

פעולה בינארית: פונקציה $*$: $A \times A \rightarrow A$ ונסמן $(a, b) \mapsto a * b$.
אגודה: תהא G קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית אזי $\langle G, * \rangle$ המקיימת

• אסוציאטיביות/קיבוציות: $\forall a, b, c \in A. a * (b * c) = (a * b) * c$

מונואיד: אגודה $\langle G, * \rangle$ המקיימת

• איבר יחידה: $\exists e \in A. \forall g \in G. e * g = g * e = g$

סימון: איבר יחידה של $\langle G, * \rangle$ הוא e_G .

חבורה: מונואיד $\langle G, * \rangle$ המקיימת

• איבר הופכי/נגדי: $\forall g \in G. \exists h \in A. g * h = h * g = e_G$

סימון: איבר הופכי של a הוא a^{-1} .

טענה: איבר יחידה הוא יחיד, איבר הופכי הוא יחיד.

$$a^n = \begin{cases} a * a^{n-1} & n > 0 \\ e_G & n = 0 \\ a^{-1} * a^{n+1} & n < 0 \end{cases} \quad \text{חזקה:}$$

טענה: $a^{n+k} = a^n \cdot a^k, (a^n)^k = a^{nk}$

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: $\forall a, b \in A. a * b = b * a$

הגדרה: $GL_n(\mathbb{F})$ היא קבוצת המטריצות ההפיכות ב- $M_n(\mathbb{F})$.

טענה: $\langle GL_n(\mathbb{F}), \cdot \rangle$ חבורה לא אבלית.

הגדרה: נגדיר $S_A = A \xrightarrow[onto]{1-1} A$, נסמן $S_n = S_{[n]}$.

טענה: $\langle S_n, \circ \rangle$ חבורה לא אבלית.

סדר: תהא G חבורה סופית אזי $|G| = \text{ord}(G) = o(G)$.

הגדרה: יהיו $\langle G, \cdot \rangle, \langle H, \cdot \rangle$ חבורות אזי $\langle G \times H, \cdot \rangle$ באשר $\langle g_1, h_1 \rangle \cdot \langle g_2, h_2 \rangle = \langle g_1 g_2, h_1 h_2 \rangle$.

הגדרה: $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$

טענה: $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ חבורה באשר $a + b = a + b \pmod n$

חבורת קליין: $\langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, + \rangle$.

טענה: $\forall a, b, c \in G. a * b = a * c \implies b = c$

חבורה ציקלית/מעגלית: חבורה G המקיימת $G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ עבור $g \in G$.

טענה: \mathbb{Z}_n ציקלית.

סימון: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

טענה: $\langle \langle g \rangle, \cdot \rangle$ חבורה.

סדר: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $o(g) = \text{ord}(g) = \min(n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n = e)$

טענה: $|\langle g \rangle| = \text{ord}(g)$.

הגדרה: יהיו G, H חבורות

• הומומורפיזם: $\varphi : G \rightarrow H$ המקיימת $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

• מונומורפיזם/שיכון: $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם חח"ע.

• אפימורפיזם: $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם על.

• איזומורפיזם: $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם הפיך.

• אוטומורפיזם: איזומורפיזם עבורו $G = H$.

סימון: $G \hookrightarrow H$ קבוצת השיכונים בקבוצה $G \rightarrow H$.

הגדרה: $\text{Aut}(G)$ קבוצת האוטומורפיזם בקבוצה $G \rightarrow G$.

טענה: $\langle \text{Aut}(G), \circ \rangle$ חבורה.

סימון: נניח כי G, H חבורות איזומורפיות אזי $G \cong H$.

טענה: \cong הוא יחס שקילות.

טענה: אם $G \cong H$ אזי $\langle G \text{ ציקלית} \rangle \iff \langle H \text{ ציקלית} \rangle$.

הגדרה: תהא $\langle G, * \rangle$ חבורה אזי $\langle G^{op}, \cdot \rangle$ חבורה באשר $g \cdot h = h * g$.

טענה: $G \cong G^{op}$.

