```
עבורם \sigma\in\{\pm 1\} וכן p\in\mathbb{Z} וכן a_1
eq 0 אזי איזי a_1\ldots a_t\in\mathbb{Z} איזי אויהי t\in\mathbb{N}_+ וכן \beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\} וכן \beta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}
                                                                                                                                                                       x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^t \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p
                         .\sigma ייצוג בנקודה צפה אזי x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^trac{a_i}{eta^i}
ight)\cdoteta^p עבורו x\in\mathbb{R} ויהי ויהי t\in\mathbb{N}_+ בסיס יהי בסיס eta\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}
מנטיסה/ספרות משמעותיות: יהי x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^t rac{a_i}{eta^i}
ight)\cdoteta^p עבורו x\in\mathbb{R} ויהי ויהי t\in\mathbb{N}_+ בסיס הי ייצוג בנקודה צפה x\in\mathbb{R}
                                                                                                                                                                                         (a_1 \dots a_t) אזי
           U  בפיס צפה על החזקה בנקודה צפה: יהי <math>\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} בסיס יהי ויהיו t \in \mathbb{N}_+ ויהיו צפה אפר יהי
טענה: יהי x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} מספר בעל ייצוג נקודה צפה אזי t\in\mathbb{N}_+ יהיו בסיס יהי t\in\mathbb{N}_+ מספר בעל ייצוג נקודה צפה אזי
                                                                                                                                                                                  .\beta^{L-1} < |x| < \beta^U
                                                                             |x| > \beta^U :overflow •
                                                                                                                                                               |x| \le \beta^{L-1} :underflow •
קיצוץ נקודה צפה: יהי x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^\infty rac{a_i}{eta^i}
ight)\cdoteta^p בבסיס x\in\mathbb{R} ויהי ויהי t\in\mathbb{R}_+ ויהי בסיס \beta\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\} בהיי
                                                                                                                                                                 .fl (x) = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i}\right) \cdot \beta^p
עיגול נקודה צפה: יהי x=\sigma\cdot\left(\sum_{i=1}^\infty rac{a_i}{eta^i}
ight)\cdoteta^p בבסים x\in\mathbb{R} ויהי ויהי ביסים x\in\mathbb{R} בבסים x\in\mathbb{R}
                                                                                                                                      .fl(x) = \begin{cases} \sigma \cdot \left( \sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p & 0 \le a_{t+1} < \frac{\beta}{2} \\ \sigma \cdot \left( \left( \sum_{i=1}^{t} \frac{a_i}{\beta^i} \right) + \frac{1}{\beta^t} \right) \cdot \beta^p & \frac{\beta}{2} \le a_{t+1} < \beta \end{cases}
                                                                                              	ilde{x}=\mathrm{fl}\left(x
ight) איי x\in\mathbb{R} ויהי ויהי t\in\mathbb{N}_{+} בסיס הי בסיס eta\in\mathbb{N}ackslash\left\{0,1
ight\} יהי
                                                                                                                                             e\left(x
ight)=x-\mathrm{fl}\left(x
ight) אזי x\in\mathbb{R} שגיאה: יהי
                                                                                                                                                   .|e\left(x
ight)| אזי x\in\mathbb{R} שגיאה מוחלטת: יהי
                                                                                                                                           \delta\left(x
ight)=rac{e\left(x
ight)}{x} אזי x\in\mathbb{R} שגיאה יחסית: יהי
                                                                                                                                      \operatorname{sfl}\left(x
ight)=x\left(1-\delta\left(x
ight)
ight) אזי x\in\mathbb{R} מסקנה: יהי
                                   |\delta\left(x
ight)|\leqeta^{-t+1} טענה: יהי |\delta\left(x
ight)|\leqeta^{-t+1} בסיס יהי ויהי t\in\mathbb{R}_+ ויהי ויהי t\in\mathbb{R}_+ בחיס יהי
                                 |\delta\left(x
ight)|\leq rac{1}{2}eta^{-t+1} איי צפה איי נקודה צפה איי ויהי x\in\mathbb{R} ויהי ויהי t\in\mathbb{N}_+ ויהי בעל ייצוג בעיגול נקודה צפה איי
                                                                                                                      |e(x+y)| \le |e(x)| + |e(y)| אזי x, y \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                                                                          |\delta\left(x+y
ight)|\leq\left|\delta\left(x
ight)|+\left|\delta\left(y
ight)
ight| מסקנה: יהיו x,y\in\mathbb{R} בעלי סימן זהה אזי
                                                                                  |\delta\left(x+y
ight)|\leq \max\left\{ \left|\delta\left(x
ight)\right|,\left|\delta\left(y
ight)
ight\} 
ight. טענה: יהיו x,y\in\mathbb{R} בעלי סימן זהה אזי
                                                                                                  |\delta\left(x-y
ight)|\leq \left|rac{e(x)}{x-y}
ight|+\left|rac{e(y)}{x-y}
ight| אזי x,y\in\mathbb{R} טענה: יהיו x,y\in\mathbb{R} אזי x,y\in\mathbb{R} טענה: יהיו x,y\in\mathbb{R} אזי x,y\in\mathbb{R} טענה: יהיו
```

 $|e\left(\frac{x}{y}\right)| \leq \frac{|x||e(y)|+|y||e(x)|}{|y\cdot f(y)|}$ אזי $x,y\in\mathbb{R}$ טענה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ אזי $x,y\in\mathbb{R}$ טענה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ אזי $x,y\in\mathbb{R}$ טענה: יהיו

אזי $f\left(a_0
ight)f\left(b_0
ight)<0$ אזי $a_0< b_0$ אזי $f:[a,b] o\mathbb{R}$ אהא arepsilon תהא

function BisectionMethod(a_0, b_0, ε):

```
while \frac{b_0-a_0}{2^{n+1}} \geq \varepsilon do
    m_n \leftarrow \frac{a_n + b_n}{2}
    if f(m_n) = 0 then
         return m_n
     else if f(a_n) f(m_n) < 0 then
          (a_{n+1}, b_{n+1}) \leftarrow (a_n, m_n)
     else if f(m_n) f(b_n) < 0 then
          (a_{n+1},b_{n+1}) \leftarrow (m_n,b_n)
end
```

```
|lpha-m_n|\leq rac{b-a}{2^{n+1}} וכן m_n	olpha וכן m_n	olpha וכן m_n	olpha וכן m_n	olpha וכן f:[a,b]	o \mathbb{R} אזי באלגוריתם החצייה f:[a,b]	o \mathbb{R} אזי באלגוריתם p\in\mathbb{R}_+ אזי באלגוריתם p\in\mathbb{R}_+ אזי p\in\mathbb{R}_+ אזי p\in\mathbb{R}_+ אזי p\in\mathbb{R}_+ אזי בורה p\in\mathbb{R}_+ אזי p\in\mathbb{R}_+
                                                                                                               מסקנה: סדר ההתכנסות של שיטת החצייה היא לינארית.
               e_n=rac{f(x_n)}{f'(\zeta_n)} אזי טענה: תהא f גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט lpha וכן lpha וכן f(x_n)=f(lpha)+f'(\zeta_n)\,e_n טענה: תהא
מסקנה: יהי f(x_n)=f(lpha)+f'(\zeta_n)\,e_n וכן שורש פשוט lpha וכן אזירה ברציפות גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט הוכן arepsilon
                                                                                                                                            |e_n| \leq \left|rac{2arepsilon_M}{f'(\zeta_n)}
ight| אזי |f\left(x_n
ight)| \leq arepsilon_M
                                                                    \lim_{x	olpha}\left|rac{f(x)}{xf'(x)}
ight| מספר המצב: תהא f גזירה ברציפות בעלת שורש lpha מסדר שני אזי f מספר המצב: x_{n+1}=x_n-rac{f(x_n)}{f'(x_n)} אזי x_0\in\mathbb{R} ויהי f\in C^1\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\setminus\{0\}
ight) שיטת ניוטון: תהא
           . טענה: תהא x_0\in\mathbb{R} אזי שיטת ניוטון בעלת סדר התכנסות ריבועי. בעלת שורש פשוט יחיד בעלת פשוט יחיד בעלת f\in C^1\left([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\}\right)
                                 x_{n+1}=x_n-f\left(x_n
ight)\cdotrac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})} אזי x_0,x_1\in\mathbb{R} ויהיו f\in C\left(\left[a,b
ight],\mathbb{R}\backslash\left\{0
ight\}
ight) איטת המיתרים: תהא
                                 אזי f\left(a_0\right)f\left(b_0\right)<0 עבורם a_0< b_0 אזי f:[a,b]	o\mathbb{R} אהא arepsilon יהי יהיי: regula falsi אלגוריתם שיטת
function RegulaFalsi(a_0, b_0, \varepsilon):
     n \leftarrow 0
      while \frac{b_0-a_0}{2^{n+1}} \geq \varepsilon do
           m_n = a_n - f(a_n) \cdot \frac{a_n - b_n}{f(a_n) - f(b_n)}
           if f(m_n) = 0 then
            else if f(a_n) f(m_n) < 0 then
                  (a_{n+1},b_{n+1}) \leftarrow (a_n,m_n)
            else if f(m_n) f(b_n) < 0 then
                 (a_{n+1}, b_{n+1}) \leftarrow (m_n, b_n)
                n \leftarrow n + 1
      end
x_0,x_1\in\mathbb{R} אזי שיטת המיתרים בעלת סדר התכנסות lpha=rac{1+\sqrt{5}}{2} בעלת שורש פשוט יחיד lpha ויהיו ויהיו lpha=1 איזי שיטת המיתרים בעלת סדר התכנסות lpha=1
                                                                                               x_n=g\left(x_{n-1}
ight) אזי x_0\in\mathbb{R} ויהי g:I	o\mathbb{R} אזי תהא
                                                                                                                           x_n אזי x_0 \in \mathbb{R} ויהי g:I 	o \mathbb{R} אזי איטרציה: תהא
                                                                                          x_n 	o lpha עבורה g:I 	o \mathbb{R} איטרציה: שיטת איטרציה:
                                                                                                           g\left(a
ight)=a עבורה a\in\mathbb{R} אזי g:I	o\mathbb{R} נקודת שבת: תהא
                                                                      g\left(lpha
ight)=lpha אזי איי אוי x_{n}
ightarrowlpha איי מתכנסת איטרציה מענה: עבורה g\in C\left(I,\mathbb{R}
ight)
                        g\in C\left(I,\mathbb{R}
ight) ותהא f:I	o\mathbb{R} ותהא שיטת איטרציה שיטת g\in C\left(I,\mathbb{R}
ight) ותהא ותהא
                                                                                   g\left(lpha
ight)=lpha עבורה lpha\in\left[a,b
ight] אזי קיימת g\in C\left(\left[a,b
ight],\left[a,b
ight]
ight)
                          g(\alpha)=\alpha עבורה lpha\in [a,b] אזי קיימת ויחידה עבורה g\in C^1\left([a,b],[a,b]
ight) אזי קיימת ויחידה g\in C^1\left([a,b],[a,b]
ight)
                        . מתכנסת לנקודת השבת g מתכנסת g מתכנסת אזי שיטת איי עבורו g \in C^1\left(\left[a,b\right],\left[a,b\right]\right) מסקנה: תהא
                                                               |e_n| \leq K |e_{n-1}| אזי |g'| \leq K עבורו K < 1 ויהי g \in C^1\left([a,b],[a,b]
ight) אזי אזי ויהי
                                                                      |g\left(x
ight)-g\left(y
ight)|\leq K\left|x-y
ight| עבורם K>0 וכן g:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R} פונקציה פונקציה
                                                                                           K עבורם g:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} וכן g:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} עבורם g:\mathbb{R} 	o \mathbb{R}
                                                                                   |g'| \geq K > 1 וכן |g'| \geq K > 1 עבורם לישפיץ g \in C^1(\mathbb{R}) מנאי מתיחה: פונקציה
                    g\left(lpha
ight)=lpha עבורה lpha\in\left[a,b
ight] עבורה אזי קיימת איזי קיימת ויחידה K<1 עבורה אויהי ענה: יהי X סטענה: יהי אויהי
                 . מסקנה: g מתכנסת לנקודת השבת K אזי שיטת האיטרציה g ווהי g \in C\left(X\right) מתכנסת לנקודת השבת.
                                               .|e_{n}|\leq\frac{K^{n}}{1-K}\left|x_{1}-x_{0}\right| אזי אזי G ליפשיץ עבורו יההי g\in C\left(X\right) ההא סגור מסקנה: יהי אזי סגור ההא K<1יהי יהי יהי אוהי סגור ההא
מתקיים כי x\in(lpha-arepsilon,lpha+arepsilon) ותהא g\in C^1 (ותהא g\in C^1 ותהא g\in C^1 מתקיים כי משפט: תהא
                                                                                                                                                                            \alphaמתכנסת ל־g
```

