

פונקציונל ליניארי: יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{F}$  אזי  $f \in \text{Hom}(V, \mathbb{F})$ .

המרחב הדואלי:  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{F})$ .

טענה:  $V \cong V^* \iff V$  נ"ס.

שחלוף/העתקה הדואלית: תהא  $T \in \text{Hom}(V, U)$  אזי  $T^t : U^* \rightarrow V^*$  המוגדרת  $T^t = \lambda\varphi \in U^* . \varphi \circ T$ .

הטלה:  $\Pi_i(x) = x_i$ .

סימון: יהי  $C$  בסיס של  $V$  אזי  $\Phi_i = \Pi_i \circ Q_C$ .

הבסיס הדואלי: יהי  $C$  בסיס של  $V$  אזי  $C^* = (\Phi_i)_{i=1}^{\dim(V)}$  בסיס של  $V^*$ .

טענה: יהי  $C$  בסיס של  $V$  אזי  $f = \sum_{i=1}^{\dim(V)} f(C_i) \Phi_i$ .

שורה של העתקה: תהא  $T \in \text{Hom}(V, U)$  אזי  $R_i(T) = \Phi_i \circ T$ .

מרחב השורות:  $\mathcal{R}(T) = \text{span}\left((R_i(T))_{i=1}^{\dim(U)}\right)$ .

טענה:  $\ker(T) = \bigcap_{i=1}^n \ker(R_i(T))$ .

מסקנה:  $\ker(T) = \bigcap_{f \in \mathcal{R}(T)} \ker(f)$ .

מרחב האפסים: תהא  $S \subseteq V^*$  אזי  $S_0 = \bigcap_{f \in S} \ker(f)$ .

טענה: יהי  $V$  מ"ו ותהא  $S, T \subseteq V$

•  $S_0$  תמ"ו של  $V$ .

•  $S \subseteq T \implies T_0 \subseteq S_0$ .

•  $(\bigcup_{\alpha} S_{\alpha})_0 = \bigcap_{\alpha} (S_{\alpha})_0$ .

•  $S_0 = (\text{span}(S))_0$ .

•  $(\{0\})_0 = V$ .

•  $(V^*)_0 = \{0\}$ .

המרחב המאפס: תהא  $A \subseteq V$  אזי  $A^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi|_A = 0\}$ .

טענה: יהי  $V$  מ"ו ותהא  $A, B \subseteq V$

•  $A^0$  תמ"ו של  $V^*$ .

•  $A \subseteq B \implies B^0 \subseteq A^0$ .

•  $(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha})^0 = \bigcap_{\alpha} (A_{\alpha})^0$ .

•  $A^0 = (\text{span}(A))^0$ .

•  $(\{0\})^0 = V^*$ .

•  $(V^*)^0 = \{0\}$ .

טענה: יהי  $V$  מ"ו נ"ס

•  $(U^0)_0 = U$  יהי  $U \subseteq V$  תמ"ו אזי  $U^0$ .

•  $(W_0)^0 = W$  יהי  $W \subseteq V^*$  תמ"ו אזי  $W_0$ .

משפט:  $\dim(M) + \dim(M^0) = \dim(V)$ .

משפט:  $\dim(W) + \dim(W_0) = \dim(V^*)$ .

משפט: יהי  $B$  בסיס של  $V^*$  אזי קיים בסיס  $C$  של  $V$  המקיים  $B = C^*$ .

מסקנה:  $\mathcal{R}(T) = (\ker(T))^0 \iff U$  נ"ס.

מסקנה:  $\dim(\mathcal{R}(T)) = \dim(\text{Im}(T)) = \text{rank}(T)$ .

המרחב הדואלי השני:  $(V^*)^*$ .

פונקציונל ההצבה/האיזומורפיזם הקנוני:  $\lambda v \in V . \lambda \psi \in V^* . \psi(v)$ .

משפט: פונקציונל ההצבה לינארי וחח"ע.

דמיון מטריצות:  $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F}) . A \sim B \iff \exists P \in M_n(\mathbb{F}) . A = PBP^{-1}$ .

מטריצה לכסינה:  $A \in M_n(\mathbb{F})$  המקיימת  $\text{Diag}(\lambda)$   $\exists \lambda \in \mathbb{F}^n . \exists P \in M_n(\mathbb{F}) . A \sim \text{Diag}(\lambda)$ .

מטריצה מלכסנת:  $P \in M_n(\mathbb{F})$  עבורה  $P \cdot \text{Diag}(\lambda) \cdot P^{-1} = A$ .

העתקה לכסינה:  $T \in \text{Hom}(V)$  המקיימת כי קיים בסיס  $B$  עבורו  $[T]_B$  אלכסונית.

בסיס מלכסן: בסיס  $B$  עבורו  $[T]_B$  אלכסונית.

הערה:  $T$  לכסינה  $\iff$  לכל בסיס  $C$  מתקיים כי  $[T]_C$  לכסינה.

**וקטור עצמי (ו'ע):** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי  $0 \neq v \in V$  המקיים  $T(v) = \lambda v$   $\exists \lambda \in \mathbb{F}$ .

**ערך עצמי (ע'ע):** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי  $\lambda \in \mathbb{F}$  המקיים  $T(v) = \lambda v$   $\exists v \in V$ .

**משפט:**  $T$  לכסינה  $\iff$  קיים בסיס  $B$  של וקטורים עצמיים.

**המרחב העצמי (מ'ע):** יהי  $\lambda$  ע'ע של  $T$  אזי  $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$ .

**טענה:**  $V_\lambda = \ker(T - \lambda \cdot \text{Id}_V)$ .

**מסקנה:**  $T$  הפיכה  $\iff V_0 = \{0\} \iff 0$  אינו ע'ע של  $T$ .

**טענה:**  $V_\lambda = \ker(\lambda \cdot \text{Id}_V - T)$ .

**מסקנה:**  $\lambda$  ע'ע של  $A$   $\iff |\lambda I - A| = 0$ .

**הפולינום האופייני (פ'א):** תהא  $A \in M_n(\mathbb{F})$  אזי  $f_A(x) = |xI - A|$ .

**מסקנה:**  $\lambda$  ע'ע של  $A$   $\iff f_A(\lambda) = 0$ .

**הגדרה:** יהי  $B$  בסיס של  $V$  אזי  $f_T(x) = f_{[T]_B}(x)$ .

**טענה:**  $A \sim B \implies f_A(x) = f_B(x)$ .

**פולינום מתוקן:**  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$  המקיים  $a_n = 1$ .

**טענה:** יהי  $R$  תחום שלמות תהא  $A \in M_n(R)$  ונניח כי  $f_A(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ .

•  $f_A(x) \in R[x]$  פולינום מתוקן.

•  $\deg(f_A(x)) = n$ .

•  $a_{n-1} = -\text{trace}(A)$ ,  $a_0 = (-1)^n |A|$ .

**טענה:** תהא  $\sigma \in S_n$  אזי  $\deg\left(\prod_{i=1}^n (xI - A)_{i, \sigma(i)}\right) = \sum_{i=1}^n \deg\left((xI - A)_{i, \sigma(i)}\right)$ .

**טענה:**  $\deg(f_A(x)) \leq \max_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{i=1}^n \deg\left((xI - A)_{i, \sigma(i)}\right)\right)$ .

**מסקנה:** לכל  $A \in M_n(\mathbb{F})$  יש לכל היותר  $n$  ע'ע.

**הריבוי הגאומטרי:** יהי  $\lambda$  ע'ע אזי  $\rho_\lambda = \dim(V_\lambda)$ .

**טענה:** יהיו  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ע'ע אזי  $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$ .

**משפט:** יהיו  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  ע'ע אזי  $\bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$ .

**מסקנה:** יהיו  $B_i \subseteq V_{\lambda_i}$  בת"ל לכל  $i \in [k]$  אזי  $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k$  בת"ל.

**מסקנה:**  $A$  לכסינה  $\iff \sum_{i=1}^k \rho_{\lambda_i} = n$ .

**מסקנה:**  $A$  לכסינה  $\iff \exists \lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_n. f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ .

**טענה:**  $A$  לכסינה  $\iff f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$   $\exists \lambda \in \mathbb{F}^n$ .

**הריבוי האלגברי:** יהי  $\lambda$  ע'ע אזי  $\mu_\lambda = \max_{n \in \mathbb{N}} ((x - \lambda)^n |f_A(x)|)$ .

**משפט:** לכל  $\lambda$  ע'ע מתקיים  $\rho_\lambda \leq \mu_\lambda$ .

**משפט:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{F})$  אזי  $A$  לכסינה  $\iff (f_A(x) \wedge (\text{לכל } \lambda \text{ ע'ע מתקיים } \rho_\lambda = \mu_\lambda))$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה סגור אלגברית ותהא  $A \in M_n(\mathbb{F})$  אזי  $A$  לכסינה  $\iff (\text{לכל } \lambda \text{ ע'ע מתקיים } \rho_\lambda = \mu_\lambda)$ .

**העתקה ניתנת למשלוש:**  $T \in \text{Hom}(V)$  המקיימת כי קיים בסיס  $B$  של  $V$  עבורו  $[T]_B$  משולשית.

**משפט:**  $T$  ניתנת למשלוש  $\iff \exists \lambda \in \mathbb{F}^n. f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ .

**$T$  אינווריאנטי/תת מרחב שמור:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי תמ'ו  $U \subseteq V$  המקיים  $T[U] \subseteq U$ .

**טענה:**  $\ker(T)$ ,  $\text{Im}(T)$  הם  $T$  אינו'.

**טענה:** יהיו  $v_1, \dots, v_k$  ו'ע אזי  $\text{span}(v_1, \dots, v_k)$   $T$  אינו'.

**טענה:** תהא  $A \subseteq V$  אזי התמ'ו  $T$  אינו' הקטן ביותר שמכיל את  $A$  הוא  $\bigcup_{i=0}^\infty T^i[A]$ .

**מרחב פריק:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי  $V$  מ'ו עבורו קיימים  $U, W \subseteq V$   $\{0\} \neq U, W$  אינו' המקיימים  $V = U \oplus W$ .

**הצבה בפולינום:** יהי  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  ותהא  $A \in M_m(\mathbb{F})$  אזי  $p(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$ .

**טענה:**  $\forall p \in \mathbb{F}[x]. [p(T)]_B = p([T]_B)$ .

**טענה:**  $(\lambda \text{ ע'ע של } A) \iff (\lambda \text{ ע'ע של } A^t)$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{F}_n[x]$  ותהא  $A$  המקיימת  $Av = \lambda v$  אזי  $p(A)v = p(\lambda)v$ .

**טענה:** יהי  $p \in \mathbb{F}[x]$  אזי  $\ker(p(T))$ ,  $\text{Im}(p(T))$  הם  $T$ -אינו'.

**טענה:** יהי  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$  מ'ו יהי  $T \in \text{Hom}(V)$  נניח כי לכל  $i \in [n]$  מתקיים כי  $V_i$   $T$  אינו' וגם  $B_i$  בסיס של  $V_i$  אזי

$$[T]_B = \text{Diag} \left( \left( [T|_{V_i}]_{B_i} \right)_{i=1}^n \right)$$

**מסקנה:** נניח כי  $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$  ונניח כי לכל  $i \in [n]$  מתקיים כי  $T V_i$  אינו'אזי  $f_T(x) = \prod_{i=1}^n f_{T|_{V_i}}(x)$ .

**טענה:** יהיו  $\lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_n$  ע"ע של  $T$  אזי  $(T)$  לכסינה  $(\prod_{i=1}^n (T - \lambda_i \text{Id}) = 0) \iff$ .

**טענה:**  $\forall p \in \mathbb{F}[x]. A \sim B \implies p(A) \sim p(B)$ .

**טענה:** יהיו  $f, g \in \mathbb{F}[x]$  ותהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי  $f(T)g(T) = g(T)f(T)$ .

**מסקנה:** יהי  $f \in \mathbb{F}[x]$  ותהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי  $f(T) \circ T = T \circ f(T)$ .

**מסקנה:**  $\ker(S), \text{Im}(S) \iff T \circ S = S \circ T$  הן  $T$  אינו'.

**משפט קיילי המילטון:**  $f_A(A) = 0$ .

**תת חוג:** יהי  $\langle R', +, * \rangle$  חוג עם יחידה אזי  $R' \subseteq R$  המקיים  $\langle R', +_{R'^2}, *_{R'^2} \rangle$  חוג עם יחידה.

**משפט:** כל תחום שלמות הוא תת חוג של שדה.

**מחלק:** יהי  $b \in R$  אזי  $a \in R$  המקיים  $a \cdot c = b$   $\exists c \in R$ .

**סימון:** אם  $a$  מחלק את  $b$  אזי  $a|b$ .

**מסקנה:** יהי  $R$  תחום שלמות ונניח כי  $b = u \cdot a$  וגם  $a = v \cdot b$  אזי  $v \cdot u = u \cdot v = 1$ .

**מסקנה:**  $(b|a) \wedge (a|b) \iff \exists u \in R^\times. a = u \cdot b$ .

**חברים:**  $a, b \in R$  המקיימים  $a \cdot u = b$   $\exists u \in R^\times$ .

**סימון:** אם  $a, b$  חברים אזי  $a \sim b$ .

**אידאל:**  $I \subseteq R$  המקיים  $(\forall x \in R. \forall y \in I. x \cdot y \in I) \wedge (\forall a, b \in I. a + b \in I) \wedge (0 \in I)$ .

**האידאל הנפרש על ידי איבר:** יהי  $a \in R$  אזי  $Ra = (a) = \{b \cdot a \mid b \in R\}$ .

**משפט:** יהי  $I \subseteq \mathbb{Z}$  אידאל אזי  $I = (a)$   $\exists a \in \mathbb{Z}$ .

**האידאל הנפרש על ידי קבוצה:** תהא  $X \subseteq R$  אזי  $(X) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid (m \in \mathbb{N}_+) \wedge (\alpha \in R^m) \wedge (v \in X^m)\}$ .

**טענה:** תהא  $\varphi: R \rightarrow S$  הומומורפיזם בין חוגים אזי  $\ker(\varphi)$  אידאל.

**טענה:**  $\forall a \in R. (a) = R \iff a \in R^\times, b|a \iff (a) \subseteq (b)$ .

**אידאל ראשי:** אידאל  $I \subseteq R$  המקיים  $(a) = I$   $\exists a \in R$ .

**תחום ראשי/PID:** תחום שלמות  $R$  המקיים כי כל  $I \subseteq R$  אידאל הוא ראשי.

**אידאל ראשוני:** אידאל  $I \subseteq R$  המקיים  $(a \in I) \vee (b \in I) \implies ab \in I$   $\forall a, b \in R$ .

**טענה:**  $(a)$  ראשוני  $\iff a$  ראשוני.

**טענה:** יהיו  $I_1, I_2 \subseteq R$  אידאלים אזי  $I_1 \cap I_2$  אידאל.

**אידאל פריק:** אידאל  $I \subseteq R$  עבורו קיימים  $I \neq I_1, I_2 \subseteq R$  המקיימים  $I = I_1 \cap I_2$ .

**טענה:**  $(a)$  אי פריק  $\iff a$  אי פריק.

**אידאל מירבי:** אידאל  $I \subseteq R$  המקיים כי לכל  $I \subset J$  אידאל מתקיים  $J = R$ .

**טענה:** יהי  $I$  אידאל אזי  $(I \text{ מירבי}) \iff (I \text{ אי פריק})$ .

**gcd:** יהיו  $r_1, \dots, r_n \in R$  אזי  $d \in R$  המקיים  $(d) = (r_1, \dots, r_n)$ .

**טענה:** נניח כי  $d$  הוא  $\gcd(r_1, \dots, r_n)$  מתקיים  $(a|r_1 \dots r_n \implies a|d) \wedge (d|r_1 \dots r_n)$ .

**lcm:** יהיו  $r_1, \dots, r_n \in R$  אזי  $d \in R$  המקיים  $(d) = (r_1) \cap \dots \cap (r_n)$ .

**טענה:** נניח כי  $d$  הוא  $\text{lcm}(r_1, \dots, r_n)$  מתקיים  $(r_1 \dots r_n|a \implies d|a) \wedge (r_1 \dots r_n|d)$ .

**זרים:**  $r_1, \dots, r_n \in R$  המקיימים כי  $1$  הוא  $\gcd(r_1, \dots, r_n)$ .

**משפט:**  $(\exists a \in R^n. \sum_{i=1}^n a_i r_i = 1) \iff (r_1, \dots, r_n \text{ זרים})$ .

**ראשוני:** יהי  $R$  תחום שלמות אזי  $a \in R$  המקיים  $(a|pq) \implies (a|p) \vee (a|q)$   $\forall p, q \in R$ .

**אי פריק (א"פ):**  $a \in R \setminus R^\times$  המקיים  $(a = pq) \implies (p \in R^\times) \vee (q \in R^\times)$   $\forall p, q \in R$ .

**טענה:** יהי  $R$  חוג ויהי  $a \in R, a \neq 0$  אזי  $(a \text{ ראשוני}) \iff (a \text{ א"פ})$ .

**טענה:** הפיך  $\cdot$  ראשוני = ראשוני, הפיך  $\cdot$  א"פ = א"פ.

**טענה:** יהי  $R$  תחום ראשי ויהי  $a \in R, a \neq 0$  אזי  $(a \text{ ראשוני}) \iff (a \text{ א"פ})$ .

**פריקות חד ערכית:** נניח כי  $\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i=1}^m q_i$  עבור  $p_i, q_j$  ראשוניים אזי  $(\forall i \in [n]. p_i \sim q_i) \wedge (n = m)$ .