טענה: יהי φ הומומורפיזם אזי $(\varphi(g^{-1})) = \varphi(g)^{-1} \wedge (\varphi(e) = e)$.

תת חבורה: תהא $\langle G, * \rangle$ חבורה ותהא $H \subseteq G$ אזי החבורה $\langle H, *|_H \rangle$.

סימון: אם H תת חבורה של G אזי $H \leq G$.

בוחר תת חבורה: תהא G חבורה ותהא $H \subseteq G$ אזי $H \leq G$ אמ"מ

- $e \in H$

- $\forall a, b \in H. ab \in H$

- $\forall a \in H. a^{-1} \in H$

למה: $H \leq G \implies e_G = e_H$.

טענה: $\{e_G\} \leq G, G \leq G$.

טענה: יהיו H, G חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי $\text{Im}(\varphi) \leq H$.

הגדרה: תהא G חבורה יהי $g \in G$ ויהיו $A, B \subseteq G$

- מחלקה שמאלית: $gA = \{ga \mid a \in A\}$

- מחלקה ימנית: $Ag = \{ag \mid a \in A\}$

- $AB = \{ab \mid a \in A \wedge b \in B\}$

- $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$

טענה: יהיו $H \leq G$ חבורות אזי $HH = H, H^{-1} = H, Hh = Hh = H, \forall h \in H$.

הצמדה: יהיו $H \leq G$ חבורות ויהי $g \in G$ אזי $gHg^{-1} \leq G$.

סימון: $H^g = gHg^{-1}$.

למה: יהיו $H \leq G$ ויהיו $g_1, g_2 \in G$ התב"ש

- $g_1H = g_2H$

- $g_1H \subseteq g_2H$

- $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset$

- $g_1 \in g_2H$

- $g_2^{-1}g_1 \in H$

מנה: $G/H = \{gH \mid g \in G\}$.

אינדקס: $[G : H] = |G/H|$.

משפט לגראנז': יהיו $H \leq G$ חבורות סופיות אזי $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

מסקנה: $[G : H] \mid |G|, |H| \mid |G|$.

מסקנה: תהא G חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $\text{ord}(g) \mid \text{ord}(G)$.

מסקנה: תהא G חבורה אזי $(\text{ord}(G)) \leftarrow (\text{ord}(\text{ראשוני})) \Leftarrow (G \text{ ציקלית})$.

מסקנה: תהא G חבורה מסדר p ראשוני אזי $G \cong \mathbb{Z}_p$.

טענה: אם G ציקלית אינסופית אזי $G \cong \mathbb{Z}$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי חבורה H המקיימת $Hg = gH, \forall g \in G$.

סימון: אם H תת חבורה נורמלית של G אזי $H \triangleleft G$.

למה: התב"ש

- $N \triangleleft G$

- $\forall g \in G. gNg^{-1} = N$

- $\forall g \in G. gNg^{-1} \subseteq N$

טענה: אם $N \triangleleft G$ אזי $(g_1N) \cdot (g_2N) = g_1g_2N$ מוגדרת היטב.

חבורת המנה: אם $N \triangleleft G$ אזי $\langle G/H, \cdot \rangle$ חבורה.

טענה: תהא G חבורה אבלית אזי $(H \leq G) \iff (H \triangleleft G)$.

גרעין: יהיו H, G חבורות ויהי $\varphi : G \rightarrow H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.

טענה: $\ker(\varphi) \triangleleft G$.

טענה: יהי φ הומומורפיזם אזי $(\ker(\varphi) = \{e\}) \iff (\varphi \text{ מונומורפיזם})$.

טענה: יהיו $H \leq G$ חבורות אזי $(H \triangleleft G) \implies ([G : H] = 2)$.

טענה: תהא G חבורה אזי $(\bigcap_{i=1}^n N_i \triangleleft G) \implies (\forall i \in [n]. N_i \triangleleft G)$.

טענה: יהיו $N \triangleleft G, H \leq G$ אזי $(HN \leq G) \wedge (NH \leq G)$.

מסקנה: יהיו $N, H \triangleleft G$ אזי $HN \triangleleft G$.

