פולינום: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{F}$ אזי $f(x)=\sum_{i=0}^n a_ix^i$.

שיוויון פולינומים: יהיו $f(x)=\sum a_ix^i, g(x)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $(f=g)\iff(\forall i.a_i=b_i)$.

חיבור פולינומים: יהיו $f(x)=\sum a_ix^i, g(x)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $(f+g)(x)=\sum(a_i+b_i)x^i$.

כפל פולינומים: יהיו $f(x)=\sum a_ix^i, g(x)=\sum b_ix^i$ פולינומים אזי $(fg)(x)=\sum_k\left(\sum_{m=0}^k a_mb_{k-m}\right)x^k$.

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}[x]=\left\{\sum_{i=0}^n a_ix^i\mid a_0,\dots,a_n\in\mathbb{F}\right\}$.

משפט: ($\mathbb{F}[x]$ חוג)$\wedge$($\mathbb{F}[x]$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$).

מחלק: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי $g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ עבורו $\exists h\in\mathbb{F}[x].gh=f$.

סימון: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ ויהי $g\in\mathbb{F}[x]$ מחלק אזי $(g\mid f)\wedge\left(f\vdots g\right)$.

דרגה: יהי $\sum_{i=0}^n a_ix^i$ פולינום אזי $\deg\left(\sum_{i=0}^n a_ix^i\right)=\begin{cases}-\infty & f=0\\ \max\{k\mid a_k\neq0\} & else\end{cases}$.

למה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $(\deg(fg)=\deg(f)+\deg(g))\wedge(\deg(f+g)\le\max\{\deg(f),\deg(g)\})$.

מסקנה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ אזי $(g\mid f)\implies(\deg(g)\le\deg(f))$.

מסקנה: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי $(f\in\mathbb{F}\setminus\{0\})\iff\left(\frac{1}{f}\in\mathbb{F}[x]\right)$.

תחום שלמות: חוג קומוטטיבי R המקיים $\forall a,b\in R\setminus\{0\}.ab\neq0$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}[x]$ תחום שלמות.

משפט: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ עבורם $\deg(g)\le\deg(f)$ אזי $\exists!q,r\in\mathbb{F}[x].(f=gq+r)\wedge(\deg(r)\le\deg(r))$.

שארית: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $r\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $(f=gq+r)\wedge(\deg(r)\le\deg(r))$.

מנה חלקית: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $q\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $(f=gq+r)\wedge(\deg(r)\le\deg(r))$.

הערה: אם $r=0$ אזי במקום מנה חלקית נאמר מנה שלמה.

אידיאל: יהי R חוג קומוטטיבי אזי $I\subseteq R$ המקיים $\forall a\in I.(\forall b\in I.a+b\in I)\wedge(\forall c\in R.ca\in I)$.

האידיאל הנוצר: יהיו $f_1\dots f_n\in R$ אזי $\langle f_1\dots f_n\rangle=\{\sum_{i=1}^n f_ig_i\mid g_1\dots g_n\in R\}$.

טענה: יהי R חוג קומוטטיבי ויהיו $f_1\dots f_n\in R$ אזי $\langle f_1\dots f_n\rangle$ אידיאל.

למה: יהיו $f_1\dots f_n\in R$ ויהי $I\subseteq R$ אידיאל המקיים $f_1,\dots,f_n\in I$ אזי $\langle f_1\dots f_n\rangle\subseteq R$.

אידיאל ראשי: אידיאל $I\subseteq R$ המקיים $\exists f\in R.I=\langle f\rangle$.

תחום ראשי: תחום שלמות R עבורו כל אידיאל ראשי.

משפט: יהי $I\subseteq\mathbb{F}[x]$ אידיאל אזי I ראשי.

מחלק משותף: יהיו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ המקיים $\forall i.g\mid f_i$.

מחלק משותף מקסימלי: יהיו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\max_{\deg}\{g\mid\forall i.(g\mid f_i)\}$.

משפט: מחלק משותף מקסימלי קיים ויחיד עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי המחלק המשותף המקסימלי הינו $\gcd(f_1\dots f_n)$.

טענה: יהיו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}[x]$ יהי g מחלק משותף אזי $g\mid\gcd(f_1\dots f_n)$.

משפט: היו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $\exists h_1\dots h_n\in\mathbb{F}[x].\gcd(f_1\dots f_n)=\sum_{i=1}^n h_if_i$.

אלגוריתם אוקלידס: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ עבורם $f=pg+r$ וכן $r\neq0$ אזי $\gcd(f,g)=\gcd(g,r)$.

פולינומים זרים: $f,g\in\mathbb{F}[x]$ המקיימים $\gcd(f,g)=1$.

מסקנה: יהיו $f,g,h\in\mathbb{F}[x]$ אזי $(h\neq0)\wedge(h\mid fg)\wedge(\gcd(f,h)=1)\implies(h\mid g)$.

הפיך: יהי R תחום שלמות אזי $u\in R\setminus\{0\}$ המקיים $u\mid1$.

הגדרה: יהי R תחום שלמות אזי $R^*=\{u\in R\mid(u\mid1)\}$.

אי־פריק (א"פ): $p\in R\setminus R^*$ המקיים $\forall a,b\in R.(p=ab)\implies(a\in R^*)\vee(b\in R^*)$.

ראשוני: $p\in R\setminus\{0\}$ המקיים $\forall a,b\in R.(p\mid ab)\implies(p\mid a)\vee(p\mid b)$.

למה: יהי $p\in\mathbb{F}[x]$ א"פ אזי p ראשוני.

חברים/שקולים: $f,g\in R$ המקיימים $\exists u\in R^*.fu=g$.

טענה: יהיו $f,g\in R$ אזי (f,g חברים)$\iff$($(f\mid g)\wedge(g\mid f)$).

משפט: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ אזי קיימים ויחידים $p_1\dots p_n\in\mathbb{F}[x]$ א"פ עבורם $\prod p_i=f$.

כפולה משותפת: יהיו $f_1\dots f_n\in\mathbb{F}[x]$ אזי $g\in\mathbb{F}[x]\setminus\{0\}$ המקיים $\forall i.f_i\mid g$.

כפולה משותפת מינימלית: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\min_{\deg}\{g \mid \forall i.(f_i \mid g)\}$.

משפט: כפולה משותפת מינימלית קיימת ויחידה עד כדי כפילה בסקלר.

סימון: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ אזי הכפולה המשותפת המינימלית הינה $\operatorname{lcm}(f_1 \dots f_n)$.

טענה: יהיו $f_1 \dots f_n \in \mathbb{F}[x]$ יהי g כפולה משותפת אזי $\operatorname{lcm}(f_1 \dots f_n) \mid g$.

שורש: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $f \in \mathbb{F}[x]$ אזי $\alpha \in \mathbb{F}$ המקיים $f(\alpha) = 0$.

משפט בז'ו: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$

- נניח כי $f(x) = p(x)(x-\alpha) + r(x)$ אזי $f(\alpha) = r(\alpha)$.
- (α שורש של f)$\Longleftrightarrow$($(x-\alpha) \mid f$).

ריבוי שורש: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ אזי $\max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left((x-\alpha)^k \mid f\right)\right\}$.

משפט: יהי $f \in \mathbb{F}[x] \backslash \{0\}$ ויהיו $r_1 \dots r_n \in \mathbb{F}$ ריבוי שורשים שונים אזי $\sum_{i=1}^{n} r_i \leq \deg(f)$.

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אינסופי עבורו $\forall \alpha \in \mathbb{F}.f(\alpha) = g(\alpha)$ אזי $f = g$.

שדה סגור אלגברית: שדה $\mathbb{F}$ המקיים $\forall f \in \mathbb{F}_{\geq 1}[x].\exists \alpha \in \mathbb{F}.f(\alpha) = 0$.

המשפט היסודי של האלגברה: $\mathbb{C}$ שדה סגור אלגברית.

משפט: יהי $f \in \mathbb{R}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$ אזי $(f(\alpha) = 0) \Longleftrightarrow (f(\overline{\alpha}) = 0)$.

מסקנה: יהי $f \in \mathbb{R}[x]$ אזי קיימים $p_1 \dots p_n \in \mathbb{R}[x]$ ליניאריים וכן $q_1 \dots q_m \in \mathbb{R}[x]$ ממעלה שנייה ללא שורש ממשי המקיימים $f = \prod p_i \prod q_i$.

משפט: יהי $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ המקיים $\gcd(a_0 \dots a_n) = 1$ וכן $a_n a_0 \neq 0$ ויהי $\alpha = \frac{p}{q}$ עבור $\gcd(p,q) = 1$

- $(f(\alpha) = 0) \Longrightarrow (p \mid a_0) \wedge (q \mid a_n)$.
- $(\alpha \neq 1) \Longrightarrow ((p-q) \mid f(1))$.
- $(\alpha \neq -1) \Longrightarrow ((p+q) \mid f(-1))$.

