רישום קבוצה בעזרת רשימת איברים: $\{a_1,\dots,a_n\}$ מתקיים $((a=a_1)\vee\dots\vee(a=a_n))\Longleftrightarrow(a\in\{a_1,\dots,a_n\})$.

סימון: תהא Σ קבוצה אזי $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^{\infty}\Sigma^i$.

טענה: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי קיימת ויחידה $S\subseteq\Sigma^*$ המקיימת

- $B\subseteq S$.
- S סגורה להפעלת F.
- מינימליות: תהא $A\subseteq\Sigma^*$ עבורה $B\subseteq A$ וכן A סגורה להפעלת F אזי $S\subseteq A$.

אינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}\subseteq\Sigma^*$ מינימלית סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq X_{B,F}$.

עולם באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי Σ.

בסיס באינדוקציה מבנית: תהא Σ קבוצה תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי B.

טענה: תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid(B\subseteq Y)\wedge(Y\text{ סגורה להפעלת }F)\}$.

אינווריאנטה: יהי Σ עולם תהא $B\subseteq\Sigma^*$ ותהא $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$ אזי $Y\subseteq\Sigma^*$ סגורה להפעלת F עבורה $B\subseteq Y$.

מסקנה הוכחה באינדוקציה מבנית: יהי Σ עולם ותהא $Y\subseteq\Sigma^*$ אינווריאנטה אזי $X_{B,F}\subseteq Y$.

מסקנה משפט האינדוקציה: תהא p טענה על $\mathbb{N}$ אזי $(p(0)\wedge(\forall n\in\mathbb{N}.p(n)\Longrightarrow p(n+1)))\Longrightarrow(\forall n\in\mathbb{N}.p(n))$.

סדרת יצירה: יהי $a\in X_{B,F}$ אזי $(a_1,\dots,a_n)$ עבורה $a_n=a$ וכן לכל $i\in[n]$ מתקיים $(a_i\in B)\vee(a_i$ מתקבל על ידי הפעלת F על חלק מ־$\{a_1,\dots,a_{i-1}\})$.

טענה: יהי $a\in\Sigma^*$ אזי $(a\in X_{B,F})\Longleftrightarrow$(קיימת סדרת יצירה ל־$a$).

מסקנה: $X_{B,F}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a\in\Sigma^*\mid a\text{ בעלת סדרת יצירה באורך }n\}$.

עולם תחשיב הפסוקים: $\Sigma=\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow,(,)\}\cup\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

ביטוי: יהי Σ תחשיב הפסוקים אזי $a\in\Sigma^*$.

הגדרה: יהיו $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ אזי

- $\wedge(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\wedge\omega_2)\text{"}$.
- $\vee(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\vee\omega_2)\text{"}$.
- $\Longrightarrow(\omega_1,\omega_2)=\text{"}(\omega_1\Longrightarrow\omega_2)\text{"}$.
- $\neg(\omega_1)=\text{"}(\neg\omega_1)\text{"}$.

קבוצת הנוסחאות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי/פסוק: $\text{WFF}=X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$.

פסוק אטומי/יסודי: $p\in\text{WFF}$ עבורו $p\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$.

טענה: יהי $p\in\text{WFF}$ אזי (p פסוק אטומי)$\vee$(הפסוק p מתחיל עם "(" ונגמר עם ")").

מסקנה: יהיו $q_1,q_2\in\text{WFF}$ אזי $q_1(q_2\notin\text{WFF}$.

משפט הקריאה היחידה: יהי $\alpha\in\text{WFF}$ אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α פסוק אטומי.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\wedge\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\vee\gamma)$.
- קיימים ויחידים $\beta,\gamma\in\text{WFF}$ עבורם $\alpha=(\beta\Longrightarrow\gamma)$.
- קיים ויחיד $\beta\in\text{WFF}$ עבורו $\alpha=(\neg\beta)$.

מסקנה אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי Σ תחשיב הפסוקים ויהי $\alpha\in\Sigma^*$ ביטוי אזי קיים אלגוריתם $\mathcal{O}(\text{len}(\alpha))$ לבדיקה האם $\alpha\in\text{WFF}$.

הערה סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\neg$.
2. $\wedge,\vee$.
3. $\Longrightarrow$.

סימון אמת: T,true.

סימון שקר: F,false.

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתיותו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

הגדרה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	$\neg q$
true	false
false	true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \vee p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

סימון: תהא $\circ \in \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow\}$ אזי טבלת האמת של $\circ$ הינה $TT_\circ$.

השמה: פונקציה $v : \{p_i\} \to \{F, T\}$.

השמת ערך אמת לפסוק: תהא v השמה אזי פונקציה $\overline{v} : \text{WFF} \to \{F, T\}$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\overline{v}(p) = v(p)$.
- יהי α פסוק אזי $\overline{v}(\neg\alpha) = TT_\neg(\overline{v}(\alpha))$.
- יהיו β, γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\overline{v}(\beta \circ \gamma) = TT_\circ(\overline{v}(\beta), \overline{v}(\gamma))$.

השמה מספקת פסוק: תהא v השמה אזי $\alpha \in \text{WFF}$ עבורה $\overline{v}(\alpha) = T$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in \text{WFF}$ מסופקת על ידי v אזי $v \models \alpha$.

סימון: תהא v השמה ותהא $\alpha \in \text{WFF}$ לא מסופקת על ידי v אזי $v \not\models \alpha$.

הפסוקים האטומיים בפסוק: פונקציה $\text{Var} : \text{WFF} \to \mathcal{P}(\{p_i\})$ המוגדרת

- יהי p פסוק אטומי אזי $\text{Var}(p) = \{p\}$.
- יהי α פסוק אזי $\text{Var}(\neg\alpha) = \text{Var}(\alpha)$.
- יהיו β, γ פסוקים ותהא $\circ$ פעולה בינארית אזי $\text{Var}(\beta \circ \gamma) = \text{Var}(\beta) \cup \text{Var}(\gamma)$.

משפט התלות הסופית: תהיינה v_1, v_2 השמות ויהי $\alpha \in \text{WFF}$ עבורו $v_1(p) = v_2(p)$ $\forall p \in \text{Var}(\alpha)$ אזי $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ אזי ניתן לייצג את α על ידי TT_α.

מערכת קשרים שלמה פונקציונלית: קבוצה $K \subseteq \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow\}$ עבורה לכל טבלת אמת TT קיים $\alpha \in \text{WFF}$ עבורו $TT = TT_\alpha$.

טענה: $\{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow\}$ שלמה פונקציונלית.

טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה $\neg, \wedge, \vee \in K$ אזי K שלמה פונקציונלית.

פסוק ספיק: פסוק $\alpha \in \text{WFF}$ עבורו קיימת השמה v המקיימת $v \models \alpha$.

טאוטולוגיה: פסוק $\alpha \in \text{WFF}$ עבורו לכל השמה v מתקיים $v \models \alpha$.

סימון: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ טאוטולוגיה אזי $\models \alpha$.

סתירה: פסוק $\alpha \in \text{WFF}$ עבורו $\models (\neg\alpha)$.

פסוקים שקולים: פסוקים $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ עבורם לכל השמה v מתקיים $\overline{v}(\alpha) = \overline{v}(\beta)$.

סימון: יהיו $\alpha, \beta \in \text{WFF}$ שקולים אזי $\alpha \equiv \beta$.

