פונקציית הסתברות נקודתית: $\mathbb{P}\in[0,1]^{\Omega}$ המקיימת $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)=1$.

מרחב הסתברות (מ"ה): תהא Ω קבוצה ותהא $\mathbb{P}$ פונקציית הסתברות אזי $(\Omega,\mathbb{P})$.

מרחב מדגם: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מרחב הסתברות בדיד: מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\le\aleph_0$.

מרחב הסתברות סופי: מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $|\Omega|\in\mathbb{N}$.

הערה: בקורס זה כל מרחבי ההסתברות הינם בדידים.

סימון: $2^{A}=\mathcal{P}(A)$.

מאורע: תהא $A\subseteq\Omega$ אזי $\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\omega)$.

סימון: $[n]=\{1,\ldots,n\}$.

משפט: יהי מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ ומאורעות A,B

- **משלים**: $\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}\right)=1-\mathbb{P}(A)$.
- **אדטיביות**: $\mathbb{P}(A\uplus B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.
- $\mathbb{P}(A\backslash B)=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B\cap A)$.
- **מונוטוניות**: $(A\subseteq B)\implies(\mathbb{P}(A)\le\mathbb{P}(B))$.
- **הכלה והדחה**: $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)$.

מסקנה: תהא פונקציית הסתברות $\mathbb{P}$ אזי $\mathbb{P}(\varnothing)=0$.

משפט סיגמא־אדטיביות: יהיו $E=\biguplus_{i=1}^{\infty}E_i$ מאורעות אזי $\mathbb{P}(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_i)$.

הכלה והדחה כללית: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{\varnothing\neq I\subseteq[n]}\left((-1)^{|I|+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\right)$.

הכלה והדחה סימטרית: נניח כי $\forall I\subseteq[n].(|I|=k)\Rightarrow(\mathbb{P}(A_I)=a_k)$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\binom{n}{k}a_k\right)$.

מרחב הסתברות אחיד: מרחב הסתברות סופי $(\Omega,\mathbb{P})$ עבורו $\forall A\in2^{\Omega}.\mathbb{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

תמורה מקרית/סידור אקראי: המרחב האחיד על S_n.

משפט חסם האיחוד: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cup B)\le\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$.

מסקנה: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)$.

מסקנה: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$.

אי שוויונות בונפרוני: יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות ויהי $1\le k\le n$

- $k\in\mathbb{N}_{odd}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.
- $k\in\mathbb{N}_{even}$ אזי $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\ge\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$.

משפט רציפות פונקציית ההסתברות: יהיו $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מאורעות

- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.
- $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.

פונקציית גיבוב/hash: $h\in[m]^{[n]}$.

התנגשות: תהא h פונקציית גיבוב אזי $i\neq j$ עבורם $h(i)=h(j)$.

פרדוקס יום ההולדת: תהא $h\in[m]^{[n]}$ פונקציית גיבוב אזי $\frac{n(n-1)}{2m}\ge\mathbb{P}(\text{התנגשות})\ge1-e^{-\frac{n(n-1)}{2m}}$.

מספר ראמזי: נגדיר $R:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך $R(t)=\min\{n\mid\text{בכל צביעה של } K_n \text{ בשני צבעים יש } K_t \text{ מונוכרומטית}\}$.

משפט: $2^{\frac{t-3}{2}}<R(t)\le c\cdot\frac{4^t}{\sqrt{t}}$.

פונקציית הסתברות מותנית: יהי F מאורע המקיים $\mathbb{P}(F)>0$ אזי $\mathbb{P}(\omega\mid F)=\begin{cases}\frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(F)} & \omega\in F\\ 0 & else\end{cases}$.

טענה: פונקציית הסתברות מותנית הינה פונקציית הסתברות.

מרחב הסתברות מותנה: יהי $(\Omega,\mathbb{P})$ מרחב הסתברות ויהי $F\in 2^{\Omega}$ אזי $(\Omega,\mathbb{P}(\cdot\mid F))$.

טענה: מרחב הסתברות מותנית הוא מרחב הסתברות.

משפט: יהיו E,F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E\mid F)=\frac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

כלל השרשרת: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B)$.

כלל השרשרת: יהיו $A_1\dots A_n$ מאורעות אזי $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\mid\bigcap_{j=1}^{i-1}A_i\right)$.

נוסחת ההסתברות השלמה: יהיו A,B מאורעות אזי $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\mid B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}\left(A\mid B^{\mathcal{C}}\right)\mathbb{P}\left(B^{\mathcal{C}}\right)$.

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$ אזי $\mathbb{P}(B)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B\mid A_i)\mathbb{P}(A_i)$.

כלל בייס: יהיו E,F מאורעות אזי $\mathbb{P}(E\mid F)=\frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F\mid E)}{\mathbb{P}(F)}$.

טענה: יהיו A,B מאורעות עבורם $\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B)>0$ אזי $\mathbb{P}((\cdot\mid B)\mid C)=\mathbb{P}(\cdot\mid B\cap C)\mathbb{P}(C\mid B)$.

מאורע מחזק: יהי B מאורע אזי מאורע A עבורו $\mathbb{P}(A)>0$ המקיים $\mathbb{P}(B\mid A)>\mathbb{P}(B)$.

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות A,B המקיימים $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

סימון: $AB=A\cap B$.

טענה: יהי A מאורע אזי (A ב"ת עם עצמו) $\iff(\mathbb{P}(A)\in\{0,1\})$.

טענה: יהיו A,B מאורעות זרים וב"ת אזי $(\mathbb{P}(A)=0)\vee(\mathbb{P}(B)=0)$.

טענה: יהיו A,B מאורעות התב"ש

- A,B בלתי תלויים.
- $A^{\mathcal{C}},B$ בלתי תלויים.
- $A^{\mathcal{C}},B^{\mathcal{C}}$ בלתי תלויים.
- $A,B^{\mathcal{C}}$ בלתי תלויים.

