

**הצרנה:** הפיכת פסוק מילולי לשפה של צורות מתמטיות.

**פסוק יסודי:** טענה עצמית שיכולה להיות אמת או שקר.

**קשר הדיסיונקציה/או:** יהיו  $A, B$  פסוקים יסודיים אזי  $A \vee B$ .

**קשר הקוניונקציה/וגם:** יהיו  $A, B$  פסוקים יסודיים אזי  $A \wedge B$ .

**קשר האימפליקציה/גרירה:** יהיו  $A, B$  פסוקים יסודיים אזי  $A \implies B$ .

**קשר השלילה:** יהיו  $A, B$  פסוקים יסודיים אזי  $\neg A$ .

**פסוק/טענה:** יהיו  $A_1 \dots A_n$  פסוקים יסודיים אזי חיבור  $A_1 \dots A_n$  בעזרת קשרים בצורה חוקית.

**רישא:** יהי  $A \implies B$  פסוק אזי  $A$ .

**סיפא:** יהי  $A \implies B$  פסוק אזי  $B$ .

**השמה:** יהיו  $A_1 \dots A_n$  פסוקים יסודיים אזי קביעת ערך True או False לכל אחד מהם.

**סימון:** יהי  $A$  פסוק יסודי ותהא  $v$  השמה אזי  $v(A) = \text{True}$  אם קבענו כי  $A$  מקבל ערך אמת בהשמה  $v$ .

**סימון:** יהי  $A$  פסוק יסודי ותהא  $v$  השמה אזי  $v(A) = \text{False}$  אם קבענו כי  $A$  מקבל ערך שקר בהשמה  $v$ .

**הערה:** יהי  $A$  פסוק יסודי ותהא  $v$  השמה אזי  $((v(A) = \text{True}) \wedge (v(A) \neq \text{False})) \vee ((v(A) = \text{False}) \wedge (v(A) \neq \text{True}))$ .

**טבלת אמת:** יהיו  $A, B$  פסוקים יסודיים אזי טבלה המסכמת את כל ההשמות האפשריות.

**טענה טבלאות אמת של קשרים:** יהיו  $A, B$  פסוקים יסודיים אזי

$A$	$\neg A$	$A$	$B$	$A \implies B$	$A$	$B$	$A \wedge B$	$A$	$B$	$A \vee B$
		True	True	True	True	True	True	True	True	True
True	False	True	False	False	True	False	False	True	False	True
False	True	False	True	True	False	True	False	False	True	True
		False	False	True	False	False	False	False	False	False

**טענה:** יהיו  $A_1 \dots A_n$  פסוקים יסודיים אזי קיימות  $2^n$  השמות עבורם.

**הערה:** יהיו  $A, B$  פסוקים ותהא  $v$  השמה  $(v(A) = \text{False}) \implies (v(A \implies B) = \text{True})$  השמה.

**פסוקים שקולים:** יהיו  $A, B$  פסוקים נאמר כי  $A \equiv B$  אם לכל השמה  $v$  מתקיים  $v(A) = v(B)$ .

**טענה:** יהיו  $A, B$  פסוקים אזי

- $(A \implies B) \equiv ((\neg A) \vee B)$
- $(A \implies B) \equiv ((\neg B) \implies (\neg A))$
- $(\neg(\neg A)) \equiv A$
- $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
- $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
- $(\neg(A \implies B)) \equiv (A \wedge (\neg B))$
- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
- $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$
- $(A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C)$

**כללי דה מורגן:** יהיו  $A, B$  פסוקים אזי

- $(\neg(A \wedge B)) \equiv ((\neg A) \vee (\neg B))$
- $(\neg(A \vee B)) \equiv ((\neg A) \wedge (\neg B))$

**אם ורק אם (אם"ם):** יהיו  $A, B$  פסוקים אזי  $(A \iff B) \equiv ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$

**טאוטולוגיה:** פסוק  $A$  עבורו לכל השמה  $v$  מתקיים כי  $v(A) = \text{True}$ .

**סתירה:** פסוק  $A$  עבורו לכל השמה  $v$  מתקיים כי  $v(A) = \text{False}$ .

**מסקנה:** יהי  $A$  פסוק אזי  $(A \text{ סתירה}) \iff (\neg A \text{ טאוטולוגיה})$ .

**טענה:** יהי  $P$  פסוק אזי  $P \implies P$  טאוטולוגיה.

**טענה:** יהי  $P$  פסוק אזי  $P \vee (\neg P)$  טאוטולוגיה.

**פסוק נובע סמנטית:** יהיו  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  פסוקים אזי פסוק  $\alpha$  המקיים כי לכל השמה עבורה  $v(\alpha_1) = \dots = v(\alpha_n) = \text{True}$  מתקיים כי  $v(\alpha) = \text{True}$ .

**פרידיקט n-מקומי:** פסוק ב-n משתנים.

**כמת קיים:** קיים אובייקט שמקיים את הפרידיקט.

**סימון:** כמת קיים מסומן  $\exists$ .

**כמת לכל:** לכל אובייקט מתקיים הפרידיקט.

**סימון:** כמת לכל מסומן  $\forall$ .

**נוסחה יסודית:** יהי  $p$  פרידיקט חד-מקומי אזי  $\forall x.p(x)$  או  $\exists x.p(x)$ .

**נוסחה:** תהינה  $A_1 \dots A_n$  נוסחאות וטענות יסודיות אזי חיבור  $A_1 \dots A_n$  בעזרת קשרים וכמתים בצורה חוקית.

**תחום הכימות/עולם הדיון:** קבוצת האובייקטים שמהווים את המקור להצבות של משתנים.

**אינטרפרטציה של פרידיקט:** תהא  $p$  נוסחה ויהי  $D$  עולם הדיון אזי השמה מ- $D$ .

**סימון:** תהא  $p$  נוסחה ותהא  $v$  השמה מעולם דיון  $D$  אם לכל  $a$  ב- $D$  מתקיים  $p(a)$  אזי  $D \models \forall x.p(x)$ .

