```
G(G) = F(G) \iff G' = f אזי איזי G \in \mathbb{R}^{(a,b)} קדומה ותהא G \in \mathbb{R}^{(a,b)} ענה ותהא G \in \mathbb{R}^{(a,b)} ענה אזיי איזי פענה ותהא
                                          a = x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n = b המקיימות \Pi = \{x_0, \ldots, x_n\} אזי [a,b] הלוקה: יהי
                                                                                            \Delta x_i = x_i - x_{i-1} אזי \{x_0, \dots, x_n\} סימון: תהא
                                                                \Lambda(\Pi) = \max_{i=1}^n |\Delta x_i|מדד העדינות: תהא \Pi = \{x_0, \dots, x_n\} מדד העדינות: תהא
                                                                                           \Pi_1 \subseteq \Pi_2 המקיימת חלוקה אזי חלוקה \Pi_1 המקיימת ועידון: תהא
                                                                                           \Lambda (\Pi_2) \leq \Lambda (\Pi_1) אזי \Pi_2 עידון חלוקה וכן \Pi_1 חלוקה וכן \Pi_2
                      . orall i \in \{1\dots n\}\,.t_i \in [x_{i-1},x_i] המקיימות \{t_1\dots t_n\} חלוקה אזי הוקה \{x_0,\dots,x_n\} המאימות מתאימות מתאימות הא
                S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f\left(t_i
ight)\Delta x_i אזי מתאימות יוהיו ויהיו אויהיו חלוקה חלוקה חלוקה \Pi תהא חלוקה f\in\mathbb{R}^{[a,b]}
\lambda\left(\Pi
ight)<\delta עבורה המקיימת \delta>0 לכל לכל \delta>0 קיימת לכל עבורה קיים t\in\mathbb{R} עבורה קיים לכל עבורה אינטגרביליות t\in\mathbb{R}
                                                                                           |S\left(f,\Pi,\left\{t_{i}
ight\}
ight)-L|<arepsilon מתקיים \left\{t_{i}
ight\} מתאימות
                                                     L=\int_a^b f\left(t
ight)dt=\int_a^b f אינטגרל מסויים ההא f\in\mathbb{R}^{[a,b]} אינטגרל מסויים ההא
                                                                                            R\left([a,b]
ight) = \left\{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \mid \mathcal{R}\left([a,b]
ight) = f \right\} שימון: f
                                               \int_{a}^{b}f\left(t\right)dt=\lim_{\lambda\left(\Pi\right)\to0}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון
                                               \int_a^b c \cdot dt = c \, (b-a) עענה : יהי c \in \mathbb{R} תהא n חלוקה ויהיו \{t_i\} נקודות מתאימות אזי
                                                                                                                                              D(x) \notin R(\mathbb{R}) : טענה
                                                                                                                  משפט: תהא f \in R([a,b]) אזי f \in R([a,b])
                        .\overline{\Sigma}\,(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i סכום דרבו עליון חחומה תהא חחומה ותהא חחומה ותהא f\in\mathbb{R}^{[a,b]}
                       \Delta \Sigma(f,\Pi) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot \Delta x_i סכום דרבו תחתון : תהא f\in\mathbb{R}^{[a,b]} חסומה ותהא
                                                                                                              חלוקה \Pi חסומה ותהא f \in \mathbb{R}^{[a,b]} חלוקה למה: תהא
                                                                                                       .\overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight)=\sup_{\text{ min ann and annial }}S\left(f,\Pi,\left\{t_{i}
ight\}
ight) • .\underline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight)=\inf_{\text{ min annial }}S\left(f,\Pi,\left\{t_{i}
ight\}
ight)
                                                                                              חלוקות \Pi_1\subseteq\Pi_2 חסומה ותהיינה f\in\mathbb{R}^{[a,b]} חלוקות למה:
                                                                                                                                   \overline{\Sigma}(f,\Pi_1) > \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) \bullet
                                                                                                                                   \underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \leq \underline{\Sigma}(f,\Pi_2) •
                                                 \Sigma(f,\Pi_1)<\overline{\Sigma}(f,\Pi_2) אזי חלוקות אזי \Pi_1,\Pi_2 חסומה ותהיינה f\in\mathbb{R}^{[a,b]} מסקנה: תהא
                                                                  .\overline{I}\left(f
ight)=\inf_{\Pi}\overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight) חסומה אזי ווחלוקה האינטגרל העליון תהא והאינטגרל העליון תהא
                                                              \underline{I}\left(f
ight)=\sup_{0 \leq t \in \Pi} \underline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight) חסומה אזי f\in\mathbb{R}^{[a,b]} תהא האינטגרל התחתון האינטגרל חסומה f\in\mathbb{R}^{[a,b]}
                                      \Sigma\left(f,\Pi
ight)\leq I\left(f
ight)\leq\overline{I}\left(f
ight)\leq\overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight) מסקנה: תהא f\in\mathbb{R}^{[a,b]} חסומה ותהא חלוקה אזי
קריטריון דרבו: תהא \delta>0 לכל \Pi חסומה אזי (f\in R\left([a,b]
ight)) לכל \delta>0 קיימת \delta>0 לכל חלוקה המקיימת
                                                                                                           \lambda\left(\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\Sigma\left(f,\Pi
ight)<arepsilonמתקיים \lambda\left(\Pi
ight)<\delta
                                                                      \omega\left(f,J
ight)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x
ight)-f\left(y
ight)
ight) חסומה אזי ההא f\in\mathbb{R}^{J} חסומה אזי
               au(\lim_{\delta 	o 0}\omega\left(f,[x_0-\delta,x_0+\delta]
ight)=0) \iff (au אזי au רציפה על au אזי au אזי au חסומה ויהי au
                      .(orall I\subseteq J.orallarepsilon>0.\exists\delta>\operatorname{len}\left(I
ight).\omega\left(f,I
ight)<arepsilon
ight)\iffמשפט : תהא משפט f\in\mathbb{R}^{J} חסומה אזי (f רציפה במ"ש)
                                        תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה : תהא לחלוקה חסומה ותהא חסומה חסומה תנודה כוללת החסומה ביחס לחלוקה היחס
                                                                                                                    \omega(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f,[x_{i-1},x_i]) \Delta x_i
                                               \omega\left(f,\Pi
ight)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight) מסקנה: תהא f\in\mathbb{R}^{[a,b]} חסומה ותהא חלוקה אזי
```

