$(a\in\{a_1,\ldots,a_n\})\Longleftrightarrow((a=a_1)\vee\ldots\vee(a=a_n))$  מתקיים  $\{a_1,\ldots,a_n\}$  מתקיים  $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^\infty\Sigma^i$  אזי  $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^\infty\Sigma^i$  מימון: תהא  $\Sigma^*=\bigcup_{i=0}^\infty\Sigma^i$ 

טענה: תהא  $S\subseteq \Sigma^*$  אזי קיימת ויחידה  $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} o \Sigma^*\mid i\in I\}$  ותהא ווהא  $B\subseteq \Sigma^*$  אזי קיימת ויחידה  $S\subseteq \Sigma^*$ 

- $B \subseteq S \bullet$
- .F סגורה להפעלת S
- $S\subseteq A$  אזי F אזי הפעלת סגורה סגורה אוכן אוכן  $B\subseteq A$  עבורה  $A\subseteq \Sigma^*$

מינימלית סגורה  $X_{B,F}\subseteq \Sigma^*$  איז איז  $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i}\to \Sigma^*\mid i\in I\}$  ותהא ותהא  $B\subseteq \Sigma^*$  מינימלית סגורה בנית: תהא  $B\subseteq X_{B,F}\subseteq \Sigma^*$  מינימלית סגורה להפעלת F

 $\Sigma$  אזי  $F=\{f_i: \left(\Sigma^*
ight)^{n_i} o \Sigma^* \mid i \in I\}$  ותהא  $B\subseteq \Sigma^*$  אזי ההא  $E=\{f_i: \left(\Sigma^*
ight)^{n_i} o \Sigma^* \mid i \in I\}$  אזי

B אזי אוי  $F=\{f_i: (\Sigma^*)^{n_i} o \Sigma^* \mid i \in I\}$  ותהא ותהא  $B\subseteq \Sigma^*$  אזי קבוצה תהא באינדוקציה מבנית: תהא

 $X_{B,F}=\bigcap\{Y\subseteq\Sigma^*\mid (B\subseteq Y)\land (F$  סענה: תהא  $F=\{f_i:(\Sigma^*)^{n_i}\to\Sigma^*\mid i\in I\}$  אזי  $B\subseteq\Sigma^*$  חתהא  $B\subseteq\Sigma^*$  חתהא  $B\subseteq Y$  אינווריאנטה אזי A

 $(p\left(0
ight)\wedge(orall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight)\Longrightarrow p\left(n+1
ight)))\Longrightarrow(orall n\in\mathbb{N}.p\left(n
ight))$  אזי אזי ענה על p אזי מסקנה משפט האינדוקציה: תהא

על ידי הפעלת  $a_i$ יים ( $a_i \in B$ ) מתקיים  $a_i \in [n]$  אזי עבורה  $a_i = a$  וכן לכל  $a_i = a$  וכן לכל  $a_i = a$  אזי אזי  $a \in X_{B,F}$  אזי  $a \in X_{B,F}$  חלק מ־ $\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ .

.(aימת סדרת יצירה ל־ $(a \in X_{B,F})$  אזי אירה ל־ $a \in \Sigma^*$  יהי

 $X_{B,F} = igcup_{n=1}^\infty \left\{ a \in \Sigma^* \mid n \;$ מסקנה:  $a \in \mathbb{R}$  בעלת סדרת יצירה באורך

 $.\Sigma = \{\wedge, \vee, \neg, \Longrightarrow, (,)\} \cup \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  צולם תחשיב הפסוקים:

 $a\in \Sigma^*$  יהי תחשיב הפסוקים אזי יהי ביטוי:

אזי  $\omega_1,\omega_2\in\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$  אזי הגדרה: יהיו

- $.\wedge (\omega_1, \omega_2) = "(\omega_1 \wedge \omega_2)"$  •
- $.\lor (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \lor \omega_2)"$  •
- $:\Longrightarrow (\omega_1,\omega_2) = "(\omega_1 \Longrightarrow \omega_2)" \bullet$ 
  - $\neg (\omega_1) = "(\neg \omega_1)" \bullet$

.WFF =  $X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee,\neg,\Longrightarrow\}}$  פסוק: קבוצת המוגדרות היטב/ביטוי היטב/ביטוי המוגדרות המוגדרות המוגדרות היטב/ביטוי חוקי

 $p \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  עבורו  $p \in \mathrm{WFF}$  יסודי:

(") עם "(") מתחיל עם אוי ( $p \in WFF$  אזי אוי  $p \in WFF$  אזי (הפסוק אטומי) ונגמר עם "

 $q_1(q_2 \notin \mathsf{WFF}$  אזי  $q_1,q_2 \in \mathsf{WFF}$  מסקנה: יהיו

משפט הקריאה היחידה: יהי מתקיים בדיוק אחד מהבאים משפט הקריאה היחידה: יהי

- . פסוק אטומי lpha
- $\alpha = (\beta \wedge \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$  פיימים ויחידים
- $\alpha = (\beta \lor \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in \mathsf{WFF}$  •
- $\alpha = (\beta \Longrightarrow \gamma)$  עבורם  $\beta, \gamma \in WFF$  פיימים ויחידים
  - $\alpha = (\neg \beta)$  עבורו  $\beta \in \mathsf{WFF}$  •

אזי  $lpha \in \Sigma^*$  אזי ויהי אלגוריתם לבדיקת חוקיות: יהי יהי תחשיב הפסוקים ויהי

```
function wffValidity (\alpha):

if length(\alpha) \leq 3 then

if \alpha \in \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} then return True

else return False

if (\alpha_1 \neq "(") \lor (\alpha_{\mathrm{length}(\alpha)} \neq ")") then return False

if \alpha_2 = "\neg" then return wffValidity ((\alpha_3 \dots \alpha_{\mathrm{length}(\alpha)-1})) parenthesisCount \leftarrow 0

for i \leftarrow [2, \dots, \mathrm{length}(\alpha) - 1] do

if \alpha_i = "(" then parenthesisCount \leftarrow parenthesisCount + 1

if \alpha_i = ")" then parenthesisCount \leftarrow parenthesisCount - 1

if parenthesisCount = 0 then

if \alpha_{i+1} \in \{\neg, \land, \lor, \Longrightarrow\} then

return (wffValidity ((\alpha_2 \dots \alpha_i))) \land (wffValidity ((\alpha_{i+2} \dots \alpha_{\mathrm{length}(\alpha)-1}))) end

return False
```

. $(\mathrm{wffValidity}\,(\alpha)) \Longleftrightarrow (\alpha \in \mathrm{WFF})$  אזי  $\alpha \in \Sigma^*$  ויהי תחשיב הפסוקים ויהי מענה: יהי מ

 $\mathcal{O}\left(\mathrm{length}\left(lpha
ight)
ight)$  מענה: יהי בסיבוכיות אמי אזי  $lpha\in\Sigma^*$  אזי אזי מון מון  $lpha\in\Sigma^*$  יהי מון תחשיב הפסוקים ויהי

הערה סדר קדימות של קשרים: נגדיר סדר ביצוע פעולות

.¬ .1

.∧,∨ .2

.⇒ .3

סימון אמת: T, true.

.F, false :סימון שקר

טבלת אמת: טבלה אשר מסכמת את אמיתיותו של פסוק בשינוי ערכם של פסוקי היסוד בו.

הגדרה: יהיו p,q פסוקים אזי

q	$\neg q$
true	false
false	true

q	p	$q \Longrightarrow p$
true	true	true
true	false	false
false	true	true
false	false	true

q	p	$q \wedge p$
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

q	p	$q \lor p$
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

 $.TT_{\circ}$  אזי טבלת האמת של  $\circ \in \{\land,\lor,\lnot,\Longrightarrow\}$  סימון: תהא

 $v:\{p_i\} \rightarrow \{F,T\}$  השמה: פונקציה

המוגדרת  $\overline{v}: \mathsf{WFF} \to \{F,T\}$  השמה אזי פונקציה השמה לפסוק: תהא

- $.\overline{v}\left( p
  ight) =v\left( p
  ight)$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- $.\overline{v}\left(\neg\alpha\right)=TT_{\neg}\left(\overline{v}\left(\alpha\right)\right)$  יהי  $\alpha$  פסוק אזי
- $.\overline{v}\left(\beta\circ\gamma\right)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(\beta\right),\overline{v}\left(\gamma\right)\right)$  יהיו אזי פעולה בינארית פעולה בינארית פעולה  $\beta,\gamma$

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=T$  עבורה עבורה אזי איזי  $lpha\in\mathsf{WFF}$  עבורה עבורה עבורה תהא

 $v \models \alpha$  אזי v מסופקת על ידי  $a \in \mathsf{WFF}$  מסופקת על ידי v אזי  $a \in \mathsf{WFF}$ 

 $v \not\models \alpha$  אזי אזי אזי מסופקת על ידי א מסופקת על מהא  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  השמה ותהא

המוגדרת Var : WFF  $ightarrow \mathcal{P}\left(\{p_i\}
ight)$  פונקציה פסוקים האטומיים בפסוק:

- . $\operatorname{Var}\left(p\right)=\left\{ p\right\}$  יהי p פסוק אטומי אזי •
- . $\operatorname{Var}(\neg \alpha) = \operatorname{Var}(\alpha)$  אזי פסוק מיהי •
- . Var  $(\beta \circ \gamma) = \text{Var}(\beta) \cup \text{Var}(\gamma)$  אזי פעולה בינארית פטוקים ותהא פעולה  $\beta, \gamma$