של $a \in [a,b]$ איי קיים שורש f(a) f(b) < 0 עבורם a < b של $f:[a,b] o \mathbb{R}$ אהי arepsilon יהיי a < b של ל

.|BisectionMethod $(a, b, \varepsilon) - q$ | $< \varepsilon$

 $.e_n = lpha - x_n$ אזי $x_n o lpha$ עבורה $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ אזי איני: תהא

```
|g'\left(lpha
ight)|<1 עבורה מושכת: תהא q\in C^{1}\left(I,\mathbb{R}
ight) אזי נקודה מושכת: תהא
                                                                                         |g'(\alpha)|>1 עבורה אוי נקודת שבת אזי q\in C^1(I,\mathbb{R}) עבורה נקודה דוחה:
|g'\left(\mathcal{U}
ight)|<1 וכן lpha\in\partial\mathcal{U},\partial\mathcal{V} תחומים באשר \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R} וכן lpha עבורה קיימים lpha עבורה אזי נקודת שבת lpha אזי נקודת שבת lpha
                                                                                                                                                                                    |g'(\mathcal{V})| > 1 וכן
\zeta = (\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon) אורש פשוט אזי קיים \varepsilon > 0 עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקטע \zeta \in [a,b] ויהי ויהי ויהי f \in C^1([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\}) מסקנה:
מתקיים x\in(lpha-arepsilon,lpha+arepsilon) עבורו לכל עבורה x\in(lpha-arepsilon,lpha+arepsilon) מתקיים x\in(lpha-arepsilon,lpha+arepsilon) מתקיים משפט: תהא
                                                                                                                                           כי g מתכנסת ל־\alpha בקצב התכנסות לינארי.
משפט: יהי p>1 לכל q^{(n)}(lpha)=0 וכן q^{(p)}(lpha)\neq 0 אזי קיים q ותהא q\in C^p(I,\mathbb{R}) לכל לכל משפט: יהי
                                                                        p מתכנסת ל־lpha בקצב התכנסות x\in(lpha-arepsilon,lpha+arepsilon) עבורו לכל
מסקנה: תהא \varepsilon>0 שיטת ניוטון מתכנסת בשוט עבורו \zeta\in[a,b] ויהי וויהי f\in C^2\left([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\}
ight) אזי קיים \varepsilon>0 שורש פשוט עבורו
                                                                                                                                                      (\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon) בקצב ריבועי בקטע
עבורו שיטת ניוטון arepsilon>0 אזי קיים f''(\zeta)\neq 0 וכן וכן f'(\zeta)=0 שורש עבורו \zeta\in [a,b] ויהי ווהי והי f\in C^2\left([a,b]\,,\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}
ight) אזי קיים מסקנה:
                                                                                                                                       \zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilonמתכנסת בקצב לינארי בקטע
                                                      g\left(x
ight)=x-m\cdotrac{f\left(x
ight)}{f'\left(x
ight)} אזי m\in\mathbb{N}_{+} יהי f\in C^{1}\left(\left[a,b
ight],\mathbb{R}ackslash\left\{0
ight\}
ight) שיטת ניוטון המתוקנת: תהא
n מסדר שיטת ניוטון המתוקנת מסדר arepsilon>0 שורש מדרגה t\in [a,b] ויהי וויהי איי ויהי t\in C^\eta\left([a,b],\mathbb{R}\setminus\{0\}
ight) שורש
a מתכנסת בקצב ריבועי בקטע (\zeta-arepsilon,\zeta+arepsilon). מתכנסת בקצב ריבועי בקטע (g\left(x
ight)=x-rac{f(x)^2}{f(x+f(x))-f(x)} אזי f\in C^1\left(\mathbb{R}
ight) תהא שיטת סטפנסן: תהא f\in I שיטה איטרטיבית ותהא g:I\to\mathbb{R} עבורו g:I\to\mathbb{R} שיטה איטרטיבית ותהא g:I\to\mathbb{R}
                                                                                                                      \alphaשיטת האיטרציה g המתחילה ב־x \in J
K\subseteq J שיטה איטרטיבית תהא g\in C^1(I,\mathbb{R}) שיטה איטרטיבית תהא lpha\in I נקודת שבת עם תחום התכנסות g\in C^1(I,\mathbb{R})
                                                                                                                            \left|g'\left(x
ight)
ight|\leq1 מתקיים x\in K וכן לכל lpha\in K
                                                                               a\left(x
ight)=x-D_{f}\left(x
ight)^{-1}\cdot f\left(x
ight) אזי f\in C^{1}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n}
ight) תהא תהא
טענה: תהא \zeta\in\mathbb{R}^n ויהי ויהי שורש פשוט אזי קיימת ענה: \chi\in\mathbb{R}^n סביבה של \chi\in\mathbb{R}^n ויהי ויהי ויהי ויהי f\in C^1\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)
                                                                                                                                                                                                    ריבועי.
                                    בעלת סדר לינארי. regula falsi אזי ווegula falsi איזי f\left(a\right)f\left(b\right)<0 באשר f\in C\left([a,b],\mathbb{R}
ight) איזי איזי
                                                                                                                   \Pi_n = \{f \in \mathbb{R} \ | x \ | \ \deg(f) \le n \} אזי n \in \mathbb{N} יהי ווי יהי n \in \mathbb{N}
                            a_0 \ldots a_n, b_0 \ldots b_n \in \mathbb{R} ויהיו n \in \mathbb{R} ויהיו n \in \mathbb{R} אזי ויהיו n \in \mathbb{R} פולינום טריגונומטרי: יהי
                                                                a_n(x)=\sum_{k=0}^n a_k e^{b_k x} אזי a_0\dots a_n,b_0\dots b_n\in\mathbb{R} ויהיו n\in\mathbb{N} יהי והי
        x_i \in \{0\dots n\} לכל p(x_i) = f(x_i) עבורו עבורו p \in \Pi_n אזיx_0 \dots x_n \in \mathbb{R} ותהיינה f: \mathbb{R} 	o \mathbb{R} לכל
                                 . משפט: תהא p\in\Pi_n ווחיד אינטרפולציה. נקודות אינטרפולציה אינטרפולציה ווחיד אינטרפולציה ווחיינה f:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
                                                               \ell_i\left(x
ight)=rac{\prod_{k\in\{0\ldots n\}\setminus\{i\}}(x-x_k)}{\prod_{k\in\{0\ldots n\}\setminus\{i\}}(x_i-x_k)} פולינום לגראנז': תהיינה x_0\ldots x_n\in\mathbb{R} נקודות שונות אזי
                                                                                                            \ell_i\left(x_i
ight) = \delta_{i,j} טענה: תהיינה x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R} נקודות שונות אזי
                                                                  \Pi_n טענה בסיס לגראנז': תהיינה \{\ell_0\dots\ell_n\} נקודות שונות אזי x_0\dots x_n\in\mathbb{R} בסיס של
         מסקנה צורת לגראנז': תהא \mathbb{R} \to \mathbb{R} ותהיינה f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} ותהיינה f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} מסקנה צורת לגראנז': תהא f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} ותהיינה f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} ותהיינה f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} ותהיינה אזי f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} אזי f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} בסיס של f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} בסיס של ניוטון: תהיינה f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} אזי f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} בסיס של ניוטון: תהיינה f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} אזי f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}
טענה: תהא f:\mathbb{R}	o \mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של בנקודות x_0\dots x_{n+1}\in\mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של בנקודות הא
                                                           X_0,\dots,x_n אזי איזי X_0,\dots,x_n פולינום אינטרפולציה של X_0,\dots,x_n פולינום אינטרפולציה איזי איזי אזי X_0,\dots,x_n
מסקנה: תהא f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} תהיינה f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} תהיינה f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} ויהי x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} בנקודות f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} אזי f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} אזי f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} אזי f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של f:\mathbb{R} 	o \mathbb{R}
מסקנה: תהא f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} תהיינה f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} יהי x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} בנקודות f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} מסקנה: תהא f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} תהיינה f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} יהי x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של x_0 \dots x_n \in \mathbb{R} אזי x_0 \dots x_{n+1}
                                                           \sum_{j=-1}^{n} A_{j+1} \prod_{i=0}^{j} (x - x_i) = \left( \sum_{j=-1}^{n-1} B_{j+1} \prod_{i=0}^{j} (x - x_i) \right) + A_{n+1} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)
\{x_0\dots x_k\}ב־f פולינום אינטרפולציה של ב־\sum_{j=-1}^{k-1}A_{j+1}\prod_{i=0}^j{(x-x_i)} ויהי ויהי x_0\dots x_k\in\mathbb{R} פולינום אינטרפולציה של פ
                                                                                                                                                                        f[x_0 \dots x_k] = A_k אזי
              f[x_0\dots x_k]=f\left[x_{\sigma(0)}\dots x_{\sigma(k)}
ight] תמורה אזי \sigma\in S_{k+1} שונות ותהא x_0\dots x_k\in\mathbb{R} תהיינה f:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
```

```
טענה נוסחה רקורסיבית להפרשים המחולקים: תהא f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} ותהיינה באשר באשר באשר באשר להפרשים המחולקים:
                                                             f\left[x_0\dots x_k
ight]=rac{f\left[x_1\dots x_k
ight]-f\left[x_0\dots x_{k-1}
ight]}{x_k-x_0}. e\left(x
ight)=f\left(x
ight)-p\left(x
ight) פ"א אזי p\in\Pi_n ויהי x_0\dots x_n\in\mathbb{R} תהיינה f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} תהיינה f:\mathbb{R}	o\mathbb{R}
                                                                                           משפט ביטוי לשגיאה באינטרפולציה: תהא f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} תהיינה f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} ויהי p\in\Pi_n ויהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                       .e(x) = f[x_0 ... x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)
 f[x_0\dots x_k]=rac{f^{(k)}(c)}{k!} עבורה c\in(a,b) אזי קיימת c\in(a,b) איזי קיימת f\in C^k\left((a,b)
ight) באשר באשר
מסקנה נוסחת השגיאה בפולינום האינטרפולציה: תהא f\in C([a,b]) באשר באשר f\in C([a,b]) תהיינה x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R} ויהי x_0\dots x_n,x\in\mathbb{R} באיז קיימת f\in C^{n+1}((a,b)) עבורה f\in C^{n+1}([a,b]) באשר f\in C^{n+1}([a,b]) באורה f\in C^{n+1}([a,b]) באשר f\in C^{n+1}([a,b]) באשר
 עבורה c\in(a,b) פ"א אזי קיימת p\in\Pi_n ויהי x_0\dots x_n, x\in\mathbb{R} תהיינה f\in C^{n+1}\left((a,b)
ight) באשר באשר באשר
                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |e(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| (b-a)^{n+1}
 ויהי x_0 \dots x_n, x \in \mathbb{R} תהא \left|f^{(n+1)}\right| \leq M עבורה M \in \mathbb{R} עבורה f \in C^{n+1}\left((a,b)\right) באשר באשר f \in C^{(n+1)}\left((a,b)\right) באשר \left|f^{(n+1)}\right| \leq M עבורה \left|f^{(n+1)}\right| \leq M פ"א אזי \left|f^{(n+1)}\right| \leq M באשר \left|f^{(n+1)}\right| \leq M עבורה \left|f^{(n+1)}\right| \leq M עבורה \left|f^{(n+1)}\right| \leq M עבורה \left|f^{(n+1)}\right| \leq M פ"א אזי \left|f^{(n+1)}\right| \leq M
 f_{\lceil [x_{i-1},x_i]}\in\Pi_k באשר f\in C^m\left([a,b]
ight) איזי k,m\in\mathbb{N} ויהיו fויהיו אויהין fויהיו באשר f\in C^m\left([a,b]
ight) באשר האוי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           i \in \{1 \dots n\} לכל
 וסדר k וסדר פונקציית ספליין ממעלה k הינה פונקציית ספליין ממעלה אזי פונקציית חלוקה של ו\{x_0 \dots x_n\} חלוקה של הערה: יהיו
                           (a,b] אינטרפולנט ליניארי למקוטעין: יהיו a,b\in\mathbb{R} תהא \{a,b\} חלוקה של ו\{a,b\} אינטרפולנט ליניארי למקוטעין: יהיו a,b\in\mathbb{R} תהא \{a,b\}_{i=0}^n איזי פונקציית ספליין ממעלה \{a,b\}_{i=0}^n ותהא \{a,b\}_{i=0}^n איזי \{a,b\}_{i=0}^n ותהא \{a,b\}_{i=0}^n איזי ותהא \{a,b\}_{i=0}^n איזי ותהא איזי ומעלה.
                                                                                                                                                                                                           f\left[x,x
ight]=f'\left(x
ight) אזי f\in C^{1}\left(\mathbb{R}
ight) תהא הפרש מחולק עם חזרה: תהא
                                                                                                                                                                                                                    f[x,x]=\lim_{h\to 0}f[x,x+h] אזי f\in C^{1}(\mathbb{R}) טענה: תהא
f\left[x_0\dots x_n
ight] = \left\{egin{array}{ll} rac{f\left[x_0\dots x_n
ight]-f\left[x_0\dots x_{n-1}
ight]}{x_n-x_0} & x_0< x_n \end{array}
ight. & 	ext{ בסדר עולה אזי} & x_0< x_n \end{array}
ight. & 	ext{ בסדר עולה אזי} & x_0=x_n \end{array}
ight. \ \left\{egin{array}{ll} f\left(x_0
ight) & x_0=x_n \end{array}
ight. & 	ext{ $T$} &
                                                                                                                               i\in\left\{ 0\ldots g\left(x_{i}
ight)-1
ight\} ולכל i\in\left\{ 0\ldots m
ight\} לכל לכל p^{\left(j
ight)}\left(x_{i}
ight)=f^{\left(j
ight)}\left(x_{i}
ight) אזי p\in\Pi_{n}
 משפט: תהא \sum_{i=0}^m g\left(x_i
ight)=n+1 אזי קיים ויחיד g:\{x_0\dots x_m\}	o\mathbb{N}_+ ותהיינה x_0\dots x_m\in\mathbb{R} אזי קיים ויחיד
                                                                                                                                                                                                                                                                                             . פולינום אינטרפולציית הרמיט p \in \Pi_n
  .1 חלקות k וסדר חלקות ספליין ממעלה אזי פונקציית אזי ויהי ווהר a,b \in \mathbb{R} חלוקה חלקות הרמיט: יהיו הרמיט: יהיו
                       . פולינום אינטרפולציית הרמיט. בולינום \sum_{j=-1}^{n-1}f\left[x_0\dots x_{j+1}
ight]\prod_{i=0}^{j}\left(x-x_i
ight) אזי אזי x_0\dots x_n\in\mathbb{R} פולינום אינטרפולציית הרמיט.
                                                                   B_n^k\left(x
ight)=inom{n}{k}x^k\left(1-x
ight)^{n-k} המוגדר B_n^k:[0,1]	o\mathbb{R} אזי k\in\{0\dots n\} ויהי n\in\mathbb{N} ויהי ויהי
                                                                                                                                                                                                                                                                 \Pi_n טענה: יהי \{B_n^k\}_{k=0}^n אזי n\in\mathbb{N} בסיס של יהי
                                                                               P_n^B\left(f,x
ight)=\sum_{k=0}^n B_n^k\left(x
ight)\cdot f\left(rac{k}{n}
ight) המוגדרת המוגדרת אזי P_n^B:\left([0,1]	o\mathbb{R}
ight)	imes[0,1]	o\mathbb{R} אזי n\in\mathbb{N} הגדרה: יהי
```

f מסקנה: תהא $\sum_{j=-1}^{n-1}f\left[x_0\dots x_{j+1}
ight]\prod_{i=0}^{j}(x-x_i)$ אזי אינטרפולציה של $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ פולינום אינטרפולציה של $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$

- למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $P_n^B\left(\lambda f+\mu g,x
 ight)=\lambda P_n^B\left(f,x
 ight)+\mu P_n^B\left(g,x
 ight)$ אזי $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ויהיו $f,g:[0,1] o\mathbb{R}$ תהיינה $\mathfrak{g}:[0,1]$
 - $B_n^k \geq 0$ מתקיים $k \in \{0 \dots n\}$ לכל
 - $P_n^B\left(c,x
 ight)=c$ אזי $c\in\mathbb{R}$ ויהי $f:[0,1] o\mathbb{R}$ תהא
 - $P_n^B(x,x) = x \bullet$

 - $P_n^B(x^2, x) = x^2 + \frac{1}{n}(x x^2) \bullet$ $\sum_{k=0}^n B_n^k(x) \left(\frac{k}{n} x\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n} \bullet$ $B_n^k(x) = x B_{n-1}^{k-1}(x) + (1-x) B_{n-1}^k(x) \bullet$

 $.f\left(x
ight)=\lim_{n
ightarrow\infty}P_{n_{.}}^{B}\left(f_{.}x
ight)$ אזי $x\in\left[0,1
ight]$ ותהא $f:\left[0,1
ight]
ightarrow\mathbb{R}$ איזי $\sup\left|f\left(x
ight)-P_{n}^{B}\left(x
ight)
ight|=\mathcal{O}\left(rac{1}{\sqrt{n}}
ight)$ אזי $x\in\left[0,1
ight]$ ותהא $f:\left[0,1
ight] o\mathbb{R}$ מסקנה: תהא חצי־מכפלה פנימית: יהי V מ"ו נ"ס אזי $H:V^2 o \mathbb{C}$ חצי־מכפלה פנימית:

 $\forall a,b \in V.H(a,b) = \overline{H(b,a)}$ הרמיטיות:

```
\forall a,b,c \in V. \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}. H (\alpha a + \beta b,c) = \alpha H (a,c) + \beta H (b,c) • לינאריות:
                                                                                                                                                                                                                                           \forall a \in V.H (a,a) \in \mathbb{R}_+ :חיוביות
                                                                                            \|a\| = \sqrt{H\left(a,a
ight)} אזי V אזי אוי מישרית: יהי V מ"ו נ"ס ותהא חצי־מכפלה פנימית H על א
מכפלה פנימית H מיניV מייני באשר מכפלה פנימית מכפלה פנימית מעל מינימליים: יהי V מייני מיינימליים: יהי מכפלה מנימליים: אחרי־מכפלה מכפלה פנימית מעל אחרי־מכפלה פנימית מכפלה פומית מכפלה פנימית מכפלה פומית מכפ
                                                                                                                                                    \arg\min_{v\in \operatorname{span}\{v_0\dots v_n\}}\left(\operatorname{dist}\left(u,v\right)\right)אזי u\in Lיהי \operatorname{span}\left\{v_0\dots v_n\right\}מעל
k\in\{0\dots n\} אזי (u לכל מינימליים מינימליים אזי אזי הינו אזי אזי \sum_{i=0}^n c_i v_i) אזי אזי אזי אזי אזי span \{v_0\dots v_n\}
                                                                                                                                                                                                                                                  c_i = \sum_{i=0}^n c_i(v_i, v_k) = (u, v_k)מתקיים
(v-u) \perp \mathrm{span}\,\{v_0\dots v_n\} ויהי u\in L קירוב ריבועים מינימליים אזי v\in \mathrm{span}\,\{v_0\dots v_n\} יהי ויהי
מערכת משוואות נורמלית: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית H מעל V תהא מערכת משוואות נורמלית: יהי V מ"ו נ"ס תהא חצי־מכפלה פנימית מערכת משוואות נורמלית: יהי V
                                                                                                                    \sum_{i=0}^n c_i\left(v_i,v_k
ight)=(u,v_k) אזי איזי c_0\ldots c_n\in\mathbb{R} ויהיו u\in L יהי \{v_0\ldots v_n\} מעל
\sum_{i=0}^n rac{H(f,v_i)}{H(v_i,v_i)}\cdot v_i מעל u\in L ויהי u\in L אזי הקירוב ריבועים מינימליים הוא u\in L אזי אזי הקירוב ריבועים מינימלים ממשקלת: תהא u\in L חיובית ממש עד כדי קבוצה זניחה אזי u\in C^1\left([a,b]
ight) כך מכפלה פנימית ממושקלת: תהא u\in C^1\left([a,b]
ight) חיובית ממש עד כדי קבוצה זניחה אזי
                                                                                                                                                                                                                                                                               H(f,g) = \int_a^b (f \cdot g \cdot w)
C^1\left([a,b]
ight) איי מכפלה פנימית ממושקלת הינה מכפלה פנימית מש עד כדי קבוצה אניחה איי מכפלה פנימית ממושקלת w\in C^1\left([a,b]
ight)
סדרה אורתוגונלית של פולינומים: תהא q_n\in\Pi_n מכפלה פנימית מעל \mathbb{R}\left[x
ight] אזי אוי \mathbb{R}\left[x
ight] באשר הא וכן לכל q_n\in\Pi_n וכן לכל q_n\in\Pi_n
                                                                                             .P_{n+1}\left(x
ight)=rac{2n+1}{n+1}xP_{n}\left(x
ight)-rac{n}{n+1}P_{n-1}\left(x
ight) וכך P_{1}\left(x
ight)=x וכך וכך P_{0}\left(x
ight)=1 וכך פולינומי לג'נדר:
                                     . טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת 1 בקטע [-1,1] אזי פולינומי לג'נדר מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.
                                                                                                                                  .P_{n+1}\left(x
ight)=x\cdot P_{n}\left(x
ight)-rac{\left(P_{n},P_{n}
ight)}{\left(P_{n-1},P_{n-1}
ight)}P_{n-1}\left(x
ight) אזי n\in\mathbb{N}\backslash\left\{ 0,1
ight\} טענה: יהי
                                                                                                                                                                                                                      T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x)) פולינומי צ'בישב:
                    . שענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} בקטע [-1,1] אזי פולינומי צ'בישב מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.
                                                             T_{n+1}\left(x
ight)=2xT_{n}\left(x
ight)-T_{n-1}\left(x
ight) וכך T_{1}\left(x
ight)=x וכך T_{1}\left(x
ight)=2xT_{n}\left(x
ight)-T_{n-1}\left(x
ight) וכך T_{1}\left(x
ight)=2xT_{n}\left(x
ight)-T_{n-1}\left(x
ight) וכך T_{1}\left(x
ight)=2xT_{n}\left(x
ight)-T_{n-1}\left(x
ight) וכך T_{1}\left(x
ight)=1 וכך T_{1
                                      . טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת e^{-x} בקטע בקטע (\infty) אזי פולינומי לגר מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.
                                                                                                  H_{n+1}\left(x
ight)=2xH_{n}\left(x
ight)-2nH_{n-1}\left(x
ight) וכן H_{1}\left(x
ight)=2x וכן H_{0}\left(x
ight)=1 פולינומי הרמיט:
                  . מסענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת e^{-x^2} בקטע (-\infty,\infty) אזי פולינומי הרמיט מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.
                  טענה: תהא של פולינומים אזי סדרה אורתוגונלית של פולינומים אזי Q_{n+1}\left(x
ight)=xQ_{n}\left(x
ight)+\sum_{i=0}^{n}f\left(n+1,i
ight)\cdot Q_{i}\left(x
ight) ותהא ותהא לינומים אזי f:\mathbb{N}^{2}
ightarrow\mathbb{R}
                                                                                                                                                                                                  .f\left(n+1,i
ight)=-rac{(xQ_n,Q_i)}{(Q_j,Q_j)} • .f\left(n+1,i
ight)=0 לכל i\in\{0\dots n-2\} סתקיים
```

טענה: תהא $b'\in\mathbb{R}^m$ ויהי $b'\in\mathbb{R}^m$ ויהי הי של למרחם וכן עמודות $b'\in\mathbb{R}^m$ באשר $a\in M_{m\times n}$ באשר $a\in M_{m\times n}$ ויהי הי של למערכת $a\in M_{m\times n}$ איי פיים ויחיד פתרון למערכת $a\in M_{m\times n}$

 $.f'(x)=p'(x)+rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f\left[x_0\dots x_n,x
ight]\prod_{i=0}^n\left(x-x_i
ight)
ight)$ אזי f אזי f אויהי f פ"א של f אזי f אזי f אזי f תהיינה f עבורן אם f אזי f אזי f אזי f אזי f עבורן אם f עבורן אם f עבורן אם f אזי f אזי f אזי f אזי f עבורן אם f אזי f אזי f אזי f עבורן אם f

טענה: תהא $\sigma \in S_{n+1}$ ותהא בסדר חוקי $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ תמורה בסדר חוקי אזי $f: \mathbb{R} o \mathbb{R}$

 $f[x_0 \dots x_n] = f[x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(n)}]$

. רציפה $f\left[x_0\ldots x_n,x
ight]$ אזי $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ ותהיינה $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ אזי

 $.\left(rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left[x_0\ldots x_n,x
ight]
ight)(x)=f\left[x_0\ldots x_n,x,x
ight]$ אזי $x_0\ldots x_n\in\mathbb{R}$ ותהיינה $f:\mathbb{R} o\mathbb{R}$ ותהיינה

מסקנה: תהא $x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ ותהיינה $f \in C^1\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי

 $.e_{f'}(x) = f[x_0 \dots x_n, x, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) + f[x_0 \dots x_n, x] \frac{d}{dx} (\prod_{i=0}^{n} (x - x_i))$

