```
. טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזיB \cup A \cup B בת מנייה
                                                                       \bigcup_{i=1}^n A_i בת מנייה אזי בנות מנייה אזי בת מנייה. \bigcup_{i=1}^n A_i
טענה: תהא \langle f_n \mid n \in \mathbb{N} 
angle חדרת פונקציות באשר או בת מנייה לכל A_i סדרת פונקציות באשר או סענה:
                                                                              על לכל n\in\mathbb{N} אזי סופית או בת מנייה. f_n:\mathbb{N}	o A_n
                                                      A 	imes B = \{\langle a,b \rangle \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\} מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                         טענה: תהיינה A,B בת מנייה אזי A \times B טענה:
                                                                         . בת מנייה A_1 \times \ldots \times A_n בנות מנייה אזיA_1 \ldots A_n בת מנייה
                                                                                                             A^1=A הגדרה: תהא A קבוצה אזי
                                                                                  A^n=A	imes A^{n-1} אזי n\in\mathbb{N}_+ ויהי קבוצה A הגדרה: תהא
                                                                                                                         .טענה: \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n בת מנייה
                                                                                                             |\{A \subset \mathbb{N} \mid \exists \exists A\}| = \lambda_0 מסקנה:
                                                                                                                                      |\mathbb{Z}|=leph_0 :טענה
                                                                                                                                     |\mathbb{Q}|=\aleph_0 :טענה
                                                                       p\left(a
ight)=0 מספר אלגברי: מספר a\in\mathbb{C} עבורו קיים a\in\mathbb{C} מספר
                                                                  p\left(a
ight)
eq0 מתקיים p\in\mathbb{Z}\left[x
ight] עבורו לכל a\in\mathbb{C} מספר מספר מספר
                                                                                                       |\{a\in\mathbb{C}\mid A אלגברי a\}|=leph_0 משפט קנטור:
                                                                         יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי A אזי A באשר יחס סדר חלקי/חלש:
                                                                                                       x \preccurlyeq x אזי x \in A יהי •
                                                                   x \preccurlyeq z אזי y \preccurlyeq z וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y,z \in A אזי יהיו x \preccurlyeq y
                                                         x=y אזי y \preccurlyeq x וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y \in A אזי יהיו y \preccurlyeq x וכן x \preccurlyeq y
                                                                                יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי A^2 אזי A באשר יחס סדר חזק: תהא
                                                                                            \neg \left( x \prec x \right) אזי אזי יהי יהי פלקסיביות: •
                                                                   x\prec z אזי y\prec z וכן x\prec y עבורם x,y,z\in A אזי x\prec y טרנזיטיביות: יהיו
                                                                  \neg (y \prec x) אזי x \prec y עבורם x,y \in A יהיו חזקה: \bullet
                                    (x\preccurlyeq y)\lor(y\preccurlyeq x) מתקיים x,y\in A אבורו לכל (A,\preccurlyeq) עבורו סדר חלקי יחס סדר אווי האקיים מדר אווי הא
                               (x\prec y)\lor (y\prec x)\lor (x=y) מתקיים x,y\in A עבורו לכל עבורו איזק: יחס סדר מדר מחק יחס איזק: יחס סדר מתקיים איזק: יחס סדר איזק
                                                                                                               טענה: \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle יחס סדר קווי חלקי.
                                                                                         . יחס סדר חלקי \langle \mathcal{P}\left(A\right),\subseteq \rangle יחס סדר חלקי ענה: תהא
(aRb) \Longleftrightarrow (f(a)Sf(b)) מתקיים a,b \in A מתקיים (A,R), \langle B,S \rangle מדרים אזי (A,R), \langle B,S \rangle מתקיים
                                    . סדרים הפיכה \pi:A 	o B הפימת \langle A,R \rangle, עבורם סדרים הפיכה שומרת הפיכה \pi:A 	o B
                                                                      \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle איזומורפיים איזו סדרים \langle A,R \rangle , \langle B,S \rangle סדרים איזומורפיים
```

