

רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1, \dots, a_n\}$ מתקיים $((a = a_1) \vee \dots \vee (a = a_n)) \iff (a \in \{a_1, \dots, a_n\})$.
סימון: תהא Σ קבוצה אזי $\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$.

טענה: תהא Σ קבוצה תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי קיימת יחידה $S \subseteq \Sigma^*$ המקיימת $B \subseteq S$.

• S סגורה להפעלת F .

• מינימליות: תהא $A \subseteq \Sigma^*$ עבורה $B \subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S \subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי $X_{B,F} \subseteq \Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B \subseteq X_{B,F}$.

עולם באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי Σ .

בסיס באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי B .

טענה: תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי $X_{B,F} = \bigcap \{Y \subseteq \Sigma^* \mid (B \subseteq Y) \wedge (F \text{ סגורה להפעלת } Y)\}$.

אינווריאנטה: יהי עולם Σ תהא $B \subseteq \Sigma^*$ ותהא $F = \{f_i : (\Sigma^*)^{n_i} \rightarrow \Sigma^* \mid i \in I\}$ אזי $Y \subseteq \Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B \subseteq Y$.
מסקנה הוכחה באינדוקציה מבנית: יהי עולם Σ ותהא $Y \subseteq \Sigma^*$ אינווריאנטה אזי $X_{B,F} \subseteq Y$.

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על \mathbb{N} אזי $(\forall n \in \mathbb{N}. p(n)) \iff (p(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}. p(n) \implies p(n+1)))$.

סדרת יצירה: יהי $a \in X_{B,F}$ אזי (a_1, \dots, a_n) עבורה $a_n = a$ וכן לכל $i \in [n]$ מתקיים $a_i \in B$ מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ- $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$.

טענה: יהי $a \in \Sigma^*$ אזי $a \in X_{B,F} \iff$ (קיימת סדרת יצירה ל- a).

מסקנה: $\{a \in \Sigma^* \mid a \text{ בעלת סדרת יצירה באורך } n\} = X_{B,F} \bigcup_{n=1}^{\infty}$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma = \{\wedge, \vee, \neg, \implies, (,)\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a \in \Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1, \omega_2 \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ אזי

• $\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)"$

• $\vee (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \vee \omega_2)"$

• $\implies (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \implies \omega_2)"$

• $\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)"$

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $WFF = X_{\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee, \neg, \implies\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p \in WFF$ עבורו $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p \in WFF$ אזי $(p \text{ פסוק אטומי}) \vee (p \text{ מתחיל עם } "(" \text{ ונגמר עם } ")")$.

מסקנה: יהיו $q_1, q_2 \in WFF$ אזי $q_1(q_2 \notin WFF)$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha \in WFF$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

• α פסוק אטומי.

• $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in WFF$

• $\alpha = (\beta \vee \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in WFF$

• $\alpha = (\beta \implies \gamma)$ עבורם $\beta, \gamma \in WFF$

• $\alpha = (\neg \beta)$ עבורו $\beta \in WFF$

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי

```

function wffValidity( $\alpha$ ):
  if length( $\alpha$ )  $\leq$  3 then
    if  $\alpha \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  then return True
    else return False
  if ( $\alpha_1 \neq "(" \vee \alpha_{\text{length}(\alpha)} \neq ")"$ ) then return False
  if  $\alpha_2 = "\neg"$  then return wffValidity( $(\alpha_3 \dots \alpha_{\text{length}(\alpha)-1})$ )
  parenthesisCount  $\leftarrow$  0
  for  $i \leftarrow [2, \dots, \text{length}(\alpha) - 1]$  do
    if  $\alpha_i = "("$  then parenthesisCount  $\leftarrow$  parenthesisCount + 1
    if  $\alpha_i = ")"$  then parenthesisCount  $\leftarrow$  parenthesisCount - 1
    if parenthesisCount = 0 then
      if  $\alpha_{i+1} \in \{\neg, \wedge, \vee, \implies\}$  then
        return (wffValidity( $(\alpha_2 \dots \alpha_i)$ )  $\wedge$  (wffValidity( $(\alpha_{i+2} \dots \alpha_{\text{length}(\alpha)-1})$ )))
  end
  return False

```

טענה: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי $(\text{wffValidity}(\alpha)) \iff (\alpha \in \text{WFF})$.

טענה: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha \in \Sigma^*$ אזי $\text{wffValidity}(\alpha)$ רץ בסיבוכיות זמן $O(\text{length}(\alpha))$.

הערה סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. \neg .

2. \wedge, \vee .

3. \implies .

סימון אמת: T, true .

סימון שקר: F, false .

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתותו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

הגדרה: יהיו p, q פסוקים אזי

q	$\neg q$
true	false
false	true

q	p	$q \implies p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

סימון: תהא $\circ \in \{\wedge, \vee, \neg, \implies\}$ אזי טבלת האמת של \circ הינה TT_\circ .

השמה: פונקציה $v : \{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$.

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\bar{v} : \text{WFF} \rightarrow \{F, T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\bar{v}(p) = v(p)$.
- יהי α פסוק אזי $\bar{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$.
- יהיו β, γ פסוקים ותהא \circ פעולה בינארית אזי $\bar{v}(\beta \circ \gamma) = TT_{\circ}(\bar{v}(\beta), \bar{v}(\gamma))$.

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha \in \text{WFF}$ עבורה $\bar{v}(\alpha) = T$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in \text{WFF}$ מסופקת על ידי v אזי $v \models \alpha$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in \text{WFF}$ לא מסופקת על ידי v אזי $v \not\models \alpha$.

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $\text{Var} : \text{WFF} \rightarrow \mathcal{P}(\{p_i\})$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\text{Var}(p) = \{p\}$.
- יהי α פסוק אזי $\text{Var}(\neg \alpha) = \text{Var}(\alpha)$.
- יהיו β, γ פסוקים ותהא \circ פעולה בינארית אזי $\text{Var}(\beta \circ \gamma) = \text{Var}(\beta) \cup \text{Var}(\gamma)$.