 $\overline{v_1}\left(lpha
ight)=\overline{v_2}\left(lpha
ight)$  אזי  $\forall p\in \mathrm{Var}\left(lpha
ight).v_1\left(p
ight)=v_2\left(p
ight)$  עבורו  $lpha\in \mathrm{WFF}$  אזי ניתן לייצג את lpha על ידי  $T_lpha$  אזי ניתן לייצג את lpha על ידי  $T_lpha$ 

```
טענה: יהיו \alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{WFF} אזי
                                                                                                                                                                 (\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \equiv (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \bullet
                                                                                                                                                                 (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \equiv (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \bullet
                                                                                                                                                                                             (\alpha \wedge \beta) \equiv (\beta \wedge \alpha) \bullet
                                                                                                                                                                                             (\alpha \vee \beta) \equiv (\beta \vee \alpha) \bullet
                                                                                                                                                                             (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \bullet
                                                                                                                                                                             (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \equiv \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \bullet
                                                                                                                                                                                                          \neg (\neg \alpha) \equiv \alpha \bullet
                                                                                                                                                                               \neg (\alpha \land \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor (\neg \beta) \bullet
                                                                                                                                                                               \neg (\alpha \lor \beta) \equiv (\neg \alpha) \land (\neg \beta) \bullet
                                                                                                                                                                                     .(\alpha \Longrightarrow \beta) \equiv (\neg \alpha) \lor \beta \bullet
                                                                                                                             .\gamma \models \alpha מתקיים lpha \in \mathrm{WFF} למה: יהי \gamma \in \mathrm{WFF} סתירה אזי לכל
                                                                \Gamma \models \beta אזי \Gamma \cup \{\neg \alpha\} \models \beta וכן \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta עבורם \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} ויהיו \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} עבורם סענה: תהא
                                                     \Gamma \models (\neg \alpha) אאי \Gamma \cup \{\alpha\} \models (\neg \beta) וכך \Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta עבורם \alpha, \beta \in \mathsf{WFF} איי ויהיי \Gamma \subseteq \mathsf{WFF} טענה: תהא
                                                                                                                                (\alpha \models \beta) \iff (\models (\alpha \Longrightarrow \beta)) אזי \alpha, \beta \in WFF טענה: יהיו
                                                                                                                               אזי פסוק אטומי אזי lpha, arphi \in \mathsf{WFF} יהיו בפסוק: יהיו
                                                                                                                                                                                .lpha\left[arphi/p
ight]=arphi אז lpha=p אם •
                                                                                                                                           lpha\left[arphi/p
ight]=lpha אזי lpha
eq p אטומי וכן •
                                                                                                                       lpha\left[arphi/p
ight]=
egeta\left[arphi/p
ight] אזי lpha=
egeta עבורו eta\in\mathsf{WFF} אם קיים
                                            \alpha [\varphi/p]=\beta [\varphi/p]\circ\gamma אס קיימים \beta,\gamma\in WFF אס פעולה בינארית פעולה בינארית \alpha=\beta\circ\gamma אס קיימים \beta,\gamma\in WFF
                                                                                                                               lpha\left[arphi/p
ight]\in\mathrm{WFF} אזי אזי p\in\mathrm{Var}\left(lpha
ight) ויהי ויהי lpha,arphi\in\mathrm{WFF} איזי
                                                                                     lpha\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight]=arphi_{i} אזי i\in\left[n
ight] עבור lpha=p_{i}
                                                                                             lpha \left[ arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight] = lpha אזי i \in [n] לכל lpha 
eq p_i אם lpha פסוק אטומי וכן
                                                                            lpha\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight]=
egar{eta}\left[arphi_{1}/p_{1}\ldotsarphi_{n}/p_{n}
ight] אם קיים eta\in \mathrm{WFF} עבורו eta\in \mathrm{WFF}
                                                                                              אזי \alpha=\beta\circ\gamma אזי אם קיימים פעולה בינארית \beta,\gamma\in \mathrm{WFF} אזי
                                               .\alpha\left[{}^{\varphi_1/p_1}\ldots{}^{\varphi_n/p_n}\right]=\beta\left[{}^{\varphi_1/p_1}\ldots{}^{\varphi_n/p_n}\right]\circ\gamma\left[{}^{\varphi_1/p_1}\ldots{}^{\varphi_n/p_n}\right] . v\left[\overline{v}(\varphi)/p_i\right](p_j)=\left\{ egin{array}{ll} v(p_j) & i\neq j \\ \overline{v}(\varphi) & i=j \end{array} \right. המשמה אזי ההשמה v השמה אומי ותהא v פטוק אטומי ותהא v השמה אזי ההשמה v היי v
                                                                      \overline{v}\left(lpha\left(arphi/p
ight)
ight)=\overline{v}\left[\overline{v}\left(arphi/p
ight]\left(lpha
ight) היהי a,arphi\in\mathsf{WFF} יהי מענה: יהיו a,arphi\in\mathsf{WFF} יהי
v\left[\overline{v}(arphi_1)/p_1,\ldots,\overline{v}(arphi_1)/p_1
ight](p_j)=v השמה אזי ההשמה v השמים ותהא v פסוקים אטומים ותהא a,arphi_1\ldots p_n יהיו a,arphi_1\ldots p_n יהיו
```

 $TT = TT_{\alpha}$  עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  קיים שלמה שלמה עבורה  $K \subseteq \{\land, \lor, \lnot, \Longrightarrow\}$  עבורה עבורו  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  קיים שלמה פונקציונלית:

טענה:  $\{\land, \lor, \neg, \Longrightarrow\}$  שלמה פונקציונלית.

 $\alpha \in \text{WFF}$  טאוטולוגיה אזי  $\alpha \in \text{WFF}$  סימון: יהי  $\alpha \in \text{WFF}$  סתירה: פסוק  $\alpha \in \text{WFF}$ 

 $\alpha \equiv \beta$  שקולים אזי  $\alpha, \beta \in WFF$  סימון: יהיו

. טענה: תהא K מערכת קשרים עבורה עבורה עבורה אזי אזי א שלמה פונקציונלית. מערכת קשרים עבורה אזי אזי א

 $.\overline{v}\left(lpha
ight)=\overline{v}\left(eta
ight)$  מתקיים שקולים: פסוקים  $lpha,eta\in\mathsf{WFF}$  עבורם לכל השמה ע

 $.v \models lpha$  מתקיים מביקה: קבוצה  $lpha \in \Gamma$  עבורה קיימת השמה עבורה לכל  $\Gamma \subseteq \Gamma$  מתקיים עבורה

 $v \models \alpha$  מתקיים  $v \models \Gamma$  מתקיים עבורו לכל השמה v המניימת  $v \models \alpha$  מתקיים אזי  $r \in \mathsf{WFF}$  מתקיים

 $v \models \alpha$  עבורו קיימת השמה v המקיימת  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  עבורו פסוק  $v \models \alpha$  טאוטולוגיה: פסוק  $\alpha \in \mathsf{WFF}$  עבורו לכל השמה  $v \models \alpha$ 

 $v \models \Gamma$  אזי אוי השמה על ידי השמה קבוצה קבוצה ר קבוצה  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ 

 $\Gamma \models \alpha$  אזי מ־ $\Gamma$  אזי מפטוק נובע סמנטית מיח ויהי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$  אזי  $\Gamma \subseteq \mathsf{WFF}$ 

```
מסקנה הקשר בין הצבות לעדכוני שמות: יהיו v השמה v יהיו p_n = p_1 \dots p_n יהיו היו \alpha, \varphi_1 \dots \varphi_n \in \mathsf{WFF} השמה אזי
                                                                                                             .\overline{v}\left(\alpha\left[\varphi_{1}/p_{1}\ldots\varphi_{n}/p_{n}\right]\right)=\overline{v\left[\overline{v}(\varphi_{1})/p_{1},\ldots,\overline{v}(\varphi_{1})/p_{1}\right]}\left(\alpha\right)
. טאוטולוגיה \alpha \left[ arphi_1/p_1 \ldots arphi_n/p_n 
ight] אטוטולוגיה יהיו \gamma_1 \ldots \gamma_n \in \mathsf{WFF} יהיו יהיו יהיו מסקנה: יהי מסקנה: יהי
                                                                                                     .NNF =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge,\vee\}} :NNF הצורה הנורמלית
                                                                                                               lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{NNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF} אזי קיים
                                                                                                                                  .Conj = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\wedge\}} יימון:
                                                                                                                                     .DNF = X_{\text{Conj},\{\vee\}} :DNF הצורה הנורמלית
                                                                                                               lpha\equiv eta עבורו eta\in \mathrm{DNF} משפט: יהי lpha\in \mathrm{WFF} אזי קיים
                                                                                                                                   Disj =X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{(\neg p_i)|i\in\mathbb{N}\},\{\lor\}} :סימון
                                                                                                                                      .CNF = X_{\mathrm{Disj},\{\wedge\}} :CNF הצורה הנורמלית
                                                                                                               lpha\equiv eta עבורו eta\in {
m CNF} משפט: יהי lpha\in {
m WFF} אזי קיים
                      A\subseteq N אזי A\subseteq U_{n=1}^\infty אזי איזי אלפבית הוכחה: יהי A\subseteq N אזי אלפבית תהא A\subseteq N תהא אויA\subseteq N אזי אלפבית הוכחה: יהי
                                                                        הערה: בקורס זה כל מערכות ההוכחה יהיו מעל האלפבית של תחשיב הפסוקים.
                                                                                     N מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי מערכת נוסחאות של מערכת
                                                                                    A אזי אוכחה מערכת הוכחה (\Sigma, N, A, F) אקסיומת של מערכת הוכחה
                                                                                  F מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי בללי היסק של מערכת הוכחה:
                                                                                                X_{A,F} אזי המשפטים: תהא (\Sigma,N,A,F) מערכת הוכחה אזי
                                                                                                        (\Sigma,N,A,F,\Gamma) אאי \Gamma\subseteq N מערכת הוכחה מערכת הגחות: תהא (\Sigma,N,A,F) איז
                                         X_{A\cup\Gamma,F} איז היכיחות היכיחות היכיחות (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הנחות איז קבוצת היכיחות איז
                          arphi מערכת יצירה אזי סדרת ויהי arphi\in N יכיח מערכת מערכת הוכחה מערכת מערכת (\Sigma,N,A,F,\Gamma) מערכת הגדרה הוכחה
                                                                  \Gamma \vdash_{\rm c} \varphiיכיח אזי \varphi \in N הנחות ויהי הנכחה תהיינה מערכת מערכת מערכת הוכחה הוכחה \Gamma \subseteq N
                                                                                                                            טענה: תהא \varphi \in N מערכת הוכחה מערכת מערכת מענה:
                                        A \subseteq G אויי אוי A \subseteq G אויי אווי סינות: תהא A \subseteq G עבורה A \subseteq G ותהא A \subseteq G אויי איז איי עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G עבורה A \subseteq G אוי קיימת A \subseteq G אוי עבורה A \subseteq G אוי A \subseteq G אוי עבורה A \subseteq G אוי A \subseteq G אוי A \subseteq G אוי A \subseteq G אויי A \subseteq G מערכת הוכחה ויהי A \subseteq G כלל היסק המקיים A \subseteq G אויי A \subseteq G
                                                             	ext{MP}: \frac{(lpha\Longrightarroweta),lpha}{eta} מערכת הוכחה אזי (\Sigma,N,A,F): תהא (Ponens Modus): מלל הניתוק
                                                                                                      מערכת ההוכחה של הילברט (HPC): נגדיר מערכת הוכחה כך
                                                                                                                    \Sigma = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \Longrightarrow, (,)\} אלפבית: •
                                                                                                                                   .N = X_{\{p_i|i\in\mathbb{N}\},\{\lnot,\Longrightarrow\}} נוסחאות: •
                                                                                                                                                                           אקסיומות:
                                                                                                                                      A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))
                                                                            A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma))) -
                                                                                                            A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha)) -
                                                                                                                                                      F = \{MP\} כללי היסק:
                                                                                                                                           אזי HPC־טענה: יהיו lpha,eta נוסחאות ב
                                                                                                                                              \begin{array}{c} . \vdash_{\mathrm{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \alpha) \ \bullet \\ . \vdash_{\mathrm{HPC}} ((\neg \alpha) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \beta)) \ \bullet \end{array}
                                                                                                                                                         .\{\neg \alpha\} \vdash_{\mathsf{HPC}} (\alpha \Longrightarrow \beta) \bullet
```