F'=f גזירה המקיימת $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת

```
חלוקות \Pi_1 \cup \{p\} = \Pi_2 חסומה ותהיינה f \in \mathbb{R}^{[a,b]} חלוקות למה
```

$$.\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) + \lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b]) \bullet$$

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \ge \underline{\Sigma}(f,\Pi_2) - \lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b]) \bullet$$

מסקנה : תהא $\Pi_1 \cup \{p_1 \dots p_m\} = \Pi_2$ חסומה ותהיינה $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חלוקות

$$\overline{\Sigma}(f,\Pi_1) \leq \overline{\Sigma}(f,\Pi_2) + m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b]) \bullet$$

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi_1) \ge \underline{\Sigma}(f,\Pi_2) - m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b]) \bullet$$

 $\lambda\left(\Pi
ight)<\delta$ סענה : תהא $\delta>0$ חסומה אזי לכל arepsilon>0 קיים $\delta>0$ לכל חסומה $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ מתקיים

$$\underline{\Sigma}(f,\Pi) \leq \underline{I}(f) \leq \underline{\Sigma}(f,\Pi) + \varepsilon$$

$$.\overline{\Sigma}(f,\Pi) > \overline{I}(f) > \overline{\Sigma}(f,\Pi) - \varepsilon$$

 $I\left(f
ight)$ אזי ווא אוי $I\left(f
ight)=\overline{I}\left(f
ight)$ חסומה המקיימת המקיימת והא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי

 $f\in R\left([a,b]
ight)$ אזי $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi
ight)<arepsilon$ בורה Π עבורה π קליטריון דרבו משופר π תהא π חסומה כך שלכל π $C([a,b]) \subseteq R([a,b])$:משפט

 $f \in R\left([a,b]
ight)$ משפט : תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי

 $f\in R\left([a,b]
ight)$ אזי אזי $f_{\lceil [a,b]}\in R\left([a,b]
ight)$ אבורה עבורה $b\in [a,c]$ אזי אזי $f\in \mathbb{R}^{[a,c]}$