טענה: יהיו $H_1, H_2 \leq H$ סופיות אזי $|H_1 H_2| = \frac{|H_1| \cdot |H_2|}{|H_1 \cap H_2|}$.

משפט האיזומורפיזם הראשון: יהי $\varphi : G \rightarrow K$ הומומורפיזם אזי $G/\ker(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$.

הגדרה: $C = \{e^{2\pi i x} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

טענה: $\langle C, \cdot \rangle$ חבורה.

הגדרה: יהי $\langle A, * \rangle$ מונואיד אזי $A^\times = \{a \in A \mid \exists h \in A. a * h = h * a = e_A\}$.

מסקנה: $\mathbb{C}^\times / C = \mathbb{R}^\times, \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_4$.

הגדרה: $SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid \det(A) = 1\}$.

טענה: $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times, SL_n(\mathbb{R}) \triangleleft GL_n(\mathbb{R})$.

ההעתקה הקנונית: יהיו $N \triangleleft G$ חבורות אזי $\pi : G \rightarrow G/N$ המוגדרת $\pi(g) = gN$.

טענה: π אפימורפיזם.

משפט ההומומורפיזם: יהי $\varphi : H \rightarrow H$ הומומורפיזם ותהא $N \leq \ker(\varphi)$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi^* : G/N \rightarrow H$ המקיים

$$\varphi^* \circ \pi = \varphi$$

מסקנה: $((\ker(\varphi) = N) \iff (\varphi^*(\text{חח"ע}) \wedge (\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(\varphi^*)))$.

משפט האיזומורפיזם השני: יהיו G, H, N חבורות המקיימות $N \triangleleft G, H \leq G, HN \triangleleft G$ אזי $HN/N \cong H/(H \cap N)$.

טענה: יהיו G, H, N חבורות המקיימות $N \triangleleft G, H \leq G$ אזי $H \cap N \triangleleft H$.

תת חבורה יוצרת: תהא G חבורה ותהא $A \subseteq G$ אזי $\langle A \rangle = \{e\} \cup \bigcup_{n=0}^\infty \{\prod_{i=1}^n a_i \mid a_i \in (A \cup A^{-1})^n\}$.

טענה: $\langle A \rangle$ היא תת חבורה.

חבורה נוצרת סופית (נ"ס): חבורה G עבורה קיימת $A \subseteq G$ סופית המקיימת $\langle A \rangle = G$.

$$\pi(b) = \begin{cases} b & b \notin \langle a_1, \dots, a_k \rangle \\ a_{(i \in [k]. b = a_i) + 1 \bmod k} & \text{else} \end{cases}$$

מחזור/חישוקון/ציקלוס באורך k : תמורה π המקיימת

$$\pi = (a_1 \dots a_k)$$

חילוף/היפוך/חישוקון: מחזור מאורך 2.

למה: תהא $\sigma \in S_n$ אזי קיימים ויחידים $\{\pi_1 \dots \pi_r\}$ מחזורים זרים מאורך גדול מ-1 המקיימים $\sigma = \prod_{i=1}^r \pi_i$.

טענה: תהא $\sigma \in S_n$ אזי קיימים $\{\pi_1 \dots \pi_r\}$ חילופים המקיימים $\sigma = \prod_{i=1}^r \pi_i$.

משפט: נניח כי $\prod_{i=1}^\ell p_i = \prod_{i=1}^m \pi_i$ בעבור p_i, π_i חילופים אזי $\ell \equiv m \pmod{2}$.

סימן: תהא $\sigma \in S_n$ מכפלה של k חילופים אזי $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

טענה: $\text{sign} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ הומומורפיזם.

תמורה זוגית/איזוגית: תהא $\sigma \in S_n$ אזי $\sigma \Leftarrow \text{sign}(\sigma) = 1$ זוגית $\sigma \Leftarrow \text{sign}(\sigma) = -1$ איזוגית.

סימון: $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sign}(\sigma) = 1\}$.

טענה: $|A_n| = \frac{|S_n|}{2}, A_n \triangleleft S_n$.