אי תלות בזוגות: מאורעות $A_1\dots A_n$ המקיימים $\forall i\neq j.\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

אי תלות בזוגות: מאורעות $\{A_i\}_{i\in I}$ המקיימים $\forall i\neq j.\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.

מאורעות בלתי תלויים (ב"ת): מאורעות $A_1\dots A_n$ המקיימים $\forall I\subseteq[n].\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$.

הכללה: מאורעות $\{A_i\}_{i\in I}$ המקיימים $\forall J\subseteq I.(|J|\in\mathbb{N}_+)\implies\left(\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\right)$.

הערה: נסמן זמנית $(A^1=A)\wedge\left(A^{-1}=A^{\mathcal{C}}\right)$.

טענה: ($A_1\dots A_n$ בלתי תלויים) $\iff\left(\forall\varepsilon\in\{\pm1\}^n.\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^{\varepsilon_i}\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i^{\varepsilon_i}\right)\right)$.

מסקנה: יהיו $A_1\dots A_n,B_1$ מאורעות ב"ת אזי כל איחוד/חיתוך/משלים של $A_1\dots A_n$ ב"ת עם B_1.

פונקציית הסתברות מכפלה: יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1),(\Omega_2,\mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $\mathbb{P}_{\Omega_1\times\Omega_2}((\omega_1,\omega_2))=\mathbb{P}_1(\omega_1)\mathbb{P}_2(\omega_2)$.

טענה: פונקציית הסתברות מכפלה היא פונקציית הסתברות.

מרחב מכפלה: יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1),(\Omega_2,\mathbb{P}_2)$ מ"ה אזי $(\Omega_1,\mathbb{P}_1)\otimes(\Omega_2,\mathbb{P}_2)=\left(\Omega_1\times\Omega_2,\mathbb{P}_{\Omega_1\times\Omega_2}\right)$.

טענה: מרחב מכפלה הוא מרחב הסתברות.

טענה: יהיו $(\Omega_1,\mathbb{P}_1)\dots(\Omega_n,\mathbb{P}_n)$ מ"ה אזי $\bigotimes_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ מרחב הסתברות.

מלבן: מאורע $C\subseteq\Omega_1\times\Omega_2$ המקיים $\exists A\subseteq\Omega_1.\exists B\subseteq\Omega_2.C=A\times B$.

טענה: יהי $A\times B\subseteq\Omega_1\times\Omega_2$ מלבן אזי $\mathbb{P}(A\times B)=\mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B)$.

סימון: יהי $\bigotimes_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathbb{P}_i)$ מ"ה ויהי $A\subseteq\Omega_i$ אזי $\overline{A}=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_{i-1}\times A\times\Omega_{i+1}\times\ldots\times\Omega_n$.

מסקנה : יהי $A\subseteq\Omega_i$ ויהי $B\subseteq\Omega_j$ אזי $\overline{A},\overline{B}$ ב"ת מעל $\bigotimes_{i=1}^{n}\left(\Omega_i,\mathbb{P}_i\right)$.

טענה : יהי $A\subseteq\Omega_i$ אזי $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=\mathbb{P}_i\left(A\right)$.

מסקנה : $\mathbb{P}\left(\left(\omega_1\ldots\omega_n\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}_i\left(\omega_i\right)$.

משפט : יהיו $A_1\ldots A_n$ מאורעות עבורם $A_i\subseteq\Omega_i$.$\forall i\in[n]$ אזי $\overline{A_1}\ldots\overline{A_n}$ ב"ת.

מאורעות בלתי תלויים בהתנייה : יהי $\mathbb{P}\left(C\right)>0$ אזי מאורעות A,B עבורם $\mathbb{P}\left(A\cap B\mid C\right)=\mathbb{P}\left(A\mid C\right)\mathbb{P}\left(B\mid C\right)$.

n **ניסויי ברנולי** : יהי $0\le p\le 1$ נגדיר $f\in[0,1]^{\{0,1\}}$ כך $f\left(k\right)=\begin{cases}p & k=1\\1-p & k=0\end{cases}$ אזי $\bigotimes_{i=1}^{n}\left(\left\{0,1\right\},f\right)$.

טענה : נסמן $M_n=$ "הרצף הארוך ביותר של 1 ב־n ניסויי ברנולי" אזי $\left(M_n-\log_{\frac{1}{p}}\left(n\right)\right)\to 0$.

מטריצת שכנויות : יהי $G=\left(V,E\right)$ גרף לא מכוון אזי $A\in M_{|V|}\left(\left\{0,1\right\}\right)$ המקיים $A_{i,j}=\begin{cases}1 & \{i,j\}\in E\\0 & else\end{cases}$.

גרפים על n קודקודים : יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left\{\left(A_{i,j}\right)_{1\le i<j\le n}\mid A_{i,j}\in\left\{0,1\right\}\right\}$.

הימצאות קשת בהתסברות p : יהי $p\in[0,1]$ אזי $\mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\text{גרפים על } n \text{ קודקודים}\mid\omega_{i,j}=1\right\}\right)=p$.

גרף מקרי : יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $p\in[0,1]$ אזי $G\left(n,p\right)=\left(\text{גרפים על } n \text{ קודקודים}, \text{הימצאות קשת בהתסברות } p\right)$.

טענה : יהי $\omega\in G\left(n,p\right)$ אזי $\mathbb{P}\left(\omega\right)=p^{|E_\omega|}\cdot\left(1-p\right)^{\binom{n}{2}-|E_\omega|}$.

מסקנה : גרף מקרי הינו מרחב הסתברות.

משתנה מקרי (מ"מ) : יהי $\left(\Omega,\mathbb{P}\right)$ מ"ה בדיד אזי $f\in\Omega\to S$.

סימון : יהי X מ"מ אזי $\mathbb{P}\left(X=s\right)=\mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\left\{s\right\}\right)\right)$.

אינדיקטור : יהי $A\subseteq\Omega$ מאורע אזי $\mathbb{1}_A\in\left\{0,1\right\}^{\Omega}$ המוגדר $\mathbb{1}_A\left(\omega\right)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\0 & else\end{cases}$.