קריטריון אייזנשטיין: יהי $f = \sum a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ המקיים $\gcd(a_0 \dots a_n) = 1$ וכן $a_n a_0 \neq 0$ ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $(\gcd(a_n, p) = 1) \wedge (\forall 0 \leq i \leq n-1.p \mid a_i) \wedge (p^2 \nmid a_0)$ אזי f אינו פריק מעל $\mathbb{Q}[x]$.

נגזרת: יהי $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ אזי $f' = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

סימון: נגדיר $\mathcal{D} : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ כך $\mathcal{D}(f) = f'$.

טענה: ($\mathcal{D}$ ט"ל)$\wedge(\mathcal{D}(fg) = g\mathcal{D}(f) + f\mathcal{D}(g))$.

שורש פשוט: שורש שהריבוי שלו 1.

שורש מרובה: שורש שהריבוי שלו גדול מ־1.

משפט: יהי $f \in \mathbb{F}[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$ שורש אזי (α שורש מרובה)$\Longleftrightarrow$(α שורש של f').

מאפיין שדה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid m \cdot 1 = 0\}$ ואם אינו מוגדר אזי $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 0$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה המקיים $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 0$ אזי (α שורש מריבוי r של f)$\Longrightarrow$(α שורש מריבוי $r-1$ של f').

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי הצורה הקנונית היא $A_{\text{can}}^{\mathbb{F}}$.

אופרטור ליניארי/loop closed: $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$.

loop open: $\varphi \in \operatorname{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

סימון: $\operatorname{GL}(n, \mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid |A| \neq 0\}$.

מטריצות דומות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $\exists C \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{F}).B = C^{-1}AC$.

ערך עצמי (ע"ע): יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי $\lambda \in \mathbb{F}$ עבורו $\exists v \in L \backslash \{0\}.\varphi(v) = \lambda v$.

הספקטרום: יהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\operatorname{Spec}_{\mathbb{F}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{F} \mid A \text{ ע"ע של } \lambda\}$.

וקטור עצמי (ו"ע): יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי $0 \neq v \in V$ עבורו $\exists \lambda \in \mathbb{F}.\varphi(v) = \lambda v$.

תת מרחב עצמי (מ"ע): יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע אזי $L_\lambda = \{v \in L \mid \varphi(v) = \lambda v\}$.

למה: ($L_\lambda \subseteq L$ תמ"ו)$\wedge(L_\lambda = \ker(\varphi - \lambda I))$.

בסיס עצמי: יהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי בסיס $\mathcal{B}$ המורכב מוקטורים עצמיים של φ.

העתקה לכסינה: $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ עבורה קיים בסיס $\mathcal{B}$ המקיים $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ אלכסונית.

משפט: יהי L מ"ו נ"ס ויהי $\varphi \in \operatorname{Hom}(L)$ אזי (φ ניתן ללכסון)$\Longleftrightarrow$(קיים בסיס עצמי ל־L).

הערה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה אזי A_{can} צורה אלכסונית.

למה: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שונים אזי $\bigoplus_{i=1}^{n} L_{\lambda_i}$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ בעל $\lambda_1,\ldots,\lambda_{\dim(L)}$ ע"ע שונים אזי φ ניתן ללכסון.

פולינום אופייני: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A(x)=\det(xI-A)$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A\in\mathbb{F}[x]$.

למה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהיו $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ בסיסים אזי $p_{[\varphi]_{\mathcal{B}_1}}(x)=p_{[\varphi]_{\mathcal{B}_2}}(x)$.

פולינום אופייני: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $p_\varphi(x)=p_{[\varphi]_{\mathcal{B}}}(x)$.

פולינום מתוקן: $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{F}[x]$ עבורו $a_n=1$.

משפט: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי (p_φ פולינום מתוקן)$\wedge(\deg(p_\varphi)=\dim(L))$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ עבורו $p_\varphi=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ אזי

- $a_{n-1}=-\operatorname{trace}(A)$.
- $a_0=(-1)^n\det(A)$

למה: תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $(p_A=p_{A^t})\wedge(p_{AB}=p_{BA})$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\operatorname{trace}(AB)=\operatorname{trace}(BA)$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $(\lambda\in\operatorname{Spec}(A))\iff(p_A(\lambda)=0)$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ יהי $x\in\mathbb{F}^n$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי (x ו"ע של ע"ע λ)$\iff(x\in\ker(\lambda I-A))$.

חיבור מרוכב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,c,d\in L$ אזי $\langle a,b\rangle+_{\mathbb{C}}\langle c,d\rangle=\langle a+c,b+d\rangle$.

כפל מרוכב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $a,b,c,d\in L$ אזי $\langle a,b\rangle\cdot_{\mathbb{C}}\langle c,d\rangle=\langle ac-bd,ad+bc\rangle$.

מירכוב: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $L_{\mathbb{C}}=\left\langle L^2,+_{\mathbb{C}},*_{\mathbb{C}}\right\rangle$.

סימון: יהי $\langle a,b\rangle\in L_{\mathbb{C}}$ אזי $a+ib=\langle a,b\rangle$.

טענה: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $L_{\mathbb{C}}$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $\alpha+i\beta$ ע"ע עבור ו"ע $u+iv$ אזי $(Au=\alpha u-\beta v)\wedge(Av=\beta u+\alpha v)$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{R})$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ באשר $A_{\text{can}}^{\mathbb{C}}=\operatorname{Diag}(\lambda_1\ldots\lambda_m,\alpha_1+i\beta_1\ldots\alpha_\ell+i\beta_\ell)$ אזי

$$A_{\text{can}}^{\mathbb{R}}=\operatorname{Diag}\left(\lambda_1\ldots\lambda_m,\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1&\beta_1\\-\beta_1&\alpha_1\end{smallmatrix}\right)\ldots\left(\begin{smallmatrix}\alpha_\ell&\beta_\ell\\-\beta_\ell&\alpha_\ell\end{smallmatrix}\right)\right)$$

מסקנה: תהא $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עם ו"ע $u_1+iv_1,\ldots,u_\ell+iv_\ell$ אזי $u_1\ldots u_\ell,v_1\ldots v_\ell$ בסיס קנוני מעל $\mathbb{R}$.

ריבוי גאומטרי: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_g(\lambda)=\dim(L_\lambda)$.

ריבוי אלגברי: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_a(\lambda)=\max\left(n\in\mathbb{N}\mid\left((x-\lambda)^n\,|f_A(x)\right)\right)$.

למה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $r_g(\lambda)\le r_a(\lambda)$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי (φ לכסין מעל $\mathbb{F}$)$\iff$($p_\varphi(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים)$\wedge$(לכל ע"ע $r_g(\lambda)=r_a(\lambda)$).

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ לכסין ויהיו $\lambda_1\ldots\lambda_n$ ע"ע אזי בצורה הקנונית כל λ_i מופיע $r_a(\lambda)$ פעמים.

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ לכסין אזי הצורה האלכסונית יחידה עד כדי תמורת האיברים על האלכסון.

הגדרה: יהי $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ ותהא $A\in M_m(\mathbb{F})$ אזי $p(A)=\sum_{i=0}^{n}a_iA^i$.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס של L ויהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $[f(\varphi)]_{\mathcal{B}}=f([\varphi]_{\mathcal{B}})$.

פולינום מינימלי: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $m_\varphi=\min_{\deg}(p\in\mathbb{F}[x]\mid p(\varphi)=0)$.

הערה: הפולינום המינימלי הינו מתוקן.

משפט: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $m_\varphi(x)$ קיים ויחיד.

משפט: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי $p\in\mathbb{F}[x]$ המקיים $p(\varphi)=0$ אזי $m_\varphi|p$.

טענה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $\{p\in\mathbb{F}[x]\mid p(\varphi)=0\}$ אידיאל של $\mathbb{F}[x]$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ אזי $\langle m_\varphi\rangle=\{p\in\mathbb{F}[x]\mid p(\varphi)=0\}$.

משפט קיילי המילטון: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A(A)=0$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $m_A|p_A$.

למה: יהי $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי $m_\varphi(\lambda)=0$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $p_A\mid m_A^n$.

משפט הפירוק הפרימרי: תהא $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ זרים אזי

$\ker((f\circ g)(\varphi))=\ker(f(\varphi))\oplus\ker(g(\varphi))$.

מסקנה: תהא $\varphi\in\operatorname{Hom}(L)$ ויהיו $f_1\ldots f_n\in\mathbb{F}[x]$ זרים בזוגות אזי $\ker\left(\prod f_i(\varphi)\right)=\bigoplus\ker(f_i(\varphi))$.

משפט: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $\lambda_k \neq \ldots \neq \lambda_1$ כל הע"ע אזי (A לכסינה) $\iff$ ($m_A(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)$).

למה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה עבורה $p_A(x)=\prod(x-\lambda_i)$ ויהי $g\in\mathbb{F}[x]$ אזי $p_{g(A)}(x)=\prod(x-g(\lambda))$.