עבורם $\zeta, \xi \in (a,b)$ מסקנה: תהא $f \in C^1\left([a,b]\right)$ תהיינה $f \in C^1\left([a,b]\right)$ עבורם $f \in C^1\left([a,b]\right)$ עבורם $.f'\left(x\right) = p'\left(x\right) + \frac{f^{(n+2)}(\zeta)}{(n+2)!} \cdot \prod_{i=0}^n \left(x-x_i\right) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\prod_{i=0}^n \left(x-x_i\right)\right)$

```
|e_{f'}\left(a
ight)| \leq Ch^p המקיימים h \in \left[\min_{i \neq j}\left|x_i - x_j\right|, \max\left|x_i - x_j\right|\right]
  הוא השיטה הקירוב של הקירוב של העיטה פיסר מקסימלי הנקודות עם איטת הירוב של הנקודות איטת x_1 \dots x_n השיטה הוא שיטת הירוב של הנקודות איטה הוא הערה:
                                                                                                                                                                                                                                                         |e\left(x
ight)|=\mathcal{O}\left(h^{p}
ight) מינימלי עבורו p\in\mathbb{N}
  טענה: תהא \{x_0\dots x_n\} סימטריות סביב a\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\dots x_n\} ותהא ותהא x_0\dots x_n\in\mathbb{R} סימטריות סביב f\in C^1(\mathbb{R})
                                                                                                                                                                                                                                                                                    \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right) (a) = 0
  מתקיים p\in\Pi_n מתקיים מסימלי עבורו לכל שגיאה של נוסחת אייה של נוסחת f:\mathbb{R}	o\mathbb{R} מתקיים מתקיים מדר דיוק אלגברי: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                .e_p = 0
                                                                                                                                                                    x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R} עענה: תהא f \in C^m\left(\mathbb{R}
ight) ויהי ויהי f \in C^m\left(\mathbb{R}
ight) אזי
 f''(x) = p''(x) + f[x_0 \dots x_n, x, x, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) + 2f[x_0 \dots x_n, x, x] \frac{d}{dx} \left( \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right) + f[x_0 \dots x_n, x] \frac{d^2}{dx^2} \left( \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right)
                          עבורם \zeta,\xi,\chi\in(a,b) מסקנה: תהא f\in C^2\left([a,b]\right) תהיינה f\in C^2\left([a,b]\right) ויהי f\in C^2\left([a,b]\right) אזי קיימים f\in C^2\left([a,b]\right) עבורם f''(x)=p''(x)+\frac{f^{(n+3)}(\zeta)}{(n+3)!}\cdot\prod_{i=0}^n(x-x_i)+\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^n(x-x_i)\right)+\frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\prod_{i=0}^n(x-x_i)\right) כלל הפרש קדמי לקירוב נגזרת: תהא f\in C^2\left(\mathbb{R}\right) יהי f\in C^2\left(\mathbb{R}\right) אזי f\in C^2\left(\mathbb{R}\right)
                       \mathcal{O}\left(h
ight) טענה: תהא f\in\mathcal{C}^{2}\left(\mathbb{R}
ight) ויהי באשר קיימת סביבה a\in\mathbb{R} של בה a\in\mathcal{C} ויהי ויהי ויהי a\in\mathcal{C}
                                                                                                    rac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} אזי h>0 ויהי a\in\mathbb{R} יהי f\in C^{2}\left(\mathbb{R}
ight) תהא נגזרת: תהא
                     a,p'\left(a
ight)=rac{f\left(a+h
ight)-f\left(a-h
ight)}{2h} אזי a\in\mathbb{R} אזי a\in\mathbb{R} יהי a\in\mathbb{R} יהי a\in\mathbb{R} יהי a\in\mathbb{R} יהי a\in\mathbb{R} יהי
                \mathscr{O}\left(h^{2}
ight) טענה: תהא f \in \mathcal{C}^{3}\left(\mathbb{R}
ight) ויהי a \in \mathbb{R} באשר קיימת סביבה a \in \mathbb{R} של a \in \mathbb{R} ויהי
               .2 טענה: תהא f \in C^3\left(\mathbb{R}\right) ויהי באשר קיימת סביבה u של של בה ביבה u של באשר קיימת סביבה u באשר פיימת מרכזי בעל סדר דיוק אלגברי u
 בילת הפרש D מסדר f'(a) מסדר f'(a) משפט ריצ'רדסון: a\in\mathbb{R} יהי f\in C^1(\mathbb{R}) אייה משפט ריצ'רדסון: תהא
                                                                                                                                                                                                                             .f^{\prime}\left(a
ight)=D\left(h
ight)+\sum_{i=0}^{\infty}C_{i}h^{2k+2i} נקודותיה אזי
 מסקנה f'(a) מסדר f'(a) מסדר a\in\mathbb{R} יהי a\in\mathbb{R} יהי ותהא f\in C^1(\mathbb{R}) מסדר ל־נעלת הפרש בעלת הפרש
          f'(a) = \frac{4^k D(h) - D(2h)}{4^k - 1} + \mathcal{O}\left(h^{2k+2}\right) בין נקודותיה אזי f = \int_a^b f = \int_a^b f + \int_a^b f\left[x_0 \dots x_n, x\right] \prod_{i=0}^n (x-x_i) \, \mathrm{d}x טענה: תהא f = \int_a^b f + \int_a^b f\left[x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}\right] ותהיינה f = \int_a^b f + \int_a^b f\left[x_0 \dots x_n + \int_a^b f\left[x
                                             (x_i, y_i) טענה: תהא (x_i, y_i) תהיינה f \in C^{n+1} תהיינה f \in C^{n+1} תהיינה f \in C^{n+1} אזי f \in C^{n+1} ([a,b]) אזי f \in C^{n+1} ([a,b]) (b-a) (a,b) (a,b) (a,b) (a,b) (a,b) (a,b) (a,b) אזי (a,b) (a,b) (a,b) (a,b) (a,b)
|E\left(\int_a^b f
ight)| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+2}
ight) באשר |E\left(\int_a^b f
ight)| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+2}
ight) בעלת סימן קבוע בקטע |E\left(\int_a^b f
ight)| = \int_a^b (x-x_i) אזי קיים |E\left(\int_a^b f
ight)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i) \,\mathrm{d}x עבורו |E\left(\int_a^b f
ight)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i) \,\mathrm{d}x אזי |E\left(\int_a^b f
ight)| = \int_a^b (x-x_i) \,\mathrm{d}x אזי |E\left(\int_a^b f
ight)| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+2}\right)
                                                                                                                                                                        (b-a)\,f\,(a) אזי f\in C^1\,([a,b]) אזי אינטגרל: תהא מלבן לקירוב אינטגרל:
                                                          E\left(\int_a^b f
ight)=rac{(b-a)^2}{2}f'\left(\xi
ight) הינה כלל המלבן הינה \xi\in(a,b) אזי קיים \xi\in(a,b) אזי אזי קיים
                                                  . \frac{b-a}{2}\left(f\left(a\right)+f\left(b\right)\right) אזי f\in C^{2}\left([a,b]\right) תהא אינטגרל: תהא לקירוב אינטגרל: \xi\in(a,b) אזי קיים ל\xi\in(a,b) אזי קיים ל\xi\in(a,b) אזי קיים לבורו שגיאת כלל הטרפז הינה ל\xi\in(a,b)
 טענה: תהא \int_a^b \prod_{i=0}^{n-1} (x-x_i) וכן ותהיינה f \in C^{n+2} בעלת סימן קבוע \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i) \,\mathrm{d}x = 0 באשר באשר \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i) \,\mathrm{d}x = 0 בעלת סימן קבוע E\left(\int_a^b f\right) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n+1} (x-x_i) \,\mathrm{d}x עבורו \xi \in (a,b) אזי קיים \xi \in (a,b) אזי קיים \xi \in (a,b)
 מסקנה: תהא \int_a^b \prod_{i=0}^{n+1} (x-x_i) \, \mathrm{d}x = 0 באשר באשר \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i) \, \mathrm{d}x = 0 באשר דינה f \in C^{n+2}\left([a,b]\right) וכן
                                                                                                                                                                                                                           \left|E\left(\int_a^bf
ight)
ight|=\mathcal{O}\left(\left(b-a
ight)^{n+3}
ight) איי [a,b] בקטע
                                                                                                                                           (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) אזי f\in C^2([a,b]) מלל נקודת האמצע לקירוב אינטגרל: תהא
```

מסקנה: תהא $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ותהיינה $f: [a,b] o \mathbb{R}$ אזי

 $.e_{f^{\prime}}\left(a
ight)=\mathcal{O}\left(\left(b-a
ight)^{n}
ight)$ אזי $\prod_{i=0}^{n}\left(a-x_{i}
ight)=0$ אם •

 $e_{f'}(a)=\mathcal{O}\left((b-a)^{n+1}
ight)$ אא $rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_{i}
ight)
ight)(a)=0$ אם •