טענה : $\left(\mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_{A\cap B}\right)\wedge\left(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_{A\uplus B}\right)$.

תומך : תהא $f:S\to\mathbb{R}$ אזי $\text{supp}\left(f\right)=\left\{s\in S\mid f\left(s\right)\neq 0\right\}$.

התפלגות בדידה : $\mu:S\to[0,1]$ המקיימת $\left(\sum_{s\in\text{supp}(\mu)}\mu\left(s\right)=1\right)\wedge\left(|\text{supp}\left(\mu\right)|\le\aleph_0\right)$.

התפלגות של משתנה מקרי : יהי X מ"מ אזי $\mu:\text{Im}\left(X\right)\to[0,1]$ המוגדרת $\mu_X\left(s\right)=\mathbb{P}\left(X=s\right)$.

טענה : ההתפלגות של משתנה מקרית היא התפלגות בדידה.

סימון : יהי X מ"מ אזי $\text{supp}\left(X\right)=\text{supp}\left(\mu_X\right)$.

משתנים מקריים שווים : $X,Y\in S^{\Omega}$ המקיימים $\forall\omega\in\Omega.X\left(\omega\right)=Y\left(\omega\right)$.

משתנים מקריים שווי התפלגות : X,Y מ"מ עם אותה תמונה המקיימים $\forall s\in S.\mu_X\left(s\right)=\mu_Y\left(s\right)$.

סימון : יהיו X,Y מ"מ שווי התפלגות אזי $X\sim Y$.

התפלגות אחידה בדידה : יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ אזי $\mu\in[0,1]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\mu\left(k\right)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1} & k\in[a,b]\cap\mathbb{Z}\\0 & else\end{cases}$.

סימון : יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג אחיד בדיד אזי $X\sim\text{Uni}\left(a,b\right)$.

סימון : תהא μ התפלגות אזי $\left(\mu\left(k\right)=\begin{cases}p_i & k=x_i\\0 & else\end{cases}\right)\equiv\left(\mu=\begin{cases}x_1 & p_1\\\vdots & \vdots\\x_n & p_n\end{cases}\right)$.

התפלגות ברנולי: יהי $p \in [0,1]$ אזי $\mu \in [0,1]^{\{0,1\}}$ המקיימת $\mu = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג ברנולי אזי $X \sim \text{Ber}(p)$.

התפלגות גאומטרית: יהי $p \in [0,1]$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}_+}$ המקיימת $\mu(k) = (1-p)^{k-1} p$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג גאומטרית אזי $X \sim \text{Geo}(p)$.

התפלגות בינומית: יהי $p \in [0,1]$ ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\mu(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג בינומית אזי $X \sim \text{Bin}(n,p)$.

התפלגות פואסון: יהי $\lambda > 0$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג פואסונית אזי $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

משפט קירוב בינום־פואסון: יהי $k \in \mathbb{N}$ ויהי $\lambda > 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} \mu_{\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)}(k) = \mu_{\text{Pois}(\lambda)}(k)$.

התפלגות היפרגאומטרית: יהיו $r,n,m \in \mathbb{N}$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu(k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג היפרגאומטרית אזי $X \sim \text{HG}(n,m,r)$.

התפלגות בינומית שלילית: יהי $r \in \mathbb{N}$ וכן $p \in [0,1]$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג בינומית שלילית אזי $X \sim \text{NB}(r,p)$.

התפלגות היפרגאומטרית שלילית: יהיו $r,k,m \in \mathbb{N}$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ המקיים $\mu(x) = \frac{\binom{x-1}{k-1}\binom{m-x}{r-k}}{\binom{m}{r}}$.

סימון: יהי X מ"מ עבורו μ_X מתפלג היפרגאומטרית שלילית אזי $X \sim \text{NHG}(r,k,m)$.

טרנספורמציה של משתנה מקרי: תהא $X \in A^\Omega$ ותהא $f \in B^A$ אזי $f(X) = f \circ X$.

משפט: יהי X מ"מ ויהי $f \in B^A$ אזי $\mu_{f(X)}(k) = \sum_{r \in f^{-1}(\{k\})} \mu_X(r)$.

מסקנה: יהי X מ"מ ויהי $f \in B^A$ אזי $\text{supp}(f(X)) = f(\text{supp}(X))$.

זוג משתנים מקריים: יהיו $X : \Omega \to A$ וכן $Y : \Omega \to B$ משתנים מקריים אזי (X,Y).

התפלגות משותפת: יהי (X,Y) זוג מ"מ אזי $\mu_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)$.

הכללה: יהיו $X_1 \ldots X_n$ מ"מ אזי $\mu_{X_1 \ldots X_n}(x_1 \ldots x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$.

התפלגויות שוליות: יהי (X,Y) זוג מ"מ אזי μ_X, μ_Y.

טענה: $\mu_X(x) = \sum_{y \in S} \mu_{X,Y}(x,y)$.

משתנים מקריים בלתי תלויים: (X,Y) זוג מ"מ עבורו $\mu_{X,Y} = \mu_X \mu_Y$.

הכללה: $X_1 \ldots X_n$ מ"מ המקיימים $\mu_{X_1 \ldots X_n} = \mu_{X_1} \cdot \ldots \cdot \mu_{X_n}$.

משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות: $X_1 \ldots X_n$ מ"מ המקיימים X_i, X_j ב"ת לכל $i \neq j$.

משפט: יהיו $X_1 \ldots X_n$ מ"מ ב"ת ויהיו $E_1 \ldots E_n$ קבוצות אזי $\{X_i \in E_i\}$ מאורעות ב"ת.

משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת ויהיו f,g טרנספורמציות של מ"מ אזי $f(X), g(Y)$ ב"ת.

משפט: ($A_1 \ldots A_n$ מאורעות ב"ת) $\Longleftrightarrow$ ($\mathbb{1}_{A_1} \ldots \mathbb{1}_{A_n}$ מ"מ ב"ת).

