**פעולות בינאריות:** תהא $A$ קבוצה אזי $A\times A\to A$.

**סימון:** תהא $A$ קבוצה ותהא $*$ פעולה בינארית על $A$ אזי $a*b=*\left(a,b\right)$.

**חבורה:** תהא $G$ קבוצה אזי $*:G\times G\to G$ עבורה קיים $e\in G$ עבורו

- אסוציאטיביות: לכל $a,b,c\in G$ מתקיים $a*\left(b*c\right)=\left(a*b\right)*c$.
- איבר יחידה: לכל $a\in G$ מתקיים $a*e=e*a=a$.
- איבר הופכי: לכל $a\in G$ קיים $b\in G$ עבורו $a*b=e=b*a$.

**הגדרה:** תהא $X$ קבוצה אזי $S\left(X\right)=\left\{ f:X\to X\mid \text{הפיכה } f\right\}$.

**חבורת התמורות:** תהא $X$ קבוצה אזי $\left(S\left(X\right),\circ\right)$.

**טענה:** תהא $X$ קבוצה אזי חבורת התמורות הינה חבורה.

**סימון:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $S_{n}=S\left(\left[n\right]\right)$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|S_{n}\right|=n!$.

**חבורת המטריצות:** יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

**טענה:** יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת המטריצות הינה חבורה.

**החבורות החיבוריות:** יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},+\right)$.

**סימון:** תהא $A\subseteq\mathbb{C}$ אזי $A^{*}=A^{\times}=A\backslash\left\{ 0\right\}$.

**החבורות הכפליות:** יהי $\mathbb{F}\in\left\{ \mathbb{Q}^{*},\mathbb{R}^{*},\mathbb{C}^{*}\right\}$ אזי $\left(\mathbb{F},\cdot\right)$.

**החבורה הטריוואלית:** יהי $x$ אזי $\left(\left\{ x\right\},\mathrm{Id}\right)$.

**הגדרה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sim_{n}\subseteq\mathbb{Z}^{2}$ המוגדרת $\left(x\sim_{n}y\right)\Longleftrightarrow\left(n|\left(x-y\right)\right)$.

**סימון:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_{n}=\mathbb{Z}_{n}$.

**הגדרה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $+:C_{n}\times C_{n}\to C_{n}$ המוגדרת $\left[x\right]_{\sim_{n}}+\left[y\right]_{\sim_{n}}=\left[x+y\right]_{\sim_{n}}$.

**חבורת שאריות החלוקה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי חבורת שאריות החלוקה הינה חבורה.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|C_{n}\right|=n$.

**חבורה אבלית/חילופית/קומוטטיבית:** חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה לכל $g,h\in G$ מתקיים $g*h=h*g$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge3}$ אזי $\left(S_{n},\circ\right)$ אינה אבלית.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$ אינה אבלית.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\left(C_{n},+\right)$ אבלית.

**חבורה סופית:** חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\in\mathbb{N}$.

**חבורה אינסופית:** חבורה $\left(G,*\right)$ עבורה $\left|G\right|\ge\aleph_{0}$.

**סדר של חבורה:** תהא $\left(G,*\right)$ חבורה סופית אזי $\mathrm{ord}\left(G\right)=\left|G\right|$.

**סדר של חבורה:** תהא $G$ חבורה אינסופית אזי $\mathrm{ord}\left(G\right)=\infty$.

**סימון:** תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $o\left(G\right)=\mathrm{ord}\left(G\right)$.

**תת־חבורה:** תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ אזי $\left(H,*_{\restriction_{H\times H}}\right)$ עבורה

- סגירות לכפל: לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b\in H$.
- סגירות להופכי: לכל $a\in H$ מתקיים $a^{-1}\in H$.
- איבר יחידה: יהי $e$ איבר היחידה של $G$ אזי $e\in H$.

**סימון:** תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\subseteq G$ עבורה $\left(H,*_{\restriction_{H\times H}}\right)$ תת־חבורה אזי $H\le G$.

**למה:** תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהא $H\in\mathcal{P}\left(G\right)\backslash\left\{ \varnothing\right\}$ אזי $(H\le G)\Longleftrightarrow($לכל $a,b\in H$ מתקיים $a*b^{-1}\in H)$.

**סימון:** תהא $\left(G,*\right)$ חבורה ותהיינה $A,B\subseteq G$ אזי $A*B=\left\{ a*b\mid\left(a\in A\right)\wedge\left(b\in B\right)\right\}$.

**סימון:** תהא $\left(G,*\right)$ חבורה תהא $H\subseteq G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\left\{ g\right\}*H$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(n\mathbb{Z},+\right)\le\left(\mathbb{Z},+\right)$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\left(\mathrm{SL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)\le\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right),\cdot\right)$.

**סימון:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $R_{n}=\left\{ z\in\mathbb{C}\mid z^{n}=1\right\}$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left(R_{n},\cdot\right)\le\left(\mathbb{C}^{*},\cdot\right)$.

**טענה:** תהא $\left(G,*\right)$ חבורה אזי $G\le G$.

**טענה:** תהא $(G,*)$ חבורה אזי $\{e\} \leq G$.

**איבר פיתול:** תהא $(G,*)$ חבורה אזי $g \in G$ עבורו קיים $n \in \mathbb{N}_+$ המקיים $g^n = e$.

**סימון:** תהא $(G,*)$ חבורה אזי $T(G) = \{g \in G \mid g \text{ איבר פיתול}\}$.

**טענה:** תהא $(G,*)$ חבורה אבלית אזי $T(G) \leq G$.

**הערה:** מכאן והלאה כאשר ברור מהי הפעולה של החבורה נסמנה על ידי הקבוצה בלבד.

**טענה:** תהא $(G,*)$ חבורה אזי קיים ויחיד $e \in G$ עבורו $a * e = e * a = a$ לכל $a \in G$.

**טענה:** תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי קיים ויחיד $b \in G$ עבורו $a * b = e = b * a$.

**סימון:** תהא $(G,*)$ חבורה יהי $a \in G$ ויהי $b \in G$ איבר הופכי ל־$a$ אזי $a^{-1} = b$.

**טענה:** תהא $(G,*)$ חבורה ויהיו $a,b \in G$ אזי $(a*b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

**טענה:** תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a \in G$ אזי $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.

**מסקנה כלל צמצום משמאל:** תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c \in G$ עבורם $a * b = a * c$ אזי $b = c$.

**מסקנה כלל צמצום מימין:** תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $a,b,c \in G$ עבורם $b * a = c * a$ אזי $b = c$.