**סימון:** תהא  $p$  נוסחה ותהא  $v$  השמה מעולם דיון  $D$  אם קיים  $a$  ב- $D$  עבורו  $p(a)$  אזי  $D \models \exists x.p(x)$ .

**נוסחאות שקולות:** יהיו  $p, q$  נוסחאות עבורן לכל תחום כימות  $D$  מתקיים  $D \models (p \iff q)$ .

**סימון:** יהיו  $p, q$  נוסחאות שקולות אזי  $p \equiv q$ .

**טענה:** יהיו  $p, q, \varphi, \psi$  נוסחאות אזי

$$\bullet (\neg(\exists x.p(x))) \equiv (\forall x.(\neg p(x)))$$

$$\bullet (\neg(\forall x.p(x))) \equiv (\exists x.(\neg p(x)))$$

$$\bullet (\forall x.\forall y.\varphi(x, y)) \equiv (\forall y.\forall x.\varphi(x, y))$$

$$\bullet \exists x.\exists y.\varphi(x, y) \equiv \exists y.\exists x.\varphi(x, y)$$

$$\bullet \forall x.(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv (\forall x.\varphi(x)) \wedge (\forall x.\psi(x))$$

$$\bullet \exists x.(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv (\exists x.\varphi(x)) \vee (\exists x.\psi(x))$$

**הוכחת טענת קיים:**  $\exists x.P(x)$  נציג  $x$  עבורו מתקיים  $P(x)$ .

**הוכחת טענת לכל:**  $\forall x.P(x)$  נציג עבור  $x$  כללי בתחום הכימות.

**קיים יחיד:** תהא  $\varphi$  נוסחה אזי  $((\exists!x.\varphi(x)) \iff ((\exists x.\varphi(x)) \wedge (\forall x.\forall y.((\varphi(x) \wedge \varphi(y)) \implies (x = y))))$ .

**כתיב יוטא:** תהא  $\varphi$  נוסחה עבורה  $\exists!x.\phi(x)$  אזי  $\phi(\iota x.\phi(x))$  אמת.

**הערה:** אנו נעבוד מעל מערכת האקסיומות ZFC.

**קבוצה:** אוסף של איברים ללא חשיבות לסדר וללא חזרות.

**שייך:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $a \in A$  אם  $a$  נמצאת ב- $A$ .

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה ויהי  $a$  אזי  $(a \notin A) \iff (\neg(a \in A))$ .

**רישום קבוצה:**

• רשימת איברים:  $\{a_1, \dots, a_n\}$  באשר  $((a = a_1) \vee \dots \vee (a = a_n)) \iff (a \in \{a_1, \dots, a_n\})$ .

• עקרון ההפרדה:  $\{x \in A \mid \phi(x)\}$  באשר  $((a \in A) \wedge \phi(a)) \iff (a \in \{x \in A \mid \phi(x)\})$ .

• עיקון ההחלפה:  $\{f(x) \mid x \in A\}$  באשר  $(\exists x \in A.f(x) = a) \iff (a \in \{f(x) \mid x \in A\})$ .

**הקבוצה הריקה:**  $\emptyset = \{\}$ .

**הטבעיים:**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

**השלמים החיוביים:**  $\mathbb{N}_+ = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$ .

**הראשוניים:**  $\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}_+. ((1 < n < p) \implies n \nmid p)\}$ .

**השלמים:**  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .

**הרציונליים:**  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}_+\}$ .

**הממשיים:**  $\mathbb{R}$  "כל המספרים הממשיים".

**הממשיים החיוביים:**  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

**המרוכבים:**  $\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})\}$ .

**קטע/אינטרוול:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  באשר  $a \leq b$  אזי

$$\bullet (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$\bullet (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$\bullet [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$\bullet [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

**הכלה:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $(A \subseteq B) \iff (\forall x ((x \in A) \implies (x \in B)))$

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $\emptyset \subseteq A$

**סימון:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $(A \not\subseteq B) \iff (\neg (A \subseteq B))$

**מוכל ממש:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $(A \subset B) \iff ((A \subseteq B) \wedge (B \not\subseteq A))$

**טענה:** תהיינה  $A, B, C$  קבוצות אזי  $((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \implies (A \subseteq C)$

**שיוויון/עקרון האקסטנציונליות:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $(A = B) \iff (\forall x ((x \in A) \iff (x \in B)))$

**טענה:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $(A = B) \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

**טענה יחידות הקבוצה הריקה:**  $\forall X (\forall y. y \notin X \implies X = \emptyset)$

**חיתוך:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$

**איחוד:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

**חיסור:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

**משלים:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$

**הפרש סימטרי:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

**טענה:** תהיינה  $A, B, C$  קבוצות אזי

$$\bullet A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$\bullet A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$\bullet A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\bullet A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\bullet A \cup B = B \cup A$$

$$\bullet A \cap B = B \cap A$$

$$\bullet (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\bullet (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

**משפט האינדוקציה:** יהי  $P(x)$  פרידיקט אזי  $(\forall n \in \mathbb{N}. P(n)) \implies (P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \implies P(n+1)))$

**עוצמה:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $|A|$  היא כמות האיברים ב- $A$ .

**קבוצת החזקה:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

**הערה:** תהא  $A$  קבוצה סופית אזי  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

**טענה:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $(A \subseteq B) \iff (\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B))$

**חיתוך מוכלל:** תהא  $I$  קבוצה ותהא  $A_i$  קבוצה לכל  $i \in I$  אזי  $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I. x \in A_i\}$

**איחוד מוכלל:** תהא  $I$  קבוצה ותהא  $A_i$  קבוצה לכל  $i \in I$  אזי  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I. x \in A_i\}$

**סימון:** תהא  $I$  קבוצה ותהא  $A_i$  קבוצה לכל  $i \in I$  אזי  $\bigcap \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap_{i \in I} A_i$

**סימון:** תהא  $I$  קבוצה ותהא  $A_i$  קבוצה לכל  $i \in I$  אזי  $\bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} A_i$

