**פעולה בינארית**: פונקציה $A \times A \to A$ : $*$ ונסמן $a * b := * (\langle a, b \rangle)$.

**אסוציטיביות/קיבוציות**: $\forall a,b,c \in A. a * (b * c) = (a * b) * c$.

**קומוטטיביות/חילופיות/אבליות**: $\forall a,b \in A. a * b = b * a$.

**איבר יחידה**: $e \in G$ המקיים $\forall g \in G. e * g = g * e = g$.

**איבר הופכי/נגדי**: יהי $g \in G$ אזי $h \in G$ המקיים $g * h = h * g = e_G$.

**מונואיד**: תהא קבוצה $G$ ופעולה בינארית $*$ אזי זוג סדור $\langle G, * \rangle$ המקיים ($*$ אסוציטיבית)$\wedge$(קיים איבר יחידה).

**חבורה**: $\langle G, * \rangle$ המקיים (מונואיד)$\wedge$(קיים איבר הופכי).

**סימון**: $e_G$ איבר יחידה בחבורה כללית, $1_G$ אם הפעולה מסומנת ב־$*$, $0_G$ אם הפעולה מסומנת ב־$+$.

**הגדרה**: יהי $\langle A, * \rangle$ מונואיד אזי $A^\times = \{a \in A \mid \exists h \in A. a * h = h * a = e_A\}$.

**טענה**: $\left\langle A^\times, *_{\restriction_{A^\times \times A^\times}} \right\rangle$ חבורה.

**הגדרה**: $\left(S_A = A \overset{1-1}{\underset{onto}{\to}} A\right) \wedge \left(S_n = S_{[n]}\right)$.

**חבורת התמורות**: $\langle S_A, \circ \rangle$.

**הגדרה**: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $n \mid x - y \iff x \sim_n y$ יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$.

**טענה**: $\left(\mathbb{Z}/_{\sim_n} = \left\{[0]_{\sim_n}, \ldots, [n-1]_{\sim_n}\right\}\right) \wedge \left([x]_{\sim_n} + [y]_{\sim_n} = [x+y]_{\sim_n}\right)$.

**חבורת השאריות**: $\langle \mathbb{Z}/_{\sim_n}, + \rangle$.

**פונקציית אוילר**: כמות המספרים הזרים הקטנים מאשר $n \in \mathbb{N}$ הוא $\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

**טענה**: יהיו $e_1, e_2 \in G$ איברי יחידה אזי $e_1 = e_2$.

**טענה**: $(\forall a,b,c \in G. a * b = e_G = c * a) \implies (b = c)$.

**מסקנה**: יהי $a \in G$ וכן $h_1, h_2 \in G$ הופכיים אל $a$ אזי $h_1 = h_2$.

**סימון**: יהי $a \in G$ אזי ההופכי שלו הינו $a^{-1}$.

**הגדרה**: $(a^0 = e_G) \wedge (a^{n+1} = a * a^n) \wedge \left(a^{-n} = (a^{-1})^n\right)$.

**סדר**: $\operatorname{ord}(a) = \min\{n \in \mathbb{N}_+ \mid a^n = e_G\}$.

**משפט**: $|G| < \aleph_0 \implies \exists a \in G. \operatorname{ord}(a) \leq |G|$.

**תת חבורה**: תהא $\langle G, * \rangle$ חבורה אזי $H \subseteq G$ המקיימת $\langle H, *_{\restriction_{H \times H}} \rangle$ חבורה.

**סימון**: תהא $G$ חבורה וכן $H \subseteq G$ תת חבורה אזי $H \leq G$.

**בוחן תת חבורה**: תהא $H \subseteq G$ תת קבוצה אזי ($H$ חבורה) $\iff$ ($H$ סגורה לפעולה $*$)$\wedge$($e_G \in H$)$\wedge$($\forall h \in H. h^{-1} \in H$).

**איזומורפיזם בין חבורות**: $f : G \overset{1-1}{\underset{\text{onto}}{\to}} H$ המקיימת $f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)$.

**חוק הפילוג**: $((b + c) * a = b * a + c * a) \wedge (a * (b + c) = a * b + a * c)$.

**חוג עם יחידה**: $\langle R, +, * \rangle$ המקיים ($\langle R, + \rangle$ חבורה אבלית)$\wedge$($\langle R, * \rangle$ מונואיד)$\wedge$(חוק הפילוג).

**איזומורפיזם בין חוגים**: $f : R \overset{1-1}{\underset{\text{onto}}{\to}} F$ המקיימת ($f(\alpha * \beta) = f(\alpha) * f(\beta)$)$\wedge$($f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$)$\wedge$ ($f(1_R) = 1_F$).

**חוג הפולינומים**: יהי $\langle R, +, \cdot \rangle$ חוג חילופי אזי $\langle R[x], +, \cdot \rangle$.

**נוסחאת המעלות**: $\deg(p + q) \leq \max(\deg(p), \deg(q))$ וגם $\deg(p \cdot q) \leq \deg(p) + \deg(q)$.

**הגדרה**: $T^{-1} = \{t^{-1} \mid t \in T\}$.

**תת החבורה שנוצרת על ידי $T$**: $\langle T \rangle = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathop{*}_{i=1}^{n} a_i \mid a \in \left(T \cup T^{-1}\right)^n \right\} = \left\{a_1 * \ldots * a_n \mid a_1, \ldots, a_n \in T \cup T^{-1}\right\}$.

**משפט**: $\forall H \geq T. \langle T \rangle \leq H$, במילים אחרות $\langle T \rangle$ תת החבורה הקטנה ביותר ביחס ההכלה שמכילה את $T$.

**משפט**: תהא $G$ חבורה סופית אזי $\forall g\in G.\left|\left\langle g\right\rangle\right|=\mathrm{ord}\left(g\right)$.

**מנה של חבורה**: יהיו $H\le G$ אזי $g_1\sim_H g_2\iff g_1*g_2^{-1}\in H$.

**סימון**: יהיו $H\le G$ אזי $G/H=G/\sim_H$.

**משפט**: תהא $G$ חבורה אזי $(\left|G\right|=\left|G/H\right|\cdot\left|H\right|)\wedge(\forall g\in G.\mathrm{ord}\left(g\right)\mid\left|G\right|)$.

**משפט**: תהא $G$ חבורה עבורה $\left|G\right|\in\mathbb{P}$ אזי ($G$ אבלית)$\wedge(\forall g\neq e_G.\left\langle g\right\rangle=G)$.

**מחלק אפס**: יהי $R$ חוג אזי $a\in R\backslash\left\{0\right\}$ המקיים $\exists b\in R\backslash\left\{0\right\}.a*b=0_G$.

**תחום שלמות**: $\left\langle R,+,*\right\rangle$ המקיים ($\left\langle R,+,*\right\rangle$ חוג אבלי)$\wedge$(לא קיימים מחלקי אפס).

**חוק צמצום**: יהי $R$ תחום שלמות אזי $\forall a\neq0_R.\forall b,c\in R.\left(a*c=a*b\right)\implies\left(c=b\right)$.

**שדה**: $\left\langle\mathbb{F},+,*\right\rangle$ המקיים ($\left\langle\mathbb{F},+,*\right\rangle$ חוג)$\wedge$($\left\langle\mathbb{F}\backslash\left\{0_{\mathbb{F}}\right\},*\right\rangle$ חבורה אבלית)$\wedge(0_{\mathbb{F}}\neq1_{\mathbb{F}})$.

**טענה**: ($\mathbb{F}$ שדה) $\Longleftarrow$ ($\mathbb{F}$ תחום שלמות).

**משפט**: ($R$ תחום שלמות סופי) $\Longleftarrow$ ($R$ שדה).

**משפט**: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(n\in\mathbb{P}\right)\iff$ ($\left\langle\mathbb{Z}_n,+,*\right\rangle$ שדה).