**סימון:** תהא $(G,*)$ חבורה ויהי $g \in G$ אזי $g^0 = e$.

**הגדרה:** תהא $(G,*)$ חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ אזי $g^n = g * g^{n-1}$.

**סימון:** תהא $G$ חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = (g^n)^{-1}$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{-n} = \left(g^{-1}\right)^n$.

**חבורת המכפלה:** תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות נגדיר $(g,h) \cdot (g',h') = (g * g', h \otimes h')$ לכל $g,g' \in G$ ולכל $h,h' \in H$ אזי $(G \times H, \cdot)$.

**טענה:** תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי חבורת המכפלה הינה חבורה.

**טענה:** תהיינה $(G,*),(H,\otimes)$ חבורות אזי (חבורת המכפלה אבלית)$\Longleftrightarrow$($H,G$ אבליות).

**טענה:** תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K \leq G$ אזי $(H * K \leq G)\Longleftrightarrow(HK = KH)$.

**טענה:** תהא $(G,*)$ חבורה ותהיינה $H,K \leq G$ אזי $(H \cup K \leq G)\Longleftrightarrow(H \cap K \in \{H,K\})$.

**הגדרה:** תהא $X$ קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\mathrm{Stab}(Y) = \{\pi \in S(X) \mid \forall y \in Y.\pi(y) = y\}$.

**טענה:** תהא $X$ קבוצה ותהא $Y \subseteq X$ אזי $\mathrm{Stab}(Y) \leq S(X)$.

**מסקנה:** תהא $G$ חבורה ותהא $\{H_i\}_{I \in I} \subseteq \mathcal{P}(G)$ באשר $H_i \leq G$ לכל $i \in I$ אזי $\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$.

**הגדרה:** תהא $G$ חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\mathcal{F}(X) = \{H \leq G \mid X \subseteq H\}$.

**החבורה שנוצרת על ידי תת־קבוצה:** תהא $G$ חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{F}(X)} H$.

**למה:** תהא $G$ חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle \leq G$.

**טענה מינימליות החבורה הנוצרת:** תהא $G$ חבורה תהא $X \subseteq G$ ותהא $H \leq G$ עבורה $X \subseteq H$ אזי $\langle X \rangle \subseteq H$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ותהא $X \subseteq G$ אזי $\langle X \rangle = \left\{\prod_{i=1}^{k} x_i^{s_i} \;\middle|\; (k \in \mathbb{N}) \wedge \left(x \in X^k\right) \wedge \left(s \in \{\pm 1\}^k\right)\right\}$.

**קבוצת יוצרים של חבורה:** תהא $G$ חבורה אזי $X \subseteq G$ עבורה $\langle X \rangle = G$.

**חבורה נוצרת סופית (נ״ס):** חבורה $G$ עבורה קיימת קבוצת יוצרים סופית.

**חבורה ציקלית:** חבורה $G$ עבורה קיים $g \in G$ המקיים $\langle g \rangle = G$.

**למה:** תהא $G$ חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\langle g \rangle = \left\{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה יהיו $n,m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $g^{n+m} = g^n * g^m$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה יהיו $n,m \in \mathbb{Z}$ ויהי $g \in G$ אזי $(g^n)^m = g^{n \cdot m}$.

**למה:** תהא $G$ חבורה אזי ($G$ ציקלית)$\Longleftrightarrow$(קיים $g \in G$ עבורו $G = \left\{g^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$).

**מסקנה:** תהא $G$ חבורה ציקלית אזי $G$ אבלית.

**סדר של איבר:** תהא $G$ חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(\langle g \rangle)$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ויהי $g \in G$ אזי $\mathrm{ord}(g) = \min\{n \in \mathbb{N}_+ \mid g^n = e\}$.

**הערה:** תהא $G$ חבורה ויהי $g \in G$ עבורו $\mathrm{ord}(g)$ לא קיים אזי $\mathrm{ord}(g) = \infty$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $g \in G$ באשר $\mathrm{ord}(g) < \infty$ אזי $(\mathrm{ord}(g) | n) \Longleftrightarrow (g^n = e)$.

**טענה:** יהי $n \in \mathbb{N}_+$ ויהי $i \in \mathbb{Z}_n$ אזי $(\langle i \rangle = \mathbb{Z}_n)\Longleftrightarrow$($i,n$ זרים).

**טענה:** תהא $G$ חבורה ציקלית ותהא $H \leq G$ אזי $H$ ציקלית.

**טענה:** $(\mathbb{Q},+)$ אינה נ״ס.

**קוסט ימני:** תהא $G$ חבורה תהא $H\leq G$ ויהי $g\in G$ אזי $H*g$.

**קוסט שמאלי:** תהא $G$ חבורה תהא $H\leq G$ ויהי $g\in G$ אזי $g*H$.

**נציג של קוסט ימני:** תהא $G$ חבורה ויהי $Hg$ קוסט ימני אזי $g$.

**נציג של קוסט שמאלי:** תהא $G$ חבורה ויהי $gH$ קוסט שמאלי אזי $g$.

**מסקנה:** תהא $G$ חבורה אבלית תהא $H\leq G$ ויהי $g\in G$ אזי $Hg=gH$.

**מסקנה:** תהא $G$ חבורה תהא $H\leq G$ ויהי $g\in G$ אזי $(gH)^{-1}=Hg^{-1}$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה תהא $H\leq G$ ויהי $g\in G$ אזי $(g\in H)\Longleftrightarrow(gH=H)$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה תהא $H\leq G$ ויהי $g\in G$ אזי $(g\in H)\Longleftrightarrow(Hg=H)$

**סימון:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $G/H=\{gH\mid g\in G\}$.

**סימון:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $_H\backslash^G=\{Hg\mid g\in G\}$.

**משפט:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $G/H$ חלוקה של $G$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה תהא $H\leq G$ ויהיו $g_1,g_2\in G$ אזי $\left(g_2^{-1}g_1\in H\right)\Longleftrightarrow(g_1H=g_2H)$.

**הקוסט הטריוואלית:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $eH$.

**אינדקס של תת־חבורה בחבורה:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $[G:H]=|G/H|$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $[G:H]=|{_H\backslash^G}|$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה סופית ותהא $H\leq G$ אזי $\text{ord}(G)=\text{ord}(H)\cdot[G:H]$.

**משפט לגראנז':** תהא $G$ חבורה סופית ותהא $H\leq G$ אזי $\text{ord}(H)\,|\text{ord}(G)$.

**מסקנה:** תהא $G$ חבורה סופית ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}(g)\,|\text{ord}(G)$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה תהא $H\leq G$ ותהא $K\leq H$ אזי $[G:K]=[G:H]\cdot[H:K]$.