מסקנה: $S_n/A_n \cong \{\pm 1\}, [S_n : A_n] = 2$.

טענה: יהיו $N \triangleleft G$ חבורות ותהא $N \leq H \leq G$ חבורה אזי $(H/N \leq G/N) \wedge (N \triangleleft H)$.

משפט האיזומורפיזם השלישי: יהיו $N \triangleleft G$ חבורות חבורות אזי $\varphi : \{H \mid N \leq H \leq G\} \rightarrow \{H \mid H \leq G/N\}$ המוגדרת

$$\varphi(H) = H/N$$

מסקנה: יהיו $N \triangleleft G$ חבורות ויהיו $N \leq A_1 \dots A_n \leq G$ חבורות

$$A_1 \leq A_2 \iff A_1/N \leq A_2/N \bullet$$

$$\bigcap_{i=1}^n (A_i/N) = (\bigcap_{i=1}^n A_i)/N \bullet$$

$$A_1 \triangleleft A_2 \iff A_1/N \triangleleft A_2/N \bullet$$

$$A_1 \triangleleft A_2 \implies (A_2/N)/(A_1/N) \cong A_2/A_1 \bullet$$

הלמה של צנאהאוס/למת הפרפר: יהיו $A_1 \triangleleft A \leq G, B_1 \triangleleft B \leq G$

$$A_1(A \cap B_1) \triangleleft A_1(A \cap B) \leq G \bullet$$

$$B_1(A \cap B)/B_1(A_1 \cap B) \cong A_1(A \cap B)/A_1(A \cap B_1) \bullet$$

תת חבורת האלכסון: תהא G חבורה אזי $\Delta = \{\langle g, g \rangle \mid g \in G\}$.

טענה: $\Delta \cong G$, $\Delta \triangleleft G^2$, $G \triangleleft \Delta \iff G$ אבלי.

קומוטטור: תהא G חבורה ויהי $g, h \in G$ אזי $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

טענה: g, h מתחלפים $\iff [g, h] = e$.

תת חבורת הקומוטטור: תהא G חבורה אזי $G' = \{[g, h] \mid g, h \in G\}$.

טענה: $G' \triangleleft G$.

טענה: יהי $G \triangleleft N$ חבורות אזי (G/N) אבלי $\iff (G' \leq N)$.

טענה: יהיו $H \leq G$ חבורות סופיות באשר H היחידה בעלת סדר $|H|$ אזי $H \triangleleft G$.

המרכז של חבורה: תהא G חבורה אזי $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G. gh = hg\}$.

טענה: $Z(G) \triangleleft G$.

המרכז של איבר: תהא G חבורה ויהי $a \in G$ אזי $C_G(a) = \{g \in G \mid aga = g\}$.

טענה: $C_G(a) \leq G$.

מסקנה: $G' = \{e\} \iff G \triangleleft Z(G) = G$ אבלי.

הנורמליזטור/המשמר: תהא G חבורה ויהי $g \in G$ אזי $N_G(g) = \{h \in G \mid hgh^{-1} = g\}$.

טענה: $N_G(g) \leq G$.

הנורמליזטור/המשמר של חבורה: יהיו $H \leq G$ חבורות אזי $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$.

טענה: $a \in Z(G) \iff N_G(a) = G$.

פעולה משמאל: תהא G חבורה ותהא X קבוצה אזי $\pi : G \times X \rightarrow X$ המקיימת

$$\bullet \pi(g_1 g_2, x) = \pi(g_1, \pi(g_2, x))$$

$$\bullet \pi(e, x) = x$$

סימון: $\pi(g, x) = g * x$.

הגדרה: תהא G פועלת על X אזי $x_1 \sim x_2 \iff \exists g \in G. g * x_1 = x_2$.

טענה: \sim יחס שקילות על X .

הגדרה: מחלקת השקילות של \sim נקראת מסלול- G .

תת חבורת המיצב של x : תהא G חבורה הפועלת על X ויהי $x \in X$ אזי $G_x = \{g \in G \mid g * x = x\}$.

