

פעולות בינאריות: תהא A קבוצה אזי $A \times A \rightarrow A$.

סימון: תהא A קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית על A אזי $a * b = *(a, b)$.

חבורה: תהא G קבוצה אזי $G \times G \rightarrow G : *$ עבודה קיים $e \in G$ עבורו

- אסוציאטיביות: לכל $a, b, c \in G$ מתקיים $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- איבר יחידה: לכל $a \in G$ מתקיים $a * e = e * a = a$.
- איבר הופכי: לכל $a \in G$ קיים $b \in G$ עבורו $a * b = e = b * a$.

הגדרה: תהא X קבוצה אזי $f : X \rightarrow X$ הפיכה $S(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ הפיכה}\}$.

חבורת התמורות: תהא X קבוצה אזי $(S(X), \circ)$.

טענה: תהא X קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $S_n = S([n])$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $|S_n| = n!$.

חבורת המטריצות: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.

החבורות החיבוריות: יהי $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ אזי $(\mathbb{F}, +)$.

סימון: תהא $A \subseteq \mathbb{C}$ אזי $A^* = A^\times = A \setminus \{0\}$.

החבורות הכפליות: יהי $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*\}$ אזי (\mathbb{F}, \cdot) .

החבורה הטריטוראלית: יהי x אזי $(\{x\}, \text{Id})$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\sim_n \subseteq \mathbb{Z}^2$ המוגדרת $(x \sim_n y) \iff (n \mid (x - y))$.

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n = \mathbb{Z}_n$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n \times C_n \rightarrow C_n : +$ המוגדרת $[x]_{\sim_n} + [y]_{\sim_n} = [x + y]_{\sim_n}$.

חבורת שאריות החלוקה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(C_n, +)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $|C_n| = n$.

חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית: חבורה $(G, *)$ עבורה לכל $g, h \in G$ מתקיים $g * h = h * g$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ אזי (S_n, \circ) אינה אבלית.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$ אינה אבלית.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $(C_n, +)$ אבלית.

חבורה סופית: חבורה $(G, *)$ עבורה $|G| \in \mathbb{N}$.

חבורה אינסופית: חבורה $(G, *)$ עבורה $|G| \geq \aleph_0$.

סדר של חבורה: תהא $(G, *)$ חבורה סופית אזי $\text{ord}(G) = |G|$.

סדר של חבורה: תהא G חבורה אינסופית אזי $\text{ord}(G) = \infty$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה אזי $\text{ord}(G) = o(G)$.

תת־חבורה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $H \subseteq G$ אזי $(H, *_|_{H \times H})$ עבודה

- סגירות לכפל: לכל $a, b \in H$ מתקיים $a * b \in H$.
- סגירות להופכי: לכל $a \in H$ מתקיים $a^{-1} \in H$.
- איבר יחידה: יהי e איבר היחידה של G אזי $e \in H$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $H \subseteq G$ עבודה $(H, *_|_{H \times H})$ תת־חבורה אזי $H \leq G$.

למה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $H \in \mathcal{P}(G) \setminus \{\emptyset\}$ אזי $H \leq G \iff (a * b^{-1} \in H \mid a, b \in H)$ מתקיים.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה ותהינה $A, B \subseteq G$ אזי $A * B = \{a * b \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה תהא $H \subseteq G$ ויהי $g \in G$ אזי $g * H = \{g * h \mid h \in H\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(n\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי \mathbb{F} שדה אזי $(SL_n(\mathbb{F}), \cdot) \leq (GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$.

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $R_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(R_n, \cdot) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה אזי $G \leq G$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה אזי $\{e\} \leq G$.

הערה: מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה אזי קיים יחיד $e \in G$ עבורו $a * e = e * a = a$ לכל $a \in G$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי קיים יחיד $b \in G$ עבורו $a * b = e = b * a$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה יהי $a \in G$ ויהי $b \in G$ איבר הופכי ל- a אזי $a^{-1} = b$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ויהיו $a, b \in G$ אזי $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי $(a^{-1})^{-1} = a$.

מסקנה כלל צמצום משמאל: תהא $(G, *)$ חבורה ויהי $a, b, c \in G$ עבורם $a * b = a * c$ אזי $b = c$.

מסקנה כלל צמצום מימין: תהא $(G, *)$ חבורה ויהי $a, b, c \in G$ עבורם $b * a = c * a$ אזי $b = c$.