**מציין של שדה**: $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)=\min\left\{n\in\mathbb{N}\mid\sum_{i=1}^{n}1_{\mathbb{F}}=0_{\mathbb{F}}\right\}$ ואחרת $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)=0$.

**טענה**: $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)\in\mathbb{P}\cup\left\{0\right\}$.

**הבינום של ניוטון**: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\forall a,b\in\mathbb{F}.\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

**טענה**: יהי $\mathbb{F}$ שדה עבורו $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)=p\neq0$ אזי $\forall a,b\in\mathbb{F}.\forall k\notin\left\{0,p\right\}.\left(\binom{p}{k}\cdot a=0\right)\wedge\left(\left(a+b\right)^p=a^p+b^p\right)$.

**המשפט הקטן של פרמה**: $\forall p\in\mathbb{P}.\forall a\in\mathbb{Z}_p.a^p\equiv a\mod p$.

**קוסט/מחלקה שמאלית**: יהיו $H\le G$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\left\{g*h\mid h\in H\right\}$.

**קוסט/מחלקה ימנית**: יהיו $H\le G$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $H*g=\left\{h*g\mid h\in H\right\}$.

**סימון**: $G/H=\left\{g*H\mid g\in G\right\}$, $H\backslash G=\left\{H*g\mid g\in G\right\}$.

**טענה**: $\left(G/H\right)\wedge\left(H\backslash G\right)$ חלוקות של $G$.

**טענה**: $\left|G/H\right|=\left|H\backslash G\right|$.

**אינדקס**: יהיו $H\le G$ חבורות אזי $\left[G:H\right]=\left|G/H\right|$.

**משפט לגראנז'**: יהיו $H\le G$ חבורות סופיות אזי $\left(\left|H\right|\mid\left|G\right|\right)\wedge\left(\left[G:H\right]=\frac{\left|G\right|}{\left|H\right|}\right)$.

**תת חבורה נורמלית**: תהא $G$ חבורה אזי $N\le G$ המקיימת $\forall g\in G.gN=Ng$.

**סימון**: תהא $G$ חבורה וכן $N\le G$ תת חבורה נורמלית אזי $N\trianglelefteq G$.

**כפל קבוצות**: תהיינה $B,A\le G$ חבורות אזי $A*B=\left\{a*b\mid a\in A\wedge b\in B\right\}$.

**משפט**: יהיו $g_1,g_2\in G$ אזי ($H$ נורמלית) $\iff\left(\left(g_1H\right)*\left(g_2H\right)=\left(g_1*g_2\right)H\right)$.

**טענה**: ($G/H$ חבורה עם כפל קבוצות) $\iff$ ($H$ נורמלית).

**משוואה**: יהיו $f,g$ פונקציות עבורן $\mathrm{dom}\left(f\right)=\mathrm{dom}\left(g\right)$ אזי הטענה $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.

**הגדרה**: תהא $X$ קבוצה עבורה $\mathrm{dom}\left(f\right)=\mathrm{dom}\left(g\right)=X^n$ אזי המשוואה מעל $X$ עם $n$ משתנים.

**קבוצת פתרונות**: תהא $f\in X^B$ ותהא $A\subseteq X$ אזי
$\mathrm{sols}_A\left(f\right)=\left\{a\in A\mid f\left(a\right)=0\right\}$.

**מערכת משוואות**: יהיו $n$ משוואות $f_i\left(x\right)=g_i\left(x\right)$ אזי $E=\left\langle f_1\left(x\right)=g_1\left(x\right),\ldots,f_n\left(x\right)=g_n\left(x\right)\right\rangle$.

**סימון**: תהא מערכת משוואות $E$ אזי $E_i$ תהיה משוואה מספר $i$.

**קבוצת פתרונות של מערכת**: $\mathrm{sols}_A\left(E\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{sols}_A\left(E_i\right)$.

**שקילות**: $E,E'$ מערכות/משוואות עבורן $\mathrm{sols}_A\left(E\right)=\mathrm{sols}_A\left(E'\right)$.

**טענה** : תהא $h$ חח"ע אזי $\text{sols}\left(f\left(x\right)=g\left(x\right)\right)=\text{sols}\left(\left(h\circ f\right)\left(x\right)=\left(h\circ g\right)\left(x\right)\right)$.

**קבוצה אלגברית** : $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת מערכת משוואות $E$ מעל $\mathbb{R}$ עם $n$ משתנים המקיימת $A=\text{sols}\left(E\right)$.

**פונקציה ליניארית** : $f:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}$ המקיימת $\exists a_{1},\ldots,a_{n}\in\mathbb{F}.f\left(x_{1},\ldots,x_{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{i}x_{i}$.

**משוואה ליניארית** : תהא $f$ פונקציה לינארית אזי $f\left(x_{1},\ldots,x_{n}\right)=b$.

**מערכת משוואות ליניארית** : מערכת משוואות שכל המשוואות בה לינאריות.

**סימון** : כדי לייצג מערכת משוואות ליניארית נכתוב

$$\begin{cases}
a_{1,1}x_{1}+\ldots+a_{1,n}x_{n} & =b_{1}\\
\vdots & \vdots\\
a_{m,1}x_{1}+\ldots+a_{m,n}x_{n} & =b_{m}
\end{cases}$$

**משפט** : קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^{2}$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee(\mathbb{R}^{2})$.

**משפט** : קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^{3}$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee$(מישור)$\vee(\mathbb{R}^{3})$.

**סימון** : $\left\langle \alpha_{1},\ldots,\alpha_{n}\right\rangle =\begin{pmatrix}\alpha_{1}\\
\vdots\\
\alpha_{n}
\end{pmatrix}$.

**חיבור $n$יות** : $\begin{pmatrix}\alpha_{1}*\beta_{1}\\
\vdots\\
\alpha_{n}*\beta_{n}
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_{1}\\
\vdots\\
\beta_{n}
\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\alpha_{1}\\
\vdots\\
\alpha_{n}
\end{pmatrix}$.

**כפל $n$יה בסקלר** : יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $\begin{pmatrix}\lambda*\alpha_{1}\\
\vdots\\
\lambda*\alpha_{n}
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{1}\\
\vdots\\
\alpha_{n}
\end{pmatrix}*\lambda$.

**$n$ית ה־$0$** : $\begin{pmatrix}0_{\mathbb{F}}\\
\vdots\\
0_{\mathbb{F}}
\end{pmatrix}=\overline{0}$.

**טענה** : $\forall\overline{v}\in\mathbb{F}^{n}.\forall t\in\mathbb{F}.\left(t*\overline{v}=\overline{0}\right)\iff\left(t=0_{\mathbb{F}}\right)\vee\left(\overline{v}=\overline{0}\right)$.

**משוואה לינארית הומוגנית** : משוואה לינארית $f\left(x_{1},\ldots,x_{n}\right)=0$.

**טענה** : תהא מערכת משוואות לינאריות הומוגניות $E$ אזי $\overline{0}\in\text{sols}\left(E\right)$.

**משפט** : תהא $E$ מערכת משוואות לינאריות הומוגניות אזי $\text{sols}\left(E\right)$ סגורה ביחס לחיבור וקטורים וכפילה בסקלר.