סדר הקירוב: תהא $C\in\mathbb{R}$ וקיים אזי מקסימלי עבורו קיים $p\in\mathbb{N}$ אזי אינ א $x_0\dots x_n^{'}\in\mathbb{R}$ ותהיינה

```
E\left(\int_a^bf
ight)=rac{(b-a)^3}{24}f''\left(\xi
ight) האמצע הינה כלל נקודת האמצע עבורו שגיאת בורו שגיאת \xi\in(a,b) אזי קיים \xi\in(a,b) אזי קיים f\in C^2\left([a,b]
ight) אזי (הכלל לקירוב \sum_{i=0}^nA_if\left(x_i
ight) ההיינה f\in R\left([a,b]
ight) תהיינה f\in R\left([a,b]
ight) תהיינה ביא של לאזי (הכלל לקירוב ביא של לאזי (הכלל לענה ביא של לענה
                                                                                                                                                                    \int_a^b p\left(x
ight)\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^n A_i p\left(x_i
ight)אינטגרל בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות
 \sum_{i=0}^n A_i f\left(x_i
ight) אזי (הכלל x_0 \ldots x_n \in [a,b] ותהיינה A_0 \ldots A_n \in \mathbb{R} תהיינה w \geq 0 באשר באשר באשר הכלל
                            .(A_{i}=\int_{a}^{b}\ell_{i}\left(x\right)w\left(x\right)\mathrm{d}x בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות אלגברי של לפחות בעל סדר דיוק אלגברי לפחות בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות היים אלגברי של לפחות היים בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות היים אלגברי של היים אלגברי של היים אלגברי של לפחות היים אלגברי של היי
                                                                                                                                             \frac{b-a}{6}\left(f\left(a
ight)+4f\left(rac{a+b}{2}
ight)+f\left(b
ight)
ight) אזי f\in C\left(\left[a,b
ight]
ight) תהא תהא
                                                                                                                                                                                                                 .3 טענה: תהא דיוק אלגברי אזי כלל סימפסון אזי לה f \in C\left([a,b]
ight) אהי טענה:
                                             E\left(\int_a^b f
ight) = -\left(rac{b-a}{2}
ight)^5 \cdot rac{f^{(4)}(\xi)}{90} הינה כלל סימפסון הינה \xi \in (a,b) אזי קיים ל\xi \in (a,b) אזי קיים לבורו שגיאת כלל סימפסון הינה
                                                                                  , היינטגרל: תהא f\in C^2\left([a,b]
ight) ותהא אוי חלוקה בעלת הפרש קבוע k אוי x_0\dots x_n חלוקה בעלת הפרש קבוע
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     .T_h(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))
                             E\left(\int_a^b f\right) = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''\left(\xi
ight) הטרפז המורכב הינה \xi \in (a,b) אזי קיים \xi \in (a,b) עבורו שגיאת כלל הטרפז המורכב הינה f \in C^2\left([a,b]\right)
        \left|E\left(\int_a^b f\right)
ight| \leq \frac{(b-a)h^2}{12}M אזי שגיאת כלל הטרפז המורכב הינה \left|f^{(2)}
ight| \leq M אזי שגיאר כלל הטרפז המורכב הינה f \in C\left([a,b]
ight) אזי שגיאר כלל סימפסון המורכב לקירוב אינטגרל: תהא f \in C\left([a,b]
ight) ותהא f \in C\left([a,b]
ight) חלוקה בעלת הפרש קבוע f \in C\left([a,b]
ight) אזי f 
                  E\left(\int_{a}^{b}f
ight)=-rac{(b-a)h^{4}}{180}f^{(4)}\left(\xi
ight) הינה הורכב הינה עבורו שגיאת לכלל שנישם אזי קיים אזי קיים ל\xi\in(a,b) אזי קיים ל
                                                                                                 S_h\left(f
ight)=rac{4T_h(f)-T_{2h}(f)}{3} אזי אזי f\in C\left([a,b]
ight) אוי הפרש קבוע a_0\ldots x_n ותהא
 arepsilon \in \mathbb{R}^n מורכב עם שגיאה לקירוב אינטגרל: תהא f \in C^2([a,b]) תהא הפרש קבוע אינטגרל הטרפז המורכב עם שגיאה לקירוב אינטגרל
                                                                                                                                                                                                                                                                                               \sum_{i=0}^{n-1}rac{h}{2}\left(f\left(x_{i}
ight)+arepsilon_{i}+f\left(x_{i+1}
ight)+arepsilon_{i+1}
ight) אזי
 מסקנה: תהא \varepsilon\in\mathbb{R}^n אזי שגיאת הפרש קבוע x_0\dots x_n חלוקה בעלת הטרפז אזי שגיאת כלל הטרפז חלוקה בעלת הפרש קבוע \left|E\left(\int_a^bf\right)\right|\leq \frac{(b-a)h^2}{12}\left|f''\left(\xi\right)\right|+(b-a)\cdot\max_{i\in[n]}\left(\varepsilon_i\right) הינה n\in\mathbb{N} אזי המקדם הראשי של n\in\mathbb{N} הינו
                                                                                                                                                                                      \{T_n=0\}=\left\{\cos\left(\frac{2k+1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\mid k\in\{0,\ldots,n-1\}\right\} אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |\{T_n=0\}|=n אזי n\in\mathbb{N} מסקנה: יהי
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  -1 < T_n < 1 אזי n \in \mathbb{N} טענה: יהי
                                                                                                                      -\{\cos\left(rac{k\pi}{n}
ight)\mid k\in\{0,\dots,n\}\} איי נקודות הקיצון של דT_n של של נקודות איי איי יהי מענה: יהי n\in\mathbb{N}
פעמו. אוא נקווות ווקיבון t_n על פולינומים t_n על t_n על t_n על t_n על פולינומים t_n על פולינומים t_n על t_n על t_n על פולינומים t_n על פולינומים t_n על t_n על t_n על פולינומים t_n על פולינומים t_n אוי על פולינומים t_n באשר t_n באשר t_n על t_n על פורו שגיאת כלל גאוס הינה t_n באשר t_n באשר t_n באשר t_n פונה אוי כלל גאוס בעל סדר דיוק אלגברי t_n באשר t_n באשר t_n פונה אוו באשר t_n באשר t_n באשר t_n פונה אוו באשר t_n באשר t_n באשר t_n באשר t_n פונה אוו באשר t_n באשר t_n
                              \|e\left(x
ight)\|_{\infty}=\left|rac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}
ight|\cdot\left\|\prod_{i=0}^{n}\left(x-x_{i}
ight)
ight\|_{\infty} עבורו c\in\left(a,b
ight) אזי קיים f\in C^{n+1}\left(\left[a,b
ight]
ight) איז קיים f\in C^{n+1}\left(\left[a,b
ight]
ight)
                                                                                                                                                                                                                                              \widehat{T}_{n}\left(x
ight)=rac{1}{2^{n-1}}T_{n}\left(x
ight) אזי n\in\mathbb{N} יהי מתוקן: יהי
  \|f\left(x
ight)-p\left(x
ight)\|_{\infty}\leq\|f\left(x
ight)-q\left(x
ight)\|_{\infty} מתקיים מתקיים מתקיים q\in\Pi_{n} אזי איז איז f\in C\left([a,b]
ight) אזי מתוקן עבורו לכל
                                                                                                                                                        .\left\|\widehat{T}_n\right\|_\infty \leq \|p\|_\infty אזי [-1,1] אזי משפט משפט יהי יהי לפולינומים: יהי יהי p\in\Pi_n משפט המינימקס לפולינום יהינו \widehat{T}_{n+1} של x^{n+1}-\widehat{T}_{n+1} (x) הינו [-1,1] בקטע של x^{n+1} של מסקנה: פולינום המינימקס ממעלה x^{n+1}
                             \widehat{T}_{n+1} מסקנה: יהי f \in R([-1,1]) פולינום מדרגה f \in R ויהי ויהי p \in \Pi_n פולינום מדרגה f \in R([-1,1]) פולינום המינימקס של
 (קיימים המינימקס של לפולינום המינימקס: תהא p\in\Pi_n ויהי ווהי f\in C\left([a,b]
ight) תהא המינימקס: תהא
                                                                                        f(t_i) - p(t_i) = \mathrm{sign}\left(e\left(t_0\right)\right) \cdot \left(-1\right)^i \cdot \left\|f - p\right\|_{\infty} עבורם t_0 \dots t_{n+1} \in [a,b]
                                                                                                                         נורמה 
u_{	exttt{M}}:M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)
ightarrow\mathbb{R} אזי 
u:\mathbb{R}^{n}
ightarrow\mathbb{R} המוגדרת מושרית על מרחב המטריצות: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        .\nu_{\mathsf{M}}\left(A\right) = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} \right\}

u = 
u_{\mathsf{M}} \,נורמה אזי נסמן 
u : \mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} \, נורמה הערה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                                     M_n\left(\mathbb{R}
ight) טענה: תהא 
u:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} נורמה אזי 
u:\mathbb{R}^n
                                                                                                                                             .
u\left(A
ight)=\max_{v\in\mathbb{S}^{n-1}}\left\{ 
u\left(Av
ight)
ight\} אזי A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight) נורמה 
u:\mathbb{R}^{n}
ightarrow\mathbb{R} אזי
                                                                                                                .
u\left(Ax
ight)\leq
u\left(A
ight)\cdot
u\left(x
ight) אזי x\in\mathbb{R}^{n} ותהא ותהא A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight) נורמה תהא 