משפט התלות הסופית: תהיינה v_1, v_2 השמות ויהי $\alpha \in \text{WFF}$ עבורו $v_1(p) = v_2(p) \forall p \in \text{Var}(\alpha)$ אזי $\bar{v}_1(\alpha) = \bar{v}_2(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_α .

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K \subseteq \{\wedge, \vee, \neg, \implies\}$ עברה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha \in WFF$ עבורו $TT = TT_\alpha$.
טענה: $\{\wedge, \vee, \neg, \implies\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg, \wedge, \vee \in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha \in WFF$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v \models \alpha$.

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha \in WFF$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v \models \alpha$.

סימון: יהי $\alpha \in WFF$ טאוטולוגיה אזי $\models \alpha$.

סתירה: פסוק $\alpha \in WFF$ עבורו $\models (\neg \alpha)$.

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha, \beta \in WFF$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\bar{v}(\alpha) = \bar{v}(\beta)$.

סימון: יהיו $\alpha, \beta \in WFF$ שקולים אזי $\alpha \equiv \beta$.

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma \subseteq WFF$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha \in \Gamma$ מתקיים $v \models \alpha$.

סימון: תהא $\Gamma \subseteq WFF$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v \models \Gamma$.

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma \subseteq WFF$ אזי $\alpha \in WFF$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v \models \Gamma$ מתקיים $v \models \alpha$.

סימון: תהא $\Gamma \subseteq WFF$ והי $\alpha \in WFF$ פסוק נובע סמנטית מ- Γ אזי $\Gamma \models \alpha$.

טענה: יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in WFF$ אזי

$$\bullet (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$$

$$\bullet (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$$

$$\bullet (\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$$

$$\bullet (\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$$

$$\bullet (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

$$\bullet (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$$

$$\bullet \neg(\neg \alpha) \equiv \alpha$$

$$\bullet \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg \alpha) \vee (\neg \beta)$$

$$\bullet \neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg \alpha) \wedge (\neg \beta)$$

$$\bullet (\alpha \implies \beta) \equiv (\neg \alpha) \vee \beta$$

למה: יהי $\gamma \in WFF$ סתירה אזי לכל $\alpha \in WFF$ מתקיים $\gamma \models \alpha$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq WFF$ והיו $\alpha, \beta \in WFF$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta$ אזי $\Gamma \models \beta$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq WFF$ והיו $\alpha, \beta \in WFF$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta)$ אזי $\Gamma \models (\neg \alpha)$.

טענה: יהיו $\alpha, \beta \in WFF$ אזי $(\alpha \implies \beta) \iff (\models (\alpha \implies \beta))$.

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi \in WFF$ והי p פסוק אטומי אזי

$$\bullet \text{ אם } \alpha = p \text{ אזי } \alpha[\varphi/p] = \varphi$$

$$\bullet \text{ אם } \alpha \text{ פסוק אטומי וכן } \alpha \neq p \text{ אזי } \alpha[\varphi/p] = \alpha$$

$$\bullet \text{ אם קיים } \beta \in WFF \text{ עבורו } \alpha = \neg \beta \text{ אזי } \alpha[\varphi/p] = \neg \beta[\varphi/p]$$

$$\bullet \text{ אם קיימים } \beta, \gamma \in WFF \text{ וקיימת פעולה בינארית } \circ \text{ עבורה } \alpha = \beta \circ \gamma \text{ אזי } \alpha[\varphi/p] = \beta[\varphi/p] \circ \gamma[\varphi/p]$$

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in WFF$ והי $p \in \text{Var}(\alpha)$ אזי $\alpha[\varphi/p] \in WFF$.

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in WFF$ והיו $p_1 \dots p_n$ פסוקים אטומים אזי

$$\bullet \text{ אם } \alpha = p_i \text{ עבור } i \in [n] \text{ אזי } \alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] = \varphi_i$$

$$\bullet \text{ אם } \alpha \text{ פסוק אטומי וכן } \alpha \neq p_i \text{ לכל } i \in [n] \text{ אזי } \alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] = \alpha$$

$$\bullet \text{ אם קיים } \beta \in WFF \text{ עבורו } \alpha = \neg \beta \text{ אזי } \alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] = \neg \beta[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]$$

$$\bullet \text{ אם קיימים } \beta, \gamma \in WFF \text{ וקיימת פעולה בינארית } \circ \text{ עבורה } \alpha = \beta \circ \gamma \text{ אזי}$$

$$\alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] = \beta[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n] \circ \gamma[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]$$

סימון: יהיו $\alpha, \varphi \in WFF$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v ההשמה $v \models \alpha$ אזי $v[\bar{v}(\varphi)/p_i](p_j) = \begin{cases} v(p_j) & i \neq j \\ \bar{v}(\varphi) & i = j \end{cases}$

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in WFF$ יהי p פסוק אטומי ותהא v ההשמה אזי $\bar{v}(\alpha(\varphi/p)) = \bar{v}(\bar{v}(\varphi)/p)(\alpha)$

סימון: יהיו $\alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in WFF$ והיו $p_1 \dots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v ההשמה אזי $v[\bar{v}(\varphi_1)/p_1, \dots, \bar{v}(\varphi_n)/p_n](p_j) = \begin{cases} v(p_j) & j \notin [n] \\ \bar{v}(\varphi_j) & j \in [n] \end{cases}$

מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: יהיו $\alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \text{WFF}$ יהיו $p_1 \dots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה אזי

$$\bar{v}(\alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]) = v[\bar{v}(\varphi_1)/p_1, \dots, \bar{v}(\varphi_n)/p_n](\alpha)$$

מסקנה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1 \dots \varphi_n \in \text{WFF}$ יהיו $p_1 \dots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha[\varphi_1/p_1 \dots \varphi_n/p_n]$ טאוטולוגיה.

הצורה הנורמלית NNF: $\text{NNF} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge, \vee\}}$

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{NNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$

סימון: $\text{Conj} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\wedge\}}$

הצורה הנורמלית DNF: $\text{DNF} = X_{\text{Conj}, \{\vee\}}$

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{DNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$

סימון: $\text{Disj} = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{(\neg p_i) | i \in \mathbb{N}\}, \{\vee\}}$

הצורה הנורמלית CNF: $\text{CNF} = X_{\text{Disj}, \{\wedge\}}$

משפט: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \text{CNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$

מערכת הוכחה: יהי Σ אלפבית תהא $N \subseteq \Sigma^*$ תהא $A \subseteq N$ ותהא (Σ, N, A, F) אזי $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (N^n \rightarrow N)$

הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.