 $\{lpha\} \buildrel \vdash_{
m HPC} eta$  אזי און HPC באשר HPC מסקנה: יהיו lpha, eta נוסחאות ב־HPC באשר באשר כי הסימון רהניח כי הסימון רוא במערכת הערה: בקורס זה ניתן להניח כי הסימון רוא במערכת

 $(\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta)$  אזי HPC משפט הדידוקציה: תהיינה ו HPC ותהיינה ו HPC ותהיינה ו HPC משפט הדידוקציה: תהיינה ו Ded  $(\Gamma) = \{\alpha \in N \mid \Gamma \vdash \alpha\}$  אזי ו חוב ו הוכחה ו Ded  $(\Gamma) = \{\alpha \in N \mid \Gamma \vdash \alpha\}$  אזי ו חוב ו חוב

 $\vdash ((\neg (\neg \alpha)) \Longrightarrow \alpha)$  אזי HPC טענה: תהא  $\alpha$  נוסחה מעל

```
.\left(\Gamma \mathrel{\mathop{\vdash}\limits_{\mathsf{HPC}}} lpha 
ight) \Longrightarrow (\Gamma \mathrel{\mathop{\models}\limits_{}} lpha) אזי א HPC משפט הנאותות: תהיינה חנחות מעל
                                                                          אזי HPC אזי מעל מוחסאות ותהיינה lpha,eta,\gamma ותהיינה HPC למה: תהיינה \Gamma
                                                                                     .((\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \land (\Gamma \vdash (\beta \Longrightarrow \gamma))) \Longrightarrow (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \gamma))
                                                           אזי HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה \Gamma הנחות מעל HPC משפט הדיכוטומיה: תהיינה
                                                                                                   ((\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta) \land (\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta)) \Longrightarrow (\Gamma \vdash \beta)
          \Gamma \not\models \alpha המקיימת S נוסחה מעל עבורה קיימת מעל קבוצת הנחות אזי \Gamma אזי אזי הוכחה מערכת תהא מערכת הנחות מעל אזי S
                   \alpha נוסחה מעל S המקיימת מענה: תהא מערכת הוכחה הנחה הנחה הנחות מעל S הנחות מעל הנחה מעל אזי (\Gamma הנחות מעל הנחה מעל אזי (\Gamma
               .(\Gamma \vdash_S (\neg \alpha) \land \Gamma \vdash_S (\neg \alpha)). טענה: תהא מערכת הוכחה S ותהיינה \Gamma הנחות מעל S אזי (\Gamma \lor_S (\neg \alpha) \Leftrightarrow (לכל \Gamma \lor_S (\neg \alpha) \Leftrightarrow (
קבוצת הנחות עקבית מעל מערכת הנחות עקבית אזי \Gamma קבוצת הנחות עקבית מערכת הנחת מערכת הנחות עקבית מקסימלית: תהא מערכת הוכחה אזי \Gamma
                                                                                                                \Gamma = \Delta מתקיים \Gamma \subset \Delta ממקיים מעל
                          .lpha\in\Gamma אזי HPC אזי אוי HPC איזי מקסימלית מעל מקסימלית מקסימלית עקבית מקסימלית עקבית הנחות עקבית מקסימלית מעל
                          (\alpha \in \Gamma) \lor (\neg \alpha \in \Gamma) אזי (HPC איזי מקסימלית מעל אינ מקסימלית מעל מקסימלית מעל מקסימלית מעל איזי (חבצת הנחות עקבית מקסימלית מעל
                                             אזי HPC אוני \alpha,\beta נוסחאות עקבית מעל אור אורר עקבית עקבית עקבית עקבית הנחות עקבית הנחות עקבית אורר אורר של אוי
                                                                                                         (\Gamma \vdash (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longleftrightarrow ((\neg \alpha \in \Gamma) \lor (\beta \in \Gamma))
                                                                          אזי \Gamma ספיקה. אזי HPC איזי מקסימלית עקבית הנחות עקבית הנחות סענה: תהא
                           \Gamma\subseteq \Delta טענה: תהא \Gamma קבוצת הנחות עקבית מעל HPC אזי קיימת קבוצת הנחות עקבית מקסימלית \Gamma
                                                                                         טענה: תהא \Gamma אזי HPC אזי קבוצת הנחות עקבית הנחות קבוצת הנחות טענה:
                                                                          \Gamma ספיקה) אזי (\Gamma עקבית) ספיקה) אזי (\Gamma ספיקה) מסקנה: תהא
                                      \left(\Gamma \mathrel{\mathop{\vdash}\limits_{\mathrm{HPC}}} lpha\right) \Longleftarrow \left(\Gamma \mathrel{\mathop{\models}\limits_{\mathrm{A}}}lpha אזי איזי (רוסחה מעל HPC משפט השלמות: תהיינה הנחות מעל
                                                   (\Gamma dash lpha) \Longleftrightarrow (\Gamma dash lpha) אזי HPC מסקנה: תהיינה \Gamma הנחות מעל
                                 משפט הקומפקטיות: תהא \Gamma קבוצת הנחות מעל HPC אזי אז (\Gamma ספיקה) שפיקה \Delta ספיקה ספיקה).
                                                                            \{p_i\} \to \{F,T\} טענה: הקבוצה \{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \mathrm{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}\} טענה: הקבוצה
                                                                   . הינה קומפקטית \{(\{p_i\} \to \{F,T\}) \setminus \mathsf{Ass}\,(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \mathsf{WFF}\} הינה הטופולוגיה
                                  ער arphi_G:E	o \mathsf{WFF} אזי (v,u)\in E חח"ע ויהיו f:V	o \mathsf{WFF} אזי \sigma גרף פשוט לא מכוון תהא
                                                                                                                         .\varphi_G((v,u)) = "f(v) \Longrightarrow f(u)"
                    . (סענה: יהי G) אזי G ספיקה (G) ענה: יהי G ספיקה (חח"ע אזי G) טענה: יהי G ספיקה (חח"ע אזי G) ספיקה ספיקה (חח"ע אזי G) טענה: יהי
                              (סופי G' סופי G' סופי G' סופי G' סופי G' הינו G הינו G הינו G הינו G' סופי G'
                                .(סיענה: סיופי G' סופי G' סופי G' הינו G' בביע) איז הינו G' הינו G' ברף בן־מנייה פשוט לא מכוון אזי
                                     K=\mathrm{Ass}\left(\Gamma
ight) המקיימת השמות גדירה: קבוצה K\subseteq\{p_i\}	o\{F,T\} עבורה אבירה השמות גדירה:
                                                                                                                                                 טענה: Ø גדירה.
                                                                                                                               . גדירה \{p_i\} 	o \{F,T\} גדירה
                                                                                                                             . גדירה \{v\} השמה \{v\} גדירה לכל
                                                                                                טענה: קיימת K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) שאינה גדירה.
                                                                                      K_{	ext{finite}} = \left\{v \in \left\{p_i
ight\} 
ightarrow \left\{F,T
ight\} \mid \left|v^{-1}\left(\left\{T
ight\}
ight)
ight| < leph_0
ight\} סימון:
                                                                                                                                      .טענה: K_{
m finite} אינה גדירה
        K=\mathrm{Ass}\left(\Gamma
ight) סופית המקיימת השמות \Gamma\subseteq \mathrm{WFF} השמות גדירה באופן סופי: קבוצה K\subseteq\mathcal{P}\left(\{p_i\}	o\{F,T\}
ight) סופית המקיימת
```

. גזירה וכן  $K^{\mathcal{C}}$  גדירה K

משפט: תהא  $K \subseteq \mathcal{P}\left(\{p_i\} \to \{F,T\}\right)$  התב"ש

למה: אקסיומות HPC הינן טאוטולוגיות.