**משפט:** יהי  $R$  תחום המקיים כי כל ראשוני הוא אי פריק אזי  $R$  מקיים פריקות חד ערכית.

**מסקנה:** תחום ראשי מקיים פריקות חד ערכית.

**תחום אוקלידי:** תחום שלמות  $R$  ופונקציה  $N : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$  המקיימת

$$\forall y \in R. \forall x \in R \setminus \{0\}. \exists! q, r \in R. (y = xq + r) \wedge (N(r) < N(x))$$

**טענה:** כל תחום אוקלידי הוא ראשי.

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ חוג השלמים של גאוס:}$$

**טענה:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה אזי  $\mathbb{F}[x]$  תחום אוקלידי ראשי,  $\mathbb{Z}[i]$  תחום אוקלידי.

$$\Delta(f) = (-1)^{\binom{n}{2}} a_n^{2(n-1)} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) \text{ דיסקרימיננטה: } f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{F}_n[x] \text{ ויהיו } \{\alpha_i\}_{i=1}^n \text{ השורשים של } f \text{ אזי}$$

$$\forall f, g \in \mathbb{F}[x]. f \sim_{(q)} g \iff f - g \in (q) \text{ הגדרה: } q \in \mathbb{F}[x] \text{ אזי}$$

$$\mathbb{F}[x]/\sim_{(q)} \text{ שדה. טענה:}$$

$$q \left( [x]_{\sim_{(q)}} \right) = 0 \text{ משפט:}$$

**משפט:** כל שדה מוכל בשדה סגור אלגברית.

$$\mathbb{F}_0 \subseteq \mathbb{F}_1 \text{ ותהא } A \in M_n(\mathbb{F}_0) \text{ אזי } A \in M_n(\mathbb{F}_1) \iff (A \text{ הפיכה מעל } \mathbb{F}_0) \text{ טענה:}$$

$$A, B \in M_n(\mathbb{F}_0) \text{ אזי } A \sim B \text{ מעל } \mathbb{F}_1 \iff A \sim B \text{ מעל } \mathbb{F}_0 \text{ טענה:}$$

$$I_A = \{p \in \mathbb{F}[x] \mid p(A) = 0\} \text{ תהא } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ האידאל המאפס:}$$

$$f_A \in I_A \text{ מסקנה:}$$

$$(m_A) = I_A \wedge (\text{פולינום מתוקן}) \text{ הפולינום המינימלי: } m_A \in I_A$$

$$m_A = \iota \sum_{i=0}^n a_i x^i \in I_A. (a_n = 1) \wedge (n = \min(\deg(p) \mid p \in I_A \setminus \{0\})) \text{ טענה:}$$

$$T \in \text{Hom}(V) \text{ ותהא } A, B \in M_n(\mathbb{F}) \text{ תהייה}$$

$$f(A) = 0 \iff m_A \mid f \bullet$$

$$I_T = I_{[T]_B} \bullet$$

$$A \sim B \implies m_A = m_B \bullet$$

$$(m_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)) \iff (A \text{ לכסינה}) \text{ ותהא } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ ויהיו } \lambda_1 \neq \dots \neq \lambda_k \text{ טענה:}$$

$$m_A(\lambda) = 0 \iff \lambda \text{ ע"ע של } A \text{ טענה:}$$

$$\min(d \in \mathbb{N} \mid A^d = 0) = \deg(m_A) \text{ טענה:}$$

$$f \in \mathbb{F}[x] \text{ תהא } f \in \mathbb{F}[x] \text{ המקיימת } \deg(f) > 0 \text{ אזי } (f \mid m_A) \iff (f(A) \text{ לא הפיכה. למת המחלק הפולינום המינימלי:})$$

$$V \text{ מ"ו מעל } \mathbb{F}_1 \text{ אזי } (V \text{ בת"ל מעל } \mathbb{F}_1) \iff (V \text{ בת"ל מעל } \mathbb{F}_0) \text{ טענה:}$$

**משפט:**  $m_A$  לא משתנה בהרחבת שדות.

$$f_A \mid m_A^n \text{ משפט:}$$

$$p \mid f_A \iff p \mid m_A \text{ מסקנה: לכל } p \in \mathbb{F}[x] \text{ א"פ מתקיים}$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n V_i \text{ נניח כי } V_i \text{ ונניח כי לכל } i \in [n] \text{ מתקיים כי } T \text{ אינו} \text{ טענה:}$$

$$p(T)_{|U} = p(T_{|U}) \text{ אזי } U \text{ תמ"ו } T \text{ אינו} \text{ טענה:}$$

$$S_1, S_2 \in \text{Hom}(V) \text{ ותהא } S_1, S_2 \text{ המקיימות } S_1 \circ S_2 = 0 = S_2 \circ S_1, S_1 + S_2 = Id \text{ טענה:}$$

$$\text{Im}(S_1) = \ker(S_2), \ker(S_1) = \text{Im}(S_2) \bullet$$

$$V = \ker(S_1) \oplus \ker(S_2) \bullet$$

$$S_1 \dots S_n \in \text{Hom}(V) \text{ ותהא } S_1 \dots S_n \text{ המקיימות } \sum_{i=1}^n S_i = 1, S_i \circ \left( \sum_{j \neq i} S_j \right) = 0 \text{ אזי הכללה:}$$

$$\text{Im}(S_i) = \bigcap_{j \neq i} \ker(S_j) \bullet$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \ker(S_i) \bullet$$

$$f, g \in \mathbb{F}[x] \text{ ותהא } T \in \text{Hom}(V) \text{ ותהא } f, g \text{ המקיימות } \gcd(f, g) = 1, f(T)g(T) = 0 \text{ טענה:}$$

$$V = \ker(g(T)) \oplus \ker(f(T))$$

$$p_1 \dots p_n \in \mathbb{F}[x] \text{ ותהא } T \in \text{Hom}(V) \text{ ותהא } p_1 \dots p_n \text{ המקיימות } \gcd(p_i, p_j) = 1, \prod_{i=1}^n p_i(T) = 0 \text{ אזי הכללה:}$$

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \ker(p_i(T))$$

$$m_T(x) = \prod_{i=1}^n q_i(x)^{r_i} \text{ באשר } q_i(x) \text{ אי פריקים משפט הפירוק הפרימרי דרך הפולינום המינימלי:}$$

מתוקנים אזי

$$V = \bigoplus_{i=1}^n \ker(q_i(T)^{r_i}) \bullet$$

$$m_{T_{|_{\ker(q_i(T)^{r_i})}}}(x) = q_i(x)^{r_i} \bullet$$

**הגדרה:** נניח כי  $f_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)^{r_i}$  אזי  $f_A^{red}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$

**טענה:**  $f_A^{red}(A) = 0 \iff A$  לכסינה

**נגזרת:** נניח כי  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  אזי  $f'(x) = \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$

**טענה:**  $f_A^{red} = \frac{f_A}{\gcd(f_A, f_A')}$

**הגדרה:**  $(a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ ,  $(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) = (a + c, b + d)$

**מירכוב:** יהי  $V$  מ"מ מעל  $\mathbb{R}$  אזי  $V_{\mathbb{C}} = \langle V^2, \cdot_{\mathbb{C}}, +_{\mathbb{C}} \rangle$

**מסקנה:**  $(a, b) \cong a + ib$

**הגדרה:** יהי  $V$  מ"מ מעל  $\mathbb{R}$  ותהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי נגדיר את  $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$  כך  $T_{\mathbb{C}}(u + iv) = T(u) + iT(v)$

**אינדקס הנילפוטנטיות:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי  $n(T) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid T^k = 0\}$

**טענה:** נניח כי  $m_T(x) = \prod_{i=1}^{\kappa} (x - \lambda_i)^{k_i}$  אזי  $k_i = n \left( T|_{\ker((x - \lambda_i)^{k_i})} - \lambda_i Id_{\ker((x - \lambda_i)^{k_i})} \right)$

**שרשרת:** יהי  $v \in V$  אזי  $\langle v, Tv, \dots, T^n v \rangle$  עבורו  $T^{n+1}v = 0$

**מרחב  $T$ -ציקלי:** מרחב וקטורי  $V$  המקיים כי קיימת שרשרת שהיא בסיס.

**מסקנה:** נניח כי  $T \in \text{Hom}(V)$  נילפוטנטית אזי  $(n(T) = \dim(V)) \iff (V \text{ הוא } T\text{-ציקלי})$ .

**מסקנה:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  נילפוטנטית אזי  $(V \text{ מ"מ } T \text{ ציקלי}) \iff (V \text{ אי פריק})$ .

**ציקלי מקסימלי:** תמ"ו  $U \subseteq V$   $T$ -אינו המקיים  $\dim(U) = n(T)$

**יחס מנה:** יהי  $U \subseteq V$  תמ"ו נגדיר יחס שקילות  $v_1 \sim_U v_2 \iff v_1 - v_2 \in U$ ,  $\forall v_1, v_2 \in V$ .