סימון: תהא $(G, *)$ חבורה ויהי $g \in G$ אזי $g^0 = e$.

הגדרה: תהא $(G, *)$ חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ אזי $g^n = g * g^{n-1}$.

סימון: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = (g^n)^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = (g^{-1})^n$.

חבורת המכפלה: תהיינה $(H, \otimes), (G, *)$, חבורות נגדיר $(g, h) \cdot (g', h') = (g * g', h \otimes h')$ לכל $g, g' \in G$ ולכל $h, h' \in H$ אזי $(G \times H, \cdot)$.

טענה: תהיינה $(H, \otimes), (G, *)$, חבורות אזי חבורת המכפלה הינה חבורה.

טענה: תהיינה $(H, \otimes), (G, *)$, חבורות אזי $(H, \otimes) \leq (G \times H, \cdot) \iff (H, \otimes) \leq (H, \otimes)$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהיינה $H, K \leq G$ אזי $(HK = KH) \iff (H * K \leq G)$.

טענה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהיינה $H, K \leq G$ אזי $(H \cap K \in \{H, K\}) \iff (H \cup K \leq G)$.

הגדרה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y) = \{\pi \in S(X) \mid \forall y \in Y. \pi(y) = y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\text{Stab}(Y) \leq S(X)$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $\{H_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(G)$ באשר $H_i \leq G$ לכל $i \in I$ אזי $\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$.

הגדרה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\}$.

החבורה שנוצרת על ידי תת-קבוצה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H$.

למה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle \leq G$.

טענה מינימליות החבורה הנוצרת: תהא G חבורה תהא $X \subseteq G$ ותהא $H \leq G$ עבורה $X \subseteq H$ אזי $\langle X \rangle \subseteq H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \left\{ \prod_{i=1}^k x_i^{s_i} \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (x \in X^k) \wedge (s \in \{\pm 1\}^k) \right\}$.

קבוצת יוצרים של חבורה: תהא G חבורה אזי $X \subseteq G$ עבורה $\langle X \rangle = G$.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

חבורה ציקלית: חבורה G עבורה קיים $g \in G$ המקיים $\langle g \rangle = G$.

למה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\langle g \rangle = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{n+m} = g^n * g^m$.

טענה: תהא G חבורה יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$.

למה: תהא G חבורה אזי $\langle G \rangle \text{ ציקלית} \iff (G = \{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\})$ עבורו $g \in G$ (קיים).

מסקנה: תהא G חבורה ציקלית אזי G אבלית.

סדר של איבר: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) = \text{ord}(\langle g \rangle)$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) = \min \{n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n = e\}$.

הערה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g)$ לא קיים אזי $\text{ord}(g) = \infty$.

טענה: תהא G חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ באשר $\text{ord}(g) < \infty$ אזי $(\text{ord}(g) \mid n) \iff (g^n = e)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $i \in \mathbb{Z}_n$ אזי $\langle i \rangle = \mathbb{Z}_n \iff (i, n) = 1$ (זרים).

טענה: תהא G חבורה ציקלית ותהא $H \leq G$ אזי H ציקלית.

טענה: $(\mathbb{Q}, +)$ אינה נ"ס.

קוסט ימני: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $H * g$.

קוסט שמאלי: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $g * H$.

נציג של קוסט ימני: תהא G חבורה ויהי Hg קוסט ימני אזי g .

נציג של קוסט שמאלי: תהא G חבורה ויהי gH קוסט שמאלי אזי g .

מסקנה: תהא G חבורה אבלית תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $Hg = gH$.

מסקנה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $(gH)^{-1} = Hg^{-1}$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $(gH = H) \iff (g \in H)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי $(Hg = H) \iff (g \in H)$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי ${}^G/H = \{gH \mid g \in G\}$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי ${}_H \backslash G = \{Hg \mid g \in G\}$.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי ${}^G/H$ חלוקה של G .

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ויהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי $(g_1H = g_2H) \iff (g_2^{-1}g_1 \in H)$.

הקוסט הטריבואלי: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי eH .

אינדקס של תת-חבורה בחבורה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $[G : H] = |{}^G/H|$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $[G : H] = |{}_H \backslash G|$.

טענה: תהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי $\text{ord}(G) = \text{ord}(H) \cdot [G : H]$.