טענה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי קיים מ"ה $(\Omega, \mathbb{P})$ עבורו קיימים X,Y מ"מ ב"ת המקיימים $(\mu_X = \mu_1) \wedge (\mu_Y = \mu_2)$.

קונבולוציה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי $(\mu_1 * \mu_2)(z) = \sum_x \mu_1(x) \mu_2(z-x)$.

טענה: יהיו μ_1, μ_2 התפלגויות אזי $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$.

משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$.

טענה: $\text{Bin}(n,p) + \text{Bin}(m,p) \sim \text{Bin}(n+m,p)$.

מסקנה: $\text{Bin}(n,p) \sim \sum_{i=1}^n \text{Ber}(p)$.

טענה: $\text{Pois}(\lambda_1) + \text{Pois}(\lambda_2) \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

טענה: $\text{NB}(n,p) \sim \sum_{i=1}^{n} \text{Geo}(p)$.

משתנה מקרי מותנה: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $X_{\restriction_A}$.

התפלגות מותנית: יהי A מאורע ויהי X מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction_A}}$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction_{Y=y}}}(x) = \frac{\mu_{X,Y}(x,y)}{\mu_Y(y)}$.

סימון: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mu_{X_{\restriction_Y}}(x \mid y) = \mu_{X_{\restriction_{Y=y}}}(x)$.

התפלגות מולטינומית: יהיו $p_1 \dots p_n$ אזי $\mu \in [0,1]^{\mathbb{N}^n}$ המקיים $\mu(k_1 \dots k_n) = \binom{n}{k_1 \dots k_n} \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$.

התפלגות מצטברת: יהי X מ"מ אזי $F_X : [0,1]^{\mathbb{R}}$ כך $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$.

טענה: יהי X מ"מ

- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$.
- $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$.
- יהי $s \in \text{supp}(X)$ אזי $\mu_X(s) = F_X(s) - \lim_{\varepsilon \to 0^+} F_X(s - \varepsilon)$.

פונקציית ההישרדות: יהי X מ"מ אזי $\lambda_X(t) = 1 - F_X(t)$.

מסקנה: $\text{Geo}\left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)\right) \sim \min_{i=1}^{n}\{\text{Geo}(p_i)\}$.

פיצול פואסון: יהיו X,Y מ"מ עבורם $X + Y \sim \text{Poiss}(\lambda)$ וכן $X_{\restriction_{X+Y=n}} \sim \text{Bin}(n,p)$

- $Y_{\restriction_{X+Y=n}} \sim \text{Bin}(n, 1-p)$.
- $X \sim \text{Poiss}(p\lambda)$.
- $Y \sim \text{Poiss}((1-p)\lambda)$.
- X,Y ב"ת.

צימוד בין התפלגויות: יהיו $\mu_1, \mu_2 : [0,1]^S$ התפלגויות אזי התפלגות $\mu : [0,1]^{S^2}$ המקיימת $\left(\mu_1(\omega) = \sum_{s \in S} \mu(\omega, s)\right) \wedge \left(\mu_2(\omega) = \sum_{s \in S} \mu(s, \omega)\right)$.

צימוד בין משתנים: יהיו X,Y מ"מ אזי זוג מ"מ (X', Y') המקיים $(X' \sim X) \wedge (Y' \sim Y)$.

טענה: יהי X מ"מ על Ω_1 ויהי Y מ"מ על Ω_2 נגדיר X', Y' מ"מ ב"ת על $\Omega_1 \otimes \Omega_2$ כך $(X'(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1)) \wedge (Y'(\omega_1, \omega_2) = Y(\omega_2))$ אזי (X', Y') צימוד של X,Y.

התפלגות שולטת סטוכסטית: יהי X מ"מ אזי מ"מ Y המקיים $\mathbb{P}(X > t) \ge \mathbb{P}(Y > t)$.

צימוד מונוטוני: יהיו X,Y מ"מ אזי צימוד (X', Y') המקיים $\mathbb{P}(Y' > X') = 0$.

טענה: יהי X מ"מ בעל התפלגות שולטת סטוכסטית בהתפלגות Y אזי קיים צימוד מונוטוני.

מטריקת ההשתנות הכוללת: תהא $|S| \le \aleph_0$ ויהיו $\mu, \upsilon : [0,1]^S$ התפלגויות אזי $\delta(\mu, \upsilon) = \sum_{x \in S} |\mu(x) - \upsilon(x)|$.

למה: מטריקת ההשתנות הכוללת הינה מטריקה.

סימון: יהיו X,Y מ"מ אזי $\delta(X,Y) = \delta(\mu_X, \mu_Y)$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\delta(X,Y) = 2 \sup_{E \subseteq S} |\mathbb{P}(X \in E) - \mathbb{P}(Y \in E)|$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ ויהיו (X', Y') צימוד אזי $\delta(X,Y) = \delta(X', Y') \le 2\mathbb{P}(X' \ne Y')$.

מסקנה: יהיו $X_1 \dots X_{2n}$ מ"מ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=n+1}^{2n} X_i\right) \le 2 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \ne Y_i)$.

חוק המספרים הקטנים: יהיו $\{X_i \sim \text{Ber}(p_i)\}_{i=1}^{n}$ מ"מ ויהי $T \sim \text{Pois}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$ אזי $\delta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, T\right) \le 2 \sum_{i=1}^{n} p_i^2$.

חציון של משתנה מקרי: יהי X מ"מ אזי $m \in \text{supp}(X)$ המקיים $\left(\mathbb{P}(X \ge m) \ge \frac{1}{2}\right) \wedge \left(\mathbb{P}(X \le m) \ge \frac{1}{2}\right)$.

משתנה בעל תוחלת: X מ"מ עבורו $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\omega)$ מתכנס בהחלט.

טענה: יהי X משתנה על מ"ה סופי אזי X בעל תוחלת.