**מרחב מנה:**  $V/U = V/\sim_U$

**העתקת המנה:**  $T_U(v) = [v]_{\sim_U}$

**מסקנה:**  $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$

**טענה:** יהי  $U \subseteq V$  תמ"ו והיו  $(v_1 \dots v_n) = B \in V^n$  וגם  $([v_1]_{\sim_U} \dots [v_n]_{\sim_U}) = \overline{B} \in V/U$

•  $\overline{B}$  בת"ל  $\iff (\forall i \in [n]. a_i = 0) \implies \sum \alpha_i v_i \in U \implies \forall v \in \prod_{i=1}^n [v_i]_{\sim_U} \cdot \sum \alpha_i v_i \in U$

•  $\overline{B}$  בת"ל  $\iff (B \text{ בת"ל}) \wedge (U \oplus \text{span}(B))$

•  $\overline{B}$  פורשת  $\iff U + \text{span}(B) = V$

•  $[v]_{B \sim C} = [P_U(v)]_C \cap [v]_{\sim_U}]_{\overline{B}}$

**קו-מימד:** יהי  $U \subseteq V$  תמ"ו אזי  $\dim(V/U)$

**הגדרה:** יהיו  $U, W \subseteq V$  תמ"ו אזי  $W/U = T_U[W] = \{[w]_U \mid w \in W\}$

**הגדרה:** יהיו  $U \subseteq V$  תמ"ו ותהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי נגדיר  $\overline{T} : V/U \rightarrow V/U$  כך  $\overline{T}([v]_{\sim_U}) = [T(v)]_{\sim_U}$

**טענה:** יהי  $W \subseteq V$  תמ"ו  $T$ -אינו אזי  $[T]_{B \sim C} = \left( \begin{array}{c|c} [T|_W]_B & * \\ \hline 0 & [\overline{T}]_{\overline{C}} \end{array} \right)$

**בלוק ז'ורדן:**  $(J_k(\lambda))_{i,j} = \lambda \delta_{i,j} + \delta_{i+1,j}$  או תצוגתית  $J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}$

**מערך ז'ורדן:**  $I(\lambda) = \text{Diag}(J_{k_1}(\lambda), \dots, J_{k_r}(\lambda))$

**מטריצת/צורת ז'ורדן:**  $J = \text{Diag}(I(\lambda_1), \dots, I(\lambda_k))$

**טענה:**  $\left( J_r(0)^k \right)_{i,j} = \delta_{i+k,j}$

**הבינום של ניוטון:** יהיו  $A, B$  מתחלפות אזי  $(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

**טענה:**  $J_n(\lambda)^k = (J_n(0) + \lambda I_n)^k = \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \lambda^{k-m} J_n(0)^m$

**מסקנה:** יהי  $\lambda \neq 0$  אזי  $J_n(\lambda)^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda^i} J_n(0)^{i-1}$

**טענה:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  ויהי  $B$  בסיס של  $V$

•  $v \in \ker(T^n) \setminus \ker(T^{n-1})$  המקיים  $B = (T^{n-1}v, \dots, v) \iff [T]_B = J_n(0)$

•  $v \in \ker((T - \lambda I)^n) \setminus \ker((T - \lambda I)^{n-1})$  המקיים  $B = ((T - \lambda I)^{n-1}v, \dots, v) \iff [T]_B = J_n(\lambda)$

**מסקנה:**  $[T]_B$  מטריצת ז'ורדן  $B \iff$  שרשרת בסיסים מהצורה  $\left((T - \lambda I)^{n-1} v, \dots, v\right)$ .

**וקטור עצמי מובלל:** תהא  $S \in \text{Hom}(V)$  אזי  $v \in V$  שמקיים  $(S - \lambda I)^k(v) = 0$   $\exists \lambda \in \mathbb{F}, \exists k > 0$ .

**משפט:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  ונניח כי  $m_T(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{r_i}$  אזי קיים בסיס  $B$  של  $V$  עבורו  $[T]_B = \text{Diag}(I(\lambda_1), \dots, I(\lambda_k))$ .

**טענה:** נניח כי  $[T]_B = \text{Diag}(I(\lambda_1), \dots, I(\lambda_k))$  בעבור  $I(\lambda_i) = \text{Diag}(J_{k_1^i}(\lambda_i), \dots, J_{k_{n_i}^i}(\lambda_i))$

- כל הע"ע של  $T$  הם  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .
- $\mu_i = \sum_{j=1}^{n_i} k_j^i$ .
- $\rho_i = n_i$ .
- הריבוי האלגברי בפולינום המינימלי של ע"ע  $\lambda_i$  הוא  $\max(k_1^i, \dots, k_{n_i}^i)$ .
- $|\{j \mid k_j^i \geq r\}| = \dim(\ker((T - \lambda_i I)^r)) - \dim(\ker((T - \lambda_i I)^{r-1}))$ .

**מסקנה:** צורת ז'ורדן היא יחידה עד כדי שינוי סדר.

**אלגוריתם ז'ורדן:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה סגור אלגברית ויהי  $A \in M_n(\mathbb{F})$  עם פ"א  $f_A(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{d_i}$   $\lambda_i \neq \lambda_j$  בעבור  $f_A(x)$

- צורת ז'ורדן:

```

J = 0
for (1 ≤ i ≤ k)
    for (1 ≤ m ≤ d_i)
        s_{i,m} = dim(sols((A - λ_i I)^m))
    for (1 ≤ m ≤ d_i)
        r_{i,m} = 2s_{i,m} - s_{i,m+1} - s_{i,m-1}
        for (1 ≤ t ≤ r_{i,m})
            J = Diag(J, J_m(λ_i))
return B

```

- בסיס ז'ורדן:

```

P = ⟨,⟩
for (1 ≤ i ≤ k)
    for (1 ≤ m ≤ d_i)
        for (1 ≤ t ≤ r_{i,m})
            v_{i,m,t}^1 ∈ sols((A - λ_i I)^m)
            v_{i,m,t}^1 ∉ sols((A - λ_i I)^{m-1})
            v_{i,m,t}^1 ∉ span ⎛⎜⎝
                1 ≤ m' ≤ m
                v_{i,m',t'}^{ℓ'}; 1 ≤ t' ≤ r_{i,m'}
                2 ≤ ℓ' ≤ m'
            ⎞⎟⎠
        for (2 ≤ ℓ ≤ m)
            v_{i,m,t}^ℓ = (A - λ_i I) v_{i,m,t}^{ℓ-1}
        for (m ≤ l ≤ 1)
            P = P ∪ v_{i,m,t}^l

```

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m = \begin{pmatrix} \lim_{m \rightarrow \infty} A_m(1,1) & \dots & \lim_{m \rightarrow \infty} A_m(1,n) \\ \vdots & & \vdots \\ \lim_{m \rightarrow \infty} A_m(n,1) & \dots & \lim_{m \rightarrow \infty} A_m(n,n) \end{pmatrix}$$

**התכנסות של סדרת מטריצות:** תהא  $A : \mathbb{N} \rightarrow M_n(\mathbb{F})$  אזי

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \text{ טענה:}$$

$$e^{I(\lambda)} = e^{\text{Diag}(J_{n_1}(\lambda), \dots, J_{n_k}(\lambda))} = \text{Diag}(e^{J_{n_1}(\lambda)}, \dots, e^{J_{n_k}(\lambda)}) \text{ מסקנה:}$$

$$e^J = e^{\text{Diag}(I(\lambda_1), \dots, I(\lambda_k))} = \text{Diag}(e^{I(\lambda_1)}, \dots, e^{I(\lambda_k)}) \text{ מסקנה:}$$

$$e^A = Pe^JP^{-1} \text{ טענה: נניח כי } A = PJP^{-1} \text{ אזי}$$

$$e^A \text{ מסקנה: } e^A \text{ קיים ומוגדר היטב בשדה סגור אלגברית.}$$

$$e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B} \text{ טענה: יהיו } A, B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ מתחלפות אזי}$$

$$F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \text{ מסדר } n \text{ בהינתן } n \text{ תנאי התחלה קיים ויחיד פתרון } y(x) \text{ למד"ר מסדר } n \text{ משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר): יהי } n \in \mathbb{N} \text{ אזי}$$

$$\text{sols}(y' = Ay) = \{ce^{Ax} \mid c \in \mathbb{F}^n\} \text{ טענה: תהא } y \in (\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F})^n \text{ ותהא } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ אזי}$$

$$T, S \in \text{Hom}(V) \text{ טענה: יהי } \mathbb{F} \text{ שדה ויהי } m \in \mathbb{N} \text{ עבורו לכל } V \text{ מ"ז המקיים כי } m \nmid \dim(V) \text{ לכל } T \in \text{Hom}(V) \text{ קיים ע"ע אזי לכל } T, S \in \text{Hom}(V) \text{ מתחלפות קיים ו"ע משותף.}$$

$$[T]_B, [S]_B \text{ לכסיון סימולטני: יהיו } T, S \in \text{Hom}(V) \text{ לכסינות ומתחלפות אזי קיים בסיס } B \text{ של } V \text{ עבורו } [T]_B, [S]_B \text{ אלכסוניות.}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ מטריצה מצורפת/נלוית: יהי } f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \text{ מתוקן אזי}$$

$$f_{A_p} = p \text{ משפט:}$$

$$m_{A_p} = p \text{ טענה:}$$

$$\mathbb{F} \text{ שדה ויהי } n \in \mathbb{N} \text{ התב"ש טענה:}$$

$$\bullet \text{ לכל פולינום מעל } \mathbb{F} \text{ ממעלה } n \text{ קיים פתרון.}$$

$$\bullet \text{ לכל } V \text{ מ"ז מעל } \mathbb{F} \text{ ממימד } n \text{ מתקיים כי לכל } T \in \text{Hom}(V) \text{ קיים ע"ע מעל } \mathbb{F}.$$