u:\mathbb{R}^{n}	o\mathbb{R} אזי וורמה תהא
```

```
m\cdot\eta\left(A
ight)\leq
u\left(A
ight)\leq M\cdot\eta\left(A
ight) עבורם m,M>0 נורמות אזי קיימים 
u,\eta:\mathbb{R}^{n}	o\mathbb{R}
                                                                                                       \operatorname{spec}\left(A
ight)=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid A שאי \lambda\} אזי A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight) תהא מטריצה: תהא

ho\left(A
ight)=\max_{\lambda\in\operatorname{spec}(A)}|\lambda| אזי A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) תהא רדיוס ספקטראלי: תהא

ho\left(A
ight)\leq
u\left(A
ight) אזי A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight) נורמה ותהא 
u:\mathbb{R}^{n}
ightarrow\mathbb{R} אזי 
u:\mathbb{R}^{n}
ightarrow\mathbb{R}
                                                                                                                                                                                      .
u\left(I
ight)=1 נורמה אזי 
u:\mathbb{R}^{n}
ightarrow\mathbb{R} ענה: תהא
                                                                        . מטקנה: הפונקציה f\left(A
ight)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{i,j}\right| המוגדרת f:M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)	o\mathbb{R} אינה נורמה משרית.
                                                                         .
u\left(A
ight) \leq 
ho\left(A
ight) + arepsilon עבורה 
u:\mathbb{R}^n 	o \mathbb{R} אזי קיימת נורמה A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight) ותהא arepsilon > 0 יהי
                   A=x-x אזי A	ilde{x}=b+r וכן A=a=b באשר בשר A=b ותהיינה A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) אזי A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) אזי
                                                                      Ae=r אזי A	ilde{x}=b+r וכן Ax=b באשר באר Ar=b ותהיינה ותחיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינה ותחיינה ותהיינה ותחיינה ותהיינה ותחיינה ותהיינה ותחיינה ותחיינה ותהיינה ותחיינה ותהיינה ותהיינה ותהיינ
                    מסקנה: תהא \|\cdot\| נורמה מושרית תהא A=b+r הפיכה ותהיינה A,x=b+r באשר באשר A,x=b+r וכן A,x=b+r אזי \|\cdot\| נורמה מושרית תהא
                                                                                                                                                                                                                                            ||b|| \le ||A|| \, ||x|| \bullet
                                                                                                                                                                                                                                     ||x|| \le ||A^{-1}|| \, ||b|| \bullet
                                                                                                                                                                                                                                            ||r|| < ||A|| \, ||e|| \bullet
                                                                                                                                                                                                                                     ||e|| \le ||A^{-1}|| \, ||r|| \bullet
                       טענה: תהא \|\cdot\| נורמה מושרית תהא A \in B + r הפיכה ותהיינה A \in B + r באשר באשר A \in A \in M_n וכן A \in A \in A אזי
                                                                                                                                                                                                                            \begin{array}{c} .\frac{1}{\|A\|} \leq \frac{\|e\|}{\|r\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \bullet \\ .\frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|b\|}{\|x\|} \leq \|A\| \bullet \end{array}
A	ilde{x}=b+r וכן Ax=b וכן Ax=b אזי אורית תהא A	ilde{x}=b+r וכן Ax=b הפיכה ותהיינה ותהיינה A	ilde{x}=b+r אזי
                                                               \cdot \frac{1}{\|A\|\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|e\|}{\|r\|} \cdot \frac{\|b\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| cond (A) = \|A\| \|A^{-1}\| \|A^{-1}\| אזי \|A \in M_n(\mathbb{R}) אוורמה מושרית ותהא \|\cdot\| אוורמה \|\cdot\| אוורמה מספר המצב של מטריצה: תהא
וכן Ax=b באשר b,r,x,	ilde{x}\in\mathbb{R}^n הפיכה ותהיינה A\in M_n\left(\mathbb{R}\right) בורמה מושרית תהא וורמה מושרית תהא
                                                                                                                                                                                                                                                           אזי A\tilde{x} = b + r
                                                                                                                                                                                                                                                   .\delta\left(x\right) = \frac{\|e\|}{\|x\|} \bullet.\delta\left(b\right) = \frac{\|r\|}{\|b\|} \bullet
טענה: תהא \|\cdot\| נורמה מושרית תהא \tilde{x}=b+r הפיכה ותהיינה \tilde{x}\in\mathbb{R}^n באשר הפיכה וכן A	ilde{x}=b+r וכן
                                                                                                                                                                                                                    .\delta\left(x\right) \in \left[\frac{\delta\left(b\right)}{\operatorname{cond}\left(A\right)}, \operatorname{cond}\left(A\right)\delta\left(b\right)\right]
                                                                                         \operatorname{cond}\left(A
ight)\geq\left|rac{\max\operatorname{spec}(A)}{\min\operatorname{spec}(A)}
ight| נורמה מושרית ותהא A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight) הפיכה אזי\|\cdot\| נורמה
                                                                                                                             \operatorname{add}(A) \geq 1 אזי A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight) נורמה מושרית ותהא \|\cdot\| אזי וורמה מסקנה:
                           \operatorname{cond}\left(A
ight)\geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|} אזי A
eq B נורמה מושרית ותהיינה A,B\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) באשר באשר וכן \|\cdot\| נורמה מושרית ותהיינה ותהיינה וכן
                                                               \operatorname{acond}(A) = \max\left\{ \frac{\|A\|}{\|A-B\|} \ \middle| \det(B) = 0 \right\} אאי A \in M_n\left(\mathbb{R}\right) אור מורמה מושרית נורמה מושרית ותהא A \in M_n\left(\mathbb{R}\right) אאי A \in M_n\left(\mathbb{R}\right) נורמה מושרית ותהא נורמה A \in M_n\left(\mathbb{R}\right) אאי A \in M_n\left(\mathbb{R}\right) נורמה מושרית ותהא ותהא A \in M_n\left(\mathbb{R}\right) איז נורמה מושרית ותהא ותהא ותהא
וכן A	ilde{x}=b+r וכן Ax=b וכן של אויע של אויע של
                                                                                                                          .\delta\left(x
ight)=\left|rac{\max\operatorname{spec}(A)}{\min\operatorname{spec}(A)}
ight|\cdot\delta\left(b
ight) איז \min\operatorname{spec}\left(A
ight) וכך r ו"ע של \max\operatorname{spec}\left(A
ight)
                                                                         \operatorname{cond}\left(AB\right) \leq \operatorname{cond}\left(A\right) \cdot \operatorname{cond}\left(B\right) אזי A,B \in M_n\left(\mathbb{R}\right) מענה: תהא
    .e=	ilde{x}-x אזי (A+R)\,	ilde{x}=b וכן Ax=b באשר באשר b,x,	ilde{x}\in\mathbb{R}^n אזי A,R\in M_n\left(\mathbb{R}
ight) אזי
                                               Ae=-R	ilde{x} אזי אוי (A+R)\,	ilde{x}=b וכן Ax=b באשר באשר b,x,	ilde{x}\in\mathbb{R}^n ותהיינה
(A+R)\,	ilde x=b וכן Ax=b באשר b,x,	ilde x\in\mathbb{R}^n והפיכה ותהיינה A,R\in M_n\,(\mathbb{R}) וכן Ax=b וכן b,x,	ilde x\in\mathbb{R}^n וביכה ותהיינה ווכן Ax=b
                                                                                                                                                                                                                               ||e|| \le ||A^{-1}|| \, ||R|| \, ||\tilde{x}|| אזי
(A+R)\,	ilde{x}=b וכן Ax=b וכן באשר A, x\in\mathbb{R}^n מסקנה: תהא \|\cdot\| נורמה מושרית תהיינה A, R\in M_n\left(\mathbb{R}\right) באשר באשר
                                                                                                                                                                                                                                  \|e\| \cdot \|A\| \le \operatorname{cond}(A) איי
```