משפט לגראנז': תהא G חבורה סופית ותהא $H \leq G$ אזי $\text{ord}(H) \mid \text{ord}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G)$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ותהא $K \leq H$ אזי $[G : K] = [G : H] \cdot [H : K]$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי לכל $g \in G \setminus \{e\}$ מתקיים $G = \langle g \rangle$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית באשר $\text{ord}(G) = p$ אזי G ציקלית.

מסקנה משפט פרמה הקטן: יהי $p \in \mathbb{P}$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ באשר $\text{gcd}(n, p) = 1$ אזי $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

למה: תהא G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ חבורות סופיות אזי $|HK| = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}$.

טענה: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p > q$ ותהא G חבורה באשר $|G| = pq$ אזי לכל $H, K \leq G$ באשר $\text{ord}(H) = p$ וכן $\text{ord}(K) = p$ מתקיים $K = H$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ אזי $(S_n / \text{Stab}(1)) \cap (\text{Stab}(1) \backslash S_n) = \{\text{Stab}(1)\}$.

קוסט כפול: תהא G חבורה תהינה $H, K \leq G$ ויהי $g \in G$ אזי HgK .

טענה: תהא G חבורה ותהינה $H, K \leq G$ אזי $\{HgK \mid g \in G\}$ חלוקה של G .

הומומורפיזם: תהינה G, H חבורות אזי $\varphi : G \rightarrow H$ המקיימת

• שימור איבר יחידה: $\varphi(e_G) = e_H$.

• שימור כפל: לכל $a, b \in G$ מתקיים $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

• שימור הופכי: לכל $g \in G$ מתקיים $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$.

טענה: תהינה G, H חבורות ותהא $\varphi : G \rightarrow H$ אזי $(\varphi \text{ הומומורפיזם}) \iff (a, b \in G \text{ מתקיים } \varphi(a \cdot b^{-1}) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)^{-1})$.

גרעין של הומומורפיזם: תהינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.

למה: תהינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי

• $\text{Im}(\varphi) \leq H$.

• $\ker(\varphi) \leq G$.

• $(\ker(\varphi) = \{e_G\}) \iff (\varphi \text{ חח"ע})$.

טענה: תהינה G, H, K חבורות יהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם ויהי $\psi : H \rightarrow K$ הומומורפיזם אזי $\psi \circ \varphi$ הומומורפיזם.

טענה: תהינה G, H חבורות יהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(\varphi(g)) \mid \text{ord}(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי Id הינו הומומורפיזם.

טענה ההומומורפיזם הטריבואלי: תהא G חבורה אזי $\varphi : G \rightarrow \{e\}$ המוגדרת $\varphi(g) = e$ לכל $g \in G$ הינה הומומורפיזם.

טענה הומומורפיזם ההכלה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $\text{Id} : H \rightarrow G$ הינו הומומורפיזם.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי V מ"מ מעל \mathbb{F} אזי $\det : \text{GL}(V) \rightarrow \mathbb{F}^*$ הינו הומומורפיזם.

מטריצת תמורה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(\rho(\sigma))_{i,j} = \begin{cases} 1 & j=\sigma(i) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ לכל $i, j \in [n]$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ תהא $\sigma \in S_n$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n$ אזי $\rho(\sigma) \cdot v = \begin{pmatrix} v_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ v_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\rho : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\sigma \in S_n$ אזי $\det(\rho(\sigma)) \in \{\pm 1\}$.

סימן של תמורה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\text{sign} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ המוגדרת $\text{sign} = \det \circ \rho$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי sign הינה הומומורפיזם.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\sigma \in S_n$ אזי $\text{sign}(\sigma) = \frac{\prod_{i < j} (\sigma(i) - \sigma(j))}{\prod_{i < j} (i - j)}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ ותהא $\sigma \in S_n$ אזי $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{|\{(i,j) \in [n]^2 \mid (i < j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))\}|}$.

חבורת התמורות הזוגיות: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_n = \ker(\text{sign})$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_n \leq S_n$.

איזומורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי הומומורפיזם הפיך $\varphi : G \rightarrow H$.

סימון: תהיינה G, H חבורות איזומורפיות אזי $G \cong H$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ איזומורפיזם אזי φ^{-1} איזומורפיזם.

למה: תהיינה G, H, K חבורות יהי $\varphi : G \rightarrow H$ איזומורפיזם ויהי $\psi : H \rightarrow K$ איזומורפיזם אזי $\psi \circ \varphi$ איזומורפיזם.

