משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Vol}_n(A_i)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $k\in\mathbb{N}$ קיימות $X_1\ldots X_k,Y_1\ldots Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ וקיימות $\varphi_1\ldots\varphi_k$ איזומטריות המקיימות $X=\biguplus_{i=1}^{k}X_i$ וכן $Y=\biguplus_{i=1}^{k}Y_i$ וכן $\forall j\in[k].Y_j=\varphi_j(X_j)$.

סימון: תהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חופפות בחלקים אזי $X\equiv Y$.

משפט פרדוקס בנך־טרסקי: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ ותהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\mathrm{int}(X)\neq\varnothing$ וכן $\mathrm{int}(Y)\neq\varnothing$ אזי $X\equiv Y$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(A\uplus B)=\mathrm{Vol}_n(A)+\mathrm{Vol}_n(B)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

משפט בנך: יהי $n\in\{1,2\}$ אזי קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(A\uplus B)=\mathrm{Vol}_n(A)+\mathrm{Vol}_n(B)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהיינה $A,B\in\mathcal{A}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{A}$.

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

σ־אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$ σ־אלגברה אזי $\mathcal{A}$ אלגברה.

σ־אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ σ־אלגבראות אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ σ־אלגברה.

σ־אלגברה נוצרת: תהא X קבוצה תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל X המכילות את A אזי $\sigma(A)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $\sigma(A)$ הינה ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את A.

σ־אלגברה בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathcal{B}(X)=\sigma(\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}(X)\mid \text{פתוחה } \mathcal{O}\})$.

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על X.
- $\sigma(\{B_r(a)\mid(r>0)\wedge(a\in X)\})$.
- $\sigma(\{B_r(a)\mid(r\in\mathbb{Q}_+)\wedge(a\in X)\})$.
- תהא $Y\subseteq X$ צפופה אזי $\sigma(\{B_r(a)\mid(r\in\mathbb{Q}_+)\wedge(a\in Y)\})$.

קבוצה G_δ: $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ פתוחות המקיימות $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

קבוצה F_δ: $X \subseteq A$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סגורות המקיימות $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_i$.

מסקנה: תהא A קבוצה G_δ ותהא B קבוצה F_δ אזי $A, B \in \mathcal{B}(X)$.

טענה: הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על $\mathbb{R}^n$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i) \mid a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{R}\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i) \mid a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{Q}\right\}\right)$.

משפט: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $C(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ רציפה ב־} x\}$ אזי

- $C(f) \in G_\delta$.
- תהא $X \in G_\delta$ אזי קיימת f עבורה $C(f) = X$.

קבוצה דלילה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ המקיימת $\operatorname{int}\left(\overline{A}\right) = \varnothing$.

קבוצה מקטגוריה ראשונה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימות $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ דלילות עבורן $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ שאינה מקטגוריה ראשונה.

קבוצה שיורית: יהי X מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $A^{\mathcal{C}}$.

למה: יהי X מרחב מטרי אזי

- תהא $A \subseteq X$ דלילה ותהא $B \subseteq A$ אזי B דלילה.
- תהיינה $A_1 \ldots A_n \subseteq X$ דלילות אזי $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ דלילה.
- תהא $A \subseteq X$ דלילה אזי $\overline{A}$ דלילה.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $\operatorname{int}(A) = \varnothing$.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות σ־אידיאל.

מסקנה: $\mathbb{Q} \notin G_\delta$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי קיימת $F \subseteq \mathbb{R}$ מקטגוריה ראשונה וקיימת $N \subseteq \mathbb{R}$ זניחה עבורה $A = F \uplus N$.

משפט בנך: במרחב המטרי $C([0,1])$ עם נורמת מקסימום הקבוצה $\{f \in C([0,1]) \mid \exists x \in (0,1) . f \in \mathcal{D}(x)\}$ היא מקטגוריה ראשונה.

הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבוצה בעלת תכונת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימת $G \subseteq X$ פתוחה וקיימת $Q \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A = G \triangle Q$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ אזי (ל־A יש את תכונת בייר)$\iff$(קיימת $F \subseteq X$ סגורה וקיימת $P \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A = F \triangle P$).

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ בעלת תכונת בייר אזי $A^{\mathcal{C}}$ בעלת תכונת בייר.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\{A \subseteq X \mid A \text{ בעלת תכונת בייר}\} = \sigma\left(\{A \subseteq X \mid (A \text{ פתוחה}) \vee (A \text{ מקטגוריה ראשונה})\}\right)$.

משפט: תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\varnothing, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \left\{A^{\mathcal{C}} \mid A \in \mathcal{F}_\alpha\right\} \cup \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_\alpha\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}_\alpha$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ כאשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא X קבוצה עבורה $|X| = \aleph$ אזי $|\sigma(X)| = \aleph$.

מרחב מדיד: תהא X קבוצה ותהא $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ־אלגברה אזי (X, Σ).

פונקציית מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing) = 0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$.

מרחב מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא μ פונקציית מידה אזי (X, Σ, μ).

מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) < \infty$.

מידה σ־סופית: פונקציית מידה μ עבורה קיימים $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ המקיימים $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ וכן $\forall i \in \mathbb{N}_+ . \mu(B_i) < \infty$.

מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) = 1$.

טענה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי

- מונוטוניות: יהיו $A, B \in \Sigma$ כאשר $B \subseteq A$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$.

- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right)$.
- רציפות מלעיל: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)$.
- רציפות מלרע: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \supseteq A_{i+1}$ וכן $\mu\left(A_1\right) < \infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)$.

מידת בורל: תהא X קבוצה אזי מידה μ על $(X, \mathcal{B}(X))$.

קבוצה ממידה אפס/זניחה: $E \in \Sigma$ המקיימת $\mu(E) = 0$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{N} = \{E \in \Sigma \mid \mu(E) = 0\}$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ זניחות אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ זניחה.

כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי ψ פרידיקט עבורו קיימת $E \in \mathcal{N}$ המקיים כי ψ מתקיים לכל $X \backslash E$ אזי נאמר כי "ψ נכונה μ כמעט בכל מקום".

מידה שלמה: פונקציית מידה μ עבורה לכל $E \in \mathcal{N}$ ולכל $F \subseteq E$ מתקיים $F \in \mathcal{N}$.

השלמה של σ־אלגברה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma} = \{E \cup F \mid (E \in \Sigma) \wedge (\exists N \in \mathcal{N} . F \subseteq N)\}$.

טענה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}$ σ־אלגברה.

טענה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי קיימת ויחידה מידה שלמה ν על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\nu_{\restriction_\Sigma} = \mu$.

השלמה של מידה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי המידה השלמה $\overline{\mu}$ על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\overline{\mu}_{\restriction_\Sigma} = \mu$.

טענה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\left(X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu}\right)$ מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא $X \neq \varnothing$ אזי $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X \in \mathcal{D}$.
- יהיו $A, B \in \mathcal{D}$ באשר $A \subseteq B$ אזי $B \backslash A \in \mathcal{D}$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \subseteq A_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

מערכת π: תהא $X \neq \varnothing$ אזי $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A_1 \ldots A_n \in \Pi$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \Pi$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ מחלקות דינקין אזי $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{D}_\alpha$ מחלקת דינקין.

מחלקת דינקין נוצרת: תהא $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות דינקין מעל X המכילות את A אזי $d(A) = \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{D}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ אזי $d(A)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \subseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \supseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

משפט הלמה של דינקין: תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ מערכת π אזי $\sigma(\Pi) = d(\Pi)$.

מסקנה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma = \sigma(\Pi)$ ותהיינה μ, ν מידות סופיות על Σ עבורן $\mu(X) = \nu(X)$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi} = \nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu = \nu$.