נוסחאות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי N

אקסיומת של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי A

כללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי F

קבוצת המשפטים: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $X_{A,F}$

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ משפט אזי $\vdash_S \varphi$

מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$

קבוצת הטענות היכוחות מהנחות: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי $X_{A \cup \Gamma, F}$

הגדרה הוכחה: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי סדרת יצירה של φ

סימון: תהא S מערכת הוכחה תהיינה $\Gamma \subseteq N$ הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי $\Gamma \vdash_S \varphi$

טענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ אזי

• מונוטוניות: תהא $\Delta \subseteq N$ עבורה $\Delta \vdash_S \varphi$ ותהא $\Delta \subseteq \Gamma$ אזי $\Gamma \vdash_S \varphi$

• קומפקטיות: תהא $\Gamma \subseteq N$ עבורה $\Gamma \vdash_S \varphi$ אזי קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \vdash_S \varphi$

• טרנזיטיביות: תהיינה $\Delta, \Gamma \subseteq N$ באשר $\Delta \vdash_S \varphi$ וכן לכל $\alpha \in \Delta$ מתקיים $\Gamma \vdash_S \alpha$ אזי $\Gamma \vdash_S \varphi$

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $f \in F$ כלל היסק המקיים $f(x_1, \dots, x_n) = y$ אזי $f : \frac{x_1 \dots x_n}{y}$

כלל הניתוק (Ponens Modus): תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $\text{MP} : \frac{(\alpha \Rightarrow \beta), \alpha}{\beta}$

מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

• אלפבית: $\Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Rightarrow, (,)\}$

• נוסחאות: $N = X_{\{p_i | i \in \mathbb{N}\}, \{\neg, \Rightarrow\}}$

• אקסיומות:

$$A_1 = (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) -$$

$$A_2 = ((\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))) -$$

$$A_3 = (((\neg \alpha) \Rightarrow (\neg \beta)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) -$$

• כללי היסק: $F = \{\text{MP}\}$

טענה: יהיו α, β נוסחאות ב-HPC אזי

$$\vdash_{\text{HPC}} (\alpha \Rightarrow \alpha)$$

$$\vdash_{\text{HPC}} ((\neg \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$$

$$\{\neg \alpha\} \vdash_{\text{HPC}} (\alpha \Rightarrow \beta)$$

מסקנה: יהיו α, β נוסחאות ב-HPC באשר $\vdash_{\text{HPC}} (\neg \alpha)$ אזי $\vdash_{\text{HPC}} \alpha$

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון \vdash הוא במערכת HPC.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash (\alpha \Rightarrow \beta)) \iff (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$

סימון: תהא מערכת הוכחה S ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $\text{Ded}(\Gamma) = \{\alpha \in N \mid \Gamma \vdash \alpha\}$

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $\vdash ((\neg(\neg \alpha)) \Rightarrow \alpha)$

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט הנאותות: תהייה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash_{HPC} \alpha) \implies (\Gamma \models \alpha)$.

למה: תהייה Γ הנחות מעל HPC ותהייה α, β, γ נוסחאות מעל HPC אזי

$$((\Gamma \vdash (\alpha \implies \beta)) \wedge (\Gamma \vdash (\beta \implies \gamma))) \implies (\Gamma \vdash (\alpha \implies \gamma))$$

משפט הדיכוטומיה: תהייה Γ הנחות מעל HPC ותהייה α, β נוסחאות מעל HPC אזי

$$((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \wedge (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \implies (\Gamma \vdash \beta)$$

קבוצת הנחות עקבית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\Gamma \not\vdash_S \alpha$.

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהייה Γ הנחות מעל S אזי $(\Gamma$ אינה עקבית) \iff (קיימת α נוסחה מעל S המקיימת

$$((\Gamma \vdash_S (\neg\alpha)) \wedge (\Gamma \vdash_S \alpha))$$

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהייה Γ הנחות מעל S אזי $(\Gamma$ עקבית) \iff (לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות עקבית מעל S עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית מעל S המקיימת $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC עבורה $\Gamma \vdash \alpha$ אזי $\alpha \in \Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\alpha \in \Gamma) \vee (\neg\alpha \in \Gamma)$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהייה α, β נוסחאות מעל HPC אזי

$$(\Gamma \vdash (\alpha \implies \beta)) \iff ((\neg\alpha \in \Gamma) \vee (\beta \in \Gamma))$$

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Δ עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי $(\Gamma$ עקבית) \iff (Γ ספיקה).

משפט השלמות: תהייה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash_{HPC} \alpha) \iff (\Gamma \models \alpha)$.

מסקנה: תהייה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma \vdash \alpha) \iff (\Gamma \models \alpha)$.

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי $(\Gamma$ ספיקה) \iff (לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

סימון: תהא $\Gamma \subseteq WFF$ אזי $Ass(\Gamma) = \{v \in \{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \mid v \models \Gamma\}$.

טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}) \setminus Ass(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq WFF\}$ הינה טופולוגיה על $\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$.

טענה: הטופולוגיה $\{(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}) \setminus Ass(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq WFF\}$ הינה קומפקטית.

הגדרה: יהי G גרף פשוט לא מכוון תהא $f : V \rightarrow WFF$ חח"ע ויהיו $(v, u) \in E$ אזי $\varphi_G : E \rightarrow WFF$ כך

$$\varphi_G((v, u)) = "f(v) \implies f(u)"$$

טענה: יהי G גרף פשוט לא מכוון ותהא $f : V \rightarrow WFF$ חח"ע אזי $(G$ הינו 2-צביע) \iff ($\{\varphi_G(e) \mid e \in E\}$ ספיקה).

מסקנה: יהי G גרף בן-מנייה פשוט לא מכוון אזי $(G$ הינו 2-צביע) \iff (לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו 2-צביע).

