קטע/אינטרוול: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$

- $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$.
- $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$.
- $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$.
- $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$.
- $(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$.
- $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\}$.
- $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$.
- $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le b\}$.
- $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$.

שדה סדור: שדה $\mathbb{F}$ ויחס סדר חזק $<$ על $\mathbb{F}$ המקיים

- טריכוטומיה/לינאריות: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\,(x<y)\vee(x>y)\vee(x=y)$.
- קומפטביליות עם חיבור: $\forall x,y,z\in\mathbb{F}.x<y\implies x+z<y+z$.
- קומפטביליות עם כפל: $\forall x,y\in\mathbb{F}.\forall z>0_{\mathbb{F}}.x<y\implies x\cdot z<y\cdot z$.

תכונת ארכימדס: $\forall x\in\mathbb{F}.\exists n\in\mathbb{N}.x<\sum_{i=0}^{n}1$.

טענה: $\mathbb{R}$ מקיים את תכונת ארכימדס.

הערך השלם/ערך שלם תחתון: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\lfloor x\rfloor=[x]=\max\left(n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\right)$.

הערך השברי: יהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $\{x\}=x-[x]$.

ערך שלם עליון: $\lceil x\rceil=\min\left(n\in\mathbb{Z}\mid x\le n\right)$.

טענה: $\nexists q\in\mathbb{Q}.q^2=2$.

טענה: $\nexists x\in\mathbb{Q}.\forall a\in\left\{y\in\mathbb{Q}.y^2\le 2\right\}.\forall b\in\left\{y\in\mathbb{Q}_+\mid y^2\ge 2\right\}.a\le x\le b$.

חסם מלעיל: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

קבוצת החסמים מלעיל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid$ חסם מלעיל של A $x\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\overline{B}_A\neq\varnothing$.

חסם מלרע: $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

קבוצת החסמים מלרע: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\underline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid$ חסם מלרע של A $x\}$.

קבוצה חסומה מלרע: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\underline{B}_A\neq\varnothing$.

קבוצה חסומה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת (חסומה מלעיל)$\wedge$(חסומה מלרע).

מקסימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.y\le x$.

סימון: המקסימום של A הוא $\max\left(A\right)$.

מינימום: $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיים $\forall y\in A.x\le y$.

סימון: המינימום של A הוא $\min\left(A\right)$.

אקסיומת השלמות: יהיו $\varnothing\neq X,Y\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le y\right)\implies\left(\exists c\in\mathbb{R}.\forall x\in X.\forall y\in Y.x\le c\le y\right)$.

טענה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\{\varnothing\}.\left(\overline{B}_A\neq\varnothing\right)\implies\exists\min\left(\overline{B}_A\right)$.

מסקנה: $\forall A\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\{\varnothing\}.\left(\underline{B}_A\neq\varnothing\right)\implies\exists\max\left(\underline{B}_A\right)$.

טענה: $\mathbb{R}$ הוא השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את $\mathbb{Q}$.

סופרמום/חסם עליון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\sup\left(A\right)=\min\left(\overline{B}_A\right)$.

אינפימום/חסם תחתון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\inf(A)=\max(\underline{B}_A)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(\exists\max(A)\implies\sup(A)=\max(A))\wedge(\exists\min(A)\implies\inf(A)=\min(A))$.

טענה: יהיו $a<b\in\mathbb{R}$ אזי $\inf(a,b)=a\wedge\sup(a,b)=b$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל ויהי $b\in\mathbb{R}$ חסם מלעיל של A התב"ש

- $b=\sup(A)$.
- $\forall d\in\overline{B}_A.b\leq d$.
- $\forall a\in\mathbb{R}.a<b\implies a\notin\overline{B}_A$.

מסקנה: תהא $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\sup(A)-\varepsilon<a\leq\sup(A)$.

מסקנה: תהא $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $b=\sup(A)\iff(\forall x\in A.x\leq b)\wedge(\forall\varepsilon>0.\exists x\in A.x>b-\varepsilon)$.

טענה: תהיינה $\varnothing\neq A,B\subseteq\mathbb{R}$ חסומות

- $\inf(A+B)=\inf(A)+\inf(B)$.
- $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.
- $\sup(-A)=-\inf(A)$.

טענה: $\forall c\in\mathbb{R}_+.\exists b\in\mathbb{R}_+.b^2=c$.

טענה: $\forall c\in\mathbb{R}_+.\forall n\in\mathbb{N}.\exists b\in\mathbb{R}_+.b^n=c$.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.|b-a|<\varepsilon$.

טענה: תהא $S\subseteq\mathbb{R}$ אזי (S צפופה ב־$\mathbb{R}$) $\iff(\forall a,b\in\mathbb{R}.a<b\implies(a,b)\cap S\neq\varnothing)$.

טענה: $\forall a,b\in\mathbb{Q}.a<b\implies|(a,b)\cap\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

טענה: $\forall a,b\in\mathbb{Q}.a<b\implies\exists r\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.a<r<b$.

טענה: $\forall x,y\in\mathbb{R}.x<y\implies\exists q\in\mathbb{Q}.x<q<y$.

מסקנה: ($\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$)$\wedge$(לכל $a<b$ מתקיים כי $[a,b]\cap\mathbb{Q}$ צפופה ב־$[a,b]$).

עצרת: יהי $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $n!=\begin{cases}1 & n=0\\(n-1)!\cdot n & else\end{cases}$.

בחר: יהיו $n,k\in\mathbb{N}$ אזי $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

זהות פסקל: יהיו $n,k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.

נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$.

למה: יהיו $a_1\ldots a_n\geq0$ המקיימים $\prod_{i=1}^{n}a_i=1$ אזי $\sum_{i=1}^{n}a_i\geq n$.

אי־שיוויון הממוצעים: יהיו $a_1\ldots a_n>0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}\geq\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}\geq\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$.

טענה: $(a_1=\ldots=a_n)\iff\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}\right)$.

אי־שיוויון ברנולי: $\forall x>-1.\forall n\in\mathbb{N}.(1+x)^n\geq1+nx$.

אי־שיוויון ברנולי המוכלל: $\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in\mathbb{R}^n.\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

הערך המוחלט: $|x|=\begin{cases}x & x\geq0\\-x & x<0\end{cases}$.

טענה: $(|a|\leq b\iff-b\leq a\leq b)\wedge(|a|\geq b\iff(b\leq a)\vee(a\leq-b))$.

אי־שיוויון המשולש (אש"מ): יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $|a+b|\leq|a|+|b|$.