מסקנה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi \subseteq \mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma = \sigma(\Pi)$ תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Pi$ באשר $\forall i \in \mathbb{N}_+ . A_i \subseteq A_{i+1}$ וכן $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X$ ותהיינה μ, ν מידות על Σ עבורן $\forall n \in \mathbb{N}_+ . \mu(A_i) = \nu(A_i) < \infty$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi} = \nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu = \nu$.

חוג למחצה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $\varnothing \in \mathcal{E}$.
- יהיו $A, B \in \mathcal{E}$ אזי $A \cap B \in \mathcal{E}$.
- יהיו $A, B \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $C_1 \ldots C_n \in \mathcal{E}$ עבורם $A \backslash B = \biguplus_{i=1}^{n} C_i$.

טענה: יהי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ חוג למחצה ויהיו $A_1 \ldots A_n \in \mathcal{E}$ אזי

- יהי $P \in \mathcal{E}$ אזי קיימים $B_1 \ldots B_m \in \mathcal{E}$ עבורם $P \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \biguplus_{i=1}^{m} B_i$.
- קיימים $\{B_{i,j} \mid (i \in [n]) \wedge (j \in [m_i])\} \subseteq \mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \biguplus_{i=1}^{m} \biguplus_{j=1}^{m_i} B_{i,j}$.
- קיימים $\{B_{i,j} \mid (i \in \mathbb{N}_+) \wedge (j \in [m_i])\} \subseteq \mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \biguplus_{i=1}^{\infty} \biguplus_{j=1}^{m_i} B_{i,j}$.

מידה אלמנטרית: יהי $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ חוג למחצה אזי $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing) = 0$.
- אדיטיביות: תהיינה $A, B \in \mathcal{E}$ עבורם $A \uplus B \in \mathcal{E}$ אזי $\mu(A \uplus B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- מונוטוניות: תהיינה $A, B \in \mathcal{E}$ באשר $A \subseteq B$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_i\right)$.

מידה חיצונית: יהי $X \neq \varnothing$ אזי $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ המקיימת

- $\mu^*(\varnothing) = 0$.

- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{P}(X)$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu^{*}(A)\le\mu^{*}(B)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.

המידה החיצונית הנוצרת על ידי ρ: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ עבורה $\rho(\varnothing)=0$ נגדיר $\rho^{*}:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ כך $\rho^{*}(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\rho(E_i)\mid\left(\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}\right)\wedge\left(A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ עבורה $\rho(\varnothing)=0$ אזי ρ^{*} מידה חיצונית.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $m^{*}_{\restriction_{\mathcal{M}}}=m$.

קבוצה λ: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda(\varnothing)=0$ אזי $E\in\mathcal{A}$ עבורה לכל $F\in\mathcal{A}$ מתקיים $\lambda(E\cap F)+\lambda\left(E^{\mathcal{C}}\cap F\right)=\lambda(E\cap F)+\lambda(F\backslash E)=\lambda(F)$.

סימון: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda(\varnothing)=0$ אזי $\Gamma_0=\{E\in\mathcal{A}\mid\text{קבוצה } \lambda \text{ } E\}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda(\varnothing)=0$ אזי

- Γ_0 אלגברה.
- λ אדיטיבית על Γ_0.
- תהיינה $E_1\ldots E_n\in\Gamma_0$ ויהי $F\in\mathcal{A}$ אזי $\lambda\left(\biguplus_{i=1}^{n}(E_k\cap F)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(E_n\cap F)$.

קבוצה מדידה ביחס למידה חיצונית: תהא μ^{*} מידה חיצונית על X אזי $A\subseteq X$ עבורה לכל $E\subseteq X$ מתקיים $\mu^{*}(E)=\mu^{*}(E\cap A)+\mu^{*}(E\backslash A)$.

סימון: תהא μ^{*} מידה חיצונית על X אזי $\Sigma_{\mu^{*}}=\{A\subseteq X\mid\text{מדידה } \mu^{*} \text{ } A\}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mathcal{M}\subseteq\Sigma_{m^{*}}$.

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא μ^{*} מידה חיצונית על X אזי

- $\Sigma_{\mu^{*}}$ σ־אלגברה.
- $\mu^{*}_{\restriction_{\Sigma_{\mu^{*}}}}$ מידה שלמה.

המשכת קרתיאודורי: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי m^{*} מידה מעל $\Sigma_{m^{*}}$.

משפט: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא (X,Σ',μ) המשכת קרתיאודורי נוספת של $(\mathcal{M},m)$ אזי

- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu(A)\le m^{*}(A)$.
- נניח כי $m^{*}(X)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu(A)=m^{*}(A)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu(A)=m^{*}(A)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

משפט קרתיאודורי: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא μ^{*} מידה חיצונית עבורה לכל $A,B\subseteq X$ באשר $d(A,B)>0$ מתקיים $\mu^{*}(A\cup B)=\mu^{*}(A)+\mu^{*}(B)$ אזי $\mathcal{B}(X)\subseteq\Sigma_{\mu^{*}}$.

קבוצה רגולרית: קבוצה $A\in\Sigma$ עבורה $\mu(A)=\sup\{\mu(K)\mid(K\subseteq A)\wedge(\text{קומפקטית } K)\}$.

מידה רגולרית: מידה μ עבורה כל $A\in\Sigma$ הינה רגולרית.

משפט אולם: יהי X מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא μ מידת בורל עבורה $\mu(X)<\infty$ אזי μ רגולרית.

מידת הנפח האלמנטרית: מידה אלמנטרית m מעל $\left\{\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}\right\}$ עבורה $m\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

σ־אלגברה לבג: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)=\sigma\left(\{A\subseteq\mathbb{R}^n\mid(\text{פתוחה } A)\vee(\text{זניחה על פי מידת הנפח האלמנטרית } A)\}\right)$.

מסקנה: $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\subseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

טענה: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)=\Sigma_{m^{*}}$.

מידת לבג: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי המשכת קרתיאודור $m_d=m^{*}$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ מידה אלמנטרית עבורה $\nu\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ אזי ν הינה מידת הנפח האלמנטרית.

טענה: תהא m_d מידת לבג אזי

- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $m_d(E)=\lim_{n\to\infty}m_d\left(E\cap[-n,n]^d\right)$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $E\subseteq\mathcal{O}$ פתוחה עבורה $m_d(\mathcal{O}\backslash E)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ סגורה עבורה $m_d(E\backslash F)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $\mu(E)<\infty$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ קומפקטית עבורה $m_d(E\backslash F)<\varepsilon$.
- תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\left(E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\Longleftrightarrow$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $m_d(A)=m_d(B)$).

טענה: תהא m_d מידת לבג אזי m_d רגולרית.

טענה: תהא m_d מידת לבג ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^d$ התב"ש

- $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
- קיימת $G\in G_\delta$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=G\backslash E$.
- קיימת $F\in F_\sigma$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=F\cup E$.

מסקנה: תהא m_d מידת לבג אזי $\left(\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right),m_d\right)$ השלמה של $\left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right),m\right)$.

משפט: תהא m_d מידת לבג תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה תהא $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^d$ ליפשיץ ותהא $A\subseteq\mathcal{O}$ אזי

- נניח כי $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $f\left(A\right)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.
- נניח כי $m_d\left(A\right)=0$ אזי $m_d\left(f\left(A\right)\right)=0$.

משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ויהי $x\in\mathbb{R}^n$ אזי $m_n\left(A\right)=m_n\left(A+x\right)$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ מידה אינווריאנטית להזזות עבורה לכל $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ מתקיים $\nu\left(E\right)<\infty$ אזי קיים $\kappa\in[0,\infty)$ עבורו $m_d=\kappa\nu$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ותהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $m_d\left(T\left(E\right)\right)=\left|\det\left(T\right)\right|m_d\left(E\right)$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אורתוגונלית ותהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $m_d\left(T\left(E\right)\right)=m_d\left(E\right)$.

