

סימון: יהי \mathbb{F} שדה ויהיו $m, n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{F}^{m \times n} = M_{m \times n}(\mathbb{F})$

מרחק האמינג: תהא X קבוצה אזי נגדיר $\Delta : X^n \times X^n \rightarrow \mathbb{N}$ כך $\Delta(x, y) = |\{i \in [n] \mid x_i \neq y_i\}|$

משקל האמינג: יהי \mathbb{F} שדה אזי נגדיר $w : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{N}$ כך $w(x) = \Delta(x, 0)$

קוד לתיקון שגיאות: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C} \subseteq [q]^m$

גודל האלפבית בקוד לתיקון שגיאות: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ והיה $\mathcal{C} \subseteq [q]^m$ קוד לתיקון שגיאות אזי q

גודל הבלוק בקוד לתיקון שגיאות: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ והיה $\mathcal{C} \subseteq [q]^m$ קוד לתיקון שגיאות אזי m

מרחק בקוד לתיקון שגיאות: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ והיה $\mathcal{C} \subseteq [q]^m$ קוד לתיקון שגיאות אזי $d[\mathcal{C}] = \min_{x \neq y} \Delta(x, y)$

מימד/קצב בקוד לתיקון שגיאות: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ והיה $\mathcal{C} \subseteq [q]^m$ קוד לתיקון שגיאות אזי $r[\mathcal{C}] = \log_q |\mathcal{C}|$

הערה: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ והיה $\mathcal{C} \subseteq [q]^m$ קוד לתיקון שגיאות אזי נאמר כי \mathcal{C} הינו קוד $[m, r[\mathcal{C}], d[\mathcal{C}], q]$ לתיקון שגיאות.

טענה: יהי \mathcal{C} קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות יהי $w \in \mathcal{C}$ והיה $w' \in [q]^m$ באשר $\Delta(w, w') \leq d-1$ אזי $w' \notin \mathcal{C}$

טענה: יהי \mathcal{C} קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות יהי $w \in \mathcal{C}$ והיה $w' \in [q]^m$ באשר $\Delta(w, w') \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ אזי $\arg \min_{v \in \mathcal{C}} \Delta(v, w') = w$

משפט חסם הסינגלטון: יהי \mathcal{C} קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי $r \leq m - d + 1$

קוד חזרות: יהיו $q, m, k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{k\text{-rep}} = \left\{ w \in [q]^{mk} \mid \forall i \in [mk]. w_i = w_{i \bmod m} \right\}$

טענה: יהיו $q, m, k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{k\text{-rep}}$ הינו קוד $[mk, m, k, q]$ לתיקון שגיאות.

קוד שארית: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{parity}} = \left\{ w \in [q]^{m+1} \mid w_{m+1} = (\sum_{i=1}^m w_i \bmod q) \right\}$

טענה: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{parity}}$ הינו קוד $[m+1, m, 2, q]$ לתיקון שגיאות.

קוד האמינג: יהי $m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{Hamming}} = \left\{ x \in \mathbb{F}_2^{2^m-1} \mid \forall i \in [m]. \left(\bigoplus_{k \in \binom{[2^m-1]}{(i)_2}} x_k = 0 \right) \right\}$

טענה: יהי $m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{Hamming}}$ הינו קוד $[2^m-1, 2^m-m-1, 3, 2]$ לתיקון שגיאות.

טענה: יהיו $m, r, d, q \in \mathbb{N}_+$ עבורם קיים קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי קיים $d' \geq d$ עבורו קיים קוד

$[m \lceil \log(q) \rceil, r \log(q), d', 2]$ לתיקון שגיאות.

טענה: יהיו $m, r, d, q \in \mathbb{N}_+$ עבורם קיים קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות והיה $\ell \in \mathbb{N}_+$ אזי קיים קוד $[\ell m, \ell r, d, q]$ לתיקון שגיאות.