הגדרה: תהא $G(x)$ אנליטית עבורה $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ מתכנס בתחום $|x|<R$ אזי $G(A)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$.

למה: תהא $G(x)$ אנליטית עבורה $G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ מתכנס בתחום $|x|<R$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה עם ע"ע $\lambda_1\ldots\lambda_n$ המקיימים $\forall i\in[n].|\lambda_i|<R$

- הטור $G(A)$ מתכנס.
- $\mathrm{Spec}(F(A))=\{F(\lambda)\mid\lambda\in\mathrm{Spec}(A)\}$.
- $\left(A_{\mathrm{can}}=C^{-1}AC\right)\Longrightarrow\left(F(A)_{\mathrm{can}}=C^{-1}F(A)C=F(A_{\mathrm{can}})\right)$.

לכסון סימולטני: $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}(L)$ לכסינות המקיימות קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\psi]_{\mathcal{B}},[\varphi]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

למה: תהא A מטריצת בלוקים אלכסונית לכסינה אזי כל בלוק לכסין.

משפט: יהיו $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}(L)$ לכסינות אזי (φ,ψ לכסינות סימולטנית)$\iff(\varphi\psi=\psi\varphi)$.

תת מרחב אינווריאנטי/שמור: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ אזי תמ"ו $M\subseteq L$ המקיים $\varphi(M)\subseteq M$.

מסקנה: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהי $M\subseteq L$ תת מרחב אינווריאנטי אזי $\varphi_{\restriction M}$ ט"ל.

למה: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ אזי $\{0\},L,\ker(\varphi),\mathrm{Im}(\varphi)$ אינווריאנטים.

משפט: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהי λ ע"ע אזי L_λ אינווריאנטי.

למה: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהי M אינווריאנטי אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[\varphi_{\restriction M}]_{\mathcal{B}} & P\\ & A\end{pmatrix}$.

משפט: יהי $L=\bigoplus_{i=1}^{k}L_i$ אינווריאנטים אזי קיים בסיס $\mathcal{B}_1\ldots\mathcal{B}_k$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}=\mathrm{Diag}\left(\left[\varphi_{\restriction L_1}\right]_{\mathcal{B}_1},\ldots,\left[\varphi_{\restriction L_k}\right]_{\mathcal{B}_k}\right)$.

מטריצה דו אלכסונית: $A\in M_n(\mathbb{F})$ המקיימת $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \mu_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mu_{n-1}\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$.

תיבת/בלוק ג'ורדן: יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$.

צורת/מטריצת ג'ורדן: יהיו $\lambda_1\ldots\lambda_n\in\mathbb{F}$ וכן $k_1\ldots k_n$ אזי $\mathrm{Diag}(J_{k_1}(\lambda_1)\ldots J_{k_n}(\lambda_n))$.

משפט ג'ורדן: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ עבורו $p_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ מטריצת ג'ורדן.

טענה: צורת ג'ורדן מוגדרת באופן יחיד עדי כדי תמורת תיבות ג'ורדן.

הערה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ בעלת צורת ג'ורדן אזי A_{can} צורת ג'ורדן.

מסקנה: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ אזי (A,B דומות)$\iff(A_{\mathrm{can}}=B_{\mathrm{can}})$.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי A^t דומה אל A.

דרגת נילפוטנטיות: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\eta(A)=\min(n\in\mathbb{N}\mid A^n=0)$.

טענה: יהי $n\geq2$ אזי ($J_n(\lambda)$ אינה לכסינה)$\wedge(\eta(J_n(\lambda))=n)$.

מסקנה: יהי $n\geq2$ אזי $m_{J_n(\lambda)}=(x-\lambda)^n=p_{J_n(\lambda)}(x)$.

מרחב עצמי מוכלל: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ ויהי μ ע"ע אזי $L_\mu^{(k)}=\ker(\varphi-\mu I)^k$.

למה: $L_\mu=L_\mu^{(1)}\subseteq\ldots\subseteq L_\mu^{(r_g(\lambda))}=L$.

למה: $L_\mu^{(i)}$ אינבריאנטי ביחס אל φ.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\dim\left(L_\mu^{(k)}\right)\leq r_a(\mu)$.

למה: נניח כי $p_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)^{k_i}$ עבור $\lambda_n\neq\ldots\neq\lambda_1$ אזי $L=\bigoplus_{i=1}^{n}L_{\lambda_i}^{(k_i)}$.

בלתי תלויה ביחס לתת מרחב: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ אזי $v_1\ldots v_k\in L$ המקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^k.\left(\sum\alpha_iv_i\in M\Longrightarrow\alpha=0\right)$.

קו־בסיס: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ אזי $\max_{|A|}\{A\subseteq L\mid M\text{ בלתי תלויה ביחס אל }A\}$.

טענה: יהי תמ"ו $M\subseteq L$ עם בסיס $\mathcal{B}$ אזי קו־בסיס $\mathcal{C}$ הוא השלמה לבסיס של L.

למה: יהי $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ יהי μ ע"ע יהי $k\in\mathbb{N}_+$ ויהי $e_1\ldots e_m$ קו־בסיס של $L_\mu^{(k)}$ ביחס אל $L_\mu^{(k-1)}$

- $(\varphi-\mu I)(e_1)\ldots(\varphi-\mu I)(e_m)\in L_\mu^{(k-1)}$.
- $(\varphi-\mu I)(e_1)\ldots(\varphi-\mu I)(e_m)$ בלתי תלויים ביחס אל $L_\mu^{(k-2)}$.

למה: תהא $\varphi\in\mathrm{Hom}(L)$ עבורה $[\varphi]_B=\mathrm{Diag}(I(\lambda_1)\ldots I(\lambda_k))$ באשר $I(\lambda_i)=\mathrm{Diag}\left(J_{k_1^i}(\lambda_i)\ldots J_{k_{n_i}^i}(\lambda_i)\right)$

- כל הע"ע של φ הם $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.

- $r_a\left(\lambda_i\right)=\sum_{j=1}^{n_i}k_j^i$.
- $r_g\left(\lambda_i\right)=n_i$.
- הריבוי של λ_i בפולינום המינימלי הוא $\max\left(k_1^i,\ldots,k_{n_i}^i\right)$.
- $\left|\left\{j\mid k_j^i\geq r\right\}\right|=\dim\left(\ker\left(\left(T-\lambda_iI\right)^r\right)\right)-\dim\left(\ker\left(\left(T-\lambda_iI\right)^{r-1}\right)\right)$.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$ אזי

$$J_n\left(a+ib,a-ib\right)_{\text{can}}^{\mathbb{R}}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}&&\\&\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}&\ddots&\\&&\ddots&\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&&&\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\end{pmatrix}_{2k\times2k}.$$

למה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ וכן $\mu\in\mathbb{F}$ אזי

$$J_n\left(\mu\right)^m=\begin{pmatrix}\mu^m&n\mu^{m-1}&\binom{m}{2}\mu^{m-2}&&\\&\mu^m&&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\binom{m}{2}\mu^{m-2}\\&&&\mu^m&m\mu^{m-1}\\&&&&\mu^m\end{pmatrix}.$$

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ וכן $\mu\neq0$ אזי

$$J_n\left(\mu\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\mu^{-1}&-\mu^{-2}&\mu^{-3}&&\\&\mu^{-1}&-\mu^{-2}&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\mu^{-3}\\&&&\mu^{-1}&-\mu^{-2}\\&&&&\mu^{-1}\end{pmatrix}.$$

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ וכן $\mu\in\mathbb{F}$ אזי

$$\exp\left(J_n\left(\mu\right)\right)=e^{\mu}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{1!}&\frac{1}{2!}&\cdots&\frac{1}{(n-1)!}\\&1&\frac{1}{1!}&\ddots&\vdots\\&&\ddots&\ddots&\frac{1}{2!}\\&&&1&\frac{1}{1!}\\&&&&1\end{pmatrix}.$$

מכפלה פנימית ממשית (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $\left(\cdot,\cdot\right):L^2\to\mathbb{R}$ המקיימת

- סימטריות: $\forall a,b\in L.\left(a,b\right)=\left(b,a\right)$.
- דו־לינאריות: $\forall a,b,c\in L.\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.\left(\alpha a+\beta b,c\right)=\alpha\left(a,c\right)+\beta\left(b,c\right)$.
- חיוביות: $\forall a\in L.\left(a,a\right)\geq0$.
- חיוביות ממש: $\forall a\in L.\left(\left(a,a\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(a=0\right)$.