קבוצה פשוטה: $A\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה קיימים $a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}$ המקיימים $A=\prod_{i=1}^n\left(a_i,b_i\right)$.

הגדרה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ חסומה ותהא m_d מידת לבג אזי

- מידת ז'ורדן פנימית: $m_{*,J}\left(E\right)=\sup\left\{m_d\left(A\right)\mid\left(\text{פשוטה } A\right)\wedge\left(A\subseteq E\right)\right\}$.
- מידת ז'ורדן חיצונית: $m_J^*\left(E\right)=\inf\left\{m_d\left(A\right)\mid\left(\text{פשוטה } A\right)\wedge\left(A\supseteq E\right)\right\}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ חסומה עבורה $m_{*,J}\left(E\right)=m_J^*\left(E\right)$ אזי $m_J\left(E\right)=m_J^*\left(E\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ חסומה אזי $m_{*,J}\left(E\right)=m_d\left(\text{int}\left(E\right)\right)$ וכן $m_J^*\left(E\right)=m_d\left(\overline{E}\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ חסומה ותהא m_d מידת לבג אזי

- E מדידה ז'ורדן.
- לכל $\varepsilon>0$ אזי קיימות A,B פשוטות עבורן $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $m_d\left(B\backslash A\right)<\varepsilon$.
- $m_J^*\left(\partial E\right)=0$.
- $m^*\left(\partial E\right)=0$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $m_d\left(E\right)>1$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Z}^d\backslash\left\{0\right\}$.

משפט מינקובסקי: יהי $V\subseteq\mathbb{R}^d$ גוף קמור סימטרי סביב 0 עבורו $m_d\left(V\right)>2^d$ אזי $V\cap\left(\mathbb{Z}^d\backslash\left\{0\right\}\right)\neq\varnothing$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $m_d\left(E\right)\in\left(0,\infty\right)$ ותהא $\theta\in\left(0,1\right)$ אזי קיימת קוביה $Q\subseteq\mathbb{R}^d$ עבורה $m_d\left(E\cap Q\right)>\theta\cdot m_d\left(Q\right)$.

משפט שטיינהאוס: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $m_d\left(E\right)>0$ אזי $0\in\text{int}\left(E-E\right)$.

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $m_d\left(E\right)>0$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Q}\backslash\left\{0\right\}$.

למה: תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה אזי קיימים $\left\{B_i\right\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ כדורים וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורם $\mathcal{O}=\left(\biguplus_{i=1}^\infty B_i\right)\cup E$.

פונקציית התפלגות: $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ מונוטונית עולה ורציפה מימין.

טענה: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ אזי $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $F\left(x\right)=\mu\left(\left(-\infty,x\right]\right)$ הינה פונקציית התפלגות.

קדם־מידה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה אזי $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ המקיימת

- $\mu\left(\varnothing\right)=0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\left\{B_i\right\}_{i=1}^\infty\subseteq\Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^\infty B_i\right)=\sum_{i=1}^\infty\mu\left(B_i\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $m^*_{\restriction\mathcal{A}}=m$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $\mathcal{A}\subseteq\Sigma_{m^*}$.

המשכת קרתיאודורי: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי m^* מידה מעל Σ_{m^*}.

משפט: תהא $\mathcal{A}$אלגברה תהא m קדם־מידה ותהא $\left(X,\Sigma',\mu\right)$ המשכת קרתיאודורי נוספת של $\left(\mathcal{A},m\right)$ אזי

- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu\left(A\right)\leq m^*\left(A\right)$.
- נניח כי $m^*\left(X\right)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^*\left(A\right)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^*\left(A\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu\left(\left[a,b\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$ מידה אלמנטרית מעל החוג למחצה $\left\{\left[a,b\right)\mid a\leq b\right\}$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_{i}\right)-F\left(a_{i}\right)\right)$ קדם־מידה מעל האלגברה $\{\biguplus_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\mid\forall i\in[n].a_{i}\le b_{i}\}$.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי קיימת ויחידה מידת בורל μ_F עבורה $\mu_F\left([a,b)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

טענה: תהיינה $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות התפלגות אזי $\left(\mu_F=\mu_G\right)\iff\left(\exists c\in\mathbb{R}.F-G=c\right)$.

מידה סופית מקומית: מידת בורל μ מעל $\mathbb{R}$ עבורה $\forall a,b\in\mathbb{R}.\mu\left([a,b]\right)<\infty$.

מסקנה: תהא μ מידת בורל סופית מקומית על $\mathbb{R}$ אזי קיימת פונקציית התפלגות $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mu=\mu_F$.

מידת לבג־סטילטייס: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\overline{\mu_F}$.

סימון: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות נסמן $\mu_F=\overline{\mu_F}$.

מסקנה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F\left(E\right)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)\mid E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left[a_i,b_i\right)\right\}$.

למה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F\left(E\right)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_i\right)-F\left(a_i\right)\right)\mid E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\left(a_i,b_i\right)\right\}$.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F\left(E\right)=\sup\left\{\mu_F\left(K\right)\mid\left(K\subseteq E\right)\wedge\left(\text{קומפקטית }K\right)\right\}$.

מסקנה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי μ_F רגולרית.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- $E\in\Sigma_{\mu_F}$.
- קיימת $G\in G_\delta$ וכן $N\in\mathcal{N}$ עבורן $E=G\backslash N$.
- קיימת $F\in F_\sigma$ וכן $N\in\mathcal{N}$ עבורן $E=F\uplus N$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(E\in\Sigma_{\mu_F}\right)\Longleftrightarrow$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\mu_F\left(A\right)=\mu_F\left(B\right)$).

טענה העיקרון הראשון של ליטלווד: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות תהא $E\in\Sigma_{\mu_F}$ עבורה $\mu_F\left(E\right)<\infty$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימים $a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\mu_F\left(E\triangle\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(a_i,b_i\right)\right)\right)<\varepsilon$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C}=[0,1]\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$

טענה: תהא m_d מידת לבג אזי $\mathcal{C}\in\mathcal{N}$.

טענה: $\mathcal{C}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}\;\middle|\;x\in\mathbb{N}^{\{0,2\}}\right\}$.

קבוצה מושלמת: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ בלתי קשירה לחלוטין אשר לא מכילה נקודות מבודדות.

טענה:

- $|\mathcal{C}|=\aleph$.
- $\mathcal{C}$ קומפקטית.
- $\mathcal{C}$ מושלמת.

קבוצת קנטור מוכללת: תהיינה $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left((0,1)\right)$ נגדיר $C_0=[0,1]$ וכן את C_n להיות C_{n-1} לאחר שהוצאנו ממרכזו של כל קטע I ב־C_{n-1} קטע באורך $\delta_n\cdot m_d\left(I\right)$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}C_i$.

טענה: קבוצת קנטור הינה קבוצת קנטור מוכללת באשר $\forall n\in\mathbb{N}_+.\delta_n=\frac{1}{3}$.

טענה: תהיינה $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left((0,1)\right)$ אזי (קבוצת קנטור המוכללת זניחה על פי מידת לבג)$\Longleftrightarrow$($\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i=\infty$).

הגדרה: נגדיר $\varphi^\star:\mathcal{C}\to[0,1]$ כך שאם $x\in\mathcal{C}$ בעל הצגה $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2a_i}{3^i}$ עבור $a_i\in\{0,1\}$ אזי $\varphi^\star\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$.

פונקציית קנטור: נגדיר $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ כך $\varphi\left(x\right)=\sup\left\{\varphi^\star\left(t\right)\mid\left(t\in\mathcal{C}\right)\wedge\left(t\le x\right)\right\}$.