טענה: תהא \mathcal{A} קבוצה של חבורות אזי \cong יחס שקילות על \mathcal{A} .

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $C_n \cong R_n$.

טענה: תהיינה G, H חבורות תהא $S \subseteq G$ באשר $\langle S \rangle = G$ ויהי $\varphi, \psi : G \rightarrow H$ הומומורפיזמים באשר $\varphi|_S = \psi|_S$ אזי $\varphi = \psi$.

מונומורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי הומומורפיזם חח"ע $\varphi : G \rightarrow H$.

אפימורפיזם: תהיינה G, H חבורות אזי הומומורפיזם על $\varphi : G \rightarrow H$.

אוטומורפיזם: תהא G חבורה אזי איזומורפיזם $\varphi : G \rightarrow G$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\text{Aut}(G) = \{\varphi : G \rightarrow G \mid \varphi \text{ אוטומורפיזם}\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $(\text{Aut}(G), \circ)$ חבורה.

חבורת קליין: $K = C_2 \times C_2$.

טענה: חבורת קליין הינה אבלית.

טענה: חבורת קליין אינה ציקלית.

טענה: חבורת קליין אינה איזומורפית ל- C_4 .

פונקציית הצמדה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $c_g : G \rightarrow G$ המוגדרת $c_g(x) = gxg^{-1}$ לכל $x \in G$.

טענה: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי c_g אוטומורפיזם.

אוטומורפיזם פנימי: תהא G חבורה אזי אוטומורפיזם $\varphi : G \rightarrow G$ עבורו קיים $g \in G$ המקיים $\varphi = c_g$.

סימון: תהא G חבורה אזי $\text{Inn}(G) = \{c_g \mid g \in G\}$.

תת־חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $H \leq G$ עברה לכל $g \in G$ מתקיים $c_g(H) = H$.

סימון: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ נורמלית אזי $H \trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ התב"ש

• $H \trianglelefteq G$

• לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}Hg = H$

• לכל $g \in G$ מתקיים $gHg^{-1} = H$

• לכל $g \in G$ מתקיים $gH = Hg$

• לכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1}Hg \subseteq H$

• לכל $g \in G$ מתקיים $H \subseteq g^{-1}Hg$

• $G/H = H \backslash G$

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ באשר $[G : H] = 2$ אזי $H \trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\text{Inn}(G) \trianglelefteq \text{Aut}(G)$.

תת־חבורה אופיינית: תהא G חבורה אזי $K \leq G$ עברה לכל $\varphi \in \text{Aut}(G)$ מתקיים $\varphi(K) = K$.

מסקנה: תהא G חבורה ותהא $K \leq G$ אופיינית אזי $K \trianglelefteq G$.

טענה: תהא G חבורה תהא $H \trianglelefteq G$ ותהא $K \leq H$ אופיינית ב- H אזי $K \trianglelefteq G$.

מרכז של חבורה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G. gh = hg\}$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) \trianglelefteq G$.

חבורת הייזנברג: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F} \right\}$.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ חבורה.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה סופי אזי $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathbb{F})) \cong (\mathbb{F}, +)$.

למה: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $A_n \trianglelefteq S_n$.

חבורה פשוטה: חבורה G עבורה לכל $H \trianglelefteq G$ מתקיים $H \in \{\{e\}, G\}$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי C_p פשוטה.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ פשוטה.

הגדרה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ נגדיר $* : G/N \times G/N \rightarrow G/N$ כך $(gN) * (hN) = (g * h)N$.

חבורת המנה: תהא $(G, *)$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $(G/N, *)$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי חבורת המנה הינה חבורה.

העתקת המנה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $q : G \rightarrow G/N$ המוגדרת $q(g) = gN$.

טענה: תהא G חבורה תהא $N \trianglelefteq G$ ותהא q העתקת המנה אזי

• q הינה הומומורפיזם.

• $\ker(q) = N$.

• q על.

משפט: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $(H \trianglelefteq G) \iff (\text{קיים אוטומורפיזם } \varphi : G \rightarrow G \text{ עבורו } H = \ker(\varphi))$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נת'ר: תהיינה G, H חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי $G/\ker(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$.

טענה: תהא G חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

• $G \cong \mathbb{Z}$.

• קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $G \cong \mathbb{Z}_n$.