מכפלה פנימית מרוכבת (מ"פ): יהי L מ"ו נ"ס אזי $\left(\cdot,\cdot\right):L^2\to\mathbb{C}$ המקיימת

- הרמיטיות: $\forall a,b\in L.\left(a,b\right)=\overline{\left(b,a\right)}$.
- לינאריות: $\forall a,b,c\in L.\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}.\left(\alpha a+\beta b,c\right)=\alpha\left(a,c\right)+\beta\left(b,c\right)$.
- חיוביות: $\forall a\in L.\left(a,a\right)\in\mathbb{R}_+$.
- חיוביות ממש: $\forall a\in L.\left(\left(a,a\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(a=0\right)$.

מרחב אוקלידי: $\left(L,+,*,\left(\cdot,\cdot\right)\right)$ באשר ($\left(L,+,*\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$)$\wedge$($\left(\cdot,\cdot\right)$ מכפלה פנימית ממשית).

מרחב אוניטרי: $\left(L,+,*,\left(\cdot,\cdot\right)\right)$ באשר ($\left(L,+,*\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$)$\wedge$($\left(\cdot,\cdot\right)$ מכפלה פנימית מרוכבת).

מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ): (מרחב אוניטרי)$\vee$(מרחב אוקלידי).

מימוש: יהי $\left\langle L,+,\cdot\right\rangle$ מרחב אוניטרי אזי $\left\langle L_{\mathbb{R}},+,\cdot\right\rangle$.

משפט: יהי L מרחב אוניטרי אזי ($L_{\mathbb{R}}$ מ"ו)$\wedge$($\left(a,b\right)_{\mathbb{R}}=\text{Re}\left(a,b\right)$ מ"פ על $L_{\mathbb{R}}$).

למה: יהי L מרחב אוניטרי אזי $\dim_{\mathbb{R}}\left(L_{\mathbb{R}}\right)=2\dim_{\mathbb{C}}\left(L\right)$.

הגדרה: יהיו $a,b\in\mathbb{C}^n$ נגדיר $\left(a,b\right)_{\text{st}}=\sum_{i=1}^na_i\overline{b_i}$.

הגדרה: יהיו $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{C}\right)$ נגדיר $\left(A,B\right)_{\text{st}}=\text{trace}\left(A^t\overline{B}\right)$.

הגדרה: יהיו $f,g\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[\alpha,\beta\right]\right)$ נגדיר $\left(f,g\right)_{\text{st}}=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

משפט קושי שוורץ: יהי L ממ"פ ויהיו $a,b\in L$ אזי $\left(a,b\right)^2\leq\left(a,a\right)\cdot\left(b,b\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in L$ אזי $\left(\left(a,b\right)^2=\left(a,a\right)\cdot\left(b,b\right)\right)\Longleftrightarrow\left(a\in\text{span}\left(b\right)\right)$.

נורמה/אורך: יהי $a\in L$ אזי $\left\|a\right\|=\sqrt{\left(a,a\right)}$.

זווית: יהיו $a,b\in L\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\alpha\in\left[0,\pi\right]$ עבורה $\cos\left(\alpha\right)=\frac{\left(a,b\right)}{\left\|a\right\|\left\|b\right\|}$.

סימון: יהיו $a,b\in L\backslash\left\{0\right\}$ אזי $\widehat{ab}$ הזווית בין a,b.

מרחק: יהיו $a,b\in L$ אזי $\text{dist}\left(a,b\right)=\left\|a-b\right\|$.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $a,b\in L$ ויהי λ סקלר
- $(\|a\|\ge 0)\wedge((\|a\|=0)\iff(a=0))$.
- $\|\lambda a\|=|\lambda|\cdot\|a\|$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $|\|a\|-\|b\||\le\|a+b\|\le\|a\|+\|b\|$.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $a,b\in L\backslash\{0\}$
- $-1\le\cos\left(\widehat{ab}\right)\le 1$.
- $\left(\cos\left(\widehat{ab}\right)=1\right)\iff(\exists t>0.b=ta)$.
- $\left(\cos\left(\widehat{ab}\right)=-1\right)\iff(\exists t<0.b=ta)$.

וקטורים ניצבים/אורתוגונליים (א"ג): $a,b\in L$ המקיימים $(a,b)=0$.

סימון: יהיו a,b ניצבים אזי $a\perp b$.

משפט פיתגורס: יהיו $a,b\in L$ אזי $\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2\iff a\perp b$.

למה: יהי L ממ"פ ויהיו $a,b,c\in L$
- סימטריות: $\text{dist}(a,b)=\text{dist}(b,a)$.
- חיוביות: $\text{dist}(a,b)\ge 0$.
- חיוביות ממש: $(\text{dist}(a,b)=0)\iff(a=b)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\text{dist}(a,b)\le\text{dist}(a,c)+\text{dist}(c,b)$.

שחזור מכפלה פנימית מנורמה: יהי L ממ"פ ויהיו $a,b\in L$
- L מרחב אוקלידי אזי $(a,b)=\frac{\|a+b\|^2-\|a-b\|^2}{4}$.
- L מרחב אוניטרי אזי $(a,b)=\frac{\|a+b\|^2-\|a-b\|^2}{4}+i\frac{\|a+ib\|^2-\|a-ib\|^2}{4}$.

מרחב בעל נורמה: יהי L מ"ו נ"ס אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ המקיימת
- $(\upsilon(a)\ge 0)\wedge((\upsilon(a)=0)\iff(a=0))$.
- $\upsilon(\lambda a)=|\lambda|\cdot\upsilon(a)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon(a+b)\le\upsilon(a)+\upsilon(b)$.

טענה: יהי L ממ"פ אזי L מרחב בעל נורמה.

שיוויון המקבילית: נורמה υ המקיימת $\forall a,b\in L.\upsilon(a+b)^2+\upsilon(a-b)^2=2\left(\upsilon(a)^2+\upsilon(b)^2\right)$.

משפט: יהי L מרחב בעל נורמה υ אזי (υ מקיימת שיוויון המקבילית)$\iff$(υ משרה מכפלה פנימית).

טענה: מעל $C([\alpha,\beta])$ הנורמה $\upsilon(f)=\max_{x\in[\alpha,\beta]}|f(x)|$ אינה מושרת ממכפלה פנימית.

מטריצת גראם: יהי L ממ"פ ויהיו $a_1\dots a_k\in L$ אזי $G(a_1\dots a_k)\in M_k(\mathbb{C})$ כך $(G(a_1\dots a_k))_{i,j}=(a_i,a_j)$.

מטריצה הרמיטית: $A\in M_n(\mathbb{C})$ המקיימת $A^t=\overline{A}$.

טענה: יהי L ממ"פ ויהיו $a_1\dots a_k\in L$ אזי $G(a_1\dots a_k)^t=\overline{G(a_1\dots a_k)}$.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_1\dots a_k\in L$ אזי $G(a_1\dots a_k)^t=G(a_1\dots a_k)$.

משפט: יהיו $a_1\dots a_k\in L$ אזי ($a_1\dots a_k$ בת"ל)$\iff(\det(G(a_1\dots a_k))\ne 0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{B}\subseteq L$ בסיס אזי $\det G(\mathcal{B})\ne 0$.

וקטורים אורתונורמלים (א"נ): $a_1\dots a_n\in L$ המקיימים $(a_i,a_j)=\delta_{i,j}$.

מסקנה: יהיו $a_1\dots a_n\in L$ אורתונורמלים אזי $G(a_1\dots a_n)=I_n$.

מסקנה: יהיו $a_1\dots a_n\in L$ אורתונורמליים אזי $a_1\dots a_n$ בת"ל.

משפט: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהיו $a,b\in L$ אזי $(a,b)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n([a]_{\mathcal{B}})_i\overline{([b]_{\mathcal{B}})_j}(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_j)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהיו $a,b\in L$ אזי $(a,b)=[a]_{\mathcal{B}}^t G(\mathcal{B})\overline{[b]_{\mathcal{B}}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{B},\mathcal{D}$ בסיסים ותהא C מטריצת מעבר בין הבסיסים אזי $G(\mathcal{D})=C^tG(\mathcal{B})\overline{C}$.

מטריצות חופפות: $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $C^tBC=A$. $\exists C\in\text{GL}(n,\mathbb{F})$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B},\mathcal{D}$ בסיסים למרחב אוקלידי אזי $G(\mathcal{B}),G(\mathcal{D})$ חופפות.

בסיס דואלי: יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי בסיס $\mathcal{D}$ המקיים $(\mathcal{D}_i,\mathcal{B}_j)=\delta_{i,j}$.

סימון: יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $\mathcal{B}^*$ בסיס דואלי.

משפט: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ויהי $a\in L$
- $\mathcal{B}^*$ קיים ויחיד.

- $\mathcal{B}^{**}=\mathcal{B}$.
- $a=\sum_{i=1}^{n}\left(a,\mathcal{B}_i^*\right)\mathcal{B}_i$.

למה: יהיו $a_1\dots a_k\in L$ אזי קיימים $e_1\dots e_m\in L$ אורתונורמליים עבורם $\text{span}\left\{e_1\dots e_m\right\}=\text{span}\left\{a_1\dots a_k\right\}$.