למה: נניח כי G פועלת על X

$$\bullet G_x \leq G$$

$$\bullet g_2^{-1} g_1 \in G_x \iff g_1 * x = g_2 * x$$

אורך המסלול של x : תהא G חבורה הפועלת על X אזי $|[x]_{\sim}| = [G : G_x]$.

למת האפיון לתת חבורות של חבורות ציקליות: תהא $G = \langle a \rangle$ חבורה ציקלית מסדר n יהי $d|n$ אזי $\langle a^{\frac{n}{d}} \rangle$ תת החבורה היחידה של

G מסדר d .

מסקנה: תהא G חבורה הפועלת על X סופית ותהא $\{x_1, \dots, x_n\}$ מערכת נציגים מסלולי G אז $|X| = \sum_{i=1}^n [G : G_{x_i}]$.

מחלקות צמידות: תהא G חבורה סופית אזי מחלקת השקילות של פעולת ההצמדה של G על עצמה.

משוואת המחלקים: תהא $\{x_1 \dots x_n\}$ מערכת נציגים למחלקות הצמידות אזי $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^n [G : C_G(x_i)]$.

טענה: תהא G חבורה הפועלת על X אזי $\varphi : G \rightarrow S_X$ המוגדרת $\varphi(g)(x) = \pi(g, x)$ הומומורפיזם.

מסקנה: יהיו $H \leq G$ חבורות נניח כי $[G : H] = n < \infty$ וגם $K = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$

$$\bullet K \triangleleft G$$

$$\bullet K \leq H$$

$$\bullet G/K \text{ איזומורפית לתת חבורה של } S_n.$$

$$\bullet (|G| \nmid n!) \wedge (G \text{ סופית}) \iff \{e\} \neq K$$

חבורה פשוטה: חבורה G כך שכל התת חבורות הנורמליות שלה הן $\{e\}, G$.

מסקנה: יהיו $H \leq G$ חבורות ההיח כי $|G| \nmid |H|$ אזי G אינה פשוטה.

למה: A_n נוצרת על ידי המחזורים מאורך 3 ב- S_n .

טענה: יהי $n \geq 5$ אם $N \triangleleft A_n$ מכילה מחזור מאורך 3 אזי $N = A_n$.

טענה: יהי $n \geq 5$ אם $N \triangleleft A_n$ אזי יש מחזור מאורך 3 ב- N .

משפט: יהי $n \geq 5$ אזי A_n פשוטה.

משפט קיילי: תהא G חבורה סופית מסדר n אזי G איזומורפית לתת חבורה של S_n .

מכפלה ישרה פנימית: תהא G חבורה אזי $G_1 \dots G_n$ חבורות המקיימות

$$\bullet G_i \triangleleft G$$

$$\bullet G_i \cap G_j = \{e\}$$

$$\bullet \prod_{i=1}^n G_i = G$$

סימון: אם $G_1 \dots G_n$ מכפלה ישרה פנימית של G אזי $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_n = G_1 \cdot \dots \cdot G_n$

מכפלה ישרה חיצונית: יהיו $G_1 \dots G_n$ חבורות אזי $G_1 \times \dots \times G_n$

טענה: מכפלה ישרה עם פעולה איבר איבר היא חבורה.

משפט: תהא G חבורה ויהיו $G_1 \dots G_n \leq G$ חבורות התב"ש

•

$$- G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$$

$$- \forall i \in [n]. G_i \triangleleft G$$

$$- \forall i \in [n]. G_i \cap \langle G_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$$

•

$$- G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$$

$$- \forall i \neq j. \forall x \in G_j. \forall y \in G_i. xy = yx$$

$$- \text{באשר } x_i, y_i \in G_i \text{ אזי } x_i = y_i \implies \prod_{i=1}^n x_i = \prod_{i=1}^n y_i$$

$$\bullet G \cong G_1 \times \dots \times G_n$$

מסקנה: (מכפלה ישרה פנימית) \cong (מכפלה ישרה חיצונית).

