טופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X, \varnothing \in \mathcal{T}$.
- תהיינה $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ אזי $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.
- תהיינה $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}$ אזי $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

מרחב טופולוגי (מ"ט): תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ טופולוגיה על X אזי $(X, \mathcal{T})$.

קבוצה פתוחה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי אזי $U \subseteq X$ המקיימת $U \in \mathcal{T}$.

קבוצה סגורה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי אזי $E \subseteq X$ המקיימת $X \backslash E \in \mathcal{T}$.

טענה: תהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $X, \varnothing \in \mathcal{T}$ וכן $\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}. (\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T})$ אזי ($\mathcal{T}$ טופולוגיה)$\iff$(לכל $U, V \in \mathcal{T}$ מתקיים $U \cap V \in \mathcal{T}$).

הטופולוגיה הטריוואלית: תהא X קבוצה אזי $\{X, \varnothing\}$.

הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X)$.

הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: יהי (X, ρ) מרחב מטרי אזי $\mathcal{T}(X, \rho) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists r > 0. B_r(x) \subseteq U\}$.

טופולוגיה מטריזבילית: מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T}_X)$ עבורו קיים (X, ρ) מרחב מטרי המקיים $\mathcal{T}(X, \rho) = \mathcal{T}_X$.

הטופולוגיה הקו־סופית: תהא X קבוצה אזי $\{A \subseteq X \mid |X \backslash A| < \aleph_0\} \cup \{\varnothing\}$.

משפט: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{C} = \{E \subseteq X \mid X \backslash E \in \mathcal{T}\}$ אזי
- $X, \varnothing \in \mathcal{C}$.
- תהיינה $\{E\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ אזי $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \in \mathcal{C}$.
- תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{C}$ אזי $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{C}$.

בסיס לטופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $\bigcup \mathcal{B} = X$.
- תהיינה $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ עבורן $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ ותהא $x \in B_1 \cap B_2$ אזי קיימת $B_3 \in \mathcal{B}$ עבורה $x \in B_3$ וכן $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists B \in \mathcal{B}. (x \in B) \wedge (B \subseteq U)\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ טופולוגיה על X.

סימון: $\mathcal{B}_E = \{(a, b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_{\text{Sorg}} = \{[a, b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_E \cup \left\{(a, b) \backslash \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\} \mid a < b\right\}$.

טענה: $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{\text{Sorg}}, \mathcal{B}_K$ בסיסים של $\mathbb{R}$.

הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית: $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_E))$.

הישר של זורגנפריי: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{Sorg}}))$.

טופולוגיית־K: $\mathbb{R}_K = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$.

משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \exists A \subseteq \mathcal{B}. U = \bigcup A\}$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיסים עבורם $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$ וכן $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_1)$ אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$.

טופולוגיה עדינה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_2$.

טופולוגיה גסה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_1$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ עבורה לכל $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ ולכל $x \in \mathcal{U}$ קיימת $A \in \mathcal{A}$ המקיימת $(x \in A) \wedge (A \subseteq U)$ אזי $\mathcal{A}$ בסיס של $\mathcal{T}$.

סימון: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B}_\le = \{(a, b) \mid a < b\} \cup \{[a, b) \mid a \le X\} \cup \{(a, b] \mid X \le b\}$.

טענה: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי $\mathcal{B}_\le$ בסיס.

טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}_\le)$.

טענה: $\mathbb{R}$ מצוייד בטופולוגיית הסדר זהה ל־$\mathbb{R}$ מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

תת בסיס: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $\bigcup \mathcal{S} = X$.

הטופולוגיה הנוצרת מתת־בסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \left\{U \subseteq X \mid \exists A_1 \ldots A_k \subseteq \mathcal{S}. U = \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^k A\right)\right\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ טופולוגיה על X.

טופולוגיית זריצקי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{T}(\{\{a \in \mathbb{F}^n \mid f(a) \neq 0\} \mid f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]\})$.

סביבה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ויהי $x \in X$ אזי $U \in \mathcal{T}$ עבורה $x \in U$.

פנים של קבוצה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}(A) = \mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$.

סגור של קבוצה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{cl}(A) = \overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq E \\ E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{T}}} E$.

שפה של קבוצה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \backslash \text{int}(A)$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי
- $\text{int}(A) = \max_\subseteq \{\mathcal{U} \in \mathcal{T} \mid \mathcal{U} \subseteq A\}$.
- $\overline{A} = \min_\subseteq \left\{E \mid (A \subseteq E) \wedge \left(E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{T}\right)\right\}$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט תהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ התב"ש
- $x \in \overline{A}$.
- לכל $U \in \mathcal{T}$ המקיים $x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \varnothing$.
- יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי לכל $B \in \mathcal{B}$ המקיים $x \in B$ מתקיים $B \cap A \neq \varnothing$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \cap \left(\overline{X \backslash A}\right)$.

מסקנה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט תהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ אזי ($x \in \partial A$)$\iff$(לכל $U \in \mathcal{T}$ המקיימת $x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \varnothing$ וכן $U \cap A^{\mathcal{C}} \neq \varnothing$).

קבוצה צפופה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט אזי $A \subseteq X$ המקיימת $X = \overline{A}$.

טופולוגיית הנקודה הייחודית: תהא X קבוצה ותהא $p \in X$ אזי $\mathcal{T}_p = \{\mathcal{U} \subseteq X \mid p \in \mathcal{U}\} \cup \{\varnothing\}$.

נקודת הצטברות: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $x \in X$ עבורו לכל סביבה U של x מתקיים $U \cap A \backslash \{x\} \neq \varnothing$.

סדרה מתכנסת/גבול: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $x \in X^{\mathbb{N}}$ אזי $y \in X$ עבורו לכל סביבה U של y החל ממקום מסוים $x_n \in U$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $A \subseteq \left\{x \in X \mid \text{קיימת } a \in A^{\mathbb{N}} \text{ המתכנסת אל } x\right\} \subseteq \overline{A}$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A} = A \cup \{x \in X \mid x \text{ נקודת הצטברות של } A\}$.