אורתונורמליזציית גראם שמידט: יהיו $a_1\dots a_k\in L$ בת"ל נגדיר $\text{GS}\left(a_1\dots a_k\right)=\left\{e_1\dots e_k\right\}$ כך

- $e_1=\frac{a_1}{\|a_1\|}$.
- לכל $2\le i\le k$
  - $a_i'=a_i-\sum_{j=1}^{i-1}\left(a_i,e_j\right)e_j$.
  - $e_i=\frac{a_i'}{\|a_i'\|}$.

טענה: יהיו $a_1\dots a_k\in L$ בת"ל אזי ($\text{GS}\left(a_1\dots a_k\right)$ אורתונורמליים)$\wedge\left(\text{span}\left\{\text{GS}\left(a_1\dots a_k\right)\right\}=\text{span}\left\{a_1\dots a_k\right\}\right)$.

מסקנה: יהי L ממ"פ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ אורתונורמלי.

למה: יהי L ממ"פ יהי $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי ויהיו $a,b\in L$

- $a=\sum_{i=1}^{n}\left(a,\mathcal{B}_i\right)\mathcal{B}_i$.
- $\|a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i^2}$.
- $\left(a,b\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i\overline{\left(\left[b\right]_{\mathcal{B}}\right)_i}$.
- $\text{dist}\left(a,b\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i-\left(\left[b\right]_{\mathcal{B}}\right)_i\right)^2}$.
- $\cos\left(\widehat{ab}\right)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i\left(\left[b\right]_{\mathcal{B}}\right)_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left[b\right]_{\mathcal{B}}\right)_i^2}}$.

מסקנה: יהיו $a_1\dots a_k\in L$ אזי $\det\left(G\left(a_1\dots a_k\right)\right)\ge 0$.

מסקנה: יהיו $a_1\dots a_k\in L$ בת"ל אזי $\det\left(G\left(a_1\dots a_k\right)\right)>0$.

מקבילון: יהי L מרחב אוקלידי ויהיו $a_1\dots a_k\in L$ בת"ל אזי $P\left(a_1\dots a_k\right)=\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i\mid\forall i\in[k].\lambda_i\in[0,1]\right\}$.

נפח מקבילון: יהיו $a_1\dots a_k\in L$ בת"ל אזי $\text{Vol}\left(P\left(a_1\dots a_k\right)\right)=\sqrt{\det\left(G\left(a_1\dots a_k\right)\right)}$.

למה: יהיו $a_1\dots a_k\in L$ אורתוגונליים אזי $\text{Vol}\left(P\left(a_1\dots a_k\right)\right)=\prod_{i=1}^{k}\|a_i\|$.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס אורתונורמלי יהי $\mathcal{D}$ בסיס ותהא C מטריצת מעבר אזי $\text{Vol}\left(P\left(\mathcal{D}\right)\right)=\left|\det\left(C\right)\right|$.

אוריינטציה: יהיו $\mathcal{B},\mathcal{D}$ בסיסים ותהא C מטריצת מעבר אזי $\text{sign}\left(\det\left(C\right)\right)$.

מטריצה אורתוגונלית: יהיו $\mathcal{B},\mathcal{D}$ בסיסים אורתונורמליים במרחב אוקלידי אזי מטריצת המעבר C.

מטריצה אוניטרית: היו $\mathcal{B},\mathcal{D}$ בסיסים אורתונורמליים במרחב אוניטרי אזי מטריצת המעבר C.

משפט: תהא $C\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ אזי (C אורתוגונלית)$\Longleftrightarrow\left(C^tC=I\right)$.

משפט: תהא $C\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ אזי (C אוניטרית)$\Longleftrightarrow\left(C^t\overline{C}=I\right)$.

סימון: $O\left(n\right)=\left\{A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)\mid A^tA=I\right\}$.

סימון: $U\left(n\right)=\left\{A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)\mid A^t\overline{A}=I\right\}$.

משפט: תהא $C\in O\left(n\right)\cup U\left(n\right)$ אזי $\left|\det\left(C\right)\right|=1$.

משפט: תהא $C\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ אזי (עמודות C בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$)$\Longleftrightarrow\left(C\in O\left(n\right)\right)$.

משפט: תהא $C\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$ אזי (עמודות C בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$)$\Longleftrightarrow\left(C\in U\left(n\right)\right)$.

מטריצות אורתוגונליות מיוחדות: $SO\left(n\right)=\left\{A\in O\left(n\right)\mid\det\left(A\right)=1\right\}$.

מטריצות אוניטריות מיוחדות: $SU\left(n\right)=\left\{A\in U\left(n\right)\mid\det\left(A\right)=1\right\}$.

משפט: ($\left\langle O\left(n\right),\cdot\right\rangle$ חבורה)$\wedge$($\left\langle SO\left(n\right),\cdot\right\rangle$ חבורה)$\wedge$($\left\langle U\left(n\right),\cdot\right\rangle$ חבורה)$\wedge$($\left\langle SU\left(n\right),\cdot\right\rangle$ חבורה).

משלים ניצב: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו אזי $M^\perp=\left\{a\in L\mid\forall b\in M.\left(a,b\right)=0\right\}$.

משפט: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו אזי ($M^\perp$ תמ"ו)$\wedge\left(M\oplus M^\perp=L\right)$.

למה: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו

- $\left(M^\perp\right)^\perp=M$.
- $\dim\left(M^\perp\right)=\dim\left(L\right)-\dim\left(M\right)$.
- $\left(M+U\right)^\perp=M^\perp\cap U^\perp$.
- $\left(M\cap U\right)^\perp=M^\perp+U^\perp$.

מרחק: יהי $M\subseteq L$ תמ"ו ויהי $a\in L$ אזי $\text{dist}\left(a,M\right)=\inf\left\{\text{dist}\left(a,b\right)\mid b\in M\right\}$.

סימון: יהי $a\in L$ אזי $a_M\in M$, $a_\perp\in M^\perp$ היחידים שמקיימים $a=a_\perp+a_M$.

הטלה אורתוגונלית: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו אזי $\mathrm{pr}_M \in \mathrm{Hom}(L, M)$ המוגדרת $\mathrm{pr}_M(a) = a_M$.

משפט: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו ויהי $a \in L$

- $\mathrm{dist}(a, M) = \|a_\perp\|$.
- $\mathrm{dist}(a, a_M) = \min\{\mathrm{dist}(a, b) \mid b \in M\}$.
- $\forall b \in M \backslash \{a_M\}.\mathrm{dist}(a, b) > \mathrm{dist}(a, a_M)$.
- $\mathrm{dist}(a, M) = \sqrt{\frac{\det(G(a,\mathcal{B}))}{\det(G(\mathcal{B}))}}$.

משפט: יהי $M \subseteq L$ תמ"ו ויהיו $a, b \in L$ אזי $(a, b) = (a_M, b_M) + (a_\perp, b_\perp)$.

למה: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\dim_{\mathbb{R}}(L) = \dim_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}})$.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי אזי $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ מכפלה פנימית מעל $L_{\mathbb{C}}$.

משפט אוילר־פורייה־פרסבל: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

פונקציונל ליניארי: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$.

המרחב הדואלי: $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$.

הגדרה: יהי L ממ"פ על $\mathbb{F}$ ויהי $a \in L$ אזי $\varphi_a : L \to \mathbb{F}$ המוגדרת $\varphi_a(b) = (b, a)$.

למה: יהי L ממ"פ ויהי $a \in L$ אזי $\varphi_a \in L^*$.

משפט: יהי L ממ"פ נ"ס אזי $f : L \to L^*$ המוגדרת $f(a) = \varphi_a$ חח"ע ועל.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי נ"ס אזי $f : L \to L^*$ המוגדרת $f(a) = \varphi_a$ העתקה הפיכה.

איזומטריה: איזומורפיזם $\varphi \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ המקיים $\forall a, b \in L_1. (\varphi(a), \varphi(b)) = (a, b)$.

משפט: יהיו $\varphi, \phi \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ איזומטריות יהיו $a, b \in L_1$ ותהא $\mathcal{D} \subseteq L_1$ בת"ל

- ($\varphi \circ \phi$ איזומטריה)$\wedge$(φ^{-1} איזומטריה).
- $(\|\varphi(a)\| = \|a\|) \wedge (\mathrm{dist}(\varphi(a), \varphi(b)) = \mathrm{dist}(a, b))$.
- $\left(\widehat{a, b} = \widehat{\varphi(a), \varphi(b)}\right) \wedge (a \perp b \iff \varphi(a) \perp \varphi(b))$.
- $\mathrm{Vol}(P(\mathcal{D})) = \mathrm{Vol}(P(\varphi(\mathcal{D})))$.

מסקנה: יהי L ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $L, \mathbb{F}^{\dim L}$ איזומטריים.

משפט: יהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ אזי (φ איזומטריה)$\iff$(קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $[\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot \overline{[\varphi]_{\mathcal{B}}}^t = I$).