 $f \in R\left([a,c]
ight)$ אזי $f \in R\left([a,b]
ight) \land (f \in R\left([b,c]
ight))$ עבורה $b \in [a,c]$ אזי אזי $f \in \mathbb{R}^{[a,c]}$ איזי

 $f \in R\left([b,c]
ight)$ אזי $f \in R\left([a,d]
ight)$ עבורה $b < c \in [a,d]$ חסומה ויהיו חסומה ל

 $a,f\in R\left([a,c]
ight)$ אזי $orall b\in (a,c)$. $f\in R\left([a,b]
ight)$ חסומה המקיימת $f\in \mathbb{R}^{[a,c]}$ אזי

 $f\in R\left([a,c]
ight)$ אזי ל $b\in (a,c)$. $f\in R\left([b,c]
ight)$ חסומה המקיימת המקיימת להא

$$g\in R\left([a,c]
ight)$$
 אזי $g\left(x
ight)=egin{cases} y & x=b \\ f\left(x
ight) & ext{else} \end{cases}$ נגדיר $f\in R\left([a,c]
ight)$ אזי $f\in R\left([a,c]
ight)$ אזי $f\left(x
ight)=egin{cases} \sin\left(rac{1}{x}
ight) & x
eq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$$f\in R\left([-1,1]
ight)$$
 אזי $f\left(x
ight)=egin{cases} \sin\left(rac{1}{x}
ight) & x
eq 0 \ 0 & x=0 \end{cases}$ מסקנה: נגדיר

 $f \in R\left([a,b]
ight)$ מסקנה: תהא $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי

 $c\in\mathbb{R}$ וכן $H\in C\left(\mathbb{R}
ight)$ תהא $f,g\in R\left([a,b]
ight)$ וכן

$$(f+g), (cf) \in R([a,b]) \bullet$$

$$.(f \cdot g), (H \circ f), |f| \in R([a,b]) \bullet$$

 $A\subseteq \bigcup (a_i,b_i)$ עבורם $A\subseteq \bigcup (a_i,b_i)$ עבורה לכל arepsilon>0 קיימים arepsilon>0 קיימים אפס אפסיורה אפסיורה לכל פורה לכל אפיימים בורה לכל פורה לכל אפיימים בורה לכל פורה לכל אפיימים אפיימים בורה לכל אפיימים בורה לכל פורה לכל אפיימים בורה לכל פורה ל . טענה $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי A ממידה אפס $A\subseteq\mathbb{R}$ טענה תהא

 $. orall b \in B. orall arepsilon > 0. \exists a \in A. \, |b-a| < arepsilon$ המקיימת הא אזי $B \subseteq \mathbb{R}$ אזי אזי בפופה בפופה

 $\int_{a}^{b}f\left(x
ight)dx=\int_{a}^{b}g\left(x
ight)dx$ אזי אזי $f_{
eal}=g_{
ho}$ אצוימת $f,g\in R\left(\left[a,b
ight]
ight)$ אזי אוינה $f,g\in R\left(\left[a,b
ight]
ight)$

$$\int_{a}^{c}f\left(x
ight)dx=\int_{a}^{c}g\left(x
ight)dx$$
אזי א $g\left(x
ight)=egin{cases} y_{i}&x\in\left\{ b_{1}\ldots b_{m}
ight\} \ f\left(x
ight)& ext{else} \end{cases}$ מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,c
ight]
ight)$ אזי א $f\in R\left(\left[a,c
ight]
ight)$

 $\int_a^b lpha f + eta g = lpha \int_a^b f + eta \int_a^b g$ אזי $lpha, eta \in \mathbb{R}$ ויהיו $f,g \in R\left([a,b]
ight)$ האינטגרנד: תהיינה $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ אזי $b \in (a,c)$ ויהי ויהי $f \in R\left([a,c]
ight)$ תהא האינטגרציה: תהא $.\int_{a}^{b}f=-\int_{b}^{a}f$ אזי $f\in R\left(\left[a,b
ight]
ight)$ הגדרה : תהא