אי־שיוויון המשולש המוכלל: יהיו $x_1\ldots x_n\in\mathbb{R}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $|a-b|\le|a|+|b|$.

מסקנה: יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$ אזי $|x-y|\le|x-z|+|z-y|$.

אי־שיוויון המשולש ההפוך: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $||a|-|b||\le|a-b|$.

טענה: $\forall a,b\in\mathbb{R}.\left(\forall\varepsilon>0.\left|a-b\right|<\varepsilon\right)\implies a=b$.

טענה: יהי $r\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sum_{i=0}^{n}r^{i}=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

סדרה: $a\in\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

סימון: תהא a סדרה אזי $a_n=a\left(n\right)$, $a=\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty}$.

הגדרה: תהא a_n סדרה

- סדרה חיובית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n>0$.
- סדרה אי שלילית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\ge0$.
- סדרה שלילית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n<0$.
- סדרה אי חיובית: $\forall n\in\mathbb{N}.a_n\le0$.

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה

- עולה ממש: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\implies a_n<a_m$.
- עולה: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\implies a_n\le a_m$.
- יורדת ממש: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\implies a_n>a_m$.
- יורדת: $\forall n,m\in\mathbb{N}.n<m\implies a_n\ge a_m$.

סדרה חסומה מלעיל: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.a_n<M$.

סדרה חסומה מלרע: סדרה a המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.M<a_n$.

סדרה חסומה: (חסומה מלרע)$\wedge$(חסומה מלעיל).

סדרה מתכנסת/גבול סופי: תהא a סדרה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.\left|a_n-L\right|<\varepsilon\right)$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L\right)\iff\left(a_n\to L\right)$.

טענה: $\left(\forall r\in\mathbb{R}.\lim_{n\to\infty}r=r\right)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\right)$.

טענה: $\left(\forall\alpha\in\mathbb{Q}_{+}.\frac{1}{n^{\alpha}}\to0\right)\wedge\left(\sqrt[n]{n}\to1\right)\wedge\left(\forall c>0.\sqrt[n]{c}\to1\right)\wedge\left(\forall q\in\left(0,1\right).q^{n}\to0\right)$.

משפט: תהא a סדרה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L_1\right)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L_2\right)\implies L_1=L_2$.

משפט: תהא a סדרה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)\implies\left(\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\left|L\right|\right)$.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=0\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\left|a_n\right|=0\right)$.

טענה: תהיינה a,b סדרות עבורן $\left|\left\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\ne b_n\right\}\right|\in\mathbb{N}$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}b_n=L\right)$.

טענה: תהא a סדרה נגדיר $b_{n+k}=a_n$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}b_n=L\right)$.

סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא a סדרה

- $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.M<a_n\right)$.
- $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty\right)\iff\left(\forall M>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_n<-M\right)$.

טענה: $\left(\lim_{n\to\infty}n=\infty\right)\wedge\left(\forall a>1.\lim_{n\to\infty}a^{n}=\infty\right)$.

טענה: תהא a סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\infty$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אזי a חסומה.

מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}a_n=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\left|\left\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\notin\left(L-\varepsilon,L+\varepsilon\right)\right\}\right|\in\mathbb{N}\right)$.

למה: תהא a סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אזי $\forall r \in (0, |L|) .\exists N \in \mathbb{N}.\forall n > N. |a_n| > r$.

סימון: תהא a סדרה מונוטונית
- a יורדת ממש אזי $(a_n \to L) \iff (a_n \downarrow L)$.
- a עולה ממש אזי $(a_n \to L) \iff (a_n \uparrow L)$.
- a יורדת אזי $(a_n \to L) \iff (a_n \searrow L)$.
- a עולה אזי $(a_n \to L) \iff (a_n \nearrow L)$.

טענה: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי קיימות סדרות $a, b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ עבורן $(a_n \searrow x) \wedge (b_n \nearrow x)$.

ייצוג עשרוני: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי קיים $a \in \{0, \ldots, 9\}^{\mathbb{Z}}$ המקיים $x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$.

פיתוח מחזורי אינסופי: יהיו $d_1 \ldots d_n$ אזי $\overline{d_1 \ldots d_n} = d_1 \ldots d_n d_1 \ldots d_n \ldots$.

טענה: יהי $q \in \mathbb{R}$ אזי $\left(q = a.a_1 \ldots a_n \overline{b_1 \ldots b_\ell}\right) \iff (q \in \mathbb{Q})$.

משפט אוקלידס: $\mathbb{P}$ חסומה מלרע אך לא מלעיל.

סדרות אוקלידס־מולין: יהי $p_1 \in \mathbb{P}$ נגדיר $p_n \in \left\{p \in \mathbb{P} \mid p | \left(1 + \prod_{i=1}^{n-1} p_i\right)\right\}$.

טענה: עבור $p_1 = 2$ ועבור p_n מינימלי לא ידוע אם $\text{Im}(p) = \mathbb{P}$.

משפט דריכלה: $\forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \left|\left\{\langle p, q\rangle \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N} \mid \left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\right\}\right| \geq \aleph_0$.

מספר מקורב רע: $a \in \mathbb{R}$ המקיים $\left(\exists c \in \mathbb{R}. \frac{c}{q^2} < \left|\theta - \frac{p}{q}\right|\right) \impliedby \left(\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\right) .\forall p \in \mathbb{Q}.\forall q \in \mathbb{N}$.

חשבון גבולות: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ותהיינה $(a_n), (b_n)$ סדרות המקיימות $(a_n \to a) \wedge (b_n \to b)$
- $a_n + b_n \to a + b$.
- $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.
- $\left(\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}\right) \impliedby (b \neq 0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}. b_n \neq 0)$.

למה: תהא d_n סדרה המקיימת $\forall n \in \mathbb{N}. d_n \geq 0$ אזי $(d \geq 0) \impliedby (d_n \to d)$.

טענה: תהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n \to L$ ויהי $k \in \mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{L}$.

סימון: יהיו a_n, b_n סדרות
- $(a_n \preccurlyeq b_n) \impliedby (\exists N \in \mathbb{N}.\forall n \geq N. a_n \leq b_n)$.
- $(a_n \prec b_n) \impliedby (\exists N \in \mathbb{N}.\forall n \geq N. a_n < b_n)$.

מונוטוניות גבולות: תהיינה a_n, b_n סדרות מתכנסות אזי $(\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n) \impliedby (a_n \preccurlyeq b_n)$.

משפט הסנדוויץ': תהיינה a_n, b_n, c_n סדרות המקיימות $a_n \preccurlyeq b_n \preccurlyeq c_n$ אזי $(b_n \to L) \impliedby (a_n, c_n \to L)$.