משפט: יהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ התב"ש

- φ איזומטריה.
- $\forall a \in L. \|\varphi(a)\| = \|a\|$.
- קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $\varphi(\mathcal{B})$ בסיס א"נ.

העתקה קונפורמית: יהי L מרחב אוקלידי אזי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ המקיים $\forall a, b \in L.\widehat{a, b} = \widehat{\varphi(a), \varphi(b)}$.

משפט: יהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ אזי (φ העתקה קונפורמית)$\iff$(קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $(\exists \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}. [\varphi]_{\mathcal{B}} \in O(n)$).

דטרמיננטה: יהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ איזומורפיזם ויהיו $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ בסיסים א"נ בהתאמה אזי $\det(\varphi) = \det\left([\varphi]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}\right)$.

למה: יהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ אזי $\det(\varphi)$ מוגדר היטב עד כדי אוריינטציה.

משפט: יהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ איזומורפיזם ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של L_1 אזי $\mathrm{Vol}(P(\varphi(\mathcal{B}))) = |\det(\varphi)| \mathrm{Vol}(P(\mathcal{B}))$.

העתקה שומרת נפח: יהיו L_1, L_2 מרחבים אוקלידיים אזי איזומורפיזם $\varphi \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ עבורו לכל בסיס $\mathcal{B}$ של L_1 מתקיים $\mathrm{Vol}(P(\varphi(\mathcal{B}))) = \mathrm{Vol}(P(\mathcal{B}))$.

מסקנה: יהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ איזומורפיזם אזי (φ שומרת על נפח)$\iff$ $(\det(\varphi) = 1)$.

העתקה צמודה: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ אזי $\phi \in \mathrm{Hom}(L)$ עבורו $\forall a, b \in L. (\varphi(a), b) = (a, \phi(b))$.

משפט: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ אזי העתקה צמודה קיימת ויחידה.

סימון: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi \in \mathrm{Hom}(L)$ אזי ההעתקה הצמודה ל־φ היא φ^*.

למה: יהי L ממ"פ יהיו $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(L)$ יהי λ סקלר ויהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ

- $[\varphi]_{\mathcal{B}}^* = \overline{[\varphi]_{\mathcal{B}}}^t$.
- $(\varphi^*)^* = \varphi$.
- $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$.
- $(\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*$.
- $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$.

מסקנה: יהי L מרחב אוקלידי אזי $f\in L^{L}$ המוגדרת $f\left(\varphi\right)=\varphi^{*}$ היא אוטומורפיזם.

משפט: $\left(\ker\left(\varphi\right)=\left(\text{Im}\left(\varphi^{*}\right)\right)^{\perp}\right)\wedge\left(\text{Im}\left(\varphi\right)=\left(\ker\left(\varphi^{*}\right)\right)^{\perp}\right)$.

משפט: יהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ איזומטריה)$\iff\left(\varphi\varphi^{*}=I\right)$.

העתקה צמודה לעצמה: יהי L ממ"פ אזי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיימת $\varphi=\varphi^{*}$.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס א"נ אזי $\left(\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}=\overline{\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}}^{t}\right)\iff\left(\varphi=\varphi^{*}\right)$.

משפט: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי $\left(\forall a\in L.\left(\varphi\left(a\right),a\right)\in\mathbb{R}\right)\iff\left(\varphi=\varphi^{*}\right)$.

למה: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיים $\forall a\in L.\left(\varphi\left(a\right),a\right)=0$ אזי $\varphi=0$.

למה: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי קיימים ויחידים $\varphi_{1},\varphi_{2}\in\text{Hom}\left(L\right)$ צמודים לעצמם המקיימים $\varphi=\varphi_{1}+i\varphi_{2}$.

העתקה נורמלית: יהי L ממ"פ אזי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ המקיים $\varphi\varphi^{*}=\varphi^{*}\varphi$.

טענה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלית אזי (λ ע"ע של φ עם ו"ע a)$\Longleftarrow$($\overline{\lambda}$ ע"ע של φ^{*} עם ו"ע a).

טענה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלית ויהיו $\lambda\neq\mu$ אזי $L_{\lambda}\perp L_{\mu}$.

טענה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלית אזי (M תמ"ו φ שמור)$\Longleftarrow$($M^{\perp}$ תמ"ו φ שמור).

משפט הפירוק הספקטרלי: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ לכסין בבסיס א"נ)$\iff\left(\varphi\varphi^{*}=\varphi^{*}\varphi\right)$.

משפט שור: יהי L מרחב אוניטרי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ עבורו $\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}$ משולשית עליונה.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ אזי (φ לכסין בבסיס א"נ)$\iff\left(\varphi=\varphi^{t}\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ הרמיטית אזי קיימת $U\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אוניטרית עבורה $U^{-1}AU$ אלכסונית ממשית.

למה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אוניטרית ויהי λ ע"ע אזי $\left\Vert \lambda\right\Vert =1$.

משפט: יהי L ממ"פ ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ נורמלי אזי (φ איזומטריה)$\iff\left(\forall\lambda\in\text{Spec}\left(\varphi\right).\left\Vert \lambda\right\Vert =1\right)$.

משפט: יהי L מרחב אוקלידי ויהי $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ איזומטריה אזי קיים בסיס א"נ $\mathcal{B}$ המקיים

$$\left[\varphi\right]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}\left(1\ldots1,-1\ldots-1,\left(\begin{smallmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{smallmatrix}\right)\ldots\left(\begin{smallmatrix}\cos(\beta) & \sin(\beta)\\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\end{smallmatrix}\right)\right)$$

מסקנה: תהא $\varphi\in\text{Hom}\left(L\right)$ איזומטריה

- $L=\mathbb{R}$, אזי (φ שיקוף ביחס לראשית)$\vee\left(\varphi=I\right)$.
- $L=\mathbb{R}^{2}$, אזי (φ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית)$\vee$(φ סיבוב סביב הראשית).
- $L=\mathbb{R}^{3}$, אזי (φ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית)$\vee$ (φ שיקוף ביחס לקו ישר שעובר דרך הראשית) $\vee$(φ שיקוף ביחס למישור שעובר דרך הראשית ושיקוף ביחס לקו ישר שאנך למישור ועובר דרך הראשית).

תבנית בילינארית (ת"ב): יהיו L,M מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ אזי $\Phi:L\times M\to\mathbb{F}$

- לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v,u\in L$ ויהי $w\in M$ אזי $\Phi\left(\alpha v+\beta u,w\right)=\alpha\Phi\left(v,w\right)+\beta\Phi\left(u,w\right)$.
- לינאריות ברכיב שני: יהי $v\in L$ ויהיו $u,w\in M$ אזי $\Phi\left(v,\alpha u+\beta w\right)=\alpha\Phi\left(v,u\right)+\beta\Phi\left(v,w\right)$.

סימון: יהיו L,M מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $B\left(L,M\right)=\left\{ \Phi:L\times M\to\mathbb{F}\mid\Phi\text{ תבנית בילינארית}\right\}$.

סימון: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $B\left(L\right)=B\left(L,L\right)$.

מטריצה מייצגת: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ ויהיו $\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}$ בסיסים אזי $\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\right)_{i,j}=\Phi\left(\left(\mathcal{B}_{L}\right)_{i},\left(\mathcal{B}_{M}\right)_{j}\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ יהיו $\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}$ בסיסים יהי $a\in L$ ויהי $b\in M$ אזי $\Phi\left(a,b\right)=\left[a\right]_{\mathcal{B}_{L}}^{t}\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\left[b\right]_{\mathcal{B}_{M}}$.

משפט: ($B\left(L,M\right)$ מ"ו על $\mathbb{F}$)$\wedge\left(\dim\left(B\left(L,M\right)\right)=\dim\left(L\right)\dim\left(M\right)\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ ויהיו $\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{L}',\mathcal{B}_{M},\mathcal{B}_{M}'$ בסיסים אזי $\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L}',\mathcal{B}_{M}'}=\left(\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}_{L}'}^{\mathcal{B}_{L}}\right)^{t}\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}_{M}'}^{\mathcal{B}_{M}}$.

דרגה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ אזי $\text{rank}\left(\Phi\right)=\text{rank}\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}\right)$.

למה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ אזי $\text{rank}\left(\Phi\right)$ מוגדרת היטב.

הגדרה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ נגדיר $\Phi_{1}\in\text{Hom}\left(L,M^{*}\right)$ כך $\Phi_{1}\left(a\right)\left(b\right)=\Phi\left(a,b\right)$.

הגדרה: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ נגדיר $\Phi_{2}\in\text{Hom}\left(M,L^{*}\right)$ כך $\Phi_{2}\left(b\right)\left(a\right)=\Phi\left(a,b\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ אזי $\text{rank}\left(\Phi\right)=\text{rank}\left(\Phi_{1}\right)=\text{rank}\left(\Phi_{2}\right)$.