טענה: תהא $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ פונקציית קנטור אזי

- φ עולה.
- φ רציפה.
- $\varphi\left(\mathcal{C}\right)=[0,1]$.
- קיימת $E\subseteq\mathcal{C}$ עבורה $\varphi\left(E\right)\notin\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$.

קוטר קבוצה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ אזי $\operatorname{diam}\left(A\right)=\sup\left\{d\left(x,y\right)\mid x,y\in A\right\}$.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ יהי $\delta>0$ ויהי $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\operatorname{diam}\left(A_i\right)^s\mid\left(E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\wedge\left(\operatorname{diam}\left(A_i\right)<\delta\right)\right\}$.

מידת האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s\left(E\right)=\lim_{\delta\downarrow0}\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $\delta>0$ אזי

- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f\left(\delta\right)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$ יורדת.
- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:[0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f\left(s\right)=\mathcal{H}_{s,\delta}\left(E\right)$ יורדת.

- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f(s)=\mathcal{H}_s(E)$ יורדת.
- $\mathcal{H}_s(\varnothing)=0$.
- $\mathcal{H}_s,\mathcal{H}_{s,\delta}$ מידות חיצוניות.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\geq 0$ יהי $\delta>0$ ותהיינה $A,B\subseteq X$ עבורן $d(A,B)>\delta$ אזי $\mathcal{H}_{s,\delta}(A\cup B)=\mathcal{H}_{s,\delta}(A)+\mathcal{H}_{s,\delta}(B)$.

מסקנה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\geq 0$ ותהיינה $A,B\subseteq X$ עבורן $d(A,B)>0$ אזי $\mathcal{H}_s(A\cup B)=\mathcal{H}_s(A)+\mathcal{H}_s(B)$.

מסקנה: יהי $s\geq 0$ ותהא $E\in\mathcal{B}(X)$ אזי E מדידה $\mathcal{H}_s$.

מסקנה: תהא $f:X\to Y$ ליפשיץ L ותהא $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E))\leq L^s\cdot\mathcal{H}_s(E)$.

מסקנה: תהא $f:X\to X$ איזומטריה ותהא $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E))=\mathcal{H}_s(E)$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\geq 0$ ותהא $E\subseteq X$ אזי

- אם $\mathcal{H}_s(E)<\infty$ אזי לכל $t>s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E)=0$.
- אם $\mathcal{H}_s(E)>0$ אזי לכל $t<s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E)=\infty$.

מסקנה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי $n<s$ אזי $\mathcal{H}_s(E)=0$.

מימד האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $E\subseteq X$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(E)=\inf\{s\geq 0\mid\mathcal{H}_s(E)=0\}$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n)=n$.

משפט: $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})=\log_3(2)$.

משפט: תהא m_d מידת לבג מעל $\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{H}_n=\frac{2^n}{m_d(\{|x|\leq 1\})}\cdot m_d$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $0<\mathcal{H}_n([0,1]^n)<\infty$.

העתקה מדידה: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)$ מרחבים מדידים אזי $T:X\to Y$ המקיימת $T^{-1}(\Sigma_Y)\subseteq\Sigma_X$.

סימון: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)$ מרחבים מדידים ותהא $T:X\to Y$ העתקה מדידה אזי $T:(X,\Sigma_X)\to(Y,\Sigma_Y)$.

טענה: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y),(Z,\Sigma_Z)$ מרחבים מדידים תהא $T:X\to Y$ העתקה (Σ_X,Σ_Y)-מדידה ותהא $S:Y\to Z$ העתקה (Σ_Y,Σ_Z)-מדידה אזי $S\circ T$ העתקה (Σ_X,Σ_Z)-מדידה.

טענה: יהיו $(X,\Sigma_X),(Y,\Sigma_Y)$ מרחבים מדידים תהא $T:X\to Y$ ותהא $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(Y)$ עבורה $\Sigma_Y=\sigma(\mathcal{E})$ וכן $T^{-1}(\mathcal{E})\subseteq\Sigma_X$ אזי T העתקה (Σ_X,Σ_Y)-מדידה.

טענה: יהיו X,Y מרחבים מטריים ותהא $T\in C(X,Y)$ אזי T העתקה $(\mathcal{B}(X),\mathcal{B}(Y))$-מדידה.

הגדרה: $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}=[-\infty,\infty]$.

הגדרה: נגדיר $0\cdot(\pm\infty)=0$ והפעולות $\infty-\infty,\frac{\infty}{\infty}$ אינן מוגדרות.

הגדרה: נגדיר $A(x)=\lim_{t\to x}\arctan(t)$ וכן $\rho(x,y)=|A(x)-A(y)|$.

טענה: $\left(\overline{\mathbb{R}},\rho\right)$ מרחב מטרי שלם.

טענה: תהא $A\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ אזי $\left(A\in\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\Longleftrightarrow$(קיימת $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ וכן $S\in\mathcal{P}(\{\pm\infty\})$ עבורן $A=B\cup S$).

טענה: $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\mathbb{R}\cap\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי

- העתקה $f:X\to\mathbb{R}$ $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-מדידה.
- העתקה $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $\left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$-מדידה.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ התב"ש

- f מדידה בורל.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f\geq a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f\geq a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f>a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f>a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f\leq a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f\leq a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים $\{f<a\}\in\Sigma$.
- לכל $a\in\mathbb{Q}$ מתקיים $\{f<a\}\in\Sigma$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f\in C(X,\mathbb{R})$ רציפה אזי f מדידה בורל.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ אזי (f מדידה בורל)$\Longleftrightarrow$($f_{\restriction_{f^{-1}(\mathbb{R})}}$ מדידה בורל וכן $f^{-1}(\pm\infty)\in\Sigma$).

סימון: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ אזי $f^{+}=\max\{f,0\}$ וכן $f^{-}=-\max\{-f,0\}$.

משפט: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $f^{+},f^{-},\frac{1}{f},f\cdot g,f+g,f^{2}$ מדידות.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\{f<g\},\{f\le g\},\{f=g\}\in\Sigma$.

משפט: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות אזי $\sup\{f_n\},\inf\{f_n\},\limsup\{f_n\},\liminf\{f_n\}$ מדידות.

מסקנה: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ עבורה $f_n\to f$ אזי f מדידה.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\min\{f,g\},\max\{f,g\},|f|$ מדידות.

פונקציה פשוטה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\ldots E_n\in\Sigma$ וכן $a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

פונקציה סטנדרטית: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\ldots E_n\in\Sigma$ עבורם $\biguplus_{i=1}^{n}E_i=X$ וקיימים $a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

הצגה סטנדרטית של פונקציה פשוטה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ פשוטה אזי $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{E_i}$ באשר $\biguplus_{i=1}^{n}E_i=X$.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ פשוטה אזי קיימת הצגה סטנדרטית.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ אזי (φ פשוטה)$\Longleftrightarrow$(φ מדידה וכן $\varphi(X)$ סופית).

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$.

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית תהא $A\subseteq X$ עבורה f חסומה ותהיינה $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$ אזי $\varphi_n\rightrightarrows f$ על A.

מסקנה: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות עבורן $\varphi_n\to f$ וכן $|\varphi_n|\uparrow|f|$.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה ותהא $g:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f=g$ כ.ב.מ. אזי g מדידה.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהיינה $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f_n\to f$ כ.ב.מ. אזי f מדידה.

טענה: תהא μ מידה ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mu}$-מדידה אזי קיימת $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ μ-מדידה וכן $f=g$ $\overline{\mu}$-כ.ב.מ.

מחלקת בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Borel}(X)=\{f:X\to\mathbb{R}\mid \text{מדידה בורל } f\}$.

סימון: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}_0(X)=C(X)$ וכן $\text{Baire}_{i+1}(X)=\{\lim_{n\to\infty}f_n\mid\{f_n\}\subseteq\text{Baire}_i(X)\}$.