טענה: תהא G חבורה סופית ויהיו $G_1 \dots G_n \triangleleft G$ חבורות בעלי סדרים זרים המקיימים $|G| = \prod_{i=1}^n |G_i|$ אזי $G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$

מסקנה: יהי $m \in \mathbb{N}_+$ ונניח כי $m = \prod_{i=1}^k p_i^{n_i}$ פירוק לראשוניים אזי $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \cdot \dots \cdot \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$

סדרה נורמלית מאורך m : תהא G חבורה סופית אזי $\{G_i\}_{i=0}^m$ המקיימות $\{e\} = G_0 \triangleleft \dots \triangleleft G_m = G$

סדרות שקולות: $\{G_i\}_{i=0}^m$, $\{H_i\}_{i=0}^m$ סדרות נורמליות של G המקיימות $G_i/G_{i-1} = H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)-1}$ $\exists \sigma \in S_n. \forall i \in [n]$

עידון: תהא $\{G_i\}_{i=0}^m$ סדרה אזי סדרה $\{H_i\}_{i=0}^n$ המקיימת $G_i = H_j$ $\exists j \in \{i, \dots, n\}$ $\forall i \in \{0, \dots, m\}$

משפט שרייר: לכל שתי סדרות נורמליות של אותה חבורה קיימים עידונים שקולים.

מסקנה: לכל שתי סדרות נורמליות של אותה חבורה קיימים עידונים שקולים ללא חזרות.

סדרת הרכב: תהא G חבורה אזי סדרה נורמלית ללא חזרות שכל עידון שלה מכיל חזרות.

משפט ז'ורדן הלדר: תהא G חבורה סופית אזי כל שתי סדרות הרכב של G שקולות.

נורמלית מקסימלית: תהא G חבורה אזי $G \triangleleft H \neq G$ עבורה $R \triangleleft G \implies R \triangleleft H$

למה: תהא $\{G_i\}_{i=0}^m$ סדרה נורמלית ללא חזרות של G התב"ש

$$\bullet \{G_i\}_{i=0}^m \text{ סדרת הרכב.}$$

$$\bullet G_{i-1} \text{ נורמלית מקסימלית ב-} G_i$$

$$\bullet G_i/G_{i-1} \text{ פשוטה.}$$

חבורה פתירה: חבורה סופית G בעלת סדרת הרכב $\{G_i\}_{i=0}^m$ כך שהחבורה G_i/G_{i-1} אבלית.

למה: תהא G חבורה סופית ותהא $K \triangleleft G$ אזי $(G \text{ פתירה}) \iff (K, G/K)$ פתירות.

חבורת p : יהי p מספר ראשוני אזי G חבורה המקיימת $\text{ord}(G) = p^n$ $\exists n \in \mathbb{N}_+$

למה: יהיו H, G חבורות p אזי $(G \leq R \text{ חבורת } p) \wedge (H \times G) \text{ חבורת } p$

משפט: תהא $G \neq \{e\}$ חבורת p אזי $Z(G) \neq \{e\}$

מסקנה: יהי p ראשוני ותהא G חבורה אזי $(\text{ord}(G) = p^2) \iff (G \text{ אבלית})$

למה: תהא G חבורת p ותהא $H \leq G$ חבורה אזי $H \leq N_G(H)$

תת חבורה מירבית: תהא G חבורה אזי $G \neq H \leq G$ עבורה $R \leq G \implies R \leq H$