**סימון:** תהא  $A_i$  קבוצה לכל  $i \in \mathbb{N}$  אזי  $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$

**סימון:** תהא  $A_i$  קבוצה לכל  $i \in \mathbb{N}$  אזי  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

**ערך שלם תחתון:** יהי  $x \in \mathbb{R}$  אזי  $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$

**ערך שלם עליון:** יהי  $x \in \mathbb{R}$  אזי  $\lceil x \rceil = \min \{n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$

**משפט:** קיימת טענה  $\phi(x)$  כך ש- $\{x \mid \phi(x)\}$  איננה קבוצה.

**פרדוקס ראסל:** הקבוצה  $\{x \mid x \notin x\}$  איננה מוגדרת.

**מסקנה:** קבוצת כל הקבוצות איננה מוגדרת.

**זוג סדור:** יהיו  $x, y$  אזי  $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

**טענה:** יהיו  $a, b, c, d$  אזי  $(\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle) \iff ((a = c) \wedge (b = d))$

**מכפלה קרטזית:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}$

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $A^1 = A$

**חזקה:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $A^n = A^{n-1} \times A$

**טענה:** תהיינה  $A, B, C$  קבוצות אזי

$$\bullet A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$\bullet A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

**איחוד זר:** תהיינה  $A, B$  קבוצות עבורן  $A \cap B = \emptyset$  אזי  $A \cup B = A \uplus B$

**הערה:** תהיינה  $A_1 \dots A_n$  קבוצות סופיות אזי  $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$

**המישור הממשי:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\mathbb{R}^n$

**יחס:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $R \subseteq A \times B$

**הגדרה:**

$$\bullet <_{\mathbb{N}} = \{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}_+. n + k = m \}$$

$$\bullet \leq_{\mathbb{N}} = \{ \langle n, m \rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists k \in \mathbb{N}. n + k = m \}$$

$$\bullet \text{Id}_A = \{ \langle n, n \rangle \mid n \in A \}$$

**סימון:** תהיינה  $A, B$  קבוצות תהא  $R \subseteq A \times B$  יהי  $a \in A$  ויהי  $b \in B$  אזי  $(aRb) \iff (\langle a, b \rangle \in R)$

**מקור/תחום:** יהי  $R \subseteq A \times B$  אזי  $\text{Dom}(R) = \{ a \in A \mid \exists b \in B. aRb \}$

**תמונה:** יהי  $R \subseteq A \times B$  אזי  $\text{Im}(R) = \{ b \in B \mid \exists a \in A. aRb \}$

**יחס הופכי:** יהי  $R \subseteq A \times B$  אזי  $R^{-1} = \{ \langle b, a \rangle \mid aRb \}$

**טענה:** יהי  $R \subseteq A \times B$  אזי  $(R^{-1})^{-1} = R$

**טענה:** יהי  $R \subseteq A \times B$  אזי  $\text{Dom}(R^{-1}) = \text{Im}(R)$

**הרכבה:** יהי  $R \subseteq A \times B$  ויהי  $S \subseteq B \times C$  אזי  $S \circ R = \{ \langle a, c \rangle \in A \times C \mid \exists b \in B. aRb \wedge bSc \}$

**טענה:** תהא  $R \subseteq A \times B$  ותהא  $S \subseteq C \times A$  אזי  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

**טענה:** תהא  $R \subseteq A \times B$  אזי  $R = R \circ \text{Id}_A$

**טענה:** תהא  $R \subseteq A \times B$  אזי  $R = \text{Id}_B \circ R$

**יחס רפלקסיבי:** יחס  $R \subseteq A^2$  עבורו  $\forall a \in A. aRa$

**יחס סימטרי:** יחס  $R \subseteq A^2$  עבורו  $\forall a, b \in A. aRb \implies bRa$

**יחס טרנזיטיבי:** יחס  $R \subseteq A^2$  עבורו  $\forall a, b, c \in A. aRb \wedge bRc \implies aRc$

**יחס שקילות:** יחס  $R \subseteq A^2$  באשר  $R$  רפלקסיבי סימטרי וטרנזיטיבי.

**מחלק:** יהיו  $n, m \in \mathbb{Z}$  אזי  $(n|m) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}. kn = m)$

**משפט חלוקה עם שארית:** יהי  $n \in \mathbb{Z}$  ויהי  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  אזי קיים ויחיד  $r \in \{0, \dots, m\}$  עבורם  $n = m \cdot q + r$

**טענה:** יהי  $R \subseteq A^2$  אזי

$$\bullet (R \text{ רפלקסיבי}) \iff (\text{Id}_A \subseteq R)$$

$$\bullet (R \text{ סימטרי}) \iff (R^{-1} = R)$$

$$\bullet (R \text{ טרנזיטיבי}) \iff (R \circ R \subseteq R)$$

**מחלקת שקילות:** יהי  $R \subseteq A^2$  יחס שקילות ויהי  $x \in A$  אזי  $[x]_R = \{ y \in A \mid xRy \}$

**קבוצת מנה/מודול:** יהי  $R \subseteq A^2$  יחס שקילות אזי  $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$

**טענה:** יהי  $R \subseteq A^2$  יחס שקילות ויהיו  $a, b \in A$  אזי

$$\bullet ([a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset) \implies [a]_R = [b]_R$$

$$\bullet (aRb) \iff (b \in [a]_R) \iff ([a]_R = [b]_R) \iff (a \in [b]_R) \iff (bRa)$$

$$\bullet (\neg(aRb)) \iff ([a]_R \cap [b]_R = \emptyset)$$

**מערכת נציגים:** יהי  $R \subseteq A^2$  יחס שקילות אזי  $C \subseteq A$  המקיימת  $(\forall a, b \in C. [a] \cap [b] = \emptyset) \wedge (\forall a \in A. \exists b \in C. aRb)$

**חלוקה:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $\Pi \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$  עבורה  $(\biguplus \Pi = A) \wedge (\forall X, Y \in \Pi. ((X \neq Y) \implies (X \cap Y = \emptyset)))$

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $k \in \mathbb{N}_+$  תהא  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \in A^k$  ויהי  $i \in \{1, \dots, k\}$  אזי  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle_i = a_i$