טענה: תהא a_n סדרה חסומה ותהא b_n סדרה המקיימת $b_n \to 0$ אזי $a_n b_n \to 0$.

מסקנה: תהא a_n סדרה חסומה אזי $\frac{a_n}{n} \to 0$.

משפט: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי $\exists b \in B^{\mathbb{N}}. b_n \to \sup(B)$.

מסקנה: תהא $B \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי $\exists b \in B^{\mathbb{N}}. b_n \to \inf(B)$.

טענה: תהיינה a_n, b_n סדרות
- $(b_n \to \infty) \impliedby (a_n \to \infty) \wedge (a_n \preccurlyeq b_n)$.
- $(b_n \to -\infty) \impliedby (a_n \to -\infty) \wedge (b_n \preccurlyeq a_n)$.

מבחן השורש: תהא a_n סדרה אי שלילית אזי $(a_n \to 0) \impliedby (\exists \alpha \in [0, 1) . a_n \prec \alpha^n)$.

מבחן השורש הגבולי: יהי $p \in \mathbb{R}$ ותהא a_n סדרה אי שלילית המקיימת $a_n^{\frac{1}{n}} \to p$
- $a_n \to 0 \impliedby 0 \leq p < 1$.
- $a_n \to \infty \impliedby p > 1$.

סימון : תהא a_n סדרה חסומה מלעיל אזי $(\sup(a_n)=\sup(\mathrm{Im}(a)))\wedge(\inf(a_n)=\inf(\mathrm{Im}(a)))$.

משפט : תהא a_n סדרה

- אם a_n מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי $a_n\nearrow\sup(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי $a_n\nearrow\infty$.
- אם a_n מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי $a_n\searrow\inf(a_n)$.
- אם a_n מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי $a_n\searrow-\infty$.

מבחן המנה הגבולי : תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L$

- $(L<1)\implies(a_n\to0)$.
- $(L>1)\implies(a_n\to\infty)$.

התכנסות צ'זארו : תהא a_n סדרה אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני : תהא a_n סדרה המקיימת $a_n\to a$ במובן הרחב אזי $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=a$.

משפט התכנסות ממוצע הנדסי : תהא a_n סדרה חיובית המקיימת $a_n\to a$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}a_i}\to a$.

משפט ד'אלאמבר : תהא a סדרה חיובית המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to c$ במובן הרחב אזי $\sqrt[n]{a_n}\to c$.

למה : תהא a סדרה המקיימת $a\to L$ במובן הרחב ותהא $t\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=1}^{n}t_k\to\infty$ אזי $\frac{\sum_{k=1}^{n}t_ka_k}{\sum_{k=1}^{n}t_k}\to L$.

משפט שטולץ : תהא a סדרה ותהא $b\uparrow\infty$ סדרה נניח כי $\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\to L$ במובן הרחב אזי $\frac{a_n}{b_n}\to L$.

טענה : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה וחסומה.

מסקנה : $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\in(2,3]$.

טענה : תהא $a\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $a_n\to\infty$ אזי $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\to e$.

תת סדרה/סדרה חלקית (ת"ס) : תהא a סדרה ותהא $n\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ עולה אזי $(a_{n_i})_{i=0}^{\infty}$.

משפט הירושה : תהא a סדרה ותהא b תת סדרה

- a חסומה מלעיל $\Longleftarrow$ b חסומה מלעיל.
- a חסומה מלרע $\Longleftarrow$ b חסומה מלרע.
- $a\to L\implies b\to L$.
- a מונוטונית $\Longleftarrow$ b מונוטונית.

טענה : תהא a סדרה המקיימת $\nexists\max(a)$ אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש.

טענה : תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מונוטונית.

הלמה של קנטור על קטעים מקוננים : תהיינה a,b סדרות המקיימות $b-a\to0$ וגם $(\left[a_{n+1},b_{n+1}\right]\subseteq\left[a_n,b_n\right])\wedge(a_n\le b_n).\forall n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\bigcap_{n=0}^{\infty}\left[a_n,b_n\right]\right|=1$.

קבוצת קנטור : $\mathcal{C}=[0,1]\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס : תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.

משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל : תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.

סימון : $\mathbb{R}_\infty=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$.

גבול חלקי : תהא a סדרה אזי $x\in\mathbb{R}_\infty$ עבורו קיימת תת סדרה b עבורה $b\to x$ במובן הרחב.

סימון : תהא a סדרה אזי $\mathcal{P}(a)=\{L\in\mathbb{R}\mid a \text{ גבול חלקי של } L\}$, $\widehat{\mathcal{P}}(a)=\{L\in\mathbb{R}_\infty\mid a \text{ גבול חלקי של } L\}$.

טענה : תהא a סדרה

- a אינה חסומה מלעיל $\iff\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$.
- a אינה חסומה מלרע $\iff-\infty\in\widehat{\mathcal{P}}$.

טענה: תהא a סדרה אזי $\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|>0$.

משפט: תהא a סדרה אזי $\left(L\in\mathcal{P}\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\left|\left\{ a_{n}\mid\left|a_{n}-L\right|<\varepsilon\right\} \right|=\aleph_{0}\right)$.

מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי $\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\subseteq\left[\inf\left(a\right),\sup\left(a\right)\right]$.

סימון: תהא a סדרה אזי $\lim\left(\sup\left(a\right)\right)=\overline{\lim}\left(a\right)=\sup\left(\mathcal{P}\right)$, $\lim\left(\inf\left(a\right)\right)=\underline{\lim}\left(a\right)=\sup\left(\mathcal{P}\right)$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת) $\iff\left(\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\right)\wedge\left(\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|=1\right)$.

משפט: תהא a סדרה חסומה אזי $\exists\min\left(\mathcal{P}\right),\max\left(\mathcal{P}\right)$.

טענה: יהיו $b_{1}\ldots b_{m}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זרות בזוגות המקיימות $\left(\bigcup b_{i}=\mathbb{N}\right)\wedge\left(b_{i}\uparrow\infty\right)$ ותהא a סדרה אזי $\widehat{\mathcal{P}}\left(a\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\widehat{\mathcal{P}}\left(a_{b_{i}}\right)$.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.\left(x-\varepsilon,x+\varepsilon\right)\subseteq A$.

טענה: תהיינה $A_{1},A_{2},\ldots$ סדרת קבוצות פתוחות אזי ($\bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}$ פתוחה)$\wedge$($\bigcap_{i=1}^{n}A_{i}$ פתוחה).