קבוצה ספיקה: קבוצה $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ עבורה קיימת השמה v עבורה לכל $\alpha \in \Gamma$ מתקיים $v \models \alpha$.

סימון: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ קבוצה ספיקה על ידי השמה v אזי $v \models \Gamma$.

פסוק נובע סמנטית: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ אזי $\alpha \in \text{WFF}$ עבורו לכל השמה v המקיימת $v \models \Gamma$ מתקיים $v \models \alpha$.

סימון: תהא $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ ויהי $\alpha \in \text{WFF}$ פסוק נובע סמנטית מ־Γ אזי $\Gamma \models \alpha$.

טענה: יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in \text{WFF}$ אזי

- $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$.
- $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$.
- $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha)$.
- $(\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha)$.
- $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.
- $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$.
- $\neg(\neg\alpha) \equiv \alpha$.
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$.
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$.
- $(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg\alpha) \vee \beta$.

למה: יהי $\gamma \in \mathrm{WFF}$ סתירה אזי לכל $\alpha \in \mathrm{WFF}$ מתקיים $\gamma \models \alpha$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \models \beta$ אזי $\Gamma \models \beta$.

טענה: תהא $\Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$ עבורם $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg\beta)$ אזי $\Gamma \models (\neg\alpha)$.

טענה: יהיו $\alpha, \beta \in \mathrm{WFF}$ אזי $(\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta))$.

הצבת פסוק בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi \in \mathrm{WFF}$ ויהי p פסוק אטומי אזי

- אם $\alpha = p$ אזי $\alpha\left[\varphi/p\right] = \varphi$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p$ אזי $\alpha\left[\varphi/p\right] = \alpha$.
- אם קיים $\beta \in \mathrm{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $\alpha\left[\varphi/p\right] = \neg\beta\left[\varphi/p\right]$.
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \mathrm{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $\alpha\left[\varphi/p\right] = \beta\left[\varphi/p\right] \circ \gamma\left[\varphi/p\right]$.

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \mathrm{WFF}$ ויהי $p \in \mathrm{Var}(\alpha)$ אזי $\alpha\left[\varphi/p\right] \in \mathrm{WFF}$.

הצבת פסוקים בפסוק: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathrm{WFF}$ ויהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי

- אם $\alpha = p_i$ עבור $i \in [n]$ אזי $\alpha\left[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n\right] = \varphi_i$.
- אם α פסוק אטומי וכן $\alpha \neq p_i$ לכל $i \in [n]$ אזי $\alpha\left[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n\right] = \alpha$.
- אם קיים $\beta \in \mathrm{WFF}$ עבורו $\alpha = \neg\beta$ אזי $\alpha\left[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n\right] = \neg\beta\left[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n\right]$.
- אם קיימים $\beta, \gamma \in \mathrm{WFF}$ וקיימת פעולה בינארית $\circ$ עבורה $\alpha = \beta \circ \gamma$ אזי $\alpha\left[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n\right] = \beta\left[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n\right] \circ \gamma\left[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n\right]$.

סימון: יהיו $\alpha, \varphi \in \mathrm{WFF}$ יהי p_i פסוק אטומי ותהא v השמה אזי ההשמה $v\left[\overline{v}(\varphi)/p_i\right](p_j) = \begin{cases} v(p_j) & i\neq j \\ \overline{v}(\varphi) & i=j \end{cases}$.

טענה: יהיו $\alpha, \varphi \in \mathrm{WFF}$ יהי p פסוק אטומי ותהא v השמה אזי $\overline{v}\left(\alpha\left(\varphi/p\right)\right) = \overline{v\left[\overline{v}(\varphi)/p\right]}(\alpha)$.

סימון: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathrm{WFF}$ יהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה אזי ההשמה $v\left[\overline{v}(\varphi_1)/p_1, \ldots, \overline{v}(\varphi_1)/p_1\right](p_j) = \begin{cases} v(p_j) & j\notin[n] \\ \overline{v}(\varphi_j) & j\in[n] \end{cases}$.

מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: יהיו $\alpha, \varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathrm{WFF}$ יהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים ותהא v השמה אזי $\overline{v}\left(\alpha\left[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n\right]\right) = \overline{v\left[\overline{v}(\varphi_1)/p_1, \ldots, \overline{v}(\varphi_1)/p_1\right]}(\alpha)$.

מסקנה: יהי $\alpha \in \mathrm{WFF}$ טאוטולוגיה יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n \in \mathrm{WFF}$ יהיו $p_1 \ldots p_n$ פסוקים אטומים אזי $\alpha\left[\varphi_1/p_1 \ldots \varphi_n/p_n\right]$ טאוטולוגיה.

הצורה הנורמלית NNF: $\mathrm{NNF} = X_{\{p_i | i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i) | i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha \in \mathrm{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \mathrm{NNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

סימון: $\mathrm{Conj} = X_{\{p_i | i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i) | i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}}$.

הצורה הנורמלית DNF: $\mathrm{DNF} = X_{\mathrm{Conj},\{\vee\}}$.

משפט: יהי $\alpha \in \mathrm{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \mathrm{DNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

סימון: $\mathrm{Disj} = X_{\{p_i | i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i) | i\in\mathbb{N}\},\{\vee\}}$.

הצורה הנורמלית CNF: $\mathrm{CNF} = X_{\mathrm{Disj},\{\wedge\}}$.

משפט: יהי $\alpha \in \mathrm{WFF}$ אזי קיים $\beta \in \mathrm{CNF}$ עבורו $\alpha \equiv \beta$.

מערכת הוכחה: יהי Σ אלפבית תהא $N \subseteq \Sigma^*$ תהא $A \subseteq N$ ותהא $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(N^n \to N\right)$ אזי (Σ, N, A, F).

הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.

נוסחאות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי N.

אקסיומות של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי A.

כללי היסק של מערכת הוכחה: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי F.

קבוצת המשפטים: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה אזי $X_{A,F}$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ משפט אזי $\underset{S}{\vdash} \varphi$.

מערכת הוכחה בעלת הנחות: תהא (Σ, N, A, F) מערכת הוכחה ותהא $\Gamma \subseteq N$ אזי $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$.

קבוצת הטענות היכיחות מהנחות: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות אזי $X_{A\cup\Gamma,F}$.

הגדרה הוכחה: תהא $(\Sigma, N, A, F, \Gamma)$ מערכת הוכחה בעלת הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי סדרת יצירה של φ.

סימון: תהא S מערכת הוכחה תהיינה $\Gamma \subseteq N$ הנחות ויהי $\varphi \in N$ יכיח אזי $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$.

טענה: תהא S מערכת הוכחה ויהי $\varphi \in N$ אזי

- מונוטוניות: תהא $\Delta \subseteq N$ עבורה $\Delta \underset{S}{\vdash} \varphi$ ותהא $\Delta \subseteq \Gamma$ אזי $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$.
- קומפקטיות: תהא $\Gamma \subseteq N$ עבורה $\Gamma \underset{S}{\vdash} \varphi$ אזי קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \underset{S}{\vdash} \varphi$.

- טרנזיטיביות: תהיינה $\Delta,\Gamma\subseteq N$ באשר $\Delta\underset{S}{\vdash}\varphi$ וכן לכל $\alpha\in\Delta$ מתקיים $\Gamma\underset{S}{\vdash}\alpha$ אזי $\Gamma\underset{S}{\vdash}\varphi$.