**מסקנה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא $G$ חבורה סופית באשר $\text{ord}(G)=p$ אזי לכל $g\in G\backslash\{e\}$ מתקיים $G=\langle g\rangle$.

**מסקנה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא $G$ חבורה סופית באשר $\text{ord}(G)=p$ אזי $G$ ציקלית.

**מסקנה משפט פרמה הקטן:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd(n,p)=1$ אזי $n^{p-1}\equiv1\mod p$.

**למה:** תהא $G$ חבורה ותהיינה $H,K\leq G$ חבורות סופיות אזי $|HK|=\frac{|H|\cdot|K|}{|H\cap K|}$.

**טענה:** יהיו $p,q\in\mathbb{P}$ באשר $p>q$ ותהא $G$ חבורה באשר $|G|=pq$ אזי לכל $H,K\leq G$ באשר $\text{ord}(H)=p$ וכן $\text{ord}(K)=p$ מתקיים $K=H$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}_{\geq3}$ אזי $(S_n/\text{Stab}(1))\cap\left({_{\text{Stab}(1)}\backslash^{S_n}}\right)=\{\text{Stab}(1)\}$.

**קוסט כפול:** תהא $G$ חבורה תהיינה $H,K\leq G$ ויהי $g\in G$ אזי $HgK$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ותהיינה $H,K\leq G$ אזי $\{HgK\mid g\in G\}$ חלוקה של $G$.

**הומומורפיזם:** תהיינה $G,H$ חבורות אזי $\varphi:G\to H$ המקיימת

- שימור איבר יחידה: $\varphi(e_G)=e_H$.
- שימור כפל: לכל $a,b\in G$ מתקיים $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$.
- שימור הופכי: לכל $g\in G$ מתקיים $\varphi\left(g^{-1}\right)=\varphi(g)^{-1}$.

**טענה:** תהיינה $G,H$ חבורות ותהא $\varphi:G\to H$ אזי ($\varphi$ הומומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(לכל $a,b\in G$ מתקיים $\varphi\left(a\cdot b^{-1}\right)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)^{-1}$).

**גרעין של הומומורפיזם:** תהיינה $G,H$ חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi)=\{g\in G\mid\varphi(g)=e_H\}$.

**למה:** תהיינה $G,H$ חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי

- $\text{Im}(\varphi)\leq H$.
- $\ker(\varphi)\leq G$.
- ($\varphi$ חח"ע)$\Longleftrightarrow$($\ker(\varphi)=\{e_G\}$).

**טענה:** תהיינה $G,H,K$ חבורות יהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם ויהי $\psi:H\to K$ הומומורפיזם אזי $\psi\circ\varphi$ הומומורפיזם.

**טענה:** תהיינה $G,H$ חבורות יהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם ויהי $g\in G$ אזי $\text{ord}(\varphi(g))\,|\text{ord}(g)$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה אזי $\text{Id}$ הינו הומומורפיזם.

**טענה ההומומורפיזם הטריוואלי:** תהא $G$ חבורה אזי $\varphi:G\to\{e\}$ המוגדרת $\varphi(g)=e$ לכל $g\in G$ הינה הומומורפיזם.

**טענה הומומורפיזם ההכלה:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\leq G$ אזי $\text{Id}:H\to G$ הינו הומומורפיזם.

**טענה:** יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $V$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $\det:\text{GL}(V)\to\mathbb{F}^*$ הינו הומומורפיזם.

**מטריצת תמורה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\rho:S_n\to\text{GL}_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(\rho(\sigma))_{i,j}=\left\{\begin{smallmatrix}1 & j=\sigma(i)\\0 & \text{else}\end{smallmatrix}\right.$ לכל $i,j\in[n]$.

**מסקנה**: יהי $n\in\mathbb{N}$ תהא $\sigma\in S_n$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\rho(\sigma)\cdot v=\begin{pmatrix}v_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ v_{\sigma(n)}\end{pmatrix}$.

**טענה**: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\rho:S_n\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ הינה הומומורפיזם.

**טענה**: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\det(\rho(\sigma))\in\{\pm1\}$.

**סימן של תמורה**: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\mathrm{sign}:S_n\to\{\pm1\}$ המוגדרת $\mathrm{sign}=\det\circ\rho$.

**מסקנה**: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי sign הינה הומומורפיזם.

**טענה**: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}(\sigma)=\frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)}$.

**טענה**: יהי $n\in\mathbb{N}$ ותהא $\sigma\in S_n$ אזי $\mathrm{sign}(\sigma)=(-1)^{\left|\left\{(i,j)\in[n]^2\mid(i<j)\wedge(\sigma(i)>\sigma(j))\right\}\right|}$.

**חבורת התמורות הזוגיות**: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n=\ker(\mathrm{sign})$.

**טענה**: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n\le S_n$.

**איזומורפיזם**: תהיינה $G,H$ חבורות אזי הומומורפיזם הפיך $\varphi:G\to H$.

**סימון**: תהיינה $G,H$ חבורות איזומורפיות אזי $G\cong H$.

**למה**: תהיינה $G,H$ חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם אזי $\varphi^{-1}$ איזומורפיזם.

**למה**: תהיינה $G,H,K$ חבורות יהי $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם ויהי $\psi:H\to K$ איזומורפיזם אזי $\psi\circ\varphi$ איזומורפיזם.

**טענה**: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה של חבורות אזי $\cong$ יחס שקילות על $\mathcal{A}$.

**טענה**: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $C_n\cong R_n$.

**טענה**: תהיינה $G,H$ חבורות תהא $S\subseteq G$ באשר $\langle S\rangle=G$ ויהיו $\varphi,\psi:G\to H$ הומומורפיזמים באשר $\varphi_{\restriction_S}=\psi_{\restriction_S}$ אזי $\varphi=\psi$.

**מונומורפיזם**: תהיינה $G,H$ חבורות אזי הומומורפיזם חח"ע $\varphi:G\to H$.

**אפימורפיזם**: תהיינה $G,H$ חבורות אזי הומומורפיזם על $\varphi:G\to H$.

**אוטומורפיזם**: תהא $G$ חבורה אזי איזומורפיזם $\varphi:G\to G$.

**סימון**: תהא $G$ חבורה אזי $\mathrm{Aut}(G)=\{\varphi:G\to G\mid \text{אוטומורפיזם } \varphi\}$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה אזי $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$ חבורה.