קבוצה סגורה: $B\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\mathbb{R}\backslash B$ פתוחה.

טענה: תהיינה $B_{1},B_{2},\ldots$ סדרת קבוצות סגורות אזי ($\bigcup_{i=1}^{n}B_{i}$ סגורה)$\wedge$($\bigcap_{i=1}^{\infty}B_{i}$ סגורה).

נקודת הצטברות: תהא $S\subseteq\mathbb{R}$ אזי $x\in\mathbb{R}$ המקיימת $\exists a\in\left(S\backslash\left\{ x\right\} \right)^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_{n}=x$.

טענה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- B קבוצה סגורה.
- $\forall a\in B^{\mathbb{N}}.\lim_{n\to\infty}a_{n}\in B$.
- $\left\{ x\in\mathbb{R}\mid B\text{ נקודת הצטברות של }x\right\} \subseteq B$.

משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים $\mathcal{P}\left(a\right)$ קבוצה סגורה.

כמעט תמיד: פרידקט $P\left(n\right)$ המקיים $\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.P\left(n\right)$.

שכיח: פרידקט $P\left(n\right)$ המקיים $\left|\left\{ n\in\mathbb{N}\mid P\left(n\right)\right\} \right|=\aleph_{0}$.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת) $\iff\left(\limsup a=\liminf a\right)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in\left[-\infty,\infty\right]$

- $\left(\limsup a\leq L\right)\implies\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_{n}\leq L\right)$.
- $\left(\limsup a\geq L\right)\implies\left(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_{n}\geq L\right)$.
- $\left(\liminf a\geq L\right)\implies\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n>N.a_{n}\geq L\right)$.
- $\left(\liminf a\geq L\right)\implies\left(\forall N\in\mathbb{N}.\exists n>N.a_{n}\leq L\right)$.

משפט: תהא a סדרה ויהי $L\in\mathbb{R}$ התב"ש

- $\limsup a=L$.
- $\forall\varepsilon>0.\left(\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.a_{n}<L+\varepsilon\right)\wedge\left(\forall\varepsilon>0.\forall N\in\mathbb{N}.\exists n\geq N.a_{n}>L-\varepsilon\right)$.

משפט: תהיינה a,b סדרות המקיימות $a_{n}\preccurlyeq b_{n}$ אזי $\left(\limsup a\leq\limsup b\right)\wedge\left(\liminf a\leq\liminf b\right)$.

סדרת קושי: סדרה a המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall m,n\geq N.\left|a_{m}-a_{n}\right|<\varepsilon$.

למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.

משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת) $\iff$ (a סדרת קושי).

סכום אינסופי: יהי $k\in\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{i=k}^{\infty}a_{i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=k}^{n}a_{i}$.

טור: תהא a סדרה אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_{i}$.

סימון: יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$ טור אזי $\sum a_{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}$.

סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרה אזי $S_{n}^{a}=\sum_{i=0}^{n}a_{i}$.

טור מתכנס: תהא a סדרה אזי $\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_{i}=L\right)\implies\left(S_{n}^{a}\to L\right)$.

טור גאומטרי : יהי $a \neq 0$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$.

משפט : יהי $r \in \mathbb{R}$ אזי ($\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ מתכנס) $\iff$ $(|r| < 1)$.

הטור ההרמוני : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

טענה : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$.

משפט : תהא a סדרה אזי ($\sum_{i=0}^{\infty} a_n$ מתכנס) $\Longleftarrow$ $(a_n \to 0)$.

קריטריון קושי : יהי $\sum a_n$ טור אזי ($\sum a_n$ מתכנס) $\iff$ $\left(\forall \varepsilon > 0.\exists N \in \mathbb{N}.\forall m > N.\forall k \in \mathbb{N}.\left|\sum_{n=m}^{m+k} a_n\right| < \varepsilon\right)$.

חשבון טורים : יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ טורים ויהי $\xi \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ מתכנס.
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} \xi a_n$ מתכנס.

הגדרה : יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור

- טור חיובי : $\forall n \in \mathbb{N}.a_n > 0$.
- טור אי שלילי : $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \geq 0$.
- טור שלילי : $\forall n \in \mathbb{N}.a_n < 0$.
- טור אי חיובי : $\forall n \in \mathbb{N}.a_n \leq 0$.

טור מתכנס בהחלט : טור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ המקיים $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

טענה : יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בהחלט אזי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס.

סימון : יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים חיוביים עבורם ממקום מסויים $a_n \leq b_n$ אזי $\sum a_n \preccurlyeq \sum b_n$.

משפט ההשוואה : יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים המקיימים $\sum a_n \preccurlyeq \sum b_n$

- ($\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס) $\Longleftarrow$ ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס).
- ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר) $\Longleftarrow$ ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר).

מבחן ההשוואה הגבולי : יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות המקיימות $\frac{a_n}{b_n} \to L$ במובן הרחב

- $(\sum a_n < \infty \iff \sum b_n < \infty) \implies L \in (0, \infty)$.
- $(\sum a_n < \infty \implies \sum b_n < \infty) \implies L = 0$.
- $(\sum a_n < \infty \Longleftarrow \sum b_n < \infty) \implies L = \infty$.

מבחן השורש : יהי $\sum a_n$ טור אי שלילי (קיים $q \in (0,1)$ עבורו כמעט תמיד $a_n^{\frac{1}{n}} < q$) $\Longleftarrow$ ($\sum a_n$ מתכנס).

מבחן השורש הגבולי : יהי $\sum a_n$ טור חיובי

- ($\sum a_n$ מתכנס) $\Longleftarrow$ $\left(\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right) < 1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר) $\Longleftarrow$ $\left(\lim\left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right) > 1\right)$.

מבחן המנה לטורים חיוביים : יהי $\sum a_n$ טור חיובי

- (קיים $q \in (0,1)$ עבורו כמעט תמיד $\frac{a_n+1}{a_n} < q$) $\Longleftarrow$ ($\sum a_n$ מתכנס).
- (כמעט תמיד $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$) $\Longleftarrow$ ($\sum a_n$ מתבדר).

מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים : יהי $\sum a_n$ טור חיובי

- ($\sum a_n$ מתכנס) $\Longleftarrow$ $\left(\lim\left(\sup\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) < 1\right)$.
- ($\sum a_n$ מתבדר) $\Longleftarrow$ $\left(\lim\left(\inf\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right) > 1\right)$.

משפט העיבוי : תהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס) $\iff$ ($\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס).