**סימון:** יהי  $a \in \mathbb{N}^1$  אזי  $\prod_{i=1}^1 a_i = a_1$

**סימון:** יהי  $k \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a \in \mathbb{N}^k$  אזי  $\prod_{i=1}^k a_i = \left( \prod_{i=1}^{k-1} a_i \right) \cdot a_k$

**המשפט היסודי של האריתמטיקה:** יהי  $t \in \mathbb{N}_+$  אזי קיים ויחיד  $k \in \mathbb{N}$  וקיים ויחיד  $a \in \mathbb{P}^k$  עבורם  $\prod_{i=1}^k a_i = t$

**משפט:** לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים  $|\mathbb{P}| \geq n$

**טענה החלוקה המושרית מהיחס:** תהא  $A$  קבוצה ויהי  $R \subseteq A^2$  יחס שקילות אזי  $A/R$  חלוקה של  $A$ .

**היחס המושרה מהחלוקה:** תהא  $A$  קבוצה ותהא  $\Pi$  חלוקה של  $A$  אזי  $R_\Pi = \bigcup_{X \in \Pi} X^2$ .

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה ותהא  $\Pi$  חלוקה של  $A$  אזי  $R_\Pi$  יחס שקילות מעל  $A$ .

**משפט:** תהא  $A$  קבוצה ויהי  $S \subseteq A^2$  יחס שקילות אזי  $R_{(A/S)} = S$ .

**משפט:** תהא  $A$  קבוצה ותהא  $\Pi$  חלוקה של  $A$  אזי  $A/R_\Pi = \Pi$ .

**יחס מלא:** יחס  $R \subseteq A \times B$  עבורו  $\forall a \in A. \exists b \in B. aRb$ .

**פונקציה חלקית/יחס חד-ערכי (ח"ע):** יחס  $R \subseteq A \times B$  עבורו  $((aRb_1) \wedge (aRb_2)) \implies (b_1 = b_2)$   $\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B$ .

**סימון:** יהי  $f \subseteq A \times B$  יחס חד-ערכי יהי  $a \in A$  ויהי  $b \in B$  אזי  $(afb)$   $\iff (f(a) = b)$ .

**פונקציה:** יחס  $R \subseteq A \times B$  באשר  $R$  חד-ערכי ומלא.

**הגדרה:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $f$  פונקציה  $A \rightarrow B = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f \text{ פונקציה}\}$ .

**סימון:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  $A^B = A \rightarrow B$ .

**סימון:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי  ${}^B A = A^B$ .

**הערה:** תהיינה  $A, B$  קבוצות סופיות אזי  $|A^B| = |A|^{|B|}$ .

**סימון:** תהיינה  $A, B$  קבוצות ויהי  $f \subseteq A \times B$  יחס אזי  $(f : A \rightarrow B) \iff (f \in A \rightarrow B)$ .

**כתיב למבדא:** תהיינה  $A, B$  קבוצות ותהא  $f : A \rightarrow B$  אזי

$$\bullet (\lambda x \in A. f(x)) = \{\langle x, f(x) \rangle \mid x \in A\}$$

$$\bullet \text{יהי } a \in A \text{ אזי } (\lambda x \in A. f(x))(a) = f(a)$$

**שויון פונקציות:** תהיינה  $f, g$  פונקציות אזי  $(f = g) \iff ((\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)) \wedge (\forall x \in \text{Dom}(f). f(x) = g(x)))$ .

**תמונה:** תהיינה  $A, B$  קבוצות ותהא  $f : A \rightarrow B$  יהי  $a \in A$  ויהי  $b \in B$  באשר  $f(a) = b$  אזי  $b$ .

**מקור:** תהיינה  $A, B$  קבוצות ותהא  $f : A \rightarrow B$  יהי  $a \in A$  ויהי  $b \in B$  באשר  $f(a) = b$  אזי  $a$ .

**קבוצת התמונות:** תהא  $f : A \rightarrow B$  ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $f[X] = \{f(a) \mid a \in X\}$ .

**קבוצת המקורות:** תהא  $f : A \rightarrow B$  ותהא  $Y \subseteq B$  אזי  $f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$ .

**טווח:** תהיינה  $A, B$  קבוצות ותהא  $f : A \rightarrow B$  אזי  $\text{Range}(f) = B$ .

**סימון:**  $f(a, b) = f(\langle a, b \rangle)$ .

**פונקציית curry:** תהיינה  $A, B, C$  קבוצות אזי  $\text{curry} : C^{A \times B} \rightarrow (C^B)^A$  באשר  $\text{curry} = \lambda f \in C^{A \times B}. \lambda a \in A. \lambda b \in A. f(\langle a, b \rangle)$ .

**צמצום:** תהא  $f : A \rightarrow B$  ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $f|_X : X \rightarrow B$  באשר  $f|_X = \lambda x \in X. f(x)$ .

**משפט:** תהא  $f \in A \rightarrow B$  ותהא  $g \in B \rightarrow C$  אזי  $\forall a \in A. (g \circ f)(a) = g(f(a))$ .

**משפט:** תהא  $f \in A \rightarrow B$  ותהא  $g \in B \rightarrow C$  אזי  $g \circ f : A \rightarrow C$ .

**טענה:** תהא  $h : A \rightarrow B$  ותהא  $g : B \rightarrow C$  ותהא  $f : C \rightarrow D$  אזי  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .

**פונקציה חד-חד-ערכית (חח"ע):** פונקציה  $f : A \rightarrow B$  עבורה  $(f(a_1) = f(a_2)) \implies (a_1 = a_2)$   $\forall a_1, a_2$ .

