

**גודל מעגל בוליאני:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  ויהי  $C$  מעגל בוליאני בעל  $n$  חוטים וכן  $m$  קלטים אזי  $\text{Size}(C) = n + m$ .

**עומק מעגל בוליאני:** יהי  $C$  מעגל בוליאני אזי  $\text{depth}(C)$  הינו אורך המסלול המקסימלי מקלט לפלט.

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  אזי  $\vee_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  המוגדרת  $\vee_n(x) = \bigvee_{i=1}^n x_i$ .

**סימון:** יהי  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$  אזי  $\wedge_n : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  המוגדרת  $\wedge_n(x) = \bigwedge_{i=1}^n x_i$ .

**מעגל בוליאני בעל fan-in לא מוגבל:** מעגל בוליאני מעל בסיס הפונקציות הבוליאניות  $\{\wedge, \vee, \neg\}$   $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\wedge_n\}) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\vee_n\})$  הערה: אלא אם נאמר אחרת מעגל בוליאני הוא בעל fan-in מוגבל.

**טענה:** תהא  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  אזי קיים מעגל בוליאני  $C$  בעל fan-in לא מוגבל המחשב את  $f$  בגודל  $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$  ובעומק 2.

**טענה:** תהא  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  אזי קיים מעגל בוליאני  $C$  המחשב את  $f$  בגודל  $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$  ובעומק  $n + \log_2(n)$ .

**מסקנה:** תהא  $L$  שפה אזי קיימת משפחת מעגלים  $\mathcal{C}$  מגודל  $\mathcal{O}(n \cdot 2^n)$  ומעומק  $n + \log(n)$  המחשבת את  $L$ .

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי קיימת  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  עבורה לכל מעגל בוליאני  $C$  המחשב אותה מתקיים  $\text{Size}(C) \geq \frac{2^n}{2n}$ .

**הגודל של פונקציה בוליאנית:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  ותהא  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  אזי  $\text{Size}(f) = \min \{\text{Size}(C) \mid (f \text{ מחשבת את } C) \wedge (C \text{ מעגל})\}$ .

**משפט:** קיים  $C \in \mathbb{R}_+$  עבורו לכל  $n \in \mathbb{N}$  ולכל  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  המקיימת  $n \leq S < C \cdot \frac{2^n}{n}$  קיימת  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  באשר  $f$  חשיבה על ידי מעגל מגודל  $S(n) + 10n$  וכן  $f$  לא חשיבה על ידי מעגל מגודל  $S(n)$ .

**הגדרה:** תהא  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  אזי  $L \subseteq \{0, 1\}^*$   $\{L \subseteq \{0, 1\}^* \mid S(n) \text{ חשיבה על ידי משפחת מעגלים מגודל לכל היותר } S(n)\}$   $\text{Size}(S(n)) =$

**מסקנה:**  $\text{Size}(2^n) = \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$ .

**מסקנה:** תהא  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  עבורה  $n \leq S(n) \leq \frac{2^n}{n}$  אזי  $\text{Size}(S(n)) \subsetneq \text{Size}(S(n) + 10n)$ .

**הגדרה:**  $\text{Size}(\text{Poly}) = \bigcup_{c \in \mathbb{N}} \text{Size}(n^c)$ .

**למה:** יהי  $G$  גרף אזי  $\mathbb{E}_{\text{חיד}(A, B)}[|E(A, B)|] = \frac{|E(G)|}{2}$ .

**טענה:** יהי  $G$  גרף אזי קיים חתך  $(A, B)$  עבורו  $|E(A, B)| \geq \frac{|E(G)|}{2}$ .

**פונקציית זוגיות:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\text{parity} : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  המוגדרת  $\text{parity}(x) = \bigoplus_{i=1}^n x_i$ .

**טענה:** קיים מעגל  $C$  המחשב את  $\text{parity}_n$  מגודל  $\mathcal{O}(n)$  ועומק  $\mathcal{O}(\log(n))$ .

**משפט:** יהי  $C$  מעגל המחשב את  $\text{parity}_n$  בעל fan-in לא מוגבל ועומק  $d$  אזי  $\text{Size}(C) \geq 2^{\Omega(n^{\frac{1}{n+d}})}$ .

**פולינום מולטי-לינארי (מ"ל):** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$  בעל דרגה 1.

**פולינום מחשב פונקציה בוליאנית:** תהא  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  אזי  $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$  מ"ל עבורו  $f(x) = p(x)$  לכל  $x \in \{0, 1\}^n$ .

**טענה:** תהא  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  אזי קיים פולינום המחשב את  $f$ .

**סימון:** תהא  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  אזי  $\deg(f) = \min \{\deg(p) \mid (p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]) \wedge (f \text{ מחשב את } p)\}$ .

**מסקנה:** יהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\deg(\vee_n) = n$ .

**פולינום מחשב פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה  $\varepsilon$ :** יהי  $\varepsilon > 0$  ותהא  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  אזי  $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$  מ"ל עבורו

$$\mathbb{P}_{x \leftarrow \{0, 1\}^n} (p(x) = f(x)) \geq 1 - \varepsilon$$

**טענה:** הפולינום 1 מחשב את  $\vee_n$  בממוצע עם שגיאה  $\frac{1}{3}$ .

**טענה:** תהא  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  חשיבה על ידי מעגל בוליאני מגודל  $s$  ועומק  $d$  אזי לכל  $\varepsilon > 0$  קיים פולינום מ"ל  $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$  מדרגה  $\mathcal{O}\left((\log(n) \cdot \log(\frac{s}{\varepsilon}))^d\right)$  בממוצע עם שגיאה  $\varepsilon$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$  מולטי-לינארי ויהי  $\delta > 0$  עבורו  $\mathbb{P}_{x \leftarrow \{0, 1\}^n} (p(x) = \text{parity}(x)) \geq \frac{1}{2} + \delta$  אזי  $\deg(p) \geq 2^{\Omega(\delta n)}$ .

**התפלגות משפחת פולינומים מחשבת פונקציה בוליאנית בממוצע עם שגיאה  $\varepsilon$ :** יהי  $\varepsilon > 0$  ותהא  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$  אזי קבוצת

פולינומים מ"ל  $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$  עבורה לכל  $x \in \{0, 1\}^n$  מתקיים  $\mathbb{P}_{p \leftarrow P} (p(x) = f(x)) \geq 1 - \varepsilon$

**טענה:** יהי  $\varepsilon > 0$  אזי קיימת קבוצת פולינומים מ"ל  $P \subseteq \mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$  מדרגה  $\mathcal{O}(\log(n) \cdot \log(\frac{1}{\varepsilon}))$  שמחשבת את  $\vee_n$  בממוצע עם

שגיאה  $\varepsilon$ .