מסקנה : יהי $m \geq 2$ ותהא a_n סדרה אי שלילית יורדת אזי ($\sum a_n$ מתכנס) $\iff$ ($\sum m^n a_{m^n}$ מתכנס).

מסקנה : יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי ($\sum \frac{1}{n^x}$ מתכנס) $\iff (x > 1)$.

משפט לייבניץ : תהא $a_n \searrow 0$ אזי $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.

טור מתכנס בתנאי : טור $\sum a_n$ מתכנס המקיים $\sum |a_n|$ מתבדר.

טענה : תהיינה a, b סדרות אזי $\sum_{k=m}^{n} a_k (b_{k+1} - b_k) = (a_n b_{n+1} - a_m b_m) - \sum_{k=m+1}^{n} b_k (a_k - a_{k-1})$.

התמרת אבל : תהיינה a, b סדרות אזי $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} a_m (b_k - b_{k+1})$.

קריטריון דריכלה : תהא $b \to 0$ סדרה מונוטונית ותהא a סדרה עבורה S_n^a חסומה אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

קריטריון אבל : יהי $\sum a_n$ טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

משפט : $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$.

משפט : יהי $\sum a_n = L$ טור ותהא $\underset{b_0=0}{b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ עולה ממש אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L$.

למה : תהא a סדרה ותהא $\underset{b_0=0}{b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ עולה ממש כך ש־$(a_i)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1}$ בעלי אותו סימן וגם $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L$ אזי $\sum a_n = L$.

משפט : יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתכנס ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

סימון : תהא a_n סדרה אזי $\left(a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}\right) \wedge \left(a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}\right)$.

משפט : תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בהחלט) $\iff$ ($\sum a_n^+$ מתכנס)$\wedge$($\sum a_n^-$ מתכנס).

משפט : יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בהחלט ויהי $p \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג אזי $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

משפט : תהא a_n סדרה אזי ($\sum a_n$ מתכנס בתנאי) $\Longleftarrow$ $\left(\sum a_n^+ = \infty = \sum a_n^-\right)$.

משפט רימן : יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי $\forall S \in [-\infty, \infty] . \exists \sigma \in \mathbb{N} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{N} . \sum a_{\sigma(n)} = S$.

טענה : יהי $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אזי קיים $\sigma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ זיווג עבורו $\nexists \sum a_{\sigma(n)}$.

משפט קושי : יהיו $p, q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_n, \sum b_n$ טורים מתכנסים בהחלט אזי $\sum \sum a_{p(n)} b_{q(k)} = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.

טור חזקות : תהא a_n סדרה ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k (x - x_0)^k$.

משפט : יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט עבור $x \in (-|q|, |q|)$.

משפט אבל : יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0, \infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס בהחלט} & x \in (-R, R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R, R] \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות : יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0, \infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד : יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה : יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי$\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = \infty \implies R = 0\right) \wedge \left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0 \implies R = \infty\right)$.

מכפלת קושי : יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות אזי $\left(\sum a_n x^n\right)\left(\sum b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$.

טענה : יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות המתכנסים עבור $q \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n$ מתכנס עבור q.

התכנסות צ'זארו : יהי $\sum a_n$ טור אזי $(C) \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n}$.

טענה : יהי $\sum a_n$ טור אזי $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} S_i^a}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_n \left(1 - \frac{i}{n}\right)$.

פונקציה מונוטונית : תהא $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

- עולה ממש : $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \implies f(x) < f(y)$.
- עולה : $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \implies f(x) \le f(y)$.
- יורדת ממש : $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \implies f(x) > f(y)$.
- יורדת : $\forall x, y \in \mathbb{R} . x < y \implies f(x) \ge f(y)$.

טענה : יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי x^n מונוטונית עולה ממש בקטע $[0, \infty)$.

טענה : יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left(f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}\right) \implies (f(x) = x^n)$.

טענה: יהיו $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$ המקיימים $\frac{m}{n}=\frac{k}{\ell}$ אזי $\left(x^{m}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(x^{k}\right)^{\frac{1}{\ell}}$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהיינה $a,b\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימות $a_n,b_n\searrow b$ אזי $\lim\left(c^{a_n}\right)=\lim\left(c^{b_n}\right)$.

הגדרה: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ יהי $b\in\mathbb{R}$ ותהא $b\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $b_n\searrow b$

- $x^{-n}=\frac{1}{x^{n}}$.
- $x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{m}\right)^{\frac{1}{n}}$.
- $a^{b}=\lim a^{b_n}$.

פונקציית החזקה: יהי $0<\alpha$ נגדיר $f\in[0,\infty)^{[0,\infty)}$ כך $f\left(x\right)=x^{\alpha}$.

פונקציית החזקה: יהי $0>\alpha$ נגדיר $f\in(0,\infty)^{(0,\infty)}$ כך $f\left(x\right)=x^{\alpha}$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

משפט: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\left(x^{a}x^{b}=x^{a+b}\right)\wedge\left(\left(x^{a}\right)^{b}=x^{ab}\right)\wedge\left(\left(yx\right)^{a}=y^{a}x^{a}\right)$.

טענה: יהי $x>1$ ויהיו $0<r<\ell$ אזי $x^{r}<x^{\ell}$.

טענה: יהי $0<x<1$ ויהיו $0<r<\ell$ אזי $x^{r}>x^{\ell}$.

הפונקציה המעריכית: יהי $0<\alpha\neq1$ נגדיר $f\in(0,\infty)^{\mathbb{R}}$ כך $f\left(x\right)=a^{x}$.

סינוס: נגדיר $\sin:[0,2\pi]\to[-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ממול הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

סינוס: $\forall k\in\mathbb{N}.\sin\left(x+2\pi k\right)=\sin\left(x\right)$

קוסינוס: נגדיר $\cos:[0,2\pi]\to[-1,1]$ בתור היחס בין הצלע ליד הזווית ליתר במשולש ישר זווית.

קוסינוס: $\forall k\in\mathbb{N}.\cos\left(x+2\pi k\right)=\cos\left(x\right)$

טנגנס: נגדיר $\tan:\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ כך $\tan\left(x\right)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

קוטנגנס: נגדיר $\cot:\mathbb{R}\backslash\left\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$ כך $\tan\left(x\right)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

טענה: טריגונומטריות זהויות.

הגדרה: $\left(\arcsin=\sin^{-1}\right)\wedge\left(\arccos=\cos^{-1}\right)\wedge\left(\arctan=\tan^{-1}\right)\wedge\left(\text{arccot}=\cot^{-1}\right)$.