מחלקת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}(X)=\bigcup_{i=0}^{\infty}\text{Baire}_i(X)$.

למה: תהא $\varphi\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ ותהיינה $f,g\in\text{Baire}(X)$ אזי $\varphi(f,g)\in\text{Baire}(X)$.

למה: תהא $F\subseteq X$ סגורה אזי קיימות $\{f_n\}\subseteq C(X,\mathbb{R})$ עבורן $f_n\to\mathbb{1}_F$.

מחלקה מונוטונית: יהי X מרחב מטרי אזי $R\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\subseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in R$.
- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\supseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\in R$.

מחלקה מונוטונית נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות המונוטוניות מעל X המכילות את A אזי $\mathcal{M}(\mathcal{A})=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{R}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\mathcal{M}(A)$ הינה המחלקה המונוטונית הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}(X)=\text{Borel}(X)$.

משפט לוזין/טענה העיקרון השני של ליטלווד: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ תהא $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימת $K\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R}\backslash K)<\varepsilon$ וכן $f\in C(K)$.

הגדרה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $L^0(X,\Sigma)=\left\{f:X\to\overline{\mathbb{R}}\mid \text{מדידה } f\right\}$.

התכנסות במידה: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\mu(\{x\in X\mid|f_n(x)-f(x)|>0\})\to 0$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

התכנסות כמעט בכל מקום: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורה $\mu(X\backslash\{x\in X\mid\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\})=0$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$.

סימון: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ וכן $f_n\xrightarrow{a.s.}f$.

משפט לבג: תהא μ מידה סופית יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

למה בורל קנטלי: יהיו $\{E_n\}\subseteq\Sigma$ מדידות עבורן $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k\right)=0$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ עבורן לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{|f_n>\varepsilon|\})<\infty$ אזי

- $f_n \xrightarrow{a.e.} 0$.
- תהא $\delta>0$ אזי קיימת $E\subseteq X$ עבורה $\mu\left(E\right)<\delta$ וכן $f_n\rightrightarrows 0$ על $X\backslash E$.

משפט ריס: תהיינה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ אזי קיימת תת"ס עבורה $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0\left(X,\Sigma\right)$ ותהיינה $f,g\in L^0\left(X,\Sigma\right)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu} f$ וכן $f_n \xrightarrow{\mu} g$ אזי $f=g$ כ.ב.מ..

משפט אגורוב/טענה העיקרון השלישי של ליטלווד: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימת $E\subseteq X$ עבורה $\mu\left(E\right)<\varepsilon$ וכן $f_n\rightrightarrows f$ על $X\backslash E$.

מסקנה לוזין: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי קיימת $N\subseteq X$ עבורה $\mu\left(N\right)=0$ וקיימות $\{A_k\}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ עבורן $X=N\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ וכן לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $f_n\rightrightarrows f$ על A_k.

למה פרשה: יהי $\left(X,\rho\right)$ מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X ותהא $f:\left(X,\mathcal{B}\left(X\right)\right)\to\left(\mathbb{R},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$ אזי קיימות $\{f_n\}\subseteq C\left(X\right)$ עבורן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

משפט לוזין: יהי $\left(X,\rho\right)$ מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X תהא $f:\left(X,\mathcal{B}\left(X\right)\right)\to\left(\mathbb{R},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)\right)$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימת $K\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu\left(\mathbb{R}\backslash K\right)<\varepsilon$ וכן $f\in C\left(K\right)$.

סימון: יהי $\left(X,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה אזי $\mathcal{S}\left(\Sigma\right)=\{\varphi\in X\to\mathbb{R}\mid \text{פונקציה פשוטה } \varphi\}$.

סימון: יהי $\left(X,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה אזי $\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)=\{\varphi\in\mathcal{S}\left(\Sigma\right)\mid\varphi\geq 0\}$.

למה: תהא $f\in\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)$ ותהיינה $f=\sum_{i=1}^{N}x_i\mathbb{1}_{A_i}=\sum_{i=1}^{M}y_i\mathbb{1}_{B_i}$ הצגות סטנדרטיות אזי $\sum_{i=1}^{N}x_i\mu\left(A_i\right)=\sum_{i=1}^{M}y_i\mu\left(B_i\right)$.

אינטגרל: תהא $f\in\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)$ ותהא $f=\sum_{i=1}^{N}x_i\mathbb{1}_{A_i}$ הצגה סטנדרטית אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{N}x_i\mu\left(A_i\right)$.

אינטגרל: תהא $f\in\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)$ ותהא $E\in\Sigma$ אזי $\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_X\mathbb{1}_E f\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)$ תהא $A\in\Sigma$ ויהי $\lambda\geq 0$ אזי
- $\int_X\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu=\mu\left(A\right)$.
- הומוגניות חיובית: $\int_X\lambda f\mathrm{d}\mu=\lambda\int_X f\mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: $\int_X\left(f+g\right)\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}\mu+\int_X g\mathrm{d}\mu$.
- מונוטוניות: נניח כי $f\leq g$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu\leq\int_X g\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f\in\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)$ אזי $\psi:\Sigma\to\mathbb{R}$ המוגדרת $\psi\left(E\right)=\int_E f\mathrm{d}\mu$ הינה מידה מעל Σ.

סימון: יהי $\left(X,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה אזי $L^0\left(X,\Sigma\right)=\left\{f\in X\to\overline{\mathbb{R}}\mid \left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)\text{-מדידה } f\right\}$.

סימון: יהי $\left(X,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה אזי $L^0_+\left(X,\Sigma\right)=\left\{f\in L^0\left(X,\Sigma\right)\mid f\geq 0\right\}$.

למה: תהא $f\in\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\sup\left\{\int_X\varphi\mathrm{d}\mu\mid\left(\varphi\in\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)\right)\wedge\left(\varphi\leq f\right)\right\}$.

אינטגרל: תהא $f\in L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\sup\left\{\int_X\varphi\mathrm{d}\mu\mid\left(\varphi\in\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)\right)\wedge\left(\varphi\leq f\right)\right\}$.

אינטגרל: תהא $f\in L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ ותהא $E\in\Sigma$ אזי $\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_X\mathbb{1}_E f\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f,\{f_n\}\subseteq L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ עבורן $f_n\uparrow f$ ותהא $g\in\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)$ באשר $g\leq f$ אזי $\int_X g\mathrm{d}\mu\leq\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

משפט התכנסות מונוטונית: תהיינה $f,\{f_n\}\subseteq L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ עבורן $f_n\uparrow f$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_X f_n\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא $f\in L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ ותהא $\{\varphi_n\}\subseteq\mathcal{S}^+\left(\Sigma\right)$ עבורה $\varphi_n\uparrow f$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X\varphi_n\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f,g\in L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ תהא $A\in\Sigma$ ויהי $\lambda\geq 0$ אזי
- $\int_X\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu=\mu\left(A\right)$.
- הומוגניות חיובית: $\int_X\lambda f\mathrm{d}\mu=\lambda\int_X f\mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: $\int_X\left(f+g\right)\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}\mu+\int_X g\mathrm{d}\mu$.
- מונוטוניות: נניח כי $f\leq g$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu\leq\int_X g\mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא $\{f_n\}\subseteq L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ ותהא $E\in\Sigma$ אזי $\int_E f\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f\in L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ אזי $(\int_X f\mathrm{d}\mu=0)\Longleftrightarrow(f=0$ כ.ב.מ.).

טענה התכנסות מונוטונית: תהיינה $f,\{f_n\}\subseteq L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ עבורן $f_n\uparrow f$ כ.ב.מ. אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

משפט הלמה של פטו: תהא $\{f_n\}\subseteq L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ אזי $\int_X\left(\liminf_{n\to\infty}f_n\right)\mathrm{d}\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהיינה $f,\{f_n\}\subseteq L^0_+\left(X,\Sigma\right)$ עבורן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

אינטגרל: תהא $f\in L^0\left(X,\Sigma\right)$ עבורה $\int_X f^{\pm}\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_X f^+\mathrm{d}\mu-\int_X f^-\mathrm{d}\mu$.