 $u\left(A\cdot B\right)\leq
u\left(A\right)\cdot
u\left(B\right)$ אזי $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ נורמה ותהיינה $u:\mathbb{R}^{n} o\mathbb{R}$ אזי $u:\mathbb{R}^{n} o\mathbb{R}$

 $\|A\|_\infty=\max_{i\in[n]}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|$ אא $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ טענה: תהא $\|A\|_1=\max_{j\in[n]}\sum_{i=1}^n|a_{i,j}|$ אא $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ טענה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$

שגיאה של מערכת משוואות: תהיינה $A,R\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ ותהיינה $A,R\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ ומכ $A,R\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי

וכן Ax=b באשר $b,r,x, ilde{x}\in\mathbb{R}^n$ נורמה מושרית תהיינה $A,R\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ באשר באשר ותהיינה $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהיינה $\|e\| \le \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A)\left(\frac{\|B\|}{\|A\|}\right)} \left(\frac{\|B\|}{\|A\|} + \frac{\|r\|}{\|b\|}\right)$ אא $\|B\| \le \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ וכך (A+R) $\tilde{x} = b+r$

 $\mathcal{O}\left(n^{2}
ight)$ משולשית עליונה והפיכה אזי אלגוריתם גאוס לדירוג בעל סיבוכיות אמן $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$

 $\mathcal{O}\left(n^3
ight)$ טענה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ הפיכה אזי אלגוריתם גאוס לדירוג בעל סיבוכיות זמן

1 משפט פירוק עליונה וכן L משולשית משולשית עליונה עם באשר L משפט הפיכה אזי קיימות הפיכה אזי קיימות באשר L באשר שולשית עליונה וכן $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ A = LU על האלכסון הראשי עבורן

. סימון: תהא המעקבלת אזי $U_A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ המטריצה המשולשית העליונה הראשונה אזי אזי $U_A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ הפיכה אזי

i>j באשר $(L_A)_{i,j}=rac{(U_A)_{i,j}}{(U_A)_{j,j}}$ המוגדרת $L_A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ באשר $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ באשר באשר $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ טענה: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ הפיכה אזי $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ של ה

אזי $b\in\mathbb{R}^n$ יהי הפיכה הפיכה $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ תהא חלקית: תהא אזי אוס עם הצרה הלקית:

function GaussPartialPivoting (A, b):

```
B \leftarrow (A|b)
for i \leftarrow [1, \ldots, n] do
       m \leftarrow \arg\max\{(A)_{i,j} \mid j \in [n]\}
        [R_1(B), R_m(B)] \leftarrow [R_m(B), R_1(B)]
       for j \leftarrow [i+1,\ldots,n] do
R_{j}(B) \leftarrow R_{i}(B) - \frac{(A)_{i,j}}{(A)_{i,i}} \cdot R_{i}(B)
       R_i(B) \leftarrow \frac{1}{(A)_{i,i}} \cdot R_i(B)
\mathbf{return} \, \left( \begin{smallmatrix} C_1(B) & \dots & C_n(B) \\ & & \end{smallmatrix} \right), C_{n+1}(B)
```

e (GaussPartialPivoting $(A,b))\leq v$ א באשר פעזרת נקודה צפה אזי $b\in\mathbb{R}^n$ באשר באשר $a\in M_n(\mathbb{R})$ מענה: תהא Ax = b במציאת פתרון למשוואה e (GaussElimination (A, b))