לוגריתם: יהי $a>0$ נסמן $f\left(x\right)=a^{x}$ אזי $\left(f\right)^{-1}=\log_{a}$.

סימון (הלוגריתם הטבעי): $\ln=\log_{e}$.

טענה: לוגרתמיות זהויות.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\exists a\in\mathbb{R}_{+}.f\left(x+a\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה זוגית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.

פונקציה אי־זוגית: $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\forall x\in\mathbb{R}.f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

קטע מנוקב/סביבה: יהי $\delta>0$ ויהי $x\in\mathbb{R}$ אזי $I_x=\left(x-\delta,x+\delta\right)\backslash\left\{x\right\}$.

פונקציה מתכנסת/גבול סופי: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימות $a<x_0<b$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$

- בנקודה: $A=I_{x_0}$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_0}.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_n\to x_0\right)\implies\left(f\left(y_n\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי מימין: $A=\left(x_0,b\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_0^{+}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(x_0,\min\left\{x_0+\delta,b\right\}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.
  - היינה: $\left(\lim_{x\to x_0^{+}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_n\downarrow x_0\right)\implies\left(f\left(y_n\right)\to L\right)\right)$.
- חד צדדי משמאל: $A=\left(a,x_0\right)$
  - קושי: $\left(\lim_{x\to x_0^{-}}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.x\in\left(\max\left\{x_0-\delta,a\right\},x_0\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)$.

– היינה: $\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_n\uparrow x_0\right)\implies\left(f\left(y_n\right)\to L\right)\right)\iff\left(\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=L\right)$.

- באינסוף: $A=\left(a,\infty\right)$
  – קושי: $\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\geq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)\iff\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)$.
  – היינה: $\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_n\to\infty\right)\implies\left(f\left(y_n\right)\to\infty\right)\right)\iff\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)$.
- במינוס אינסוף: $A=\left(-\infty,b\right)$
  – קושי: $\left(\forall\varepsilon>0.\exists M\in\mathbb{R}.\forall x\leq M.\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon\right)\iff\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=L\right)$.
  – היינה: $\left(\forall y\in A^{\mathbb{N}}.\left(y_n\to-\infty\right)\implies\left(f\left(y_n\right)\to-\infty\right)\right)\iff\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=L\right)$.

פונקציה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימות $a<x_0<b$

- בנקודה: תהא $f:I_{x_0}\to\mathbb{R}$
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_0}.f\left(x\right)>M\right)\iff\left(\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=\infty\right)$.
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in I_{x_0}.f\left(x\right)<-M\right)\iff\left(\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=-\infty\right)$.
- חד צדדי מימין: תהא $f:\left(x_0,b\right)\to\mathbb{R}$
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_0,\min\left\{x_0+\delta,b\right\}\right).f\left(x\right)>M\right)\iff\left(\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=\infty\right)$.
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_0,\min\left\{x_0+\delta,b\right\}\right).f\left(x\right)<-M\right)\iff\left(\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)=-\infty\right)$.
- חד צדדי משמאל: תהא $f:\left(a,x_0\right)\to\mathbb{R}$
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(\max\left\{x_0-\delta,a\right\},x_0\right).f\left(x\right)>M\right)\iff\left(\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=\infty\right)$.
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(\max\left\{x_0-\delta,a\right\},x_0\right).f\left(x\right)<-M\right)\iff\left(\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=-\infty\right)$.
- באינסוף: תהא $f:\left(a,\infty\right)\to\mathbb{R}$
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\geq\delta.f\left(x\right)>M\right)\iff\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\infty\right)$.
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\geq\delta.f\left(x\right)<-M\right)\iff\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty\right)$.
- במינוס אינסוף: תהא $f:\left(-\infty,b\right)\to\mathbb{R}$
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\leq\delta.f\left(x\right)>M\right)\iff\left(\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\infty\right)$.
  – $\left(\forall M>0.\exists\delta\in\mathbb{R}.\forall x\leq\delta.f\left(x\right)<-M\right)\iff\left(\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=-\infty\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A^{\pm}=A\cup\left\{x_0^+\mid x_0\in A\right\}\cup\left\{x_0^-\mid x_0\in A\right\}$.

סימון: יהי $x_0\in\mathbb{R}_{\infty}^{\pm}$ ותהא $f:I\to\mathbb{R}$ אזי $\left(\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=L\right)\iff\left(f\left(x\right)\xrightarrow[x\to x_0]{}L\right)$ במובן הרחב.

משפט: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\left(L_1=L_2\right)\implies\left(\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=L_1\right)\wedge\left(\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=L_2\right)$.

טענה: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\lim_{x\to x_0^-}f\left(x\right)=L=\lim_{x\to x_0^+}f\left(x\right)\right)\iff\left(\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=L\right)$.

פונקציית דריכלה: $D\left(x\right)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.

חשבון גבולות: יהי $x_0\in\mathbb{R}_{\infty}^{\pm}$ ויהיו $f,g:I_{x_0}\to\mathbb{R}$

- $\lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)+\lim_{x\to x_0}g\left(x\right)$.
- $\lim_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)=\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)\lim_{x\to x_0}g\left(x\right)$.

למה: יהי $x_0\in\mathbb{R}_{\infty}^{\pm}$ אזי $\lim_{x\to x_0}x=x_0$.

מסקנה: יהי $x_0\in\mathbb{R}^{\pm}$ ויהי $p\in\mathbb{R}\left[x\right]$ אזי $\lim_{x\to x_0}p\left(x\right)=p\left(x_0\right)$.

משפט: יהיו $x_0,y_0\in\mathbb{R}_{\infty}^{\pm}$ ותהיינה $g\in\mathbb{R}^{I_{y_0}}$ וכן $f\in I_{y_0}^{I_{x_0}}$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=y_0$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0}g\left(f\left(x\right)\right)=\lim\limits_{x\to y_0}g\left(x\right)$.

טענה: יהיו $x_0, y_0 \in \mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $g, f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ המקיימת $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim\limits_{x\to y_0} f(x)\right)$.

פונקציה אלמנטרית: הרכבה/סכום/כפל/הופכית של $\{x^a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\sin, \cos\} \cup \mathbb{R}[x] \cup (\bigcup \{\{\log_a(x), a^x\} \mid a > 0\})$.

טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי $\forall a \in \mathrm{Dom}(f) . \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

משפט: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $|\sin(x)| \le |x|$.

למה: יהי $x_0 \in \mathbb{R}^\pm$ אזי $\lim_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$.

מסקנה: יהי $x_0 \in \mathbb{R}^\pm$ אזי $\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$.