סימון: תהא S מערכת הוכחה ויהי $f\in F$ כלל היסק המקיים $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=y$ אזי $f:\frac{x_1\ldots x_n}{y}$.

כלל הניתוק (Ponens Modus): תהא (Σ,N,A,F) מערכת הוכחה אזי $\text{MP}:\frac{(\alpha\Longrightarrow\beta),\alpha}{\beta}$.

מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך

- אלפבית: $\Sigma=\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}\cup\{\neg,\Longrightarrow,(,)\}$.
- נוסחאות: $N=X_{\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\},\{\neg,\Longrightarrow\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1=(\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$.
  - $A_2=((\alpha\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\gamma))\Longrightarrow((\alpha\Longrightarrow\beta)\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow\gamma)))$.
  - $A_3=(((\neg\alpha)\Longrightarrow(\neg\beta))\Longrightarrow(\beta\Longrightarrow\alpha))$.
- כללי היסק: $F=\{\text{MP}\}$.

טענה: יהיו α,β נוסחאות ב־HPC אזי

- $\underset{\text{HPC}}{\vdash}(\alpha\Longrightarrow\alpha)$.
- $\underset{\text{HPC}}{\vdash}((\neg\alpha)\Longrightarrow(\alpha\Longrightarrow\beta))$.
- $\{\neg\alpha\}\underset{\text{HPC}}{\vdash}(\alpha\Longrightarrow\beta)$.

מסקנה: יהיו α,β נוסחאות ב־HPC באשר $\underset{\text{HPC}}{\vdash}(\neg\alpha)$ אזי $\{\alpha\}\underset{\text{HPC}}{\vdash}\beta$.

הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון $\vdash$ הוא במערכת HPC.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HPC אזי $(\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta)\Longleftrightarrow(\Gamma\vdash(\alpha\Longrightarrow\beta))$.

סימון: תהא מערכת הוכחה S ותהא $\Gamma\subseteq N$ אזי $\text{Ded}\left(\Gamma\right)=\{\alpha\in N\mid\Gamma\vdash\alpha\}$.

טענה: תהא α נוסחה מעל HPC אזי $\vdash((\neg(\neg\alpha))\Longrightarrow\alpha)$.

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

משפט הנאותות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $\left(\Gamma\underset{\text{HPC}}{\vdash}\alpha\right)\Longrightarrow(\Gamma\models\alpha)$.

למה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α,β,γ נוחסאות מעל HPC אזי
$((\Gamma\vdash(\alpha\Longrightarrow\beta))\wedge(\Gamma\vdash(\beta\Longrightarrow\gamma)))\Longrightarrow(\Gamma\vdash(\alpha\Longrightarrow\gamma))$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HPC אזי
$((\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\beta)\wedge(\Gamma\cup\{\neg\alpha\}\vdash\beta))\Longrightarrow(\Gamma\vdash\beta)$.

קבוצת הנחות עקבית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות מעל S עבורה קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\Gamma\underset{S}{\nvdash}\alpha$.

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ אינה עקבית)$\Longleftrightarrow$(קיימת α נוסחה מעל S המקיימת $\left(\Gamma\underset{S}{\vdash}(\neg\alpha)\right)\wedge\left(\Gamma\underset{S}{\vdash}\alpha\right)$).

טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה Γ הנחות מעל S אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית מתקיים כי Δ עקבית).

קבוצת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה S אזי Γ קבוצת הנחות עקבית מעל S עבורה לכל Δ קבוצת הנחות עקבית מעל S המקיימת $\Gamma\subseteq\Delta$ מתקיים $\Gamma=\Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC עבורה $\Gamma\vdash\alpha$ אזי $\alpha\in\Gamma$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\alpha\in\Gamma)\vee(\neg\alpha\in\Gamma)$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC ותהיינה α,β נוחסאות מעל HPC אזי
$(\Gamma\vdash(\alpha\Longrightarrow\beta))\Longleftrightarrow((\neg\alpha\in\Gamma)\vee(\beta\in\Gamma))$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מקסימלית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית Δ עבורה $\Gamma\subseteq\Delta$.

טענה: תהא Γ קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי Γ ספיקה.

מסקנה: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ עקבית)$\Longleftrightarrow$(Γ ספיקה).

משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $\left(\Gamma\underset{\text{HPC}}{\vdash}\alpha\right)\Longleftarrow(\Gamma\models\alpha)$.

מסקנה: תהיינה Γ הנחות מעל HPC ותהא α נוסחה מעל HPC אזי $(\Gamma\models\alpha)\Longleftrightarrow(\Gamma\vdash\alpha)$.

משפט הקומפקטיות: תהא Γ קבוצת הנחות מעל HPC אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta\subseteq\Gamma$ סופית Δ ספיקה).

סימון: תהא $\Gamma\subseteq\text{WFF}$ אזי $\text{Ass}\left(\Gamma\right)=\{v\in\{p_i\}\to\{F,T\}\mid v\models\Gamma\}$.

טענה: הקבוצה $\{(\{p_i\}\to\{F,T\})\backslash\text{Ass}\left(\Gamma\right)\mid\Gamma\subseteq\text{WFF}\}$ הינה טופולוגיה על $\{p_i\}\to\{F,T\}$.

טענה: הטופולוגיה $\{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \text{Ass}(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \text{WFF}\}$ הינה קומפקטית.

הגדרה: יהי G גרף פשוט לא מכוון תהא $f : V \to \text{WFF}$ חח"ע ויהיו $(v,u) \in E$ אזי $\varphi_G : E \to \text{WFF}$ כך $\varphi_G((v,u)) = "f(v) \implies f(u)"$.

טענה: יהי G גרף פשוט לא מכוון ותהא $f : V \to \text{WFF}$ חח"ע אזי (G הינו 2־צביע)$\Longleftrightarrow$$\{\varphi_G(e) \mid e \in E\}$ ספיקה).

מסקנה: יהי G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו 2־צביע)$\Longleftrightarrow$(לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו 2־צביע).

טענה: יהי G גרף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי (G הינו k־צביע)$\Longleftrightarrow$(לכל $G' \leq G$ סופי G' הינו k־צביע).

קבוצת השמות גדירה: קבוצה $K \subseteq \{p_i\} \to \{F,T\}$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.

טענה: $\varnothing$ גדירה.

טענה: $\{p_i\} \to \{F,T\}$ גדירה.

טענה: לכל v השמה $\{v\}$ גדירה.

טענה: קיימת $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ שאינה גדירה.

סימון: $K_{\text{finite}} = \left\{v \in \{p_i\} \to \{F,T\} \mid \left|v^{-1}(\{T\})\right| < \aleph_0\right\}$.

טענה: K_{finite} אינה גדירה.

קבוצת השמות גדירה באופן סופי: קבוצה $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ עבורה קיימת $\Gamma \subseteq \text{WFF}$ סופית המקיימת $K = \text{Ass}(\Gamma)$.

משפט: תהא $K \subseteq \mathcal{P}(\{p_i\} \to \{F,T\})$ התב"ש

- K גזירה וכן $K^{\mathcal{C}}$ גדירה.
- K גדירה באופן סופי.
- K גדירה על ידי פסוק יחיד.