. גדירה באופן סופיK ullet

. גדירה על ידי פסוק יחיד. K

 $.(\{c_i\in\Sigma\mid i\in\mathbb{N}\}\,,\{R_{n,i}\subseteq\Sigma^n\mid i,n\in\mathbb{N}\}\,,\{f_{n,i}\subseteq\Sigma^n o\Sigma\mid i,n\in\mathbb{N}\})$  מילון: יהי  $\Sigma$  אלפבית אזי מילון אזי (C,R,F) מילון אזי (C,R,F) מימני קבוע במילון: יהי

```
. בעל סופי של סימנים בעל מספר אזי מילון אלפבית אזי אלפבית אזי מילון מופי: יהי אלפבית אזי מילון מישנים.
                                                                                                                                                  מילון יחסי: יהי \Sigma אלפבית אזי מילון \sigma חסר סימני פונקציה.
                                         \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}, \{"(",")"\}, \{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\}, \{\forall, \exists\}, \sigma\} מילון אזי \sigma מילון אזי \sigma אלפבית ויהי \sigma אלפבית ויהי
                                                                                                                                                                               \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} משתנים בלוגיקה מסדר ראשון:
                                                                                                                                                                                סימני עזר בלוגיקה מסדר ראשון: {"(",")"}.
                                                                                                                                                        \{\neg, \lor, \land, \Longrightarrow\} :קשרים בוליאניים בלוגיקה מסדר ראשון
                                                                                                                                                                                               כמתים בלוגיקה מסדר ראשון: {∃,∀}.
                                                                                                    בה. \sigma בה מסדר ראשון אזי מסדר תהא לוגיקה מסדר ראשון בה. L בה.
                                                                                                                        X_{\{x_i|i\in\mathbb{N}\}\cup\{c_i|i\in\mathbb{N}\},\{f_{i,n}|i,n\in\mathbb{N}\}} שמות עצם מעל מילון: יהי \sigma מילון אזי
                                                                    משפט הקריאה היחידה לשמות עצם: יהי \sigma מילון ויהי שם עצם אזי מתקיים בדיוק אחד מהבאים
                                                                                                                                                                                                                                            .משתנה t
                                                                                                                                                                                                                                     .סימן קבוע t
                                                                                                 t=f\left(t_{1}\dots t_{n}
ight) עבורם t_{1}\dots t_{n} ושמות עצם f_{i,n} שמון פונקציה ullet
                                                                                                                                                                   אזי \alpha \in \sigma אזי משתנה ותהא \sigma מילוו יהי \sigma מילוו
                                                                                                                                                                                                                       \forall (\alpha, x) = \forall x \alpha •
                                                                                                                                                                                                                       \exists (\alpha, x) = \exists x \alpha •
                                                                               \{R_{n.i}\left(t_1\dots t_n
ight)\mid (i,n\in\mathbb{N})\wedge (נוסחאות אטומיות: יהי \sigma מילון אזי ויהי t_1\dots t_n) שמות עצם
                                                                            X_{\{R_{n,i}(t_1\dots t_n)|(i,n\in\mathbb{N})\wedge(נוסחאות מעל מילון: יהי \sigma מילון אזי מילון: יהי \sigma מילון אזי מילון: יהי
                                                                        משפט הקריאה היחידה לנוסחאות: יהי \sigma מילון ותהא מילון מחקיים בדיוק אחד מהבאים משפט משפט מילון יהי
                                                                                                                                                                                                                          . נוסחה אטומית \alpha
                                                                                                                                                                 \alpha = (\neg \beta) שבורה (קר") • קיימת ויחידה נוסחה \beta
                                                                                               lpha= " (eta\circ\gamma)" עבורן lpha עבורן פעולה וכן פעולה וכן eta,\gamma וכן פעולה נוסחאות יחידות ויחידות פעולה וכן פעולה וכן פעולה וכן פעולה וויחידות פעולה וויחידות פעולה וכן פעולה וכן פעולה וויחידות פעולה פעולה וויחידות פעולה פעולה וויחידות פעולה וויחידות פעולה וויחידות פעולה פעולה וויחידות פעולה וויחידות פעולה פעולה וויחידות פעולה פעולה
                                                                                                              .\alpha = "Qx\beta"עבורם עבורם וכן משתנה \alphaוכן משתנה ליימת ויחידה נוסחה \beta
                                                                                         כך FV : \{t \mid \sigma שם עצם במילון שt\} 	o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}
ight) כך כדיר
                                                                                                                                                                                 . \mathrm{FV} \left( c 
ight) = arnothing יהי c \in \sigma יהי •
                                                                                                                                                                                  FV(x) = \{x\} יהי x \in \sigma משתנה אזי
                                                                             \operatorname{FV}(f(t_1 \dots t_n)) = \bigcup \operatorname{FV}(t_i) אזי פונקציה אזי f \in \sigma יהיו שמות עצם ויהי t_1 \dots t_n
                                                                                               כך FV : \{arphi \mid \sigma \mid \sigma נוסחה במילון arphi \} 	o \mathcal{P}\left(\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}\right) כך כדיר גדיר
                                                                                     .FV (R\left(t_1\dots t_n
ight))=igcup {
m FV}\left(t_i
ight) אזי יחס אזי R\in\sigma יהיו שמות עצם ויהי t_1\dots t_n
                                                                                                                                                                                \mathsf{FV}(\neg \varphi) = \mathsf{FV}(\varphi) נוסחה אזי •
                                                                                       \mathsf{FV}\left(\varphi\circ\psi\right)=\mathsf{FV}\left(\varphi\right)\cup\mathsf{FV}\left(\psi\right) אזי אזי פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה פעולה •
                                                                                                        . \mathrm{FV}\left(Qx\varphi\right) = \mathrm{FV}\left(\varphi\right) \setminus \{x\} אזי כמת Q ויהי משתנה x ויהי משתנה \varphi יהי נוסחה •
                                                                                                                                                                                  \mathrm{FV}\left(arphi
ight)=arphi עבורה עבורה: נוסחה לוסחה כנוסחה
                                                                                                           הערה סדר קדימות של פעולות בלוגיקה מסדר ראשון: נגדיר סדר ביצוע פעולות
                                                                                                                                                                                                                                                      .∀.∃ .1
                                                                                                                                                                                                                                                          .¬ .2
                                                                                                                                                                                                                                                     .\land,\lor .3
                                                                                                                                                                                                                                                     . = .4
F:\{f_{n,i}\}	o (D^n	o D) וכן n\in\mathbb{N} לכל R:\{R_{n,i}\}	o D^n וכן C:\{c_i\}	o D ותהא D
eq\varnothing מבנה עבור מילון: יהי \sigma מילון יהי
                                                                                                                                                                      (D, C(c_0), \dots, R(R_{1,0}), \dots, f(f_{0,0}) \dots) איי
                                                                                                                                                         D אזי \sigma אזי מבנה על מבנה: יהי \sigma מילון ויהי מילון מבנה על
                                                                                                                               D^M=D אזי אזי מבנה על \sigma בעל תחום M מילון ויהי \sigma מילון יהי
```

 $(C(c_0),\ldots,R(R_{2,0}),\ldots,f(f_{0,0}))$  אזי מבנה: יהי  $\sigma$  מילון ויהי M מבנה על  $\sigma$  מילון על ידי מבנה: יהי  $\sigma$  מילון ויהי

R סימני יחס במילון: יהי (C,R,F) מילון אזי C סימני פונקציה במילון: יהי C מילון אזי C

 $.f_{n.i}^{M}=F\left(f_{n,i}
ight)$  וכן  $R_{n.i}^{M}=R\left(R_{n,i}
ight)$  וכן היי  $c_{i}^{M}=C\left(c_{i}
ight)$  אזי אזי  $c_{i}^{M}=C\left(c_{i}
ight)$  אזי מבנה על  $\sigma$  אזי מבנה על ס  $v:\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\} o D^M$  אזי מבנה על מבנה M מילון ויהי מילון יהי השמה v החותהא השמה ערך לשם עצם: יהי  $\sigma$  מילון יהי מבנה מבנה על השמה יהי השמה מילון יהי השמה אזי  $.\overline{v}\left(c_{i}
ight)=c_{i}^{M}$  יהי  $c_{i}\in\sigma$  סימן קבוע אזי •  $.\overline{v}\left(x_{i}
ight)=v\left(x_{i}
ight)$  יהי  $x_{i}\in\sigma$  משתנה אזי  $\overline{v}(f(t_1\dots t_n))=f^M\left(\overline{v}(t_1)\dots\overline{v}(t_n)
ight)$  יהיו שמות עצם ויהי  $f\in\sigma$  סימן פונקציה אזי  $t_1\dots t_n$  $\forall x \in \mathsf{FV}(t).v_1\left(x\right) = v_2\left(x\right)$  שם עצם עבורו t שם עצם תהיינה  $v_1,v_2$  משפט מבנה על מ  $.\overline{v_1}(t) = \overline{v_2}(t)$  אזי השמה אזי נגדיר ויהי  $d\in D^M$  משתנה ויהי  $x_i\in\sigma$  השמה על  $\sigma$  תהא מבנה על מבנה על מבנה מתוקנת: יהי  $\sigma$  מילון יהי  $v\left[d/x_{j}\right]\left(x_{i}\right) = \begin{cases} v(x_{i}) & i \neq j \\ d & \text{else} \end{cases}$ ערך אמת לנוסחה: יהי  $\sigma$  מילון יהי M מבנה על  $\sigma$  ותהא  $\sigma$  השמה אזי

- $(\overline{v}(R(t_1\dots t_n))=T)\Longleftrightarrow ((\overline{v}(t_1),\dots,\overline{v}(t_n))\in R^M)$  יהיו אזי  $R\in\sigma$  סימן יחס אזי פימן יחס אזי יהיו שמות עצם ויהי יחס אזי
  - $.\overline{v}\left( \neg lpha 
    ight) = TT_{\neg}\left( \overline{v}\left( lpha 
    ight) 
    ight)$  תהא lpha נוסחה אזי
  - $.\overline{v}\left(lpha\circeta
    ight)=TT_{\circ}\left(\overline{v}\left(lpha
    ight),\overline{v}\left(eta
    ight)
    ight)$  אזי קשר בינארי אזי פוסחאות ויהי lpha,eta

 $.(\overline{v}\left(\exists x\varphi\right)=T)\Longleftrightarrow\left(\exists d\in D^{M}\left(\overline{v\left[d/x\right]}\left(\varphi\right)=T\right)\right) \text{ אז } \bullet$  .  $.(\overline{v}\left(\forall x\varphi\right)=T)\Longleftrightarrow\left(\forall d\in D^{M}\left(\overline{v\left[d/x\right]}\left(\varphi\right)=T\right)\right) \text{ }$  .  $.(\overline{v}\left(\forall x\varphi\right)=T)\Longleftrightarrow\left(\forall d\in D^{M}\left(\overline{v\left[d/x\right]}\left(\varphi\right)=T\right)\right) \text{ }$  .  $\forall x\in \mathrm{FV}\left(t\right).v_{1}\left(x\right)=v_{2}\left(x\right) \text{ }$  .  $v_{1}\left(x\right)=v_{2}\left(x\right) \text{ }$  .  $v_{2}\left(x\right)=v_{3}\left(x\right)$  .  $v_{3}\left(x\right)=v_{4}\left(x\right)$  $.\overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi)$  אזי

 $.\overline{v}\left(arphi
ight)=T$  מבנה על מילון  $\sigma$  תהא v השמה אזי נוסחה מבנה: יהי M מבנה על מילון

 $M,v\models arphi$  מבנה על מילון  $\sigma$  תהא  $\sigma$  השמה ותהא  $\sigma$  נוסחה ספיקה ב־

 $M,v \models \varphi$  מבנה ותהא v השמה עבורם  $M,v \models \varphi$  מילון תהא  $v \models \sigma$  מבנה ותהא v השמה עבורם  $\sigma$ 

 $.\overline{v}\left(arphi
ight)=T$  מתקיים מתקיים עבורה לכל  $\Gamma$  עבורה לכל עבורה לכל  $\sigma$  מתקיים ע מתקיים  $\sigma$  מתקיים  $\sigma$  $M,v\models\Gamma$  אזי M מבנה על מילון  $\sigma$  תהא תהא  $\sigma$  השמה ותהא  $\sigma$  קבוצת נוסחאות ספיקה ב־

 $M,v\models arphi$  מילון אזי נוסחה arphi עבורה קיים מבנה מילו אזי נוסחה מילון אזי נוסחה מבנה מבנה u

(M,v) כי מתקיים מיס מיסוו של מתקיים כי  $\Gamma$  מתקיים מיסוו יהי  $\sigma$  מיסוו: יהי  $\sigma$  מיסוו ווהא  $\sigma$  קבוצת נוסחאות ותהא  $\sigma$  מוסחה עבורה לכל  $\Gamma \stackrel{\iota}{\models} \varphi$  אזי  $\varphi$  מודל של t