**פונקציה n-ערכית:** פונקציה  $f : A \rightarrow B$  עבורה  $|f^{-1}[\{b\}]| = n$   $\forall b \in B$ .

**פונקציה על:** פונקציה  $f : A \rightarrow B$  עבורה  $\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$ .

**משפט:** תהא  $f : A \rightarrow B$  אזי

$$\bullet (f \text{ חח"ע}) \iff (f^{-1} \text{ ח"ע}).$$

$$\bullet (f \text{ על}) \iff (f^{-1} \text{ מלאה}).$$

$$\bullet (f \text{ חח"ע ועל}) \iff (f^{-1} : B \rightarrow A).$$

**הפיכות:** תהא  $f : A \rightarrow B$  אזי

$$\bullet \text{הפיכה משמאל: } \exists g \in B \rightarrow A. g \circ f = \text{Id}_A$$

$$\bullet \text{הפיכה מימין: } \exists g \in B \rightarrow A. f \circ g = \text{Id}_B$$

**זיווג/הפיכה:**  $f$  הפיכה מימין וכן הפיכה משמאל.

**משפט:** תהיינה  $A, B \neq \emptyset$  ותהא  $f : A \rightarrow B$  אזי

$$\bullet (f \text{ חח"ע}) \iff (f \text{ הפיכה משמאל}). \text{ אקסיומת הבחירה}$$

$$\bullet (f \text{ על}) \iff (f \text{ הפיכה מימין}). \text{ אקסיומת הבחירה}$$

**מסקנה:** תהיינה  $A, B \neq \emptyset$  ותהא  $f : A \rightarrow B$  אזי  $(f \text{ חח"ע ועל}) \iff (f \text{ הפיכה}). \text{ אקסיומת הבחירה}$

**משפט:** יהיו  $A, B \neq \emptyset$  תהא  $f : A \rightarrow B$  ותהינה  $g, h : B \rightarrow A$  עבורן  $g \circ f = \text{Id}_A$  וכן  $h \circ f = \text{Id}_A$  וכן  $f \circ g = \text{Id}_B$  וכן  $f \circ h = \text{Id}_B$ .

**חלוקה למקרים:** תהינה  $A, B, C$  קבוצות יהי  $q$  פרידיקט תהא  $f : A \rightarrow C$  ותהא  $g : B \rightarrow C$  אזי  $h : A \cup B \rightarrow C$  עבורה

$$\bullet \text{ לכל } x \in A \cup B \text{ אם } x \in A \text{ אזי } q(x) \text{ וכן } h(x) = f(x).$$

$$\bullet \text{ לכל } x \in A \cup B \text{ אם } \neg q(x) \text{ אזי } x \in B \text{ וכן } h(x) = g(x).$$

**טענה:** תהינה  $A, B, C$  קבוצות יהי  $q$  פרידיקט תהא  $f : A \rightarrow C$  ותהא  $g : B \rightarrow C$  ותהינה  $h_1, h_2 : A \cup B \rightarrow C$  חלוקות למקרים אזי  $h_1 = h_2$ .

**סימון:** תהינה  $A, B, C$  קבוצות יהי  $q$  פרידיקט תהא  $f : A \rightarrow C$  ותהא  $g : B \rightarrow C$  אזי  $\lambda x \in A \cup B. \begin{cases} f(x) & q(x) \\ g(x) & \text{else} \end{cases}$  חלוקה למקרים.

**חלוקה למקרים:** תהינה  $A_1 \dots A_n, C$  קבוצות יהיו  $q_1 \dots q_{n-1}$  פרידיקטים ותהינה  $f_1 \dots f_n$  פונקציות באשר  $f_i : A_i \rightarrow C$  לכל  $i \in \{1, \dots, n\}$  אזי  $h : \bigcup_{i=1}^n A_i \rightarrow C$  עבורה

$$\bullet \text{ לכל } x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ אם } x \in A_i \wedge (\forall j \in \{1, \dots, i-1\}. (\neg q_j(x))) \text{ אזי } q_i(x) \text{ וכן } h(x) = f_i(x).$$

$$\bullet \text{ לכל } x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ אם } x \in A_n \wedge (\neg q_j(x)) \text{ אזי } \forall j \in \{1, \dots, n-1\} \text{ וכן } h(x) = f_n(x).$$

**טענה:** תהינה  $A_1 \dots A_n, C$  קבוצות יהיו  $q_1 \dots q_{n-1}$  פרידיקטים ותהינה  $f_1 \dots f_n$  פונקציות באשר  $f_i : A_i \rightarrow C$  לכל  $i \in \{1, \dots, n\}$  אזי  $h_1 = h_2$  וכן  $h_1, h_2 : A \cup B \rightarrow C$  חלוקות למקרים.

**סימון:** תהינה  $A_1 \dots A_n, C$  קבוצות יהיו  $q_1 \dots q_{n-1}$  פרידיקטים ותהינה  $f_1 \dots f_n$  פונקציות באשר  $f_i : A_i \rightarrow C$  לכל  $i \in \{1, \dots, n\}$  אזי

$$\lambda x \in A \cup B. \begin{cases} f_1(x) & q_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ f_{n-1}(x) & q_{n-1}(x) \\ f_n(x) & \text{else} \end{cases} \text{ חלוקה למקרים.}$$

**הגדרה:** תהינה  $A, B$  קבוצות אזי

$$\bullet (|A| = |B|) \iff (f : A \rightarrow B \text{ קיימת הפיכה}).$$

$$\bullet (|A| \leq |B|) \iff (f : A \rightarrow B \text{ חח"ע}).$$

**סימון:** תהינה  $A, B$  קבוצות אזי

$$\bullet (|A| \neq |B|) \iff (\neg(|A| = |B|)).$$

$$\bullet (|A| < |B|) \iff ((|A| \leq |B|) \wedge (|A| \neq |B|)).$$

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $|A| = |A|$ .

**טענה:** תהינה  $A, B$  קבוצות עבורן  $A \subseteq B$  אזי  $|A| \leq |B|$ .

**טענה:** תהינה  $A, B$  קבוצות אזי  $(|B| = |A|) \iff (|A| = |B|)$ .

**טענה:** תהינה  $A, B, C$  קבוצות עבורן  $|A| \leq |B|$  וכן  $|B| \leq |C|$  אזי  $|A| \leq |C|$ .

**משפט:** תהינה  $A, B$  קבוצות אזי  $(|A| \leq |B|) \iff (f : B \rightarrow A \text{ קיימת על}).$  אקסיומת הבחירה

**טענה:** תהינה  $A, A', B, B'$  קבוצות עבורן  $|A| = |A'|$  וכן  $|B| = |B'|$  אזי

$$\bullet |A \times B| = |A' \times B'|$$

$$\bullet |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A')|$$

$$\bullet |A^B| = |(A')^{B'}|$$

$$\bullet |A \uplus B| = |A' \uplus B'|$$

**משפט קנטור ברנשטיין שרדר (קש"ב):** תהינה  $A, B$  קבוצות עבורן  $|A| \leq |B|$  וכן  $|B| \leq |A|$  אזי  $|A| = |B|$ .