מילון: יהי Σ אלפבית אזי $(\{c_i \in \Sigma \mid i \in \mathbb{N}\}, \{R_{n,i} \subseteq \Sigma^n \mid i,n \in \mathbb{N}\}, \{f_{n,i} \subseteq \Sigma^n \to \Sigma \mid i,n \in \mathbb{N}\})$.

סימני קבוע במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי C.

סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי R.

סימני פונקציה במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי F.

מילון סופי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ בעל מספר סופי של סימנים.

מילון יחסי: יהי Σ אלפבית אזי מילון σ חסר סימני פונקציה.

לוגיקה מסדר ראשון: יהי Σ אלפבית ויהי σ מילון אזי $(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{"(", ")"\}, \{\neg, \vee, \wedge, \implies\}, \{\forall, \exists\}, \sigma)$.

משתנים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: $\{"(", ")"\}$.

קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{\neg, \vee, \wedge, \implies\}$.

כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: $\{\forall, \exists\}$.

סיגנטורה של לוגיקה מסדר ראשון: תהא L לוגיקה מסדר ראשון אזי המילון σ בה.

שמות עצם מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{f_{i,n} \mid i,n \in \mathbb{N}\}}$.

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי σ מילון ויהי t שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- t משתנה.
- t סימן קבוע.
- קיים ויחיד סימן פונקציה $f_{i,n}$ ושמות עצם $t_1 \ldots t_n$ עבורם $t = f(t_1 \ldots t_n)$.

הגדרה: יהי σ מילון יהי x משתנה ותהא $\alpha \in \sigma$ אזי

- $\forall(\alpha, x) = "\forall x \alpha"$.
- $\exists(\alpha, x) = "\exists x \alpha"$.

נוסחאות אטומיות: יהי σ מילון אזי $\{R_{n,i}(t_1 \ldots t_n) \mid (i,n \in \mathbb{N}) \wedge (\text{שמות עצם } t_1 \ldots t_n)\}$.

נוסחאות מעל מילון: יהי σ מילון אזי $X_{\{R_{n,i}(t_1 \ldots t_n) \mid (i,n \in \mathbb{N}) \wedge (\text{שמות עצם } t_1 \ldots t_n)\}, \{\wedge, \vee, \neg, \implies, \forall, \exists\}}$.

משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים

- α נוסחה אטומית.
- קיימת ויחידה נוסחה β עבורה $\alpha = "(\neg \beta)"$.
- קיימות ויחידות נוסחאות β, γ וכן פעולה בולינארית $\circ$ עבורן $\alpha = "(\beta \circ \gamma)"$.
- קיימת ויחידה נוסחה β וכן משתנה x וכן כמת Q עבורם $\alpha = "Qx\beta"$.

משתנה חופשי בשם עצם: נגדיר $\mathrm{FV}:\{t \mid t \text{ שם עצם במילון } \sigma\} \to \mathcal{P}(\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\})$ כך

- יהי $c\in\sigma$ סימן קבוע אזי $\mathrm{FV}(c)=\varnothing$.
- יהי $x\in\sigma$ משתנה אזי $\mathrm{FV}(x)=\{x\}$.
- יהיו $t_1\ldots t_n$ שמות עצם ויהי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $\mathrm{FV}(f(t_1\ldots t_n))=\bigcup \mathrm{FV}(t_i)$.

משתנה חופשי בנוסחה: נגדיר $\mathrm{FV}:\{\varphi \mid \varphi \text{ נוסחה במילון } \sigma\} \to \mathcal{P}(\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\})$ כך

- יהיו $t_1\ldots t_n$ שמות עצם ויהי $R\in\sigma$ סימן יחס אזי $\mathrm{FV}(R(t_1\ldots t_n))=\bigcup \mathrm{FV}(t_i)$.
- תהא φ נוסחה אזי $\mathrm{FV}(\neg\varphi)=\mathrm{FV}(\varphi)$.
- תהיינה φ,ψ נוסחאות ויהי $\circ$ פעולה בוליאנית אזי $\mathrm{FV}(\varphi\circ\psi)=\mathrm{FV}(\varphi)\cup\mathrm{FV}(\psi)$.
- תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי Q כמת אזי $\mathrm{FV}(Qx\varphi)=\mathrm{FV}(\varphi)\setminus\{x\}$.

נוסחה סגורה: נוסחה φ עבורה $\mathrm{FV}(\varphi)=\varnothing$.

הערה סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות

1. $\forall,\exists$.
2. $\neg$.
3. $\wedge,\vee$.
4. $\Longrightarrow$.

מבנה עבור מילון: יהי σ מילון יהי $D\neq\varnothing$ ותהא $D \to C:\{c_i\}$ וכן $R:\{R_{n,i}\}\to D^n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ וכן $F:\{f_{n,i}\}\to(D^n\to D)$ אזי $(D,C(c_0),\ldots,R(R_{1,0}),\ldots,f(f_{0,0})\ldots)$.

תחום של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי D.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ בעל תחום D אזי $D^M=D$.

פירוש של סימנים במילון על ידי מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $(C(c_0),\ldots,R(R_{2,0}),\ldots,f(f_{0,0}))$.

סימון: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $c_i^M=C(c_i)$ וכן $R_{n,i}^M=R(R_{n,i})$ וכן $f_{n,i}^M=F(f_{n,i})$.

השמה: יהי σ מילון ויהי M מבנה על σ אזי $v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}\to D^M$.

השמת ערך לשם עצם: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ יהי ותהא v השמה אזי

- יהי $c_i\in\sigma$ סימן קבוע אזי $\overline{v}(c_i)=c_i^M$.
- יהי $x_i\in\sigma$ משתנה אזי $\overline{v}(x_i)=v(x_i)$.
- יהיו $t_1\ldots t_n$ שמות עצם ויהי $f\in\sigma$ סימן פונקציה אזי $\overline{v}(f(t_1\ldots t_n))=f^M(\overline{v}(t_1)\ldots\overline{v}(t_n))$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1,v_2 השמות ויהי t שם עצם עבורו $\forall x\in\mathrm{FV}(t).v_1(x)=v_2(x)$ אזי $\overline{v_1}(t)=\overline{v_2}(t)$.

השמה מתוקנת: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהא v השמה יהי $x_j\in\sigma$ משתנה ויהי $d\in D^M$ אזי נגדיר השמה $v\left[{}^{d}/{}_{x_j}\right](x_i)=\begin{cases} v(x_i) & i\neq j\\ d & \text{else}\end{cases}$.

ערך אמת לנוסחה: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ ותהא v השמה אזי

- יהיו $t_1\ldots t_n$ שמות עצם ויהי $R\in\sigma$ סימן יחס אזי $(\overline{v}(R(t_1\ldots t_n))=T)\iff\left((\overline{v}(t_1),\ldots,\overline{v}(t_n))\in R^M\right)$.
- תהא α נוסחה אזי $\overline{v}(\neg\alpha)=TT_\neg(\overline{v}(\alpha))$.
- תהיינה α,β נוסחאות ויהי $\circ$ קשר בינארי אזי $\overline{v}(\alpha\circ\beta)=TT_\circ(\overline{v}(\alpha),\overline{v}(\beta))$.
- תהא φ נוסחה אזי $(\overline{v}(\exists x\varphi)=T)\iff\left(\exists d\in D^M\left(\overline{v\left[{}^{d}/{}_{x}\right]}(\varphi)=T\right)\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי $(\overline{v}(\forall x\varphi)=T)\iff\left(\forall d\in D^M\left(\overline{v\left[{}^{d}/{}_{x}\right]}(\varphi)=T\right)\right)$.