תוחלת: יהי X מ"מ בעל תוחלת אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$.

למה: יהיו X,Y מ"מ ויהי $c\in\mathbb{R}$

- הומוגניות: $\mathbb{E}[cX]=c\mathbb{E}[X]$.
- חיבוריות: $\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$.
- מונוטוניות: $(X\le Y)\implies(\mathbb{E}[X]\le\mathbb{E}[Y])$.

מסקנה: יהיו $X_1\ldots X_n$ מ"מ אזי $\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}[X_i]$.

משפט: יהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{s\in\text{supp}(X)}s\cdot\mu_X(s)$.

טענה: יהי X מ"מ

- $(X\sim\text{Uni}(0,\ldots,n))\implies\left(\mathbb{E}[X]=\frac{n}{2}\right)$.
- $(X\sim\text{Ber}(p))\implies(\mathbb{E}[X]=p)$.
- $(X\sim\text{Bin}(n,p))\implies(\mathbb{E}[X]=np)$.
- $(X\sim\text{Geo}(p))\implies\left(\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p}\right)$.
- $(X\sim\text{HG}(n,m,r))\implies\left(\mathbb{E}[X]=\frac{nr}{m}\right)$.
- $(X\sim\text{Pois}(\lambda))\implies(\mathbb{E}[X]=\lambda)$.

משפט: יהי X מ"מ ותהא f טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[f(X)]=\sum_{s\in\text{supp}(X)}f(s)\mu_X(s)$.

נוסחאת הזנב: יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}(X)=\mathbb{N}$ אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X\ge n)$.

משפט: יהיו X,Y מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

תוחלת מותנית: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X\mid A]=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\mathbb{P}(\omega\mid A)$.

טענה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X\mid A]=\frac{\mathbb{E}[X\cdot\mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}$.

מסקנה: יהיו $X,\mathbb{1}_A$ מ"מ ב"ת אזי $\mathbb{E}[X\mid A]=\mathbb{E}[X]$.

נוסחאת התוחלת השלמה: יהי X מ"מ ויהי A מאורע אזי $\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[X\mid A]\mathbb{P}(A)+\mathbb{E}\left[X\mid A^{\mathcal{C}}\right]\mathbb{P}\left(A^{\mathcal{C}}\right)$.

הכללה: יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ המקיימות $\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$ ויהי X מ"מ אזי $\mathbb{E}[X]=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}[X\mid A_i]\mathbb{P}(A_i)$.

תוחלת של משתנה מותנה במשתנה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[X\mid Y](\omega)=\mathbb{E}[X\mid Y=Y(\omega)]$.

משפט/נוסחאת ההחלקה: יהיו X,Y מ"מ אזי $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X\mid Y]]=\mathbb{E}[X]$.

טענה: יהיו X,Y מ"מ ותהא g טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}[X\cdot g(Y)\mid Y]=g(Y)\cdot\mathbb{E}[X\mid Y]$.

משתנה בעל מומנט k: מ"מ X המקיים $\mathbb{E}\left[|X|^k\right]<\infty$.

סימון: יהי X משתנה בעל מומנט k אזי $X\in\ell^k$.

מומנט k: יהי $X\in\ell^k$ אזי $\mathbb{E}\left[X^k\right]$.

טענה: יהיו $m<k\in\mathbb{N}$ אזי $\ell^k\subseteq\ell^m$.

אי שיוויון קושי שוורץ: יהיו $X,Y\in\ell^2$ אזי $|\mathbb{E}[XY]|\le\sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$.

מסקנה: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\mathbb{E}[X]^2\le\mathbb{E}[X^2]$.

שונות: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\text{Var}[X]=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]$.

טענה: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\text{Var}[X]=\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2$.

סטיית תקן: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\sigma_X=\sqrt{\text{Var}[X]}$.

משתנה דטרמיניסטי: מ"מ X המקיים $\exists c.\mathbb{P}(X=c)=1$.

למה: יהי $X\in\ell^2$ ויהי a סקלר

- $\text{Var}\left[X\right] \geq 0$.
- (X דטרמיניסטי) $\iff \left(\text{Var}\left[X\right] = 0\right)$.
- $\text{Var}\left[aX\right] = a^2 \text{Var}\left[X\right]$.
- $\text{Var}\left[X + a\right] = \text{Var}\left[X\right]$

פונקציית הפסד : יהי $X \in \ell^2$ אזי $\mathbb{E}\left[\left(X - a\right)^2\right]$.

משפט : יהי $X \in \ell^2$ אזי המינימום של פונקציית ההפסד מתקבלת בערך $\mathbb{E}\left[X\right]$.

חציון : יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{E}\left[\left|X - a\right|\right]$.

סימון : יהי X מ"מ אזי החציון הוא $\text{Median}\left(X\right)$.

ערך אמצעי/Mid Range : יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\max\left|X - a\right|$.

סימון : יהי X מ"מ אזי הערך האמצעי הוא $\text{MR}\left(X\right)$.

שכיח : יהי X מ"מ אזי הערך עבורו מתקבל המינימום בפונקציה $\mathbb{P}\left(X \neq a\right)$.

סימון : יהי X מ"מ אזי השכיח הוא $\text{Mode}\left(X\right)$.

שונות משותפת : יהיו X, Y מ"מ אזי $\text{Cov}\left[X, Y\right] = \mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right]$.

משפט : $\text{Var}\left[X + Y\right] = \text{Var}\left[X\right] + 2\text{Cov}\left[X, Y\right] + \text{Var}\left[Y\right]$.

טענה : $\text{Cov}\left[X, Y\right] = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}\left[X\right]\right)\left(Y - \mathbb{E}\left[Y\right]\right)\right]$.

משתנים בלתי מתואמים : X, Y המקיימים $\text{Cov}\left[X, Y\right] = 0$.

משפט : יהיו X, Y ב"ת אזי X, Y בלתי מתואמים.