**סימון:**  $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ .

**קבוצה בת-מנייה:** קבוצה  $A$  עבורה  $|A| = \aleph_0$ .

**קבוצה סופית:** קבוצה  $A$  עבורה  $|A| = n$   $\exists n \in \mathbb{N}$ .

**מסקנה:**  $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}_{\text{even}}| = |\mathbb{N}_{\text{odd}}| = \aleph_0$ .

**משפט:** תהא  $A$  קבוצה אזי

$$\bullet (A \text{ סופית}) \iff (|A| < \aleph_0).$$

$$\bullet (A \text{ אינסופית}) \iff (\aleph_0 \leq |A|).$$
 אקסיומת הבחירה

$$\bullet (A \text{ אינסופית}) \iff (\exists B \subset A. |A| = |B|).$$
 אקסיומת הבחירה

**מסקנה:** יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$  ותהינה  $A, B$  קבוצות עבורן  $|A| = n$  וכן  $|B| = m$  אזי

$$\bullet (|A| \leq |B|) \iff (n \leq_{\mathbb{N}} m).$$

$$\bullet (|A| = |B|) \iff (n =_{\mathbb{N}} m).$$

$$\bullet (|A| < |B|) \iff (n <_{\mathbb{N}} m)$$

**משפט איחוד לכל היותר בן-מנייה של קבוצות לכל היותר בנות-מנייה** הוא לכל היותר בן-מנייה: תהא  $\mathcal{A}$  קבוצה עבורה  $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$  וכן

אקסיומת הבחירה  $\forall X \in \mathcal{A}. |X| \leq \aleph_0$  אזי  $|\bigcup \mathcal{A}| \leq \aleph_0$ .

**סימון:** תהא  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$  אזי  $\mathbb{F}_n[x] = \{\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \mid \forall i \in \mathbb{N}. \alpha_i \in \mathbb{F}\}$

**סימון:** תהא  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$  אזי  $\mathbb{F}[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n[x]$

**מספר אלגברי:** מספר  $a \in \mathbb{R}$  עבורו  $p(a) = 0$   $\exists p \in \mathbb{Z}[x]$ .

**מסקנה:** יהי  $q \in \mathbb{Q}$  אזי  $q$  מספר אלגברי.

**משפט:** יהי  $p \in \mathbb{R}[x]$  עבורו  $p(a) \neq 0 \exists a \in \mathbb{R}$  אזי  $|\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\}| \leq \deg(p)$

**טענה:**  $|\mathbb{Z}[x]| = \aleph_0$

**משפט האלכסון של קנטור:**  $\aleph_0 < |\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}|$

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $2^{|A|} = |A \rightarrow \{0, 1\}|$

**משפט:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)|$

**עוצמת הרצף:**  $|\mathbb{R}| = \aleph = c$

**קבוצה מעוצמת הרצף:** קבוצה  $A$  עבורה  $|A| = \aleph$

**משפט:**  $|\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph$

**מסקנה:**  $2^{\aleph_0} = \aleph$

**פונקציית האינדיקטור:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $\chi = \lambda B \in \mathcal{P}(A). \lambda a \in A. \begin{cases} 1 & a \in B \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה ותהא  $B \in \mathcal{P}(A)$  אזי  $\chi_B^A = \chi(A)(B)$

**סימון:**  $\mathbb{1} = \chi$

**משפט קנטור:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

**מסקנה:** יש אינסוף עוצמות אינסופיות.

**משפט:** תהא  $A$  קבוצה באשר  $\aleph_0 \leq |A|$  אזי  $|A^n| = |A|$

**משפט:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  באשר  $a < b$  אזי  $|(a, b)| = |[a, b]| = |(a, b]| = |[a, b)| = 2^{\aleph_0}$

**השערת הרצף:**  $\neg (\exists a. \aleph_0 < a < \aleph)$  זוהי לא טענה

**משפט:** ב-ZFC לא ניתן להוכיח ולא ניתן להפריך את השערת הרצף.

**משפט אי השלמות הראשון של גדל:** בכל מערכת אקסיומות  $T$  אם  $T$  מספיק איכותית כדי לתאר את  $\mathbb{N}$  אז קיימת טענה  $\alpha$  כך ש- $T \vdash \alpha$

לא מוכיחה את  $\alpha$  וגם  $T$  לא מוכיחה את  $\neg \alpha$ .

**חשבון עוצמות:** תהיינה  $A, B$  קבוצות אזי

$$\bullet |A| + |B| = |A \times \{0\} \uplus B \times \{1\}|$$

$$\bullet |A| \cdot |B| = |A \times B|$$

$$\bullet |A|^{|B|} = |B \rightarrow A|$$

**טענה:** תהיינה  $\kappa, \lambda, \mu$  עוצמות אזי

$$\bullet (\kappa \cdot \lambda) \cdot c = \kappa \cdot (\lambda \cdot c) \text{ וכן } \kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$$

$$\bullet \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa \text{ וכן } \kappa + \lambda = \lambda + \kappa$$

$$\bullet \kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$$

$$\bullet \kappa \cdot n = \sum_{i=1}^n \kappa \text{ אזי } n \in \mathbb{N}_+$$

**משפט:** תהיינה  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$  עוצמות עבורן  $\kappa \leq \lambda$  וכן  $\mu \leq \nu$  אזי

$$\bullet \kappa + \mu \leq \lambda + \nu$$

$$\bullet \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \nu$$

$$\bullet \kappa^\mu \leq \lambda^\nu$$

**משפט:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי

$$\bullet \aleph_0 + n = \aleph_0$$

$$\bullet \aleph_0 \cdot n = \aleph_0$$

$$\bullet \aleph + n = \aleph$$

$$\bullet \aleph \cdot n = \aleph$$

**משפט:** תהינה  $\kappa, \lambda$  עוצמות אינסופיות אזי  $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$ .

**משפט:** יהיו  $\kappa, \lambda$  עוצמות אינסופיות אזי  $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$ .

**מסקנה:**

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph + \aleph = \aleph$$

$$\aleph \cdot \aleph = \aleph$$

$$\aleph_0 + \aleph = \aleph$$

$$\aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$$

**משפט:** תהינה  $\kappa, \lambda, \mu$  עוצמות אזי

$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$$

$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$$

$$(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$$

**מסקנה:** תהא  $\kappa$  עוצמה באשר  $\kappa \geq \aleph_0$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$  אזי  $\kappa + n = \kappa$ .