 $\{arphi\} \stackrel{t}{\models} \psi$  וכן  $\{\psi\} \stackrel{t}{\models} \varphi$  עבורן  $\varphi, \psi$  עבורן ותהא v השמה אזי נוסחאות יהי  $\sigma$  מילון ותהא מילון ותהא

.arphi מבנה על  $\sigma$  ולכל  $\sigma$  השמה מתקיים עבורה לכל  $\sigma$  עבורה לכל  $\sigma$  עבורה לכל  $\sigma$  עבורה לכל מבנה על  $\sigma$  ולכל יהי  $\sigma$  מילון אזי נוסחה  $\sigma$ 

 $\overset{t}{arphi}$ ימון: יהי  $\sigma$  מילון ותהא arphi נוסחה t־תקפה אזי  $\sigma$ 

 $M,v\modelsarphi$  השמה מתקיים אוי עוסחה  $\sigma$  עבורה לכל מילון מבנה. מבנה ממבנה: יהי מבנה מילון מילון  $\sigma$ 

 $M \models \varphi$  אזי M מבנה על מילון  $\sigma$  ותהא  $\phi$  נוסחה נכונה ב־M אזי מבנה על

 $M \models \varphi$  עבורו M עבורו  $\sigma$  מילון תהא  $\sigma$  נוסחה אזי מבנה  $\sigma$ 

 $M\models arphi$  מתקיים  $arphi\in \Gamma$  עבורה לכל עבורה לכל מילון אזי קבוצת מילון מילון מבנה על מילון מבנה מבנה: יהי

 $M\models\Gamma$  אזי M מבנה על מילון  $\sigma$  ותהא  $\Gamma$  קבוצת נוסחאות נכונה ב־M אזי  $\sigma$ 

 $M\models arphi$  עבורה קיים מבנה M עבורה מילון אזי נוסחה  $\sigma$  מילון אזי נוסחה  $\sigma$ 

 $\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi$  אזי  $\varphi$  אזי של  $\sigma$  מתקיים כי  $\sigma$  מילון תהא  $\sigma$  מוסחה עבורה לכל עבורה לכל  $\sigma$  מילון. יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\sigma$  מילון תהא  $\sigma$  נוסחה עבורה לכל  $\{arphi\}\stackrel{v}{\models}\psi$  וכן  $\{\psi\}\stackrel{v}{\models}arphi$  עבורן  $arphi,\psi$  עבורן אזי נוסחאות  $\sigma$  מילון מילון אזי נוסחאות מילון אזי נוסחאות איז פולות: יהי

.arphi מתקיים M מתקיים  $\sigma$  מבנה על מבנה על עבורה לכל אזי נוסחה  $\sigma$  מילון מילון אזי נוסחה  $\sigma$  מבנה על מבנה על מילון אזי נוסחה מילון אוויים מילון אוו

 $\varphi$  אזי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה  $\sigma$ ־תקפה אזי  $\sigma$  מילון יהי

סימון: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוטווה  $\sigma$  זוקפון אוי  $\varphi$  מסקנה: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $\varphi$  שינה  $\varphi$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה תקפה אזי  $\varphi$  תקפה וכן  $\varphi$  תקפה.  $\varphi$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $\varphi$  עוקפה אזי  $\varphi$  תקפה.  $\varphi$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $\varphi$  עקפה אזי  $\varphi$  תקפה.  $\varphi$  מילון תהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $\varphi$  עוסחה אזי  $\varphi$  נוסחה אזי  $\varphi$  מילון תהא  $\varphi$  קבוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $\varphi$  מילון תהא  $\varphi$  פוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $\varphi$  מילון תהא  $\varphi$  פוצת נוסחאות ותהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $\varphi$  מילון תהא  $\varphi$  נוסחה אזי נוסחף מילון תהא  $\varphi$  נוסחה אזי נוסחף מילון תהא  $\varphi$  נוסחה אזי נוסחף מילון תהא  $\varphi$  מילון תהא  $\varphi$  מילון תהא  $\varphi$  מילון תהא  $\varphi$  נוסחף מילון נוסחף מילון תהא  $\varphi$  נוסחף מילון נוסחף מילון תהא  $\varphi$  נוסחף מילון נוסחף

```
\text{.FV}\left(\varphi\right)=\varnothing עבורה עבורה אזי נוסחה \sigma יהי יהי יהי פסוק:
                           \left(\Gamma \stackrel{t}{\models} arphi 
ight) \Longleftarrow \left(\Gamma \stackrel{v}{\models} arphi 
ight) מילון תהא \sigma מילון תהא קבוצת פסוקים ותהא \varphi נוסחה אזי מילון תהא
   \Gamma = \Gamma מילון תהא \Gamma = \Gamma קבוצת נוסחאות ותהא \varphi נוסחה אזי וועהא \Gamma = \Gamma הינה \Gamma מילון תהא \Gamma קבוצת נוסחאות ותהא \Gamma
                          . (\varphi\Longleftrightarrow\psi))\Longleftrightarrow(סענה: יהי \sigma מילון ותהיינה \varphi,\psi נוסחאות אזי (\varphi,\psi הון היינה \sigma יהי מילון ותהיינה מילון ותהיינה אזי (\varphi,\psi
.arphi^ee = orall x_1 orall x_2 \ldots orall x_n arphi אזי איז איז היי \sigma מילון ותהא arphi נוסחה עבורה \{x_1,\ldots,x_n\} אזי פולון ותהא מילון ותהא
         .arphi^\exists=\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_narphi אזי איזי היישי: יהי \sigma מילון ותהא arphi נוסחה עבורה עבורה arphi^\exists=\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_n
                                                               .\Gamma^\forall=\left\{\varphi^\forall\mid\varphi\in\Gamma\right\}ייהי נוסחאות נוסחא\Gammaותהא מילון יהי יהי סימון: יהי מילון ותהא
```

טענה: יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\varphi$  נוסחה ויהי M מבנה אזי ( $^{\forall}$  ספיק ב־ $(M \models \varphi)$ ).  $(\Gamma \stackrel{v}{\models} \varphi) \iff (\Gamma^{\forall} \stackrel{v}{\models} \varphi^{\forall}) \iff (\Gamma^{\forall} \stackrel{v}{\models} \varphi^{\forall}) \iff (\Gamma^{\forall} \stackrel{v}{\models} \varphi^{\forall}) \iff (\Gamma^{\forall} \stackrel{v}{\models} \varphi^{\forall})$ טענה: יהי  $\sigma$  מילון תהא  $G:D^M \to D^N$  מבנים מעל  $\sigma$  אזי  $G:D^M \to D^N$  חח"ע ועל עבורה

 $G\left(c^{M}
ight)=c^{N}$  מתקיים  $c\in\sigma$  לכל סימו קבוע

- $G\left(f^{M}\left(a_{1}\ldots a_{n}
  ight)
  ight)=f^{N}\left(G\left(a_{1}
  ight)\ldots G\left(a_{n}
  ight)
  ight)$  מתקיים  $a_{1}\ldots a_{n}\in D^{M}$  ולכל  $f\in\sigma$  ולכל סימן פונקציה
- $.((a_1\dots a_n)\in R^M)\Longleftrightarrow ((G\left(a_1
  ight)\dots G\left(a_n
  ight))\in R^N)$  מתקיים  $a_1\dots a_n\in D^M$  ולכל  $R\in\sigma$  ולכל סימן יחס

Mר G מבנים איזומורפיים: יהי  $\sigma$  מילון אזי מבנים M,N מעל M עבורם קיים איזומורפיים: יהי  $\sigma$ 

 $M\cong N$  אזי  $\sigma$  אזי מעל מבנים איזומורפיים מעל M,N אזי מילון יהי יהי  $\sigma$ 

M,N מבנים איזומורפיים מעל  $\sigma$  ויהי  $\sigma$  פסוק איזי מבנים M,N מבנים מבנים מעל מילון יהי

.= עזרת את ונסמן את ונסמן  $\mathrm{Id}^M=\mathrm{Id}_M$  נגדיר ונדיר אזי לכל מבנה וויון איזי דו־מקומי אזי לכל מבנה וויחס מילון בעל אחס שיוויון איזי לכל מבנה וויחס מילון איזי לכל מבנה וויחס בעזרת

הערה: אלא אם כן נאמר אחרת מכאן והלאה כל המילונים הם חסרי שיוויון.

אזי משתנה x משתנה אזי אמות עצם ויהי הצבת המשתנה: יהיו

- s[r/x] = s אם s סימן קבוע אזי s
  - s[r/x] = r אז s = x ס  $\bullet$
- s[r/x] = s משתנה אזי  $s \neq x$  סשתנה  $s \neq s$
- $s\left[r/x
  ight]=f\left(t_1\left[r/x
  ight]\ldots t_n\left[r/x
  ight]
  ight)$  אם  $s=f\left(t_1\ldots t_n
  ight)$  אם  $s=f\left(t_1\ldots t_n
  ight)$

הצבת שם עצם בנוסחה: תהא  $\varphi$  נוסחה יהי שמות עצם ויהי x משתנה אזי

- $.arphi\left[r/x
  ight]=R\left(t_{1}\left[r/x
  ight]\ldots t_{n}\left[r/x
  ight]
  ight)$  אם  $arphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}
  ight)$  אי
  - $.\varphi\left[r/x
    ight]=\neg\left(lpha\left[r/x
    ight]
    ight)$  אז  $\varphi=\neglpha$  שמ
  - $.\varphi\left[r/x
    ight]=\alpha\left[r/x
    ight]\circ\beta\left[r/x
    ight]$  אם  $\varphi=\alpha\circ\beta$  אז
    - $\varphi[r/x] = \forall x \alpha$  אזי  $\varphi = \forall x \alpha$  •
    - $.arphi\left[r/x
      ight]=\exists xlpha$  אזי  $arphi=\exists xlpha$  •
  - $.arphi\left[r/x
    ight]=orall y\left(lpha\left[r/x
    ight]
    ight)$  אם  $arphi=orall y\left(lpha\left[r/x
    ight]
    ight)$  אז באשר arphi=arphi
  - $.arphi\left[r/x
    ight]=\exists y\left(lpha\left[r/x
    ight]
    ight)$  אזי x
    eq y באשר  $arphi=\exists ylpha$  שם  $arphi=\exists ylpha$