משפט התלות הסופית: יהי σ מילון יהי M מבנה על σ תהיינה v_1,v_2 השמות ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x\in\mathrm{FV}(t).v_1(x)=v_2(x)$ אזי $\overline{v_1}(\varphi)=\overline{v_2}(\varphi)$.

נוסחה ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי נוסחה φ עבורה $\overline{v}(\varphi)=T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא φ נוסחה ספיקה ב־M אזי $M,v\models\varphi$.

t־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה יהי M מבנה ותהא v השמה עבורם $M,v\models\varphi$ אזי (M,v).

קבוצת נוסחאות ספיקה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi\in\Gamma$ מתקיים $\overline{v}(\varphi)=T$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ תהא v השמה ותהא Γ קבוצת נוסחאות ספיקה ב־M אזי $M,v\models\Gamma$.

נוסחה ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M והשמה v עבורם $M,v\models\varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא v השמה תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה לכל (M,v) t־מודל של Γ מתקיים כי (M,v) t־מודל של φ אזי $\Gamma\overset{t}{\models}\varphi$.

נוסחאות t־שקולות: יהי σ מילון ותהא v השמה אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\}\overset{t}{\models}\varphi$ וכן $\{\varphi\}\overset{t}{\models}\psi$.

נוסחה t־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ ולכל v השמה מתקיים (M,v) t־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה t־תקפה אזי $\overset{t}{\models}\varphi$.

נוסחה נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי נוסחה φ עבורה לכל v השמה מתקיים $M,v\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא φ נוסחה נכונה ב־M אזי $M\models\varphi$.

v־מודל של נוסחה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה אזי מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

קבוצת נוסחאות נכונה במבנה: יהי M מבנה על מילון σ אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל $\varphi\in\Gamma$ מתקיים $M\models\varphi$.

סימון: יהי M מבנה על מילון σ ותהא Γ קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי $M\models\Gamma$.

נוסחה v־ספיקה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה קיים מבנה M עבורו $M\models\varphi$.

סימון: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה עבורה לכל M v־מודל של Γ מתקיים כי M v־מודל של φ אזי $\Gamma\overset{v}{\models}\varphi$.

נוסחאות v־שקולות: יהי σ מילון אזי נוסחאות φ,ψ עבורן $\{\psi\}\overset{v}{\models}\varphi$ וכן $\{\varphi\}\overset{v}{\models}\psi$.

נוסחה v־תקפה: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה לכל M מבנה על σ מתקיים M v־מודל של φ.

סימון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה v־תקפה אזי $\overset{v}{\models}\varphi$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי $\left(\overset{t}{\models}\varphi\right)\iff\left(\overset{v}{\models}\varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה תקפה אזי $\exists x\varphi$ תקפה וכן $\forall x\varphi$ תקפה.

טענה: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ תקפה אזי φ תקפה.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)\Longrightarrow\left(\Gamma\overset{t}{\models}\varphi\right)$.

פסוק: יהי σ מילון אזי נוסחה φ עבורה $\mathrm{FV}(\varphi)=\varnothing$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת פסוקים ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)\Longleftarrow\left(\Gamma\overset{t}{\models}\varphi\right)$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי ($\Gamma\cup\{\varphi\}$ הינה t־ספיקה)$\iff$($\Gamma\overset{t}{\not\models}\neg\varphi$).

טענה: יהי σ מילון ותהיינה φ,ψ נוסחאות אזי (φ,ψ הן t־שקולות)$\iff$($(\varphi\iff\psi)$ תקפה).

הסגור האוניברסלי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\mathrm{FV}(\varphi)=\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\varphi^{\forall}=\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_n\varphi$.

הסגור היישי: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה עבורה $\mathrm{FV}(\varphi)=\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\varphi^{\exists}=\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_n\varphi$.

סימון: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת נוסחאות אזי $\Gamma^{\forall}=\left\{\varphi^{\forall}\mid\varphi\in\Gamma\right\}$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה ויהי M מבנה אזי ($\varphi^{\forall}$ ספיק ב־M)$\iff$($M\models\varphi$).

טענה: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוסחאות ותהא φ נוסחה אזי $\left(\Gamma^{\forall}\overset{v}{\models}\varphi^{\forall}\right)\iff\left(\Gamma\overset{v}{\models}\varphi\right)$.

איזומורפיזם בין מבנים: יהי σ מילון ויהיו M,N מבנים מעל σ אזי $G:D^M\to D^N$ חח"ע ועל עבורה
- לכל סימן קבוע $c\in\sigma$ מתקיים $G\left(c^M\right)=c^N$.
- לכל סימן פונקציה $f\in\sigma$ ולכל $a_1\ldots a_n\in D^M$ מתקיים $G\left(f^M(a_1\ldots a_n)\right)=f^N\left(G(a_1)\ldots G(a_n)\right)$.
- לכל סימן יחס $R\in\sigma$ ולכל $a_1\ldots a_n\in D^M$ מתקיים $\left((a_1\ldots a_n)\in R^M\right)\iff\left((G(a_1)\ldots G(a_n))\in R^N\right)$.

מבנים איזומורפיים: יהי σ מילון אזי מבנים M,N מעל σ עבורם קיים איזומורפיזם G מ־M ל־N.

טענה: יהי σ מילון יהיו M,N מבנים איזומורפיים מעל σ ויהי φ פסוק אזי $(M\models\varphi)\iff(N\models\varphi)$.

הערה: יהי σ מילון בעל יחס שיוויון Id דו־מקומי אזי לכל מבנה M נגדיר $\mathrm{Id}^M=\mathrm{Id}_M$ ונסמן את היחס בעזרת $=$.

הערה: אלא אם כן נאמר אחרת מכאן והלאה כל המילונים הם חסרי שיוויון.

הצבת שם עצם במשתנה: יהיו r,s שמות עצם ויהי x משתנה אזי
- אם s סימן קבוע אזי $s\left[{}^{r}/_{x}\right]=s$.
- אם $s=x$ אזי $s\left[{}^{r}/_{x}\right]=r$.
- אם $s\neq x$ משתנה אזי $s\left[{}^{r}/_{x}\right]=s$.
- אם $s=f(t_1\ldots t_n)$ אזי $s\left[{}^{r}/_{x}\right]=f\left(t_1\left[{}^{r}/_{x}\right]\ldots t_n\left[{}^{r}/_{x}\right]\right)$.

הצבת שם עצם בנוסחה: תהא φ נוסחה יהי r שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi = R(t_1 \ldots t_n)$ אזי $\varphi[r/x] = R(t_1[r/x] \ldots t_n[r/x])$.
- אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי $\varphi[r/x] = \neg(\alpha[r/x])$.
- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי $\varphi[r/x] = \alpha[r/x] \circ \beta[r/x]$.
- אם $\varphi = \forall x\alpha$ אזי $\varphi[r/x] = \forall x\alpha$.
- אם $\varphi = \exists x\alpha$ אזי $\varphi[r/x] = \exists x\alpha$.
- אם $\varphi = \forall y\alpha$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi[r/x] = \forall y(\alpha[r/x])$.
- אם $\varphi = \exists y\alpha$ באשר $x \neq y$ אזי $\varphi[r/x] = \exists y(\alpha[r/x])$.