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ אזי (A סגורה)$\iff$($\{x \in X \mid x \text{ נקודת הצטברות של } A\} \subseteq A$).

פונקציה רציפה בנקודה: יהיו $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ מ"טים ותהא $x \in X$ אזי $f : X \to Y$ עבורה לכל $\mathcal{V} \subseteq Y$ סביבה של $f(x)$ קיימת סביבה $\mathcal{U} \subseteq X$ של x עבורה $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$.

פונקציה רציפה: יהיו $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ מ"טים אזי $f : X \to Y$ עבורה $\forall U \in \mathcal{S}. f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$.

משפט: יהיו $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f : X \to Y$ התב"ש
- f רציפה.
- לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה.
- לכל $E \subseteq Y$ סגורה מתקיים כי $f^{-1}(E)$ סגורה.
- לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.
- לכל $x \in X$ הפונקציה f רציפה ב־x.

הומיאומורפיזם: יהיו $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ מ"טים אזי $f : X \to Y$ רציפה חח"ע ועל עבורה f^{-1} רציפה.

טענה: יהיו $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f : X \to Y$ חח"ע ועל התב"ש
- f הומיאומורפיזם.
- תהא $U \subseteq Y$ אזי (U פתוחה)$\iff$($f^{-1}(U)$ פתוחה).
- תהא $E \subseteq Y$ אזי (E סגורה)$\iff$($f^{-1}(E)$ סגורה).
- לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

הטופולוגיה המושרית על קבוצה מפונקציה: תהא X קבוצה יהי $(Y, \mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f : X \to Y$ אזי $\mathcal{T}_f = \left\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{S}\right\}$.

טענה: תהא X קבוצה יהי $(Y, \mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f : X \to Y$ אזי $(X, \mathcal{T}_f)$ מ"ט.

מסקנה: תהא X קבוצה יהי $(Y, \mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f : X \to Y$ אזי f רציפה על $(X, \mathcal{T}_f), (Y, \mathcal{S})$.

תת מרחב טופולוגי (ת"מ): יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A = \left\{U \subseteq A \mid \exists V \in \mathcal{T}. U = \text{Id}^{-1}(V)\right\}$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $(A, \mathcal{T}_A)$ מ"ט.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי $\mathcal{B}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ בסיס של $\mathcal{T}_A$.

טענה: יהי $A \subseteq X$ אזי
- תהא $U \subseteq A$ אזי (U פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}_A$)$\iff$(קיימת V פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}$ עבורה $V \cap A = U$).
- תהא $E \subseteq A$ אזי (E סגורה ביחס ל־$\mathcal{T}_A$)$\iff$(קיימת F פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}$ עבורה $F \cap A = E$).
- תהא $D \subseteq A$ אזי $\text{cl}_X(D) \cap A = \text{cl}_A(D)$.
- תהא $D \subseteq A$ אזי $\text{int}_X(D) \cap A \subseteq \text{int}_A(D)$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T}_X)$ מ"ט ויהי $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ת"מ אזי
- נניח כי Y פתוחה ב־X, תהא $A \subseteq Y$ פתוחה ב־Y אזי A פתוחה ב־X.
- נניח כי Y סגורה ב־X, תהא $A \subseteq Y$ סגורה ב־Y אזי A סגורה ב־X.

טענה: יהיו X, Z מ"ט יהי $Y \subseteq Z$ ת"מ ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f : X \to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X, Y מ"ט יהי $A \subseteq X$ ת"מ ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f\restriction_A : A \to Y$ רציפה.

טענה: יהיו X, Z מ"ט יהי $Z \subseteq Y$ ת"מ ותהא $f : X \to Y$ רציפה עבורה $f(X) \subseteq Z$ אזי $f : X \to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X, Z מ"ט ותהא $f : X \to Y$ אזי (f רציפה)$\iff$(קיימות $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ פתוחות עבורן $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ וכן $f\restriction_{U_\alpha}$ רציפה לכל $\alpha \in \Lambda$).

טענה: יהיו X, Y, Z מ"ט תהא $f : X \to Y$ רציפה ותהא $g : Y \to Z$ רציפה אזי $g \circ f : X \to Z$ רציפה.

משפט למת ההדבקה: יהיו X, Y מ"ט תהיינה $A, B \subseteq X$ סגורות עבורן $X = A \cup B$ תהא $f : A \to Y$ רציפה ותהא $g : B \to Y$ רציפה עבורן $f = g$ על $A \cap B$ אזי $f \cup g : X \to Y$ רציפה.

סימון: יהיו X, Y מ"ט ותהא $f : X \to Y$ חח"ע ורציפה נגדיר $\hat{f} : X \to f(X)$ כך $\hat{f} = f$.

שיכון: יהיו X, Y מ"ט אזי $f : X \to Y$ חח"ע ורציפה עבורה $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

הערה: יהיו X, Y מ"ט ויהי $f : X \to Y$ שיכון אזי נזהה את X בתור $f(X)$.

העתקת מנה: יהיו X, Y מ"ט אזי $f : Y \to X$ פונקציה על המקיימת $\forall \mathcal{U} \subseteq X. (\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X) \iff \left(f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_Y\right)$.

הערה: יהיו X, Y מ"ט ותהא $f : Y \to X$ העתקת מנה אזי f רציפה.

טענה: יהיו X, Y, Z מ"ט תהא $f : X \to Y$ העתקת מנה ותהא $g : Y \to Z$ העתקת מנה אזי $g \circ f : X \to Z$ העתקת מנה.

משפט: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f : X \to A$ על אזי קיימת ויחידה טופולוגיה $\mathcal{T}_A$ על A עבורה f העתקת מנה.

טופולוגיית המנה המושרית: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f : X \to A$ על אזי טופולוגיה $\mathcal{T}_A$ על A עבורה f העתקת מנה.

העתקת נסג: יהי X מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $r : X \to A$ רציפה עבורה $r(a) = a$ לכל $a \in A$.

מרחב המנה: יהי X מ"ט יהי $\sim$ יחס שקילות מעל X ונגדיר $f : X \to X/\sim$ כך $f(x) = [x]_\sim$ אזי $X/\sim$ מצויידת עם טופולוגיית המנה.