**מסקנה:**  $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \aleph$ .

**מסקנה:**  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  צפופה ב- $\mathbb{R}$ .

**יחס אנטי סימטרי חלש:** יחס  $R \subseteq A^2$  עבורו  $\forall a, b \in A. ((aRb \wedge bRa) \implies (a = b))$ .

**יחס אנטי סימטרי חזק:** יחס  $R \subseteq A^2$  עבורו  $\forall a, b \in A. (aRb \implies (\neg bRa))$ .

**יחס אנטי רפלקסיבי:** יחס  $R \subseteq A^2$  עבורו  $\forall a \in A. (\neg aRa)$ .

**יחס סדר חלש:** יחס  $R \subseteq A^2$  באשר  $R$  רפלקסיבי אנטי סימטרי חלש וטרנזיטיבי.

**יחס סדר חזק:** יחס  $R \subseteq A^2$  באשר  $R$  אנטי רפלקסיבי אנטי סימטרי חזק וטרנזיטיבי.

**טענה:** יהי  $R \subseteq A^2$  יחס אזי  $(R \text{ אנטי סימטרי חזק}) \iff (R \text{ אנטי סימטרי חלש אנטי רפלקסיבי})$ .

**מסקנה:** יהי  $R \subseteq A^2$  יחס סדר חזק אזי  $R \cup \text{Id}_A$  יחס סדר חלש.

**מסקנה:** יהי  $R \subseteq A^2$  יחס סדר חלש אזי  $R \setminus \text{Id}_A$  יחס סדר חזק.

**הערה:** תהא  $A$  קבוצה ויהי  $R \subseteq A^2$  יחס אזי  $\langle A, R \rangle$  מסמן את היחס  $R$  על  $A$ .

**היחס המילוני:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $\prec$  יחס סדר חזק על  $A$  ויהיו  $x, y, z, w \in A$  אזי

$$(\langle x, y \rangle \prec_{\text{Lex}} \langle z, w \rangle) \iff ((x \prec z) \vee ((x = z) \wedge (y \prec w)))$$

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה ויהי  $\prec$  יחס סדר חזק על  $A$  אזי  $\prec_{\text{Lex}}$  יחס סדר חזק.

**יחס השליטה בכל מקום:** תהינה  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  אזי  $f \leq g \iff (\forall n \in \mathbb{N}. f(n) \leq g(n))$ .

**טענה:**  $\langle \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \leq \rangle$  יחס סדר חלש.

**יחס השליטה כמעט בכל מקום:** תהינה  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  אזי  $f <^* g \iff (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. f(n) < g(n))$ .

**טענה:**  $\langle \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, <^* \rangle$  יחס סדר חזק.

**יחס קווי/טוטלי/לינארי:** יחס  $R \subseteq A^2$  עבורו  $\forall a, b \in A. ((aRb) \vee (bRa) \vee (a = b))$ .

**איבר מקסימלי/מירבי:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $x \in X$  עבורו  $\forall y \in X. ((\neg (xRy)) \vee (y = x))$ .

**מקסימום:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $x \in X$  עבורו  $\forall y \in X. ((yRx) \vee (y = x))$ .

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  ויהיו  $x, y \in X$  מקסימומים של  $X$  אזי  $x = y$ .

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  ויהי  $x \in X$  המקסימום של  $X$  אזי  $\max_R(X) = x$ .

**איבר מינימלי:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $x \in X$  עבורו  $\forall y \in X. ((\neg (yRx)) \vee (y = x))$ .

**מינימום:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $x \in X$  עבורו  $\forall y \in X. ((xRy) \vee (y = x))$ .

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  ויהיו  $x, y \in X$  מינימומים של  $X$  אזי  $x = y$ .

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  ויהי  $x \in X$  המינימום של  $X$  אזי  $\min_R(X) = x$ .

**חסם עליון/מלעיל:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $a \in A$  עבורו  $\forall y \in X. ((yRa) \vee (y = x))$ .

**סופרמום:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $a \in A$  חסם מלעיל של  $X$  עבורו לכל  $b \in A$  חסם מלעיל מתקיים

$$(aRb) \vee (a = b)$$

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  ויהיו  $x, y \in X$  סופרמומים של  $X$  אזי  $x = y$ .



**סימון:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס תהא  $X \subseteq A$  ויהי  $x \in X$  הסופרמום של  $X$  אזי  $\sup_R(X) = x$ .

**חסם תחתון/מלרע:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $a \in A$  עבורו  $(aRy) \vee (y = x)$   $\forall x \in X$ .

**אינפימום:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס ותהא  $X \subseteq A$  אזי  $a \in A$  חסם מלרע של  $X$  עבורו לכל  $b \in A$  חסם מלרע מתקיים  $(bRa) \vee (a = b)$ .

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס תהא  $X \subseteq A$  ויהיו  $x, y \in X$  אינפימוםים של  $X$  אזי  $x = y$ .

**סימון:** תהא  $A$  קבוצה יהי  $R \subseteq A^2$  יחס תהא  $X \subseteq A$  ויהי  $x \in X$  האינפימום של  $X$  אזי  $\inf_R(X) = x$ .

**משפט שלמות הממשיים:** תהא  $X \subseteq \mathbb{R}$  באשר  $X \neq \emptyset$  אזי

• (קיים ל- $X$  חסם מלעיל)  $\iff$  (קיים ל- $X$  סופרמום).