**סימון** : תהא $E$ מערכת משוואות לינאריות אזי $E_{0}$ מערכת המשוואות הלינאריות ההומגניות עם אותן פונקציות לינאריות.

**משפט** : $\forall p\in\text{sols}\left(E\right).\text{sols}\left(E\right)=\text{sols}\left(E_{0}\right)+p$.

**מטריצה**:

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n}\end{pmatrix}$$

**סימון**: $(A)_{i,j}=a_{i,j}$.

**סדר מטריצה**: מטריצה $A$ תקרא מסדר $m\times n$ אם יש לה $m$ שורות ו־$n$ עמודות.

**הגדרה**: קבוצת כל המטריצות מסדר $m\times n$ מעל $R$ תסומן $M_{m\times n}\left(R\right)$.

**סימון**: $C_j\left(A\right)$ הינה העמודה ה־$j$ית, $R_i\left(A\right)$ הינה השורה ה־$i$ית.

**מטריצת ה־$0$**: תהא מטריצה $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$, מתקיים $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\left(A\right)_{i,j}=0_{\mathbb{F}}$.

**מטריצה ריבועית**: $A\in M_{m\times m}\left(\mathbb{F}\right)$.

**מטריצת מקדמים**: עוד סימון אפשרי לייצוג מערכת לינארית של משוואות הינה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m\end{array}\right)$$

**מטריצת המקדמים המצומצמת**:

$$\begin{pmatrix}a_{1,1} & \dots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n}\end{pmatrix}$$

**עמודת המקדמים החופשיים**:

$$\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

**איבר פותח בשורה**: $\min\left(j\in[n]\mid\left(A\right)_{i,j}\neq0\right)$.

**מטריצה מדורגת**: מטריצה המקיימת כי (כל שורות האפסים נמצאות למטה)$\wedge$(בכל שורה שיש בה איבר פותח האיבר הפותח הינו מימין ממש לאיבר הפותח בשורה מעליו).

**מטריצה מדורגת קנונית**: מטריצה מדורגת המקיימת כי (כל האיברים הפותחים הם $1$)$\wedge$(בכל עמודה של איבר פותח שאר אברי העמודה הם $0$).

**שורת סתירה**: שורה מהצורה $(0,\dots,0|b)$ באשר $b\neq 0$.

**אלגוריתם**: תהא $A\in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת קנונית

- אם קיימת שורת סתירה, $\text{sols}(A)=\varnothing$.
- אם לא קיימת שורת סתירה, נניח כי בעמודות $I=\{i_1\dots i_k\}$ לא קיים איבר פותח אזי

$$\text{sols}(A)=\left\{v\in\mathbb{F}^n\;\middle|\;\forall i\notin I.v_i=(A)_{i,n+1}-\sum_{j\in I}\left((A)_{i,j}v_j\right)\right\}$$

**פעולה אלמנטרית**: פונקציה $\varphi:M_{m\times n}(\mathbb{F})\to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).\text{sols}(A)=\text{sols}(\varphi(A))$.

**הפעולות האלמנטריות של גאוס**: (החלפת שורה $\varphi_{R_i\leftrightarrow R_j}(A)$)$\wedge$(הכפלה בסקלר $\varphi_{R_i\to\lambda R_i}(A)$)$\wedge$(חיבור שורה $\varphi_{R_i\to R_i+R_j}(A)$).

**שקילות שורה (ש"ש)**: $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עבורן קיימות פעולות אלמנטריות $\varphi_1\dots\varphi_n$ המקיימות $(\varphi_1\circ\dots\circ\varphi_n)(A)=B$.

**משפט גאוס**: $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

**אלגוריתם גאוס**: $\mathcal{O}(n^2m)$

$$\begin{aligned}
&\text{row}=1\\
&\text{for }(1\leq\text{col}\leq n)\\
&\qquad\text{if }\left(\exists\min(j)\geq\text{row}.\,(A)_{j,\text{col}}\neq 0\right)\\
&\qquad\qquad\text{if }(j\neq\text{row})\\
&\qquad\qquad\qquad R_j\leftrightarrow R_{\text{row}}\\
&\qquad\qquad R_{\text{row}}\to\frac{1}{(A)_{\text{row,col}}}R_{\text{row}}\\
&\qquad\qquad\text{for }(1\leq k\leq m\wedge k\neq\text{row})\\
&\qquad\qquad\qquad R_k\to R_k-(A)_{k,\text{col}}R_{\text{row}}\\
&\qquad\qquad\text{row}+=1
\end{aligned}$$

**מסקנה**: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מדורגת קנונית ללא שורת סתירה בעלת $k$ שורות ללא איבר פותח אזי $|\text{sols}(A)|=|\mathbb{F}|^k$.

**הדלתא של קרונקר**: $\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & else\end{cases}$.

**מטריצת היחידה**: $I_n\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $(I_n)_{i,j}=\delta_{i,j}$.

**משפט**: תהא $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אזי (למערכת $(A|0)$ יש פתרון יחיד) $\iff$ (הצורה הקנונית של $A$ היא $I_n$).

**משפט**: מערכת משוואות לינארית עם $m$ משוואות ו־$n$ נעלמים שקולה למשוואה אחת של $m$־יות.

**צירוף לינארי**: יהיו $\langle\vec{v_1},\dots,\vec{v_n}\rangle\in(\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\sum_{i=1}^n\alpha_i\vec{v_i}$ עבור $\alpha\in\mathbb{F}^n$.

**כפל מטריצה ב־$n$יה**: $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).\forall\vec{v}\in\mathbb{F}^n.A\vec{v}=\sum_{i=1}^n C_i(A)\vec{v_i}$.

**משפט**: $(A\cdot(\underline{v}+\underline{u})=A\cdot\underline{v}+A\cdot\underline{u})\wedge(A\cdot(\alpha\cdot\underline{v})=\alpha\cdot(A\cdot\underline{v}))\wedge$(יש מחלקי אפס).

**מטריצת סיבוב**: $R\left(\theta\right)=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{pmatrix}$.

**מטריצת ונדרמונד**: מטריצה שבא כל עמודה או שורה הינה סדרה הנדסית.

**פולינום לגראנז' ה־$i$**: $P_{i}\left(x\right)=\left(\prod_{k=1}^{j-1}\left(\frac{x-x_{k}}{x_{i}-x_{k}}\right)\right)\left(\prod_{k=j+1}^{n}\left(\frac{x-x_{k}}{x_{i}-x_{k}}\right)\right)$, מתקיים $P_{i}\left(x_{j}\right)=\delta_{i,j}$.

**סימון**: יהי $\left\langle v_{1},\ldots,v_{n}\right\rangle \in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ נגדיר $\begin{pmatrix}| &  & |\\ v_{1} & \ldots & v_{n}\\ | &  & |\end{pmatrix}\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$.

**הגדרה**: נגדיר $e_{j}\in\mathbb{F}^{n}$ כך $\left(e_{j}\right)_{i}=\delta_{j,i}$.

**מטריצת תמורה**: יהי $\sigma\in S_{n}$ נגדיר $\begin{pmatrix}| &  & |\\ e_{\sigma(1)} & \ldots & e_{\sigma(n)}\\ | &  & |\end{pmatrix}=P\left(\sigma\right)$ מתקיים $\left(P\left(\sigma\right)\cdot v\right)_{i}=v_{\sigma^{-1}(i)}$.

**משפט אי הפרישה**: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ וכן $B$ הצורה הקנונית אזי $\left(\exists i.R_{i}\left(B\right)=0\right)\iff\left(\exists b\in\mathbb{F}^{m}.\text{sols}\left(A|b\right)=\varnothing\right)$.

**מסקנה**: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(n<m\right)\Longrightarrow\left(\exists b\in\mathbb{F}^{m}.\text{sols}\left(A|b\right)=\varnothing\right)$.

**סימון**: $M_{n\times n}\left(\mathbb{F}\right)=M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$.

**מסקנה**: $\forall A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right).\left(\forall b\in\mathbb{F}^{n}.\text{sols}\left(A|b\right)\neq\varnothing\right)\Longrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^{n}.\left|\text{sols}\left(A|b\right)\right|=1\right)$.

**הנפרשת/ספאן**: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^{n}\right)^{m}$ נגדיר $\text{span}\left(v\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}v_{i}\mid\alpha\in\mathbb{F}^{m}\right\}$.