משפט התכונה האוניברסילית: תהא $f : X \to Y$ העתקת מנה ותהא $g : X \to Z$ עבורה $g\restriction_{f^{-1}(\{y\})}$ קבועה לכל $y \in Y$ אזי קיימת $h : Y \to Z$ עבורה
- $g = h \circ f$.
- (h רציפה)$\iff$(g רציפה).
- (h העתקת מנה)$\iff$(g העתקת מנה).

מסקנה: תהא $f : X \to Y$ העתקת מנה ותהא $g : X \to Z$ עבורה $g\restriction_{f^{-1}(\{y\})}$ קבועה לכל $y \in Y$ אזי
- ($g \circ f^{-1}$ רציפה)$\iff$(g רציפה).
- ($g \circ f^{-1}$ העתקת מנה)$\iff$(g העתקת מנה).

מסקנה: תהא $g : X \to Z$ רציפה ועל ותהא $f : X \to \left\{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\right\}$ העתקת מנה אזי ($g \circ f^{-1}$ הומיאומורפיזם)$\iff$(g העתקת מנה).

קבוצה רוויה: תהא $f : X \to Y$ אזי $A \subseteq X$ עבורה לכל $y \in Y$ אם $A \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$ אז $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$.

טענה: תהא $f : X \to Y$ רציפה אזי (f העתקת מנה)$\iff$(f על ולכל $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$ מתקיים כי $f(\mathcal{U})$ פתוחה ורוויה).

העתקה פתוחה: העתקה $f : X \to Y$ עבורה לכל $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$ מתקיים כי $f(\mathcal{U})$ פתוחה.

העתקה סגורה: העתקה $f : X \to Y$ עבורה לכל $E \subseteq X$ סגורה מתקיים כי $f(E)$ סגורה.

טענה: תהא $f : X \to Y$ חח"ע ועל התב"ש
- f פתוחה.
- f סגורה.
- f^{-1} רציפה.

טענה: תהא $f : X \to Y$ חח"ע ועל התב"ש
- f הומיאומורפיזם.
- f רציפה ופתוחה.
- f^{-1} רציפה וסגורה.

טענה: תהא $f : X \to Y$ רציפה פתוחה ועל אזי f העתקת מנה.

טענה: תהא $f : X \to Y$ רציפה סגורה ועל אזי f העתקת מנה.

המרחב הפרויקטיבי הממשי: נגדיר $\sim = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}\, (x = \lambda y)\right\}$ אזי $\mathbb{RP}^{n-1} = (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})/\sim$.

מכפלה של קבוצות: תהיינה $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ קבוצות אזי $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \left\{f : \Lambda \to \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha\right\}$.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{B}_{\text{box}} = \left\{\prod_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\right\}$ בסיס של $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

טופולוגיית התיבה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{box}} = \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{box}})$.

הטלה: תהיינה $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ קבוצות אזי $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \to X_\beta$ המוגדרת $\pi_\beta(f) = f(\beta)$.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{S}_{\text{prod}} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \left\{\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\right\}$ תת־בסיס של $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

טופולוגיית המכפלה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \mathcal{T}\left(\mathcal{S}_{\text{prod}}\right)$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים באשר $|\Lambda| < \aleph_0$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \mathcal{T}_{\text{box}}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים באשר $|\Lambda| \ge \aleph_0$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{box}}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים ותהא $\left(\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \mathcal{T}\right)$ טופולוגיה עבורה π_α רציפה לכל $\alpha \in \Lambda$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subseteq \mathcal{T}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \left\{\prod_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha \mid (\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha) \wedge (|\{\pi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) = X_\alpha\}| \in \mathbb{N})\right\}$.

משפט: תהא $f : Y \to \left(\prod_\alpha X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ אזי (f רציפה)$\iff$($\pi_\alpha \circ f$ רציפה לכל α).

טענה: תהא $|\Lambda| \ge \aleph_0$ אזי $\left(\mathbb{R}^\Lambda, \mathcal{T}_{\text{box}}\right)$ אינה מטריזבילית.

טענה: תהא $|\Lambda| \ge \aleph_0$ אזי $\left(\mathbb{R}^\Lambda, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ אינה מטריזבילית.

תכונה טופולוגית: תכונה P של מ"ט באשר לכל X, Y מ"ט עבורן קיים $f : X \to Y$ הומיאומורפיזם מתקיים (X מקיים P)$\iff$(Y מקיים P).

טענה: מטריזביליות הינה תכונה טופולוגית.

הפרדה של מרחב טופולוגי: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט אזי $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ באשר $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$ וכן $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \varnothing$ וכן $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$.

מרחב טופולוגי קשיר: מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T})$ עבורו לא קיימת הפרדה.

מרחב טופולוגי אי־קשיר: מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T})$ עבורו קיימת הפרדה.

משפט: יהי $f : X \to Y$ הומיאומורפיזם אזי (X קשיר)$\iff$(Y קשיר).

מסקנה: קשירות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מרחב מטרי התב"ש
- X אי־קשיר.
- קיימות $E, F \subseteq X$ סגורות זרות לא ריקות עבורן $X = E \cup F$.
- קיימת $D \in \mathcal{P}(X) \backslash \{X, \varnothing\}$ סגורה ופתוחה.

טענה: יהי X מ"ט קשיר ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קשירה.

טענה: יהי X מ"ט ויהי $Y \subseteq X$ תת־מרחב אזי (Y אי־קשיר)$\iff$(קיימות $H, K \in \mathcal{P}(X) \backslash \{X, \varnothing\}$ עבורן $Y = H \cup K$ וכן $\overline{H} \cap K = H \cap \overline{K} = \varnothing$).

טענה: תהא $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ הפרדה של X ויהי $Y \subseteq X$ תת־מרחב קשיר אזי $(Y \subseteq U) \oplus (Y \subseteq \mathcal{V})$.

טענה: תהיינה $A, B \subseteq X$ באשר A קשירה וכן $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ אזי B קשירה.

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ קשירה אזי $\overline{A}$ קשירה.