טענה: יהי G גרף בן-מנייה פשוט לא מכוון אזי $(G$ הינו k -צביע) \iff (לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו k -צביע).

קבוצת השמות גדירה: קבוצה $K \subseteq \{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq WFF$ המקיימת $K = Ass(\Gamma)$.

טענה: \emptyset גדירה.

טענה: $\{p_i\} \rightarrow \{F, T\}$ גדירה.

טענה: לכל v השמה $\{v\}$ גדירה.

טענה: קיימת $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$ שאינה גדירה.

סימון: $K_{finite} = \{v \in \{p_i\} \rightarrow \{F, T\} \mid |v^{-1}(\{T\})| < \aleph_0\}$.

טענה: K_{finite} אינה גדירה.

קבוצת השמות גדירה באופן סופי: קבוצה $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq WFF$ סופית המקיימת $K = Ass(\Gamma)$.

משפט: תהא $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \rightarrow \{F, T\})$ התב"ש

• K גזירה וכן K^C גדירה.

• K גדירה באופן סופי.

• K גדירה על ידי פסוק יחיד.

מילון: יהי Σ אלפבית אזי $(\{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i, n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n \rightarrow \Sigma \mid i, n \in \mathbb{N}\})$

סימני קבוע במילון: יהי (C, R, F) מילון אזי C .

סימני יחס במילון: (C, R, F) מילון אזי R .

סימני פונקציה במילון: (C, R, F) מילון אזי F .

מילון סופי: Σ אלפבית אזי מילון σ בעל מספר סופי של סימנים.

מילון יחסי: Σ אלפבית אזי מילון σ חסר סימני פונקציה.

לוגיקה מסדר ראשון: Σ אלפבית ויהי σ מילון אזי $(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{",", "\} ", \{\neg, \vee, \wedge, \implies\}, \{\forall, \exists\}, \sigma)$.

משתנים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: $\{",", "\} "$.

קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies\}$.

כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{\forall, \exists\}$.

סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: תהא L לוגיקה מסדר ראשון אזי המילון σ בה.

שמות עצם מעל מילון: $X_{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{f_{i,n} \mid i, n \in \mathbb{N}\}}$ יהי σ מילון אזי

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי σ מילון ויהי t שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- t משתנה.
- t סימן קבוע.
- קיים ויחיד סימן פונקציה $f_{i,n}$ ושמות עצם $t_1 \dots t_n$ עבורם $t = f(t_1 \dots t_n)$.

הגדרה: יהי σ מילון יהי x משתנה ותהא $\alpha \in \sigma$ אזי

- $\forall (\alpha, x) = "\forall x \alpha"$
- $\exists (\alpha, x) = "\exists x \alpha"$

נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $\{R_{n,i}(t_1 \dots t_n) \mid (i, n \in \mathbb{N}) \wedge (t_1 \dots t_n \text{ שמות עצם})\}$

נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{R_{n,i}(t_1 \dots t_n) \mid (i, n \in \mathbb{N}) \wedge (t_1 \dots t_n \text{ שמות עצם})\}, \{\wedge, \vee, \neg, \implies, \forall, \exists\}}$

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α נוסחה אטומית.
- קיימת ויחידה נוסחה β עבורה $\alpha = "\neg \beta"$.
- קיימות ויחידות נוסחאות β, γ וכן פעולה בולינארית \circ עבורן $\alpha = "(\beta \circ \gamma)"$.
- קיימת ויחידה נוסחה β וכן משתנה x וכן כמת Q עבורם $\alpha = "Qx\beta"$.

משתנה חופשי בשם עצם: נגדיר $\text{FV} : \{t \mid \sigma \text{ מילון } t\} \rightarrow \mathcal{P}(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ כך

- יהי $c \in \sigma$ סימן קבוע אזי $\text{FV}(c) = \emptyset$.
- יהי $x \in \sigma$ משתנה אזי $\text{FV}(x) = \{x\}$.
- יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $f \in \sigma$ סימן פונקציה אזי $\text{FV}(f(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \text{FV}(t_i)$.

משתנה חופשי בנוסחה: נגדיר $\text{FV} : \{\varphi \mid \sigma \text{ נוסחה } \varphi\} \rightarrow \mathcal{P}(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ כך

- יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $\text{FV}(R(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \text{FV}(t_i)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\text{FV}(\neg \varphi) = \text{FV}(\varphi)$.
- תהיינה φ, ψ נוסחאות ויהי \circ פעולה בולינארית אזי $\text{FV}(\varphi \circ \psi) = \text{FV}(\varphi) \cup \text{FV}(\psi)$.
- תהא נוסחה φ יהי משתנה x ויהי כמת Q אזי $\text{FV}(Qx\varphi) = \text{FV}(\varphi) \setminus \{x\}$.

נוסחה סגורה: נוסחה φ עבורה $\text{FV}(\varphi) = \emptyset$.

הערה סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. \forall, \exists
2. \neg
3. \wedge, \vee
4. \implies

מבנה עבור מילון: יהי σ מילון יהי $D \neq \emptyset$ ותהא $C : \{c_i\} \rightarrow D$ וכן $R : \{R_{n,i}\} \rightarrow D^n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ וכן $F : \{f_{n,i}\} \rightarrow (D^n \rightarrow D)$ אזי $(D, C(c_0), \dots, R(R_{1,0}), \dots, f(f_{0,0}), \dots)$

תחום של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי D .

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ בעל תחום D אזי $D^M = D$.

פירוש של סימנים במילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $(C(c_0), \dots, R(R_{2,0}), \dots, f(f_{0,0}))$

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $c_i^M = C(c_i)$ וכן $R_{n,i}^M = R(R_{n,i})$ וכן $f_{n,i}^M = F(f_{n,i})$.

השמה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $v : \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow D^M$.

השמת ערך לשם עצם: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ יהי ותהא v השמה אזי

• יהי $c_i \in \sigma$ סימן קבוע אזי $\bar{v}(c_i) = c_i^M$.

• יהי $x_i \in \sigma$ משתנה אזי $\bar{v}(x_i) = v(x_i)$.

• יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $f \in \sigma$ סימן פונקציה אזי $\bar{v}(f(t_1 \dots t_n)) = f^M(\bar{v}(t_1) \dots \bar{v}(t_n))$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ויהי t שם עצם עבורו $v_1(x) = v_2(x) \forall x \in \text{FV}(t)$ אזי $\bar{v}_1(t) = \bar{v}_2(t)$.

השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי $x_j \in \sigma$ משתנה ויהי $d \in D^M$ אזי נגדיר השמה

$$v[d/x_j](x_i) = \begin{cases} v(x_i) & i \neq j \\ d & \text{else} \end{cases}$$

ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא v השמה אזי

• יהיו $t_1 \dots t_n$ שמות עצם ויהי $R \in \sigma$ סימן יחס אזי $(\bar{v}(t_1), \dots, \bar{v}(t_n)) \in R^M \iff (\bar{v}(R(t_1 \dots t_n)) = T)$.

• תהא α נוסחה אזי $\bar{v}(\neg \alpha) = TT_{\neg}(\bar{v}(\alpha))$.

• תהיינה α, β נוסחאות ויהי \circ קשר בינארי אזי $\bar{v}(\alpha \circ \beta) = TT_{\circ}(\bar{v}(\alpha), \bar{v}(\beta))$.

• תהא φ נוסחה אזי $(\bar{v}(\exists x \varphi) = T) \iff (\exists d \in D^M (\bar{v}[d/x](\varphi) = T))$.

• תהא φ נוסחה אזי $(\bar{v}(\forall x \varphi) = T) \iff (\forall d \in D^M (\bar{v}[d/x](\varphi) = T))$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1, v_2 השמות ותהא φ נוסחה עבורה $v_1(x) = v_2(x) \forall x \in \text{FV}(t)$ אזי $\bar{v}_1(\varphi) = \bar{v}_2(\varphi)$.

נוסחה ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי נוסחה φ עבורה $\bar{v}(\varphi) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא φ נוסחה ספיקה ב- M אזי $M, v \models \varphi$.

t-מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה יהי M מבנה ותהא v השמה עבורם $M, v \models \varphi$ אזי (M, v) .

קבוצת נוסחאות ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים $\bar{v}(\varphi) = T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא Γ קבוצת נוסחאות ספיקה ב- M אזי $M, v \models \Gamma$.

נוסחה ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M והשמה v עבורם $M, v \models \varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא v השמה תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה לכל (M, v) t-מודל של Γ מתקיים כי $(M, v) \models^t \varphi$.

נוסחאות t-שקולות: יהי σ מילון ותהא v השמה אזי נוסחאות φ, ψ עבורן $\{\psi\} \models^t \varphi$ וכן $\{\varphi\} \models^t \psi$.

נוסחה t-תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ ולכל v השמה מתקיים $(M, v) \models^t \varphi$.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t-תקפה אזי $\models^t \varphi$.

נוסחה נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי נוסחה φ עבורה לכל v השמה מתקיים $M, v \models \varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא φ נוסחה נכונה ב- M אזי $M \models \varphi$.

v-מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה אזי מבנה M עבורו $M \models \varphi$.

קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים $M \models \varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא Γ קבוצת נוסחאות נכונה ב- M אזי $M \models \Gamma$.

נוסחה v-ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M עבורו $M \models \varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה לכל M v-מודל של Γ מתקיים כי $M \models^v \varphi$ אזי $\varphi \models^v \varphi$.

נוסחאות v-שקולות: יהי σ מילון אזי נוסחאות φ, ψ עבורן $\{\psi\} \models^v \varphi$ וכן $\{\varphi\} \models^v \psi$.

נוסחה v-תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ מתקיים $M \models^v \varphi$.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה v-תקפה אזי $\models^v \varphi$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי $\left(\models^v \varphi \right) \iff \left(\models^t \varphi \right)$.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה תקפה אזי $\exists x \varphi$ תקפה וכן $\forall x \varphi$ תקפה.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x \varphi$ תקפה אזי φ תקפה.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma \models^t \varphi \right) \implies \left(\Gamma \models^v \varphi \right)$.

פסוק: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה $FV(\varphi) = \emptyset$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת פסוקים ותהא φ נוסחה אזי $(\Gamma \vdash^t \varphi) \iff (\Gamma \vdash^v \varphi)$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $(\Gamma \cup \{\varphi\} \text{ הינה } t\text{-ספיקה}) \iff (\Gamma \not\vdash^t \neg\varphi)$.

טענה: יהי σ מילון ותהיינה φ, ψ נוסחאות אזי $(\varphi, \psi \text{ הן } t\text{-שקולות}) \iff (\varphi \iff \psi) \text{ תקפה}$.

הסגור האוניברסלי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $FV(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $\varphi^\forall = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi$.

הסגור היישי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $FV(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $\varphi^\exists = \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \varphi$.

סימון: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת נוסחאות אזי $\Gamma^\forall = \{\varphi^\forall \mid \varphi \in \Gamma\}$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה ויהי M מבנה אזי $(M \models \varphi) \iff (M \models \varphi^\forall)$ ספיק ב- M .

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $(\Gamma \vdash^v \varphi) \iff (\Gamma^\forall \vdash^v \varphi^\forall)$.

איזומורפיזם בין מבנים: יהי σ מילון ויהיו M, N מבנים מעל σ אזי $G : D^M \rightarrow D^N$ חח"ע ועל עבורה

• לכל סימן קבוע $c \in \sigma$ מתקיים $G(c^M) = c^N$.

• לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ ולכל $a_1 \dots a_n \in D^M$ מתקיים $G(f^M(a_1 \dots a_n)) = f^N(G(a_1) \dots G(a_n))$.

• לכל סימן יחס $R \in \sigma$ ולכל $a_1 \dots a_n \in D^M$ מתקיים $(a_1 \dots a_n \in R^M) \iff ((G(a_1) \dots G(a_n)) \in R^N)$.

מבנים איזומורפיים: יהי σ מילון אזי מבנים M, N מעל σ עוברים קיים איזומורפיזם G מ- M ל- N .

סימון: יהי σ מילון ויהיו M, N מבנים איזומורפיים מעל σ אזי $M \cong N$.