**סדרה פורשת**: סדרה $v\in\left(\mathbb{F}^{n}\right)^{m}$ שמקיימת $\text{span}\left(v\right)=\mathbb{F}^{n}$.

**הגדרה**: נגדיר $T:\left(\mathbb{F}^{n}\right)^{m}\times\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ כך $\alpha$ $\begin{pmatrix}| &  & |\\ \vec{v}_{1} & \ldots & \vec{v}_{n}\\ | &  & |\end{pmatrix}=T_{\vec{v}}\left(\alpha\right)$.

**טענה**: ($T_{\vec{v}}$ על) $\iff$ ($\vec{v}$ פורשת).

**סדרה בת"ל (בלתי תלויה לינארית)**: סדרה $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ המקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^{n}.\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}=0\right)\iff\left(\alpha=0\right)$.

**בסיס**: $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ בת"ל ופורשת.

**טענה**: יהיו $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ ונגדיר $A=\begin{pmatrix}| &  & |\\ v_{1} & \ldots & v_{n}\\ | &  & |\end{pmatrix}$

- ($v$ פורשת) $\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\left|\text{sols}\left(A\underline{x}=b\right)\right|>0\right)$.
- ($v$ בת"ל) $\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\left|\text{sols}\left(A\underline{x}=b\right)\right|<2\right)$.
- ($v$ בסיס) $\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\left|\text{sols}\left(A\underline{x}=b\right)\right|=1\right)$.

**טענה**: ($T_{\vec{v}}$ חח"ע) $\iff$ ($\vec{v}$ בת"ל).

**מרחב התלויות הלינאריות**: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ אזי $\text{LD}\left(v\right)=\left\{ \alpha\in\mathbb{F}^{n}\mid\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}=0\right\}$.

**הערה**: ($v$ בת"ל) $\iff\left(\text{LD}\left(v\right)=\left\{ 0\right\} \right)$.

**הנפרשת/ספאן**: תהא $K\subseteq\mathbb{F}^{n}$ אזי $\text{span}\left(K\right)=\left\{ u\in\mathbb{F}^{n}\mid\exists m\in\mathbb{N}_{+}.\exists v\in K^{m}.\exists\alpha\in\mathbb{F}^{m}.u=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}v_{i}\right\} \cup\left\{ 0\right\}$.

**משפט**: ($v$ בת"ל $\Longleftarrow$ כל תת סדרה של $v$ בת"ל)$\wedge$($v$ פורשת $\Longleftarrow$ כל על סדרה של $v$ פורשת).

**משפט**: תהא $v\in\left(\mathbb{F}^{m}\right)^{n}$ בת"ל וסדרה $u\in\mathbb{F}^{m}$ מתקיים ($v^{\frown}\left\langle u\right\rangle$ בת"ל) $\iff\left(u\notin\text{span}\left(v\right)\right)$.

**טענה**: $\forall v \in (\mathbb{F}^m)^n .\forall u \in \mathbb{F}^m. (\text{span}(v) = \text{span}(v ^\frown \langle u \rangle)) \iff (u \in \text{span}(v))$.

**טענה**: $\forall v \in (\mathbb{F}^m)^n .\forall i \in [n] . \left(v_i \in \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)\right) \iff (\exists x \in \text{LD}(v) .x_i \neq 0)$.

**משפט**: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ התב"ש

- $v$ בת"ל.
- $\forall i \in [n] .v_i \notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)$.
- $\forall i \in [n] .v_i \notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[i-1]}}\right)$.

**משפט**: מעל $\mathbb{F}^n$ פחות מ־$n$ $n$־יות לא פורשות.

**משפט**: מעל $\mathbb{F}^n$ יותר מ־$n$ $n$־יות ת"ל.

**מסקנה**: מעל $\mathbb{F}^n$ לכל בסיס $B$ מתקיים $|B| = n$.

**משפט 2 מתוך 3**: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$, כל שניים מהשלושה שקולים

- $v$ בת"ל.
- $v$ פורשת.
- $n = m$.

**המשפט היסודי של האלגברה הלינארית**: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- לכל $b$ למערכת $Ax = b$ קיים פתרון.
- עמודות $A$ פורשות.
- קיים $b$ למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות $A$ בת"ל.
- לכל $b$ למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות $A$ בסיס.

**כפל מטריצות**: $\forall \langle A, B\rangle \in M_{k\times m}(\mathbb{F}) \times M_{m\times n}(\mathbb{F}) .\forall i \in [k] .\forall j \in [m] . (AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^{m} (A)_{i,t} (B)_{t,j}$.

**נוסחה**: $(BA)_{i,j} = R_i(B) \cdot C_j(A)$.

**טענה**: $R_i(YX) = R_i(Y)X$, $C_i(YX) = YC_i(X)$.

**כפל מטריצה בסקלר**: $(\alpha A)_{i,j} = \alpha (A)_{i,j}$.

**מטריצה סקלארית**: $\alpha I_n$.

**טענה**: $A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

**טענה**: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . (AI_n = A) \wedge (I_m A = A)$.

**מסקנה**: $\langle M_n(\mathbb{F}), \cdot\rangle$ מונואיד.

**מטריצות מתחלפות**: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $AB = BA$.

**שחלוף**: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . \left(A^T\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$.

**הערה**: $R_i\left(A^T\right) = C_i(A)$.

**טענה**: $\left(A^T\right)^T = A$, $(\alpha A)^T = \alpha\left(A^T\right)$, $(AB)^T = B^T A^T$.

**מטריצה סימטרית**: $A^T = A$.

**מטריצה אנטי סימטרית**: $A^T = -A$.

**חיבור מטריצות**: $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . (A + B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{ij}$.

**טענה**: $\langle M_{m\times n}(\mathbb{F}), +\rangle$ חבורה אבלית וסגורה לכפל בסקלר.

**טענה**: $(A(B + C) = AB + AC) \wedge \left((A + B)^T = A^T + B^T\right)$.

**הפיכות**: תהא $A_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- הפיכה משמאל: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).BA=I_{n}$.
- הפיכה מימין: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).AB=I_{m}$.
- הפיכה: (הפיכה משמאל)$\wedge$(הפיכה מימין).

**טענה**: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\forall B,C\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).\left(AB=I_{m}\right)\wedge\left(CA=I_{n}\right)\implies B=C$.

**מסקנה**: אם קיימת הופכית היא יחידה.

**סימון**: ההופכית של $A$ היא $A^{-1}$.

**מטריצה אלכסונית**: $\left(A\right)_{i,j}=\begin{cases} \lambda_{i} & i=j\\ 0 & else \end{cases}$.

**משפט**: מטריצה בעלת שורת עמודות/שורות אפסים לא הפיכה.

**הערה**: $R\left(-\theta\right)R\left(\theta\right)=I_{2}=R\left(\theta\right)R\left(-\theta\right)$.

**טענה**: $\left(\left(A^{-1}\right)^{-1}=A\right)\wedge\left(\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}\right)\wedge\left(\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\right)$.

**משפט**: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- ($A$ הפיכה מימין) $\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\text{sols}\left(A|b\right)\neq\varnothing\right)$.
- ($A$ הפיכה משמאל) $\iff\left(\left|\text{sols}\left(A|0\right)\right|\le1\right)$.
- ($A$ הפיכה) $\iff\left(\forall b\in\mathbb{F}^{m}.\left|\text{sols}\left(A|b\right)\right|=1\right)$.

**מסקנה**: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- ($A$ הפיכה מימין) $\Longleftarrow$ (עמודות $A$ פורשות)$\wedge\left(m\le n\right)$.
- ($A$ הפיכה משמאל) $\Longleftarrow$ (עמודות $A$ בת"ל)$\wedge\left(m\ge n\right)$.
- ($A$ הפיכה) $\Longleftarrow$ (עמודות $A$ בסיס)$\wedge\left(m=n\right)$.