 $|X| \leq |Y|$ חח"ע אזי f: X o Y הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $Y \mapsto f: X \to Y$ חח"ע ועל אזי |X| = |Y| חהייע ועל אזי $f: X \to Y$ הגדרה: תהיינה

|X|<|Y| אזי אזי $|X|\neq |Y|$ וכן $|X|\leq |Y|$ אזי קבוצות עבורן אזי |X|<|Y|

|X|=|Y| אאי $|Y|\leq |X|$ וכן $|X|\leq |Y|$ אאי און |X|=|X| משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין (קש"ב): תהיינה

 $|X| \neq |Y|$ אזי $\neg (|X| = |Y|)$ איזי קבוצות עבורן תהיינה X,Y איזי

|A| = |[n]| המקיים $n \in \mathbb{N}$ קבורה עבורה קבוצה קבוצה קבוצה קבוצה אונה אונה קבוצה אונה המקיים

.|A|=|[n]| המקיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים A עבורה לא קיים A המקיים טענה. סענה: תהא A בת מנייה ותהא $A\subseteq A$ אינסופית אזי A בת מנייה ותהא $A\subseteq A$ אזי A סופית או בת מנייה. A בת מנייה ותהא $A\subseteq A$

טענה: תהא B סופית או בת מנייה תהא f:A o B ותהא קבוצה ותהא מנייה מנייה מנייה מנייה

X העוצמה של |X| העוצמה של

|n||=n אזי $n\in\mathbb{N}$ סימון: יהי

 $|X|=\aleph_0$ קבוצה X עבורה קבוצה בת מנייה:

 $|\mathbb{N}|=leph_0$:סימון

```
(aRb) \lor (a=b) מתקיים b \in A מתקיים a \in A עבורו קיים a \in A עבורו קיים a \in A מתקיים סדר קווי
                                                                    \min(A) = a אזי a \in A איבר ראשון בעל איבר קווי בעל אדר קווי אזי \langle A, R \rangle יהי
        . טענה: יהי \langle B,S \rangle אזי \langle B,S \rangle אזי איבר ראשון ויהי \langle B,S \rangle סדר קווי באשר סענה: יהי \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle סדר איבר ראשון ויהי
       (aRb) \lor (a=b) מתקיים a \in A מתקיים b \in A מתקיים סדר קווי \langle A,R \rangle עבורו קיים a \in A באשר לכל
                                                                    \max(A) = a אזי a \in A אזיבר אחרון בעל איבר סדר קווי בעל איבר אחרון יהי
        . טענה: אזי \langle B,S \rangle אזי אזי איבר אחרון ויהי יבעל איבר אחרון איבר אחרון ויהי יהי אחרון אזי סענה: יהי אחרון איבר אחרון ויהי
                        zRy וכן xRz עבורו z\in A קיים xRy המקיימים xRy המקיימים עבורו z\in A עבורו ווע z\in A וכן
                                     טענה: יהי \langle A,R
angle\simeq \langle B,S
angle סדר קווי באשר \langle B,S
angle אזי \langle B,S
angle צפוף.
                                                                   טענה: \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
                                                                                                                      \mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}} \not\simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle מסקנה:
      \langle A, \preccurlyeq \rangle \simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} 
angle אזי |A| = \aleph_0 משפט קנטור: יהי משפט קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר
       \langle A, \prec 
angle \simeq \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} 
angle אזי משפט קנטור: יהי \langle A, \prec 
angle סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר משפט קנטור: משפט קנטור:
                           (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים X \subseteq A אזי X \subseteq A מדר קווי ותהא A \subseteq A
                                                  \overline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי X \subseteq A סדר קווי ותהא סימון: יהי
                                                                  \overline{B}_X 
eq \emptyset עבורה X \subseteq A אזי אזי X \subseteq A סדר קווי אזי יהי
                            (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים מלרע: יהי אזי X \subseteq A אזי אזי תהא X \subseteq A מחסם מלרע: יהי
                                                  \underline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי ותהא סדר קווי יהי לא סדר קווי ותהא סדר אזי אזי לימון: יהי
                                                                   \underline{B}_X 
eq \emptyset עבורה X \subseteq A אזי אזי X \subseteq A סדר קווי אזי יהי יהי מלרע: יהי
                                                          . סדר חסם מלרע חסם מלרע חסם מלרע אזי איזי X\subseteq A סדר קווי אזי \langle A,R \rangle יהי
                                                                     \operatorname{sup}(X) = \min\left(\overline{B}_X\right) אזי X \subseteq A אדר קווי ותהא A, R סדר קווי ותהא
                                                                     \inf\left(X
ight)=\max\left(\underline{B}_{X}
ight) אזי אזי X\subseteq A סדר קווי ותהא אוי לאזי \langle A,R
angle
                                                   \operatorname{sup}\left(X
ight) אינים סדר קווי אלם: סדר קווי \left\langle A,R
ight
angle עבורו לכל
                             (\sup(X),\inf(X),\inf(X)) סדר קווי אזי איי שלם)(A,R) סדר שלם) סטענה: יהי
            המקיים \langle L,\sqsubseteq \rangle סדר הוון אזי סדר ללא איבר האשון וללא איבר איבר חלקי: יהי הי\langle P,\preccurlyeq \rangle סדר הווי חלקי ללא איבר השוו וללא איבר איבר חלקי: יהי
                                                                                                                                         .P \subseteq L \bullet
                                                                                           (x \leq y) \iff (x \sqsubseteq y) מתקיים x, y \in P לכל
                                                                            . סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון. \langle L, \Box \rangle
                                                                                                                       \langle L, \sqsubseteq \rangle צפוף ב־ \langle P, \preccurlyeq \rangle \bullet
משפט יחידות השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר סדר קווי חלקי צפוף השלמות אזי
                                                                                  p \in P לכל \pi\left(p\right) = p עבורו \pi:L 	o L^* לכל
                      משפט קיום השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.
                                                   באשר \langle A,B \rangle אזי אזי A,B \subseteq P ויהיו חלקי ויהיו סדר קווי אזי אזי \langle P,\preccurlyeq \rangle באשר התך דדקינד: יהי
                                                                                                                                  A \cap B = \emptyset \bullet
                                                                                                                                   A \cup B = P \bullet
                                                                                                   a \preccurlyeq b מתקיים b \in B ולכל • a \in A
                                                                                                                    ללא איבר אחרון. \langle A, \preccurlyeq \rangle
```