**חבורת קליין**: $K=C_2\times C_2$.

**טענה**: חבורת קליין הינה אבלית.

**טענה**: חבורת קליין אינה ציקלית.

**טענה**: חבורת קליין אינה איזומורפית ל־$C_4$.

**פונקציית הצמדה**: תהא $G$ חבורה ויהי $g\in G$ אזי $c_g:G\to G$ המוגדרת $c_g(x)=gxg^{-1}$ לכל $x\in G$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה ויהי $g\in G$ אזי $c_g$ אוטומורפיזם.

**אוטומורפיזם פנימי**: תהא $G$ חבורה אזי אוטומורפיזם $\varphi:G\to G$ עבורו קיים $g\in G$ המקיים $\varphi=c_g$.

**סימון**: תהא $G$ חבורה אזי $\mathrm{Inn}(G)=\{c_g\mid g\in G\}$.

**תת־חבורה נורמלית**: תהא $G$ חבורה אזי $H\le G$ עבורה לכל $g\in G$ מתקיים $c_g(H)=H$.

**סימון**: תהא $G$ חבורה ותהא $H\le G$ נורמלית אזי $H\trianglelefteq G$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה ותהא $H\le G$ התב"ש
- $H\trianglelefteq G$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gHg^{-1}=H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $gH=Hg$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}Hg\subseteq H$.
- לכל $g\in G$ מתקיים $H\subseteq g^{-1}Hg$.
- $G/H={}_H\backslash G$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה ותהא $H\le G$ באשר $[G:H]=2$ אזי $H\trianglelefteq G$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה אזי $\mathrm{Inn}(G)\trianglelefteq\mathrm{Aut}(G)$.

**תת־חבורה אופיינית**: תהא $G$ חבורה אזי $K\le G$ עבורה לכל $\varphi\in\mathrm{Aut}(G)$ מתקיים $\varphi(K)=K$.

**מסקנה**: תהא $G$ חבורה ותהא $K\le G$ אופיינית אזי $K\trianglelefteq G$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה תהא $H\trianglelefteq G$ ותהא $K\le H$ אופיינית ב־$H$ אזי $K\trianglelefteq G$.

**מרכז של חבורה:** תהא $G$ חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)=\{g\in G\mid \forall h\in G.gh=hg\}$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)\trianglelefteq G$.

**חבורת הייזנברג:** יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F})=\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&a&b\\&1&c\\&&1\end{smallmatrix}\right)\;\middle|\;a,b,c\in\mathbb{F}\right\}$.

**טענה:** יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{H}(\mathbb{F})$ חבורה.

**טענה:** יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי אזי $\mathcal{Z}(\mathcal{H}(\mathbb{F}))\cong(\mathbb{F},+)$.

**למה:** תהיינה $G,H$ חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי $\ker(\varphi)\trianglelefteq G$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $A_n\trianglelefteq S_n$.

**חבורה פשוטה:** חבורה $G$ עבורה לכל $H\trianglelefteq G$ מתקיים $H\in\{\{e\},G\}$.

**מסקנה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי $C_p$ פשוטה.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ פשוטה.

**הגדרה:** תהא $(G,*)$ חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ נגדיר $*:{}^{G}/_{N}\times{}^{G}/_{N}\to{}^{G}/_{N}$ כך $(gN)*(hN)=(g*h)N$.

**חבורת המנה:** תהא $(G,*)$ חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי $({}^{G}/_{N},*)$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי חבורת המנה הינה חבורה.

**העתקת המנה:** תהא $G$ חבורה ותהא $N\trianglelefteq G$ אזי $q:G\to{}^{G}/_{N}$ המוגדרת $q(g)=gN$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה תהא $N\trianglelefteq G$ ותהא $q$ העתקת המנה אזי

- $q$ הינה הומומורפיזם.
- $\ker(q)=N$.
- $q$ על.

**משפט:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\le G$ אזי $(H\trianglelefteq G)\Longleftrightarrow$(קיים אוטומורפיזם $\varphi:G\to G$ עבורו $H=\ker(\varphi)$).

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי ${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_n$.

**משפט האיזומורפיזם הראשון/אמי נת'ר:** תהיינה $G,H$ חבורות ויהי $\varphi:G\to H$ הומומורפיזם אזי ${}^{G}/_{\ker(\varphi)}\cong\mathrm{Im}(\varphi)$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ציקלית אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $G\cong\mathbb{Z}$.
- קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $G\cong\mathbb{Z}_n$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה אזי $\left|{}^{G}/_{\mathcal{Z}(G)}\right|\notin\mathbb{P}$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ויהיו $H,K\trianglelefteq G$ באשר $HK=G$ וכן $H\cap K=\{e\}$ אזי $G\cong H\times K$.

**מסקנה משפט השאריות הסיני:** יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ זרים אזי $\mathbb{Z}_{nm}\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m$.

**טענה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא $G$ חבורה סופית תהא $H\le G$ מאינדקס $p$ ותהא $N\trianglelefteq G$ מאינדקס $p$ באשר $N\ne H$ אזי $G=HN$ וכן $p^2|\mathrm{ord}(G)$.

**חבורת המכפלה החצי ישרה:** תהיינה $H,K$ חבורות ויהי $\varphi:K\to\mathrm{Aut}(H)$ הומומורפיזם נגדיר $(h,k)\cdot(h',k')=(h\cdot\varphi(k)(h'),k\cdot k')$ לכל $h,h'\in H$ ולכל $k,k'\in K$ אזי $(H\times K,\cdot)$.

**סימון:** תהיינה $H,K$ חבורות ויהי $\varphi:K\to\mathrm{Aut}(H)$ אזי חבורת המכפלה החצי ישרה הינה $H\rtimes_\varphi K$.

**טענה:** תהיינה $H,K$ חבורות ויהי $\varphi:K\to\mathrm{Aut}(H)$ אזי $H\rtimes_\varphi K$ הינה חבורה.

**טענה:** תהיינה $H,K$ חבורות נגדיר $\varphi:K\to\mathrm{Aut}(H)$ כך $\varphi(k)=\mathrm{Id}_H$ לכל $k\in K$ אזי $H\rtimes_\varphi K\cong H\times K$.

**סימון:** יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathrm{Aff}(\mathbb{F})=\{f:\mathbb{F}\to\mathbb{F}\mid\exists a\in\mathbb{F}^\times(\exists b\in\mathbb{F}(\forall x\in\mathbb{F}(f(x)=ax+b)))\}$.