טענה: יהי $d \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ ויהיו $m, r \in \mathbb{N}_+$ עבורם קיים קוד $[m, r, d, 2]$ לתיקון שגיאות אזי קיים קוד $[m+1, r, d+1, 2]$ לתיקון שגיאות.

משפט האמינג: יהי \mathcal{C} קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי $|\mathcal{C}| \leq q^m \cdot \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \binom{m}{i} \cdot (q-1)^i \right)^{-1}$

למה פלוטקין: יהיו $d, q, m \in \mathbb{N}_+$ באשר $d \geq \left(1 - \frac{1}{q}\right)m$ והיה \mathcal{C} קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי $|\mathcal{C}| \leq \frac{d}{d + \frac{m}{q} - m}$

טענה: יהיו $d, m \in \mathbb{N}_+$ באשר $d \leq \frac{m}{2}$ והיה \mathcal{C} קוד $[m, r, d, 2]$ לתיקון שגיאות אזי $|\mathcal{C}| \leq d \cdot 2^{m-2d+2}$

קוד לינארי לתיקון שגיאות: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ באשר \mathbb{F}_q^m שדה אזי קוד לתיקון שגיאות $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_q^m$ המקיים כי \mathcal{C} מרחב וקטורי.

טענה: יהי \mathcal{C} קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי $\dim(\mathcal{C}) = r$

מטריצה יוצרת: יהי \mathcal{C} קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות ויהי $b_1 \dots b_r \in \mathcal{C}$ בסיס אזי $M_{\mathcal{C}} \in \mathbb{F}_q^{m \times r}$ המוגדרת $C_i(M_{\mathcal{C}}) = b_i$

לכל $i \in [r]$

טענה: יהי \mathcal{C} קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי $\mathcal{C} = \{M_{\mathcal{C}} \cdot v \mid v \in \mathbb{F}_q^r\}$

טענה: יהיו $q, m, k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{k\text{-rep}}$ קוד לינארי לתיקון שגיאות.

מסקנה: יהיו $q, m, k \in \mathbb{N}_+$ אזי $M_{\mathcal{C}_{k\text{-rep}}} = \begin{pmatrix} I_m \\ \vdots \\ I_m \end{pmatrix}$

טענה: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{parity}}$ קוד לינארי לתיקון שגיאות.

מסקנה: יהיו $q, m \in \mathbb{N}_+$ אזי $M_{\mathcal{C}_{\text{parity}}} = \begin{pmatrix} I_m \\ 1^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m \\ 1 \end{pmatrix}^T$

טענה: יהי \mathcal{C} קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי $d = \min_{v \in \mathcal{C}} \Delta(v, 0)$

טענה: יהי \mathcal{C} קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי קיים קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות \mathcal{D} עבורו קיימת $A \in \mathbb{F}_q^{(m-r) \times r}$

המקיימת $M_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} I_r \\ A \end{pmatrix}$

סימון: יהי \mathbb{F} שדה יהיו $m, n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $M \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי $R(M) = \{R_i(M) \mid i \in [m]\}$

טענה: יהי \mathcal{C} קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי

• לכל $V \subseteq \mathcal{C}$ באשר $\dim(V) = r-1$ מתקיים $|R(M_{\mathcal{C}}) \cap V| \leq m-d$

• קיים $V \subseteq \mathcal{C}$ המקיים $\dim(V) = r-1$ וכן $|R(M_{\mathcal{C}}) \cap V| = m-d$

טענה: יהי \mathcal{C} קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי קיים $d' \geq \left\lceil \frac{d}{q} \right\rceil$ עבורו קיים קוד לינארי $[m-d, r-1, d', q]$ לתיקון שגיאות.

משפט גרייסמר: יהי C קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי $m \geq \sum_{i=0}^{r-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil$.

