

פעולה בינארית: פונקציה $: A \times A \rightarrow A$ ונסמן $a * b := *(a, b)$.

אסוציאטיביות/קיבוציות: $\forall a, b, c \in A. a * (b * c) = (a * b) * c$.

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: $\forall a, b \in A. a * b = b * a$.

איבר יחידה: $e \in G$ המקיים $e * g = g * e = g$.

איבר הופכי/נגדי: יהי $g \in G$ אזי $h \in G$ המקיים $g * h = h * g = e_G$.

מונואיד: תהא קבוצה G ופעולה בינארית $*$ אזי זוג סדור $\langle G, * \rangle$ המקיים $(*)$ אסוציאטיבית) \wedge (קיים איבר יחידה).

חבורה: $\langle G, * \rangle$ המקיים (מונואיד) \wedge (קיים איבר הופכי).

סימון: e_G איבר יחידה בחבורה כללית, 1_G אם הפעולה מסומנת ב- $*$, 0_G אם הפעולה מסומנת ב- $+$.

הגדרה: יהי $\langle A, * \rangle$ מונואיד אזי $A^\times = \{a \in A \mid \exists h \in A. a * h = h * a = e_A\}$.

טענה: $\langle A^\times, *_{\upharpoonright_{A^\times \times A^\times}} \rangle$ חבורה.

הגדרה: $(S_A = A \xrightarrow[onto]{1-1} A) \wedge (S_n = S_{[n]})$.

חבורת התמורות: $\langle S_A, \circ \rangle$.

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $x \sim_n y \iff n \mid x - y$ יחס שקילות מעל \mathbb{Z} .

טענה: $(\mathbb{Z}/\sim_n = \{[0]_{\sim_n}, \dots, [n-1]_{\sim_n}\}) \wedge ([x]_{\sim_n} + [y]_{\sim_n} = [x+y]_{\sim_n})$.

חבורת השאריות: $\langle \mathbb{Z}/\sim_n, + \rangle$.

פונקציית אוילר: כמות המספרים הזרים הקטנים מאשר $n \in \mathbb{N}$ הוא $\varphi(n) = n \prod_{p \mid n} (1 - \frac{1}{p})$.

טענה: יהיו $e_1, e_2 \in G$ איברי יחידה אזי $e_1 = e_2$.

טענה: $(\forall a, b, c \in G. a * b = e_G = c * a) \implies (b = c)$.

מסקנה: יהי $a \in G$ וכן $h_1, h_2 \in G$ הופכיים אל a אזי $h_1 = h_2$.

סימון: יהי $a \in G$ אזי ההופכי שלו הינו a^{-1} .

הגדרה: $(a^0 = e_G) \wedge (a^{n+1} = a * a^n) \wedge (a^{-n} = (a^{-1})^n)$.

סדר: $\text{ord}(a) = \min \{n \in \mathbb{N}_+ \mid a^n = e_G\}$.

משפט: $|G| < \aleph_0 \implies \exists a \in G. \text{ord}(a) \leq |G|$.

תת חבורה: תהא $\langle G, * \rangle$ חבורה אזי $H \subseteq G$ המקיימת $\langle H, *_{\upharpoonright_{H \times H}} \rangle$ חבורה.

סימון: תהא G חבורה וכן $H \subseteq G$ תת חבורה אזי $H \leq G$.

בוחן תת חבורה: תהא $H \subseteq G$ תת קבוצה אזי $(H \text{ חבורה}) \iff (H \text{ סגורה לפעולה } *) \wedge (e_G \in H) \wedge (\forall h \in H. h^{-1} \in H)$.

איזומורפיזם בין חבורות: $f : G \xrightarrow[onto]{1-1} H$ המקיימת $f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)$.

חוק הפילוג: $((b+c) * a = b * a + c * a) \wedge (a * (b+c) = a * b + a * c)$.

חוג עם יחידה: $\langle R, +, * \rangle$ המקיים $(R, +)$ חבורה אבלית) \wedge $\langle R, * \rangle$ מונואיד) \wedge (חוק הפילוג).

איזומורפיזם בין חוגים: $f : R \xrightarrow[onto]{1-1} F$ המקיימת $(f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)) \wedge (f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)) \wedge (f(1_R) = 1_F)$.

חוג הפולינומים: יהי $\langle R, +, \cdot \rangle$ חוג חילופי אזי $\langle R[x], +, \cdot \rangle$.

נוסחאות המעלות: $\deg(p + q) \leq \max(\deg(p), \deg(q))$ וגם $\deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$.

הגדרה: $T^{-1} = \{t^{-1} \mid t \in T\}$.

תת החבורה שנוצרת על ידי T : $\langle T \rangle = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^n a_i \mid a_i \in (T \cup T^{-1}) \right\} = \{a_1 * \dots * a_n \mid a_1, \dots, a_n \in T \cup T^{-1}\}$.

משפט: $\langle T \rangle \leq H, \forall H \geq T$, במילים אחרות $\langle T \rangle$ תת החבורה הקטנה ביותר ביחס ההכלה שמכילה את T .

משפט: תהא G חבורה סופית אזי $|\langle g \rangle| = \text{ord}(g)$ $\forall g \in G$.

מנה של חבורה: יהיו $H \leq G$ אזי $g_1 * g_2^{-1} \in H \iff g_1 \sim_H g_2$.

סימון: יהיו $H \leq G$ אזי $G/H = G/\sim_H$.

משפט: תהא G חבורה אזי $(\forall g \in G. \text{ord}(g) \mid |G|) \wedge (|G| = |G/H| \cdot |H|)$.

משפט: תהא G חבורה עבורה $|G| \in \mathbb{P}$ אזי G אבלית) \wedge $\langle g \rangle = G, \forall g \neq e_G$.

מחלק אפס: יהי R חוג אזי $\{0\} \in R$ המקיים $a * b = 0_G, \forall a, b \in R \setminus \{0\}$.

תחום שלמות: $\langle R, +, * \rangle$ המקיים $(\langle R, +, * \rangle \text{ חוג אבלית}) \wedge$ (לא קיימים מחלקי אפס).

חוק צמצום: יהי R תחום שלמות אזי $(c = b) \implies (a * c = a * b), \forall a \neq 0_R, \forall b, c \in R$.

שדה: $\langle \mathbb{F}, +, * \rangle$ המקיים $(\langle \mathbb{F}, +, * \rangle \text{ חוג}) \wedge (\langle \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}} \}, * \rangle \text{ חבורה אבלית}) \wedge (0_{\mathbb{F}} \neq 1_{\mathbb{F}})$.