טענה: יהי σ מילון יהיו M, N מבנים איזומורפיים מעל σ ויהי φ פסוק אזי $(M \models \varphi) \iff (N \models \varphi)$.

הערה: יהי σ מילון בעל יחס שיוויון Id דו־מקומי אזי לכל מבנה M נגדיר $\text{Id}^M = \text{Id}_M$ ונסמן את היחס בעזרת $=$.

הערה: אלא אם כן נאמר אחרת מכאן והלאה כל המילונים הם חסרי שיוויון.

הצבת שם עצם במשתנה: יהיו r, s שמות עצם ויהי x משתנה אזי

• אם s סימן קבוע אזי $s[r/x] = s$.

• אם $s = x$ אזי $s[r/x] = r$.

• אם $s \neq x$ משתנה אזי $s[r/x] = s$.

• אם $s = f(t_1 \dots t_n)$ אזי $s[r/x] = f(t_1[r/x] \dots t_n[r/x])$.

הצבת שם עצם בנוסחה: תהא φ נוסחה יהי r שמות עצם ויהי x משתנה אזי

• אם $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$ אזי $\varphi[r/x] = R(t_1[r/x] \dots t_n[r/x])$.

• אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי $\varphi[r/x] = \neg(\alpha[r/x])$.

• אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי $\varphi[r/x] = \alpha[r/x] \circ \beta[r/x]$.

• אם $\varphi = \forall x \alpha$ אזי $\varphi[r/x] = \forall x \alpha$.

• אם $\varphi = \exists x \alpha$ אזי $\varphi[r/x] = \exists x \alpha$.

• אם $\varphi = \forall y \alpha$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi[r/x] = \forall y (\alpha[r/x])$.

• אם $\varphi = \exists y \alpha$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi[r/x] = \exists y (\alpha[r/x])$.

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא φ נוסחה ויהי x משתנה אזי

• אם $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$ אזי שם עצם x .

• אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי שם עצם x באשר r חופשי להצבה ב- α .

• אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי שם עצם x באשר r חופשי להצבה ב- α וכן ב- β .

• אם $\varphi = \forall y \alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב- φ אזי שם עצם x .

• אם $\varphi = \exists y \alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב- φ אזי שם עצם x .

• אם $\varphi = \forall y \alpha$ וכן $x \in FV(\varphi)$ אזי שם עצם x באשר r חופשי להצבה ב- α וכן $y \notin FV(r)$.

• אם $\varphi = \exists y \alpha$ וכן $x \in FV(\varphi)$ אזי שם עצם x באשר r חופשי להצבה ב- α וכן $y \notin FV(r)$.

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f : \mathcal{P}(\{x_i\}) \rightarrow \text{נוסחאות}$ כך

• אם $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$ אזי $f(\varphi) = \emptyset$.

• אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha)$.

• אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$.

• אם $\varphi = \forall x \alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$.

• אם $\varphi = \exists y \alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$.

למה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי $(r$ חופשי להצבה ב- $\varphi) \iff (y \in FV(r) \text{ לא נוצר מופע קשור חדש עבור } y \text{ ב-} [\varphi/r/x])$.

סימון: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי נגדיר השמה

$$v[\bar{v}(r)/x](y) = \begin{cases} v(y) & x \neq y \\ \bar{v}(r) & \text{else} \end{cases}$$

מסקנה: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי $\bar{v}(s[r/x]) = \overline{v[\bar{v}(r)/x]}(s)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב- φ אזי $\bar{v}(\varphi[r/x]) = \overline{v[\bar{v}(r)/x]}(\varphi)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה ב- φ אזי $\bar{v}(\varphi) = \overline{v[v(x)/y]}(\varphi[y/x])$.

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב- φ אזי

$$(\exists x \varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi[y/x]))$$

$$(\forall x \varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi[y/x]))$$

הצורה הנורמלית PNF: $X_{\{\varphi\}}$ חסרת כמתים $\varphi, \{\forall, \exists\}$.

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי $(\varphi$ בצורת PNF) \iff קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן $x_1 \dots x_n$ משתנים וכן $Q_1 \dots Q_n$ כמתים עבורם

$$(\varphi = Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \alpha)$$

טענה: תהיינה φ, ψ נוסחאות אזי

$$(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi))$$

$$(\exists x (\varphi \vee \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi))$$

$$((\forall x \varphi) \vee \psi) \equiv^t (\forall x (\varphi \vee \psi)) \text{ אזי } x \notin FV(\psi)$$

$$((\exists x \varphi) \wedge \psi) \equiv^t (\exists x (\varphi \wedge \psi)) \text{ אזי } x \notin FV(\psi)$$

$$(\neg (\forall x \varphi)) \equiv^t (\exists x (\neg \varphi))$$

$$(\neg (\exists x \varphi)) \equiv^t (\forall x (\neg \varphi))$$

משפט: תהא φ נוסחה אזי קיימת נוסחה α בצורת PNF עבורה $\varphi \equiv^t \alpha$.

פסוק אוניברסלי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $FV(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \alpha$.

פסוק יישי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $FV(\alpha) = \{x_1 \dots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n \alpha$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל σ ויהי סימן קבוע $c \notin \sigma$ אזי $(\exists x \varphi)$ ספיקה מעל σ \iff $(\sigma \cup \{c\}$ ספיקה מעל $\varphi[c/x]$).

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ אזי $(\forall y_1 \dots \forall y_n \exists x \varphi)$ ספיק מעל σ \iff $(\sigma \cup \{f\}$ ספיק מעל המילון $\varphi[f(y_1 \dots y_n)/x]$).

באשר f פונקציה n -מקומית).

משפט סקולם: קיים אלגוריתם sk המקבל נוסחה φ מעל מילון σ ומחזיר פסוק אוניברסלי מעל מילון σ' עבורו $\sigma' \iff sk(\varphi)$ ספיק).

סקולמיזציה למילון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי המילון המינימלי מעליו מוגדר $sk(\varphi)$.

אלגוריתם לוגיקה מסדר ראשון לתחשיב הפסוקים: יהי σ מילון תהא $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ נוחסאות אטומיות סגורות f הפיכה ותהא

φ נוסחה סגורה חסרת כמתים אזי $FOLWFF(\varphi)$ עובר על φ ולכל שם עצם t בו מחליפו ב- $f(t)$.