למה: יהי $q \in \mathbb{N}_+$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהיו $m, r \in \mathbb{N}_+$ באשר $m > r$ ויהי $x \in \mathbb{F}_q^r \setminus \{0\}$ אזי לכל $b \in \mathbb{F}_q^m$ מתקיים

$$\mathbb{P}_{M \in \mathbb{F}_q^{m \times r}} (Mx = b) = \frac{1}{q^m}$$

סימון: יהי $q \in \mathbb{N}_+$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהיו $m, r \in \mathbb{N}_+$ באשר $m > r$ ויהי $M \in \mathbb{F}_q^{m \times r}$ אזי $\mathcal{C}_M = \{M \cdot v \mid v \in \mathbb{F}_q^r\}$

משפט: יהי $q \in \mathbb{N}_+$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהיו $m, r \in \mathbb{N}_+$ באשר $m > r$ אזי $\mathbb{P}_{M \in \mathbb{F}_q^{m \times r}} (\mathcal{C}_M \text{ קוד לינארי}) \geq 1 - \frac{q^r - 1}{q^m(q-1)}$

משפט: יהי $q \in \mathbb{N}_+$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהיו $m, r \in \mathbb{N}_+$ באשר $m > r$ ויהי $\delta \in (0, 1)$ אזי

$$\mathbb{P}_{M \in \mathbb{F}_q^{m \times r}} \left(d[\mathcal{C}_M] \leq (1 - \delta) \left(m - \frac{m}{q} \right) \right) \leq |\mathcal{C}_M| \cdot \exp \left(-\frac{\delta^2}{2} \left(m - \frac{m}{q} \right) \right)$$

הקוד הדואלי: יהי C קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי $C^\vee = \{w \in [q]^m \mid \forall c \in C. \langle w, c \rangle = 0\}$

טענה: יהי C קוד לינארי $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות אזי קיים $d' \in \mathbb{N}_+$ עבורו C^\vee הינו קוד לינארי $[m, m - r, d', q]$ לתיקון שגיאות.

מטריצת בדיקת שאריות: יהי C קוד לינארי לבדיקת שגיאות אזי $H_C = M_{C^\vee}$

טענה: יהי C קוד לינארי לתיקון שגיאות אזי $C = \ker(H_C^T)$

קוד מקסימלי לתיקון שגיאות: קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות המקיים $d = m - r + 1$

טענה: יהי $q \in \mathbb{N}_+$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהיו $m, r \in \mathbb{N}_+$ באשר $m > r$ ויהי $M \in \mathbb{F}_q^{m \times r}$ אזי (\mathcal{C}_M) קוד לינארי מקסימלי לתיקון

שגיאות \iff (ולכל $A \in \mathcal{P}_r(R(M))$ מתקיים כי A בת"ל).

טענה: יהי C קוד לינארי מקסימלי לתיקון שגיאות אזי C^\vee הינו קוד לינארי מקסימלי לתיקון שגיאות.

משפט גילברט-וורשאמוב: יהיו $d, m \in \mathbb{N}_+$ באשר $d \leq m$ ויהי $q \in \mathbb{P}$ אזי קיים קוד לינארי $[m, k, d, q]$ לתיקון שגיאות C המקיים

$$|C| \geq q^m \cdot \left(\sum_{i=0}^{d-1} \binom{m}{i} \cdot (q-1)^i \right)^{-1}$$

למה: יהי $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ יהיו $k, m \in \mathbb{N}_+$ באשר $k \leq m$ ויהי $q \in \mathbb{P}$ עבורו $\sum_{i=0}^{d-2} \binom{m-1}{i} (q-1)^i < q^{m-k}$ אזי קיים $H \in \mathbb{F}_q^{m \times (m-k)}$

עבורו לכל $A \in \mathcal{P}_{d-1}(R(M))$ מתקיים כי A בת"ל.