טענה: $(\mathbb{F} \text{ שדה}) \iff (\mathbb{F} \text{ תחום שלמות})$.

משפט: $(R \text{ תחום שלמות סופי}) \iff (R \text{ שדה})$.

משפט: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $(n \in \mathbb{P}) \iff (\mathbb{Z}_n, +, *) \text{ שדה}$.

מציין של שדה: $\text{char}(\mathbb{F}) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^n 1_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}\}$ ואחרת $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$.

טענה: $\text{char}(\mathbb{F}) \in \mathbb{P} \cup \{0\}$.

הבינום של ניוטון: יהי \mathbb{F} שדה אזי $\forall a, b \in \mathbb{F}. (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

טענה: יהי \mathbb{F} שדה עבורו $\text{char}(\mathbb{F}) = p \neq 0$ אזי $\forall a, b \in \mathbb{F}. \forall k \notin \{0, p\}. \left(\binom{p}{k} \cdot a = 0\right) \wedge ((a+b)^p = a^p + b^p)$.

המשפט הקטן של פרמה: $\forall p \in \mathbb{P}. \forall a \in \mathbb{Z}_p. a^p \equiv a \pmod{p}$.

קוסט/מחלקה שמאלית: יהיו $H \leq G$ חבורות ויהי $g \in G$ אזי $g * H = \{g * h \mid h \in H\}$.

קוסט/מחלקה ימנית: יהיו $H \leq G$ חבורות ויהי $g \in G$ אזי $H * g = \{h * g \mid h \in H\}$.

סימון: $H \backslash G = \{H * g \mid g \in G\}, G/H = \{g * H \mid g \in G\}$.

טענה: $(G/H) \wedge (H \backslash G)$ חלוקות של G .

טענה: $|G/H| = |H \backslash G|$.

אינדקס: יהיו $H \leq G$ חבורות אזי $[G : H] = |G/H|$.

משפט לגראנז': יהיו $H \leq G$ חבורות סופיות אזי $(|H| \mid |G|) \wedge ([G : H] = \frac{|G|}{|H|})$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $N \leq G$ המקיימת $\forall g \in G. gN = Ng$.

סימון: תהא G חבורה וכן $N \leq G$ תת חבורה נורמלית אזי $N \trianglelefteq G$.

כפל קבוצות: תהייה $A, B \leq G$ חבורות אזי $A * B = \{a * b \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

משפט: יהיו $g_1, g_2 \in G$ אזי $(g_1 H) * (g_2 H) = (g_1 * g_2) H \iff (H \text{ נורמלית})$.

טענה: $(G/H \text{ חבורה עם כפל קבוצות}) \iff (H \text{ נורמלית})$.

משוואה: יהיו f, g פונקציות עבורן $\text{dom}(g) = \text{dom}(f)$ אזי הטענה $f(x) = g(x)$.

הגדרה: תהא X קבוצה עבורה $\text{dom}(g) = \text{dom}(f) = X^n$ אזי המשוואה מעל X עם n משתנים.

קבוצת פתרונות: תהא $f \in X^B$ ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{sols}_A(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$.

מערכת משוואות: יהיו n משוואות $f_i(x) = g_i(x)$ אזי $E = \langle f_1(x) = g_1(x), \dots, f_n(x) = g_n(x) \rangle$.

סימון: תהא מערכת משוואות E אזי E_i תהיה משוואה מספר i .

קבוצת פתרונות של מערכת: $\text{sols}_A(E) = \bigcap_{i=1}^n \text{sols}_A(E_i)$.

שקילות: E, E' מערכות/משוואות עבורן $\text{sols}_A(E) = \text{sols}_A(E')$.

טענה: תהא h חח"ע אזי $\text{sols}((h \circ f)(x) = (h \circ g)(x)) = \text{sols}(f(x) = g(x))$.

קבוצה אלגברית: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה קיימת מערכת משוואות E מעל \mathbb{R} עם n משתנים המקיימת $\text{sols}(E) = A$.

פונקציה ליניארית: $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}$ המקיימת $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ $\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$.

משוואה ליניארית: תהא f פונקציה ליניארית אזי $f(x_1, \dots, x_n) = b$.

מערכת משוואות ליניארית: מערכת משוואות שכל המשוואות בה ליניאריות.

סימון: כדי לייצג מערכת משוואות ליניארית נכתוב

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{cases}$$

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל \mathbb{R}^2 היא $\mathbb{R}^2 \vee (\emptyset) \vee (\text{קו ישר}) \vee (\mathbb{R}^2)$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל \mathbb{R}^3 היא $\mathbb{R}^3 \vee (\emptyset) \vee (\text{קו ישר}) \vee (\text{מישור}) \vee (\mathbb{R}^3)$.

$$\cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \quad \text{סימון:}$$

$$\text{חיבור } n\text{-יות:} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 * \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n * \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\text{כפל } n\text{-יה בסקלר:} \quad \text{יהי } \lambda \in \mathbb{F} \text{ אזי } \lambda * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda * \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda * \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\text{נ"ת ה-}0: \quad \bar{0} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{F}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{F}} \end{pmatrix}$$

$$\text{טענה:} \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{F}^n. \forall t \in \mathbb{F}. (t * \bar{v} = \bar{0}) \iff (t = 0_{\mathbb{F}}) \vee (\bar{v} = \bar{0})$$

$$\text{משוואה לינארית הומוגנית:} \quad \text{משוואה לינארית } f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\text{טענה:} \quad \text{תהא מערכת משוואות לינאריות הומוגניות } E \text{ אזי } \bar{0} \in \text{sols}(E)$$

$$\text{משפט:} \quad \text{תהא } E \text{ מערכת משוואות לינאריות הומוגניות אזי } \text{sols}(E) \text{ סגורה ביחס לחיבור וקטורים וכפילה בסקלר.}$$

$$\text{סימון:} \quad \text{תהא } E \text{ מערכת משוואות לינאריות אזי } E_0 \text{ מערכת המשוואות הלינאריות ההומוגניות עם אותן פונקציות לינאריות.}$$

$$\text{משפט:} \quad \forall p \in \text{sols}(E). \text{sols}(E) = \text{sols}(E_0) + p$$

מטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\text{סימון:} \quad (A)_{i,j} = a_{i,j}$$

$$\text{סדר מטריצה:} \quad \text{מטריצה } A \text{ תקרא מסדר } m \times n \text{ אם יש לה } m \text{ שורות ו-} n \text{ עמודות.}$$

$$\text{הגדרה:} \quad \text{קבוצת כל המטריצות מסדר } m \times n \text{ מעל } R \text{ תסומן } M_{m \times n}(R)$$

$$\text{סימון:} \quad C_j(A) \text{ הינה העמודה ה-}j\text{ית, } R_i(A) \text{ הינה השורה ה-}i\text{ית.}$$

$$\text{מטריצת ה-}0: \quad \text{תהא מטריצה } A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}), \text{ מתקיים } (A)_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}. \forall i \in [m]. \forall j \in [n].$$

$$\text{מטריצה ריבועית:} \quad A \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$$

$$\text{מטריצת מקדמים:} \quad \text{עוד סימון אפשרי לייצוג מערכת לינארית של משוואות הינה}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

$$\text{מטריצת המקדמים המצומצמת:}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\text{עמודת המקדמים החופשיים:}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

איבר פותח בשורה: $\min \left(j \in [n] \mid (A)_{i,j} \neq 0 \right)$.
מטריצה מדורגת: מטריצה המקיימת כי (כל שורות האפסים נמצאות למטה) \wedge (בכל שורה שיש בה איבר פותח האיבר הפותח הינו מימין ממש לאיבר הפותח בשורה מעליו).
מטריצה מדורגת קנונית: מטריצה מדורגת המקיימת כי (כל האיברים הפותחים הם 1) \wedge (בכל עמודה של איבר פותח שאר אברי העמודה הם 0).

שורת סתירה: שורה מהצורה $(0, \dots, 0 \mid b)$ באשר $b \neq 0$.
אלגוריתם: תהא $A \in M_{m \times (n+1)}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת קנונית

- אם קיימת שורת סתירה, $\text{sols}(A) = \emptyset$.
- אם לא קיימת שורת סתירה, נניח כי בעמודות $I = \{i_1 \dots i_k\}$ לא קיים איבר פותח אזי

$$\text{sols}(A) = \left\{ v \in \mathbb{F}^n \mid \forall i \notin I. v_i = (A)_{i,n+1} - \sum_{j \in I} ((A)_{i,j} v_j) \right\}$$

פעולה אלמנטרית: פונקציה $\varphi : M_{m \times n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $\text{sols}(A) = \text{sols}(\varphi(A))$. $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.
הפעולות האלמנטריות של גאוס: (החלפת שורה) $(\varphi_{R_i \leftrightarrow R_j}(A))$ \wedge (הכפלה בסקלר) $(\varphi_{R_i \rightarrow \lambda R_i}(A))$ \wedge (חיבור שורה) $(\varphi_{R_i \rightarrow R_i + R_j}(A))$.
שקילות שורה (ש"ש): $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ עבורן קיימות פעולות אלמנטריות $\varphi_1 \dots \varphi_n$ המקיימות $(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n)(A) = B$.
משפט גאוס: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.
אלגוריתם גאוס: $O(n^2 m)$

```

row = 1
for (1 ≤ col ≤ n)
    if (∃ min(j) ≥ row. (A)j,col ≠ 0)
        if (j ≠ row)
            Rj ↔ Rrow
            Rrow →  $\frac{1}{(A)_{\text{row,col}}}$  Rrow
        for (1 ≤ k ≤ m ∧ k ≠ row)
            Rk → Rk - (A)k,col Rrow
    row++ = 1

```

מסקנה: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ מדורגת קנונית ללא שורת סתירה בעלת k שורות ללא איבר פותח אזי $|\text{sols}(A)| = |\mathbb{F}|^k$.

הדלתא של קרונקר: $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

מטריצת היחידה: $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$ המקיימת $I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$.

משפט: תהא $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ אזי (למערכת $(A|0)$ יש פתרון יחיד) \iff (הצורה הקנונית של A היא I_n).

משפט: מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו- n נעלמים שקולה למשוואה אחת של $m-n$ יות.

צירוף לינארי: יהיו $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle \in (\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}^n$.

כפל מטריצה ב־ניה: $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}). \forall \vec{v} \in \mathbb{F}^n. A\vec{v} = \sum_{i=1}^n C_i(A) \vec{v}_i$.

משפט: $(A \cdot (\alpha \cdot \underline{v}) = \alpha \cdot (A \cdot \underline{v})) \wedge (A \cdot (\underline{v} + \underline{u}) = A \cdot \underline{v} + A \cdot \underline{u})$ (יש מחלקי אפס).

מטריצת סיבוב: $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

מטריצת ונדרמונד: מטריצה שבא כל עמודה או שורה הינה סדרה הנדסית.

פולינום לגראנז' i -י: $P_i(x) = \left(\prod_{k=1}^{j-1} \left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k} \right) \right) \left(\prod_{k=j+1}^n \left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k} \right) \right)$ מתקיים $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

סימון: יהי $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \in (\mathbb{F}^m)^n$ נגדיר $M_{m \times n}(\mathbb{F}) \ni \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

הגדרה: נגדיר $e_j \in \mathbb{F}^n$ כך $(e_j)_i = \delta_{j,i}$.

מטריצת תמורה: יהי $\sigma \in S_n$ נגדיר $P(\sigma) = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \dots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$ מתקיים $(P(\sigma) \cdot v)_i = v_{\sigma^{-1}(i)}$

משפט אי הפרישה: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ וכן B הצורה הקנונית אזי $(\exists i. R_i(B) = 0) \iff (\exists b \in \mathbb{F}^m. \text{sols}(A|b) = \emptyset)$.

מסקנה: $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}). (n < m) \implies (\exists b \in \mathbb{F}^m. \text{sols}(A|b) = \emptyset)$

סימון: $M_{n \times n}(\mathbb{F}) = M_n(\mathbb{F})$

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{F}). (\forall b \in \mathbb{F}^n. \text{sols}(A|b) \neq \emptyset) \implies (\forall b \in \mathbb{F}^n. |\text{sols}(A|b)| = 1)$

הנפרשת/ספאן: תהא $v \in (\mathbb{F}^n)^m$ נגדיר $\text{span}(v) = \{ \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid \alpha \in \mathbb{F}^m \}$

סדרה פורשת: סדרה $v \in (\mathbb{F}^n)^m$ שמקיימת $\text{span}(v) = \mathbb{F}^n$

הגדרה: נגדיר $T: (\mathbb{F}^n)^m \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ כך $T(\alpha) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \alpha$

טענה: $(T_{\vec{v}} \text{ על}) \iff (\vec{v} \text{ פורשת}).$

סדרה בת"ל (בלתי תלויה לינארית): סדרה $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ המקיימת $(\alpha = 0) \iff (\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0) \forall \alpha \in \mathbb{F}^n$.

בסיס: $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ בת"ל ופורשת.