סימון: יהיו $f, g : I \to \mathbb{R}$ המקיימות $\forall x \in I . f(x) \le g(x)$ אזי $f(x) \preccurlyeq g(x)$.

מונוטוניות גבולות: יהי $x_0 \in \mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $f, g : \mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x) \preccurlyeq g(x)$ אזי $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

כלל הסנדוויץ': יהי $x_0 \in \mathbb{R}_\infty^\pm$ ותהיינה $f, g, h : \mathbb{R}^I$ המקיימות $f(x) \preccurlyeq g(x) \preccurlyeq h(x)$ אזי $\left(f(x), h(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L\right) \implies \left(g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} L\right)$ במובן הרחב.

למה: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

רציפות: תהא $f : I \to \mathbb{R}$
- רציפות בנקודה: $x_0 \in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית מימין בנקודה: $x_0 \in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- רציפה חד צדדית משמאל בנקודה: $x_0 \in I$ עבורה $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

פונקציה רציפה: $f : I \to \mathbb{R}$ המקיימת
- קושי: $\forall x_0 \in I . \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- היינה: $\forall x_0 \in I . \forall y \in I^\mathbb{N} . (y_n \to x_0) \implies (\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0))$.

פתוחה יחסית: תהיינה $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $B \subseteq A$ המקיימת $\forall x \in B . \exists \varepsilon > 0 . (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \subseteq B$.

משפט: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי (f רציפה על I) $\iff$ (לכל $B \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה $f^{-1}[B]$ פתוחה יחסית אל I).

טענה: תהא $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ותהא $c \in (a, b)$ אזי (f רציפה על a) $\iff$ ($f_{\restriction_{(a,c]}}$ רציפה על c)$\wedge$($f_{\restriction_{[c,b)}}$ רציפה על c).

סימון: תהא $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $C(I) = \left\{f \in \mathbb{R}^I \mid I \text{ רציפה על } f\right\}$.

טענה: תהא $f \in C((a, b))$ רציפה מונוטונית עולה
- ($f[(a, b)]$ חסומה מלעיל) $\Longleftarrow$ ($\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f[(a, b)]$).
- ($f[(a, b)]$ אינה חסומה מלעיל) $\Longleftarrow$ ($\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$).
- ($f[(a, b)]$ חסומה מלרע) $\Longleftarrow$ ($\lim_{x\to b^-} f(x) = \inf f[(a, b)]$).
- ($f[(a, b)]$ חסומה אינה מלרע) $\Longleftarrow$ ($\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$).

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ רציפה על x_0 המקיימת $f(x_0) > 0$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $\forall x \in I . f(x) > 0$.

מסקנה: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ רציפות על x_0 המקיימות $f(x_0) > g(x_0)$ אזי קיימת סביבה I של x_0 המקיימת $\forall x \in I . f(x) > g(x)$.

טענה: יהיו $f, g \in C(\mathbb{R})$ אזי $(\forall x \in \mathbb{R} . f(x) = g(x)) \iff (\forall q \in \mathbb{Q} . f(q) = g(q))$.

נקודת אי־רציפות: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי $x_0 \in I$ המקיימת
- סליקה: $\lim_{x\to x_0} f(x) \ne f(x_0)$.
- סוג ראשון/קפיצה: $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \ne \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.
- סוג שני: $\left(\nexists \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right) \vee \left(\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)$.

טענה: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.

טענה: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי (f רציפה על x_0) $\iff$ $(\forall y \in \mathbb{N}^I . (y_n \to x_0) \implies (\lim f(y_n) \in \mathbb{R}))$.

פונקציית רימן: $R\left(x\right)=\begin{cases} \frac{1}{q} & \exists p,q\in\mathbb{Z}.\left(\gcd\left(p,q\right)=1\right)\wedge\left(x=\frac{p}{q}\right)\\ 0 & else \end{cases}$.

טענה: $\left(\forall x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}R\left(x\right)=0\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.R\left(x\right)=R\left(x+1\right)\right)$.

חשבון רציפות: יהי $x_{0}\in\mathbb{R}^{\pm}$ ויהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ רציפות על x_{0} אזי $f+g,f\cdot g,f^{g}$ רציפות על x_{0}.

טענה: תהא $f:A\to B$ רציפה על x_{0} וכן $g:B\to C$ רציפה על $f\left(x_{0}\right)$ אזי $g\circ f$ רציפה על x_{0}.

מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ רציפה וכן $g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\lim_{x\to x_{0}}f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(\lim_{x\to x_{0}}g\left(x\right)\right)$.

פונקציה רציונאלית: יהיו $p,q\in\mathbb{R}\left[x\right]$ אזי $\frac{p}{q}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\forall x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי כמות נקודות האי־רציפות לכל היותר בת מנייה.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\forall x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)\implies\left(\exists x_{0}\in\mathbb{R}.\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=f\left(x_{0}\right)\right)$.

משפט ויירשטראס הראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

משפט ויירשטראס השני: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\exists\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)$.

משפט ערך הביניים: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\forall y\in\left(\min\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right),\max\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right)\right).\exists c\in\left(a,b\right).f\left(c\right)=y$.

למה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\left(a\right)f\left(b\right)<0$ אזי $\exists\zeta\in\left[a,b\right].f\left(\zeta\right)=0$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\left(\left[a,b\right]\right)=\left[\min\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right),\max\left(f\left(\left[a,b\right]\right)\right)\right]$.

קטע מוכלל: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\forall x,y\in A.\forall\lambda\in\left[0,1\right].\lambda x+\left(1-\lambda\right)y\in A$.

למה: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ חח"ע אזי f מונוטונית ממש.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in C\left(I\right)$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל)$\wedge\left(f^{-1}\in C\left(f\left(I\right)\right)\right)$.

משפט: יהי I קטע מוכלל ותהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ מונוטונית ממש אזי ($f\left(I\right)$ קטע מוכלל) $\iff\left(f\in C\left(I\right)\right)$.

מסקנה: יהי $a>0$ אזי $x^{a},a^{x}\in C\left(\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $a_{n}\to a>0$ סדרה חיובית וכן $b_{n}\to b$ סדרה אזי $a_{n}^{b_{n}}\to a^{b}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{odd}$ ויהי $p\in\mathbb{R}_{n}\left[x\right]\backslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ אזי $\exists\zeta\in\mathbb{R}.p\left(\zeta\right)=0$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{ I_{n}\right\} _{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_{n}$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_{0}}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_{n}$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $\left[a,b\right]$ קומפקטית.