**המשפט היסודי של האלגברה הלינארית**: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ התב"ש

- $A$ הפיכה משמאל.
- $A$ הפיכה.
- $A$ הפיכה מימין.
- $A^{T}$ הפיכה.

**טענה**: תהא $\varphi$ פונקציה אלמנטרית אזי $\varphi\left(AB\right)=\varphi\left(A\right)B$.

**מטריצה אלמנטרית**: $E_{\varphi}=\varphi\left(I_{m}\right)$.

**מסקנה**: $\varphi\left(A\right)=E_{\varphi}A$.

**טענה**: $E_{\varphi}^{-1}=R_{\varphi^{-1}}$.

**אלגוריתם**: $\left(A\mid I\right)\sim\left(I\mid A^{-1}\right)$.

**מטריצה נילפוטנטית**: $\exists m\in\mathbb{N}.A^{m}=0$.

**המשפט היסודי של האלגברה הלינארית**: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי ($A$ הפיכה) $\iff\left(A\sim I\right)$.

**מסקנה**: ($A,B$ הפיכות) $\iff$ ($AB$ הפיכה).

**הגדרה**: $\text{Par}\left(\left\{ v_{1},\ldots,v_{m}\right\} \right)=\left\{ \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}v_{i}\mid\alpha\in\left[0,1\right]^{m}\right\}$.

**טענה**: $A$ הפיכה $\iff\text{Vol}\left(\text{Par}\left(A\right)\right)\neq0$ (הנפח של המקבילון).

**לינארית על פי שורה**: פונקציה שמקיימת
$$f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i+R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}.$$

**פונקציית נפח**: פונקציה $\mathcal{N}:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ (לינארית על פי שורה)$\wedge(\mathcal{N}(I)=1)\wedge$ $((\exists i\neq j.R_i(A)=R_j(A))\implies\mathcal{N}(A)=0)$.

**טענה**: אם ב־$A$ יש שורת אפסים אז $\mathcal{N}(A)=0$.

**משפט**: תהא $\varphi$ פעולה אלמנטרית אזי
$$\mathcal{N}(\varphi(A))=\mathcal{N}(A)\cdot\begin{cases}\lambda & \varphi=f_{R_i\to\lambda R_i}\\ -1 & \varphi=f_{R_i\leftrightarrow R_j}\\ 1 & \varphi=f_{R_i\to R_i+\lambda R_j}\end{cases}.$$

**מסקנה**: יהיו $A,B$ שקולות שורה אזי $(\mathcal{N}(A)=0)\iff(\mathcal{N}(B)=0)$.

**מסקנה**: ($A$ הפיכה) $\iff(\mathcal{N}(A)\neq0)$.

**מסקנה**: $\mathcal{N}(E_\varphi A)=\mathcal{N}(E_\varphi)\mathcal{N}(A)$.

**משפט**: יהיו $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ פונקציות נפח אזי $\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_2$.

**מסקנה**: $\mathcal{N}(AB)=\mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.

**מסקנה**: $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}\left(A^T\right)$.

**מינור**: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $i,j\in[n]$ אזי $A_{i,j}\in M_{n-1}(\mathbb{F})$ כך שמתקיים
$$(A_{i,j})_{r,s}=\begin{cases}(A)_{r,s} & (r\le i-1)\wedge(s\le j-1)\\ (A)_{r+1,s} & (r\ge i)\wedge(s\le j-1)\\ (A)_{r,s+1} & (r\le i-1)\wedge(s\ge j)\\ (A)_{r+1,s+1} & (r\ge i)\wedge(s\ge j)\end{cases}$$

**דטרמיננטה**: פונקציית הנפח היחידה תיקרא $\det^n$.

**הערה**: $\forall A\in M_1(\mathbb{F}).\det(A)=(A)_{1,1}$.

**פיתוח דטרמיננטה על פי עמודה**: יהי $j\in[n]$ אזי $\det_j^n(A)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+j}(A)_{k,j}\det_j^{n-1}(A_{k,j})$.

**מסקנה**: $\forall j,i\in[n].\det_j^n(A)=\det_i^n(A)$.

**סימון**: $\det_j^n=\det$.

**סימון**: $\det(A)=|A|$.

**פיתוח דטרמיננטה על פי שורה**: יהי $i\in[n]$ אזי $\det(A)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+i}(A)_{i,k}\det(A_{i,k})$.

**מטריצה מצורפת**: $(\operatorname{adj}(A))_{i,j}=(-1)^{i+j}|A_{j,i}|$.

**טענה**: $\operatorname{adj}\left(A^T\right)=(\operatorname{adj}(A))^T$.

**משפט**: $A\cdot\operatorname{adj}(A)=|A|I=\operatorname{adj}(A)\cdot A$.

**מסקנה**: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A)$.

**כלל קרמר**: תהא מערכת משוואות $Ax=b$ כאשר $A$ הפיכה אזי $x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$ כאשר $C_j\left(A_i\right)=\begin{cases} b & i=j\\ C_j\left(A\right) & else \end{cases}$.

**הגדרה**: תהא $\sigma\in S_n$ נגדיר יחס שקילות $a\sim_{\text{cycle}}b\iff\exists i\in\mathbb{N}.\sigma^i\left(a\right)=b$.

**ציקלוס/מחזור**: $\left[a\right]_{\sim_{\text{cycle}}}$.

**פירוק תמורה לציקלוסים זרים**: כל תמורה ניתנת לפירוק יחיד של ציקלוסים.

**חילוף**: $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}\left(x\right)=\begin{cases} j & x=i\\ i & x=j\\ x & else \end{cases}$.

**טענה**: כל מחזור ניתן לכתיבה כהרכבה של חילופים.

**מסקנה**: כל תמורה ניתנת לכתיבה כהרכבה של חילופים.

**טענה**: $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$.

**סימון**: $\text{sign}\left(\sigma\right)=\det\left(P\left(\sigma\right)\right)$.

**טענה**:

- יהיו $E_{R_i\leftrightarrow R_j},\ldots,E_{R_\lambda\leftrightarrow R_\theta}$ אזי $E_{R_i\leftrightarrow R_j}\cdot\ldots\cdot E_{R_\lambda\leftrightarrow R_\theta}=P\left(\sigma\right)$.
- אם $\left(P\left(\sigma\right)\right)_{i,j}=1$ אז $P\left(\sigma\right)_{i,j}$ מטריצת תמורה.
- $\text{sign}\left(\sigma\right)=\pm1$.

**מטריצת תמורה זוגית**: $\text{sign}\left(\sigma\right)=1$.

**מטריצת תמורה איזוגית**: $\text{sign}\left(\sigma\right)=-1$.

**טענה**: ($Id$ זוגית)$\wedge$($\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ אי זוגית).

**טענה**: $P\left(\sigma\tau\right)=P\left(\sigma\right)P\left(\tau\right)$.

**מסקנה**: $\text{sign}\left(\sigma\tau\right)=\text{sign}\left(\sigma\right)\text{sign}\left(\tau\right)$.

**אי סדר של תמורה**: זוג סדור $\langle i,j\rangle$ שמקיים $\left(i<j\right)\wedge\left(\sigma\left(i\right)>\sigma\left(j\right)\right)$.

**אי הסדרים של איבר**: $z\left(\sigma,i\right)=\left|\left\{ j>i\mid\sigma\left(i\right)>\sigma\left(j\right)\right\} \right|$.

**אי הסדרים של תמורה**: $N\left(\sigma\right)=\left|\left\{ \langle i,j\rangle\mid\left(j>i\right)\wedge\left(\sigma\left(i\right)>\sigma\left(j\right)\right)\right\} \right|$.