טענה: יהיו $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ ונגדיר $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

• $(\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| > 0) \iff (v \text{ פורשת})$

• $(\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| < 2) \iff (v \text{ בת"ל})$

• $(\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| = 1) \iff (v \text{ בסיס})$

טענה: $(T_{\vec{v}} \text{ חח"ע}) \iff (\vec{v} \text{ בת"ל}).$

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\text{LD}(v) = \{ \alpha \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \}$

הערה: $(v \text{ בת"ל}) \iff (\text{LD}(v) = \{0\})$

הנפרשת/ספאן: תהא $K \subseteq \mathbb{F}^n$ אזי $\text{span}(K) = \{ u \in \mathbb{F}^n \mid \exists m \in \mathbb{N}_+. \exists v \in K^m. \exists \alpha \in \mathbb{F}^m. u = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \} \cup \{0\}$

משפט: $(v \text{ בת"ל}) \iff \text{כל תת סדרה של } v \text{ בת"ל} \wedge (v \text{ פורשת}) \iff \text{כל על סדרה של } v \text{ פורשת}.$

משפט: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ וסדרה $u \in \mathbb{F}^m$ מתקיים $(u \in \text{span}(v)) \iff (u \in \text{span}(v) \wedge \langle u \rangle \cap v \text{ בת"ל})$

טענה: $(u \in \text{span}(v)) \iff (\forall v \in (\mathbb{F}^m)^n. \forall u \in \mathbb{F}^m. (\text{span}(v) = \text{span}(v \wedge \langle u \rangle)) \iff (u \in \text{span}(v)))$

טענה: $(\exists x \in \text{LD}(v). x_i \neq 0) \iff (v_i \in \text{span}(v_{\upharpoonright_{[n] \setminus \{i\}}})) \forall i \in [n]. \forall v \in (\mathbb{F}^m)^n$

משפט: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ התב"ש

• $v \text{ בת"ל}.$

• $\forall i \in [n]. v_i \notin \text{span}(v_{\upharpoonright_{[n] \setminus \{i\}}})$

• $\forall i \in [n]. v_i \notin \text{span}(v_{\upharpoonright_{[i-1]}})$

משפט: מעל \mathbb{F}^n פחות מ- n ניות לא פורשות.

משפט: מעל \mathbb{F}^n יותר מ- n ניות ת"ל.

מסקנה: מעל \mathbb{F}^n לכל בסיס B מתקיים $|B| = n$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$, כל שניים מהשלושה שקולים

• $v \text{ בת"ל}.$

• v פורשת.

• $n = m$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

• לכל b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון.

• עמודות A פורשות.

• קיים b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.

• עמודות A בת"ל.

• לכל b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.

• עמודות A בסיס.

כפל מטריצות: $\forall \langle A, B \rangle \in M_{k \times m}(\mathbb{F}) \times M_{m \times n}(\mathbb{F}). \forall i \in [k]. \forall j \in [n]. (AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^m (A)_{i,t} (B)_{t,j}$

נוסחה: $(BA)_{i,j} = R_i(B) \cdot C_j(A)$

טענה: $R_i(YX) = R_i(Y)X, C_i(YX) = YC_i(X)$

כפל מטריצה בסקלר: $(\alpha A)_{i,j} = \alpha (A)_{i,j}$

מטריצה סקלארית: αI_n

טענה: $A(\alpha B) = \alpha(AB)$

טענה: $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}). (AI_n = A) \wedge (I_m A = A)$

מסקנה: $\langle M_n(\mathbb{F}), \cdot \rangle$ מונואיד.

מטריצות מתחלפות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $AB = BA$

שחלוף: $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}). (A^T)_{i,j} = (A)_{j,i}$

הערה: $R_i(A^T) = C_i(A)$

טענה: $(AB)^T = B^T A^T, (\alpha A)^T = \alpha (A^T), (A^T)^T = A$

מטריצה סימטרית: $A^T = A$

מטריצה אנטי סימטרית: $A^T = -A$

חיבור מטריצות: $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F}). (A+B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j}$

טענה: $\langle M_{m \times n}(\mathbb{F}), + \rangle$ חבורה אבלית וסגורה לכפל בסקלר.

טענה: $(A(B+C) = AB+AC) \wedge ((A+B)^T = A^T+B^T)$

הפיכות: תהא $A_{m \times n}(\mathbb{F})$

• הפיכה משמאל: $\exists B \in M_{n \times m}(\mathbb{F}). BA = I_n$

• הפיכה מימין: $\exists B \in M_{n \times m}(\mathbb{F}). AB = I_m$

• הפיכה: (הפיכה משמאל) \wedge (הפיכה מימין).

טענה: $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}). \forall B, C \in M_{n \times m}(\mathbb{F}). (AB = I_m) \wedge (CA = I_n) \implies B = C$

מסקנה: אם קיימת הופכית היא יחידה.

סימון: ההופכית של A היא A^{-1} .

מטריצה אלכסונית: $(A)_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & i = j \\ 0 & else \end{cases}$

משפט: מטריצה בעלת שורת עמודות/שורות אפסים לא הפיכה.

הערה: $R(-\theta)R(\theta) = I_2 = R(\theta)R(-\theta)$

טענה: $((A^{-1})^{-1} = A) \wedge ((A^T)^{-1} = (A^{-1})^T) \wedge ((AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1})$

משפט: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$

• $(\forall b \in \mathbb{F}^m. \text{sols}(A|b) \neq \emptyset) \iff (A \text{ הפיכה מימין})$

• $(|\text{sols}(A|0)| \leq 1) \iff (A \text{ הפיכה משמאל})$

• $(\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A|b)| = 1) \iff (A \text{ הפיכה})$

מסקנה: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$

• $(m \leq n) \wedge (A \text{ פורשות}) \iff (A \text{ הפיכה מימין})$

• $(m \geq n) \wedge (A \text{ בת"ל}) \iff (A \text{ הפיכה משמאל})$

• $(A \text{ הפיכה}) \iff (m = n) \wedge (A \text{ בסיס})$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

• A הפיכה משמאל.

• A הפיכה.

• A הפיכה מימין.

• A^T הפיכה.

טענה: תהא φ פונקציה אלמנטרית אזי $\varphi(AB) = \varphi(A)B$.

מטריצה אלמנטרית: $E_\varphi = \varphi(I_m)$.

מסקנה: $\varphi(A) = E_\varphi A$.

טענה: $E_\varphi^{-1} = R_{\varphi^{-1}}$.

אלגוריתם: $(A | I) \sim (I | A^{-1})$.

מטריצה נילפוטנטית: $\exists m \in \mathbb{N}. A^m = 0$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $(A \sim I) \iff (A \text{ הפיכה})$.