שם עצם חופשי להצבה בנוסחה: תהא arphi נוסחה ויהי x משתנה אזי

- r אזי שם עצם  $\varphi=R\left(t_{1}\ldots t_{n}\right)$  אזי שם עצם
- lphaאזי שם עצם r באשר אונשי להצבה ב־arphi אוי שם עצם arphi אוי שם עצם •
- etaוכן ב־lpha וכן הצבה להצבה lpha אוי שם עצם r באשר איי שם עצם arphi אם arphi
- x אינו מופיע או אינו חופשי ב־ $\varphi=\forall y \alpha$  אם  $\sigma=\forall y \alpha$  אם  $\sigma=\forall y \alpha$
- x אזי שם עצם אוי חופשי ב־arphi אזי אינו מופיע או אינו מופיע א arphi וכן  $arphi=\exists y lpha$
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$  וכן  $\alpha$ וכן הצבה ב־ $\alpha$  אזי שם עצם r אזי שם עצם אזי אזי  $x \in \mathrm{FV}(\varphi)$  וכן  $\varphi = \forall y \alpha$
- $y \notin \mathrm{FV}(r)$  וכן lphaוכן lpha וכן lpha אזי שם עצם r באשר r אזי שם עצם lpha אזי שם עצם lpha אם lpha

כך  $f:\{$ נוסחאות $\} o \mathcal{P}\left(\{x_i\}
ight)$  כדיר נגדיר נגדיר

- $f(\varphi) = \varnothing$  אזי  $\varphi = R(t_1 \dots t_n)$  אם
  - $f(\varphi) = f(\alpha)$  אזי  $\varphi = \neg \alpha$  אם •
- $f(\varphi) = f(\alpha) \cup f(\beta)$  אזי  $\varphi = \alpha \circ \beta$  אם
  - $f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\}$  אזי  $\varphi = \forall x \alpha$  אם •

```
f(\varphi) = f(\alpha) \cup \{x\} אזי \varphi = \exists y \alpha אם •
```

עבור חדש עבור אז  $y\in \mathrm{FV}(r)$  לכל (קיכל הצבה בי $\varphi$ ) שם עצם אזי r שם עצם אזי שם עצם אזי (r חופשי להצבה בי $\varphi$ ) לכל  $(\varphi[r/x])$  בי $(\varphi[r/x])$ .

 $v\left[\overline{v}(r)/x
ight](y)=\left\{egin{array}{ll} v(y) & x
eq y \ \overline{v}(r) & ext{else} \end{array}
ight.$  שם עצם אזי נגדיר השמה s שם עצם יהי s משתנה ויהי s שם עצם אזי נגדיר שמה s

 $\overline{v}(s[r/x]) = \overline{v[\overline{v}(r)/x]}(s)$  אזי שם עצם אזי משתנה ויהי x משתנה אזי s שם עצם אזי יהי s

 $.\overline{v}\left(arphi\left[r/x
ight]
ight)=\overline{v\left[\overline{v}(r)/x
ight]}\left(arphi
ight)$  אזי arphi אזי משתנה ויהי r שם עצם חופשי להצבה ב־arphi אזי arphi נוסחה יהי x משתנה ויהי

 $.\overline{v}\left(arphi
ight)=\overline{v\left[v(x)/y
ight]}\left(arphi\left[y/x
ight]
ight)$  אזי arphi נוסחה יהי x משתנה ויהי y משתנה חופשי להצבה ב־arphi אזי arphi נוסחה יהי x משתנה ויהי

טענה שינוי שם משתנה: תהא  $\varphi$  נוסחה ויהי y משתנה אשר אינו מופיע ב־ $\varphi$  אזי

- $(\exists x\varphi) \equiv^t (\exists y (\varphi [y/x])) \bullet$
- $.(\forall x\varphi) \equiv^t (\forall y (\varphi [y/x])) \bullet$

 $X_{\{arphi|}$  נוסחה חסרת כמתים יפרא (א $\{arphi,\{orall,\exists\}\}$ : PNF הצורה הנורמלית

מסקנה: תהא  $\varphi$  נוסחה אזי ( $\varphi$  בצורת PNF) (קיימת נוסחה  $\alpha$  חסרת כמתים וכן  $x_1\dots x_n$  משתנים וכן בצורת  $\varphi$ ). ( $\varphi=Q_1x_1\dots Q_nx_n\alpha$ 

טענה: תהיינה  $arphi,\psi$  נוסחאות אזי

- $(\forall x (\varphi \wedge \psi)) \equiv^t ((\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)) \bullet$
- $(\exists x (\varphi \lor \psi)) \equiv^t ((\exists x \varphi) \lor (\exists x \psi)) \bullet$
- $.((\forall x\varphi)\lor\psi)\equiv^t(\forall x\,(\varphi\lor\psi))$  אזי  $x\notin\mathrm{FV}\,(\psi)$  תהא
- $((\exists x\varphi) \land \psi) \equiv^t (\exists x (\varphi \land \psi))$  אזי  $x \notin FV(\psi)$  תהא
  - $(\neg(\forall x\varphi)) \equiv^t (\exists x (\neg\varphi)) \bullet$
  - $.(\neg(\exists x\varphi)) \equiv^t (\forall x(\neg\varphi)) \bullet$

 $arphi \equiv^t lpha$  עבורה PNF בצורת נוסחה אזי קיימת נוסחה אזי קיימת נוסחה עבורה עבורה פשפט:

 $arphi=orall x_1\dotsorall x_n$  המקיימת המקיימת הסרת כמתים באשר האפר באשר המקיימת המקיימת פסוק עבורו היימת נוסחה החסרת כמתים באשר האפר המקיימת פסוק פסוק אוניברסלי:

 $arphi=\exists x_1\ldots\exists x_n$ מ המקיימת arphi עבורו קיימת נוסחה lpha חסרת כמתים באשר  $\{x_1\ldots x_n\}$  המקיימת arphi

 $(\sigma \cup \{c\})$  ספיקה מעל  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  ויהי סימן קבוע  $c \notin \sigma$  אזי אזי  $c \notin \sigma$  אזי סימן תהא  $\sigma$  נוסחה מעל  $\sigma$  נוסחה מעל  $\sigma$ 

 $\sigma\cup\{f\}$  ספיק מעל המילון  $\forall y_1\ldots \forall y_n\ (arphi\ [f(y_1\ldots y_n)/x]))$  ספיק מעל  $\forall y_1\ldots \forall y_n\ \exists xarphi$  ספיק מעל מילון באשר f פונקציה  $\sigma$ ־מקומית).

 $\mathrm{sk}\,(arphi)$  (ספיק) עבורו  $\sigma'$  עבורו משפט סקולם: קיים אלגוריתם אוניברסלי מעל מילון  $\sigma$  מעל מילון מעל מילון  $\sigma$  מעל מילון ספיק).

 $\operatorname{sk}(\varphi)$  מילון מוגדר מינימלי המילון המינימלי מוגדר פקולמיזציה מילון יהי  $\sigma$  מילון מילון מוגדר

אלגוריתם לוגיקה מסדר ראשון לתחשיב הפסוקים: יהי  $\sigma$  מילון תהא  $\{p_i\mid i\in\mathbb{N}\}$  נוחסאות אטומיות סגורות  $f:\{$  הפיכה ותהא הפיכה לוגיקה מסדר ראשון לתחשיב הפסוקים: יהי  $\sigma$  ולכל שם עצם ב־f נוסחה סגורה חסרת כמתים אזי g ולכל שם עצם בר בי מחליפו ב־f נוסחה סגורה חסרת כמתים אזי ווער איזי בי ווער איזי ווער איזי

טענה: יהי סגורה סגורה סגורה סגורה הפיכה  $f:\{$ וחסאות אטומיות האורן נוחסאות מילון הא און מילון האי  $\sigma$  יהי סענה: יהי סגורה חסרת כמתים אזי

- . ספיק) FOLWFF  $(\varphi)$ ספיק) ספיק) •
- . (אוטולוגיה) אוטולוגיה) אוטולוגיה) אוטולוגיה)  $\varphi$

 $v\left(p_i
ight)=(M\modelslpha_i)$  כך WFF למה: תהא  $lpha_1\ldotslpha_k$  נגדיר השמה של מהורכבת מהנוסחאות המורכבת מהנוסחאות האטומיות  $(M\modelsarphi)\Longleftrightarrow(\overline{v}\left( ext{FOLWFF}\left(arphi
ight))=T
ight)$  אזי

שם עצם סגור: שם עצם חסר משתנים.

מבנה M מילון אזי מבנה  $\sigma$  יהי מבנה מבנה מבנה

- $a \cdot \alpha^M = a$  לכל  $a \in D^M$  לכל  $a \in D^M$  לכל
  - $lpha^M 
    eq eta^M$  יהיו אזי שמות עצם שונים אזי יהיו lpha, eta

בן־מנייה.  $D^M$  אזי אזי  $\sigma$  מבנה הרברנד של מבנייה ויהי ויהי M בן־מנייה מסקנה: יהי מילון בן־מנייה ויהי

 $D^M = \{ arphi \mid \sigma$ ם משתנים חסר משתנים כי ניתן לכתוב ליכתוב כי ניתן מבנה הרברנד נובע כי ניתן הערה:

 $\sigma$  על M על מסקנה: יהי מילון בעל סימן קבוע אזי קיים מבנה מסקנה: מסקנה

 $v\left(x_{i}
ight)=t_{i}$  טענה: יהי M מבנה הרברנד מעל  $\sigma$  ותהא ותהא  $v\left(x_{i}
ight)$ 

 $.\overline{v}\left(r
ight)=r\left[{}^{t_{1}}\!/x_{1},\ldots,{}^{t_{n}}\!/x_{n}
ight]$  אזי  $\mathrm{FV}\left(r
ight)=\left\{x_{1}\ldots x_{n}
ight\}$  שם עצם באשר  $\cdot$ 

- $(M,v\models\varphi)\Longleftrightarrow (M\modelsarphi\left[t_{1}/x_{1},\ldots,t_{n}/x_{n}
  ight])$  אזי FV  $(arphi)=\{x_{1}\ldots x_{n}\}$  נוסחה באשר
  - . עבורו g עבורו g טפיקה) פפיקה) פפיקה אזי (קיים שם עצם סגור של עבורו g עבורו g
- . תקפה)  $\varphi\left[s/x
  ight]$  פסוק אזי ( $\exists x arphi$  תקפה) פורח אזי  $\varphi\left[s/x
  ight]$  פסוק אזי ( $\exists x arphi$  תקפה).
  - . תהא  $\varphi$  נוסחה אזי ( $\forall x \varphi$ ) ספיקה) ספיקה אור s מתקיים כי  $\forall x \varphi$ ) ספיקה).
- . תקפה)  $\varphi\left[s/x
  ight]$  מתקיים כי S מתקיים לכל שם עצם חסר משתנים אזי (לכל שה  $\forall x \varphi$  תקפה) עבורה עבורה  $\varphi\left[s/x
  ight]$  מתקיים כי

משפט הרברנד: יהי  $\sigma$  מילון ויהי  $\varphi$  פסוק אוניברסלי אזי ( $\varphi$  ספיק) ספיק במבנה הרברנד: יהי  $\sigma$  מילון ויהי

אזי FV  $(arphi)=\{x_1\dots x_n\}$  מופעי בסיס: תהא arphi נוסחה חסרת כמתים באשר מופעי

. GroundInstance ( $\Gamma$ ) =  $\bigcup_{\varphi \in \Gamma}$  GroundInstance ( $\varphi$ ) אוניברסליים אוניברסליים אוניברסליים הא

 $\Gamma$  ספיקה במבנה הרברנד). סענה: תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים סגורים חסרי כמתים אזי ( $\Gamma$  ספיקה)

משפט: תהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים אוניברסליים התב"ש

- . ספיקה Γ •
- ספיקה במבנה הרברנד.  $\Gamma$
- .ספיקה GroundInstance  $(\Gamma)$
- ספיקה במבנה הרברנד. GroundInstance  $(\Gamma)$

משפט הקומפקטיות: יהי  $\sigma$  מילון תהא קבוצת נוחסאות ותהא  $\sigma$  נוסחה אזי

- . (לכל  $\Delta \subseteq \Gamma$  ספיקה) ספיקה) ספיקה) ספיקה) •
- $\Delta = \Gamma$  (בורה  $\varphi$  סופית עבורה  $\Delta \subseteq \Gamma$  (קיימת  $\Delta \subseteq \Gamma$ ).
- $\Delta \subseteq \varphi$  סופית עבורה  $\Delta \subseteq \Gamma$ ). ( $\Gamma \models \varphi$ ).