• (קיים ל- $X$  חסם מלרע)  $\iff$  (קיים ל- $X$  אינפימום).

**הומומורפיזם/פונקציה שומרת סדר:** יהיו  $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$  יחסים אזי פונקציה  $f : A \rightarrow B$  עבורה

$$\forall a, b \in A. ((aRb) \iff (f(a)Sf(b)))$$

**טענה:** יהיו  $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle, \langle C, T \rangle$  יחסים תהא  $f : A \rightarrow B$  פונקציה שומרת סדר ותהא  $g : B \rightarrow C$  פונקציה שומרת סדר אזי  $g \circ f$  פונקציה שומרת סדר.

**איזומורפיזם:** יהיו  $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$  יחסים אזי פונקציה  $f : A \rightarrow B$  באשר  $f$  הומומורפיזם וזיווג.

**סימון:** יהיו  $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$  יחסים עבום קיים איזומורפיזם  $f : A \rightarrow B$  אזי  $\langle A, R \rangle \cong \langle B, S \rangle$ .

**יחס סדר טוב:** יחס  $\langle A, R \rangle$  עבורו  $R$  יחס סדר חזק קווי וכן לכל  $\emptyset \neq X \subseteq A$  קיים מינימום.

**אינדוקציה טרנספיניטית:** יהי  $\langle A, R \rangle$  יחס סדר טוב ויהי  $P(x)$  פרידיקט אזי

$$(\forall a \in A. P(a)) \implies (P(\min(A)) \wedge (\forall a, b \in A. (P(a) \wedge aRb) \implies P(b))) \implies (P(\min(A)))$$

**קבוצה טרנזיטיבית:** קבוצה  $A$  עבורה  $\forall B \in A. \forall x \in B. x \in A$

**סודר:** קבוצה  $\alpha$  עבורה  $\alpha$  טרנזיטיביות וכן  $\langle \alpha, \in \rangle$  יחס סדר טוב.

**סודר עוקב:** יהי  $\alpha$  סודר אזי  $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ .

**טענה:** יהי  $\alpha$  סודר אזי  $S(\alpha)$  סודר.

**מסקנה:** יהי  $\alpha$  סודר אזי  $\alpha \in S(\alpha)$ .

**סודר גבולי:** סודר  $\alpha$  עבורו לכל סודר  $\beta$  מתקיים  $S(\beta) \neq \alpha$ .

**סימון:**  $0 = \emptyset$ .

**סימון:**  $n + 1 = S(n)$ .

**סודר סופי:** סודר  $\alpha$  עבורו קיים  $n \in \mathbb{N}$  המקיים  $\alpha = n$ .

**סימון:**  $\omega = \mathbb{N}$ .

**טענה:**  $\omega$  סודר גבולי.

**טיפוס סדר:** יהי  $\langle A, R \rangle$  יחס סדר טוב אזי סודר  $\alpha$  עבורו  $\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle A, R \rangle$ .

**טענה:** יהי  $\langle A, R \rangle$  יחס סדר טוב ויהיו  $\alpha, \beta$  טיפוסים סדר אזי  $\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \beta, \in \rangle$ .

**סימון:** יהי  $\langle A, R \rangle$  יחס סדר טוב אזי טיפוס הסדר של  $\langle A, R \rangle$  הוא  $\text{ord}(A, R)$ .

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה של סודרים אזי  $\bigcap A$  סודר.

**טענה:** תהא  $A$  קבוצה של סודרים אזי  $\min_{\subseteq}(A) = \bigcap A$ .

**עוצמה:** תהא  $A$  קבוצה אזי  $R$  יחס סדר טוב על  $A$   $|A| = \min_{\subseteq} \{\text{ord}(A, R) \mid R \text{ יחס סדר טוב על } A\}$ .

**הגדרה אקסיומת הבחירה:**  $(\exists F : A \rightarrow \bigcup A. \forall X \in A. F(X) \in X) \implies (\forall A. (\forall X \in A. X \neq \emptyset) \implies \exists F : A \rightarrow \bigcup A. \forall X \in A. F(X) \in X)$ . זוהי לא טענה

**הגדרה עיקרון הסדר הטוב:** לכל קבוצה  $A$  קיים סדר טוב  $R$  על  $A$ . זוהי לא טענה

**קבוצות חופפות בחלקים:** קבוצות  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  עבורן קיימות  $X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_k \subseteq \mathbb{R}^n$  באשר  $X = X_1 \uplus \dots \uplus X_k$  וכן

$$\forall 1 \leq j \leq k. Y_j = \varphi_j X_j \text{ עבורן } \varphi_1, \dots, \varphi_k$$

**הגדרה פרדוקס בנך טרסקי:** תהיינה  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  חסומות עבורן  $\text{int}(X), \text{int}(Y) \neq \emptyset$  אזי  $X, Y$  חופפות בחלקים. זוהי לא טענה

**טענה:** (אקסיומת הבחירה)  $\iff$  (עיקרון הסדר הטוב)  $\iff$  (פרדוקס בנך טרסקי).

**כדור:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  תהא  $a \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $r > 0$  אזי  $B_r^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 < r^2\}$ .

**מסקנה:** (אקסיומת הבחירה)  $\iff (B_1^3(0), B_2^3(0))$  חופפות בחלקים.

**שרשרת:** יהי  $\langle \Sigma, R \rangle$  יחס אזי  $C \subseteq \Sigma$  עבורה  $\langle C, R \rangle$  יחס לינארי.

**הגדרה הלמה של צורן:** יהי  $\langle \Sigma, R \rangle$  יחס סדר באשר  $\Sigma \neq \emptyset$  וכן לכל שרשרת  $X \subseteq \Sigma$  יש חסם עליון אזי קיים איבר מקסימלי ב- $\Sigma$ .  
זוהי לא טענה

**טענה:** (אקסיומת הבחירה)  $\equiv$  (הלמה של צורן).

**מסקנה:** (אקסיומת הבחירה)  $\iff (\forall A, B. (|A| \leq |B| \vee |B| \leq |A|))$ .