מסקנה: $(A, B \text{ הפיכות}) \iff (AB \text{ הפיכה})$.

הגדרה: $\text{Par}(\{v_1, \dots, v_m\}) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid \alpha \in [0, 1]^m\}$.

טענה: A הפיכה $\iff \text{Vol}(\text{Par}(A)) \neq 0$ (הנפח של המקבילון).

$$f \begin{pmatrix} -R_1 - \\ \vdots \\ -R_i + R'_i - \\ \vdots \\ -R_n - \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} -R_1 - \\ \vdots \\ -R_i - \\ \vdots \\ -R_n - \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} -R_1 - \\ \vdots \\ -R'_i - \\ \vdots \\ -R_n - \end{pmatrix} \quad \text{לינארית על פי שורה: פונקציה שמקיימת}$$

פונקציית נפח: פונקציה $\mathcal{N}: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ (לינארית על פי שורה) $\mathcal{N}(A) = 0 \iff (\exists i \neq j. R_i(A) = R_j(A)) \implies \mathcal{N}(A) = 0 \wedge (\mathcal{N}(I) = 1)$.

טענה: אם A יש שורת אפסים אז $\mathcal{N}(A) = 0$.

$$\mathcal{N}(\varphi(A)) = \mathcal{N}(A) \cdot \begin{cases} \lambda & \varphi = f_{R_i \rightarrow \lambda R_i} \\ -1 & \varphi = f_{R_i \leftrightarrow R_j} \\ 1 & \varphi = f_{R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j} \end{cases} \quad \text{משפט: תהא } \varphi \text{ פעולה אלמנטרית אזי}$$

מסקנה: יהיו A, B שקולות שורה אזי $(\mathcal{N}(B) = 0) \iff (\mathcal{N}(A) = 0)$.

מסקנה: $(A \text{ הפיכה}) \iff (\mathcal{N}(A) \neq 0)$.

מסקנה: $\mathcal{N}(E_\varphi A) = \mathcal{N}(E_\varphi) \mathcal{N}(A)$.

משפט: יהיו $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}$ פונקציות נפח אזי $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$.

מסקנה: $\mathcal{N}(AB) = \mathcal{N}(A) \mathcal{N}(B)$.

מסקנה: $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^T)$.

מינור: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $i, j \in [n]$ אזי $A_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{F})$ כך שמתקיים

$$(A_{i,j})_{r,s} = \begin{cases} (A)_{r,s} & (r \leq i-1) \wedge (s \leq j-1) \\ (A)_{r+1,s} & (r \geq i) \wedge (s \leq j-1) \\ (A)_{r,s+1} & (r \leq i-1) \wedge (s \geq j) \\ (A)_{r+1,s+1} & (r \geq i) \wedge (s \geq j) \end{cases}$$

דטרמיננטה: פונקציית הנפח היחידה תיקרא \det^n .

הערה: $\forall A \in M_1(\mathbb{F}). \det(A) = (A)_{1,1}$.

פיתוח דטרמיננטה על פי עמודה: יהי $j \in [n]$ אזי $\det_j^n(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} (A)_{k,j} \det_j^{n-1}(A_{k,j})$.

מסקנה: $\forall j, i \in [n]. \det_j^n(A) = \det_i^n(A)$.

סימון: $\det_j^n = \det$

סימון: $\det(A) = |A|$

פיתוח דטרמיננטה על פי שורה: יהי $i \in [n]$ אזי $\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} (A)_{i,k} \det(A_{i,k})$

מטריצה מצורפת: $(\text{adj}(A))_{i,j} = (-1)^{i+j} |A_{j,i}|$

טענה: $\text{adj}(A^T) = (\text{adj}(A))^T$

משפט: $A \cdot \text{adj}(A) = |A| I = \text{adj}(A) \cdot A$

מסקנה: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$

כלל קרמר: תהא מערכת משוואת $Ax = b$ כאשר A הפיכה אזי $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ כאשר $C_j(A_i) = \begin{cases} b & i=j \\ C_j(A) & \text{else} \end{cases}$

הגדרה: תהא $\sigma \in S_n$ נגדיר יחס שקילות $a \sim_{\text{cycle}} b \iff \exists i \in \mathbb{N}. \sigma^i(a) = b$

ציקלוס/מחזור: $[a]_{\sim_{\text{cycle}}}$

פירוק תמורה לציקלוסים זרים: כל תמורה ניתנת לפירוק יחיד של ציקלוסים.

חילוף: $\begin{pmatrix} i & j \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{cases} j & x=i \\ i & x=j \\ x & \text{else} \end{cases}$

טענה: כל מחזור ניתן לכתיבה כהרכבה של חילופים.

מסקנה: כל תמורה ניתנת לכתיבה כהרכבה של חילופים.

טענה: $\begin{pmatrix} i & j \\ n & m \end{pmatrix} (\circ) \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix} (=) \begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix} (\circ) \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$

סימן: $\text{sign}(\sigma) = \det(P(\sigma))$

טענה:

• יהיו $E_{R_i \leftrightarrow R_j}, \dots, E_{R_\lambda \leftrightarrow R_\theta} = P(\sigma)$ אזי $E_{R_i \leftrightarrow R_j}, \dots, E_{R_\lambda \leftrightarrow R_\theta}$

• אם $(P(\sigma))_{i,j} = 1$ אז $(P(\sigma))_{i,j}$ מטריצת תמורה.

• $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$

מטריצת תמורה זוגית: $\text{sign}(\sigma) = 1$

מטריצת תמורה איזוגית: $\text{sign}(\sigma) = -1$

טענה: $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \wedge (\text{זוגית } Id)$ אי זוגית.

טענה: $P(\sigma\tau) = P(\sigma)P(\tau)$

מסקנה: $\text{sign}(\sigma\tau) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\tau)$

אי סדר של תמורה: זוג סדור $\langle i, j \rangle$ שמקיים $(i < j) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))$

אי הסדרים של איבר: $z(\sigma, i) = |\{j > i \mid \sigma(i) > \sigma(j)\}|$

אי הסדרים של תמורה: $N(\sigma) = |\{\langle i, j \rangle \mid (j > i) \wedge (\sigma(i) > \sigma(j))\}|$

משפט: $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$

דטרמיננטה על פי תמורה: $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n (A)_{i, \sigma(i)})$

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{Z}). |A| \in \mathbb{Z}$

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{Z}). (\|A\| = 1) \implies (A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}))$

מסקנה: $\det(A) \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n^2]$

נורמה: יהי $v \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ אזי f רציפה.

מסקנה: \det רציפה.