מסקנה : יהיו X, Y בלתי מתואמים אזי $\text{Var}\left[X + Y\right] = \text{Var}\left[X\right] + \text{Var}\left[Y\right]$.

למה : יהיו X, Y, Z מ"מ ויהיו α, β סקלרים

- $\text{Cov}\left[X, X\right] = \text{Var}\left[X\right]$.
- סימטריות: $\text{Cov}\left[X, Y\right] = \text{Cov}\left[Y, X\right]$.
- בי־לינאריות: $\text{Cov}\left[\alpha X + \beta Y, Z\right] = \alpha \text{Cov}\left[X, Z\right] + \beta \text{Cov}\left[Y, Z\right]$.
- אינווריאנטיות להוספת סקלר: $\text{Cov}\left[X + \alpha, Y\right] = \text{Cov}\left[X, Y\right]$.
- $\left|\text{Cov}\left[X, Y\right]\right| \leq \sqrt{\text{Var}\left[X\right]}\sqrt{\text{Var}\left[Y\right]}$.

מקדם המתאם : יהיו X, Y מ"מ אזי $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]}\sqrt{\text{Var}[Y]}}$.

למה : יהיו X, Y מ"מ ויהיו a, b סקלרים

- $\left|\rho_{X,Y}\right| \leq 1$.
- (X, Y בלתי מתואמים) $\iff \left(\rho_{X,Y} = 0\right)$.
- $\left(Y = aX + b\right) \iff \left(\rho_{X,Y} = \pm 1\right)$.

למה : יהי X מ"מ

- $X \sim \text{Uni}\left(\left[n\right]\right)$ אזי $\text{Var}\left[X\right] = \frac{n^2 - 1}{12}$.
- $X \sim \text{Bin}\left(n, p\right)$ אזי $\text{Var}\left(X\right) = np\left(1 - p\right)$.
- $X \sim \text{Pois}\left(\lambda\right)$ אזי $\text{Var}\left(X\right) = \lambda$.
- $X \sim \text{Geo}\left(p\right)$ אזי $\text{Var}\left(X\right) = \frac{1 - p}{p^2}$.

פונקציה יוצרת : יהי X מ"מ עבורו $\text{supp}\left(X\right) = \mathbb{N}$ אזי $g_X\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_X\left(n\right) t^n$.

טענה : יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת

- $g_X\left(t\right)$ מתכנס עבור $\left|t\right| \leq 1$.

- $g_X \in C^{\infty}\left((-1,1)\right)$.
- יהי $t \in [-1,1]$ אזי t^X מ"מ בעל תוחלת.

משפט: יהי X מ"מ בעל פונקציה יוצרת אזי $g_X\left(t\right) = \mathbb{E}\left[t^X\right]$.

למה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת בעלי פונקציה יוצרת

- $\mu_X\left(n\right) = \frac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$.
- $g_{X+Y} = g_X \cdot g_Y$.
- $\lim_{t \to 1^-} g_X\left(t\right) = g_X\left(1\right) = 1$.
- נניח כי X בעל מומנט k אזי $\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1}\left(X-i\right)\right] = \lim_{t\to 1^-} g_X^{(k)}\left(t\right)$.

מסקנה: יהי $X \in \ell^2$ בעל פונקציה יוצרת

- $\mathbb{E}\left[X\right] = \lim_{t \to 1^-} g_X'\left(t\right)$.
- $\text{Var}\left[X\right] = \lim_{t\to 1^-}\left(g_X''\left(t\right) + g_X'\left(t\right) - \left(g_X'\left(t\right)\right)^2\right)$.

פונקציה יוצרת מומנטים: יהי X מ"מ אזי $M_X\left(t\right) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$.

טענה: יהי $X \sim \text{Bin}\left(n,p\right)$ אזי $M_X\left(t\right) = \left(1-p+pe^t\right)^n$.

למה: יהיו X, Y מ"מ ב"ת

- $M_{X+Y} = M_X \cdot M_Y$.
- יהי I קטע עבורו $0 \in I$ וכן $M_X \in C^n\left(I\right)$ אזי $M_X^{(n)}\left(0\right) = \mathbb{E}\left[X^n\right]$.

מסקנה: יהי I קטע עבורו $0 \in I$ וכן $M_X \in C^{\infty}\left(I\right)$ אזי $M_X\left(t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^n]}{n!} t^n$.

אי־שוויון מרקוב: יהי X מ"מ אי שלילי ויהי $a > 0$ אזי $\mathbb{P}\left(X \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$.

מסקנה: תהא $f \in [0,\infty)^{\mathbb{R}}$ עולה ויהי X מ"מ עבורו $f\left(X\right)$ בעל תוחלת אזי $\mathbb{P}\left(X \geq t\right) \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(t)}$.

אי־שוויון צ'בישב: יהי $X \in \ell^2$ ויהי $b > 0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}\left[X\right]\right| \geq b\right) \leq \frac{\text{Var}[X]}{b^2}$.

סימון: יהיו $X_1 \ldots X_n$ מ"מ אזי $\mu = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]$.

טענה: יהיו $X_1 \sim \ldots \sim X_n$ מ"מ בלתי מתואמים בזוגות עם תוחלת משותפת μ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right| \geq b\right) \leq \frac{n\sigma_1^2}{b^2}$.

אי־שוויון צ'רנוף: יהיו $\left\{X_i \sim \text{Ber}\left(p_i\right)\right\}_{i=1}^n$ אזי $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq \left(1+t\right)\mu\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2+t}\mu\right)$.

הכללה: יהי X מ"מ ויהי $s \in \mathbb{R}$ אזי $\mathbb{P}\left(X \geq a\right) \leq \frac{M_X(s)}{e^{sa}}$.

פונקציה קמורה: יהי I קטע אזי $\varphi \in \mathbb{R}^I$ עבורה $\varphi\left(\lambda x + \left(1-\lambda\right)y\right) \leq \lambda\varphi\left(x\right) + \left(1-\lambda\right)\varphi\left(y\right)$.$\forall x,y \in I.\forall\lambda \in [0,1]$.