 $(y^-)$  משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות  $\Gamma$  מעל  $\{E(\cdot,\cdot)\}$  המקיימת מעלה: יהיו x,y משתנים אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות מעלה: עבורם  $t_1 \dots t_n$  נוסחה ללא כמתים מעל  $\sigma$  אזי (קיימים שמות עצם סגורים  $\varphi$  נוסחה ללא כמתים מעל  $\sigma$  אזי (קיימים שמות עצם סגורים  $\varphi$ ...  $\varphi$  [ $t_1/x$ ]  $\vee \ldots \vee \varphi$  [ $t_n/x$ ]

> $a \in D^H$  עבורו עבורו t עבורו לכל שם שם עצם שם עצם אפיים מעל  $\sigma$  עבורו מעל  $\sigma$  עבורו מבנה מיקין: יהי  $\sigma$  מילון אזי מבנה tעבורו מבנה  $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$  אזי מבנה  $\{c_0,c_1,f_+,f_ imes,R_>\}$  עבורו יהי מילון עם שיוויון

 $c_1^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=1$  וכן  $c_0^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=0$  וכן  $D^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}=\mathbb{N}$ 

- $f_{+}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a,b) = a+b \bullet$
- $.f_{\times}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}(a,b) = a \times b \bullet$  $.((a,b) \in R_{>}^{\mathcal{M}_{\mathbb{N}}}) \Longleftrightarrow (a > b) \bullet$

.AT =  $\{lpha\mid (\mathcal{M}_{\mathbb{N}}\modelslpha)\land (\mathrm{FV}\,(lpha)=\varnothing)\}$  אזי  $\{c_0,c_1,f_+,f_{ imes},R_{>}\}$  אזיי יהי מילון

 $\mathcal{M}_{\mathbb{N}}$ ילי אינו איזומורפי ל $M \models$  AT עבורו איז מבנה  $\{c_0, c_1, f_+, f_{ imes}, R_{>}\}$  איז אינו איזומורפי ל  $|D^M|>leph_0$  אזי אזי של סטדנרטי של מודל אזי מודל אזי מודל א

 $|M| = |D^M|$  אזי אזי  $\sigma$  מבנה מעל מבנה: יהי מילון ויהי מילון ויהי

 $\varphi$  בו M משפט לוונהיים־סקולם היורד: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  אזי ( $\varphi$  ספיקה) משפט לוונהיים מכנה לכל היותר בן־מנייה ספיקה).

משפט לוונהיים־סקולם העולה: יהי  $\sigma$  מילון יהי M מבנה בן־מנייה ותהא  $\varphi$  נוסחה מעל  $\sigma$  באשר  $\sigma$  ספיקה ב־M אזי לכל עוצמה M'מעוצמה  $\kappa$  עבורו  $\varphi$  ספיקה ב־M' אינסופית  $\kappa$  קיים מבנה

 $(|M|=\kappa) \Longleftrightarrow (M\models \Gamma)$  מעל  $\sigma$  המקיימת  $\sigma$  אוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות משקנה: יהי  $\sigma$  מילון ותהא א עוצמה אינסופית אזי לא קיימת קבוצת נוסחאות הערה: אקסיומות ZFC מנוסחות בלוגיקה מסדר ראשון.

מסקנה: קיים מבנה בן־מנייה לתורת הקבוצות.

.VALID =  $\{\langle \sigma, \varphi \rangle \mid (\sigma \text{ dodn } \varphi) \land ($ ימון:  $\{\sigma, \varphi \mid (\sigma \varphi) \land (\sigma \varphi) \}$ 

. $ext{VALID} \in \mathcal{RE}$  משפט אלגוריתם בדיקת תקפות: יהי  $\sigma$  מילון אזי

 $\perp$  HALT  $\leq_m$  VALID משפט צ'רץ'־טיורינג:

.VALID  $\notin \mathcal{R}$  מסקנה:

בעזרת  $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$  את ניתן לרצף אזי האם בצבע צלע שלהם בעלי אלע מאורך 1 וכן בעלי צלע בעלי אזי יהיו יהיו יהיו אזי יהיו  $R_1 \dots R_n$ הריבועים באשר כל שני ריבועים סמוכים חולקים צבע בצלע חיבורם. עבורה  $f:\mathbb{N}^2 o [n]$  אזי  $R:[n]^2 imes \{ ext{left, right, above, below}\} o \{ ext{yes, no}\}$  אוותהא  $n\in\mathbb{N}_+$  יהי הריצוף: יהי

- $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n-1\\m\end{smallmatrix}\right),\operatorname{left}\right)=\operatorname{yes}$  מתקיים  $n\in\mathbb{N}_{+}$  ולכל  $m\in\mathbb{N}$ 
  - $.R\left(f\left(rac{n}{m}
    ight),f\left(rac{n+1}{m}
    ight),\mathrm{right}
    ight)=$  yes מתקיים  $m,n\in\mathbb{N}$  לכל
- $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n\\m+1\end{smallmatrix}\right),\mathrm{above}\right)=\mathrm{yes}$  מתקיים  $n\in\mathbb{N}_{+}$  ולכל  $m,n\in\mathbb{N}$ 
  - $R\left(f\left(\begin{smallmatrix}n\\m-1\end{smallmatrix}\right),f\left(\begin{smallmatrix}n\\m-1\end{smallmatrix}\right),$  below)= yes מתקיים  $n\in\mathbb{N}$  ולכל  $m\in\mathbb{N}_{+}$  לכל

.TILING =  $\{(n,R,f) \mid R$  סימון:  $\{f\}$  פתרון לבעיית הריצוף עבור

.VALID  $\leq_m$  TILING :משפט

.TILING  $otin \mathcal{R}$  מסקנה:

יחס קונגרואנציה: יהי  $\sigma$  מילון אזי  $E \in \sigma$  סימן יחס דו־מקומי המקיים

- $\forall x (E(x,x))$  רפלקסיבי:
- $. \forall x \forall y \, (E \, (x,y) \Longrightarrow E \, (y,x)) \, :$  סימטרי
- $\forall x \forall y \forall z \left( \left( E\left( x,y \right) \wedge E\left( y,z \right) \right) \Longrightarrow E\left( x,z \right) \right) :$ טרנזיטיבי
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left( \left( igwedge_{i=1}^n E\left(x_i, y_i
  ight) 
  ight) \Longrightarrow E\left( f\left(x_1 \ldots x_n
  ight), f\left(y_1 \ldots y_n
  ight) 
  ight) 
  ight)$  לכל  $\sigma$
- $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n \left( \left( igwedge_{i=1}^n E\left(x_i,y_i
  ight) 
  ight) \Longrightarrow \left( R\left(x_1 \ldots x_n 
  ight) \Longleftrightarrow R\left(y_1 \ldots y_n 
  ight) 
  ight) 
  ight)$  פימן יחס מתקיים  $R \in \sigma$  לכל  $\sigma$

הערה: במקום את המילון עם שיוויון  $\sigma$  ניתן לחשוב על השיוויון בתור קונגרואנציה ולכן נסמן  $\sigma_E$  את המילון עם קונגרואנציה במקום שיוויוו  $\sigma_E$  שיוויוו

מעל  $\sigma_E$  מעל מבנה  $M_E$  מבנה על מבנה אזי מבנה מיוויון ייהי מילון מיוויון ייהי מילון מחלקות קונגרואנציה: יהי מילון מיוויון ייהי מילון מחלקות מונגרואנציה

- $.D^{M'}=D^M/E$  •
- $.f^{M'}\left([a_1]_E\,,\ldots,[a_n]_E
  ight)=\left[f^M\,(a_1\ldots a_n)
  ight]_E$  מתקיים של פונקציה לכל סימן פונקציה  $f\in\sigma$ 
  - $R^{M'}\left([a_1]_E,\ldots,[a_n]_E
    ight)\Longleftrightarrow R^M\left(a_1\ldots a_n
    ight)$  מתקיים  $R\in\sigma$  לכל סימן יחס

 $v_E:\{x_i\} o D^{M_E}$  באשר גדיר השמה נגדיר השמה v מבנה מעל מילון יהי שיוויון יהי M מבנה מעל  $\sigma$  ותהא v נוסחה מעל מילון  $\sigma$  עם שיוויון יהי M מבנה מעל M M מבנה M אזי M עם שיוויון יהי M מבנה מעל M מבנה מעל M אזי M עם שיוויון יהי M מבנה מעל M מבנה M מבנה מעל M מבנה M מבנה מעל M מבנה מעל M מבנה מעל M מבנה M מבנה מעל M מבנה M מבנה

 $\sigma'$  משפט:  $\phi$  מעל מילון  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון ש ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון באשר  $\psi$  מעל מילון מעל מילון  $\sigma$  ומחזיר נוסחה חסרת שיוויון  $\psi$  באשר  $\psi$  באשר  $\psi$  מעל מילון עם שיוויון  $\phi$  ספיק).

.(ספיקה) ספיקה) אזי ( $\Gamma_E$ ) ספיקה) משפט: תהא  $\Gamma$  ספיקה מעל  $\sigma$  עם שיוויון אזי ( $\sigma$ 

 $\Delta$  סופית (לכל G ספיקה) (לכל G ספיקה) משפט הקומפקטיות: יהי G מילון עם שיוויון תהא קבוצת נוחסאות ותהא קבוצת נוחסאות ותהא ספיקה).