מסקנה: $\forall A \in M_n^\times(\mathbb{F}). \exists \varepsilon. \forall B \in M_n(\mathbb{F}). \left(\forall i, j. (B)_{i,j} \in \left((A)_{i,j} - \varepsilon, (A)_{i,j} + \varepsilon \right) \right) \implies B \in M_n^\times(\mathbb{F})$

מרחב וקטורי (מ'י): $\langle V, +, * \rangle$ המקיים

• $\langle V, + \rangle$ חבורה אבלית.

• $* : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ המקיימת

- $\forall v \in V. 1_{\mathbb{F}} * v = v$

$$-\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}. \forall v \in V. (\alpha * \beta) * v = \alpha * (\beta * v)$$

$$\bullet \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}. \forall v, u \in V. ((\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v) \wedge (\alpha * (v + u) = \alpha * v + \alpha * u)$$

טענה: $(\forall \alpha \in \mathbb{F}. \alpha \cdot 0_V = 0_V) \wedge (\alpha * v = 0_V \iff (\alpha = 0_{\mathbb{F}} \vee (v = 0_V))) \wedge (-1_{\mathbb{F}} * v = -v) \wedge (\forall v \in V. 0_{\mathbb{F}} * v = 0_V)$

תת מרחב וקטורי (תמ"ו): קבוצה $\mathcal{U} \subseteq V^n$ המקיימת $(\forall v \in \mathcal{U}. \forall a \in \mathbb{F}. a \cdot v \in \mathcal{U}) \wedge (\forall u, v \in \mathcal{U}. u + v \in \mathcal{U}) \wedge (0 \in \mathcal{U})$

טענה: יהיו U, V תמ"ו אזי $U \cap V$ תמ"ו.

צירוף לינארי: יהיו $v \in V^n$, צירוף לינארי של v הינו ביטוי מהצורה $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ בעבור $\alpha \in \mathbb{F}^n$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v \in V^m$ נגדיר $\text{span}(v) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid \alpha \in \mathbb{F}^m\}$

סדרה בת"ל: סדרה $v \in V^n$ שמקיימת $\alpha = 0 \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{F}^n$.

בסיס: $v \in V$ בת"ל ופורשת.

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v \in V^n$ נגדיר $\text{LD}(v) = \{\alpha \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0\}$

טענה: $(A \subseteq \text{span}(B) \implies \text{span}(A) \subseteq \text{span}(B)) \wedge (A \subseteq B \implies \text{span}(A) \subseteq \text{span}(B))$

טענה: תהא $K \subseteq V$ אזי $\text{span}(K)$ הינו התמ"ו הקטן ביותר ביחס ההכלה המכיל את K .

$$(\text{span}(\emptyset) = \{0\}) \wedge (\text{span}(\text{span}(A)) = \text{span}(A))$$

משפט ההחלפה של ריס: תהא $v \in V^n$ פורשת ו- $u \in V^m$ בת"ל

$$\bullet m \leq n$$

\bullet קיימים $1 \leq i_1 \dots i_m \leq n$ כך שהקבוצה $\{u_1 \dots u_k\} \cup \{v_j \mid j \notin \{i_1 \dots i_k\}\}$ פורשת.

מסקנה: יהיו A, B בסיסים אזי $|A| = |B|$.

מימד: יהי B בסיס $\dim_{\mathbb{F}}(V) = |B|$

נ"ס (נוצר סופית): מ"ו V שמקיים $\text{span}(v) = V$ $\exists v \in V^k$.

משפט: V נ"ס \iff קיים בסיס ל- V .

מסקנה: יהי V נ"ס

\bullet פחות מ- $\dim(V)$ וקטורים לא פורשים.

\bullet יותר מ- $\dim(V)$ וקטורים ת"ל.

משפט 2 מתוך 3: יהי V מ"ו נ"ס ויהי $B \in V^k$, כל שניים מהשלושה שקולים

$\bullet B$ בת"ל.

$\bullet B$ פורשת.

$$\bullet \dim(V) = k$$

משפט: תהא V נ"ס, לכל $U \subseteq V$ תמ"ו מתקיים כי U נ"ס.

מסקנה: לכל $U \subseteq V$ תמ"ו מתקיים $\dim(U) \leq \dim(V)$

משפט: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו אזי $(U \subseteq W) \wedge (\dim(U) = \dim(W)) \iff U = W$

סכום מרחבים וקטוריים: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו אזי $U + W = \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$ תמ"ו של V .

משפט: אם $U = \text{span}(A)$, $W = \text{span}(B)$ אז $U + W = \text{span}(A \cup B)$

מסקנה: אם $U, W, T \subseteq V$ תמ"ו אז $U + W \subseteq T \implies U, W \subseteq T$

משפט: אם $U \cap W = \{0\}$ אז לכל בסיס B של U , לכל בסיס C של W מתקיים כי $B \cup C$ בסיס של $U + W$.

סכום ישר: אם $U \cap W = \{0\}$ אז $U \oplus W = U + W$

משפט האפיון של סכום ישר: יהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו התב"ש

$$\bullet U \oplus W$$

\bullet לכל בסיס B של U , לכל בסיס C של W מתקיים כי $B \cup C$ בסיס של $U + W$

$$\bullet \forall k \in U + W. \exists! \langle u, w \rangle \in U \times W. u + w = k$$

מסקנה: $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$

משפט המימד הראשון: יהיו U, W תמ"ו אזי $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

קואורדינטות: יהי $b \in V^n$ בסיס ויהי $v \in V$ אזי $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$ $\iota \alpha \in \mathbb{F}^n$.

סימון: $[v]_B = \iota \alpha \in \mathbb{F}^n. v = \sum_{i=1}^n \alpha_i B_i$

העתקת קואורדינטות: יהי B בסיס נגדיר $Q_B : V \rightarrow \mathbb{F}^{\dim(V)}$ כך $Q_B(v) = [v]_B$

משפט:

- $Q_B^{-1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\dim(V)} \alpha_i b_i$
- $(Q(\alpha v) = \alpha Q(v)) \wedge (Q(v+w) = Q(v) + Q(w))$
- $Q_B(v_1) \dots Q_B(v_k) \iff v_1 \dots v_k \text{ בת"ל}$
- $Q_B(v) \in \text{span}(Q_B(v_1) \dots Q_B(v_k)) \iff v \in \text{span}(v_1 \dots v_k)$
- **מרחב העמודות:** $\mathcal{C}(A) = \text{span}(\{C_i(A) \mid i \in [n]\})$
- **מרחב השורות:** $\mathcal{R}(A) = \text{span}(\{R_i(A) \mid i \in [m]\})$
- **טענה:** $\mathcal{C}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{F}^n\} = \text{Im}(T_A)$
- **טענה:** $\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A), \mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(B)$
- **משפט:** $\dim(\mathcal{C}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A))$
- **דרגה:** $\text{rank}(A) = \dim(\mathcal{C}(A))$
- **מרחב האפסות:** $\mathcal{N}(A) = \dim(\text{sols}(A))$
- **טענה:** $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B), \text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B)), \text{rank}(A) \leq \min(n, m)$
- **טענה:** אם A הפיכה אזי $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$
- **המשפט היסודי של הדירוג:** יהיו $A, A' \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ש"ש
 - $\text{sols}(A) = \text{sols}(A')$
 - $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A')$
 - $\text{rank}(A) = \text{rank}(A')$
- **טענה:** $\text{sols}(A) = \text{LD}(\{C_i(A) \mid i \in [n]\})$
- **מסקנה:** תהא A מטריצה מדורגת קנונית אזי אין איבר פותח בעמודה ה- $i \iff C_i(A) \in \text{span}(C_1(A), \dots, C_{i-1}(A))$
- **משפט:** יהיו $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ויהיו A', B' המטריצות הקנוניות שלהם בהתאמה, התב"ש
 - $A \sim B$
 - $A' = B'$
 - $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$
- **המשפט היסודי של האלגברה הלינארית:** תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{rank}(A) = n \iff A$ הפיכה.
 - **משפט הדרגה והאפסות:** $n = \text{rank}(A) + \mathcal{N}(A)$
 - **פונקציה מטריציונית:** $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ שמקיימת $f = T_A$ $\exists A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$
 - **הגדרה:** $\ker(T_A) = T_A^{-1}[\{0\}] = \text{sols}(A)$
 - **טענה:** $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F}). T_A = T_B \iff A = B$
 - **טענה:** T_A לינארית.
- **העתקה לינארית/טרנספורמציה לינארית (ט"ל):** יהיו U, W מ"ז מעל \mathbb{F} אזי $T: V \rightarrow U$ שמקיימת כי T לינארית.
 - **טענה:** תהא $T: V \rightarrow U$ ט"ל מתקיים $(T(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i)) \wedge (T(0) = 0)$
 - **טענה:** תהא $T: U \rightarrow W$ ט"ל ותהא $S: V \rightarrow U$ ט"ל אזי $T \circ S$ ט"ל.
 - **משפט:** תהא $T: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ לינארית $\iff T$ מטריציונית.
 - **משפט:** תהא $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ ט"ל אזי $C_i(A) = T(\delta_i)$
 - **טענה:** $\text{Im}(T), \ker(T)$ תמ"ז.
 - **טענה:** תהא T ט"ל אזי
 - $\langle T(v_1) \dots T(v_n) \rangle \iff \langle v_1 \dots v_n \rangle \text{ בת"ל}$
 - $\langle v_1 \dots v_n \rangle \iff \langle T(v_1) \dots T(v_n) \rangle$ פורשת את $\text{Im}(T)$
 - **למה:** תהא T ט"ל אזי
 - נניח כי T חח"ע, $\langle v_1 \dots v_n \rangle \iff \langle T(v_1) \dots T(v_n) \rangle \text{ בת"ל}$
 - נניח כי T על, $\langle v_1 \dots v_n \rangle$ פורשת $\iff \langle T(v_1) \dots T(v_n) \rangle$ פורשת.
 - **מסקנה:** תהא T ט"ל הפיכה ויהי $\langle b_1 \dots b_n \rangle$ בסיס אזי $\langle T(b_1) \dots T(b_n) \rangle$ בסיס.
 - **איזומורפיזם בין מרחבים וקטורים:** $T: V \rightarrow U$ ט"ל הפיכה.
 - **טענה:** תהא $T: V \rightarrow U$ חח"ע $\iff \ker(T) = \{0\}$

$$\bullet \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(U) \iff T \text{ על}$$

$$\bullet \forall u \in \operatorname{Im}(T) . \forall v \in T^{-1}[\{u\}] . T^{-1}[\{u\}] = v + \ker(T)$$

$$\bullet \text{משפט המימד השני: תהא } T : V \rightarrow U \text{ ט"ל } \dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T))$$

$$\bullet \text{משפט 2 מתוך 3: תהא } T : V \rightarrow U \text{ ט"ל, כל שניים מהשלושה שקולים}$$

$$\bullet T \text{ חח"ע.}$$

$$\bullet T \text{ על.}$$

$$\bullet \dim(V) = \dim(U)$$

$$\bullet \text{טענה: } T : V \rightarrow U \text{ איזומורפיזם} \iff \dim(V) = \dim(U)$$

$$\bullet \text{משפט: } T \text{ איזומורפיזם} \iff T^{-1} \text{ איזומורפיזם.}$$

$$\bullet \text{משפט: לכל } V \text{ מ"ו נ"ס מתקיים } V \cong \mathbb{F}^{\dim(V)}$$

$$\bullet \text{מסקנה: יהיו } V, W \text{ מ"ו נ"ס מעל } \mathbb{F} \text{ אזי } V \cong W \iff \dim(V) = \dim(W)$$

$$\bullet \text{משפט: יהי } b \in V^n \text{ בסיס ויהי } c \in U^n \text{ אזי } T : V \rightarrow U \text{ המוגדרת } T(x) = \sum_{i=1}^n ([x]_b)_i \cdot c_i \text{ היא הט"ל היחידה שמקיימת} \\ \forall i \in [n] . T(b_i) = c_i$$

$$\bullet \text{טענה: יהיו } T_1, T_2 : V \rightarrow U \text{ ט"ל ויהי } b \text{ פורשת את } V \text{ אזי } T_1 = T_2 \iff T_1(b_i) = T_2(b_i) \forall i \in [n]$$

$$\bullet \text{מרחב העתקות הלינאריות: } \operatorname{Hom}(V, U) = \{T \in V \rightarrow U \mid T \text{ ט"ל}\}$$

$$\bullet \text{טענה: } \operatorname{Hom}(V, U) \text{ מ"ו מעל השדה של } V, U$$

$$\bullet \text{הערה: } \forall T_1, T_2 \in \operatorname{Hom}(V, U) . T_1 \circ T_2 \in \operatorname{Hom}(V, U)$$

$$\bullet \text{משפט: } \dim(\operatorname{Hom}(V, U)) = \dim(V) \cdot \dim(U)$$

$$\bullet \text{טענה: יהיו } b, c \text{ בסיסים של } V, U \text{ בהתאמה לכן } \left\{ T_{i,j}(b_k) = \begin{cases} c_j & i = k \\ 0 & \text{else} \end{cases} \mid i, j \in [n] \right\} \text{ בסיס של } \operatorname{Hom}(V, U)$$