 $[p] = \langle (-\infty,p)\,,[p,\infty)
angle$ אזי $p\in P$ ויהי חלקי חלקי סדר קווי חלקי יהי אזי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$

.Ded $(P)=\{\langle A,B\rangle \mid$ חתך דדקינד $\langle A,B\rangle \}$ סדר קווי חלקי אזי מימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq \rangle$

 $\langle A,B
angle \preccurlyeq \langle C,D
angle$ אזי $A\subseteq C$ חתכי דדקינג באשר $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$ וויהיו חלקי ויהיו איזי $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$ חתכי מהגדרה: יהי

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p \in P$ אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ חתך דדקינד.

 $.\langle\{[p]\mid p\in P\}\,,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$ טענה: יהי יהי יהי סדר קווי חלקי אזי יהי ענה: יהי יהי ערה פחתכי בהתאמה מעל בתור שיכון של $P,\preccurlyeq\rangle$ בחתכי הדדקינד שלה.

טענה: יהי ל $\langle \mathrm{Ded}\,(P)\,,\preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי סענה: יהי ל $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי טענה: יהי ל $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי ל $\langle P, \preccurlyeq \rangle$

```
סדר שלם. (Ded (P) , \preccurlyeq) אזי קווי חלקי סדר קווי סענה: יהי
f:A	o B עבורו קיים סדר קווי חזק איבר אחרון וללא איבר איבר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף איבר איבר איבר איבר אווי סענה: יהי
                                                                                                                                                                  שומרת סדר.
                                                                                                       (\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}) מספרים ממשיים: (\mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}}) הינה ההשלמה של
                   \langle P, \preccurlyeq 
angle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} 
angle משפט: יהי \langle P, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי
                                                                                                                                                            |\mathbb{R}| 
eq \aleph_0 טענה:
                                                                                              \mathcal{P}\left(X
ight)=\left\{Y\mid Y\subseteq X
ight\} קבוצה אזי קבוצה תהא תהאקה: תהא
                                                                                                    X^{X}.X^{X}=\{f\mid f:X	o\{0,1\}\} סימון: תהא קבוצה אזי
                                                                                                                      \left|\mathcal{P}\left(X
ight)
ight|=\left|X_{0}^{X}\right|טענה: תהא X קבוצה אזי
                                                                                                             |X|<|\mathcal{P}\left(X
ight)משפט קנטור: תהא X קבוצה אזי
                                                                                                                                                          |\mathbb{R}|=|\mathbb{N}2| :טענה
            |A\cup B|=|C\cup D| אזי און |B|=|D| וכן |A|=|C| אונה. זרות ותהיינה |A\cup B|=|C\cup D| אזי אזי ותהיינה |A\cup B|=|C\cup D|
                                                                                             |A|+|B|=|A\cup B| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות זרות אזי
                                                                                                                      |A \times \{0\}| = |A| טענה: תהא A קבוצה אזי
                                                                      |A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}| הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי
                                                 |A 	imes B| = |C 	imes D| אזי |B| = |D| וכן |A| = |C| אזי |A, B, C, D| טענה: תהיינה
                                                                                                |A|\cdot |B| = |A 	imes B| הגדרה כפל: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                      |A|=\kappa עבורה עבורה קיימת קבוצה A היא עוצמה אם קיימת היא עוצמה היא נאמר כי
                                                                                                                           .\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa טענה: תהא \kappa עוצמה אזי