טענה: תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A \in \mathcal{A}$ מתקיים כי A קשירה וכן $\bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$ וכן $\bigcup \mathcal{A} = X$ אזי X קשיר.

מסקנה: תהיינה $\{X_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathcal{P}(X) \backslash \{\varnothing\}$ באשר X_n קשיר וכן $X_n \cap X_{n+1} \neq \varnothing$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי X קשיר.

מסקנה: $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית קשיר.

מסקנה: $(-1, 1)$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ סטנדרטי הינו קשיר.

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ באשר $a < b$ אזי $(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$ קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ סטנדרטי.

מסקנה: יהי $a \in \mathbb{R}$ אזי $(-\infty, a), (-\infty, a], (-\infty, \infty), [a, \infty), (a, \infty)$ קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ סטנדרטי.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ איננה קשירה.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי (X_α קשיר לכל $\alpha \in \Lambda$)$\iff$($\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קשיר).

טענה: $\left(\prod_{i=1}^\infty \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{box}}\right)$ איננה קשירה.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{R}^n$ קשיר עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

מסילה: יהי X מ"ט ויהיו $x, y \in X$ אזי $\gamma : [0, 1] \to X$ רציפה עבורה $f(0) = x$ וכן $f(1) = y$.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית: מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T})$ עבורו לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה מ־x ל־y.

טענה: יהי X מ"ט קשיר מסילתית אזי X קשיר.

מסקנה: יהי $n > 1$ אזי $\mathbb{R}^n$ איננו הומיאומורפי ל־$\mathbb{R}$.

למה: יהי X מ"ט קשיר מסילתית ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קשיר מסילתית.

מסקנה: קשירות מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי $\mathbb{C}^n$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^{2n}$ ויהי $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ אזי $\mathbb{C}^n \backslash \{x \in \mathbb{C}^n \mid p(x) = 0\}$ קשירה מסילתית.

מסקנה: יהי $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית על $\mathbb{C}^{n^2}$ אזי $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ תת־מרחב קשיר מסילתית.

סימון: יהי X מ"ט ויהיו $x, y \in X$ אזי ($x \sim_{\text{קשיר}} y$)$\iff$(קיימת $D \subseteq X$ קשירה עבורה $x, y \in D$).

טענה: יהי X מ"ט אזי $\sim_{\text{קשיר}}$ יחס שקילות מעל X.

רכיבי קשירות: יהי X מ"ט אזי $X/\sim_{\text{קשיר}}$.

סימון: יהי X מ"ט ויהיו $x, y \in X$ אזי ($x \sim_{\text{קשיר מסילתית}} y$)$\iff$(קיימת מסילה מ־$x$ ל־y).

טענה: יהי X מ"ט אזי $\sim_{\text{קשיר מסילתית}}$ יחס שקילות מעל X.

רכיבי קשירות מסילתית: יהי X מ"ט אזי $X/\sim_{\text{קשיר מסילתית}}$.

משפט: יהיו $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ רכיבי הקשירות של X אזי
- לכל $\alpha \in \Lambda$ מתקיים כי D_α קשירה.
- יהיו $\alpha, \beta \in \Lambda$ באשר $\alpha \neq \beta$ אזי $D_\alpha \cap D_\beta = \varnothing$.
- מתקיים $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$.
- לכל $Y \subseteq X$ תת־מרחב קשיר קיים ויחיד $\alpha \in \Lambda$ עבורו $Y \subseteq D_\alpha$.

משפט: יהיו $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ רכיבי הקשירות המסילתית של X אזי
- לכל $\alpha \in \Lambda$ מתקיים כי D_α קשירה.
- יהיו $\alpha, \beta \in \Lambda$ באשר $\alpha \neq \beta$ אזי $D_\alpha \cap D_\beta = \varnothing$.
- מתקיים $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$.
- לכל $Y \subseteq X$ תת־מרחב קשיר קיים ויחיד $\alpha \in \Lambda$ עבורו $Y \subseteq D_\alpha$.

מסקנה: יהי D רכיב קשירות של X אזי D סגור.

מרחב טופולוגי קשיר מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x \in X$ המקיים לכל סביבה $\mathcal{U} \subseteq X$ של x קיימת סביבה $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ קשירה עבורה $x \in \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי קשיר מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ מתקיים כי X קשיר מקומית ב־x.

טענה: קשירות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x \in X$ המקיים לכל סביבה $\mathcal{U} \subseteq X$ של x קיימת סביבה $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ קשירה מסילתית עבורה $x \in \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ מתקיים כי X קשיר מסילתית מקומית ב־x.

טענה: קשירות מקומית מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ איננו קשיר מקומית.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X קשיר מקומית)$\iff$(לכל $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ ולכל D רכיב קשירות של $\mathcal{U}$ מתקיים $D \in \mathcal{T}$).

טענה: יהי X מ"ט אזי (X קשיר מסילתית מקומית)$\iff$(לכל $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ ולכל D רכיב קשירות מסילתית של $\mathcal{U}$ מתקיים $D \in \mathcal{T}$).

טענה: יהי X מ"ט קשיר וקשיר מסילתית מקומית אזי X קשיר מסילתית.

בסיס סביבות בן מנייה בנקודה: יהי X מ"ט אזי $x \in X$ עבורו קיימות $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^\infty$ סביבות של x עבורן לכל סביבה $\mathcal{V}$ של x קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה הראשונה: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ קיים בסיס סביבות בן מנייה ב־x.

מסקנה: יהי X מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי X מניה I.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ מניה I.

טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה מניה I.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד עם הטופולוגיה הקו־בת־מניה אינו מניה I.

משפט: יהי X מ"ט מניה I ותהא $A \subseteq X$ תת־קבוצה אזי $\overline{A} = \left\{x \in X \mid \text{קיימת } a \in A^{\mathbb{N}} \text{ המתכנסת אל } x\right\}$.

משפט: יהיו X, Y מ"טים באשר X מניה I ותהא $f : X \to Y$ אזי (f רציפה)$\iff$(לכל $\{x_n\} \subseteq X$ המתכנסת ל־a עבור $a \in X$ מתקיים כי $\{f(x_n)\}$ מתכנסת ל־$f(a)$).

מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה השנייה: מרחב טופולוגי X עבורו קיים בסיס לכל היותר בן מנייה היוצר את $\mathcal{T}$.

מסקנה: יהי X מ"ט מניה II אזי X מניה I.

טענה: $\mathbb{R}^n$ מניה II.

סימון: $\mathbb{R}^{\aleph_0} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$.

טענה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מניה II.

טענה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{box}}\right)$ אינו מניה I.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ אינו מניה II.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X מניה II)$\iff$($|X| \le \aleph_0$).

טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית מניה II.

טענה: נגדיר $d_u : \mathbb{R}^{\aleph_0} \times \mathbb{R}^{\aleph_0} \to \mathbb{R}$ כך $d_u\left((a_k), (b_k)\right) = \min\left\{\sup\left|a_k - b_k\right|, 1\right\}$ אזי d_u מטריקה.

הטופולוגיה האחידה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}(d_u)\right)$ הינו מניה I וכן אינו מניה II.

טענה: יהי X מ"ט מניה I ויהי $A \subseteq X$ תת־מרחב אזי A מניה I.

טענה: יהי X מ"ט מניה II ויהי $A \subseteq X$ תת־מרחב אזי A מניה II.

טענה: יהי X מ"ט מניה I ותהא $f : X \to Y$ רציפה ופתוחה אזי $f(X)$ מניה I.

מסקנה: מניה I הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט מניה II ותהא $f : X \to Y$ רציפה ופתוחה אזי $f(X)$ מניה II.

מסקנה: מניה II הינה תכונה טופולוגית.

מרחב טופולוגי ספרבילי: מרחב טופולוגי X עבורו קיימת $A \subseteq X$ צפופה בת מנייה.

מרחב טופולוגי לינדלוף: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{T}$ המקיימים $X = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ קיימת $f : \mathbb{N} \to \Lambda$ עבורה $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{U}_{f(i)}$.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ ספרבילי.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X ספרבילי)$\iff$($|X| \le \aleph_0$).

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית אזי X ספרבילי.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד בטופולוגיה הקו־בת־מנייה אינו ספרבילי.

טענה: יהי X מ"ט מניה II אזי X לינדלוף וספרבילי.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית אינו מניה I.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $(X, \mathcal{T})$ אזי (X לינדלוף)$\iff$(לכל $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}$ המקיימים $X = \bigcup \mathcal{B}_\alpha$ קיימת $f : \mathbb{N} \to \Lambda$ עבורה $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}_{f(i)}$).

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ לינדולף.

טענה: יהי X מ"ט ספרבילי ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f(X)$ ספרבילי.

מסקנה: ספרביליות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט לינדלוף ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f(X)$ לינדלוף.

מסקנה: לינדלוף הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט ספרבילי ותהא $A \subseteq X$ פתוחה אזי A ספרבילי.

טענה: יהי X מ"ט לינדלוף ותהא $E \subseteq X$ סגורה אזי E לינדלוף.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים מניה I באשר $|\Lambda| \le \aleph_0$ אזי $\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מניה I.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים מניה II באשר $|\Lambda| \le \aleph_0$ אזי $\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מניה II.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים ספרבילים באשר $|\Lambda| \le \aleph_0$ אזי $\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ ספרבילי.

טענה: יהי X מרחב מטרי התב"ש

- X מניה II.
- X ספרבילי.
- X לינדלוף.

מרחב טופולוגי T_0: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x, y \in X$ שונים קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $y \notin \mathcal{U}$ או קיימת סביבה $\mathcal{V}$ של y עבורה $x \notin \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי T_1: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x, y \in X$ שונים קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $y \notin \mathcal{U}$ וגם קיימת סביבה $\mathcal{V}$ של y עבורה $x \notin \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי T_2/האוסדורף: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x, y \in X$ שונים קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x וכן סביבה $\mathcal{V}$ של y עבורן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

מסקנה: T_0, T_1, T_2 הינן תכונות טופולוגיות.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_1 אזי X מרחב טופולוגי T_0.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_2 אזי X מרחב טופולוגי T_1.

טענה: יהי X מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי X מרחב T_2.

טענה: תהיינה $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ טופולוגיות על X באשר $\mathcal{S}$ עדינה מ־$\mathcal{T}$ וכן $(X, \mathcal{T})$ מרחב T_i אזי $(X, \mathcal{S})$ מרחב T_i.

מסקנה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ האוסדורף.

טענה: $\mathbb{Q}$ המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית הינו T_1 וכן אינו T_2.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד בטופולוגיה הקו־בת־מניה הינו T_1 וכן אינו T_2.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי $(X, \mathcal{T}(d))$ הינו T_2.

טענה: תהא $(X, \mathcal{T})$ מ"ט T_i ותהא $(Y, \mathcal{S})$ מ"ט באשר $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ אזי (Y, S) הינה T_i.

טענה: יהי X מ"ט T_i ויהי $A \subseteq X$ תת־מרחב אזי A מרחב T_i.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α מרחב T_i לכל $\alpha \in \Lambda$)$\iff$($\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מרחב T_i).

הישר עם הראשית הכפולה: תהא $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}^2$ הסטנדרטית ויהי $\sim = \text{Id} \cup \left\{\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) \mid a \ne 0\right\}$ יחס שקילות על $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ אזי $\mathbb{R} \times \{0,1\}/\sim$ עם טופולוגיית המנה.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט אזי ($\mathcal{T}$ הוא T_1)$\iff$($\{x\}$ קבוצה סגורה לכל $x \in X$).

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט אזי ($\mathcal{T}$ הוא T_1)$\iff$(לכל $A \subseteq X$ מתקיים $A = \bigcap_{\substack{A \subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{U} \in \mathcal{T}}} \mathcal{U}$).

טענה: יהי X מ"ט האוסדורף ותהא $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה מתכנסת אזי קיים ויחיד $y \in X$ עבורו $\{x_n\}$ מתכנסת ל־y.