**משפט**: $\text{sign}\left(\sigma\right)=\left(-1\right)^{N\left(\sigma\right)}$.

**דטרמיננטה על פי תמורה**: $\left|A\right|=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\text{sign}\left(\sigma\right)\prod_{i=1}^{n}\left(A\right)_{i,\sigma\left(i\right)}\right)$.

**מסקנה**: $\forall A\in M_n\left(\mathbb{Z}\right).\left|A\right|\in\mathbb{Z}$.

**מסקנה**: $\forall A\in M_n\left(\mathbb{Z}\right).\left(\left\Vert A\right\Vert =1\right)\implies\left(A^{-1}\in M_n\left(\mathbb{Z}\right)\right)$.

**מסקנה**: $\det\left(A\right)\in\mathbb{F}\left[x_1,\ldots,x_{n^2}\right]$.

**נורמה**: יהי $v\in\mathbb{R}^n$ נגדיר $\left\Vert v\right\Vert =\sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}$.

**טענה**: תהא $f\in\mathbb{R}\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ אזי $f$ רציפה.

**מסקנה**: $\det$ רציפה.

**מסקנה**: $\forall A\in M_n^{\times}\left(\mathbb{F}\right).\exists\varepsilon.\forall B\in M_n\left(\mathbb{F}\right).\left(\forall i,j.\left(B\right)_{i,j}\in\left(\left(A\right)_{i,j}-\varepsilon,\left(A\right)_{i,j}+\varepsilon\right)\right)\implies B\in M_n^{\times}\left(\mathbb{F}\right)$.

**מרחב וקטורי (מ"ו)**: $\langle V,+,*\rangle$ המקיים

- $\langle V,+\rangle$ חבורה אבלית.
- $*:\mathbb{F}\times V\to V$ המקיימת
  - $\forall v\in V.1_{\mathbb{F}}*v=v$.

– $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v\in V.\left(\alpha*\beta\right)*v=\alpha*\left(\beta*v\right)$.

• $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v,u\in V.\left(\left(\alpha+\beta\right)*v=\alpha*v+\beta*v\right)\wedge\left(\alpha*\left(v+u\right)=\alpha*v+\alpha*u\right)$.

**טענה**: $\left(\alpha*v=0_{V}\iff\left(\alpha=0_{\mathbb{F}}\right)\vee\left(v=0_{V}\right)\right)\wedge\left(-1_{\mathbb{F}}*v=-v\right)\wedge\left(\forall v\in V.0_{\mathbb{F}}*v=0_{V}\right)$
$\wedge\left(\forall\alpha\in\mathbb{F}.\alpha\cdot0_{V}=0_{V}\right)$.

**תת מרחב וקטורי (תמ"ו)**: קבוצה $\mathcal{U}\subseteq V^{n}$ המקיימת $\left(0\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(\forall u,v\in\mathcal{U}.u+v\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(\forall v\in\mathcal{U}.\forall a\in\mathbb{F}.a\cdot v\in\mathcal{U}\right)$.

**טענה**: יהיו $U,V$ תמ"ו אזי $U\cap V$ תמ"ו.

**צירוף לינארי**: יהיו $v\in V^{n}$, צירוף לינארי של $v$ הינו ביטוי מהצורה $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}$ בעבור $\alpha\in\mathbb{F}^{n}$.

**הנפרשת/ספאן**: תהא $v\in V^{m}$ נגדיר $\text{span}\left(v\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i}v_{i}\mid\alpha\in\mathbb{F}^{m}\right\}$.

**סדרה בת"ל**: סדרה $v\in V^{n}$ שמקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^{n}.\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}=0\iff\alpha=0$.

**בסיס**: $v\in V$ בת"ל ופורשת.

**מרחב התלויות הלינאריות**: תהא $v\in V^{n}$ נגדיר $\text{LD}\left(v\right)=\left\{ \alpha\in\mathbb{F}^{n}\mid\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}=0\right\}$.

**טענה**: $\left(A\subseteq B\implies\text{span}\left(A\right)\subseteq\text{span}\left(B\right)\right)\wedge\left(A\subseteq\text{span}\left(B\right)\implies\text{span}\left(A\right)\subseteq\text{span}\left(B\right)\right)$.

**טענה**: תהא $K\subseteq V$ אזי $\text{span}\left(K\right)$ הינו התמ"ו הקטן ביותר ביחס ההכלה המכיל את $K$.
$\wedge\left(\text{span}\left(\text{span}\left(A\right)\right)=\text{span}\left(A\right)\right)\wedge\left(\text{span}\left(\varnothing\right)=\left\{ 0\right\} \right)$.

**משפט ההחלפה של ריס**: תהא $v\in V^{n}$ פורשת ו־$u\in V^{m}$ בת"ל

• $m\le n$.

• קיימים $1\le i_{1}\ldots i_{m}\le n$ כך שהקבוצה $\left\{ u_{1}\ldots u_{k}\right\} \cup\left\{ v_{j}\mid j\notin\left\{ i_{1}\ldots i_{k}\right\} \right\}$ פורשת.

**מסקנה**: יהיו $A,B$ בסיסים אזי $\left|A\right|=\left|B\right|$.

**מימד**: יהי $B$ בסיס $\dim_{\mathbb{F}}\left(V\right)=\left|B\right|$.

**נ"ס (נוצר סופית)**: מ"ו $V$ שמקיים $\exists v\in V^{k}.\text{span}\left(v\right)=V$.

**משפט**: $V$ נ"ס $\Longleftarrow$ קיים בסיס ל־$V$.

**מסקנה**: יהי $V$ נ"ס

• פחות מ־$\dim\left(V\right)$ וקטורים לא פורשים.

• יותר מ־$\dim\left(V\right)$ וקטורים ת"ל.

**משפט 2 מתוך 3**: יהי $V$ מ"ו נ"ס ויהי $B\in V^{k}$, כל שניים מהשלושה שקולים

• $B$ בת"ל.

• $B$ פורשת.

• $\dim\left(V\right)=k$.

**משפט**: תהא $V$ נ"ס, לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים כי $U$ נ"ס.

**מסקנה**: לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים $\dim\left(U\right)\le\dim\left(V\right)$.

**משפט**: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $\left(U\subseteq W\right)\wedge\left(\dim\left(U\right)=\dim\left(W\right)\right)\iff U=W$.

**סכום מרחבים וקטורים**: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $U+W=\left\{ u+w\mid u\in U\wedge w\in W\right\}$ תמ"ו של $V$.

**משפט**: אם $U=\text{span}\left(A\right)$, $W=\text{span}\left(B\right)$ אז $W+U=\text{span}\left(A\cup B\right)$.

**מסקנה**: אם $U,W,T\subseteq V$ תמ"ו אז $U+W\subseteq T\implies U,W\subseteq T$.

**משפט**: אם $U\cap W=\left\{ 0\right\}$ אז לכל בסיס $B$ של $U$, לכל בסיס $C$ של $W$ מתקיים כי $B^{\frown}C$ בסיס של $U+W$.

**סכום ישר**: אם $U\cap W=\left\{ 0\right\}$ אז $U\oplus W=U+W$.

**משפט האפיון של סכום ישר**: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו התב"ש

- $U\oplus W$.
- לכל בסיס $B$ של $U$, לכל בסיס $C$ של $W$ מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U+W$.
- $\forall k\in U+W.\exists!\left\langle u,w\right\rangle \in U\times W.u+w=k$.

**מסקנה**: $\dim\left(U\oplus W\right)=\dim\left(U\right)+\dim\left(W\right)$.

**משפט המימד הראשון**: יהיו $U,W$ תמ"ו אזי $\dim\left(U+W\right)=\dim\left(U\right)+\dim\left(W\right)-\dim\left(U\cap W\right)$.