 $\int_{a}^{b}f\left(x
ight)dx\geq0$ אזי $f\geq0$ המקיימת $f\in R\left(\left[a,b
ight]
ight)$ משפט חיוביות האא

```
\int_{a}^{b}f\left(x
ight)dx\geq\int_{a}^{b}g\left(x
ight)dx אזי אי f\geq g המקיימות האינטגרל: תהיינה f,g\in R\left(\left[a,b
ight]
ight)
                                                                                     m\left(b-a
ight) \leq \int_{a}^{b}f\left(x
ight)dx \leq M\left(b-a
ight) אזי m\leq f\leq M המקיימת f\in R\left([a,b]
ight)
                                                                \left|\int_a^b f
ight| \leq \int_a^b |f| \leq \sup_{[a,b]} \left(|f|\right) (b-a) אזי f \in R\left([a,b]\right) אזי f \in R\left([a,b]\right) משפט רציפות האינטגרל המסויים : תהא f \in R\left([a,b]\right) נגדיר f \in R\left([a,b]\right) אזי
                                                                                 עבורו x_0 \in [a,b] אזי קיים אזי איי אוי 0 \leq g \in R\left([a,b]
ight) ותהא ותהא f \in C\left([a,b]
ight) אזי האטון: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            \int_{a}^{b} f(x) g(x) dx = f(x_0) \int_{a}^{b} g(x) dx
                                                                                                                                    עבורו x_0 \in [a,b] אזי קיים אזי קיים אזי עבורו x_0 \in [a,b] אזי אזי קיים אזי עבורו הלמה של בונה אונוטונית ותהא
                                                                                                                                                                                                                                    \int_{a}^{b} f(x) g(x) dx = f(a) \int_{a}^{x_{0}} g(x) dx + f(b) \int_{x_{0}}^{b} g(x) dx
  נגדיר f נקודת רציפות של x_0 \in [a,b] ותהא f \in R([a,b]) המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                               F'(x_0) = f(x_0) איז F(x) = \int_a^x f(t) dt
                             .\int_a^b f\left(x
ight)dx=F\left(b
ight)-F\left(a
ight) אזי ותהא f קדומה של f על f על f אזי f\in R\left([a,b]
ight) ותהא f\in R\left([a,b]
ight) אזי f\in R\left([a,b]
ight) אזי f\in R\left([a,b]
ight) מסקנה: תהא f\in R\left([a,b]
ight) יהיי f\in R\left([a,b]
ight) ותהא f קדומה של f על f
                                                                                                                                                                                                                                                                                 \left. \left[ f 
ight] 
ight|_a^b = f \left( b 
ight) - f \left( a 
ight) אזי f \in \mathbb{R}^{[a,b]} תהא יימון: תהא
                 \int_a^b f'g = [f\cdot g]\,|_a^b - \int_a^b fg' אזי אינטגרציה בחלקים ההיינה f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]} גזירות עבורן
x_0 = [f : g] |_a = \int_a fg אוז f, g \in R ([a,b]) ותהא f, g \in R ([a,b]) אוז בורות f \in C([a,b]) עבורו f \in C([a,b]) עבורו f \in C([a,b]) עבורו f \in C([a,b]) עבורה f \in C([a,b]) עבורה f \in C([a,b]) עבורה f \in C([a,b]) עבור f \in C([a,b]) עבור f \in C([a,b]) עבור f \in C([a,b]) עם פיתוח טיילור f \in C([a,b]) עם פיתוח טיילור f \in C([a,b]) אוז f \in C([a,b]) אוז f \in C([a,b]) משפט שינוי משתנה : תהא f \in C([a,b]) ותהא f \in C([a,b]) המקיימת f \in C([a,b]) אוז f \in C([a,b]) למה : תהא f \in C([a,b]) ווהי f \in C([a,b]) ווהי f \in C([a,b]) ווהי f \in C([a,b]) אוז f \in C([a,b]) טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות : תהא f \in C([a,b]) ווהי f \in C([a,b]) ווהי f \in C([a,b]) אוז f \in C([a,b])
                                                                                                             .k!! = \prod_{n=0}^{\left \lfloor \frac{k}{2} \right \rfloor - 1} \left( k - 2n \right)אזי k \in \mathbb{N}_+ אזי k \in \mathbb{N}_+ סימון: יהי k \in \mathbb{N}_+ אזי k \in \mathbb{N}_+ אזי k \in \mathbb{N}_+ למה: יהי k \in \mathbb{N}_+ אזי k \in \mathbb{N}_+ א זי k \in \mathbb{N}_+ אזי k \in
```