טענה: תהא G חבורה אזי $|\mathbb{P}^{G/Z(G)}| \notin \mathbb{P}$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $H, K \trianglelefteq G$ באשר $HK = G$ וכן $H \cap K = \{e\}$ אזי $G \cong H \times K$.

מסקנה: יהיו $n, m \in \mathbb{N}$ זרים אזי $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

טענה: יהי $p \in \mathbb{P}$ תהא G חבורה סופית תהא $H \leq G$ מאינדקס p ותהא $N \trianglelefteq G$ מאינדקס p באשר $H \neq N$ אזי $G = HN$ וכן $p^2 | \text{ord}(G)$.

חבורת המכפלה החצי ישרה: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ הומומורפיזם נגדיר

$(h, k) \cdot (h', k') = (h \cdot \varphi(k)(h'), k \cdot k')$ לכל $h, h' \in H$ ולכל $k, k' \in K$ אזי $(H \times K, \cdot)$.

סימון: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה $H \rtimes_{\varphi} K$.

טענה: תהיינה H, K חבורות ויהי $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ אזי $H \rtimes_{\varphi} K$ הינה חבורה.

טענה: תהיינה H, K חבורות נגדיר $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = \text{Id}_H$ לכל $k \in K$ אזי $H \rtimes_{\varphi} K \cong H \times K$.

סימון: יהי \mathbb{F} שדה אזי $\text{Aff}(\mathbb{F}) = \{f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F} \mid \exists a \in \mathbb{F}^{\times} (\exists b \in \mathbb{F} (\forall x \in \mathbb{F} (f(x) = ax + b)))\}$.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה אזי $(\text{Aff}(\mathbb{F}), \circ)$ חבורה.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה נגדיר $\varphi : \mathbb{F}^{\times} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{F})$ כך $\varphi(a)(b) = ab$ לכל $a \in \mathbb{F}^{\times}$ ולכל $b \in \mathbb{F}$ אזי $\text{Aff}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F} \rtimes_{\varphi} \mathbb{F}^{\times}$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל אזי $\text{Iso}(P) = \{\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \varphi \wedge (\varphi(P) = P)\}$ (איזומטריה).

החבורה הדיהדרלית: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל בעל n קודקודים אזי $D_n = \text{Iso}(P)$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי (D_n, \circ) חבורה.

סימון: תהא X קבוצה ויהיו $\varphi_1 \dots \varphi_n$ פרידיקטים על X אזי $\langle X \mid \varphi_1 \dots \varphi_n \rangle = \{x \in \langle X \rangle \mid \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(x)\}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $D_n \cong \langle r, s \mid s^2 = e, r^n = e, srs = r^{-1} \rangle$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי

• אם $n \in \mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\{D_n, \langle sr, r^2 \rangle, \langle s, r^2 \rangle\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n .

• אם $n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\{D_n\} \cup \{H \leq \langle r \rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של D_n .

טענה: $\mathcal{H}(\mathbb{F}_2) \cong D_4$.

טענה: תהא G חבורה יהי $K \trianglelefteq G$ יהי $H \trianglelefteq G$ באשר $HK = G$ וכן $H \cap K = \{e\}$ ונגדיר $\varphi : K \rightarrow \text{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = c_k$ לכל

$k \in K$ אזי $G \cong H \rtimes_{\varphi} K$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ונגדיר $\varphi : C_2 \rightarrow \text{Aut}(C_n)$ כך $\varphi(k) = c_k$ לכל $k \in K$ אזי $D_n \cong C_n \rtimes_{\varphi} C_2$.

טענה: $K \trianglelefteq A_4$.

חבורה פתירה: חבורה G עבודה קיים $n \in \mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0 \dots G_n \leq G$ המקיימות

$$\bullet G_n = G$$

$$\bullet G_0 = \{e\}$$

$$\bullet G_{i-1} \trianglelefteq G_i \text{ לכל } i \in [n]$$

$$\bullet G_i/G_{i-1} \text{ אבלית לכל } i \in [n]$$

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי G פתירה.

טענה: תהא G חבורה פשוטה באשר G אינה אבלית אזי G אינה פתירה.

משפט: יהי $n \in [4]$ אזי S_n פתירה.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ אזי A_n פשוטה ואינה אבלית.

משפט האיזומורפיזם השני: תהא G חבורה תהא $H \leq G$ ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $H/(H \cap N) \cong (HN)/N$.