הגדרה: יהי $\sigma=\{R\left(\cdot,\cdot
ight)\}$  מילון עם שיוויון אזי

- $.\xi_1 = \forall x \left( \neg \left( R \left( x, x \right) \right) \right) \bullet$
- $.\xi_2 = \forall x \forall y \forall z \left( \left( R\left( x, y \right) \land R\left( y, z \right) \right) \Longrightarrow R\left( x, z \right) \right) \bullet$ 
  - $.\xi_{3} = \forall x \forall y ((x \neq y) \Longrightarrow (R(x,y) \lor R(y,x))) \bullet$ 
    - $.\xi_4 = (\forall x \exists y (R(x,y))) \land (\forall x \exists y (R(y,x))) \bullet$
- $.\xi_5 = \forall x \forall y ((R(x,y)) \Longrightarrow (\exists z (R(x,z) \land (R(z,y))))) \bullet$ 
  - $\xi = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \bullet$

 $M\cong N$  אזי א אזי משפט קנטור: יהי  $\delta=\{R\left(\cdot,\cdot
ight)\}$  משפט המספקים את מיוויון ויהיו משפט מילון יהי

. Gen :  $\frac{\alpha}{\forall x \alpha}$  אזי נוסחה מילון ותהא מילון יהי  $\sigma$  מילון יהי

מערכת ההוכחה של הילברט (HC): יהי  $\sigma$  מילון אזי

- $.\Sigma = \sigma$  :אלפבית
- $N=X_{\{t\mid$ שם עצם  $t\},\{\lnot,\Longrightarrow,orall \}}$  נוסחאות:
  - :אקסיומות
  - $A_1 = (\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$  -
- $A_2 = ((\alpha \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \gamma)) \Longrightarrow ((\alpha \Longrightarrow \beta) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow \gamma)))$  -
  - $A_3 = (((\neg \alpha) \Longrightarrow (\neg \beta)) \Longrightarrow (\beta \Longrightarrow \alpha))$  -

```
A_4 = ((orall x lpha) \Longrightarrow lpha [t/x]) יהי אזי להצבה במקום להצבה להצבה חופשי להצבה במקום x
```

$$A_5 = ((\forall x (\alpha \Longrightarrow \beta)) \Longrightarrow (\alpha \Longrightarrow (\forall x \beta)))$$
 אזי  $x \notin FV(\alpha)$  יהי -

 $.F = \{ MP, Gen \}$  כללי היסק:

הערה: מערכת ההוכחה HC הינה מערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ולא תחשיב הפסוקים.

הערה: במערכת הוכחה מעל לוגיקה מסדר ראשון ניתן לעשות שינוי שם בנוסחה.

 $\left(\Gamma \overset{\vdash}{\models} \alpha\right) \Longrightarrow \left(\Gamma \overset{v}{\models} \alpha\right)$  אזי או HC ותהא ווחה מעל או הנחות מעל הנאותות: יהי  $\sigma$  מילון תהיינה ווחה מעל

.\big|  $\alpha$  [ $arphi_1/p_1\ldotsarphi_n/p_n$ ] נוסחאות אזי ( $\alpha$ ) פסוק באשר אור  $\alpha$  וכן  $\alpha$  ( $\alpha$ ) ויהיו  $\alpha$  ( $\alpha$ ) ויהיו  $\alpha$  פסוק באשר אור  $\alpha$  פסוק באשר אור  $\alpha$  וכן  $\alpha$ 

Gen משפט הדידוקציה: תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל HC ותהיינה  $\alpha, \beta$  וותהיינה אות מעל הופעל כלל הופעל בחוכחה לא הופעל כלל  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  וכן בהוכחה לא הופעל כלל הופעל כלל הדידוקציה: תהיינה  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  הנחות מעל השתנה חופשי ב $\Gamma \cup \{\alpha\}$  הופעל כלל הופעל הופעל הופעל כלל הופעל כלל הופעל ה

על משתנה חופשי ב־ $\alpha$  אזי ( $\alpha\Longrightarrow\beta$ ) אזי ( $\Gamma \vdash_{\rm HC}(\alpha\Longrightarrow\beta)$  אזי ( $\Gamma \vdash_{\rm HC}(\alpha\Longrightarrow\beta)$  אזי ( $\Gamma \vdash_{\rm HC}(\alpha\Longrightarrow\beta)$  וכן בהוכחות משפט הדיכוטומיה: תהיינה  $\Gamma$  הנחות מעל HC ותהיינה ( $\Gamma \vdash_{\rm HC}(\alpha)$  וכן בהוכחות (לא הופעל כלל Gen על משתנה חופשי ב- $\Gamma \vdash_{\rm HC}(\alpha)$ 

 $\sigma$  מעל  $\sigma$  מחקיים  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עבורה לכל פסוק  $\sigma$  מתקיים מתקיים  $\sigma$  מילונים באשר  $\sigma$  מילונים באשר  $\sigma$  אזי קבוצת נוסחאות  $\sigma$  מעל  $\sigma$  מילונים באשר  $\sigma$  מילונים

 $eg \forall x \varphi \in \Gamma$  פסוק וכן  $eg \forall x \varphi$  באשר  $eg \Rightarrow \neg \forall x \varphi$  באשר עבורה לכל נוסחה  $eg \Rightarrow \neg \forall x \varphi$  פסוק וכן  $eg \Rightarrow \neg \forall x \varphi \in \Gamma$  עבורה לכל נוסחה עבורה  $eg \Rightarrow \neg \varphi [c/x] \in \Gamma$  מתקיים שקיים שקיים שקיים שקיים עבורר  $eg \Rightarrow \neg \varphi [c/x] \in \Gamma$  עבורה עבורה עבורה שקיים שקיים

 $\Gamma \subset \Delta$  המקיימת  $\Sigma$  המלון ותהא  $\Gamma$  עקבית אזי קיים מילון  $\sigma \subset \Sigma$  וקיימת מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית עקבית אזי קיים מילון  $\sigma$  מילון ותהא

 $\Gamma \cup \{ \neg \varphi \, [c/x] \}$  אזי קבוע אזי  $\sigma$  מילון תהא עקבית תהא  $\sigma$  נוסחה באשר  $\sigma \neq \sigma$  פסוק וכן  $\sigma \neq \sigma$  ויהי  $\sigma \neq \sigma$  טימן קבוע אזי  $\sigma \in \sigma$  עקבית מעל  $\sigma \in \sigma$ 

 $\Gamma\subseteq \Delta$  משפט הנקין: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  עקבית אזי קיים מילון  $\sigma\subseteq \Sigma$  וקיימת של עקבית אזי קיים מילון עבורה  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית אזי קיים מילון עבורה אזי קיים מילון  $\sigma\subseteq \Sigma$  וקיימת  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית  $\sigma$  מילון ותהא  $\sigma$  עקבית אזי קיים מילון  $\sigma$  וקיימת  $\sigma$  וקיימת  $\sigma$  מעל  $\sigma$  עקבית  $\sigma$ .

עבורו מעל  $\sigma$  עקבית מהבנה מיקין יהי תכונת תכונת את שלמה שלמה עקבית עקבית מילון יהי  $\sigma$  יהי מילון יהי יהי טענה:

נוסחה אזי  $t_1 \dots t_n$  ולכל שמות עצם ואכל  $R \in \sigma$  לכל סימן לכל ( $(t_1 \dots t_n) \in R^M$ )  $\iff$   $(R(t_1 \dots t_n) \in \Gamma)$ 

 $M\models\Gamma$  עבורו מסקנה: יהי  $\sigma$  מילון אזי עבורו את אמקיימת שלמה מסקנית עקבית עקבית מילון יהי מילון יהי מסקנה:

טענה: יהי  $\sigma$  מילון ותהא  $\Gamma$  קבוצת פסוקים התב"ש

- .Th  $(M)={
  m Th}\,(N)$  מתקיים  $\Gamma$  מתקיים M,N המספקים  $\bullet$ 
  - $(\Gamma \vdash \varphi) \lor (\Gamma \vdash (\neg \varphi))$  מתקיים  $\varphi$  מתקיים •

.ewrepsilon arphi מערכת הוכחה קיים פסוק א המקיים בלוגיקה מסדר האשון א המקיים פסוק מערכת הוכחה מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר האשון א המקיים פסוק

 $(\vdash \varphi) \lor (\vdash (\lnot \varphi))$  מערכת הוכחה שלמה: מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון מעבורה לכל פסוק  $\varphi$  מתקיים

מערכת הוכחה אפקטיבית: מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון ( $\Sigma,N,A,F$ ) עבורה מערכת מערכת

איי שיוויון אזי  $\{c_0, \mathrm{succ}, *, +, <\}$  אקסיומות אריתמטיקת פיאנו: יהי

- $\forall y (\operatorname{succ}(y) \neq c_0) \bullet$
- $\forall x \forall y ((\operatorname{succ}(x) = \operatorname{succ}(y)) \Longrightarrow (x = y)) \bullet$
- $.\forall y_1 \ldots \forall y_n \left( \left( \varphi \left( c_0, y_1 \ldots y_n \right) \wedge \left( \forall x \left( \varphi \left( x, y_1 \ldots y_n \right) \right) \right) \Rightarrow \varphi \left( \operatorname{succ} \left( x \right), y_1 \ldots y_n \right) \right) \right) \Longrightarrow \left( \forall x \varphi \left( x, x, y_1 \ldots y_n \right) \right) \right)$ 
  - $\forall x (x + c_0 = x) \bullet$
  - $\forall x \forall y (x + \operatorname{succ}(y) = \operatorname{succ}(x + y)) \bullet$ 
    - $\forall x (x * c_0 = c_0) \bullet$
  - $\forall x \forall y (x * \operatorname{succ}(y) = x + (x * y)) \bullet$
  - $\forall x \forall y ((x < y) \iff (\exists z ((z \neq c_0) \land (x + z = y)))) \bullet$

.PA =  $\{$ סימון: יהי  $\{c_0, \mathrm{succ}, *, +, <\}$  מילון עם שיוויון אזי  $\{$ אקסיומות אריתמטיקת פיאנו $\}$  מערכת הוכחה אריתמטית: מערכת הוכחה בלוגיקה מסדר ראשון  $(\Sigma, N, A, F)$  עבורה  $\{C_0, \mathrm{succ}, *, +, <\}$  מערכת הוכחה עקבית אפקטיבית ואריתמטית בלוגיקה מסדר ראשון אזי  $\{C_0, \mathrm{succ}, *, +, <\}$  אינה שלמה.