**טענה:** יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $(\mathrm{Aff}(\mathbb{F}),\circ)$ חבורה.

**טענה:** יהי $\mathbb{F}$ שדה נגדיר $\varphi:\mathbb{F}^\times\to\mathrm{Aut}(\mathbb{F})$ כך $\varphi(a)(b)=ab$ לכל $a\in\mathbb{F}^\times$ ולכל $b\in\mathbb{F}$ אזי $\mathrm{Aff}(\mathbb{F})\cong\mathbb{F}\rtimes_\varphi\mathbb{F}^\times$.

**סימון:** יהי $P\subseteq\mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל אזי $\mathrm{Iso}(P)=\{\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\mid(\text{איזומטריה }\varphi)\wedge(\varphi(P)=P)\}$.

**החבורה הדיהדרלית:** יהי $P\subseteq\mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל בעל $n$ קודקודים אזי $D_n=\mathrm{Iso}(P)$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $(D_n,\circ)$ חבורה.

**סימון:** תהא $X$ קבוצה ויהיו $\varphi_1\ldots\varphi_n$ פרידיקטים על $X$ אזי $\langle X\mid\varphi_1\ldots\varphi_n\rangle=\{x\in\langle X\rangle\mid\bigwedge_{i=1}^n\varphi_i(x)\}$.

**טענה:** יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $D_n\cong\langle r,s\mid s^2=e,r^n=e,srs=r^{-1}\rangle$.

**משפט:** יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי

- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$ אזי $\{D_n,\langle sr,r^2\rangle,\langle s,r^2\rangle\}\cup\{H\le\langle r\rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של $D_n$.
- אם $n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$ אזי $\{D_n\}\cup\{H\le\langle r\rangle\}$ הן כל תתי החבורות הנורמליות של $D_n$.

**טענה:** $\mathcal{H}(\mathbb{F}_2) \cong D_4$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה יהי $K \le G$ יהי $H \trianglelefteq G$ באשר $HK = G$ וכן $H \cap K = \{e\}$ ונגדיר $\varphi : K \to \text{Aut}(H)$ כך $\varphi(k) = c_k$ לכל $k \in K$ אזי $G \cong H \rtimes_{\varphi} K$.

**מסקנה:** יהי $n \in \mathbb{N}_{\ge 2}$ ונגדיר $\varphi : C_2 \to \text{Aut}(C_n)$ כך $\varphi(k) = c_k$ לכל $k \in K$ אזי $D_n \cong C_n \rtimes_{\varphi} C_2$.

**טענה:** $K \trianglelefteq A_4$.

**חבורה פתירה:** חבורה $G$ עבורה קיים $n \in \mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0 \dots G_n \le G$ המקיימות

- $G_n = G$ וכן $G_0 = \{e\}$.
- $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$ לכל $i \in [n]$.
- ${}^{G_i}/_{G_{i-1}}$ אבלית לכל $i \in [n]$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה אבלית אזי $G$ פתירה.

**טענה:** תהא $G$ חבורה פשוטה באשר $G$ אינה אבלית אזי $G$ אינה פתירה.

**משפט:** יהי $n \in [4]$ אזי $S_n$ פתירה.

**חבורה נילפוטנטית:** חבורה $G$ עבורה קיים $n \in \mathbb{N}_+$ וקיימות $G_0 \dots G_n \le G$ המקיימות

- $G_n = G$ וכן $G_0 = \{e\}$.
- $G_{i-1} \trianglelefteq G$ לכל $i \in [n]$.
- ${}^{G_i}/_{G_{i-1}} \le \mathcal{Z}\left({}^{G}/_{G_{i-1}}\right)$ לכל $i \in [n]$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה נילפוטנטית אזי $G$ פתירה.

**משפט האיזומורפיזם השני:** תהא $G$ חבורה תהא $H \le G$ ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי ${}^{H}/_{(H \cap N)} \cong {}^{(HN)}/_{N}$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ותהיינה $N, K \trianglelefteq G$ באשר $K \le N$ אזי ${}^{N}/_{K} \trianglelefteq {}^{G}/_{N}$.

**משפט האיזומורפיזם השלישי:** תהא $G$ חבורה ותהיינה $N, K \trianglelefteq G$ באשר $K \le N$ אזי ${}^{G}/_{N} \cong {}^{({}^{G}/_{K})}/_{({}^{N}/_{K})}$.

**משפט ההתאמה:** תהא $G$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי קיימת $\Phi : \{H \le G \mid N \le H\} \to \{H \mid H \le {}^{G}/_{N}\}$ חח"ע ועל המקיימת

- לכל $K \trianglelefteq G$ המקיימת $N \le K$ מתקיים $\Phi(K) \trianglelefteq {}^{G}/_{N}$.
- משמרת מנות: לכל $K \trianglelefteq G$ המקיימת $N \le K$ מתקיים ${}^{G}/_{K} \cong {}^{\Phi(G)}/_{\Phi(K)}$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ותהא $N \trianglelefteq G$ אזי ($N$ נורמלית מקסימלית)$\Longleftrightarrow$(${}^{G}/_{N}$ פשוטה).

**פעולה שמאלית של חבורה על קבוצה:** תהא $G$ חבורה ותהא $X$ קבוצה אזי פונקציה $f : G \times X \to X$ המקיימת

- לכל $x \in X$ מתקיים $f(e, x) = x$.
- לכל $g, h \in G$ ולכל $x \in X$ מתקיים $f(g \cdot h, x) = f(g, f(h, x))$.

**הערה:** מכאן והלאה המונח פעולה יתאר פעולה שמאלית בלבד.

**סימון:** תהא $G$ חבורה תהא $X$ קבוצה ותהא $f : G \times X \to X$ פעולה על $G$ אזי $f(g, x) = g.x$.

**סימון:** תהא $G$ חבורה ותהא $X$ קבוצה אזי $G \curvearrowright X = \{f : G \times X \to X \mid \text{פעולה } f\}$.

**הפעולה השמאלית:** תהא $G$ חבורה נגדיר $f \in G \curvearrowright G$ כך $f(g, x) = gx$ אזי $f$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה אזי הפעולה השמאלית הינה פעולה.

**הפעולה הימנית:** תהא $G$ חבורה נגדיר $f \in G \curvearrowright G$ כך $f(g, x) = xg^{-1}$ אזי $f$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה אזי הפעולה הימנית הינה פעולה.

**הערה:** מכאן והלאה נאמר כי $G$ פועלת על $X$ ונסמן $g.x$ את הפעולה.

**מסלולים:** תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ ויהי $x \in X$ אזי $\text{orb}_{\alpha}(x) = \{g.x \mid g \in G\}$.

**סימון:** תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה הפועלת על $X$ ויהי $x \in X$ אזי $o(x) = \text{orb}(x)$.