סימון: יהי $\left(X,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה אזי $L^1\left(\mu\right)=\left\{f\in L^0\left(X,\Sigma\right)\mid\int_X f^{\pm}\mathrm{d}\mu<\infty\right\}$.

טענה: תהא $f\in L^0\left(X,\Sigma\right)$ התב"ש
- $f\in L^1\left(\mu\right)$.

- $f^{\pm}\in L^1(\mu)$.
- $|f|\in L^1(\mu)$.
- קיימת $g\in L^1(\mu)$ עבורה $|f|\le g$.

טענה: יהיו $f,g\in L^1(\mu)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{R}$ אזי
- הומוגניות: מתקיים $\lambda f\in L^1(\mu)$ ובפרט $\int_X \lambda f\mathrm{d}\mu=\lambda\int_X f\mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: מתקיים $f+g\in L^1(\mu)$ ובפרט $\int_X(f+g)\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}\mu+\int_X g\mathrm{d}\mu$.
- $\max\{f,g\},\min\{f,g\}\in L^1(\mu)$.
- מונוטוניות: נניח כי $f\le g$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu\le\int_X g\mathrm{d}\mu$.
- אי־שיוויון המשולש: $\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right|\le\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu$.

אינטגרל: תהא $f\in L^1(\mu)$ ותהא $E\in\Sigma$ אזי $\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_X \mathbb{1}_E f\mathrm{d}\mu$.

מידה עם צפיפות ביחס למידה: תהא $f\in L_+^0(X,\Sigma)$ אזי $\psi:\Sigma\to\mathbb{R}$ המוגדרת $\psi(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$.

סימון: תהא $f\in L_+^0(X,\Sigma)$ אזי מידה עם צפיפות f ביחס למידה μ הינה $f\mathrm{d}\mu$.

למה: תהא $f\in L_+^0(X,\Sigma)$ אזי $f\mathrm{d}\mu$ הינה מידה מעל Σ.

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי העתקה $f:X\to\mathbb{C}$ $\left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$־מדידה.

טענה: תהא $f:X\to\mathbb{C}$ אזי (f מדידה)$\Longleftrightarrow$($\mathrm{Re}(f),\mathrm{Im}(f)$ מדידות).

אינטגרל: תהא $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה עבורה $\int_X\mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu,\int_X\mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_X\mathrm{Re}(f)\,\mathrm{d}\mu+i\int_X\mathrm{Im}(f)\,\mathrm{d}\mu$.

הערה: נשתמש בסימון $L^1(\mu)$ גם עבור פונקציות מרוכבות אינטגרביליות.

טענה: תהא $f\in L^1(\mu)$ אזי $\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right|\le\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f\in L^1(\mu)$ אזי $\{f\neq0\}$ קבוצה σ־סופית.

טענה: תהא $f\in L^1(\mu)$ אזי (לכל $E\in\Sigma$ מתקיים $\int_E f\mathrm{d}\mu=0$)$\Longleftrightarrow$($f=0$ כ.ב.מ.).

מסקנה: תהיינה $f,g\in L^1(\mu)$ עבורן $\mu(\{f\neq g\})=0$ אזי $\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_X g\mathrm{d}\mu$.

הגדרה: תהיינה $f,g\in L^1(\mu)$ עבורן $\mu(\{f\neq g\})=0$ אזי $f\sim g$.

הערה: מכאן והלאה נתייחס לפונקציות שקולות כזהות, כלומר $L^1(\mu)\equiv {}^{L^1(\mu)}/_{\sim}$.

טענה: תהא μ מידה אזי $L^1(\mu)\equiv L^1(\overline{\mu})$.

משפט ההתכנסות הנשלטת/לבג: תהא $\{f_n\}\subseteq L^1(\mu)$ עבורה $f_n\to f$ וכן קיימת $g\in L^1(\mu)$ עבורה $|f_n|\le g$ אזי $f\in L^1(\mu)$ וכן $\int_X f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $\{f_n\}\subseteq L^1(\mu)$ עבורה $f_n\xrightarrow{\mu}f$ וכן קיימת $g\in L^1(\mu)$ עבורה $|f_n|\le g$ אזי $f\in L^1(\mu)$ וכן $\int_X f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

הערה: מהגדרת האינטגרל ניתן להפוך את כל המגבלות לכמעט בכל מקום.

מסקנה: תהא $\{f_n\}\subseteq L^1(\mu)$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X|f_n|\,\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\sum f_n$ מתכנסת כ.ב.מ..

מסקנה: תהא $\{f_n\}\subseteq L^1(\mu)$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}\int_X|f_n|\,\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\sum f_n\in L^1(\mu)$ וכן $\int_X\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu$.

משפט שפה: תהא $\{f_n\}\subseteq L^1(\mu)$ ותהא $f\in L^1(\mu)$ עבורן $f_m\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $\left(\int_X|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu\to0\right)\Longleftrightarrow\left(\int_X|f_n|\,\mathrm{d}\mu\to\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu\right)$.

סימון: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי אינטגרל רימן שלה הינו $(R)\int_a^b f\mathrm{d}x$.

משפט: תהא m_d מידת לבג ותהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימת $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ מדידה עבורה $g\in L^1(\lambda)$ וכן $f=g$ m_d־כ.ב.מ. המקיימת $(R)\int_a^b f\mathrm{d}x=\int_{[a,b]}g\mathrm{d}m_d$.

סימון: יהי $p\in[1,\infty)$ אזי $L^p(\mu)=\left\{f:X\to\mathbb{R}\mid\left(f\in L^0(X,\Sigma)\right)\wedge\left(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu<\infty\right)\right\}$.

סימון: $L^\infty(\mu)=\left\{f:X\to\mathbb{R}\mid\left(f\in L^0(X,\Sigma)\right)\wedge\left(\exists c>0.\mu(\{|f|\ge0\})=0\right)\right\}$.

הגדרה: נגדיר $\|\cdot\|_p:L^p(\mu)\to\mathbb{R}$ כך $\|f\|=\left(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

הגדרה: נגדיר $\|\cdot\|_\infty:L^\infty(\mu)\to\mathbb{R}$ כך $\rho_\infty(f,g)=\inf\{c>0\mid\mu(\{|f|\ge c\})=0\}$.

טענה אי־שיוויון הולדר: יהיו $p,q\in[1,\infty]$ עבורם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ תהא $f\in L^p(\mu)$ ותהא $g\in L^q(\mu)$ אזי $fg\in L^1(\mu)$ וכן $\int_X|fg|\,\mathrm{d}\mu\le\|f\|_p\|g\|_q$.

מסקנה: יהיו $p,q\in[1,\infty)$ עבורם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ תהא $f\in L^p(\mu)$ עבורה $\|f\|_p\neq0$ ותהא $g\in L^q(\mu)$ עבורה $\|g\|_q\neq0$ אזי $\left(\int_X|fg|\,\mathrm{d}\mu=\|f\|_p\|g\|_q\right)\Longleftrightarrow\left(\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p}=\frac{|g|^p}{\|g\|_p^p}\right.$ כ.ב.מ.).

מסקנה: ρ_p מטריקה מעל $L^p(\mu)$.

מסקנה: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ ותהא $g\in L^{\infty}\left(\mu\right)$ אזי $\left(\int_{X}\left|fg\right|\mathrm{d}\mu=\left\Vert f\right\Vert _{1}\left\Vert g\right\Vert _{\infty}\right)\Longleftrightarrow\left(g_{\restriction_{\left\{ f\neq0\right\} }}=\left\Vert g\right\Vert _{\infty}\right.$ כ.ב.מ.).