מסקנה: תהא G חבורת p ותהא $H \leq G$ תת חבורה מירבית אזי

$$\bullet H \triangleleft G$$

$$\bullet [G : H] = p$$

- קיימת ל- G סדרת הרכב $\{G_i\}_{i=0}^m$ כך שהחבורה G_i/G_{i-1} ציקלית מסדר p .
- תת חבורת p סילו:** יהי p ראשוני ותהא G חבורה סופית המקיימת $p \mid |G|$ אזי $P \leq G$ תת חבורת p מקסימלית עבורה $|P| \mid |G|$.
- משפט קושי:** יהי p ראשוני ותהא G חבורה סופית אזי $\exists g \in G, \text{ord}(g) = p$ $p \mid |G| \implies$.
- המשפט הראשון של סילו:** תהא G חבורה סופית ויהי $p \mid |G|$ ראשוני אזי קיימת ל- G תת חבורה p סילוב.
- משפט:** יהי $p \mid |G|$ ותהא $H \leq G$ חבורת p אזי H תת חבורה של חבורת p סילוב.
- המשפט השני של סילו:** יהיו $H, N \leq G$ תת חבורות p סילוב אזי $\exists g \in G, H = gNg^{-1}$.
- מסקנה:** נניח כי $n_p = 1$ אזי תת חבורת p סילו היא נורמלית.
- סימון:** כמות תת חבורות p סילוב הוא n_p .
- המשפט השלישי של סילו:** $n_p \mid [G : P], n_p \equiv 1 \pmod{p}$.
- למה:** יהיו $N \triangleleft G$ חבורות סופיות ונניח כי P חבורת p סילו אזי
 - $P \cap N$ חבורת p סילו ב- N .
 - PN/N חבורת p סילו ב- G/N .
- טענה:** תהא G חבורה מסדר pq בעבור $q < p$ ראשוניים אזי
 - G פתירה.
 - $(q \nmid p-1) \iff (G \text{ ציקלית}).$
- הערה:** $\langle G, \cdot \rangle$ היא חבורה עם כפל מוכלל $\prod, \langle A, + \rangle$ היא חבורה עם חיבור מוכלל \sum .
- תת חבורת הפיתול:** תהא A חבורה אבלית אזי $A^t = \{a \in A \mid \text{ord}(a) < \infty\}$.
- חבורת פיתול:** חבורה אבלית A המקיימת $A^t = A$.
- חבורה חסרת פיתול:** חבורה אבלית A המקיימת $A^t = \{e\}$.
- למה:** תהא A חבורה אבלית
 - $A^t \leq A$.
 - A/A^t חסרת פיתול.
 - אם A חבורת פיתול חילופית נוצרת סופית אז A סופית.
- סדרה תלויה לינארית (ת"ל):** סדרה $a \in A^n$ עבורה $\sum_{i=1}^n k_i a_i = 0$ $\exists k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.
- בלתי תלויה לינארית (בת"ל).
- בסיס:** תהא A חבורה אבלית אזי $v \in A^n$ בת"ל המקיימת $\sum \alpha_i v_i = a$ $\forall a \in A, \exists \alpha \in \mathbb{Z}^n$.
- חבורה חופשית:** חבורה אבלית בעלת בסיס.
- משפט:** תהא F חבורה חופשית עם בסיס $v \in F^n$ ותהא A חבורה אבלית עם $a \in A^n$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi : F \rightarrow A$ המקיים $\varphi(v_i) = a_i, \forall i \in [n]$.
- למה:** תהא A חבורה אבלית אינסופית ויהי $v \in A^n$ אזי $(v \text{ בסיס}) \iff ((\bigoplus_{i=1}^n \langle v_i \rangle = A) \wedge (\forall i \in [n], \langle v_i \rangle \cong \mathbb{Z}))$.
- מסקנה:** תהא A חבורה אבלית אינסופית אזי $(A \text{ חופשית}) \iff (A \cong \mathbb{Z}^n)$.
- משפט:** תהא A חבורת חסרת פיתול אבלית אזי $(A \text{ נ"ס}) \iff (A \text{ חופשית}).$
- משפט:** תהא A חבורה אבלית ויהיו $v_1 \dots v_n$ בסיס, $u_1 \dots u_k$ סדרת יוצרים אזי $n \leq k$.
- מסקנה:** יהיו B_1, B_2 בסיסים של חבורה חופשית A אזי גודל הבסיסים שווה.
- דרגה של חבורה:** תהא A חבורה חופשית אזי $\text{rank}(A)$ הוא גודל הבסיס של A .
- משפט החבורות החלקיות של תת חבורה חופשית:** יהיו $H \leq A$ חבורות באשר A חבורה חופשית מדרגה n אזי H חופשית.
- מסקנה:** יהי $v \in A^n$ בסיס אזי קיים $k \leq n$ עבורו קיימים $\varepsilon \in \mathbb{N}^k$ המקיימים $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$ וגם $\varepsilon_1 v_1 \dots \varepsilon_k v_k$ בסיס של H .
- מסקנה:** יהיו $H \leq A$ חבורות חופשית אזי $\text{rank}(H) \leq \text{rank}(A)$.
- טענה:** תהא $G = G_1 \times \dots \times G_n$ ונניח כי $N_i \triangleleft G_i$ אזי $G_1/N_1 \times \dots \times G_n/N_n \cong G/(N_1 \cdot \dots \cdot N_n)$.
- משפט השאריות הסיני:** יהיו $j, k, m \in \mathbb{N}$ ונניח כי $\gcd(j, k) = 1, j \cdot k = m$ אזי $\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_j \oplus \mathbb{Z}_k$.
- המשפט היסודי של חבורות אבליות נוצרות סופית:** תהא A חבורה אבלית נ"ס אזי
 - $A \cong \mathbb{Z}_{\varepsilon_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{\varepsilon_k} \times \mathbb{Z}^r$ באשר $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$.
 - קיים פירוק יחיד $A \cong \mathbb{Z}_{p_1^{\varepsilon_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\varepsilon_n}} \times \mathbb{Z}^r$ באשר $p_1 \dots p_n$ ראשוניים.
- חבורה סבבה:** חבורה G אשר $|G| = \prod_{i=1}^n p_i^{\varepsilon_i}$ פירוק לראשוניים המקיימת $n_{p_i} = 1$.
- טענה:** תהא G חבורה סבבה ותהא P_i תת חבורה p סילו אזי $G = P_1 \cdot \dots \cdot P_n$.