מרחב טופולוגי T_i מקומית: מ"ט X עבורו לכל $x \in X$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $\mathcal{U}$ הינה T_i.

טענה: יהי X מ"ט T_0 מקומית אזי X הינו T_0.

טענה: יהי X מ"ט T_1 מקומית אזי X הינו T_1.

טענה: הישר עם הראשית הכפולה הינו T_2 מקומית וכן אינו T_2.

קבוצה מסוג G_δ: יהי X מ"ט אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימת $\{\mathcal{U}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{T}$ המקיימת $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$.

טענה: יהי X מ"ט T_1 מניה I ויהי $x \in X$ אזי $\{x\}$ הינו G_δ.

טענה: יהי X מ"ט T_1 תהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ אזי (x נקודת הצטברות של A)$\iff$(לכל $\mathcal{U}$ סביבה של x מתקיים $|A \cap \mathcal{U}| \ge \aleph_0$).

טענה: יהי X מ"ט אזי (X מרחב האוסדורף)$\iff$($\{(a, a) \mid a \in X\}$ קבוצה סגורה).

מרחב טופולוגי רגולרי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ ולכל $E \subseteq X$ סגורה באשר $x \notin E$ קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ עבורן $x \in \mathcal{U}$ וכן $E \subseteq \mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

מרחב טופולוגי נורמלי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $E, F \subseteq X$ סגורות באשר $E \cap F = \varnothing$ קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ עבורן $E \subseteq \mathcal{U}$ וכן $F \subseteq \mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

מרחב טופולוגי T_3: מרחב טופולוגי X רגולרי וכן T_1.

מרחב טופולוגי T_4: מרחב טופולוגי X נורמלי וכן T_1.

מסקנה: T_3, T_4 הינן תכונות טופולוגיות.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_3 אזי X מרחב טופולוגי T_2.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_4 אזי X מרחב טופולוגי T_3.

טענה: $\mathbb{R}_K$ הינו T_2 וכן אינו רגולרי.

טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף: נגדיר $\mathcal{T} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}$ אזי $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד עם טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף הינו T_0 וכן אינו T_1 וכן אינו רגולרי וכן הינו נורמלי.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ הינו T_4.

סימון: תהיינה $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq X$ עבורן $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ וכן $\overline{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{U}$ אזי $\mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X רגולרי)$\iff$(לכל $x \in X$ ולכל $\mathcal{U} \subseteq X$ סביבה של x קיימת סביבה $\mathcal{V}$ של x עבורה $\mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$).

טענה: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי)$\iff$(לכל $E \subseteq X$ סגורה ולכל $\mathcal{U} \subseteq X$ פתוחה באשר $E \subseteq \mathcal{U}$ קיימת $\mathcal{V} \subseteq X$ פתוחה עבורה $E \subseteq \mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$).

משפט הלמה של אוריסון: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי)$\iff$(לכל $A, B \subseteq X$ סגורות וזרות ולכל $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ קיימת $f : X \to [a, b]$ רציפה עבורה $f{\restriction}_A = a$ וכן $f{\restriction}_B = a$).

טענה: יהי X מ"ט רגולרי ויהי $A \subseteq X$ אזי A רגולרי.

טענה: יהי X מ"ט נורמלי ויהי $E \subseteq X$ סגור אזי E נורמלי.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α רגולרי לכל $\alpha \in \Lambda$)$\iff$($\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ רגולרי).

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α הינו T_3 לכל $\alpha \in \Lambda$)$\iff$($\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ הינו T_3).

מסקנה: $\mathbb{R}^2_{\text{Sorg}}$ הינו רגולרי וכן אינו נורמלי.

טענה: יהי X מ"ט מטריזבילי אזי X נורמלי.

טענה: יהי $(X, \prec)$ יחס סדר טוב אזי X המצוייד עם טופולוגיית הסדר נורמלי.

מרחב טופולוגי נורמלי לחלוטין: מ"ט X עבורו לכל $A \subseteq X$ מתקיים כי A נורמלי.

קבוצות מופרדות: יהי X מ"ט אזי $A, B \subseteq X$ עבורן $A \cap \overline{B} = \varnothing$ וכן $\overline{A} \cap B = \varnothing$.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי לחלוטין)$\iff$(לכל $A, B \subseteq X$ מופרדות קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ זרות עבורן $A \subseteq \mathcal{U}$ וכן $B \subseteq \mathcal{V}$).

סימון: $\mathcal{B}^1_{\text{moore}} = \left\{B_r(p) \mid \left(p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\ge 0}\right) \wedge (p_2 > r > 0)\right\}$.

סימון: $\mathcal{B}^2_{\text{moore}} = \left\{B_{p_2}(p) \cup \{(p_1, 0)\} \mid \left(p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\ge 0}\right)\right\}$.

המישור של מור: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\ge 0}$ מצוייד עם הטופולוגיה $\mathcal{T}\left(\mathcal{B}^1_{\text{moore}} \cup \mathcal{B}^2_{\text{moore}}\right)$.

טענה: המישור של מור הינו קשיר האוסדורף רגולרי וכן אינו נורמלי.

טענה: יהי X מ"ט רגולרי ומניה II אזי X נורמלי.

מסקנה: יהי X מ"ט רגולרי לינדלוף אזי X נורמלי.

למה: יהי X מ"ט באשר $\mathcal{T}_X$ מושרית מהמטריקה d אזי קיימת מטריקה d' של X עבורה $d' \le 1$ וכן d' משרה את $\mathcal{T}_X$.

למה: יהיו $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ מ"טים אזי (X_n מטריזבילי לכל $n \in \mathbb{N}$)$\iff$($\left(\prod X_n, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מטריזבילי).

מסקנה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מטריזבילי.

משפט המטריזציה של אוריסון: יהי X מ"ט T_0 רגולרי ומניה II אזי X מטריזבילי.

מרחב טופולוגי מטריזבילי מקומית: מ"ט X עבורו לכל $x \in X$ קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $\mathcal{U}$ הינה מטריזבילית.