מסקנה אי־שיוויון קושי־שוורץ: תהיינה $f,g\in L^{2}\left(\mu\right)$ אזי $\int_{X}\left|fg\right|\mathrm{d}\mu\le\left\Vert f\right\Vert _{2}\left\Vert g\right\Vert _{2}$.

מסקנה אי־שיוויון מינקובסקי: יהי $p\in\left[1,\infty\right]$ ותהיינה $f,g\in L^{p}\left(\mu\right)$ אזי $f+g\in L^{p}\left(\mu\right)$ וכן $\left\Vert f+g\right\Vert _{p}\le\left\Vert f\right\Vert _{p}+\left\Vert g\right\Vert _{p}$.

טענה אי־שיוויון צ'בישב: תהא $\varphi\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ אזי לכל $t>0$ מתקיים $\mu\left(\left\{ x\in X\mid\varphi\ge t\right\} \right)\le\frac{1}{t}\int_{X}\varphi\mathrm{d}\mu$.

התכנסות L^{p}: תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורן $\lim_{n\to\infty}\left\Vert f_{n}-f\right\Vert _{p}=0$ אזי $f_{n}\xrightarrow{L^{p}}f$.

סדרת קושי במרחב L^{p}: $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m\ge N$ מתקיים $\left\Vert f_{n}-f_{m}\right\Vert _{p}<\varepsilon$.

מסקנה: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ אזי $\mathcal{S}\left(\Sigma\right)$ צפופה במרחב $L^{p}\left(\mu\right)$.

למה: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ ותהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ חיוביות אזי $\left\Vert \sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\right\Vert _{p}\le\sum_{n=1}^{\infty}\left\Vert f_{n}\right\Vert _{p}$.

משפט ריס: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $\left(\left\Vert f_{n}\right\Vert _{p}\to\left\Vert f\right\Vert _{p}\right)\Longleftrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{L^{p}}f\right)$.

משפט ריס־פישר: יהי $p\in\left[1,\infty\right]$ אזי $L^{p}\left(\mu\right)$ מרחב שלם.

מסקנה: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{L^{p}}f$ אזי קיימת תת"ס $f_{n_{k}}$ עבורה $f_{n_{k}}\xrightarrow{\mu-a.e.}f$.

טענה רציפות של אינטגרל: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu\left(E\right)<\delta$ מתקיים $\int_{E}\left|f\right|\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

אינטגרבילית במידה שווה: $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu\left(E\right)<\delta$ מתקיים $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{E}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

משפט ויטלי: תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ אזי (קיימת $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{L^{1}}f$)$\Longleftrightarrow$(($\left\{ f_{n}\right\}$ אינטגרביליות במ"ש)$\wedge$(קיימת $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{\mu}f$)$\wedge$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $E\in\Sigma$ עבורה $\mu\left(E\right)<\infty$ וכן $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\backslash E}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu<\varepsilon$)).

מסקנה: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ תהא $\left\{ f_{n}\right\} \subseteq L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{\mu}f$ התב"ש

- $f_{n}\xrightarrow{L^{p}}f$.
- $\left\{ \left|f_{n}\right|^{p}\right\}$ אינטגרביליות במ"ש וכן לכל $\varepsilon>0$ קיימת $E\in\Sigma$ עבורה $\mu\left(E\right)<\infty$ וכן $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\backslash E}\left|f_{n}\right|^{p}\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.
- $\left\Vert f_{n}\right\Vert _{p}\to\left\Vert f\right\Vert _{p}<\infty$.

אלגברה למחצה: תהא X קבוצה אזי חוג למחצה $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ עבורו $X\in\mathcal{E}$.

למה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים אזי $\Sigma_{X}\times\Sigma_{Y}$ אלגברה למחצה על $X\times Y$.

σ־אלגברה מכפלה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים אזי $\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}=\sigma\left(\Sigma_{X}\times\Sigma_{Y}\right)$.

מרחב מכפלה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים אזי $\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}\right)$.

למה: תהא $A\subseteq\Sigma$ עבורה $\sigma\left(A\right)=\Sigma_{X}$ וכן קיימת $\left\{ A_{n}\right\} \subseteq A$ עבורה $A_{n}\uparrow X$ ותהא $B\subseteq\Sigma$ עבורה $\sigma\left(B\right)=\Sigma_{Y}$ וכן קיימת $\left\{ B_{n}\right\} \subseteq B$ עבורה $B_{n}\uparrow X$ אזי $\sigma\left(A\times B\right)=\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\Sigma$ עבורה $\sigma\left(A\right)=\Sigma_{X}$ וכן $X\in A$ ותהא $B\subseteq\Sigma$ עבורה $\sigma\left(B\right)=\Sigma_{Y}$ וכן $Y\in B$ אזי $\sigma\left(A\times B\right)=\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות אזי

- נגדיר $\pi_{X}:X\times Y\to X$ כך $\pi_{X}\left(x,y\right)=x$.
- נגדיר $\pi_{Y}:X\times Y\to X$ כך $\pi_{Y}\left(x,y\right)=y$.

σ־אלגברה נוצרת על ידי העתקה מדידה: תהא $T:\left(X,\Sigma_{X}\right)\to\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ העתקה מדידה אזי $\sigma\left(T\right)=\sigma\left(\left\{ T^{-1}\left[A\right]\mid A\in\Sigma_{Y}\right\} \right)$.

משפט: יהיו $\left(X,\Sigma_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y}\right)$ מרחבים מדידים אזי $\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}=\sigma\left(\pi_{X},\pi_{Y}\right)$.

טענה: תהא $T:Z\to X\times Y$ אזי (T מדידה)$\Longleftrightarrow$($\pi_{X}\circ T,\pi_{Y}\circ T$ מדידות).

טענה: תהא $T:\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}\right)\to\left(Z,\Sigma_{Z}\right)$ העתקה מדידה ויהי $x\in X$ אזי $T\left(x,\cdot\right):Y\to Z$ היא $\left(\Sigma_{Y},\Sigma_{Z}\right)$־מדידה.

מסקנה: תהא $T:\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}\right)\to\left(Z,\Sigma_{Z}\right)$ העתקה מדידה ויהי $y\in Y$ אזי $T\left(\cdot,y\right):X\to Z$ היא $\left(\Sigma_{X},\Sigma_{Z}\right)$־מדידה.

משפט: תהא $A\subseteq\Sigma$ מערכת π עבורה $\sigma\left(A\right)=\Sigma_{X}$ וכן קיימת $\left\{ A_{n}\right\} \subseteq A$ עבורה $A_{n}\uparrow X$ וכן $\mu_{X}\left(A_{n}\right)<\infty$ ותהא $B\subseteq\Sigma$ מערכת π עבורה $\sigma\left(B\right)=\Sigma_{Y}$ וכן קיימת $\left\{ B_{n}\right\} \subseteq B$ עבורה $B_{n}\uparrow X$ וכן $\mu_{Y}\left(B_{n}\right)<\infty$ אזי קיימת ויחידה ρ מידה על $\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}\right)$ המקיימת $\rho\left(E\times F\right)=\mu_{X}\left(E\right)\mu_{Y}\left(F\right)$ לכל $E\in A$ וכן $F\in B$.

משפט: יהיו μ_{X},μ_{Y} מידות σ־סופיות ותהא $\rho:\Sigma_{X}\times\Sigma_{Y}\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת $\rho\left(E\times F\right)=\mu_{X}\left(E\right)\mu_{Y}\left(F\right)$ אזי ρ מידה אלמנטרית.