טענה: תהא $\varphi \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה ויהיו $x < y < z$ אזי $\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}$.

מסקנה: תהא $\varphi \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $\varphi \in C\left((a,b)\right)$.

למה: תהא $\varphi \in \mathbb{R}^I$ קמורה ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $\left(\varphi\left(x_0\right) = ax_0 + b\right) \wedge \left(\forall x \in I.\varphi\left(x\right) \geq ax + b\right)$.

אי־שוויון ינסן: יהי X מ"מ בעל תוחלת ותהא $\varphi \in \mathbb{R}^I$ קמורה עבורה $\varphi\left(X\right)$ בעל תוחלת אזי $\varphi\left(\mathbb{E}\left[X\right]\right) \leq \mathbb{E}\left[\varphi\left(X\right)\right]$.

אי־שוויון הממוצעים: יהיו $a_1 \ldots a_n > 0$ אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$.

אי־שיוויון המשולש: יהי X מ"מ אזי $\left|\mathbb{E}\left[X\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[\left|X\right|\right]$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהיו $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ מ"מ ב"ת שקולי התפלגות עם תוחלת μ אזי $\forall\delta > 0.\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

החוק החלש של המספרים הגדולים: יהי $X \in \ell^1$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon, \delta > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$ ולכל $\left\{X_i \sim X\right\}_{i=1}^n$ מ"מ בלתי מתואמים מתקיים $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu\right| \geq \delta\right) < \varepsilon$.

מסקנה: יהי $X \sim \text{Bin}\left(n,p\right)$ ויהי $\delta > 0$ אזי $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < \delta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

למה: יהי $x \in [0,1]$ יהי $X \sim \text{Bin}\left(n,p\right)$ ויהי $\delta > 0$ אזי $\sup_{x\in[0,1]} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

פולינום ברנשטיין: יהיו $k<n\in\mathbb{N}$ אזי $B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

הגדרה: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $Q_n(t)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$.

טענה: $Q_n(t)\in\mathbb{R}_n[x]$.

משפט: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $\forall\varepsilon>0.\exists n\in\mathbb{N}.\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-Q_n(t)|\le\varepsilon$.

החוק החזק של המספרים הגדולים: יהי $X\in\ell^4$ מ"מ עם תוחלת μ אזי לכל $\varepsilon,\delta>0$ קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N>N_0$ ולכל $\{X_i\sim X\}_{i=1}^{N}$ מ"מ ב"ת מתקיים $\mathbb{P}\left(\max_{n\in\{N_0\ldots N\}}\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}-\mu\right|\ge\delta\right)<\varepsilon$.

פונקציית צפיפות רציפה: $f:I\to[0,1]$ רציפה המקיימת $\int_I f(x)\,dx=1$.

הסתברות רציפה: תהא $f:I\to[0,1]$ פונקציית צפיפות ותהא $[a,b]\subseteq I$ אזי $\mathbb{P}([a,b])=\int_a^b f(x)\,dx$.

משנה מקרי רציף: מ"מ X עבורו קיימת פונקציית צפיפות $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ עבורה $\forall E\subseteq\mathbb{R}.\mathbb{P}(X\in E)=\int_E f(x)\,dx$.

פונקציית ההתפלגות המצטברת: יהי X מ"מ רציף אזי $F(t)=\mathbb{P}(X\le t)=\int_{-\infty}^{t}f(x)\,dx$.

מסקנה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$.

משתנה מקרי אחיד רציף: מ"מ רציף $X:I\to\mathbb{R}$ עבורו $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|I|} & x\in I\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

תוחלת רציפה: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X]=\int_{\mathbb{R}}xf(x)\,dx$.

מומנט רציף: יהי X מ"מ רציף אזי $\mathbb{E}[X^p]=\int_{\mathbb{R}}x^pf(x)\,dx$.

התפלגות נורמלית: יהיו $\sigma^2,\mu\in\mathbb{R}$ אזי $f\in[0,1]^{\mathbb{R}}$ המקיימת $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.

סימון: יהי Z מ"מ רציף עבורו $f(x)$ מתפלג נורמלית אזי $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$.

גאוסיאן: $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

טענה: יהי Z מ"מ רציף עם פונקציית צפיפות $\phi(x)$ אזי $Z\sim N(0,1)$.

הגדרה: יהי $Z\sim N(0,1)$ מ"מ רציף אזי $\Phi(x)=\mathbb{P}(Z\le x)=\int_{-\infty}^{x}\phi(t)\,dt$.

טענה: יהי $t\in\mathbb{R}$

- $(\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=1)\wedge(\lim_{x\to-\infty}\Phi(x)=0)$.
- $(\Phi\in C(\mathbb{R}))\wedge(\Phi>0)\wedge$($\Phi$ עולה ממש).
- $\Phi(t)=1-\Phi(-t)$.

הגדרה: $(\Phi(\infty)=1)\wedge(\Phi(-\infty)=0)$.

מסקנה: יהי $Z\sim N(0,1)$ מ"מ רציף אזי $\mathbb{P}(a\le Z\le b)=\Phi(b)-\Phi(a)=\int_a^b\phi(t)\,dt$.

משתנה מתוקנן: $X\in\ell^2$ המקיים $(\mathbb{E}[X]=0)\wedge(\mathrm{Var}[X]=1)$.

תקנון: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\widehat{X}=\frac{X-\mathbb{E}[X]}{\sigma}$.

טענה: יהי $X\in\ell^2$ אזי $\widehat{X}$ מתוקנן.

למה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,dx=\frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}\right)\wedge\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\right)$.

טענה: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}}{\frac{2}{2n+1}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}}=1$.

משפט דה־מואבר לפלס: יהיו $a\le b$ ויהיו $\{S_N\sim\text{Bin}(N,p)\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(a\le\widehat{S_N}\le b\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\Phi(b)-\Phi(a)$.