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא φ נוסחה ויהי x משתנה אזי

- אם $\varphi = R(t_1 \ldots t_n)$ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α.
- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן ב־β.
- אם $\varphi = \forall y\alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi = \exists y\alpha$ וכן x אינו מופיע או אינו חופשי ב־φ אזי שם עצם r.
- אם $\varphi = \forall y\alpha$ וכן $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y \notin \mathrm{FV}(r)$.
- אם $\varphi = \exists y\alpha$ וכן $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$ אזי שם עצם r באשר r חופשי להצבה ב־α וכן $y \notin \mathrm{FV}(r)$.

משתנה בעל מופע קשור: נגדיר $f : \{\text{נוסחאות}\} \to \mathcal{P}(\{x_i\})$ כך

- אם $\varphi = R(t_1 \ldots t_n)$ אזי $f(\varphi) = \varnothing$.
- אם $\varphi = \neg\alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha)$.
- אם $\varphi = \alpha \circ \beta$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$.
- אם $\varphi = \forall x\alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$.
- אם $\varphi = \exists y\alpha$ אזי $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$.

למה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי (r חופשי להצבה ב־φ)$\iff$(לכל $y \in \mathrm{FV}(r)$ לא נוצר מופע קשור חדש עבור y ב־$\varphi[r/x]$).

סימון: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי נגדיר השמה $v[\overline{v}(r)/x](y) = \begin{cases} v(y) & x \neq y \\ \overline{v}(r) & \text{else} \end{cases}$.

מסקנה: יהי s שם עצם יהי x משתנה ויהי r שם עצם אזי $\overline{v}(s[r/x]) = \overline{v[\overline{v}(r)/x]}(s)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}(\varphi[r/x]) = \overline{v[\overline{v}(r)/x]}(\varphi)$.

מסקנה: תהא φ נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה ב־φ אזי $\overline{v}(\varphi) = \overline{v[v(x)/y]}(\varphi[y/x])$.

טענה שינוי שם משתנה: תהא φ נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־φ אזי

- $(\exists x\varphi) \equiv^t (\exists y(\varphi[y/x]))$.
- $(\forall x\varphi) \equiv^t (\forall y(\varphi[y/x]))$.

הצורה הנורמלית PNF: $X_{\{\varphi \mid \text{נוסחה חסרת כמתים } \varphi\},\{\forall,\exists\}}$.

מסקנה: תהא φ נוסחה אזי (φ בצורת PNF)$\iff$(קיימת נוסחה α חסרת כמתים וכן $x_1 \ldots x_n$ משתנים וכן $Q_1 \ldots Q_n$ כמתים עבורם $\varphi = Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\alpha$).

טענה: תהיינה φ, ψ נוסחאות אזי

- $(\forall x(\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x\varphi) \wedge (\forall x\psi))$.
- $(\exists x(\varphi \vee \psi)) \equiv^t ((\exists x\varphi) \vee (\exists x\psi))$.
- תהא $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$ אזי $((\forall x\varphi) \vee \psi) \equiv^t (\forall x(\varphi \vee \psi))$.
- תהא $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$ אזי $((\exists x\varphi) \wedge \psi) \equiv^t (\exists x(\varphi \wedge \psi))$.
- $(\neg(\forall x\varphi)) \equiv^t (\exists x(\neg\varphi))$.
- $(\neg(\exists x\varphi)) \equiv^t (\forall x(\neg\varphi))$.

משפט: תהא φ נוסחה אזי קיימת נוסחה α בצורת PNF עבורה $\varphi \equiv^t \alpha$.

פסוק אוניברסלי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}(\alpha) = \{x_1 \ldots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n\alpha$.

פסוק יישי: פסוק φ עבורו קיימת נוסחה α חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}(\alpha) = \{x_1 \ldots x_n\}$ המקיימת $\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_n\alpha$.

טענה: יהי σ מילון תהא φ נוסחה מעל σ ויהי סימן קבוע $c \notin \sigma$ אזי ($\exists x\varphi$ ספיקה מעל σ)$\iff$($\varphi[c/x]$ ספיקה מעל $\sigma \cup \{c\}$).

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ אזי ($\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x\varphi$ ספיק מעל σ)$\Longleftrightarrow$($\forall y_1 \ldots \forall y_n \left(\varphi\left[{}^{f(y_1 \ldots y_n)}/x\right]\right)$ ספיק מעל המילון $\sigma \cup \{f\}$ באשר f פונקציה n־מקומית).

משפט סקולם: קיים אלגוריתם sk המקבל נוסחה φ מעל מילון σ ומחזיר פסוק אוניברסלי מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$($\mathrm{sk}\left(\varphi\right)$ ספיק).

סקולמיזציה למילון: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה אזי המילון המינימלי מעליו מוגדר $\mathrm{sk}\left(\varphi\right)$.

טענה: קיים אלגוריתם FOLWFF המקבל נוסחה חסרת משתנים וכמתים φ ומחזיר פסוק α מעל WFF המקיים

- (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(α ספיק).
- (φ תקפה)$\Longleftrightarrow$(α טאוטולוגיה).

למה: תהא φ נוסחה חסרת משתנים וכמתים המורכבת מהנוסחאות האטומיות $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ נגדיר השמה של WFF כך $v\left(p_i\right) = \left(M \models \alpha_i\right)$ אזי $\left(\overline{v}\left(\mathrm{FOLWFF}\left(\varphi\right)\right) = T\right) \Longleftrightarrow \left(M \models \varphi\right)$.

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה הרברנד: יהי σ מילון אזי מבנה M המקיים

- לכל $a \in D^M$ קיים שם עצם סגור α עבורו $\alpha^M = a$.
- יהיו α, β שמות עצם שונים אזי $\alpha^M \neq \beta^M$.

מסקנה: יהי σ מילון בן־מנייה ויהי M מבנה הרברנד של σ אזי D^M בן־מנייה.

הערה: מהגדרת מבנה הרברנד נובע כי ניתן לכתוב $D^M = \{\varphi \mid \text{שם עצם חסר משתנים ב־}\sigma \text{ } \varphi\}$.

מסקנה: יהי σ מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה הרברנד M על σ.

טענה: יהי M מבנה הרברנד מעל σ ותהא v השמה עבורה $v\left(x_i\right) = t_i$ אזי

- יהי r שם עצם באשר $\mathrm{FV}\left(r\right) = \{x_1 \ldots x_n\}$ אזי $\overline{v}\left(r\right) = r\left[{}^{t_1}/x_1, \ldots, {}^{t_n}/x_n\right]$.
- תהא φ נוסחה באשר $\mathrm{FV}\left(\varphi\right) = \{x_1 \ldots x_n\}$ אזי $\left(M \models \varphi\left[{}^{t_1}/x_1, \ldots, {}^{t_n}/x_n\right]\right) \Longleftrightarrow \left(M, v \models \varphi\right)$.
- תהא φ נוסחה אזי ($\exists x\varphi$ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi\left[{}^{s}/x\right]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\exists x\varphi$ פסוק אזי ($\exists x\varphi$ תקפה)$\Longleftrightarrow$(קיים שם עצם סגור s עבורו $\varphi\left[{}^{s}/x\right]$ תקפה).
- תהא φ נוסחה אזי ($\forall x\varphi$ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל שם עצם סגור s מתקיים כי $\varphi\left[{}^{s}/x\right]$ ספיקה).
- תהא φ נוסחה עבורה $\forall x\varphi$ פסוק אזי ($\forall x\varphi$ תקפה)$\Longleftrightarrow$(לכל שם עצם חסר משתנים s מתקיים כי $\varphi\left[{}^{s}/x\right]$ תקפה).