טענה: יהי σ מילון תהא $\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ נוחסאות אטומיות סגורות f הפיכה ותהא φ נוסחה סגורה חסרת כמתים אזי

$$(\varphi \text{ ספיק}) \iff (FOLWFF(\varphi) \text{ ספיק}).$$

$$(\varphi \text{ תקפה}) \iff (FOLWFF(\varphi) \text{ טאוטולוגיה}).$$

למה: תהא φ נוסחה סגורה חסרת כמתים המורכבת מהנוסחאות האטומיות $\alpha_1 \dots \alpha_k$ נגדיר השמה של WFF כך $(M \models \alpha_i) \iff v(p_i) = (M \models \alpha_i)$

$$\text{אזי } (M \models \varphi) \iff (\bar{v}(FOLWFF(\varphi)) = T)$$

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה הרברנד: יהי σ מילון אזי מבנה M המקיים

$$\bullet \text{ לכל } a \in D^M \text{ קיים שם עצם סגור } \alpha \text{ עבורו } \alpha^M = a$$

$$\bullet \text{ יהיו } \alpha, \beta \text{ שמות עצם שונים אזי } \alpha^M \neq \beta^M$$

מסקנה: יהי σ מילון בן-מנייה ויהי M מבנה הרברנד של σ אזי D^M בן-מנייה.

הערה: מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב φ שם עצם חסר משתנים ב- σ $D^M = \{\varphi \mid \sigma \models \varphi\}$.

מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד M על σ .

טענה: יהי M מבנה הרברנד מעל σ ותהא v השמה עבורה $v(x_i) = t_i$

$$\bullet \text{ יהי } r \text{ שם עצם באשר } FV(r) = \{x_1 \dots x_n\} \text{ אזי } \bar{v}(r) = r[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$$

- תהא φ נוסחה באשר $FV(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי $(M, v \models \varphi) \iff (M \models \varphi[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n])$.
- תהא φ נוסחה אזי $(\exists x \varphi)$ ספיקה \iff (קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi[s/x]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\exists x \varphi$ פסוק אזי $(\exists x \varphi)$ תקפה \iff (קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi[s/x]$ תקפה).
- תהא φ נוסחה אזי $(\forall x \varphi)$ ספיקה \iff (לכל שם עצם סגור s מתקיים כי $\varphi[s/x]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\forall x \varphi$ פסוק אזי $(\forall x \varphi)$ תקפה \iff (לכל שם עצם סגור s מתקיים כי $\varphi[s/x]$ תקפה).

משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי (φ) ספיק במבנה הרברנד.

מופעי בסיס: תהא φ נוסחה חסרת כמתים באשר $FV(\varphi) = \{x_1 \dots x_n\}$ אזי

$$\text{GroundInstance}(\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi) = \{\varphi[s_1/x_1, \dots, s_n/x_n] \mid s_1 \dots s_n \text{ שמות עצם חסרי משתנים}\}$$

סימון: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי $\text{GroundInstance}(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \text{GroundInstance}(\varphi)$

טענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים חסרי כמתים אזי (Γ) ספיקה \iff (Γ) ספיקה במבנה הרברנד.

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

• Γ ספיקה.

• Γ ספיקה במבנה הרברנד.

• $\text{GroundInstance}(\Gamma)$ ספיקה.

• $\text{GroundInstance}(\Gamma)$ ספיקה במבנה הרברנד.

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי

• (Γ) ספיקה \iff (לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

• $(\Gamma \models \varphi) \iff (\Gamma \models \varphi)$ (קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \models \varphi$).

• $(\Gamma \models \varphi) \iff (\Gamma \models \varphi)$ (קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \models \varphi$).

טענה: יהיו x, y משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\{E(\cdot, \cdot)\}$ המקיימת $(M \models \Gamma) \iff$ (יש מסלול ב- M מ- x ל- y).

משפט: יהי σ מילון בעל קבוע תהא φ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי $(\exists x \varphi)$ תקפה \iff (קיימים שמות עצם סגורים $t_1 \dots t_n$ עבורם $\varphi[t_1/x] \vee \dots \vee \varphi[t_n/x]$ תקפה).

מבנה הנקין: יהי σ מילון אזי מבנה H מעל σ עבורו לכל $a \in D^H$ קיים שם עצם סגור t עבורו $t^H = a$

המודל הסטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון עם שיוויון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי מבנה $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$ עבורו

$$D^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = \mathbb{N} \text{ וכן } c_0^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = 0 \text{ וכן } c_1^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} = 1$$

$$f_+^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a, b) = a + b$$

$$f_\times^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a, b) = a \times b$$

$$(a, b) \in R_>^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}} \iff (a > b)$$

פסוקים נכונים אריתמטיים: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי $AT = \{\alpha \mid (\mathcal{M}_{\mathbb{N}} \models \alpha) \wedge (FV(\alpha) = \emptyset)\}$

מודל לא סטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי מבנה M עבורו $M \models AT$ וכן M אינו איזומורפי ל- $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$.

טענה: יהי M מודל לא סטנדרטי של הטבעיים אזי $|D^M| > \aleph_0$.

עוצמה של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה מעל σ אזי $|M| = |D^M|$

משפט לונהיים-סקולם היורד: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה מעל σ אזי (φ) ספיקה \iff (קיים מבנה לכל היותר בן-מנייה M בו φ ספיקה).

משפט לונהיים-סקולם העולה: יהי σ מילון יהי M מבנה בן-מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ באשר φ ספיקה ב- M אזי לכל עוצמה

אינסופית κ קיים מבנה M' מעוצמה κ עבורו φ ספיקה ב- M' .

מסקנה: יהי σ מילון ותהא κ עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל σ המקיימת $(M \models \Gamma) \iff (|M| = \kappa)$.

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן-מנייה לתורת הקבוצות.