**פעולה טרנזיטיבית:** תהא $G$ חבורה ותהא $X$ קבוצה אזי $f \in G \curvearrowright X$ עבורה קיים $x \in X$ המקיים $o(x) = X$.

**מייצב:** תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה הפועלת על $X$ ויהי $x \in X$ אזי $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$.

**טענה:** תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה הפועלת על $X$ ויהי $x \in X$ אזי $\text{Stab}_G(x) \le G$.

**פעולה חופשית:** תהא $G$ חבורה ותהא $X$ קבוצה אזי $f \in G \curvearrowright X$ עבורה לכל $x \in X$ מתקיים $\text{Stab}_G(x) = \{e\}$.

**למה:** תהא $G$ חבורה תהא $X$ קבוצה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ ויהי $g \in G$ אזי $\alpha(g) \in S(X)$.

**הגדרה:** תהא $G$ חבורה תהא $X$ קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי $\varphi_{\alpha} : G \to S(X)$ המוגדרת $\varphi_{\alpha}(g)(x) = \alpha(g, x)$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה תהא $X$ קבוצה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ אזי $\varphi_{\alpha}$ הומומורפיזם.

**הגדרה:** תהא $G$ חבורה תהא $X$ קבוצה ויהי $\varphi : G \to S(X)$ הומומורפיזם אזי $\alpha_{\varphi} : G \times X \to X$ המוגדרת $\alpha_{\varphi}(g, x) = \varphi(g)(x)$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה תהא $X$ קבוצה ויהי $\varphi : G \to S(X)$ הומומורפיזם אזי $\alpha_\varphi$ פעולה.

**למה מסלול מייצב**: תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה הפועלת על $X$ ויהי $x \in X$ אזי $|o(x)| = [G : \text{Stab}_G(x)]$.

**למה של ברנסייד**: תהא $X$ קבוצה ותהא $G$ חבורה סופית הפועלת על $X$ אזי $|\{o(x) \mid x \in X\}| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\{x \in X \mid g.x = x\}|$.

**הפעולה על הקוסטים השמאליים**: תהא $G$ חבורה ותהא $H \le G$ אזי $\alpha \in G \curvearrowright {}^{G}/_{H}$ המוגדרת $\alpha(g, g'H) = gg'H$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה ותהא $H \le G$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים הינה פעולה טרנזיטיבית.

**פעולות אקוריאנטיות/שקולות**: תהיינה $X, Y$ קבוצות ותהא $G$ חבורה אזי $(\alpha, \beta) \in (G \curvearrowright X) \times (G \curvearrowright Y)$ עבורן קיימת $F : X \to Y$ חח"ע ועל המקיימת $F(\alpha(g, x)) = \beta(g, F(x))$ לכל $g \in G$ ולכל $x \in X$.

**טענה**: תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה תהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית ויהי $x \in X$ עבורו $o(x) = X$ אזי הפעולה על הקוסטים השמאליים של ${}^{G}/_{\text{Stab}_G(x)}$ אקוריאנטית ל־$\alpha$.

**מסקנה**: תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי קיימת $H \le G$ עבורה הפעולה על הקוסטים השמאליים אקוריאנטית ל־$\alpha$.

**טענה**: תהא $X$ קבוצה ותהא $G$ חבורה הפועלת על $X$ אזי $\{o(x) \mid x \in X\}$ חלוקה של $X$.

**מסקנה**: תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה ותהא $\alpha \in G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית אזי לכל $x \in X$ מתקיים $o(x) = X$.

**סימון**: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל יהיו $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ איזומטריות של $\mathbb{R}^3$ ותהא $p \in \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ אזי $\text{Poly}(p) = |\{\varphi_i(P \times \{0\}) \mid p \in \varphi_i(P \times \{0\})\}|$.

**גוף אפלטוני**: קבוצה קמורה לא זניחה $K \subseteq \mathbb{R}^3$ עבורה קיים מצולע משוכלל $P \subseteq \mathbb{R}^2$ וקיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן

- פאות איזומטריות: $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$.
- קודקוד משותף זהה כמות: לכל קודקודים $v_1, v_2 \in K$ מתקיים $\text{Poly}(v_1) = \text{Poly}(v_2)$.

**מספר פאות של גוף אפלטוני**: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $n \in \mathbb{N}$ מינימלי עבורו קיימות איזומטריות $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ של $\mathbb{R}^3$ עבורן $\partial K = \bigcup_{i=1}^n \varphi_i(P \times \{0\})$ באשר $P \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל.

**סימון**: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}(P) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid (\text{איזומטריה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\right\}$.

**סימון**: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני אזי $\text{Iso}_+(P) = \left\{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid (\text{איזומטריה משמרת אוריינטציה } \varphi) \wedge (\varphi(K) = K)\right\}$.

**הגדרה סימון שלפלי**: יהי $K \subseteq \mathbb{R}^3$ גוף אפלטוני בעל $n \in \mathbb{N}$ פאות ויהי $v \in K$ קודקוד אזי $\{n, \text{Poly}(k)\}$.

**הערה**: סימון שלפלי אינו קבוצה אלא סימון.

**דודקהדרון**: גוף אפלטוני $K \subseteq \mathbb{R}^3$ בעל סימון שלפלי $\{5, 3\}$.

**טענה**: יהי $D$ דודקהדרון אזי $\text{Iso}_+(D) \cong A_5$.

**מסקנה**: יהי $D$ דודקהדרון אזי $\text{ord}(\text{Iso}_+(D)) = 60$.

**משפט קיילי**: תהא $G$ חבורה אזי קיימת קבוצה $X$ וקיימת $H \le S(X)$ עבורה $G \cong H$.

**מסקנה**: תהא $G$ חבורה באשר $\text{ord}(G) = \aleph_0$ אזי קיימת $H \le S(\mathbb{N})$ עבורה $G \cong H$.

**משפט קושי**: תהא $G$ חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p | \text{ord}(G)$ אזי קיים $g \in G$ עבורו $\text{ord}(g) = p$.

**מסקנה**: תהא $G$ חבורה סופית ויהי $p \in \mathbb{P}$ עבורו $p | \text{ord}(G)$ אזי קיימת $H \le G$ ציקלית עבורה $\text{ord}(H) = p$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה באשר $\text{ord}(G) = 6$ אזי $G \cong \mathbb{Z}_6$ או $G \cong S_3$.