                                                                                            \kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu טענה: תהיינה \kappa, \lambda, \mu עוצמות אזי
                                                                                                A^BA=\{f\mid f:B	o A\} הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                          |A|=|B| אזי |B|=|D| איזי |A|=|C| טענה: תהיינה A,B,C,D איזי
                                                                                                              |A|^{|B|}=|^BA| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                                                                                        |\mathbb{R}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                                               \kappa\cdot\kappa=\kappa^2 טענה: תהא א עוצמה אזי
                                     (\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu}) וכן (\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)} וכן \kappa^{(\lambda + \mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} עוצמות אזי \kappa, \lambda, \mu וכן \kappa, \lambda, \mu
                                                                                                      \aleph_0+\aleph_0=\aleph_0 טענה: יהי n\in\mathbb{N} אזי n\in\mathbb{N} וכן אזי n\in\mathbb{N}
                                                                                                       \aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0 טענה: יהיn\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ וכן אוכן n\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                                     lpha_0^n=leph_0 אזי n\in\mathbb{N}_+ טענה: יהי
                                                                 2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+\aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                                    2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot \aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי
                                                                                                 (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן (2^{\aleph_0})^n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי יהי
                                                                                                          \mathfrak{K}_0^{leph_0}=2^{leph_0} וכך n^{leph_0}=2^{leph_0} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי
                                                                                                                                               .(2^{\aleph_0})^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0} טענה:
                                                     \|\mathbb{N}\|=2^{\aleph_0} וכן \|\mathbb{N}\to\mathbb{R}\|=2^{\aleph_0} וכן וכן \|\mathbb{C}\|=2^{\aleph_0} וכן \|\mathbb{R}^n\|=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי
                                                     |B \setminus A| = 2^{\aleph_0} אזי |A| \le \aleph_0 באשר A \subseteq B ותהא |B| = 2^{\aleph_0} אזי איזי B פטענה: תהא
                                                                                                              |\{a\in\mathbb{C}\mid aמסקנה: |\{a\in\mathbb{C}\mid a\}|=2^{\aleph_0}מספר טרנסצנדנטי
                                                                                                                          |\{a\in\mathbb{R}\mid aמסקנה: |\{a\in\mathbb{R}\mid a\}|=2^{leph_0}מסקנה:
                                                                                                             |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R})\wedge (f)\}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
```

 $\langle \operatorname{Ded}(P), \preccurlyeq \rangle$ טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ צפופה ב־

 $|\{f\mid (f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})\land (g)\}|=2^{\aleph_0}$ מסקנה:

. עבורו איבר קטן איבר איבר איבר $A \neq \varnothing$ באשר באשר איבר קטן ביותר עבורו לכל עבורו לכל איבר איבר איבר איבר איבר איבר איבר אים

 $|\{A\mid (A\subseteq\mathbb{R})\land ($ פתוחה $|A)\}|=2^{\aleph_0}$ טענה:

טענה: יהי $\mathbb{N} \in \mathbb{N}$ אזי $\langle \mathbb{N}_{\leq n}, <_{\mathbb{N}_{\leq n}}
angle$ סדר טוב.

.טענה: $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ סדר טוב