$$\bullet \text{ לכל } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ קיים ע"ע מעל } \mathbb{F}.$$

$$\mathbb{E}_f = \{g(A_f) \mid g \in \mathbb{F}[x]\} \text{ משפט: יהי } \mathbb{F} \text{ שדה ויהי } f \in \mathbb{F}[x] \text{ א"פ מתוקן אזי}$$

$$\langle I, A_f, \dots, A_f^{\deg(f)-1} \rangle \text{ טענה: בסיס של } \mathbb{E}_f \text{ בתור מ"ז מעל } \mathbb{F}.$$

$$f(A_f) = 0 \text{ מסקנה:}$$

$$A \sim \text{Diag}(A_{q_1}, \dots, A_{q_r}) \text{ צורת פרוביניוס: תהא } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ עם } f_A(x) = \prod_{i=1}^r q_i(x) \text{ בעבור } q_i \text{ א"פ זרים בזוגות אזי}$$

$$(M_1)_{i,j} = \delta_{i,n} \delta_{j,n} \text{ הגדרה: נגדיר } M_1 \in M_n(\mathbb{F}) \text{ כך}$$

$$C(q) = \begin{pmatrix} A_q & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & M_1 & 0 \\ & \ddots & A_q & M_1 \\ 0 & & 0 & A_q \end{pmatrix} \text{ הגדרה: יהי } q(x)^\ell \text{ בעבור } q_i \text{ א"פ מתוקן אזי } C(q) \in M_{\ell \deg(q)}(\mathbb{F}) \text{ כך}$$

$$A \sim \text{Diag}(C(q_1), \dots, C(q_r)) \text{ צורת יעקובסון: תהא } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ עם } f_A(x) = \prod_{i=1}^r q_i(x)^{\ell_i} \text{ בעבור } q_i \text{ א"פ זרים אזי}$$

$$(\bar{A})_{i,j} = \overline{(A)_{i,j}} \text{ הגדרה: תהא } A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \text{ אזי } \bar{A} \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \text{ כך}$$

$$\bar{b} \text{ טענה: תהא } A \in M_n(\mathbb{F}) \text{ ויהי } \lambda \text{ ע"ע של } A_{\mathbb{C}} \text{ עם ו"ע } b \text{ אזי } \bar{\lambda} \text{ ע"ע של } A_{\mathbb{C}} \text{ עם ו"ע } \bar{b}.$$

$$\mu_\lambda = \mu_{\bar{\lambda}}, \rho_\lambda = \rho_{\bar{\lambda}} \text{ טענה:}$$

$$M_{\mathbb{C}}^\lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ הגדרה: יהי } a + ib \in \mathbb{C} \text{ אזי}$$

**משפט:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{C})$  לכסינה יהיו  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  ע"ע עם  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}^n$  ו"ע ויהיו  $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \dots, \lambda_m, \overline{\lambda_m} \in \mathbb{C}$  ע"ע עם  $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}^n$  ו"ע של  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  אזי

- $\langle b_1, \dots, b_k, c_1, \overline{c_1}, \dots, c_m, \overline{c_m} \rangle$  בסיס מלכסן מעל  $\mathbb{C}$ .
- $B = \langle b_1, \dots, b_k, \text{Re}(c_1), \text{Im}(c_1), \dots, \text{Re}(c_m), \text{Im}(c_m) \rangle$  בסיס מעל  $\mathbb{R}$  עבורו  $[A]_B = \text{Diag} \left( a_1, \dots, a_k, M_{\mathbb{C}}^{\lambda_1}, \dots, M_{\mathbb{C}}^{\lambda_m} \right)$ .

**טענה:** תהא  $\lambda$  ע"ע ויהי  $m \in \mathbb{N}$  אזי  $\dim(\ker(A - \lambda I)^m) = \dim(\ker(A - \overline{\lambda} I)^m)$ .

**מסקנה:**  $\overline{I(\lambda)} = I(\overline{\lambda})$ .

**טענה:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{R})$  נניח כי  $\langle b_1, \dots, b_k \rangle$  שרשרת היוצרת את  $J_k(\lambda)$  אזי  $\langle \overline{b_1}, \dots, \overline{b_k} \rangle$  שרשרת היוצרת את  $J_k(\overline{\lambda})$ .  
**מכפלה הרמיטית/מכפלה פנימית (מ"פ):** יהי  $V$  מ"ו מעל  $\mathbb{R}$  אזי  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{C}$  המקיימת

- לינאריות:  $\forall a, b, c \in V. \langle \alpha a + \beta b, c \rangle = \alpha \langle a, c \rangle + \beta \langle b, c \rangle$
- הרמיטיות:  $\forall a, b \in V. \langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$
- חיוביות:  $\forall a \in V. \langle a, a \rangle \in \mathbb{R}_+$
- חיוביות ממש:  $\forall a \in V. (\langle a, a \rangle = 0) \iff (a = 0)$

**מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ):**  $\langle V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  שמקיים  $\langle V, +, \cdot \rangle$  מ"ו  $\wedge (\langle \cdot, \cdot \rangle)$  מ"פ.

**מכפלה סקלרית סטנדרטית:** יהיו  $a, b \in \mathbb{C}^n$  אזי  $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$ .

**הגדרה:**  $(\overline{A})_{i,j} = \overline{(A)_{i,j}}$ .

**מטריצה צמודה:**  $A^* = \overline{A}^t$ .

**מכפלה פנימית על מטריצות:** יהיו  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  אזי  $\langle A, B \rangle = \text{trace}(AB^*)$ .

**מכפלה פנימית על פונקציות רציפות:** יהיו  $f, g \in C^0([0, 1])$  אזי  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ .

**נורמה:** יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ .

**ניצב/אורתוגונלי/מאונך:**  $a, b \in \mathbb{R}^n$  המקיימים  $\langle a, b \rangle = 0$ .

**סימון:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  ניצבים אזי  $a \perp b$ .

**קוסינוס:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  ותהא  $\theta$  הזווית בין  $a, b$  אזי  $\cos(\theta_{a,b}) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$ .

**טענה:**  $(AB)^* = B^* A^*, (A+B)^* = A^* + B^*, (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, (A^*)^* = A$ .

**מסקנה:** יהי  $v, u \in \mathbb{C}^n$  אזי  $\langle v, u \rangle_{st} = u^* \cdot v$ .

**הגדרה:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{C})$  אזי  $\langle v, u \rangle_A = u^* A v$ .

**מטריצה הרמיטית:**  $A^* = A$ .

**הגדרה:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{C})$  סימטרית אזי

• חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית:  $\langle Ax, x \rangle > 0. \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ .

• אי שלילית:  $\langle Av, v \rangle \geq 0. \forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ .

• שלילית לחלוטין:  $\langle Av, v \rangle < 0. \forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ .

• אי חיובית:  $\langle Av, v \rangle \leq 0. \forall v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ .

**מסקנה:**  $(A)$  הרמיטית וחיובית לחלוטין  $\iff (\langle \cdot, \cdot \rangle_A)$  מ"פ.

**טענה:** יהי  $V$  ממ"פ

•  $\forall v \in V. \langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$

•  $\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^m \beta_j u_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, u_j \rangle$

**מטריצת גראם:** יהי  $V$  ממ"פ ויהיו  $v_1, \dots, v_n \in V$  אזי  $\langle v_i, v_j \rangle$   $(G(v_1, \dots, v_n))_{i,j}$ .

**טענה:**  $(G(v_1, \dots, v_n))$  הרמיטית ומוגדרת חיובית  $\iff (v_1, \dots, v_n)$  בת"ל.

**מרחק:** יהיו  $v, u$  אזי  $\text{dist}(v, u) = \|v - u\|$ .

**טענה:**  $\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \iff v = 0, \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ .

**אי שיוויון המשולש (אש"מ):**  $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ .

**אי שיוויון קושי שוורץ:** יהי  $V$  ממ"פ אזי  $|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$ .

**טענה:**  $\text{dist}(v, u) \geq 0, \text{dist}(v, u) = 0 \iff v = u, \text{dist}(v, u) + \text{dist}(u, w) \leq \text{dist}(v, w)$ .

**משפט פיתגורס:**  $\text{Re}(\langle v, u \rangle) = 0 \iff \|v - u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2$ .

**משפט הקוסינוסים:**  $\|v - u\| = \sqrt{\|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\|v\| \|u\| \text{Re}(\cos(\theta_{v,u}))}$ .