**פעולת ההצמדה**: תהא $G$ חבורה אזי $\alpha \in G \curvearrowright G$ המוגדרת $\alpha(g, h) = c_g(h)$.

**סימון**: תהא $G$ חבורה ויהיו $h, g \in G$ אזי $h^g = g^{-1}hg$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה ויהיו $g, h, k \in G$ אזי $h^{g \cdot k} = (h^g)^k$.

**מחלקת הצמידות**: תהא $G$ חבורה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = \left\{ghg^{-1} \mid g \in G\right\}$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $[h] = o(h)$.

**מסקנה**: תהא $G$ חבורה אזי $\{[h] \mid h \in G\}$ חלוקה של $G$.

**הממרכז של איבר**: תהא $G$ חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \{g \in G \mid gh = hg\}$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה מצויידת עם פעולת ההצמדה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) = \text{Stab}_G(h)$.

**מסקנה**: תהא $G$ חבורה ויהי $h \in G$ אזי $C_G(h) \le G$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה אזי $\mathcal{Z}(G) = \bigcap_{g\in G} C_G(g)$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה אזי $\mathcal{Z}(G)$ אופיינית.

**טענה**: תהא $G$ חבורה אזי ${}^{G}/_{\mathcal{Z}(G)} \cong \text{Inn}(G)$.

**מסקנה**: תהא $G$ חבורה סופית ויהי $g \in G$ אזי $|[g]| = [G : C_G(g)]$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ויהיו $g,h,k$ באשר $k=ghg^{-1}$ אזי $\left|C_{G}\left(k\right)\right|=\left|C_{G}\left(h\right)\right|$.

**משפט משוואת מחלקות הצמידות:** תהא $G$ חבורה סופית ותהא $C\subseteq G$ קבוצת נציגים של $\left\{ \left[h\right]\mid h\in G\right\}$ אזי $\sum_{g\in C}\frac{1}{\left|C_{G}\left(g\right)\right|}=1$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה סופית אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)=\bigcup\left\{ \left[g\right]\mid\left(g\in G\right)\wedge\left(\left|\left[g\right]\right|=1\right)\right\}$.

**למה:** יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ תהיינה $\alpha,\beta\in S_{n}$ באשר $\beta=\left(\begin{array}{ccc} m_{1,1} & \dots & m_{1,\ell_{1}}\end{array}\right)\circ\ldots\circ\left(\begin{array}{ccc} m_{b,1} & \dots & m_{b,\ell_{b}}\end{array}\right)$ פירוק למעגלים זרים אזי $\alpha\beta\alpha^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} \alpha\left(m_{1,1}\right) & \dots & \alpha\left(m_{1,\ell_{1}}\right)\end{array}\right)\circ\ldots\circ\left(\begin{array}{ccc} \alpha\left(m_{b,1}\right) & \dots & \alpha\left(m_{b,\ell_{b}}\right)\end{array}\right)$.

**למה:** $A_{5}$ פשוטה.

**למה:** יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge5}$ ותהא $H\trianglelefteq A_{n}$ עבורה קיים מעגל $\pi$ בגודל שלוש המקיים $\pi\in H$ אזי $H=A_{n}$.

**למה:** $A_{6}$ פשוטה.

**משפט:** יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge5}$ אזי $A_{n}$ פשוטה ואינה אבלית.

**הישר הפרויקטיבי:** יהי $\mathbb{F}$ שדה ונגדיר $R=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{F}^{2}\backslash\left\{ 0\right\} \mid\exists\lambda\in\mathbb{F}^{\times}\left(x=\lambda y\right)\right\}$ אזי $\mathbb{FP}=\left.\left(\mathbb{F}^{2}\backslash\left\{ 0\right\} \right)\middle/R\right.$.

**טענה:** יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\mathcal{Z}\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right)\right)=\left\{ \lambda I_{n}\mid\lambda\in\mathbb{F}^{\times}\right\}$.

**סימון:** יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $\mathrm{PGL}_{n}\left(\mathbb{F}\right)=\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right)/\mathcal{Z}\left(\mathrm{GL}_{n}\left(\mathbb{F}\right)\right)$.

**חבורת־$p$:** יהי $p\in\mathbb{P}$ אזי חבורה $G$ עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $\left|G\right|=p^{n}$.

**משפט:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורת־$p$ אזי $\mathcal{Z}\left(G\right)\ne\left\{ e\right\}$.

**מסקנה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורה מסדר $p^{2}$ אזי $G$ אבלית.

**טענה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורת־$p$ אזי $G$ נילפוטנטית.

**תת־חבורת $p$ סילו:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ ותהא $G$ חבורה באשר $\left|G\right|=p^{k}\cdot m$ אזי $H\le G$ באשר $\left|H\right|=p^{k}$.

**טענה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא $G$ חבורה סופית ותהא $H\le G$ אזי ($H$ תת־חבורה־$p$ סילו)$\Longleftrightarrow$($H$ חבורת־$p$ וכן לכל $K\le G$ חבורה־$p$ מתקיים $\left|K\right|\le\left|H\right|$).

**טענה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא $G$ חבורה ותהא $H\le G$ אזי ($H$ תת־חבורה־$p$ סילו)$\Longleftrightarrow$($H$ חבורת־$p$ וכן $p\nmid\left[G:H\right]$).

**סימון:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורה סופית אזי $\mathrm{Syl}_{p}\left(G\right)=\left\{ H\le G\mid G\text{ תת־חבורה־}p\text{ סילו של }H\right\}$.

**סימון:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורה סופית אזי $n_{p}=\left|\mathrm{Syl}_{p}\left(G\right)\right|$.

**למה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $n,m\in\mathbb{N}_{+}$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ אזי $p\nmid\binom{p^{n}\cdot m}{p^{n}}$.

**משפט סילו הראשון:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורה סופית אזי קיימת $H\le G$ באשר $H$ תת־חבורה־$p$ סילו של $G$.

**מסקנה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורה סופית אזי $n_{p}\ge1$.

**המנרמל של חבורה:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\le G$ אזי $N_{G}\left(H\right)=\left\{ g\in G\mid gHg^{-1}=H\right\}$.

**טענה:** תהא $G$ חבורה ותהא $H\le G$ אזי $N_{G}\left(H\right)\le G$ וכן $H\trianglelefteq N_{G}\left(H\right)$.

**למה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ תהא $G$ חבורה באשר $\left|G\right|=p^{k}\cdot m$ ותהיינה $H,K\le G$ חבורות־$p$־סילו באשר $H\ne K$ אזי $H\nsubseteq N_{G}\left(K\right)$.