$$\bullet \text{סימון: } \operatorname{Hom}(V) = \operatorname{Hom}(V, V)$$

$$\bullet \text{משפט: תהא } T \in \operatorname{Hom}(V, U) \text{ ויהיו } B, C \text{ בסיסים של } V, U \text{ בהתאמה לכן } Q_C \circ T \circ Q_B^{-1} \text{ מטריציונית.}$$

$$\bullet \text{מטריצה מייצגת: המטריצה } [T]_C^B = A \text{ עבורה } Q_C \circ T \circ Q_B^{-1} = T_A$$

$$\bullet \text{סימון: } [T]_B^B = [T]_B^B$$

$$\bullet \text{מסקנה: } C_i([T]_C^B) = [T(B_i)]_C$$

$$\bullet \text{מסקנה: } [T]_C^B \cdot [v]_B = [T(v)]_C$$

$$\bullet \text{הטלה: יהיו } V = U \oplus W \text{ מ"ו אזי } P_{(U,W)} : V \rightarrow V \text{ המוגדרת } P_{(U,W)}(v) = u \text{ עבור } v = u + w \text{ היא פרויקציה על } U \text{ לאורך } W$$

$$\bullet \text{טענה: } P_{(U,W)}^2 = P_{(U,W)} , \ker(P_{(U,W)}) = W , \operatorname{Im}(P_{(U,W)}) = U \text{ ט"ל, } P_{(U,W)}$$

$$\bullet \text{הערה: } [T]_C^B \in M_{\dim(U) \times \dim(V)}(\mathbb{F})$$

$$\bullet \text{משפט:}$$

$$\bullet (Q_B)_{\upharpoonright_{\ker(T)}} : \ker(T) \rightarrow \operatorname{sols}([T]_C^B)$$

$$\bullet (Q_C)_{\upharpoonright_{\operatorname{Im}(T)}} : \operatorname{Im}(T) \rightarrow \mathcal{C}([T]_C^B)$$

$$\bullet \text{מסקנה: } \operatorname{rank}([T]_C^B) = \dim(\operatorname{Im}(T)) , \mathcal{N}([T]_C^B) = \dim(\ker(T))$$

$$\bullet \text{טענה: תהא } T \in \operatorname{Hom}(V, U) \text{ אזי } T \text{ הפיכה} \iff [T]_C^B \text{ הפיכה.}$$

$$\bullet \text{משפט: } S \in \operatorname{Hom}(U, W) , T \in \operatorname{Hom}(V, U) \text{ אז } [S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$$

$$\bullet \text{מסקנה: } ([T]_C^B)^{-1} = [T^{-1}]_B^C$$

$$\bullet \text{מטריצת שינוי קואורדינטות: } [Id_V]_C^B$$

$$\bullet \text{הערה: } C_i([Id]_C^B) = [B_i]_C$$

$$\bullet \text{מסקנה: } [T]_C^B = [Id]_C^E \cdot [T]_E^D \cdot [Id]_D^B$$

$$\bullet \text{דמיון מטריצות: } A, B \in M_n(\mathbb{F}) . A \sim B \iff \exists P \in M_n(\mathbb{F}) . P^{-1}BP = A$$

$$\bullet \text{משפט: יהיו } A, B \in M_n(\mathbb{F}) \text{ התב"ש}$$

$$\bullet B \sim A$$

$$\bullet \forall T \in \operatorname{Hom}(V, U) . A = [T]_D^C \implies \exists C', D' . B = [T]_{D'}^{C'}$$

$$\bullet \exists T \in \operatorname{Hom}(V, U) . ([T]_C = A) \wedge ([T]_D = B)$$

טענה: $\det(A) = \det(B)$ אז A, B דומות

הגדרה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $\det(T) = \det([T]_B)$

עקבה: $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}$

טענה: $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$ $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$

מסקנה: $\text{trace}(A) = \text{trace}(B) \iff A, B$ דומות

הגדרה: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $\text{trace}(T) = \text{trace}([T]_B)$

מטריצות מתאימות: $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ $A \sim_{\text{green}} B \iff \exists P, Q \in M_n(\mathbb{F})$ $P^{-1}BQ^{-1} = A$

הערה: A, B דומות $\iff A, B$ מתאימות.

טענה: $A, B \iff \text{rank} A = \text{rank} B$ מתאימות.

הגדרה: $[\ast]_C^B(T) = [T]_C^B$ כך $[\ast]_C^B : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M_{\dim(V) \times \dim(W)}(\mathbb{F})$

משפט: $[\ast]_C^B$ איזומורפיזם.

אלגברה: $\langle V, +, \cdot, \ast \rangle$ שמקיים $(\langle V, +, \cdot \rangle \wedge \ast)$

אלגברת מטריצות: המרחב $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ עם פעולת כפל מטריצות.

אלגברת Hom: המרחב $\text{Hom}(V, W)$ עם פעולת ההרכבה.

איזומורפיזם בין אלגברות: $T : A \rightarrow B$ ט"ל הפיכה שמקיימת $\forall \alpha, \beta \in A$ $T(\alpha \ast \beta) = T(\alpha) \ast T(\beta)$

משפט: אם $[\ast]_B : \text{Hom}(V) \rightarrow M_{\dim(V)}(\mathbb{F})$ אז $[\ast]_B$ איזומורפיזם בין אלגברות.

מטריצת בלוקים:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

הערה: מספר העמודות והשורות בין מטריצות צמודות חייב להיות שווה.

סימון:

$$(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

כפל מטריצת בלוקים: $(AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^m A_{i,t} B_{t,j}$

מטריצת בלוקים ריבועית: מטריצת בלוקים כך שמקיימת $\forall i. A_{i,i} \in M_n(\mathbb{F})$

מטריצת בלוקים משולשית עליונה: $\left((A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \right)_{k,\ell} = \begin{cases} A_{k,\ell} & k \leq \ell \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

מטריצת בלוקים משולשית תחתונה: $\left((A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \right)_{k,\ell} = \begin{cases} A_{k,\ell} & k \geq \ell \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

מטריצת בלוקים אלכסונית: מטריצת בלוקים משולשית תחתונה ועליונה.

הגדרה: $(\text{Diag}(A_{1,1}, \dots, A_{n,n}))_{k,\ell} = \begin{cases} A_{k,k} & k = \ell \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

משפט: אם $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ משולשית אז $\det \left((A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m} \right) = \prod_{i=1}^n \det(A_{i,i})$