

**כדור פתוח:** יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $r \in \mathbb{R}$  אזי  $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$

**כדור סגור:** יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $r \in \mathbb{R}$  אזי  $\bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$

**ספירה:** יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $r \in \mathbb{R}$  אזי  $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$

**תיבה פתוחה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j < x_j < b_j\}$

**תיבה סגורה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\bar{\Pi}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j \leq x_j \leq b_j\}$

**נקודה פנימית:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $x \in M$  המקיימת  $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq M$  אזי  $x$  נקודה פנימית.

**פנים של קבוצה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $\overset{\circ}{M} = \{x \in M \mid M \text{ נקודה פנימית של } x\}$

**קבוצה פתוחה:** קבוצה  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  עבורה  $M = \overset{\circ}{M}$

**נקודה חיצונית:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$  המקיימת  $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M$  אזי  $x$  נקודה חיצונית.

**נקודה מבודדת:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $x \in M$  המקיימת  $\exists r > 0. B_r(x) \cap M = \{x\}$  אזי  $x$  נקודה מבודדת.

**נקודת שפה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $x \in \mathbb{R}^n$  לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי  $x$  נקודת שפה.

**שפה של קבוצה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $\partial M = \{x \in M \mid M \text{ נקודת שפה של } x\}$

**קבוצה סגורה:** קבוצה  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  עבורה  $\partial M \subseteq M$

**סגור של קבוצה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $\bar{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$

**טענה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(x \text{ נקודה חיצונית של } M) \iff (x \text{ נקודה פנימית של } \mathbb{R}^n \setminus M)$

**מסקנה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(M \text{ פתוחה}) \iff (M^c \text{ סגורה})$

**קבוצה חסומה:** קבוצה  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  המקיימת  $\exists r > 0. M \subseteq B_r(0)$

**קבוצה קומפקטית:** קבוצה  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  סגורה וחסומה.

**טענה היינה בורל:** תהא  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ קבוצות פתוחות עבורן } A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ מתקיים } \exists B \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda). A \subseteq \bigcup_{n \in B} I_n)$

**סימון:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  אזי  $a^{(k)} = a(k)$

**גבול:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  ותהא  $L \in \mathbb{R}^n$  עבורן  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{(k)} - L\| = 0$  אזי  $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)} = L$

**הערה:** נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר  $\lim_{x \rightarrow a}$  וכן  $\xrightarrow{x \rightarrow a}$

**משפט:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  ויהי  $b \in \mathbb{R}^n$  אזי  $\left( a^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \right) \iff \left( \forall j \in [n]. a_j^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b_j \right)$

**מסקנה:** כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א מתקיימות.

**משפט קושי:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a \text{ מתכנסת}) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a^{(m)} - a^{(p)}\| < \varepsilon)$

**מסקנה:** תהא  $a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  אזי  $(a \text{ מתכנסת}) \iff \left( \forall j \in [n]. \forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a_j^{(m)} - a_j^{(p)}\| < \varepsilon \right)$

**משפט בולצאנו וויירשטראס:** לכל סדרה חסומה קיימת תת-סדרה מתכנסת.

**משפט:** תהא  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $(K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } a \in K^{\mathbb{N}} \text{ קיימת תת-סדרה } a^{(k_i)} \text{ המקיימת } \lim_{i \rightarrow \infty} a^{(k_i)} \in K)$

**הערה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  נחשוב על  $f$  כקטור של פונקציות  $f = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$  כאשר  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$

**גבול:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ותהא  $L \in \mathbb{R}^m$  אזי

- היינה: אם  $(f(x^{(k)}) \rightarrow L) \implies (x^{(k)} \rightarrow a) \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  אזי  $\forall x \in A^{\mathbb{N}}. (x^{(k)} \rightarrow a) \implies (f(x^{(k)}) \rightarrow L)$
- קושי: אם  $\|f(x) - L\| < \varepsilon \implies \|x - a\| < \delta \implies \forall x \in A \setminus \{a\}. \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - L\| < \varepsilon$  אזי  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

**מסקנה:** כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

**רציפות בנקודה:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  אזי  $a \in A$  עבורה  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

**סימון:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ותהא  $B \subseteq A$  אזי  $(f \text{ רציפה נקודתית עבור כל } b \in B) \iff (f \in C(B))$

**משפט:** תהא  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  ותהא  $B \subseteq A$  אזי  $(f \in C(b)) \iff (f_1, \dots, f_m \in C(b))$

**מסקנה:** כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

**פונקציה הומאומורפית:** תהינה  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  וכן  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  אזי  $f : A \rightarrow B$  הפיכה עבורה  $f, f^{-1}$  רציפות.

**עקומה פרמטרית:** יהי  $I \subseteq \mathbb{R}$  קטע אזי  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$

**מסילה:** עקומה פרמטרית רציפה.

**מסילה של קו ישר:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^m$  נגדיר  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  כך  $\gamma(t) = (1-t)a + tb$

**טענה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^m$  ותהא  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a$  ל- $b$  אזי  $\gamma$  מסילה.

**סימון:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}^m$  ותהא  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  מסילה של קו ישר בין  $a$  ל- $b$  אזי  $[a, b] = \text{Im}(\gamma)$

**קבוצה קמורה:** קבוצה  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  המקיימת  $\forall a, b \in M. [a, b] \subseteq M$ .