משפט גילברט-וורשאמוב: יהי $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ יהיו $k, m \in \mathbb{N}_+$ באשר $k \leq m$ ויהי $q \in \mathbb{P}$ עבורו $\sum_{i=0}^{d-2} \binom{m-1}{i} (q-1)^i < q^{m-k}$ אזי

$$|C| \geq q^m \cdot \left(1 + \sum_{i=0}^{d-2} \binom{m-1}{i} \cdot (q-1)^i \right)^{-1}$$

קיים קוד לינארי $[m, k, d, q]$ לתיקון שגיאות C המקיים

סכימת חלוקת סוד מושלמת: תהינה X, Y קבוצות יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $k \in [n]$ אזי $f: X \rightarrow Y^n$ עבורה

• קיימת $g: Y^k \rightarrow X$ עבורה לכל $s \in X$ ולכל $p_1, \dots, p_k \in [n]$ מתקיים $g(f(s)_{p_1}, \dots, f(s)_{p_k}) = s$

• לא קיימת $g: Y^{k-1} \rightarrow X$ עבורה לכל $s \in X$ ולכל $p_1, \dots, p_{k-1} \in [n]$ מתקיים $g(f(s)_{p_1}, \dots, f(s)_{p_{k-1}}) = s$

טענה: יהיו $\ell, k \in \mathbb{N}_+$ באשר $\ell \leq k$ יהי \mathbb{F} שדה סופי באשר $|\mathbb{F}| \geq k$ יהיו $x_1 \dots x_\ell \in \mathbb{F}$ שונים ונגדיר $\varphi: \mathbb{F}_{\leq k-1}[x] \rightarrow \mathbb{F}^\ell$ כך

$$\varphi(p) = (p(x_i))_{i=1}^\ell$$

• אם $\ell = k$ אז φ איזומורפיזם וכן φ, φ^{-1} חשיבות בזמן פולינומי.

• אם $\ell < k$ אז לכל $y \in \mathbb{F}^\ell$ מתקיים כי $\varphi^{-1}(y)$ מרחב אפני ממימד $k - \ell$.

סכימת שמיר: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ באשר $n < q$ ויהי $k \in [n]$ אזי $f: \mathbb{F}_q \times (\mathbb{F}_q \setminus \{0\})^{k-1} \rightarrow (\mathbb{F}_q^2)^n$ המוגדרת

$$f(s, a) = \left((s_i, s + \sum_{j=1}^{k-1} a_j s_i^j) \right)_{i=1}^n$$

מסקנה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ באשר $n < q$ ויהי $k \in [n]$ אזי סכימת שמיר הינה סכימת חלוקת סוד מושלמת.

קוד ריד-סולומון: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהי $m \in [q]$ ויהי $r \in [m]$ ויהיו $\alpha_1 \dots \alpha_m \in \mathbb{F}_q$ שונים אזי

$$RS_q[m, r] = \left\{ (f(\alpha_i))_{i=1}^m \mid f \in (\mathbb{F}_q)_{\leq r-1}[x] \right\}$$

הערה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהי $r \in [q]$ אזי $RS_q[q, r] \simeq (\mathbb{F}_q)_{\leq r-1}[x]$

טענה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהי $m \in [q]$ ויהי $r \in [m]$ ויהיו $\alpha_1 \dots \alpha_m \in \mathbb{F}_q$ אזי $RS_q[m, r]$ הינו קוד לינארי מקסימלי

$[m, r, m - r + 1, q]$ לתיקון שגיאות.

טענה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה יהי $m \in [q]$ ויהי $r \in [m]$ ויהיו $\alpha_1 \dots \alpha_m \in \mathbb{F}_q$ אזי $(M_{RS_q[m, r]})_{i, j} = \alpha_i^{j-1}$ לכל $(i, j) \in [m] \times [r]$

טענה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהי $i \in \{0, \dots, q-2\}$ אזי $\sum_{x \in \mathbb{F}_q} x^i = 0$

טענה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהי $r \in [q]$ אזי $RS_q[q, r]^\vee = RS_q[q, q-r]$

אלגוריתם ברלקמפ-וולץ: ...