סימון: $VALID = \{(\sigma, \varphi) \mid (\varphi)$ נוסחה מעל $\sigma) \wedge (\varphi)$ תקפה $\}$

משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי σ מילון אזי $VALID \in \mathcal{RE}$

משפט צ'רץ'-טיורינג: $HALT \leq_m VALID$

מסקנה: $VALID \notin \mathcal{R}$

בעיית הריצוף: יהיו $R_1 \dots R_n$ ריבועים בעלי צלע מאורך 1 וכן כל צלע שלהם צבועה בצבע אזי האם ניתן לרצף את $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ בעזרת הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

בעיית הריצוף: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $R : [n]^2 \times \{\text{left, right, above, below}\} \rightarrow \{\text{yes, no}\}$ אזי $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow [n]$ עברה

- לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n-1}{m}), \text{left}) = \text{yes}$
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n+1}{m}), \text{right}) = \text{yes}$
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n}{m+1}), \text{above}) = \text{yes}$
- לכל $m \in \mathbb{N}_+$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R(f(\frac{n}{m}), f(\frac{n}{m-1}), \text{below}) = \text{yes}$

סימון: $\{f\}$ פתרון לבעיית הריצוף עבור R | $\text{TILING} = \{(n, R, f) \mid R \text{ פתרון לבעיית הריצוף עבור } n\}$

משפט: $\text{VALID} \leq_m \text{TILING}$

מסקנה: $\text{TILING} \notin \mathcal{R}$

יחס קונגרואנציה: יהי σ מילון אזי $E \in \sigma$ סימן יחס דו-מקומי המקיים

- רפלקסיבי: $\forall x (E(x, x))$
- סימטרי: $\forall x \forall y (E(x, y) \implies E(y, x))$
- טרנזיטיבי: $\forall x \forall y \forall z ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \implies E(x, z))$
- לכל $f \in \sigma$ סימן פונקציה מתקיים $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i)) \implies E(f(x_1 \dots x_n), f(y_1 \dots y_n)))$
- לכל $R \in \sigma$ סימן יחס מתקיים $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_n ((\bigwedge_{i=1}^n E(x_i, y_i)) \implies (R(x_1 \dots x_n) \iff R(y_1 \dots y_n)))$

הערה: בהינתן מילון עם שיוויון σ ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

מילון מחלקות קונגרואנציה: יהי מילון σ עם שיוויון M מבנה על σ אזי מבנה M_E מעל σ_E המקיים

$$D^{M'} = D^M / E \quad \bullet$$

- לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ מתקיים $f^{M'}([a_1]_E, \dots, [a_n]_E) = [f^M(a_1 \dots a_n)]_E$
- לכל סימן יחס $R \in \sigma$ מתקיים $R^{M'}([a_1]_E, \dots, [a_n]_E) \iff R^M(a_1 \dots a_n)$

החלפת שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא φ נוסחה מעל מילון עם שיוויון σ באשר $f_1 \dots f_n$ סימני הפונקציות ב- φ וכן $R_1 \dots R_m$ סימני היחס ב- φ אזי $\varphi_E = \varphi^{[E/=]} \wedge (E \text{ יחס שקילות}) \wedge (\bigwedge_{i=1}^n (f_i \text{ ל-} E) \wedge (\bigwedge_{i=1}^m (E_i \text{ ביחס ל-} E)))$

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ עם שיוויון M מבנה מעל σ ותהא v השמה נגדיר השמה $v_E : \{x_i\} \rightarrow D^{M_E}$ באשר $v_E(x_i) = [v(x_i)]_E$ אזי $(M_E, v_E \models \varphi_E) \iff (M, v \models \varphi)$

משפט: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ באשר φ מעל מילון עם שיוויון σ ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון ψ באשר ψ מעל מילון σ' עבורו $(\varphi \text{ ספיקה}) \iff (\psi \text{ ספיקה})$.

משפט: תהא Γ קבוצת נוסחאות מעל σ עם שיוויון אזי $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\Gamma_E \text{ ספיקה})$.

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון עם שיוויון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $(\Gamma \text{ ספיקה}) \iff (\Delta \subseteq \Gamma \text{ סופית } \Delta \text{ ספיקה})$.

הגדרה: יהי $\sigma = \{R(\cdot, \cdot)\}$ מילון עם שיוויון אזי

- $\xi_1 = \forall x (\neg (R(x, x)))$
- $\xi_2 = \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \implies R(x, z))$
- $\xi_3 = \forall x \forall y ((x \neq y) \implies (R(x, y) \vee R(y, x)))$
- $\xi_4 = (\forall x \exists y (R(x, y))) \wedge (\forall x \exists y (R(y, x)))$
- $\xi_5 = \forall x \forall y ((R(x, y)) \implies (\exists z (R(x, z) \wedge (R(z, y))))))$
- $\xi = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5$

משפט קנטור: יהי $\sigma = \{R(\cdot, \cdot)\}$ מילון עם שיוויון והיו M, N מבנים המספקים את ξ אזי $M \cong N$

כלל ג'ן: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי $\text{Gen} : \frac{\alpha}{\forall x \alpha}$

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי σ מילון אזי

- אלפבית: $\Sigma = \sigma$
- נוסחאות: $N = X_{\{t \mid \text{עצם } t\}, \{\neg, \implies, \forall\}}$
- אקסיומות:
 - $A_1 = (\alpha \implies (\beta \implies \alpha))$
 - $A_2 = ((\alpha \implies (\beta \implies \gamma)) \implies ((\alpha \implies \beta) \implies (\alpha \implies \gamma)))$
 - $A_3 = (((\neg \alpha) \implies (\neg \beta)) \implies (\beta \implies \alpha))$

$$\cdot \forall x \forall y ((x < y) \iff (\exists z ((z \neq c_0) \wedge (x + z = y)))) \bullet$$

סימון: יהי $\{c_0, \text{succ}, *, +, <\}$ מילון עם שיויון אזי $\{\text{אקסיומות אריתמטיקה פיאנו}\} = \text{PA}$.

מערכת הוכחה אריתמטית: מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון (Σ, N, A, F) עבורה $\text{PA} \subseteq A$.

משפט אי השלמות של גדל: תהא S מערכת הוכחה עקבית אפקטיבית ואריתמטית בלוגיקה מסדר ראשון אזי S אינה שלמה.