משפט פירוק R: תהא Q: תהא אורתוגונלית עליונה אזי קיימות קיימות הפיכה אזי קיימות Q: באשר Q: באשר $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ משפט פירוק A = QR

A של QR טענה: תהא Q_A,R_A הפיכה אזי אוי הפירוק $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$

. מענה: תהא בנורמה המושרית אזי מיסטנדרטית אזי אורתוגונלית אזי $Q\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ אורתוגונלית אזי

 $.r_i = \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} \left| (A)_{i,j}
ight|$ איז $i \in [n]$ ויהי $A \in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ סימון: תהא

 $\left|\lambda-(A)_{i,i}
ight|\leq r_{i}$ עבורו איים $i\in[n]$ קיים $\lambda\in\mathrm{spec}\left(A
ight)$ איי לכל $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$ עבורו איים של גרשגורין: תהא

אזי $\lambda\in\operatorname{spec}\left(A\right)$ ויהי $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי .min $_{i\in[n]}\left(\left|\left(A\right)_{i,i}-r_{i}\right|\right)\leq\left|\lambda\right|\leq\rho\left(A\right)\leq\max_{i\in[n]}\left(\left|\left(A\right)_{i,i}-r_{i}\right|\right)=\left\|A\right\|_{\infty}$

 $\left.\left|(A)_{i,i}
ight|>r_{i}$ מתקיים $i\in\left[n
ight]$ מטריצה בעלת אלכסון דומיננטי בשורות: מטריצה מטריצה $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$ מטריצה בעלת אלכסון א . הפיכה A אזי אזי בשורות אזי בעלת אלכסון בעלת אלכסון הפיכה $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$

. הפיכה $c\left(A-I\right)$ אזי $c\in\mathbb{R}\backslash\left\{ 0\right\}$ ויהי $\rho\left(A\right)<1$ באשר באשר $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי תהא

 $\sigma\left(x
ight)=rac{x^{T}Ax}{x^{T}x}$ המוגדרת המוגדרת אזי $\sigma:\mathbb{R}^{n}ackslash\left\{0
ight\}
ightarrow\mathbb{R}$ אזי $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$ המוגדרת

 $\sigma\left(v
ight)=\lambda$ יהי $\lambda\in\mathrm{Spec}\left(A
ight)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}\setminus\{0\}$ יהי היי $\lambda\in\mathrm{Spec}\left(A
ight)$ יהי $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}
ight)$

 $\sigma(v)=v^TAv$ אזי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ טענה: תהא

יהיו $v_1\dots v_m\in\mathbb{R}^n$ יהיו אהיו $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ באשר איסת החזקה: יהיו אבער באשר החזקה: יהיו אבער באשר אולכל לכל ולכל ווא לכל לכל איהיו ווא באשר און יהיו איהיו $i\in[m]$ אכל λ_i וויע של v_i וויע איז מקסימלית ויע בת"ל קבוצת אבורה עבורה עבורה $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ ותהא ווע של $C_1
eq C_1\dots C_m\in\mathbb{R}$

- $.{\lim}_{k\to\infty}\sigma\left(A^k\cdot(\textstyle\sum_{i=1}^mC_iv_i)\right)=\lambda_1~\bullet\\ .k\in\mathbb{N}$ לכל $\left|\sigma\left(A^k\cdot(\textstyle\sum_{i=1}^mC_iv_i)\right)-\lambda_1\right|\leq\alpha\cdot\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$ לכל פיים $\alpha\in\mathbb{R}$
- $k\in\mathbb{N}$ לכל $\left|\sigma\left(A^k\cdot(\sum_{i=1}^mC_iv_i)
 ight)-\lambda_1
 ight|\leq lpha\cdot\left|rac{\lambda_2}{\lambda_1}
 ight|^{2k}$ עבורו $lpha\in\mathbb{R}$ שם A סימטרית אזי קיים $lpha\in\mathbb{R}$
 - $.\lim_{k\to\infty} \frac{A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i\right)}{\lambda_1^k} = C_1 v_1 \bullet$

 $v_1\dots v_m\in\mathbb{R}^n$ יהיו $|\lambda_1|>|\lambda_2|$ יהיו $\lambda_1\in\mathbb{R}$ יהי i< j לכל לכל לכל לכל באשר אויי יהיו איז היו היו $i\in[m]$ אזי λ_i וותהא λ_i וותהא λ_i וותהא λ_i עבורה λ_i עבורה λ_i קבוצת ו"ע בת"ל מקסימלית וכן λ_i וותהא λ_i לכל λ_i וותהא λ_i עבורה λ_i עבורה λ_i עבורה λ_i וות בת"ל מקסימלית וכן λ_i וות בת"ל λ_i וות בת"ל λ_i עם ו"ע λ_i אזי λ_i אוי λ_i אזי λ_i אזי וותהא λ_i אזי λ_i אזי וותהא λ_i אזי וותהא אויי וותהא אזי וותהא אזי וותהא אויי וותה

 $(A - \mu I)^{-1} v = \frac{1}{\lambda - \mu} v$

אורתוגונלית וכן $U\in M_m\left(\mathbb{R}
ight)$ אורתוגונלית וכן באשר $U\in M_m\left(\mathbb{R}
ight)$ אורתוגונלית וכן באשר אורתוגונלית וכן $A\in U\Sigma V^T$ אורתוגונלית וכן

 $.i\geq j$ לכל $(\Sigma)_{i,i}\leq (\Sigma)_{j,j}$ אלכסונית אי־שלילית עבורה $\Sigma\in M_{m imes n}\left(\mathbb{R}
ight)$.Sing $(A)=\left\{ (\Sigma)_{i,i}\mid i\in [\min\left\{ n,m
ight\}]
ight\}$ אזי $A=U\Sigma V^T$ ויהי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ $\{C_i\left(V
ight)\mid i\in[n]\}$ אזי SVD פירוק $A=U\Sigma V^T$ ויהי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי אזי

 $A\in U\Sigma V^T$ ויהי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי SVD פירוק פירוק מינגולריים שמאליים: תהא ויהי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$

 $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \cup \{0\} = \operatorname{spec}(A^TA) \cup \{0\}$ אזי $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ טענה: תהא

 $A \in A^TA$ טענה: תהא (A^TA) \cup $\{0\} = \{\sigma^2 \mid \sigma \in \mathrm{Sing}(A)\} \cup \{0\}$ אזי SVD בעלת פירוק $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$

 A^TA טענה: תהא $A\in M_{n imes m}$ הם ו"ע של SVD אזי פירוק בעלת פירוק אזי בעלת פירוק אזי הוקטורים אזי הוקטורים אזי אזי $A\in M_{n imes m}$

 AA^T איזי הוקטורים הסינגולריים השמאליים של א פירוק מעל פירוק אזי הוקטורים היינגולריים אז בעלת פירוק אזי איזי הוקטורים הסינגולריים או איזי $A\in M_{n imes m}$

שווה A^TA שווה בתור ו"ע של SVD פירוק פירוק פירוק איז בתור ו"ע של $A=U\Sigma V^T$ איהי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ עבורו הע"ע של $.C_{i}\left(V
ight)\sim C_{i}\left(U
ight)$ אזי AA^{T} בתור ו"ע של רע"ע של $C_{i}\left(U
ight)$

 $\{A\cdot C_{i}\left(V
ight)\mid\left(i\in\left[\min\left\{ n,m
ight\}
ight)
ight)\wedge\left(C_{i}\left(V
ight)\sim C_{i}\left(U
ight)
ight)\}$ אזי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ ויהי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ אזי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ AA^T אורתוגונליים וכן הינם ו"ע של

אזי $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ ותהא $m\geq n$ באשר באשר יהיו יהיו יהיו אלגוריתם למציאת פירוק: יהיו

function SVD(A):

```
(V,D) \leftarrow \text{OrthogonalDiagonalization}(A^TA) // such that \forall i \leq j \in [n].(D)_{i,i} \geq (D)_{j,j}
S \leftarrow \sqrt{D}
\Sigma \leftarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})
for i \in [m] do
      for j \in [n] do
        (\Sigma)_{i,j} \leftarrow (S)_{i,j}
U \leftarrow \mathsf{GrahamSchmidt}\left(\frac{1}{(S)_{1,1}}A \cdot C_1(V), \ldots, \frac{1}{(S)_{\mathsf{rank}(A), \mathsf{rank}(A)}}A \cdot C_{\mathsf{rank}(A)}(V)\right)
return (U, \Sigma, V^T)
```

.SVD משפט: תהא $A\in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ בעלת פירוק

 אזי קיים ויחיד אזי קיים (Σ) לכל (Σ) $_{i,i}
eq (\Sigma)_{i,j}$ באשר SVD פירוק אזי ויהי ויהי $A \in M_{n imes m}\left(\mathbb{R}
ight)$ תהא היים ויחיד משפט יחידות פירוק פירוק SVD עד כדי סימן הוקטורים הסנגולריים.

משפט יחידות פירוק (Σ) $_{i,i}
eq (\Sigma)_{i,j} = A$ באשר SVD פירוק ויחיד $A \in M_{n imes m} (\mathbb{C})$ משפט יחידות פירוק (Σ). תהא $\{1,-1,i,-i\}$ עד כדי הכפלת הוקטורים הסנגולריים ב־SVD פירוק

.Sing $(A)=\{|\lambda|\mid \lambda\in\operatorname{spec}\,(A)\}$ סימטרית אזי $A\in M_n\left(\mathbb{R}
ight)$ מסקנה: תהא