הגדרה: יהיו $H, K \leq G$ חבורות אזי $[H, K] = \{[h, k] \mid h \in H \wedge k \in K\}$.

טענה: $[H, K] \leq G$.

טענה: יהיו $H, K \leq G$ חבורות אזי

$$K \leq H \implies [K, G] \leq [H, G] \bullet$$

$$[H, G] \leq H \iff H \triangleleft G \bullet$$

$$((K \triangleleft G) \wedge (K \leq H \leq G)) \implies (H/K \leq Z(G/K) \iff [H, G] \leq K) \bullet$$

הסדרה המרכזית היורדת: תהא G חבורה אזי $\Phi_1(G) = G$, $\Phi_{i+1}(G) = [\Phi_i(G), G]$.

$$\Phi_{i+1} \triangleleft \Phi_i \text{ למה:}$$

$$\Phi_i / \Phi_{i+1} \leq Z(G / \Phi_{i+1}) \text{ למה:}$$

הסדרה המרכזית העולה: תהא G חבורה אזי $Z_0(G) = \{e\}$, $Z_i(G) / Z_{i-1}(G) = Z(G / Z_{i-1}(G))$.

$$Z_1(G) = Z(G) \text{ מסקנה:}$$

$$(Z_m = G) \iff (\Phi_{m+1} = \{e\}) \text{ משפט:}$$

$$(Z_m = G) \implies (\forall i \in [m]. \Phi_{i+1} \leq Z_{m-i}) \text{ מסקנה:}$$

חבורה נילפוטנטית: חבורה G עבורה

$$\bullet \exists i \in \mathbb{N}. \Phi_i(G) = \{e\}$$

$$\bullet \exists i \in \mathbb{N}. Z_i(G) = G$$

טענה: מכפלה ישרה של חבורות נילפוטנטיות היא נילפוטנטית.

למה: תהא G נילפוטנטית ותהא $H \leq G$ חבורה אזי $H \leq N_G(H)$.

למת הארגומנט של פראטיני: יהיו $K \triangleleft G$ חבורות סופיות ותהא P תת חבורה p סילו אזי $G = K \cdot N_G(P)$.

למה: תהא G חבורה סופית ותהא P תת חבורת p סילו אזי $(N_G(H) = H) \implies (N_G(P) \leq H \leq G)$.

משפט: תהא G חבורה אזי $(G \text{ סבבה}) \iff (G \text{ נילפוטנטית}).$