קוד ריד-מיולר: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהיו $m, r \in \mathbb{N}_+$ אזי $RM_q[m, r] = \left\{ (f(\alpha))_{\alpha \in \mathbb{F}_q^m} \mid f \in (\mathbb{F}_q)_{\leq r}[x_1, \dots, x_m] \right\}$

הערה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהיו $m, r \in \mathbb{N}_+$ אזי $RM_q[m, r] \simeq (\mathbb{F}_q)_{\leq r}[x_1, \dots, x_m]$

טענה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהיו $m, r \in \mathbb{N}_+$ אזי קיימים $r, d \in \mathbb{N}_+$ עבורם $RM_q[m, r]$ הינו קוד לינארי $[q^m, r, d, q]$ לתיקון

שגיאות.

טענה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהי $m, r \in \mathbb{N}_+$ באשר $r < q$ אזי $r [\text{RM}_q [m, r]] = \binom{m+r}{r}$

טענה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהי $m, r \in \mathbb{N}_+$ באשר $r < q$ אזי $d [\text{RM}_q [m, r]] = (q - r) q^{m-1}$

טענה: יהי $m, r \in \mathbb{N}_+$ אזי $r [\text{RM}_2 [m, r]] = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i}$

משפט: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהי $m, r, a, b \in \mathbb{N}_+$ באשר $r = a(q - 1) + b$ חלוקה עם שארית אזי

$$d [\text{RM}_q [m, r]] = (q - b) q^{m-a-1}$$

טענה: יהי $q \in \mathbb{N}$ באשר \mathbb{F}_q שדה ויהי $m, r \in \mathbb{N}_+$ אזי $\text{RM}_q [m, r]^\vee = \text{RM}_q [m, m - r - 1]$

טענה: יהי $m, r \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $\text{RM}_2 [m, r] = \{(u, u + v) \mid (u \in \text{RM}_2 [m - 1, r]) \wedge (v \in \text{RM}_2 [m - 1, r - 1])\}$

שרשור קודים לתיקון שגיאות: יהי \mathcal{C} קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות יהי \mathcal{C}' קוד $[m', \log_{q'}(q), d', q']$ לתיקון שגיאות ותהא

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{C}' = \{(\rho(w_i))_{i=1}^m \mid w \in \mathcal{C}\}$$

טענה: יהי \mathcal{C} קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות ויהי \mathcal{C}' קוד $[m', \log_{q'}(q), d', q']$ לתיקון שגיאות אזי $\mathcal{C} \circ \mathcal{C}'$ הינו קוד

$$[m \cdot m', r \cdot \log_{q'}(q), d \cdot d', q'] \text{ לתיקון שגיאות.}$$

הערה: יהי \mathcal{C} קוד $[m, r, d, q]$ לתיקון שגיאות יהי \mathcal{C}' קוד $[m', \log_{q'}(q), d', q']$ לתיקון שגיאות ותהא $\rho : [q] \rightarrow \mathcal{C}'$ הפיכה אזי

$$\mathcal{C} \circ \mathcal{C}' \simeq \left\{ h : [m] \times [m'] \rightarrow [q] \mid \exists w \in \mathcal{C}. h(i, j) = (\rho(w_i))_j \right\}$$

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $S \subseteq [n]$ אזי $\chi_S : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2$ המוגדרת $\chi_S(x) = \sum_{i \in S} x_i$

קוד אדמר: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{Hadamard}} = \{(\chi_S(x))_{x \in \mathbb{F}_2^n} \mid S \subseteq [n]\}$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{Hadamard}}$ הינו קוד לינארי $[2^n, n, 2^{n-1}, 2]$ לתיקון שגיאות.

הערה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{Hadamard}} \simeq \{\chi_S \mid S \subseteq [n]\}$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{Hamming}} = \bigvee \{(\chi_S(x))_{x \in \mathbb{F}_2^n \setminus \{0\}} \mid S \subseteq [n]\}$

קוד דיקטטורות: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{Dic}} = \{(\chi_{\{i\}}(x))_{x \in \mathbb{F}_2^n} \mid i \in [n]\}$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי \mathcal{C}_{Dic} הינו קוד $[2^n, \log_2(n), 2^{n-1}, 2]$ לתיקון שגיאות.

הערה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{C}_{\text{Dic}} \simeq \{\chi_{\{i\}} \mid i \in [n]\}$