**קבוצה אורתוגונלית:** קבוצה  $S \subseteq V$  המקיימת  $\forall v, u \in S. v \neq u \implies v \perp u$ .

**וקטור יחידה:**  $v \in V$  המקיים  $\|v\| = 1$ .

**נרמול:** יהי  $v \in V, v \neq 0$  אזי  $\frac{v}{\|v\|}$ .

**קבוצה אורתונורמלית:** קבוצה  $S \subseteq V$  אורתוגונלית המקיימת  $\forall v \in S. \|v\| = 1$ .

**משפט:** תהא  $0 \notin S \subseteq V$  אורתוגונלית אזי  $S$  בתל.

**טענה:** תהא  $B = (v_1, \dots, v_n) \notin 0$  סדרה אורתוגונלית

$$\bullet G(B) = \text{Diag} \left( \|v_1\|^2, \dots, \|v_n\|^2 \right)$$

$$\bullet \text{נניח כי } B \text{ בסיס אזי } ([v]_B)_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$$

$$\bullet \text{נניח כי } B \text{ בסיס אזי } \langle v, u \rangle = [v]_B^T G(B) [u]_B$$

$$\bullet \text{שיויון פרסבל: נניח כי } B \text{ בסיס אזי } \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, v_i \rangle|^2}{\|v_i\|^2}}$$

**ניצבות לקבוצה:** יהי  $S \subseteq V$  אזי  $v \perp S \iff \forall s \in S. v \perp s$

**טענה:**  $v \perp \text{span}(v_1, \dots, v_n) \iff \forall i \in [n]. v \perp v_i$

**הטלה אורתוגונלית:** יהי  $e_1, \dots, e_k$  בסיס אורתונורמלי של  $U \subseteq V$  נגדיר  $P_U : V \rightarrow U$  כך  $P_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, e_i \rangle e_i$

**טענה:**  $P_U$  לינארית,  $v - P_U(v) \perp U, P_U^2 = P_U, \text{Im}(P_U) = U, \ker(P_U) = \{v \mid v \perp U\}$

**המשלים לניצב:** יהי  $U \subseteq V$  אזי  $U^\perp = \{v \in V \mid v \perp U\}$

**טענה:**  $U^\perp$  תמ"ו,  $U \oplus U^\perp$

**טענה:** יהי  $V$  מ"ו נ"ס והיו  $U, W \subseteq V$  והי בסיס אורתונורמלי של  $U$

$$\bullet v = P_U(v) + (v - P_U(v)), V = U \oplus U^\perp$$

$$\bullet P_{(U^\perp, U)} = Id - P_U, P_{(U, U^\perp)} = P_U$$

$$\bullet U \subseteq W \implies W^\perp \subseteq U^\perp$$

$$\bullet \dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$$

$$\bullet (U^\perp)^\perp = U$$

$$\bullet (U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp, (U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$$

$$\bullet \text{מסקנה: } \langle v, v \rangle = \langle P_U(v), P_U(v) \rangle + \langle v - P_U(v), v - P_U(v) \rangle$$

**מרחק ממרחב:** יהי  $U \subseteq V$  מרחב והי  $v \in V$  אזי  $\text{dist}(v, U) = \inf_{u \in U} (\text{dist}(v, u))$

**משפט:** יהי  $U \subseteq V$  מרחב והי  $v \in V$  אזי  $\text{dist}(v, U) = \text{dist}(v, P_U(v))$

$$\text{התליך גראם שמידט: בהינתן } v_1, \dots, v_n \in V \text{ בתל נגדיר } GS(v_1, \dots, v_n) = \left( \frac{v_i - P_{\text{span}(v_1, \dots, v_{i-1})}(v_i)}{\|v_i - P_{\text{span}(v_1, \dots, v_{i-1})}(v_i)\|} \right)_{i=1}^n$$

**טענה:**  $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(GS(v_1, \dots, v_n))$  קבוצה אורתונורמלית.

**מסקנה:** יהי  $V$  מ"מ"פ והי  $U \subseteq V$  תמ"ו נ"ס אזי בסיס אורתונורמלי ל- $U$ .

**מטריצה אורתוגונלית:** מטריצה  $A \in M_n(\mathbb{R})$  המקיימת  $AA^t = I$

**מטריצה אוניטרית:** מטריצה  $Q \in M_n(\mathbb{C})$  המקיימת  $QQ^* = I$

**טענה:**  $Q$  אוניטרית  $\iff$  עמודות  $Q$  בסיס אורתונורמלי לממ"פ  $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st}) \iff Q^t$  אוניטרית.

**טענה:** תהא  $Q \in M_n(\mathbb{C})$  אזי  $|\det(Q)| = 1$

**משפט פירוק QR:** תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  בעבור  $m \geq n$  אזי  $A = QR$  בעבור  $Q$  אוניטרית ו- $R$  משולשית עליונה.

**מסקנה:** נניח כי  $QR = A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}), Q \in M_m(\mathbb{C}), R \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$

**טענה:** נניח כי  $A = QR$  ונניח כי  $(u_1, \dots, u_r)$  בסיס של  $\mathcal{C}(A)$  ו- $(u_1, \dots, u_m)$  השלמה לבסיס אורתונורמלי של  $\mathbb{C}^m$  אזי

$$(R)_{i,j} = \begin{cases} \langle C_j(A), u_i \rangle & i \leq j \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$C_i(Q) = u_i$$

$$\text{טענה: יהיו } B, C \text{ בסיסים של } V \text{ אזי } G(B) \overline{[Id]_B^C}^T G(C) = [Id]_B^C$$

**משפט:**  $B$  בתל  $\iff \det(G(B)) \neq 0$

**טענה:**  $\det(G(B)) \geq 0$ .

**הגדרה:**  $\text{Vol}(\text{Par}(B)) = \sqrt{\det(G(B))}$ .

**טענה:**  $\text{Vol}(\text{Par}(v_1, \dots, v_n)) = \prod_{i=1}^n \|v_i\| \iff v_1, \dots, v_n$  אורתוגונלים

**טענה:** יהי  $E$  בסיס אורתונורמלי ויהי  $B$  בסיס אזי  $\text{Vol}(\text{Par}(B)) = \left| \det \left( [Id]_E^B \right) \right|$ .

**הגדרה:** נגדיר יחס שקילות על בסיסים  $B \sim C \iff \det \left( [Id]_C^B \right) > 0$ .

**נפח עם אוריאנטציה:** יהי  $E$  בסיס אורתונורמלי ויהי  $B$  בסיס אזי  $\text{Vol}^*(\text{Par}(B)) = \det \left( [Id]_E^B \right)$ .

**טענה:** יהי  $V$  ממ"פ יהי  $T \in \text{Hom}(V)$  ויהי  $B$  בסיס אורתונורמלי אזי  $\langle [T]_B \rangle_{i,j} = \langle T(B_j), B_i \rangle$ .

**הגדרה:** יהי  $V$  ממ"פ ויהי  $v \in V$  נגדיר  $a_v \in V^*$  כך  $a_v(u) = \langle u, v \rangle$ .

**הגדרה:** יהי  $V$  ממ"פ נ"ס אזי נגדיר  $a : V \rightarrow V^*$  כך  $a(v) = a_v$ .

**טענה:**  $a(v)$  הפיכה ובפרט איזומורפיזם קונוני בין  $V$  ל- $V^*$ .

**משפט:** תהא  $V$  נ"ס אזי  $\langle T(v), u \rangle = \langle v, T^*(u) \rangle \forall v, u \in V, T \in \text{Hom}(V)$ .

**טענה:**  $T^* = a^{-1} \circ T^t \circ a$ .

**טענה:** יהיו  $T, S \in \text{Hom}(V)$

$$\bullet (T + S)^* = T^* + S^*$$

$$\bullet (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$$

$$\bullet (T \circ S)^* = S^* \circ T^*$$

$$\bullet T^{**} = T$$

$$\bullet [T^*]_B = [T]_B^*$$

**מסקנה:** יהי  $B$  בסיס אורתונורמלי אזי  $\langle [T^*(u)]_B \rangle_i = \langle u, T(B_i) \rangle$ .

**איזומטריה:** יהיו  $V, U$  ממ"פ אזי  $T \in \text{Hom}(V, U)$  הפיכה המקיימת  $\langle v, u \rangle = \langle T(v), T(u) \rangle \forall v, u \in V$ .

**טענה:** יהיו  $S, T \in \text{Hom}(V, U)$  איזומטריות

$$\bullet S \circ T \text{ איזומטריה.}$$

$$\bullet S^{-1} \text{ איזומטריה.}$$

$$\bullet \text{dist}(u, v) = \text{dist}(S(v), S(u)), \|v\|_V = \|S(v)\|_U$$

$$\bullet \text{Vol}(\text{Par}(B)) = \text{Vol}(\text{Par}(S(B))), \theta_{v,u} = \theta_{S(v), S(u)}$$

