טופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X,\varnothing\in\mathcal{T}$.
- תהיינה $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{T}$ אזי $\bigcup\mathcal{U}\in\mathcal{T}$.
- תהיינה $\{U_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\mathcal{T}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{n}U_i\in\mathcal{T}$.

מרחב טופולוגי (מ"ט): תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ טופולוגיה על X אזי $(X,\mathcal{T})$.

קבוצה פתוחה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגיה אזי $U\subseteq X$ המקיימת $U\in\mathcal{T}$.

קבוצה סגורה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מרחב טופולוגיה אזי $E\subseteq X$ המקיימת $X\backslash E\in\mathcal{T}$.

טענה: תהא $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה $X,\varnothing\in\mathcal{T}$ וכן $(\bigcup\mathcal{U}\in\mathcal{T})$ $\forall\mathcal{U}\subseteq\mathcal{T}.$ אזי ($\mathcal{T}$ טופולוגיה)$\Longleftrightarrow$(לכל $U,V\in\mathcal{T}$ מתקיים $U\cap V\in\mathcal{T}$).

הטופולוגיה הטריוואלית: תהא X קבוצה אזי $\{X,\varnothing\}$.

הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X)$.

הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: יהי (X,ρ) מרחב מטרי אזי $\mathcal{T}(X,\rho)=\{U\subseteq X\mid\forall x\in U.\exists r>0.B_r(x)\subseteq U\}$.

הטופולוגיה הקו־סופית: תהא X קבוצה אזי $\{A\subseteq X\mid|X\backslash A|<\aleph_0\}\cup\{\varnothing\}$.

משפט: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{C}=\{E\subseteq X\mid X\backslash E\in\mathcal{T}\}$ אזי
- $X,\varnothing\in\mathcal{C}$.
- תהיינה $\{E\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{C}$ אזי $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}E_\alpha\in\mathcal{T}$.
- תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\mathcal{C}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in\mathcal{T}$.

בסיס לטופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $\bigcup\mathcal{B}=X$.
- תהיינה $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ עבורן $B_1\cap B_2\neq\varnothing$ ותהא $x\in B_1\cap B_2$ אזי קיימת $B_3\in\mathcal{B}$ עבורה $x\in B_3$ וכן $B_3\subseteq B_1\cap B_2$.

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})=\{U\subseteq X\mid\forall x\in U.\exists B\in\mathcal{B}.(x\in B)\wedge(B\subseteq U)\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ טופולוגיה על X.

סימון: $\mathcal{B}_E=\{(a,b)\mid a<b\}$ וכן $\mathcal{B}_{\text{Sorg}}=\{[a,b)\mid a<b\}$ וכן $\mathcal{B}_K=\mathcal{B}_E\cup\left\{(a,b)\backslash\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}_+\right\}\mid a<b\right\}$.

טענה: $\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_{\text{Sorg}},\mathcal{B}_K$ בסיסים של $\mathbb{R}$.

הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית: $\mathbb{R}=(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathcal{B}_E))$.

הישר של זורגנפריי: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}=(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{Sorg}}))$.

טופולוגיית־K: $\mathbb{R}_K=(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$.

משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})=\{U\subseteq X\mid\exists A\subseteq\mathcal{B}.U=\bigcup A\}$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{P}(X)$ בסיסים עבורם $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$ וכן $\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{T}(\mathcal{B}_1)$ אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}_1)=\mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$.

טופולוגיה עדינה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_2$.

טופולוגיה גסה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_1$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{T}$ עבורו $\forall U\in\mathcal{T}.\forall x\in U.\exists A\in\mathcal{A}.(x\in A)\wedge(A\subseteq U)$ אזי $\mathcal{A}$ בסיס של $\mathcal{T}$.

טענה: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי $\{(a,b)\mid a<b\}\cup\{[a,b)\mid\forall x\in X.a\leq x\}\cup\{(a,b]\mid\forall x\in X.x\leq b\}$ בסיס.

טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי
$\mathcal{T}(\{(a,b)\mid a<b\}\cup\{[a,b)\mid\forall x\in X.a\leq x\}\cup\{(a,b]\mid\forall x\in X.x\leq b\})$.

תת בסיס: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה $\bigcup\mathcal{S}=X$.

הטופולוגיה הנוצרת מתת־בסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי
$\mathcal{T}(\mathcal{S})=\left\{U\subseteq X\mid\exists A_1\ldots A_k\subseteq\mathcal{S}.U=\bigcup\left(\bigcap_{i=1}^{k}A\right)\right\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ טופולוגיה על X.

טופולוגיית זריצקי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{T}(\{\{a\in\mathbb{F}^n\mid f(a)\neq 0\}\mid f\in\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]\})$.

סביבה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $x\in X$ אזי $U\in\mathcal{T}$ עבורה $x\in U$.

פנים של קבוצה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\text{int}(A)=\mathring{A}=\bigcup_{\substack{U\subseteq A\\U\in\mathcal{T}}}U$.

סגור של קבוצה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\text{cl}(A)=\overline{A}=\bigcap_{\substack{A\subseteq E\\E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{T}}}E$.