**קואורדינטות**: יהי $b\in V^{n}$ בסיס ויהי $v\in V$ אזי $\iota\alpha\in\mathbb{F}^{n}.v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}b_{i}$.

**סימון**: $\left[v\right]_{B}=\iota\alpha\in\mathbb{F}^{n}.v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}B_{i}$.

**העתקת קואורדינטות**: יהי $B$ בסיס נגדיר $Q_{B}:V\to\mathbb{F}^{\dim(V)}$ כך $Q_{B}\left(v\right)=\left[v\right]_{B}$.

**משפט**:

- $Q_{B}^{-1}\left(\alpha\right)=\sum_{i=1}^{\dim(V)}\alpha_{i}b_{i}$.
- $\left(Q\left(\alpha v\right)=\alpha Q\left(v\right)\right)\wedge\left(Q\left(v+w\right)=Q\left(v\right)+Q\left(w\right)\right)$.
- $v_{1}\ldots v_{k}$ בת"ל $\iff$ $Q_{B}\left(v_{1}\right)\ldots Q_{B}\left(v_{k}\right)$ בת"ל.
- $v\in\text{span}\left(v_{1}\ldots v_{k}\right)\iff Q_{B}\left(v\right)\in\text{span}\left(Q_{B}\left(v_{1}\right)\ldots Q_{B}\left(v_{k}\right)\right)$.

**מרחב העמודות**: $\mathcal{C}\left(A\right)=\text{span}\left(\left\{ C_{i}\left(A\right)\mid i\in\left[n\right]\right\} \right)$.

**מרחב השורות**: $\mathcal{R}\left(A\right)=\text{span}\left(\left\{ R_{i}\left(A\right)\mid i\in\left[m\right]\right\} \right)$.

**טענה**: $\mathcal{C}\left(A\right)=\left\{ Ax\mid x\in\mathbb{F}^{n}\right\} =\text{Im}\left(T_{A}\right)$.

**טענה**: $\mathcal{R}\left(AB\right)\subseteq\mathcal{R}\left(B\right)$, $\mathcal{C}\left(AB\right)\subseteq\mathcal{C}\left(A\right)$.

**משפט**: $\dim\left(\mathcal{C}\left(A\right)\right)=\dim\left(\mathcal{R}\left(A\right)\right)$.

**דרגה**: $\text{rank}\left(A\right)=\dim\left(\mathcal{C}\left(A\right)\right)$.

**מרחב האפסות**: $\mathcal{N}\left(A\right)=\dim\left(\text{sols}\left(A\right)\right)$.

**טענה**: $\text{rank}\left(A\right)\le\min\left(n,m\right)$, $\text{rank}\left(AB\right)\le\min\left(\text{rank}\left(A\right),\text{rank}\left(B\right)\right)$, $\text{rank}\left(A+B\right)\le\text{rank}\left(A\right)+\text{rank}\left(B\right)$.

**טענה**: אם $A$ הפיכה אזי $\text{rank}\left(AB\right)=\text{rank}\left(B\right)$.

**המשפט היסודי של הדירוג**: יהיו $A,A'\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ש"ש

- $\text{sols}\left(A\right)=\text{sols}\left(A'\right)$.
- $\mathcal{R}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(A'\right)$.
- $\text{rank}\left(A\right)=\text{rank}\left(A'\right)$.

**טענה**: $\text{sols}\left(A\right)=\text{LD}\left(\left\{ C_{i}\left(A\right)\mid i\in\left[n\right]\right\} \right)$.

**מסקנה**: תהא $A$ מטריצה מדורגת קנונית אזי אין איבר פותח בעמודה ה־$i$ $\iff$ $C_{i}\left(A\right)\in\text{span}\left(C_{1}\left(A\right),\ldots,C_{i-1}\left(B\right)\right)$.

**משפט**: יהיו $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו $A',B'$ המטריצות הקנוניות שלהם בהתאמה, התב"ש

- $A\sim B$.
- $A'=B'$.
- $\mathcal{R}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(B\right)$.

**המשפט היסודי של האלגברה הלינארית**: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $\left(\text{rank}\left(A\right)=n\right)\iff\left(A\text{ הפיכה}\right)$.

**משפט הדרגה והאפסות**: $n=\text{rank}\left(A\right)+\mathcal{N}\left(A\right)$.

**פונקציה מטריציונית**: $f:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}^{m}$ שמקיימת $\exists A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).f=T_{A}$.

**הגדרה**: $\ker\left(T_{A}\right)=T_{A}^{-1}\left[\left\{ 0\right\} \right]=\text{sols}\left(A\right)$.

**טענה**: $A=B\iff\forall A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).T_{A}=T_{B}$.

**טענה**: $T_A$ לינארית.

**העתקה לינארית/טרנספורמציה לינארית (ט"ל)**: יהיו $U,W$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $T:V\to U$ שמקיימת כי $T$ לינארית.

**טענה**: תהא $T:V\to U$ ט"ל מתקיים $(T(0)=0)\wedge(T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(v_i))$.

**טענה**: תהא $T:U\to W$ ט"ל ותהא $S:V\to U$ ט"ל אזי $T\circ S$ ט"ל.

**משפט**: תהא $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ אזי $T$ לינארית $\iff$ $T$ מטריציונית.

**משפט**: תהא $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ ט"ל אזי $C_i(A)=T(\delta_i)$.

**טענה**: $\ker(T)$, $\text{Im}(T)$ תמ"ו.

**טענה**: תהא $T$ ט"ל אזי

- $\langle T(v_1)\dots T(v_n)\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\langle v_1\dots v_n\rangle$ בת"ל.
- $\langle v_1\dots v_n\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\langle T(v_1)\dots T(v_n)\rangle$ פורשת את $\text{Im}(T)$.

**למה**: תהא $T$ ט"ל אזי

- נניח כי $T$ חח"ע, $\langle v_1\dots v_n\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow$ $\langle T(v_1)\dots T(v_n)\rangle$ בת"ל.
- נניח כי $T$ על, $\langle v_1\dots v_n\rangle$ פורשת $\Longleftarrow$ $\langle T(v_1)\dots T(v_n)\rangle$ פורשת.

**מסקנה**: תהא $T$ ט"ל הפיכה ויהי $\langle b_1\dots b_n\rangle$ בסיס אזי $\langle T(b_1)\dots T(b_n)\rangle$ בסיס.

**איזומורפיזם בין מרחבים וקטורים**: $T:V\to U$ ט"ל הפיכה.

**טענה**: תהא $T:V\to U$ ט"ל

- $T$ חח"ע $\iff$ $\ker(T)=\{0\}$.
- $T$ על $\iff$ $\dim(\text{Im}(T))=\dim(U)$.
- $\forall u\in\text{Im}(T).\forall v\in T^{-1}[\{u\}].T^{-1}[\{u\}]=v+\ker(T)$.

**משפט המימד השני**: תהא $T:V\to U$ ט"ל $\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(\text{Im}(T))$.

**משפט 2 מתוך 3**: תהא $T:V\to U$ ט"ל, כל שניים מהשלושה שקולים

- $T$ חח"ע.
- $T$ על.
- $\dim(V)=\dim(U)$.

**טענה**: $T:V\to U$ איזומורפיזם $\Longleftarrow$ $\dim(V)=\dim(U)$.

**משפט**: $T$ איזומורפיזם $\iff$ $T^{-1}$ איזומורפיזם.

**משפט**: לכל $V$ מ"ו נ"ס מתקיים $V\cong\mathbb{F}^{\dim(V)}$.

**מסקנה**: יהיו $V,W$ מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $V\cong W$ $\iff$ $\dim(V)=\dim(W)$.

**משפט**: יהי $b\in V^n$ בסיס ויהי $c\in U^n$ אזי $T:V\to U$ המוגדרת $T(x)=\sum_{i=1}^{n}([x]_b)_i\cdot c_i$ היא הט"ל היחידה שמקיימת $\forall i\in[n].T(b_i)=c_i$.