טענה: יהי X מ"ט T_0 רגולרי לינדלוף ומטריזבילי מקומית אזי X מטריזבילי.

מרחב טופולוגי קומפקטי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{T}$ המקיימים $X = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ קיים $n \in \mathbb{N}$ וקיימת $f : [n] \to \Lambda$ עבורה $X = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_{f(i)}$.

טענה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $(X, \mathcal{T})$ אזי (X קומפקטי)$\iff$(לכל $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{B}$ המקיימים $X = \bigcup \mathcal{B}_\alpha$ קיים $n \in \mathbb{N}$ וקיימת $f : [n] \to \Lambda$ עבורה $X = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{B}_{f(i)}$).

טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הטריוואלית קופקטי.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X קומפקטי)$\iff$(X סופי).

טענה: תהא X קבוצה סגורה ותהא $\mathcal{T}$ טופולוגיה על X אזי $(X, \mathcal{T})$ קומפקטי.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד עם הטופולוגיה הקו־סופית קומפקטי.

טענה: $\mathbb{R}$ המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי.

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי (a, b) המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $[a, b]$ המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי.

טענה: יהי X מ"ט ויהי $Y \subseteq X$ אזי (Y קומפקטי)$\iff$(לכל $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{T}_X$ המקיימים $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ קיים $n \in \mathbb{N}$ וקיימת $f : [n] \to \Lambda$ עבורה $Y \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_{f(i)}$).

טענה: יהי X מ"ט קומפקטי ותהא $Y \subseteq X$ סגורה אזי Y קומפקטי.

טענה: יהי X האוסדורף תהא $Y \subseteq X$ קומפקטי ויהי $x \notin Y$ אזי קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}_X$ עבורן $x \in \mathcal{U}$ וכן $Y \subseteq \mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$.

טענה: יהי X האוסדורף ותהא $Y \subseteq X$ קומפקטי אזי Y סגורה.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי אזי X רגולרי.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי אזי X נורמלי.

טענה: יהי X קומפקטי ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קומפקטי.

מסקנה: קומפקטיות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X קומפקטי יהי Y האוסדורף ותהא $f : X \to Y$ רציפה והפיכה אזי f הומיאומורפיזם.

מסקנה: יהי X קומפקטי יהי Y האוסדורף ותהא $f : X \to Y$ רציפה וחח"ע אזי f שיכון.

תכונת החיתוך הסופי: יהי X מ"ט אזי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $f : [n] \to \Lambda$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n} A_{f(i)} \ne \varnothing$.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X קומקפטי)$\iff$(לכל $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ משפחה של קבוצות סגורות המקיימת את תכונת החיתוך הסופי מתקיים $\bigcap \mathcal{A} = \varnothing$).

טענה: יהי X האוסדורף קומקפטי מטריזבילי מקומית אזי X מטריזבילי.

טענה: יהי X קומפקטי אזי X ספרבילי.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי אזי (X מטריזבילי)$\iff$(X מניה II).

טענה: יהי X קומפקטי יהי Y האוסדורף ותהא $f : X \to Y$ רציפה ועל אזי Y מטריזבילי.

טענה: יהי X מ"ט יהי Y האוסדורף קומפקטי ותהא $f : X \to Y$ אזי (f רציפה)$\iff$(Γ_f סגורה ב־$X \times Y$).

למה: יהי X קומפקטי יהי Y מ"ט ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ כיסוי פתוח של $X \times Y$ ללא תת־כיסוי סופי אזי קיימת $x \in X$ עבורה לכל $\mathcal{U}$ סביבה של x מתקיים כי $\mathcal{U} \times Y$ אינה ניתנת לכיסוי סופי על ידי אברי $\mathcal{A}$.

למה: יהיו X, Z מ"טים יהי Y קומפקטי יהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y \times Z)$ כיסוי פתוח של $X \times Y \times Z$ ללא תת־כיסוי סופי ותהא $x \in X$ עבורה לכל $\mathcal{U}$ סביבה של x מתקיים כי $\mathcal{U} \times Y \times Z$ אינה ניתנת לכיסוי סופי על ידי אברי $\mathcal{A}$ אזי קיימת $y \in Y$ עבורה לכל $\mathcal{U}$ סביבה של x ולכל $\mathcal{V}$ סביבה של y מתקיים כי $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times Z$ אינה ניתנת לכיסוי סופי.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"טים אזי (X_i קומפקטי לכל $i \in [n]$)$\iff$($\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי).

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ מ"טים אזי (X_i קומפקטי לכל $i \in \mathbb{N}$)$\iff$($\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי).

טענה: (אקסיומת הבחירה)$\iff$(לכל $|\Lambda| > \aleph_0$ ולכל $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים מתקיים (X_α קומפקטי לכל $\alpha \in \Lambda$)$\iff$($\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי)).

מסקנה משפט טיכונוב: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α קומפקטי לכל $\alpha \in \Lambda$)$\iff$($\left(\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי).

טענה: יהי $\{0, 1\}$ המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי $\{0, 1\}$ קומפקטי וכן $\left(\prod_{n=1}^{\infty} \{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{box}}\right)$ אינו קומפקטי.

טענה: יהי X קומפקטי יהי Y מ"ט מצוייד עם טופולוגיית הסדר $\prec$ ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי קיימים $a, b \in X$ עבורם $f(a) \le f(x) \le f(b)$ לכל $x \in X$.

מספר לבג: יהי X מרחב מטרי קומפקטי ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ כיסוי פתוח של X אזי $\delta > 0$ עבורו לכל $A \subseteq X$ אם $\text{diam}(A) < \delta$ אז קיימת $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ עבורה $A \subseteq \mathcal{U}$.

טענה: יהי X מרחב מטרי קומפקטי ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ כיסוי פתוח של X אזי קיים מספר לבג.

מסקנה: יהי X מרחב מטרי קומפקטי יהי Y מרחב מטרי ותהא $f : X \to Y$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.

מרחב טופולוגיה קומפקטי מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ קיימת $D \subseteq X$ קומפקטית וכן קיימת $\mathcal{U} \subseteq D$ פתוחה המקיימת $x \in \mathcal{U}$.