טענה: תהא G חבורה ותהייה $N, K \trianglelefteq G$ באשר $K \leq N$ אזי $N/K \trianglelefteq G/N$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: תהא G חבורה ותהייה $N, K \trianglelefteq G$ באשר $K \leq N$ אזי $G/N \cong (G/K)/(N/K)$.

משפט ההתאמה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי קיימת $\Phi : \{H \leq G \mid N \leq H\} \rightarrow \{H \mid H \leq G/N\}$ חח"ע ועל המקיימת

$$\bullet \text{ לכל } K \trianglelefteq G \text{ המקיימת } N \leq K \text{ מתקיים } \Phi(K) \trianglelefteq G/N$$

$$\bullet \text{ משמרת מנות: לכל } K \trianglelefteq G \text{ המקיימת } N \leq K \text{ מתקיים } G/K \cong \Phi(G)/\Phi(K)$$

טענה: תהא G חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי $(N \text{ נורמלית מקסימלית}) \iff (G/N \text{ פשוטה})$.

פעולה שמאלית של חבורה על קבוצה: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי פונקציה $f : G \times X \rightarrow X$ המקיימת

$$\bullet \text{ לכל } x \in X \text{ מתקיים } f(e, x) = x$$

$$\bullet \text{ לכל } g, h \in G \text{ ולכל } x \in X \text{ מתקיים } f(g \cdot h, x) = f(g, f(h, x))$$

הערה: מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.

סימון: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $f : G \times X \rightarrow X$ פעולה על G אזי $f(g, x) = g.x$.

סימון: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $\{f : G \times X \rightarrow X \mid f \text{ פעולה}\} \curvearrowright G$.

הפעולה השמאלית: תהא G חבורה נגדיר $f \in G \curvearrowright G$ כך $f(g, x) = gx$ אזי f .

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.

הפעולה הימנית: תהא G חבורה נגדיר $f \in G \curvearrowright G$ כך $f(g, x) = xg^{-1}$ אזי f .

טענה: תהא G חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.

הערה: מכאן והלאה נאמר כי G פועלת על X ונסמן $g.x$ את הפעולה.

מסלולים: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $o(x) = \{g.x \mid g \in G\}$.

פעולה טרנזיטיבית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f \in G \curvearrowright X$ עבודה קיים $x \in X$ המקיים $o(x) = X$.

מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$.

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $\text{Stab}_G(x) \leq G$.

פעולה חופשית: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $f \in G \curvearrowright X$ עבודה לכל $x \in X$ מתקיים $\text{Stab}_G(x) = \{e\}$.

למה: תהא G חבורה תהא X קבוצה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ ויהי $g \in G$ אזי $\alpha(g) \in S(X)$.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי $\varphi_{\alpha} : G \rightarrow S(X)$ המוגדרת $\varphi_{\alpha}(g)(x) = \alpha(g, x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי φ_{α} הומומורפיזם.

הגדרה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \rightarrow S(X)$ הומומורפיזם אזי $\alpha_{\varphi} : G \times X \rightarrow X$ המוגדרת $\alpha_{\varphi}(g, x) = \varphi(g)(x)$.

טענה: תהא G חבורה תהא X קבוצה ויהי $\varphi : G \rightarrow S(X)$ הומומורפיזם אזי α_{φ} פעולה.

למה מסלול מייצב: תהא X קבוצה תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $|o(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$.

למה של ברנסייד: תהא X קבוצה ותהא G חבורה סופית הפועלת על X אזי $|\{o(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\{x \in X \mid g.x = x\}|$.

הפעולה על הקוסטים השמאליים: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי $\alpha \in G \curvearrowright G/H$ המוגדרת $\alpha(g, g'H) = gg'H$.

טענה: תהא G חבורה ותהא $H \leq G$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.

פעולות אקווריאנטיות/שקולות: תהייה X, Y קבוצות ותהא G חבורה אזי $(\alpha, \beta) \in (G \curvearrowright X) \times (G \curvearrowright Y)$ עבור קיימת

$$F : X \rightarrow Y \text{ חח"ע ועל המקיימת } F(\alpha(g, x)) = \beta(g, F(x)) \text{ לכל } g \in G \text{ ולכל } x \in X$$

טענה: תהא X קבוצה תהא G חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית ויהי $x \in X$ עבורו $o(x) = X$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים של $G/\text{Stab}_G(x)$ אקווריאנטית ל- α .

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי קיימת $H \leq G$ עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים אקווריאנטית ל- α .