תבנית אי־מנוונת: $\Phi\in B\left(L,M\right)$ עבורה $\left[\Phi\right]$ הפיכה.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ התב"ש

- Φ אי־מנוונת.
- Φ_{1},Φ_{2} איזומורפיזמים.

- $\text{rank}\left(\Phi\right)=\dim\left(M\right)=\dim\left(L\right)$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L\right)$ אזי (Φ אי־מנוונת)$\iff\left(\forall a\in L\backslash\left\{ 0\right\} .\exists b\in L.\Phi\left(a,b\right)\neq0\right)$.

משפט: יהיו $L\neq M$ ותהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ באשר $\text{rank}\left(\Phi\right)=r$ אזי $\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}_{L},\mathcal{B}_{M}}=\text{Diag}\left(I_{r},0\right)$.

מסקנה: יהיו $L\neq M$ ותהא $\Phi\in B\left(L,M\right)$ באשר $\text{rank}\left(\Phi\right)=r$ אזי קיימים $\varphi_{1}\ldots\varphi_{r}\in L^{*}$ וכן $\psi_{1}\ldots\psi_{r}\in M^{*}$ עבורם $\Phi=\varphi_{1}\psi_{1}+\ldots+\varphi_{r}\psi_{r}$.

למה: יהיו $\varphi_{1}\ldots\varphi_{r},\psi_{1}\ldots\psi_{r}\in L^{*}$ אזי $\text{rank}\left(\varphi_{1}\psi_{1}+\ldots+\varphi_{r}\psi_{r}\right)\leq r$.

משפט: תהא $\Phi\in B\left(L\right)$ באשר $\text{rank}\left(\Phi\right)=r$ אזי קיימים $\varphi_{1}\ldots\varphi_{r},\psi_{1}\ldots\psi_{r}\in L^{*}$ עבורם $\Phi=\varphi_{1}\psi_{1}+\ldots+\varphi_{r}\psi_{r}$.

תבנית ריבועית: תהא $\Phi\in B\left(L\right)$ אזי $Q:L\to\mathbb{F}$ המוגדרת $Q\left(a\right)=\Phi\left(a,a\right)$.

למה: תהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית עבור ת"ב $\Phi\in B\left(L\right)$ ויהי $a\in L$

- יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $Q\left(\lambda a\right)=\lambda^{2}Q\left(a\right)$.
- יהי $b\in L$ אזי $Q\left(a+b\right)=Q\left(a\right)+Q\left(b\right)+\Phi\left(a,b\right)+\Phi\left(b,a\right)$.
- יהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $Q\left(a\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,i}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i}^{2}+\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i,j}+\left(\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}\right)_{j,i}\right)\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_{i}\left(\left[a\right]_{\mathcal{B}}\right)_{j}$.

למה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq2$ ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיימת ויחידה $\Phi\in B\left(L\right)$ סימטרית מתאימה לתבנית.

מסקנה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq2$ ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\Phi\left(a,b\right)=\frac{Q\left(a+b\right)-Q\left(a\right)-Q\left(b\right)}{2}$.

הגדרה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\left[Q\right]_{\mathcal{B}}=\left[\Phi\right]_{\mathcal{B}}$.

מסקנה: תהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $\left[Q\right]^{t}=\left[Q\right]$.

מסקנה: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq2$ ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי $Q\left(a\right)=\left[a\right]_{\mathcal{B}}^{t}\left[Q\right]_{\mathcal{B}}\left[a\right]_{\mathcal{B}}$.

למה: תהא $Q:L\to\mathbb{F}$ ויהיו $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ בסיסים אזי $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'}=\left(\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{t}\left[Q\right]_{\mathcal{B}}\left(\left[\text{Id}\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{t}$.

מטריצות חופפות: $A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימות $\exists C\in\text{GL}\left(n,\mathbb{F}\right).B=C^{t}AC$.

משפט לגראנז': יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq2$ ותהא $Q:L\to\mathbb{F}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right)=\sum_{i=1}^{\text{rank}\left(Q\right)}\alpha_{i}x_{i}^{2}$.

משפט: תהא $Q:L\to\mathbb{C}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right)=\sum_{i=1}^{\text{rank}\left(Q\right)}x_{i}^{2}$.

מסקנה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C\in\text{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ עבורה $C^{t}AC=\text{Diag}\left(I_{\text{rank}\left(A\right)},0\right)$.

משפט: תהא $Q:L\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $Q\left(a\right)=\sum_{i=1}^{p}x_{i}^{2}-\sum_{i=p+1}^{\text{rank}\left(Q\right)}x_{i}^{2}$.

מסקנה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי קיימת $C\in\text{GL}\left(n,\mathbb{C}\right)$ עבורה $C^{t}AC=\text{Diag}\left(I_{p},-I_{q},0\right)$.

סיגנטורה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית אזי $\left(p,q\right)$ עבורם $\text{Diag}\left(I_{p},-I_{q},0\right)\underset{\text{חופפת}}{\sim}A$.

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית עם סיגנטורה $\left(p,q\right)$ אזי p.

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ סימטרית עם סיגנטורה $\left(p,q\right)$ אזי q.

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא $Q:L\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית עבורה $\left[Q\right]_{\mathcal{B}}=\text{Diag}\left(I_{p},-I_{q},0\right)$ וכן $\left[Q\right]_{\mathcal{B}'}=\text{Diag}\left(I_{p'},-I_{q'},0\right)$ אזי $\left(p,q\right)=\left(p',q'\right)$.

מינור ראשי: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ יהי $k<n$ ויהי $B\in M_{k}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיים $\left(B\right)_{i,j}=\left(A\right)_{i,j}$ אזי $\Delta_{k}^{A}=\det\left(B\right)$.

מטריצה יחידה משולשית עליונה (upper unitriangular): $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקימת $A=\begin{pmatrix}1 & & *\\ & \ddots\\ 0 & & 1\end{pmatrix}$.

טענה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ ותהא $C\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה משולשית עליונה אזי $\Delta_{k}^{C^{t}AC}=\Delta_{k}^{A}$.

משפט: יהי $\text{char}\left(\mathbb{F}\right)\neq2$ תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ סימטרית עבורה $\Delta_{1},\ldots,\Delta_{\text{rank}\left(A\right)}\neq0$ וכן $\Delta_{\text{rank}\left(A\right)+1},\ldots,\Delta_{n}=0$ אזי קיימת $C\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ יחידה משולשית עליונה עבורה $C^{t}AC=\text{Diag}\left(\Delta_{1},\frac{\Delta_{2}}{\Delta_{1}}\ldots\frac{\Delta_{\text{rank}\left(A\right)}}{\Delta_{\text{rank}\left(A\right)-1}},0\ldots0\right)$.

הגדרה: תהא $Q:L\to\mathbb{R}$ תבנית ריבועית

- תבנית חיובית לחלוטין (תחל"ח): $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .Q\left(v\right)>0$.
- תבנית אי־שלילית: $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .Q\left(v\right)\geq0$.
- תבנית אי־חיובית: $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .Q\left(v\right)\leq0$.
- תבנית שלילית לחלוטין: $\forall v\in L\backslash\left\{ 0\right\} .Q\left(v\right)<0$.

הגדרה: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית

- חיובית לחלוטין (חל"ח): $\forall x\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .x^{t}Ax>0$.
- אי־שלילית: $\forall x\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .x^{t}Ax\geq0$.
- אי־חיובית: $\forall x\in\mathbb{R}^{n}\backslash\left\{ 0\right\} .x^{t}Ax\leq0$.

- שלילית לחלוטין: $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} . x^t A x < 0$.

משפט סילבסטר: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי (A חל"ח)$\Longleftrightarrow$$(\forall i \in [n] . \Delta_i > 0)$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי (A שלילית לחלוטין)$\Longleftrightarrow$$\left(\forall i \in [n] . (-1)^i \Delta_i > 0\right)$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי (A חל"ח)$\Longleftrightarrow$(כל הע"ע של A חיוביים).

למה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית חל"ח אזי $\exists! B \in M_n(\mathbb{R}) . B^2 = A$.

פירוק פולרי: תהא $D \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ אזי קיימים ויחידים $R \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית חל"ח וכן $Q \in O(n)$ עבורם $D = QR$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי קיימת $C \in O(n)$ עבורה $C^t A C$ אלכסונית.

מסקנה: תהא $Q_1 : L \to \mathbb{R}$ תחל"ח ותהא $Q_2 : L \to \mathbb{R}$ אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[Q_1]_{\mathcal{B}}, [Q_2]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

תבנית אחד־וחצי־לינארית: יהי L מ"ו מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ אזי $\Psi : L \times L \to \mathbb{C}$

- לינאריות ברכיב ראשון: יהיו $v, u, w \in L$ אזי $\Psi(\alpha v + \beta u, w) = \alpha \Psi(v, w) + \beta \Psi(u, w)$.
- יהיו $v, u, w \in L$ אזי $\Psi(v, \alpha u + \beta w) = \overline{\alpha} \Psi(v, u) + \overline{\beta} \Psi(v, w)$.