טענה: יהי X מ"ט קומפקטי אזי X מ"ט קומפקטי מקומית.

טענה: יהי X האוסדורף התב"ש

- X קומפקטי מקומית.
- לכל $x \in X$ קיימת $\mathcal{U}$ סביבה של x באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית.
- לכל $x \in X$ ולכל $\mathcal{U}$ סביבה של x קיימת $\mathcal{V}$ סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{V}}$ קומפקטית וכן $\mathcal{V} \Subset \mathcal{U}$.

מסקנה: יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית אזי X רגולרי.

טענה: $\mathbb{R}^n$ מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי מקומית.

טענה: $\left(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי מקומית.

טענה: $\mathbb{Q}$ מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי מקומית.

טענה: יהי X קומפקטי מקומית יהי Y מ"ט ותהא $f : X \to Y$ רציפה ופתוחה אזי $f(X)$ קומפקטית מקומית.

מסקנה: קומפקטיות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X קומפקטי מקומית ותהא $Y \subseteq X$ סגורה אזי Y קומפקטית מקומית.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית ותהא $Y \subseteq X$ פתוחה אזי Y קומפקטית מקומית.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ מ"טים אזי (X_i קומפקטי מקומית לכל $i \in [n]$)$\iff$($\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי מקומית).

העתקה נאותה: יהיו X, Y מ"טים אזי $f : X \to Y$ עבורה לכל $C \subseteq Y$ קומפקטית מתקיים כי $f^{-1}(C)$ קומפקטית.

טענה: יהי X מ"ט יהי Y האוסדורף קומפקטי מקומית ותהא $f : X \to Y$ חח"ע על רציפה ונאותה אזי f הומיאומורפיזם.

קומפקטיפיקציה: יהי X מ"ט אזי מ"ט קומפקטי והאוסדורף Y עבורו קיים שיכון $f : X \to Y$ המקיים $\overline{f(X)} = Y$.

הערה: קומפקטיפיקציה היא לעיתים מ"ט ולעיתים השיכון.

מסקנה: יהי X מ"ט ותהא Y קומפקטיפיקציה אזי X צפוף ב־Y.

קומפקטיפיקציה חד־נקודתית/אלכסנדרוב: יהי X מ"ט אזי קומפקטיפיקציה Y עבורה $|Y \setminus X| = 1$.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית שאינו קומפקטי אזי קיימת ל־X קומפקטיפיקציה חד־נקודתית.

הערה: יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית שאינו קומפקטי ותהיינה Y, Z קומפקטיפיקציות חד־נקודתיות אזי Z, Y הומיאומורפיים.

קומפקטיפיקציית סטון־צ'ך: יהי X מ"ט אזי קומפקטיפיקציה $i : X \to Y$ עבורה לכל מ"ט האוסדורף Z ולכל $f : X \to Z$ רציפה קיימת $g : Y \to Z$ רציפה עבורה $g \circ i = f$.

טענה: יהי X מ"ט ותהיינה Y, Z קומפקטיפיקציות סטון־צ'ך אזי Z, Y הומיאומורפיים.

מרחב טופולוגי קומפקטי סדרתית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל סדרה a_n קיימת תת־סדרה a_{k_n} מתכנסת.

למה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים תהא $a : \mathbb{N} \to \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ סדרה ויהי $b \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ אזי (a מתכנסת ל־b)$\iff$($\left(\pi_\alpha(a_n)\right)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל־$\pi_\alpha(a)$ לכל $\alpha \in \Lambda$).

טענה: $\{x \in [0, 1] \to \{0, 1\} \mid |\{x_\alpha = 1\}| \le \aleph_0\}$ קומפקטית סדרתית וכן אינה קומפקטית.

טענה: $[0, 1] \to [0, 1]$ קומפקטית וכן אינה קומפקטית סדרתית.

טענה: $[0, 1]^2$ מצוייד עם טופולוגיית הסדר המילוני הינו קומפקטי וכן קומפקטי סדרתית.

טענה: יהי X קומפקטי מניה I אזי X קומפקטי סדרתית.

טענה: יהי X לינדלוף קומפקטי סדרתית אזי X קומפקטי.

טופולוגיית הישר הארוך: יהי ω_1 הסודר המינימלי שאינו בן־מניה אזי $\omega_1 \times [0, 1)$ מצוייד עם הסדר המילוני.

טענה: הישר הארוך הינו קומפקטי סדרתית וכן אינו קומקפטי וכן אינו מטריזבילי.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α קומפקטי מקומית לכל $\alpha \in \Lambda$ וכן קיימת $\Delta \subseteq \Lambda$ סופית עבורה X_β קומפקטי לכל $\beta \in \Lambda \setminus \Delta$)$\iff$($\left(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ קומפקטי מקומית).

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי שלם ותהא $A \subseteq X$ אזי (A סגורה)$\iff$((A, d) מרחב מטרי שלם).

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי שלם אזי $(X, \min\{d, 1\})$ מרחב מטרי שלם.

המטריקה האחידה: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא Λ קבוצה אזי $\rho(d) : X^\Lambda \times X^\Lambda \to \mathbb{R}$ המוגדרת $\rho(d)(x, y) = \sup_{\alpha\in\Lambda}\{\min\{d(x_\alpha, y_\alpha), 1\}\}$.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא Λ קבוצה אזי $\rho(d)$ מטריקה מעל X^Λ וכן $\rho(d) \le 1$.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי שלם ותהא Λ קבוצה אזי $\left(X^\Lambda, \rho(d)\right)$ מרחב מטרי שלם.

למה: יהי X מ"ט יהי (Y, d) מרחב מטרי תהא $f : X \to Y$ ותהיינה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X \to Y$ רציפות עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי f רציפה.

טענה: יהי X מ"ט ויהי (Y, d) מרחב מטרי אזי $C(X, Y)$ סגורה במרחב המטרי $\left(Y^X, \rho(d)\right)$.

מסקנה: יהי X מ"ט ויהי (Y, d) מרחב מטרי שלם אזי $C(X, Y)$ מרחב מטרי שלם.