טענה: תהא X קבוצה ותהא G חבורה הפועלת על X אזי $\{o(x) \mid x \in X\}$ חלוקה של X .

מסקנה: תהא X קבוצה תהא G חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי לכל $x \in X$ מתקיים $o(x) = X$.

סימון: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל יהיו $\varphi_1 \dots \varphi_n$ איזומטריות של \mathbb{R}^3 ותהא $p \in \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ אזי $|\text{Poly}(p)| = |\{\varphi_i(P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i(P \times \{0\})\}|$.

גוף אפלטוני: קבוצה קמורה לא זניחה $K \subseteq \mathbb{R}^3$ עבורה קיים מצולע משוכלל $P \subseteq \mathbb{R}^2$ וקיימות איזומטריות $\varphi_1 \dots \varphi_n$ של \mathbb{R}^3 עבורן

- פאות איזומטריות: $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$
- קודקוד משותף זהה כמות: לכל קודקודים $v_1, v_2 \in K$ מתקיים $\text{Poly}(v_1) = \text{Poly}(v_2)$.

מספר פאות של גוף אפלטוני: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $n \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו קיימות איזומטריות $\varphi_1 \dots \varphi_n$ של \mathbb{R}^3 עבורן $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ מצולע משוכלל.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\{\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \wedge (\varphi(K) = K)\}$ איזומטריה $\text{Iso}(P)$.

סימון: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\{\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \varphi \wedge (\varphi(K) = K)\}$ איזומטריה משמרת אוריינטציה $\text{Iso}_+(P)$.

הגדרה סימון שלפלי: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני בעל $n \in \mathbb{N}$ פאות ויהי $v \in K$ קודקוד אזי $\{n, \text{Poly}(k)\}$ הערה: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.

דודקהדרון: גוף אפלטוני $K \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל סימון שלפלי $\{5, 3\}$.

טענה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{Iso}_+(D) \cong A_5$.

מסקנה: יהי D דודקהדרון אזי $\text{ord}(\text{Iso}_+(D)) = 60$.

משפט קיילי: תהא G חבורה אזי קיימת קבוצה X וקיימת $H \leq S(X)$ עבורה $G \cong H$.

מסקנה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = \aleph_0$ אזי קיימת $H \leq S(\mathbb{N})$ עבורה $G \cong H$.

משפט קושי: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p \mid \text{ord}(G)$ אזי קיים $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g) = p$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p \mid \text{ord}(G)$ אזי קיימת $H \leq G$ ציקלית עבורה $\text{ord}(H) = p$.

טענה: תהא G חבורה באשר $\text{ord}(G) = 6$ אזי $G \cong \mathbb{Z}_6$ או $G \cong S_3$.

פעולת ההצמדה: תהא G חבורה אזי $\alpha \in G \curvearrowright G$ המוגדרת $\alpha(g, h) = c_g(h)$.

סימון: תהא G חבורה ויהיו $h, g \in G$ אזי $h^g = g^{-1}hg$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו $g, h, k \in G$ אזי $h^{g \cdot k} = (h^g)^k$.

מחלקת הצמידות: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = \{ghg^{-1} \mid g \in G\}$.

טענה: תהא G חבורה מצוידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = o(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי $\{[h] \mid h \in G\}$ חלוקה של G .

הממרכז של איבר: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$.

טענה: תהא G חבורה מצוידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \text{Stab}_G(h)$.

מסקנה: תהא G חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) \leq G$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)$ אופיינית.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $|[g]| = [G : C_G(g)]$.

טענה: תהא G חבורה ויהיו g, h, k באשר $k = ghg^{-1}$ אזי $|C_G(k)| = |C_G(h)|$.

משפט משוואת מחלקות הצמידות: תהא G חבורה סופית ותהא $C \subseteq G$ קבוצת נציגים של $\{[h] \mid h \in G\}$ אזי $\sum_{g \in C} \frac{1}{|C_G(g)|} = 1$.

טענה: תהא G חבורה סופית אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcup_{g \in \{h \in G \mid |[h]|=1\}} [g]$.

חבורת- p : יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי חבורה G עבורה קיים $n \in \mathbb{N}$ המקיים $|G| = p^n$.

משפט: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורת- p אזי $\mathcal{Z}(G) \neq \{e\}$.

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא G חבורה מסדר p^2 אזי G אבלית.