**משפט סילו השני:** יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא $G$ חבורה סופית ותהיינה $H,K$ תת־חבורות־$p$ סילו של $G$ אזי קיים $g\in G$ עבורו $gHg^{-1}=K$.

**מסקנה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא $G$ חבורה סופית ותהא $H$ תת־חבורה־$p$ סילו של $G$ אזי $\left(H\trianglelefteq G\right)\Longleftrightarrow\left(n_{p}=1\right)$.

**קבוצה אינווריאנטית/שמורה לפעולה:** תהא $X$ קבוצה ותהא $G$ חבורה הפועלת על $X$ אזי $Y\subseteq X$ עבורה לכל $g\in G$ ולכל $y\in Y$ מתקיים $g.y\in Y$.

**טענה:** תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה הפועלת על $X$ ותהא $Y\subseteq X$ אזי ($Y$ הינה $G$־שמורה)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\mathcal{O}\subseteq X$ עבורה $Y=\bigcup_{x\in\mathcal{O}}o\left(x\right)$).

**טענה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא $G$ חבורה סופית ונגדיר $\alpha\in G\curvearrowright\mathrm{Syl}_{p}\left(G\right)$ כך $\alpha\left(g,H\right)=gHg^{-1}$ אזי $\alpha$ טרנזיטיבית.

**למה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ תהא $G$ חבורה תהא $H\le G$ תת־חבורת־$p$ סילו תהא $R\subseteq\mathrm{Syl}_{p}\left(G\right)$ באשר $H\in R$ וכן $R$ הינה $H$־שמורה אזי $\left|R\right|\equiv1\mod p$.

**משפט סילו השלישי:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורה סופית אזי $n_{p}\equiv1\mod p$.

**מסקנה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ויהיו $m,k\in\mathbb{N}$ באשר $\gcd\left(p,m\right)=1$ ותהא $G$ חבורה באשר $\left|G\right|=p^{k}\cdot m$ אזי $n_{p}|m$.

**מסקנה:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורה סופית אזי $n_{p}|\mathrm{ord}\left(G\right)$.

**מסקנה משפטי סילו:** יהי $p\in\mathbb{P}$ ותהא $G$ חבורה סופית אזי

1. קיימת $H\le G$ באשר $H$ תת־חבורה־$p$ סילו של $G$.
2. תהיינה $H,K$ תת־חבורות־$p$ סילו של $G$ אזי קיים $g\in G$ עבורו $gHg^{-1}=K$.

3. $n_p \equiv 1 \mod p$.

**טענה**: יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא $H \leq S_p$ באשר $|H| = p$ אזי קיים $p$־מעגל $\pi \in S_p$ עבורו $H = \langle \pi \rangle$.

**מסקנה משפט ווילסון**: יהי $p \in \mathbb{P}$ אזי $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.

**טענה**: יהיו $p, q \in \mathbb{P}$ באשר $p < q$ וכן $q \not\equiv 1 \mod p$ ותהא $G$ חבורה מסדר $pq$ אזי $G$ ציקלית.

**טענה**: יהי $p \in \mathbb{P}_{>2}$ ותהא $G$ חבורה מסדר $2p$ אזי $G \cong C_{2p}$ או $G \cong D_p$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה סופית יהי $p \in \mathbb{P}$ ותהא $P \leq G$ תת־חבורת־$p$ אזי $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.

**סימון**: תהא $(G, +)$ חבורה אזי $e_G = 0$ וכן $-x = x^{-1}$ לכל $x \in G$ וכן $g^n = ng$ לכל $n \in \mathbb{Z}$ ולכל $g \in G$.

**חבורת המכפלה**: תהא $I$ קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות נגדיר $(g \cdot h)_i = g_i \cdot h_i$ לכל $g, h \in \prod_{i \in I} G_i$ ולכל $i \in I$ אזי $(\prod_{i \in I} G_i, \cdot)$.

**טענה**: תהא $I$ קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\prod_{i \in I} G_i$ חבורה.

**חבורת הסכום הישר**: תהא $I$ קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i \in I} G_n = \left\{g \in \prod_{i \in I} G_i \mid |\{i \in I \mid g_i \neq e_{G_i}\}| \in \mathbb{N}\right\}$.

**טענה**: תהא $I$ קבוצה ותהיינה $\{G_i \mid i \in I\}$ חבורות אזי $\bigoplus_{i \in I} G_n \leq \prod_{i \in I} G_i$.

**חבורת פיתול**: חבורה $G$ עבורה $T(G) = G$.

**חבורה חסרת פיתול**: חבורה $G$ עבורה לכל $T(G) = \{e\}$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה אבלית אזי ${}^{G}/_{T(G)}$ חסרת פיתול.

**טענה**: תהא $G$ חבורה נ"ס ותהא $H \trianglelefteq G$ אזי ${}^{G}/_{H}$ נ"ס.

**מסקנה**: תהיינה $G, H, K$ חבורות באשר $G \cong H \times K$ אזי ($G$ נ"ס)$\Longleftrightarrow$($H, K$ נ"ס).

**חבורה אבלית חופשית**: תהא $X$ קבוצה אזי $\bigoplus_X \mathbb{Z}$.

**בסיס של חבורה אבלית חופשית**: תהא $X$ קבוצה ותהא $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ חבורה אבלית חופשית אזי $X$.

**הערה**: תהא $X$ קבוצה אזי נשכן בצורה טבעית את $X$ בתוך החבורה האבלית החופשית עם בסיס $X$ כך $x \mapsto e_x$.

**משפט התכונה האוניברסלית**: תהא $X$ קבוצה תהא $G$ חבורה ותהא $f : X \to G$ אזי קיים ויחיד הומומורפיזם $\varphi : \bigoplus_X \mathbb{Z} \to G$ עבורו $\varphi(x) = f(x)$ לכל $x \in X$.

**משפט תכונת ההרמה**: תהא $F$ חבורה אבלית חופשית תהיינה $A, B$ חבורות אבליות יהי $\varphi : A \to B$ אפימורפיזם ויהי $\psi : F \to B$ הומומורפיזם אזי קיים הומומורפיזם $\hat{\psi} : F \to A$ עבורו $\varphi \circ \hat{\psi} = \psi$.

**טענה**: תהא $G$ חבורה אבלית ותהא $H \leq G$ באשר ${}^{G}/_{H}$ אבלית חופשית אזי $G \cong H \oplus {}^{G}/_{H}$.

**משפט**: תהא $G$ אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי $G$ אבלית חופשית עם בסיס סופי.

**מסקנה**: תהא $G$ אבלית נ"ס וחסרת פיתול אזי קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו $G \cong \mathbb{Z}^k$.