משפט הרברנד: יהי σ מילון ויהי φ פסוק אוניברסלי אזי (φ ספיק)$\Longleftrightarrow$(φ ספיק במבנה הרברנד).

מופעי בסיס: תהא φ נוסחה חסרת כמתים באשר $\mathrm{FV}\left(\varphi\right) = \{x_1 \ldots x_n\}$ אזי $\mathrm{GroundInstance}\left(\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi\right) = \{\varphi\left[{}^{s_1}/x_1, \ldots, {}^{s_n}/x_n\right] \mid \text{שמות עצם חסרי משתנים } s_1 \ldots s_n\}$.

סימון: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים אזי $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \mathrm{GroundInstance}\left(\varphi\right)$.

טענה: תהא Γ קבוצת פסוקים סגורים חסרי כמתים אזי (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(Γ ספיקה במבנה הרברנד).

משפט: תהא Γ קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- Γ ספיקה.
- Γ ספיקה במבנה הרברנד.
- $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)$ ספיקה.
- $\mathrm{GroundInstance}\left(\Gamma\right)$ ספיקה במבנה הרברנד.

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי

- (Γ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).
- ($\Gamma \underset{v}{\overset{t}{\models}} \varphi$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \underset{v}{\overset{t}{\models}} \varphi$).
- ($\Gamma \models \varphi$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית עבורה $\Delta \models \varphi$).

טענה: יהיו x, y משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל $\{E\left(\cdot, \cdot\right)\}$ המקיימת ($M \models \Gamma$)$\Longleftrightarrow$(יש מסלול ב־M מ־x ל־y).

משפט: יהי σ מילון בעל קבוע תהא φ נוסחה ללא כמתים מעל σ אזי ($\exists x\varphi$ תקפה)$\Longleftrightarrow$(קיימים שמות עצם סגורים $t_1 \ldots t_n$ עבורם $\varphi\left[{}^{t_1}/x\right] \vee \ldots \vee \varphi\left[{}^{t_n}/x\right]$ תקפה).

מבנה הנקין: יהי σ מילון אזי מבנה H מעל σ עבורו לכל $a \in D^H$ קיים שם עצם סגור t עבורו $t^H = a$.

עוצמה של מבנה: יהי σ מילון ויהי M מבנה מעל σ אזי $|M| = \left|D^M\right|$.

משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי σ מילון ותהא φ נוסחה מעל σ אזי (φ ספיקה)$\Longleftrightarrow$(קיים מבנה לכל היותר בן־מנייה M בו φ ספיקה).

משפט לוונהיים־סקולם העולה: יהי σ מילון יהי M מבנה בן־מנייה ותהא φ נוסחה מעל σ באשר φ ספיקה ב־M אזי לכל עוצמה אינסופית κ קיים מבנה M' מעוצמה κ עבורו φ ספיקה ב־M'.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא κ עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות Γ מעל σ המקיימת $(M \models \Gamma) \iff (|M| = \kappa)$.

הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

סימון: $\text{VALID} = \{\langle \sigma, \varphi \rangle \mid (\text{נוסחה מעל } \sigma\ \varphi) \wedge (\text{תקפה } \varphi)\}$.

משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי σ מילון אזי $\text{VALID} \in \mathcal{RE}$.

משפט צ'רץ'־טיורינג: $\text{HALT} \leq_m \text{VALID}$.

מסקנה: $\text{VALID} \notin \mathcal{R}$.

בעיית הריצוף: יהיו $R_1 \ldots R_n$ ריבועים בעלי צלע מאורך 1 וכן כל צלע שלהם צבועה בצבע אזי האם ניתן לרצף את $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ בעזרת הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם.

בעיית הריצוף: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ותהא $R : [n]^2 \times \{\text{left, right, above, below}\} \to \{\text{yes, no}\}$ אזי $f : \mathbb{N}^2 \to [n]$ עבורה

- לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ m \end{smallmatrix}\right), \text{left}\right) = \text{yes}$.
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} n+1 \\ m \end{smallmatrix}\right), \text{right}\right) = \text{yes}$.
- לכל $m, n \in \mathbb{N}$ ולכל $n \in \mathbb{N}_+$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m+1 \end{smallmatrix}\right), \text{above}\right) = \text{yes}$.
- לכל $m \in \mathbb{N}_+$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $R\left(f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} n \\ m-1 \end{smallmatrix}\right), \text{below}\right) = \text{yes}$.

סימון: $\text{TILING} = \{(n, R, f) \mid \text{פתרון לבעיית הריצוף עבור } R\ f\}$.

משפט: $\text{VALID} \leq_m \text{TILING}$.

מסקנה: $\text{TILING} \notin \mathcal{R}$.

יחס קונגרואנציה: יהי σ מילון אזי $E \in \sigma$ סימן יחס דו־מקומי המקיים

- רפלקסיבי: $\forall x\, (E(x, x))$.
- סימטרי: $\forall x \forall y\, (E(x, y) \implies E(y, x))$.
- טרנזיטיבי: $\forall x \forall y \forall z\, ((E(x, y) \wedge E(y, z)) \implies E(x, z))$.
- לכל $f \in \sigma$ סימן פונקציה מתקיים $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\, ((\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i)) \implies E(f(x_1 \ldots x_n), f(y_1 \ldots y_n)))$.
- לכל $R \in \sigma$ סימן יחס מתקיים $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n\, ((\bigwedge_{i=1}^{n} E(x_i, y_i)) \implies (R(x_1 \ldots x_n) \iff R(y_1 \ldots y_n)))$.

הערה: בהינתן מילון עם שיוויון σ ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן σ_E את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויון.

מילון מחלקות קונגרואנציה: יהי מילון σ עם שיוויון ויהי M מבנה על σ אזי מבנה M_E מעל σ_E המקיים

- $D^{M'} = {}^{D^M}/_{E}$.
- לכל סימן פונקציה $f \in \sigma$ מתקיים $f^{M'}([a_1]_E, \ldots, [a_n]_E) = \left[f^M(a_1 \ldots a_n)\right]_E$.
- לכל סימן יחס $R \in \sigma$ מתקיים $R^{M'}([a_1]_E, \ldots, [a_n]_E) \iff R^M(a_1 \ldots a_n)$.

החלפת שיוויון ביחס קונגרואנציה: תהא φ נוסחה מעל מילון עם שיוויון σ באשר $f_1 \ldots f_n$ סימני הפונקציות ב־φ וכן $R_1 \ldots R_m$ סימני היחס ב־φ אזי $\varphi_E = \varphi\left[{}^{E}/_{=}\right] \wedge (\text{יחס שקילות } E) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} (\text{יחס קונגרואנציה ביחס ל־} f_i\ E)\right) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{m} (\text{יחס קונגרואנציה ביחס ל־} E_i\ E)\right)$.