שפה של קבוצה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\partial A=A\backslash\text{int}(A)$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $A\subseteq X$ ויהי $x\in X$ התב"ש

- $x\in\overline{A}$.
- לכל $U\in\mathcal{T}$ המקיים $x\in U$ מתקיים $U\cap A\neq\varnothing$.
- יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי לכל $B\in\mathcal{B}$ המקיים $x\in B$ מתקיים $B\cap A\neq\varnothing$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\partial A=\overline{A}\cap\left(\overline{X\backslash A}\right)$.

מסקנה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $A\subseteq X$ ויהי $x\in X$ אזי $(x\in\partial A)\Longleftrightarrow$(לכל $U\in\mathcal{T}$ המקיימת $x\in U$ מתקיים $U\cap A\neq\varnothing$ וכן $U\cap A^{\mathcal{C}}\neq\varnothing$).

קבוצה צפופה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט אזי $A\subseteq X$ המקיימת $X=\overline{A}$.

נקודת הצטברות: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $x\in X$ עבורו לכל סביבה U של x מתקיים $U\cap A\backslash\{x\}\neq\varnothing$.

גבול: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $x\in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $y\in X$ עבורן לכל סביבה U של y החל ממקום מסוים $x_n\in U$ אזי $\lim_{n\to\infty}x_n=y$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $A\subseteq\left\{x\in X\mid\exists a\in A^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_n=x\right\}\subseteq\overline{A}$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\overline{A}=A\cup\{x\in X\mid$ נקודת הצטברות של $x\ A\}$.

מסקנה: תהא $A\subseteq X$ אזי $(A$ סגורה$)\Longleftrightarrow(\{x\in X\mid$ נקודת הצטברות של $x\ A\}\subseteq A)$.

פונקציה רציפה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים אזי $f:X\to Y$ עבורה $\forall U\in\mathcal{S}.f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$.

משפט: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f:X\to Y$ התב"ש
- f רציפה.
- לכל $U\subseteq Y$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה.
- לכל $E\subseteq Y$ סגורה מתקיים כי $f^{-1}(E)$ סגורה.
- לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}$.

הומיאומורפיזם: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים אזי $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל עבורה f^{-1} רציפה.

טענה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ועל התב"ש
- f הומיאומורפיזם.
- תהא $U\subseteq Y$ אזי $(U$ פתוחה$)\Longleftrightarrow(f^{-1}(U)$ פתוחה$)$.
- תהא $E\subseteq Y$ אזי $(E$ סגורה$)\Longleftrightarrow(f^{-1}(E)$ סגורה$)$.
- לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right)=\overline{f(A)}$.

הטופולוגיה המושרית על קבוצה מפונקציה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי $\mathcal{T}_X=\left\{f^{-1}(U)\mid U\in\mathcal{S}\right\}$.

טענה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי $(X,\mathcal{T}_X)$ מ"ט.

מסקנה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי f רציפה על $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{S})$.

תת מרחב טופולוגי (ת"מ): יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A=\left\{U\subseteq A\mid\exists V\in\mathcal{T}.U=\mathrm{Id}^{-1}(V)\right\}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $(A,\mathcal{T}_A)$ מ"ט.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A=\{A\cap U\mid U\in\mathcal{T}\}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי $\mathcal{B}_A=\{A\cap B\mid B\in\mathcal{B}\}$ בסיס של $\mathcal{T}_A$.

טענה: יהי $A\subseteq X$ אזי
- תהא $U\subseteq A$ אזי $(U$ פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}_A)\Longleftrightarrow($קיימת V פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}$ עבורה $V\cap A=U)$.
- תהא $E\subseteq A$ אזי $(E$ סגורה ביחס ל־$\mathcal{T}_A)\Longleftrightarrow($קיימת F פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}$ עבורה $F\cap A=E)$.
- תהא $D\subseteq A$ אזי $\mathrm{cl}_X(D)\cap A=\mathrm{cl}_A(D)$.
- תהא $D\subseteq A$ אזי $\mathrm{int}_X(D)\cap A\subseteq\mathrm{int}_A(D)$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T}_X)$ מ"ט ויהי $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ת"מ אזי
- נניח כי Y פתוחה ב־X, תהא $A\subseteq Y$ פתוחה ב־Y אזי A פתוחה ב־X.
- נניח כי Y סגורה ב־X, תהא $A\subseteq Y$ סגורה ב־Y אזי A סגורה ב־X.

טענה: יהיו X,Z מ"ט יהי $Y\subseteq Z$ ת"מ ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f:X\to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X,Y מ"ט יהי $A\subseteq X$ ת"מ ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f_{\restriction_A}:A\to Y$ רציפה.

טענה: יהיו X,Z מ"ט יהי $Y\subseteq Z$ ת"מ ותהא $f:X\to Y$ רציפה עבורה $f(X)\subseteq Z$ אזי $f:X\to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X,Z מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי $(f$ רציפה$)\Longleftrightarrow($קיימות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{P}(X)$ פתוחות עבורן $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha=X$ וכן $f_{\restriction_{U_\alpha}}$ רציפה לכל $\alpha\in\Lambda)$.