טענה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ חסומה ויהיו $a\le b$ ויהיו $\{S_N\sim\text{Bin}(N,p)\}_{N=1}^{\infty}$ אזי $\mathbb{P}\left(f\left(\frac{S_N-Np}{p\sqrt{N}}\right)\right)\xrightarrow[N\to\infty]{}\int_a^b f(t)\phi(t)\,dt$.

הגדרה: תהא $f\in C(\mathbb{R})$ חסומה אזי $\|f\|=\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

למה: תהא $f \in C^3(\mathbb{R})$ יהי X מ"מ ויהי $Z \sim 2\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right) - 1$ אזי $\left|\mathbb{E}\left[f\left(\frac{X}{\sqrt{N}}\right)\right] - \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Z}{\sqrt{N}}\right)\right]\right| \le \frac{1}{6N^{\frac{3}{2}}}\left\|f^{(3)}\right\|\left(1+\mathbb{E}\left[|X-\mathbb{E}[X]|^3\right]\right)$.

הגדרה: $\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 1 + x - \frac{2\sin(2\pi x)}{3\pi} + \frac{\sin(4\pi x)}{12\pi} & -1 \le x \le 0 \\ 0 & x \le -1 \end{cases}$.

טענה: $(\psi \in C^3(\mathbb{R})) \wedge$ (ψ חסומה).

הגדרה: יהי $\varepsilon > 0$ ויהיו $a \le b$ אזי $I_{a,b,\varepsilon}(x) = \psi\left(\frac{b-x}{\varepsilon}\right)\psi\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right)$.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ ויהיו $a \le b$ אזי $(I_{a,b,\varepsilon} \in C^3(\mathbb{R})) \wedge$ ($I_{a,b,\varepsilon}$ חסומה).

למה: קיים $B > 0$ עבורו לכל $a \le b$ ולכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\left\|I^{(3)}_{a,b,\varepsilon}\right\| \le \frac{B}{\varepsilon^3}$.

מסקנה: יהיו $a \le b$ ויהי $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$ אזי $\mathbb{1}_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} \le I_{a+\varepsilon,b-\varepsilon,\varepsilon} \le \mathbb{1}_{[a,b]} \le I_{a,b,\varepsilon} \le \mathbb{1}_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}$.

משפט הגבול המרכזי: יהיו $a \le b$ נניח כי לכל $N \in \mathbb{N}$ יהיו $X_N \sim \ldots \sim X_1$ מ"מ ב"ת עם תוחלת משותפת אזי $\mathbb{P}\left(a \le \widehat{\sum_{i=1}^{N} X_i} \le b\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a)$.

מרחב מצבים: קבוצה S.

מטריצת מצבים: $\mathcal{P} : S^2 \to [0,1]$ המקיימת $\forall x \in S. \sum_{y\in S}\mathcal{P}(x,y) = 1$.

שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן ובעלת מרחב מצבים סופי: מ"מ $\{X_i\}_{i=0}^{\infty}$ ומטריצת מצבים $\mathcal{P}$ עבורם $\mathbb{P}(X_0 = s_0 \ldots X_n = s_n) = \mu_{X_0}(s_0)\prod_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}(s_i, s_{i+1})$.

טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n \ldots X_0 = s_0) = \mathcal{P}(s_n, s_{n+1})$.

הערה: נתייחס אל התפלגות μ_X כאל וקטור שורה כך $(\mu_X)_i = \mathbb{P}(X = i-1)$.

משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mu_{X_k} = \mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^k$.

טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $\mathbb{P}(X_n = y \mid X_k = x) = \mathcal{P}^{n-k}(x,y)$.

התפלגות סטציונרית/עמידה: התפלגות π על S המקיימת $\pi \cdot \mathcal{P} = \pi$.

וקטור עצמי שמאלי: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $v \in M_{1,n}(\mathbb{F})$ המקיים $v \cdot A = \alpha v$.

טענה: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי $(\mu_{X_0}\mathcal{P}^n \to \pi) \Longleftarrow$ (π התפלגות סטציונרית).

משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב אזי קיימת התפלגות סטציונרית π.

סימון: יהיו $x, y \in S$ עבורם $\exists n \in \mathbb{N}_+ . \mathcal{P}^n(x,y) > 0$ אזי $x \to y$.

מטריצת מעברים אי פריקה: שרשרת עבורה $\forall x, y \in S . x \to y$.

למה: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה ותהא π התפלגות סטציונרית אזי $\forall x \in S . \pi(x) > 0$.

משפט: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים אי פריקה אזי קיימת התפלגות סטציונרית יחידה π.

משפט התכנסות ממוצעים: תהא $\mathcal{P}$ מטריצת מעברים בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$.

הערה: נתייחס אל טרנספורמציה f כאל וקטור עמודה כך $(f)_i = f(i)$.

משפט: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת מרקוב בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π ותהא f טרנספורמציה אזי $\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi \cdot f$.

מחזור: יהי $x \in S$ אזי $\gcd(\{n \in \mathbb{N}_+ \mid \mathcal{P}^n(x,x) > 0\})$.

מצב חסר מחזור: $x \in S$ אשר מחזורו 1.

שרשרת חסרת מחזור: שרשרת $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ עבורה כל מצב חסר מחזור.

המשפט הארגודי לשרשראות מרקוב: תהא $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת אי פריקה וחסרת מחזור אזי $\mu_{X_0} \cdot \mathcal{P}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi$.

זמן החזרה : יהי $x \in S$ אזי T_x מ"מ הזמן הראשון בו חזרנו ל־x בהילוך שמתחיל ב־x.

משפט : תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}\left[T_x\right] = \frac{1}{\pi(x)}$.

זמן הפגיעה : יהיו $x, y \in S$ אזי $T_{x,y}$ מספר הפעמים שנגיע למצב y בהילוך שמתחיל ב־x עד לחזרה הראשונה אל x.

משפט : תהא שרשרת אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית יחידה π אזי $\mathbb{E}\left[T_{x,y}\right] = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$.