**משפט:** יהיו  $V, U$  ממ"פ אזי  $V \cong U \iff \dim(V) = \dim(U)$ .

**משפט:** תהא  $T \in \text{Hom}(V, U)$  התב"ש

$$\bullet T \text{ איזומטריה.}$$

$$\bullet T^* \circ T = Id$$

$$\bullet \text{לכל בסיס אורתונורמלי } B \text{ של } V \text{ מתקיים כי } T(B) \text{ בסיס אורתונורמלי של } U.$$

$$\bullet \text{קיים בסיס אורתונורמלי } B \text{ של } V \text{ עבורו } T(B) \text{ בסיס אורתונורמלי של } U.$$

$$\bullet \forall v, u \in V. \text{dist}(v, u) = \text{dist}(T(v), T(u))$$

**מסקנה:** יהי  $B$  בסיס אזי  $(T \text{ איזומטריה}) \iff [T]_B^{-1} = [T]_B^*$ .

**מסקנה:** תהא  $T$  איזומטריה ויהי  $\lambda$  ע"ע אזי  $|\lambda| = 1$ .

**העתקה קונפורמית:**  $T \in \text{Hom}(V, U)$  המקיימת  $\forall v, u \in V. \theta_{v,u} = \theta_{T(v), T(u)}$ .

**טענה:** תהא  $T \in \text{Hom}(V, U)$  איזומטריה אזי  $\lambda T$  קונפורמית.

**העתקה שומרת נפח:**  $T \in \text{Hom}(V, U)$  המקיימת  $\text{Vol}(\text{Par}(B)) = \text{Vol}(\text{Par}(T(B)))$ .

**העתקה הרמיטית:**  $T \in \text{Hom}(V)$  המקיימת  $T^* = T$ .

**העתקה נורמלית:**  $T \in \text{Hom}(V)$  המקיימת  $TT^* = T^*T$ .

**משפט:** יהי  $B$  בסיס אורתונורמלי ויהי  $C$  בסיס אזי  $(C \text{ אורתונורמלי}) \iff [Id]_C^B$  אוניטרית).

**טענה:**  $A$  אוניטרית  $\iff T_A$  איזומטריה.

**הגדרה:**

$$\bullet U(n) = \{Q \in M_n(\mathbb{C}) \mid QQ^* = I\}$$

$$\bullet SU(n) = \{Q \in U(n) \mid \det(Q) = 1\}$$

$$\bullet O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$$

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\} \bullet$$

**טענה:**  $\langle SO(n), \cdot \rangle, \langle O(n), \cdot \rangle, \langle SU(n), \cdot \rangle, \langle U(n), \cdot \rangle$  חבורות.

**טענה:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי  $(\text{Im}(T) = \ker(T^*)^\perp) \wedge (\ker(T) = \text{Im}(T^*)^\perp)$ .

**טענה:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי  $(T \text{ אונטריות}) \vee (T \text{ הרמיטיות}) \iff (T \text{ נורמלית})$ .

**טענה:** תהא  $T$  נורמלית אזי  $\langle T(v), T(u) \rangle = \langle T^*(v), T^*(u) \rangle \forall v, u \in V$ .

**מסקנה:**  $T(v) \perp T(u) \iff T^*(v) \perp T^*(u), \|T(v)\| = \|T^*(v)\|$ .

**לכסינה אונטרית/לכסינה אורתוגונלית:**  $T \in \text{Hom}(V)$  עברה קיים בסיס אורתונורמלי  $B$  כך ש- $[T]_B$  אלכסונית.

**דמיון אונטריו:**  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$  המקיימות כי קיימת מטריצה  $P$  אונטרית עברה  $A = PBP^*$ .

**לכסינה אונטרית/לכסינה אורתוגונלית:**  $A$  אשר דומה אונטרית למטריצה אלכסונית.

**טענה:** תהא  $A$  מטריצה הרמיטית/אונטרית/נורמלית ותהא  $B$  דומה אונטרית  $Ab$  אזי  $B$  הרמיטית/אונטרית/נורמלית.

**למה:** אם  $W$  הוא  $T$  אינו אז  $W^\perp$  הוא  $T^*$  אינו.

**למה:**  $T$  נורמלית אז לכל  $\lambda, v$  מתקיים  $T(v) = \lambda v \iff T^*(v) = \bar{\lambda}v$ .

**טענה:** אם  $T$  נורמלית אז  $T - \lambda I$  נורמלית.

**טענה:** אם  $T$  נורמלית אז ו"ע לע"ע שונים ניצבים.

**למה:**  $(T \text{ נורמלית}) \wedge (f_T \text{ מתפרק לגורמים לינארים}) \iff (T \text{ ניתנת ללכסון אונטריו})$ .

**משפט הפירוק הספקטרלי:**  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ניתנת ללכסון אונטריו  $\iff A$  נורמלית.

**מסקנה:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{C})$  נורמלית

$$\bullet \text{ } \text{sols}_{\mathbb{C}}(f_A) \subseteq \mathbb{R} \iff A = A^*$$

$$\bullet \text{ } \text{sols}_{\mathbb{C}}(f_A) \subseteq \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1\} \iff AA^* = I$$

**משפט הפירוק הספקטרלי:**  $A \in M_n(\mathbb{R})$  ניתנת ללכסון אורתוגונלי  $\iff A$  סימטרית.

**משפט:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי  $(T \text{ נורמלית}) \iff (\exists p \in \mathbb{R}[x]. T^* = p(T))$ .

**טענה:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  מעל  $\mathbb{R}$  אזי קיים תמ"ו  $U \subseteq V$   $T$ -אינו המקיים  $\dim(U) \leq 2$ .

**משפט:** תהא  $T$  העתקתה נורמלית אזי קיים בסיס  $B$  אורתונורמלי עברו

$$[T]_B = \left( \begin{array}{c|cccc} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ \hline & & & a_1 & b_1 \\ & & & -b_1 & a_1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_r & b_r \\ & & & & & -b_r & a_r \end{array} \right)$$

**מסקנה:** תהא  $T$  העתקתה אורתוגונלית אזי קיים בסיס  $B$  אורתונורמלי עבורו

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \\ \hline & & & & & R(\theta_1) & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

**לכסון סימולטני אוניטרי:** יהיו  $T, S \in \text{Hom}(V)$  נורמליות ומתחלפות אזי קיים בסיס  $B$  אורתונורמלי עבורו  $[T]_B, [S]_B$  אלכסוניות.

**תבנית בילינארית:** יהיו  $V, W$  מ"ז מעל  $\mathbb{F}$  אזי  $f : V \times W \rightarrow \mathbb{C}$  המקיימת

• לינאריות ברכיב הראשון:  $f(\alpha v + \beta u, w) = \alpha f(v, w) + \beta f(u, w)$

• לינאריות ברכיב השני:  $f(w, \alpha v + \beta u) = \alpha f(w, v) + \beta f(w, u)$

**טענה:** יהיו  $\varphi \in V^*, \psi \in W^*$  אזי  $f(v, w) = \varphi(v)\psi(w)$  תבנית בילינארית.

**מרחב התבניות הבילינאריות:**  $\text{Bil}(V, W) = B(V, W) = \{T \in V \times W \rightarrow \mathbb{F} \mid T \text{ תבנית בילינארית}\}$

**טענה:**  $B(V, W)$  מ"ז.

**טענה:** תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  אזי  $f_A(v, u) = v^t A u$  תבנית בילינארית.

**טענה:** תהא  $f \in B(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$  אזי  $f = f_A$   $\exists A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ .

**מסקנה:** תהא  $f_A \in B(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$  אזי  $(A)_{i,j} = f_A(e_i, e_j)$

**מטריצה מייצגת:** תהא  $f \in B(V, W)$  ויהיו  $C$  בסיס של  $V$  וגם  $B$  בסיס של  $W$  אזי המטריצה  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$  עבורה

$$f_A(x, y) = f(Q_C^{-1}(x), Q_B^{-1}(y))$$

**סימון:** המטריצה המייצגת של  $f$  על פי הבסיסים  $C, B$  היא  $[f]_B^C = M(f)$

**טענה:**  $([f]_B^C)_{i,j} = f(v_i, v_j)$

**מסקנה:**  $f(v, u) = [v]_C^t \cdot [f]_B^C \cdot [u]_B$

**משפט:**  $[*]_B^C : B(V, W) \rightarrow M_{\dim(V) \times \dim(W)}(\mathbb{F})$  המוגדרת  $[*]_B^C(f) = [f]_B^C$  היא איזומורפיזם.

**מסקנה:**  $\dim(B(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$

**משפט:**  $[f]_{B_1}^{C_1} = ([Id]_{C_2}^{C_1})^t [f]_{B_2}^{C_2} [Id]_{B_2}^{B_1}$

**דרגה של תבנית:** תהא  $f \in B(V, W)$  אזי  $\text{rank}(f) = \text{rank}([f]_C^B)$

**מסקנה:**  $[f]_C^B = \left( \begin{array}{c|c} I_{\text{rank}(f)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

**סימון:**  $B(V, V) = B(V)$

**סימון:** אם  $f \in B(V)$  אזי  $[f]_C^C = [f]_C$

**מטריצות חופפות:**  $A, B \in M_n(\mathbb{F})$  המקיימות  $P^t B P = A$   $\exists P \in M_n^\times(\mathbb{F})$

**טענה:** יהיו  $A, B$  חופפות אזי

•  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

•  $\exists c \in \mathbb{F}. |A| = c^2 |B|$

**תבנית סימטרית:**  $f \in B(V)$  המקיימת  $f(v, u) = f(u, v) \forall v, u \in V$

**תבנית אנטי סימטרית:**  $f \in B(V)$  המקיימת  $f(v, u) = -f(u, v) \forall v, u \in V$

**תבנית מנוונת:**  $f \in B(V)$  המקיימת  $(\forall w \in V. f(v, w) = 0) \vee (\forall w \in V. f(w, v) = 0)$   $\exists v \in V \setminus \{0\}$

**הגדרה:** תהא  $\varphi \in B(V)$  מעל  $\mathbb{F}$  המקיימת  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  אזי

$$\bullet \varphi^+(u, v) = \frac{\varphi(u, v) + \varphi(v, u)}{2}$$

$$\bullet \varphi^-(u, v) = \frac{\varphi(u, v) - \varphi(v, u)}{2}$$

**משפט:** תהא  $\varphi \in B(V)$  אזי  $\varphi$  סימטרית  $\iff [\varphi]_C$  סימטרית.

**תבנית ריבועית:** תהא  $f \in B(V)$  תבנית סימטרית אזי  $Q_f : V \rightarrow \mathbb{F}$  המקיימת  $Q_f(v) = f(v, v)$ .

**משפט הפולריזציה:** יהי  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  ותהא  $f \in B(V)$  סימטרית אזי

$$\bullet f(v, w) = \frac{Q_f(v+w) - Q_f(v) - Q_f(w)}{2}$$

$$\bullet f \neq 0 \implies Q_f \neq 0$$

**לכסון תבניות:** נניח  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  תהא  $f \in B(V)$  תבנית סימטרית אז קיים בסיס  $B$  של  $V$  עבורו  $[f]_B$  אלכסונית.