**טענה**: יהיו $T_1,T_2:V\to U$ ט"ל ויהי $b$ פורשת את $V$ אזי $T_1=T_2$ $\Longleftarrow$ $\forall i\in[n].T_1(b_i)=T_2(b_i)$.

**מרחב העתקות הלינאריות**: $\text{Hom}(V,U)=\{T\in V\to U\mid T \text{ ט"ל}\}$.

**טענה**: $\text{Hom}(V,U)$ מ"ו מעל השדה של $V,U$.

**הערה**: $\forall T_1,T_2\in\text{Hom}(V,U).T_1\circ T_2\in\text{Hom}(V,U)$.

**משפט**: $\dim(\text{Hom}(V,U))=\dim(V)\cdot\dim(U)$.

**טענה**: יהיו $b,c$ בסיסים של $V,U$ בהתאמה לכן $\left\{T_{i,j}(b_k)=\begin{cases}c_j & i=k\\ 0 & else\end{cases}\,\middle|\, i,j\in[n]\right\}$ בסיס של $\text{Hom}(V,U)$.

**סימון**: $\text{Hom}(V) = \text{Hom}(V,V)$.

**משפט**: תהא $T \in \text{Hom}(V,U)$ ויהיו $B,C$ בסיסים של $V,U$ בהתאמה לכן $Q_C \circ T \circ Q_B^{-1}$ מטריציונית.

**מטריצה מייצגת**: המטריצה $A = [T]_C^B$ עבורה $Q_C \circ T \circ Q_B^{-1} = T_A$.

**סימון**: $[T]_B = [T]_B^B$.

**מסקנה**: $C_i\left([T]_C^B\right) = [T(B_i)]_C$.

**מסקנה**: $[T]_C^B \cdot [v]_B = [T(v)]_C$.

**הטלה**: יהיו $V = U \oplus W$ מ"ו אזי $P_{(U,W)} : V \to V$ המוגדרת $P_{(U,W)}(v) = \iota u \in U.\exists w \in W.u + w = v$.

**טענה**: $P_{(U,W)}$ ט"ל, $\text{Im}\left(P_{(U,W)}\right) = U$, $\ker\left(P_{(U,W)}\right) = W$, $P_{(U,W)}^2 = P_{(U,W)}$.

**הערה**: $[T]_C^B \in M_{\dim(U)\times\dim(V)}(\mathbb{F})$.

**משפט**:

- $(Q_B)_{\restriction_{\ker(T)}} : \ker(T) \to \text{sols}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.
- $(Q_C)_{\restriction_{\text{Im}(T)}} : \text{Im}(T) \to \mathcal{C}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.

**מסקנה**: $\mathcal{N}\left([T]_C^B\right) = \dim(\ker(T))$, $\text{rank}\left([T]_C^B\right) = \dim(\text{Im}(T))$.

**טענה**: תהא $T \in \text{Hom}(V,U)$ אזי $T$ הפיכה $\iff$ $[T]_C^B$ הפיכה.

**משפט**: $T \in \text{Hom}(V,U)$, $S \in \text{Hom}(U,W)$ אז $[S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$.

**מסקנה**: $\left([T]_C^B\right)^{-1} = [T^{-1}]_B^C$.

**מטריצת שינוי קואורדינטות**: $[Id_V]_C^B$.

**הערה**: $C_i\left([Id]_C^B\right) = [B_i]_C$.

**מסקנה**: $[T]_C^B = [Id]_C^E \cdot [T]_E^D \cdot [Id]_D^B$.

**דמיון מטריצות**: $\forall A,B \in M_n(\mathbb{F}).A \sim B \iff \exists P \in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BP = A$.

**משפט**: יהיו $A,B \in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- $B \sim A$.
- $\forall T \in \text{Hom}(V,U).A = [T]_D^C \implies \exists C',D'.B = [T]_{D'}^{C'}$.
- $\exists T \in \text{Hom}(V,U).\left([T]_C = A\right) \wedge \left([T]_D = B\right)$.

**טענה**: $A,B$ דומות אז $\det(A) = \det(B)$.

**הגדרה**: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $\det(T) = \det([T]_B)$.

**עקבה**: $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}$.

**טענה**: $\forall A,B \in M_n(\mathbb{F}).\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.

**מסקנה**: $A,B$ דומות $\Longleftarrow$ $\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$.

**הגדרה**: תהא $T \in \text{Hom}(V)$ אזי $\text{trace}(T) = \text{trace}([T]_B)$.

**מטריצות מתאימות**: $\forall A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{F}).A \sim_{\text{green}} B \iff \exists P,Q \in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BQ^{-1} = A$.

**הערה**: $A,B$ דומות $\Longleftarrow$ $A,B$ מתאימות.

**טענה**: $\text{rank}A = \text{rank}B \iff A,B$ מתאימות.

**הגדרה**: $[*]_C^B : \text{Hom}(V,W) \to M_{\dim(V)\times\dim(W)}(\mathbb{F})$ כך $[*]_C^B(T) = [T]_C^B$.

**משפט**: $[*]_C^B$ איזומורפיזם.

**אלגברה**: $\langle V,+,\cdot,*\rangle$ שמקיים $(\langle V,+,\cdot\rangle$ מ"ו$)\wedge(* : V\times V \to V)$.

**אלגברת מטריצות** : המרחב $M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ עם פעולת כפל מטריצות.

**אלגברת Hom** : המרחב $\text{Hom}\left(V,W\right)$ עם פעולת ההרכבה.

**איזומורפיזם בין אלגברות** : $T:A\to B$ ט"ל הפיכה שמקיימת $\forall\alpha,\beta\in A.T\left(\alpha*\beta\right)=T\left(\alpha\right)*T\left(\beta\right)$.

**משפט** : אם $\left[*\right]_{B}:\text{Hom}\left(V\right)\to M_{\dim\left(V\right)}\left(\mathbb{F}\right)$ אז $\left[*\right]_{B}$ איזומורפיזם בין אלגברות.

**מטריצת בלוקים** :

$$\left(\begin{array}{ccc}
A_{1,1} & \dots & A_{1,n}\\
\vdots &  & \vdots\\
A_{m,1} & \dots & A_{m,n}
\end{array}\right)$$

**הערה** : מספר העמודות והשורות בין מטריצות צמודות חייב להיות שווה.

**סימון** :

$$\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}=\left(\begin{array}{ccc}
A_{1,1} & \dots & A_{1,n}\\
\vdots &  & \vdots\\
A_{m,1} & \dots & A_{m,n}
\end{array}\right)$$

**כפל מטריצת בלוקים** : $\left(AB\right)_{i,j}=\sum_{t=1}^{m}A_{i,t}B_{t,j}$.

**מטריצת בלוקים ריבועית** : מטריצת בלוקים כך שמקיימת $\forall i.A_{i,i}\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$.

**מטריצת בלוקים משולשית עליונה** : $\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\le\ell\\0 & else\end{cases}$.

**מטריצת בלוקים משולשית תחתונה** : $\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,\ell} & k\ge\ell\\0 & else\end{cases}$.

**מטריצת בלוקים אלכסונית** : מטריצת בלוקים משולשית תחתונה ועליונה.

**הגדרה** : $\left(\text{Diag}\left(A_{1,1},\dots,A_{n,n}\right)\right)_{k,\ell}=\begin{cases}A_{k,k} & k=\ell\\0 & else\end{cases}$.

**משפט** : אם $\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}$ משולשית אז $\det\left(\left(A_{i,j}\right)_{1\le i,j\le m}\right)=\prod_{i=1}^{n}\det\left(A_{i,i}\right)$.