינה $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \bowtie \beta)$ וכן בהוכחות מעל אזי רוען משפט הדיכוטומיה: בחינה חופשי משפט הדיכוטומיה: היינה $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \bowtie \beta)$ וכן בהוכחות מעל משפט הדיכוטומיה: תהיינה $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \bowtie \beta)$ וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה: בחינה של החופשי ב- $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \bowtie \beta)$ וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה: ב- $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \bowtie \beta)$ וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה: ב- $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} (\alpha \bowtie \beta)$ וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה: $\Gamma \vdash_{\mathrm{HC}} \beta$ אזי α משתנה חופשי ב- α אזי α הופעל כלל Gen לא הופעל כלל σ מעל σ מעל σ מעל σ מעל מתקיים σ מעל מתקיים σ מילונים באשר σ מילונים באשר σ אזי קבוצת נוסחאות σ שלמה: יהיו σ , מילונים באשר σ מילונים באשר

 $(\varphi \in \Gamma) \vee (\neg \varphi \in \Gamma)$

 $eg \forall x \varphi \in \Gamma$ פסוק וכן $eg \forall x \varphi$ באשר $eg \Rightarrow \forall x \varphi$ פסוק וכן אזי קבוצת נוסחאות עבורה לכל נוסחה $eg \Rightarrow \forall x \varphi$ פסוק וכן $.
eg arphi \left[{c/x}
ight] \in \Gamma$ מתקיים שקיים סימן קבוע קבוע סימן

 $\Gamma\subseteq \Delta$ המקיימת ביים מעל σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\sigma\subseteq \Sigma$ וקיימת אזי קיים מילון ותהא σ מילון ותהא

 $\Gamma \cup \{ \neg \varphi \, [c/x] \}$ איי קבוע איי $\sigma \in \sigma$ ויהי $\sigma \notin \sigma$ ויהי הי $\sigma \notin \sigma$ נוסחה באשר יהי באשר פסוק וכן $\sigma \in \sigma$ מילון תהא עקבית תהא $\sigma \in \sigma$ נוסחה באשר יהי פסוק וכן $\sigma \in \sigma$ $\sigma \cup \{c\}$ עקבית מעל

 $\Gamma\subset \Delta$ משפט הנקין: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\sigma\subset \Sigma$ וקיימת של עקבית את תכונת הנקין עבורה σ עבורה תכונת הנקיים את תכונת המקיימת הבי Σ עקבית של מעל $\sigma\subseteq\Sigma$ וקיים מילון עקבית עקבית עקבית ההיים יהי $\sigma\subseteq\Sigma$ עקבית אזי קיים מילון ותהא $\Gamma \subset \Delta$

עבורו σ עבור מעל ההרברנד מלו המקיימת את תכונת המקיימת שלמה מקבית עבות עבור σ עבורו σ מילון תהא

ותהא φ נוסחה אזי ותהא $t_1 \dots t_n$ ולכל שמות עצם ולכל לכל סימן לכל לכל לכל $((t_1 \dots t_n) \in R^M) \Longleftrightarrow (R(t_1 \dots t_n) \in \Gamma)$ $(\varphi \in \Gamma) \iff (M \models \varphi)$

 $M \models \Gamma$ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין אזי קיים מבנה M עבורו ענורו σ מטקנה: יהי σ מילון ותהא

 $\left(\Gamma \overset{v}{\models} lpha \right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} lpha \right)$ אזי אנ HC משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל $\mathrm{Th}\left(M
ight)=\left\{arphi\mid(M\modelsarphi)\wedge(\mathrm{FV}\left(arphi
ight)=arphi)
ight\}$ אזי σ מבנה: יהי M מבנה מעל מילון σ אזי σ .Th $(\mathcal{M}_{\mathbb{N}})=$ AT מסקנה:

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת פסוקים התב"ש

.Th $(M)=\operatorname{Th}(N)$ מתקיים Γ מתקיים M,N המספקים \bullet

- $(\Gamma \vdash \varphi) \lor (\Gamma \vdash (\neg \varphi))$ מתקיים (רבל פסוק שמתקיים).