**מסקנה:** תהא  $f \in B(V)$  מעל  $\mathbb{C}$  אזי קיים בסיס  $B$  של  $V$  עבורו  $[f]_B = \begin{pmatrix} I_{\text{rank}(f)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**מסקנה:** תהא  $f \in B(V)$  מעל  $\mathbb{R}$  אזי קיים בסיס  $B$  של  $V$  עבורו  $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ .

**משפט ההתמדה של סילבסטר:** נניח כי  $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$  וגם  $[f]_C = \text{Diag}(I_{p'}, -I_{q'}, 0)$  אזי  $\langle p, q \rangle = \langle p', q' \rangle$ .

**אינדקס ההתמדה החיובי:** נניח כי  $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$  מעל  $\mathbb{R}$  אזי  $p$ .

**סימון:** אינדקס ההתמדה החיובי הוא  $\sigma_+(f)$ .

**אינדקס ההתמדה השלילי:** נניח כי  $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$  מעל  $\mathbb{R}$  אזי  $q$ .

**סימון:** אינדקס ההתמדה החיובי הוא  $\sigma_-(f)$ .

**הסיגנטורה/החתימה של תבנית:** תהא  $f$  תבנית מעל  $\mathbb{R}$  אזי  $(\sigma_+(f), \sigma_-(f))$ .

**סימון:**  $\sigma_0(f) = \dim(V) - \text{rank}(f)$ .

**המינור הפיני:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{R})$  אזי נגדיר  $A_{(k)} \in M_k(\mathbb{R})$  כך  $(A_{(k)})_{i,j} = (A)_{i,j}$ .

**הדטרמיננטה הפינית:**  $\Delta_0 = 1, \Delta_k = |A_{(k)}|$ .

**טענה:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{R})$  סימטרית עבורה  $\Delta_k \neq 0 \forall k \in [n]$  אזי קיימת  $C \in M_n(\mathbb{R})$  משולשית תחתונה עבורה  $CAC^t$  אלכסונית.

**קריטריון סילבסטר:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{R})$  סימטרית עבורה  $\Delta_k \neq 0 \forall k \in [n]$  אזי  $\sigma_-(A) = |\{i \in [n] \mid \Delta_i \Delta_{i-1} < 0\}|$ .

**מסקנה:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{R})$  סימטרית עבורה  $\Delta_k \neq 0 \forall k \in [n]$  אזי  $A$  מוגדרת חיובית  $\iff (\forall i \in [n]. \Delta_i > 0)$ .

**משפט:** יהי  $\mathbb{F}$  שדה המקיים  $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$  וגם  $\exists \beta \in \mathbb{F}. \beta^2 = \alpha \forall \alpha \in \mathbb{F}$  ותהא  $T \in B(V)$  סימטרית אזי הסיגנטורה היא  $(\text{rank}(T), 0)$ .

**שיטת לגראנז' על פי השלמה לריבוע:** תהא  $Q_f$  תבנית ריבועית אזי קיימת החלפת משתנים עבורה  $Q_f(v) = \sum_{i=1}^n x_i^2$  בפרט

$[Q_f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$  באשר  $B$  בסיס המשתנים המוחלפים.

**הגדרה:** תהא  $T \in B(V)$  סימטרית מעל  $\mathbb{R}$  אזי

• חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית:  $T(v, v) > 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$ .

• אי שלילית:  $T(v, v) \geq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$ .

• שלילית לחלוטין:  $T(v, v) < 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$ .

• אי חיובית:  $T(v, v) \leq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$ .

**טענה:** תהא  $T \in B(V)$  סימטרית ותהא  $A = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$  מטריצה מייצגת אזי

•  $T$  חיובית לחלוטין  $\iff A = I$ .

•  $T$  אי שלילית  $\iff A = \text{Diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ .

•  $T$  שלילית לחלוטין  $\iff A = -I$ .

•  $T$  אי חיובית  $\iff A = \text{Diag}(-1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ .

**משפט:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{C})$  הרמיטית התב"ש

•  $T_A$  מוגדרת חיובית.

• לכל  $T \in \text{Hom}(V)$  המטריצה  $[T]_B = A$  מוגדרת חיובית.

• קיים  $T \in \text{Hom}(V)$  כך שהמטריצה  $[T]_B = A$  מוגדרת חיובית.

• כל הע"ע של  $A$  ממשיים חיוביים ממש.

**משפט:** תהא  $A$  סימטרית מייצגת של  $f \in B(V)$  סימטרית מעל  $\mathbb{R}$  אזי

$$\sigma_+(f) = \#\{\lambda \mid \lambda > 0 \wedge \lambda \text{ ע"ע}\}$$

$$\sigma_-(f) = \#\{\lambda \mid \lambda < 0 \wedge \lambda \text{ ע"ע}\}$$

$$\sigma_0(f) = \#\{\lambda \mid \lambda = 0 \wedge \lambda \text{ ע"ע}\}$$

**משפט:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  הרמיטית אי שלילית מעל  $\mathbb{C}$  אזי קיימת ויחידה  $R \in \text{Hom}(V)$  המקיימת  $R^2 = T$ .

**סימון:** אם  $R^2 = T$  אזי  $R = \sqrt{T}$ .

**משפט הפירוק הפולרי של העתקות לינאריות הפיכות:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  הפיכה אזי קיימות ויחידות  $U \in \text{Hom}(V)$  אוניטרית

ו- $R \in \text{Hom}(V)$  מוגדרת חיובית הרמיטית עבורן מתקיים  $T = UR$ .

**מסקנה:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  הפיכה אזי נגדיר  $R = \sqrt{TT^*}$ ,  $U = T \circ (\sqrt{TT^*})^{-1}$ .

**ערכים סינגולרים:** תהא  $T \in \text{Hom}(V)$  אזי הע"ע של  $\sqrt{TT^*}$ .

**טענה:**  $f_{TT^*}(x) = f_{T^*T}(x)$ .

**פירוק SVD:** תהא  $A \in M_n(\mathbb{C})$  אזי קיימות  $U, V$  אוניטריות וקיימת  $D$  אלכסונית אי שלילית המקיימות  $A = UDV$ .

**טענה:** נניח כי  $A = UDV$  פירוק SVD ונניח כי  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  הערכים הסינגולרים של  $A$  אזי  $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

**תבנית סימפלקטית:** תבנית בילינארית אנטי סימטרית לא מנוונת.

**הגדרה:** תהא  $\omega \in B(V)$  סימפלקטית ויהי  $W \subseteq V$  תמ"ז אזי  $W^\omega = \{v \in V \mid \forall w \in W. \omega(v, w) = 0\}$ .

**מרחב לגרנז'יאני:** תהא  $\omega \in B(V)$  סימפלקטית אזי תמ"ז  $W \subseteq V$  המקיים  $W^\omega = W$ .

**מבנה מרוכב:** יהי  $V$  מ"ז מעל  $\mathbb{R}$  אזי איזומורפיזם  $J \in \text{Hom}(V)$  המקיים  $J^2 = -I$ .

**מבנה תואם תבנית:** מבנה מרוכב  $J$  ותבנית סימפלקטית  $\omega$  המקיימות  $(\forall v, u \in V. \omega(Jv, Ju) = \omega(v, u)) \wedge (\forall v \in V. \omega(Jv, v) > 0)$ .

**שניוניות:** פולינום בנעלמים  $x_1 \dots x_n$  מהצורה  $c + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} (A)_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^n (A)_{i,i} x_i^2 = 0$ .

**מסקנה:** מטריצינונית שניונית היא  $c + 2b^t x + x^t A x = 0$ .

**המטריצה המצומצמת של שניוניות:**  $A$ .

$$\cdot \left( \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ b & c \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

**מסקנה:** מטריצינונית שניונית היא  $0$

$$\cdot \begin{pmatrix} A & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

**המטריצה המורחבת של שניוניות:**

**איזומטריה אופיינית:**  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  המקיימת כי קיימת איזומטריה  $T$  וקיים  $w \in \mathbb{R}^3$  עבורם  $f(x) = T(x) + w$ .