**טענה:** יהי  $a \in \mathbb{R}^n$  ויהי  $r \in \mathbb{R}$  אזי  $B_r(a), \bar{B}_r(a)$  קבוצות קמורות.

**קבוצה קשירה:**  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  עבורה לכל  $x, y \in M$  קיימת מסילה  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  המקיימת  $\gamma(0) = x$  וכן  $\gamma(1) = y$ .

**תחום:** קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

**טענה:** תהא  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  פתוחה אזי קיימת  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_{\leq \aleph_0}(\mathbb{R}^n)$  קבוצה של תחומים זרים עבורה  $\bigcup \mathcal{A} = M$ .

**תכונת דרבו:**  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת לכל  $a, b \in A$  עבורן  $f(a) < f(b)$  מתקיים  $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$ .

**טענה:** תהא  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  קשירה ותהא  $f \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R})$  אזי  $f$  מקיימת את תכונת דרבו.

**משפט וירשטראס:** תהא  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$  קומפקטית ותהא  $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R})$  אזי קיימים  $x, y \in \mathcal{K}$  עבורם  $f(\mathcal{K}) = [f(x), f(y)]$ .

**רציפה במידה שווה (במ"ש):** תהא  $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$  אזי  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  המקיימת  $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x, y \in \mathcal{M}. \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ .

**טענה:** תהא  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$  קומפקטית ותהא  $f \in C(\mathcal{K}, \mathbb{R}^m)$  אזי  $f$  רציפה במ"ש.

**נורמה:** יהי  $L$  מרחב וקטורי נוצר סופית מעל  $\mathbb{R}$  אזי  $v : L \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה לכל  $a \in L$  ולכל  $\lambda \in \mathbb{R}$  מתקיים

- $(v(a) \geq 0) \wedge ((v(a) = 0) \iff (a = 0))$
- הומוגניות:  $v(\lambda a) = |\lambda| \cdot v(a)$
- אי שיוויון המשולש (אש"מ):  $v(a + b) \leq v(a) + v(b)$

**טענה:** תהא  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמה אזי קיים  $c > 0$  עבורו  $v(x) \leq c \|x\|$   $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**טענה:** תהא  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמה אזי  $v \in C(\mathbb{R}^n)$ .

**טענה:** תהא  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמה אזי קיים  $c > 0$  עבורו  $v(x) \leq c \|x\|$   $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**נורמות שקולות:**  $v, \eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמות עבורן קיימים  $a, b > 0$  המקיימים  $a \cdot \eta \leq v \leq b \cdot \eta$ .

**טענה:** שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

**מסקנה:** תהא  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמה אזי  $\|\cdot\|, v$  שקולות.

**מסקנה:** תהיינה  $v, \rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  נורמות ותהא  $x \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  אזי  $(\rho(x^{(k)}) \rightarrow 0) \iff (v(x^{(k)}) \rightarrow 0)$ .

**נורמת  $\ell_p$ :** עבור  $p \in \mathbb{N}_+$  נגדיר נורמה  $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $\|v\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ .

**נורמת  $\ell_\infty$ :** נגדיר נורמה  $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  כך  $\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ .

**דיפרנציאל של עקומה:** תהא  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  ויהי  $a \in (0, 1)$  אזי  $\gamma'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h}$ .

**מסקנה:** תהא  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  ויהי  $a \in (0, 1)$  אזי  $\gamma'(a) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(a) \\ \vdots \\ \gamma'_m(a) \end{pmatrix}$ .

**פונקציה דיפרנציאבילית:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  עבורה קיימת  $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  המקיימת  $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$ .

**סימון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית על  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f \in \mathcal{D}(a)$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f \in \mathcal{D}(a) \implies f \in C(a)$ .

**גרדיאנט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית אזי  $\text{grad} f(a) = [L]_{\text{st}}$ .

**סימון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $a \in \mathcal{U}$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  דיפרנציאבילית אזי  $\nabla f(a) = \text{grad} f(a)$ .

**נגזרת חלקית:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hx_i) - f(a)}{h}$ .

**משפט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\nabla f(a))_i$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ .

**הערה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a))$  קיימת לכל  $i$   $\nRightarrow f \in \mathcal{D}(a)$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $v \in \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \nabla f(a) \cdot v$ .

**פונקציה דיפרנציאבילית:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  עבורה קיימת  $L \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  המקיימת  $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(\|x - a\|)$ .

**טענה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ויהי  $a \in \mathcal{U}$  אזי  $(f \in \mathcal{D}(a)) \iff (\forall i \in \{1 \dots m\}. f_i \in \mathcal{D}(a))$ .

**סימון:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\mathcal{D}_f(a) = \begin{pmatrix} -\nabla f_1(a) - \\ \vdots \\ -\nabla f_m(a) - \end{pmatrix}$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $(\mathcal{D}_f(a))_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ .

**מסקנה:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום יהי  $v \in \mathbb{R}^n$  ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \mathcal{D}_f(a) \cdot v$ .

**דיפרנציאל:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום ותהא  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  המקיימת  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $\mathcal{D}_f(a)$ .

**משפט:** יהי  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום תהיינה  $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  יהי  $a \in \mathcal{U}$  ויהי  $c \in \mathbb{R}^m$  אזי

- אם  $f \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $f \in C(a)$ .
- אם  $f, g \in \mathcal{D}(a)$  אזי  $cf, f + g \in \mathcal{D}(a)$ .
- $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = 0)$ .
- תהא  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$  אזי  $(\forall x \in \mathcal{U}. f(x) = Ax + c) \iff (\forall x \in \mathcal{U}. \mathcal{D}_f(x) = A)$ .