מטריצה מייצגת: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית ויהי $\mathcal{B}$ בסיס אזי $\left([\Psi]_{\mathcal{B}}\right)_{i,j} = \Psi(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית יהי $\mathcal{B}$ בסיס יהי $a \in L$ ויהי $b \in M$ אזי $\Psi(a, b) = [a]_{\mathcal{B}}^t [\Phi]_{\mathcal{B}} \overline{[b]_{\mathcal{B}}}$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית ויהיו $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ בסיסים אזי $[\Psi]_{\mathcal{B}'} = \left([\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^t [\Psi]_{\mathcal{B}} \overline{[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}$.

דרגה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי $\mathrm{rank}(\Psi) = \mathrm{rank}([\Psi]_{\mathcal{B}})$.

למה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי $\mathrm{rank}(\Psi)$ מוגדרת היטב.

תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית: Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית המקיימת $\forall a, b \in L . \Psi(a, b) = \overline{\Psi(b, a)}$.

למה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית אזי (Ψ הרמיטית)$\Longleftrightarrow$($[\Psi]$ הרמיטית).

מסקנה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\Psi]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Diag}(I_p, -I_q, 0)$.

ציון/אינדקס ההתמדה החיובי: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עם $[\Psi]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ אזי p.

ציון/אינדקס ההתמדה השלילי: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עם $[\Psi]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ אזי q.

משפט ההתמדה של סילבסטר: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית עבורה $[Q]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ וכן $[Q]_{\mathcal{B}'} = \mathrm{Diag}(I_{p'}, -I_{q'}, 0)$ אזי $(p, q) = (p', q')$.

למה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית אזי $\Delta_1 \ldots \Delta_n \in \mathbb{R}$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית עבורה $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\mathrm{rank}(A)} \neq 0$ וכן $\Delta_{\mathrm{rank}(A)+1}, \ldots, \Delta_n = 0$ אזי קיימת $C \in M_n(\mathbb{C})$ יחידה משולשית עליונה עבורה $C^t A \overline{C} = \mathrm{Diag}\left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \ldots \frac{\Delta_{\mathrm{rank}(A)}}{\Delta_{\mathrm{rank}(A)-1}}, 0 \ldots 0\right)$.

הגדרה: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית

- חיובית לחלוטין (חל"ח): $\forall v \in L \setminus \{0\} . \Psi(v, v) > 0$.
- אי־שלילית: $\forall v \in L \setminus \{0\} . \Psi(v, v) \geq 0$.
- אי־חיובית: $\forall v \in L \setminus \{0\} . \Psi(v, v) \leq 0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v \in L \setminus \{0\} . \Psi(v, v) < 0$.

משפט: תהא Ψ תבנית אחד־וחצי־לינארית הרמיטית אזי (Ψ חל"ח)$\Longleftrightarrow$$(\forall i \in [n] . \Delta_i > 0)$.

מסקנה: תהנא Ψ_1, Ψ_2 תבניות אחד־וחצי־לינאריות עבורן Ψ_1 חל"ח אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\Psi_1]_{\mathcal{B}}, [\Psi_2]_{\mathcal{B}}$ אלכסוניות.

תבנית אנטי סימטרית: יהי $\mathrm{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ אזי $\Phi \in B(L)$ המקיימת $\forall a, b \in L . \Phi(a, b) = -\Phi(b, a)$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $\forall a \in L . \Phi(a, a) = 0$.

למה: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי $[\Phi]$ אנטי סימטרית.

משפט: תהא Φ תבנית אנטי סימטרית אזי קיים בסיס $\mathcal{B}$ עבורו $[\Phi]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Diag}\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \ldots \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), 0 \ldots 0\right)$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אזי $\mathrm{rank}(A) \in \mathbb{N}_{\mathrm{even}}$.

פולינום Pfaff: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אי־מנוונת אזי $p \in \mathbb{F}[x_1 \ldots x_{n^2}]$ המקיים $\det(A) = p\left((A)_{1,1} \ldots (A)_{n,n}\right)^2$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אנטי סימטרית אי־מנוונת אזי קיים פולינום pfaff.

הגדרה: $\mathbb{R}_2[x, y] = \{f \in \mathbb{R}[x, y] \mid \deg(f) = 2\}$.

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{R}_2[x, y]$ אזי $p \sim q \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} . q = \alpha p$.

קבוצת העקומות האלגבריות המישוריות ממעלה 2: $C_2(\mathbb{R}) = {}^{\mathbb{R}_2[x,y]}/_{\sim}$.

עקומה גאומטרית מישורית ממשית ממעלה 2: יהי $p \in \mathbb{R}_2[x, y]$ אזי $\mathrm{sols}(p)$.

למה: עקומה אלגברית מישורית ממעלה 2 מגדירה עקומה גאומטרית מישורית ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור $\mathbb{R}^2$: תהא $Q \in O(2)$ וכן $v \in \mathbb{R}^2$ אזי פונקציה $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת $f(u) = Qu + v$.

למה: תהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y]$ המוגדרת $p(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$

- המטריצה המצומצמת: $A_p = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$.
- המטריצה המורחבת: $\widehat{A_p} = \left(\begin{smallmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right)$.

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי $\text{Spec}(A_p) = \text{Spec}(A_{p \circ f})$.

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ אזי $\det\left(\widehat{A_p}\right) = \det\left(\widehat{A_{p \circ f}}\right)$.

משפט: יהיו $p, q \in \mathbb{R}_2[x, y]$ עבורן A_p, A_q דומות וכן $\det\left(\widehat{A_p}\right) = \det\left(\widehat{A_q}\right)$ וכן $\left(\det\left(\widehat{A_p}\right) = \det\left(\widehat{A_q}\right) \neq 0\right) \vee (\det(A_p) = \det(A_q) \neq 0)$ אזי קיימת T תנועה במישור $\mathbb{R}^2$ עבורה $p = q \circ T$.

מסקנה: תהא $C \in C_2(\mathbb{R})$ עבורה $\det\left(\widehat{A_p}\right) \neq 0$ אזי קיימת תנועה ב־$\mathbb{R}^2$ עבורה C הינה אחת מהבאות

- קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$.
- אליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- היפרבולה: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- פרבולה: $y^2 = 2px$.

הגדרה: $\mathbb{R}_2[x, y, z] = \{f \in \mathbb{R}[x, y, z] \mid \deg(f) = 2\}$.

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ אזי $p \sim q \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.q = \alpha p$.

קבוצת המשטחים האלגבריים ממעלה 2: $S_2(\mathbb{R}) = {}^{\mathbb{R}_2[x,y,z]}/_{\sim}$.

משטח גאומטרי ממעלה 2: יהי $p \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ אזי $\text{sols}(p)$.

למה: משטח אלגברי ממעלה 2 מגדיר משטח גאומטרי ממעלה 2 באופן יחיד.

תנועה במישור $\mathbb{R}^3$: תהא $Q \in O(3)$ וכן $v \in \mathbb{R}^3$ אזי פונקציה $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת $f(u) = Qu + v$.

למה: תהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי f שומרת מרחק.

הגדרה: תהא $A \in M_3(\mathbb{R})$ סימטרית תהא $B \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ ותהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ המוגדרת $p(v) = v^t A v + 2B^t v + c$

- המטריצה המצומצמת: $A_p = A$.
- המטריצה המורחבת: $\widehat{A_p} = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ B^t & c \end{smallmatrix}\right)$.

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי $\text{Spec}(A_p) = \text{Spec}(A_{p \circ f})$.

משפט: תהא $p \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ ותהא f תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ אזי $\det\left(\widehat{A_p}\right) = \det\left(\widehat{A_{p \circ f}}\right)$.

משפט: יהיו $p, q \in \mathbb{R}_2[x, y, z]$ עבורן A_p, A_q דומות וכן $\det\left(\widehat{A_p}\right) = \det\left(\widehat{A_q}\right)$ וכן $\left(\det\left(\widehat{A_p}\right) = \det\left(\widehat{A_q}\right) \neq 0\right) \vee (\det(A_p) = \det(A_q) \neq 0)$ אזי קיימת T תנועה במישור $\mathbb{R}^3$ עבורה $p = q \circ T$.

מסקנה: תהא $S \in S_2(\mathbb{R})$ עבורה $\det\left(\widehat{A_p}\right) \neq 0$ אזי קיימת תנועה ב־$\mathbb{R}^3$ עבורה S הינה אחת מהבאות

- קבוצה ריקה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$.
- אליפסויד: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- היפרבולויד חד־יריעתי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- היפרבולויד דו־יריעתי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.
- פרבולויד אליפטי: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$.
- פרבולויד היפרבולי: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$.