מידת המכפלה: יהיו μ_{X},μ_{Y} מידות σ־סופיות ותהא $\rho:\Sigma_{X}\times\Sigma_{Y}\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת $\rho\left(E\times F\right)=\mu_{X}\left(E\right)\mu_{Y}\left(F\right)$ אזי המשכת קרתאודורי של ρ.

סימון: יהיו μ_{X},μ_{Y} מידות σ־סופיות אזי מידת המכפלה היא $\mu_{X}\times\mu_{Y}$.

חתכים: תהא $E\subseteq X\times Y$ אזי
- יהי $x\in X$ אזי $E_{x}=\{y\in Y\mid(x,y)\in E\}$.
- יהי $y\in Y$ אזי $E_{y}=\{x\in X\mid(x,y)\in E\}$.

סימון: תהא $f:X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}$ אזי $f_{x}\left(y\right)=f\left(x,y\right)$ וכן $f_{y}\left(x\right)=f\left(x,y\right)$.

למה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X},\mu_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y},\mu_{Y}\right)$ מרחבי מידה σ־סופיים ותהא $E\in\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}$ אזי
- לכל $x\in X$ מתקיים $E_{x}\in\Sigma_{Y}$.
- לכל $y\in Y$ מתקיים $E_{y}\in\Sigma_{X}$.
- הפונקציה $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $f\left(x\right)=\mu_{Y}\left(E_{x}\right)$ היא Σ_{X}־מדידה.
- הפונקציה $f:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $f\left(y\right)=\mu_{X}\left(E_{y}\right)$ היא Σ_{Y}־מדידה.

הערה: כאשר לא ברור מהו המשתנה באינטגרל מסמנים כך $\int f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu\left(x\right)$.

טענה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X},\mu_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y},\mu_{Y}\right)$ מרחבי מידה σ־סופיים ותהא $E\in\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}$ אזי $\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)\left(E\right)=\int_{X}\mu_{Y}\left(E_{x}\right)\mathrm{d}\mu_{X}=\int_{Y}\mu_{X}\left(E_{y}\right)\mathrm{d}\mu_{Y}$.

מסקנה: תהיינה μ_{X},μ_{Y},μ_{Z} מידות σ־סופיים אזי $\mu_{X}\times\mu_{Y}=\mu_{Y}\times\mu_{X}$ וכן $\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)\times\mu_{Z}=\mu_{X}\times\left(\mu_{Y}\times\mu_{Z}\right)$.

טענה: $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right)=\bigotimes_{i=1}^{d}\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$.

טענה: תהא m_{d} מידת לבג תהא $f\in L^{1}\left(m_{d}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימות A_{i} תיבות עבורן $\int_{\mathbb{R}^{d}}\left|f-\sum_{i=1}^{n}c_{i}\mathbb{1}_{A_{i}}\right|\mathrm{d}m_{d}<\varepsilon$.

מסקנה: תהא m_{d} מידת לבג תהא $f\in L^{1}\left(m_{d}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת A תיבה חסומה וכן $g\in C\left(\mathbb{R}^{d},\mathbb{R}\right)$ עבורה $g_{\restriction_{\mathbb{R}^{d}\backslash A}}=0$ וכן $\int_{\mathbb{R}^{d}}\left|f-g\right|\mathrm{d}m_{d}<\varepsilon$.

משפט טונלי: יהיו $\left(X,\Sigma_{X},\mu_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y},\mu_{Y}\right)$ מרחבי מידה σ־סופיים ותהא $f:X\times Y\to[0,\infty]$ פונקציה $\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}$ מדידה אזי
- לכל $x\in X$ הפונקציה $f_{x}\left(y\right)$ היא Σ_{Y}־מדידה.
- לכל $y\in Y$ הפונקציה $f_{y}\left(x\right)$ היא Σ_{X}־מדידה.
- הפונקציה $\varphi:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(x\right)=\int_{Y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)$ היא Σ_{X}־מדידה.
- הפונקציה $\varphi:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(y\right)=\int_{X}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)$ היא Σ_{Y}־מדידה.
- מתקיים $\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)=\int_{X}\int_{Y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)=\int_{Y}\int_{X}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)$.

מסקנה משפט פוביני: יהיו $\left(X,\Sigma_{X},\mu_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y},\mu_{Y}\right)$ מרחבי מידה σ־סופיים ותהא $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ פונקציה $\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y}$ מדידה עבורה $(\int_{X\times Y}\left|f\right|\mathrm{d}\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)<\infty)\vee(\int_{X}\int_{Y}\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)<\infty)\vee(\int_{Y}\int_{X}\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)<\infty)$ אזי
- $\int_{X\times Y}\left|f\right|\mathrm{d}\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right),\int_{X}\int_{Y}\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right),\int_{Y}\int_{X}\left|f\left(x,y\right)\right|\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)<\infty$.
- $f\in L^{1}\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)$.
- $f_{y}\left(x\right)$ היא μ_{Y}־כ.ב.מ. שייכת ל־$L^{1}\left(\mu_{X}\right)$.
- $f_{x}\left(y\right)$ היא μ_{X}־כ.ב.מ. שייכת ל־$L^{1}\left(\mu_{Y}\right)$.
- הפונקציה $\varphi:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(x\right)=\int_{Y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)$ מקיימת $\varphi\in L^{1}\left(\mu_{X}\right)$.
- הפונקציה $\varphi:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(y\right)=\int_{X}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)$ מקיימת $\varphi\in L^{1}\left(\mu_{Y}\right)$.
- מתקיים $\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)=\int_{X}\int_{Y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)=\int_{Y}\int_{X}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)$.

טענה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X},\mu_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y},\mu_{Y}\right)$ מרחבי מידה שלמים σ־סופיים תהא $\left(X\times Y,\Sigma,\rho\right)$ השלמה של $\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y},\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)$ ותהא $f\in L^{0}\left(X\times Y,\Sigma\right)$ חיובית אזי
- $f_{y}\left(x\right)$ היא μ_{Y}־כ.ב.מ. מדידה $\left(\Sigma_{X},\mathbb{R}\right)$.
- $f_{x}\left(y\right)$ היא μ_{X}־כ.ב.מ. מדידה $\left(\Sigma_{Y},\mathbb{R}\right)$.
- הפונקציה $\varphi:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(x\right)=\int_{Y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)$ היא מדידה.
- הפונקציה $\varphi:Y\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(y\right)=\int_{X}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)$ היא מדידה.
- מתקיים $\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)=\int_{X}\int_{Y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)=\int_{Y}\int_{X}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)$.

טענה: יהיו $\left(X,\Sigma_{X},\mu_{X}\right),\left(Y,\Sigma_{Y},\mu_{Y}\right)$ מרחבי מידה שלמים σ־סופיים תהא $\left(X\times Y,\Sigma,\rho\right)$ השלמה של $\left(X\times Y,\Sigma_{X}\otimes\Sigma_{Y},\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)$ ותהא $f\in L^{1}\left(\rho\right)$ אזי
- $f_{y}\left(x\right)$ היא μ_{Y}־כ.ב.מ. שייכת ל־$L^{1}\left(\mu_{X}\right)$.
- $f_{x}\left(y\right)$ היא μ_{X}־כ.ב.מ. שייכת ל־$L^{1}\left(\mu_{Y}\right)$.
- הפונקציה $\varphi:X\to\overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(x\right)=\int_{Y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)$ מקיימת $\varphi\in L^{1}\left(\mu_{X}\right)$.

- הפונקציה $\varphi : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ המוגדרת $\varphi\left(y\right)=\int_{X}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)$ מקיימת $\varphi\in L^{1}\left(\mu_{Y}\right)$.
- מתקיים $\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\left(\mu_{X}\times\mu_{Y}\right)=\int_{X}\int_{Y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)=\int_{Y}\int_{X}f\left(x,y\right)\mathrm{d}\mu_{X}\left(x\right)\mathrm{d}\mu_{Y}\left(y\right)$.