טענה: תהא φ נוסחה מעל מילון σ עם שיוויון יהי M מבנה מעל σ ותהא v השמה נגדיר השמה $v_E : \{x_i\} \to D^{M_E}$ באשר $v_E(x_i) = [v(x_i)]_E$ אזי $(M, v \models \varphi) \iff (M_E, v_E \models \varphi_E)$.

משפט: קיים אלגוריתם המקבל נוסחה φ באשר φ מעל מילון עם שיוויון σ ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון ψ באשר ψ מעל מילון σ' עבורו (φ ספיק)$\iff$(ψ ספיק).

משפט: תהא Γ קבוצת נוסחאות מעל σ עם שיוויון אזי (Γ ספיקה)$\iff$(Γ_E ספיקה).

משפט הקומפקטיות: יהי σ מילון עם שיוויון תהא Γ קבוצת נוחסאות ותהא φ נוסחה אזי (Γ ספיקה)$\iff$(לכל $\Delta \subseteq \Gamma$ סופית Δ ספיקה).

המודל הסטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי מבנה $\mathcal{M}_\mathbb{N}$ עבורו

- $D^{\mathcal{M}_\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ וכן $c_0^{\mathcal{M}_\mathbb{N}} = 0$ וכן $c_1^{\mathcal{M}_\mathbb{N}} = 1$.
- $f_+^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}(a, b) = a + b$.
- $f_\times^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}(a, b) = a \times b$.
- $\left((a, b) \in R_>^{\mathcal{M}_\mathbb{N}}\right) \iff (a > b)$.

פסוקים נכונים אריתמטית: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי $\text{AT} = \{\alpha \mid (\mathcal{M}_\mathbb{N} \models \alpha) \land (\text{FV}(\alpha) = \varnothing)\}$.

מודל לא סטנדרטי של הטבעיים: יהי מילון $\{c_0, c_1, f_+, f_\times, R_>\}$ אזי מבנה M עבורו $M \models \text{AT}$ וכן M אינו איזומורפי ל־$\mathcal{M}_\mathbb{N}$.

טענה: יהי M מודל לא סטנדרטי של הטבעיים אזי $\left|D^M\right| > \aleph_0$.

כלל ג'ן: יהי σ מילון ותהא α נוסחה אזי $\frac{\alpha}{\forall x \alpha}$: Gen.

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי σ מילון אזי

- אלפבית: $\Sigma = \sigma$.
- נוסחאות: $N = X_{\{t \mid t \text{ שם עצם}\}, \{\neg, \Longrightarrow, \forall\}}$.
- אקסיומות:
  - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
  - $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$.
  - $A_3 = (((\neg\alpha) \Longrightarrow (\neg\beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$.
  - יהי t שם עצם חופשי להצבה במקום x ב־α אזי $A_4 = ((\forall x \alpha) \Longrightarrow \alpha\left[{}^{t}/_{x}\right])$
  - יהי $x \notin \text{FV}(\alpha)$ אזי $A_5 = ((\forall x (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow (\forall x \beta)))$.
- כללי היסק: $F = \{\text{MP}, \text{Gen}\}$.

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

משפט הנאותות: יהי σ מילון תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} \alpha\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$.

טענה: יהי $\alpha \in \text{WFF}$ פסוק באשר $\underset{\text{HPC}}{\vdash} \alpha$ וכן $\text{Var}(\alpha) = \{p_1 \ldots p_n\}$ ויהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ נוסחאות אזי $\underset{\text{HC}}{\vdash} \alpha\left[{}^{\varphi_1}/_{p_1} \ldots {}^{\varphi_n}/_{p_n}\right]$.

משפט הדידוקציה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HC עבורן $\Gamma \cup \{\alpha\} \underset{\text{HC}}{\vdash} \beta$ וכן בהוכחה לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב־α אזי $\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} (\alpha \Longrightarrow \beta)$.

משפט הדיכוטומיה: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהיינה α, β נוסחאות מעל HC עבורן $\Gamma \cup \{\alpha\} \underset{\text{HC}}{\vdash} \beta$ וכן $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \underset{\text{HC}}{\vdash} \beta$ וכן בהוכחות לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב־α אזי $\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} \beta$.

קבוצת נוסחאות σ־שלמה: יהיו σ, Σ מילונים באשר $\Sigma \subseteq \sigma$ אזי קבוצת נוסחאות Γ מעל Σ עבורה לכל פסוק φ מעל σ מתקיים $(\varphi \in \Gamma) \lor (\neg\varphi \in \Gamma)$.

קבוצת נוסחאות בעלת תכונת הנקין: יהי σ מילון אזי קבוצת נוסחאות Γ עבורה לכל נוסחה φ באשר $\neg\forall x \varphi$ פסוק וכן $\neg\forall x \varphi \in \Gamma$ מתקיים שקיים סימן קבוע $c \in \sigma$ עבורו $\neg\varphi\left[{}^{c}/_{x}\right] \in \Gamma$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma \subseteq \sigma$ וקיימת Δ עקבית σ־שלמה מעל Σ המקיימת $\Gamma \subseteq \Delta$.

למה: יהי σ מילון תהא Γ עקבית תהא φ נוסחה באשר $\neg\forall x \varphi$ פסוק וכן $\neg\forall x \varphi \in \Gamma$ ויהי $c \notin \sigma$ סימן קבוע אזי $\Gamma \cup \{\neg\varphi\left[{}^{c}/_{x}\right]\}$ עקבית מעל $\sigma \cup \{c\}$.

משפט הנקין: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma \subseteq \sigma$ וקיימת Δ עקבית מעל Σ המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית אזי קיים מילון $\Sigma \subseteq \sigma$ וקיימת Δ מעל Σ עקבית Σ־שלמה המקיימת את תכונת הנקין עבורה $\Gamma \subseteq \Delta$.

טענה: יהי σ מילון תהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין יהי M מבנה ההרברנד מעל σ עבורו $\left((t_1 \ldots t_n) \in R^M\right) \Longleftrightarrow (R(t_1 \ldots t_n) \in \Gamma)$ לכל סימן יחס $R \in \sigma$ ולכל שמות עצם $t_1 \ldots t_n$ ותהא φ נוסחה אזי $(\varphi \in \Gamma) \Longleftrightarrow (M \models \varphi)$.

מסקנה: יהי σ מילון ותהא Γ עקבית שלמה המקיימת את תכונת הנקין אזי קיים מבנה M עבורו $M \models \Gamma$.

משפט השלמות: תהיינה Γ הנחות מעל HC ותהא α נוסחה מעל HC אזי $\left(\Gamma \underset{\text{HC}}{\vdash} \alpha\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$.

תורה של מבנה: יהי M מבנה מעל מילון σ אזי $\text{Th}(M) = \{\varphi \mid (M \models \varphi) \land (\text{FV}(\varphi) = \varnothing)\}$.

מסקנה: $\text{Th}(\mathcal{M}_\mathbb{N}) = \text{AT}$.

טענה: יהי σ מילון ותהא Γ קבוצת פסוקים התב"ש

- לכל מבנים M, N המספקים את Γ מתקיים $\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$.
- לכל פסוק φ מתקיים $(\Gamma \vdash \varphi) \lor (\Gamma \vdash (\neg\varphi))$.