פונקציה רציפה במידה שווה (במ"ש): $f\in\mathbb{R}^{A}$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A.\forall y\in\left(x-\delta,x+\delta\right).\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{A}$ רציפה במ"ש אזי f רציפה.

תנאי ליפשיץ: תהא $f\in\mathbb{R}^{A}$ עבורה $\exists M>0.\forall x,y\in A.\left|\frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{x-y}\right|<M$ אזי f רציפה במ"ש.

משפט קנטור: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f רציפה במ"ש על $\left[a,b\right]$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{A}$ רציפה במ"ש על $\left(a,b\right],\left[c,d\right)$ אזי f רציפה במ"ש על $\left(a,d\right)$.

פרה־קומפקטיות: תהא $D\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^{D}$ רציפה במ"ש אזי $\left(\lim\limits_{n\to\infty}f\left(x_{n}\right)\in\mathbb{R}\right)\implies\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_{n}\in\mathbb{R}\right).\forall x\in D^{\mathbb{N}}$.

טענה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right]\right)$ אזי (f רציפה במ"ש) $\iff\left(\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\left(a,b\right)\right)$ אזי (f רציפה במ"ש) $\iff\left(\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right),\lim_{x\to b^{-}}f\left(x\right)\in\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[a,\infty\right)\right)$ המקיימת $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי f רציפה במ"ש על $\left[a,\infty\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ רציפה במ"ש אזי f חסומה.

מודולוס הרציפות: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\omega_{f}\left(\delta\right)=\sup\left\{ \left|f\left(x_{1}\right)-f\left(x_{2}\right)\right|\mid\left(x_{1},x_{2}\in I\right)\wedge\left(\left|x_{1}-x_{2}\right|<\delta\right)\right\}$.

גזירות: תהא $f:I\to\mathbb{R}$

- נגזרת בנקודה: תהא $x_0 \in I$ אזי $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית מימין בנקודה: תהא $x_0 \in I$ אזי $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- נגזרת חד צדדית משמאל בנקודה: תהא $x_0 \in I$ אזי $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

טענה: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \in I$ אזי $f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

נגזרת: תהא $f : I \to \mathbb{R}$ אזי $f' : I \to \mathbb{R}$.

טענה: יהי חלקיק ותהיינה $x, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ פונקציית מיקום ומהירות בהתאמה אזי $x'(t) = v(t)$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I^{\pm}$ אזי (f גזירה בנקודה x_0) $\Longleftarrow$ (f רציפה בנקודה x_0).

קירוב בנקודה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I$ אזי $p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \backslash \mathbb{R}_{n-1}[x]$ המקיימת $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-p(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

סדר הקירוב: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ויהי $p(x)$ קירוב בנקודה x_0 אזי $\deg(p)$.

דיפרנציאבילית בנקודה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי $x_0 \in I$ עבורה (f רציפה על x_0)$\wedge$(קיים קירוב מסדר ראשון של f בנקודה x_0).

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ ותהא $x_0 \in I$ אזי (f דיפרנציאבילית בנקודה x_0) $\Longleftrightarrow$ (f גזירה בנקודה x_0).

חשבון גזירות: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות בנקודה x_0

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
- $\left(\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right) \implies (g(x_0) \neq 0)$.

משפט: תהא $x_0 \in I$ ותהא $f \in C(I)$ מונוטונית חזק גזירה על $f^{-1}(y_0)$ אזי $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

מסקנה: $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$, $(e^x)' = e^x$, $(x^r)' = rx^{r-1}$, $\arctan' = \frac{1}{1+x^2}$.

כלל השרשרת: תהא $x_0 \in I$ תהא $f \in C(I)$ גזירה על x_0 וכן $g \in C(f(I))$ גזירה על $f(x_0)$ אזי $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

נגזרת מסדר גבוה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה אזי $\left(f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'\right) \wedge \left(f^{(0)} = f\right)$.

הפרש דיסקרטי: תהא $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

הגדרה: תהא $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אזי $\left(\Delta^{(k+1)} f = \Delta\left(\Delta^{(k)} f\right)\right) \wedge \left(\Delta^{(0)} f = \Delta f\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה עבורה f' רציפה.

סימון: תהא $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(C^0(I) = C(I)) \wedge (C^n(I) = \{f \in C^{n-1}(I) \mid f \text{ גזירה ברציפות}\})$.

פונקציה חלקה: תהא $I \subseteq \mathbb{R}$ אזי $f \in C^\infty(I) = \bigcap_{n=0}^\infty C^n(I)$.

כלל לייבניץ: תהיינה $f, g \in \mathbb{R}^I$ גזירות אזי $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$.

נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא $f \in \mathbb{R}^I$

- מקסימום: $x_0 \in I$ עבורה $\exists \delta > 0. \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta). f(x) \leq f(x_0)$.
- מינימום: $x_0 \in I$ עבורה $\exists \delta > 0. \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta). f(x_0) \leq f(x)$.

משפט פרמה: תהא $f \in C([a,b])$ גזירה על (a,b) ותהא $x_0 \in (a,b)$ נקודת קיצון אזי $f'(x_0) = 0$.

משפט רול: תהא $f \in C([a,b])$ גזירה על (a,b) המקיימת $f(a) = f(b)$ אזי $\exists c \in (a,b). f'(c) = 0$.

משפט לגרנז': תהא $f \in C([a,b])$ גזירה על (a,b) אזי $\exists c \in (a,b). f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה אזי (f' חסומה) $\Longleftarrow$ (f רציפה במ"ש).

טענה: $\forall x > 0. e^x > 1 + x$.

טענה: $\forall x, y \in \mathbb{R}. |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ גזירה המקיימת $\forall x \in \mathbb{R}. f'(x) = 0$ אזי $\exists a \in \mathbb{R}. f(x) = a$.

מסקנה: תהיינה $g, h \in \mathbb{R}^I$ המקיימות $g' = h'$ אזי $\exists c \in \mathbb{R}. g = h + c$.

טענה: תהא $f\in C\left(\mathbb{R}\right)$ גזירה המקיימת $f=f'$ אזי $\exists c\in\mathbb{R}.f\left(x\right)=e^{x}$.

משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה $f,g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ גזירות על $\left(a,b\right)$ אזי $\exists x_{0}\in\left(a,b\right).\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_{0})}{g'(x_{0})}$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה

- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'\left(x\right)>0$ אזי f עולה ממש.
- אם לכל $x\in I$ מתקיים $f'\left(x\right)<0$ אזי f יורדת ממש.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה פעמיים על $x_{0}\in I$ ומתקיים $f'\left(x_{0}\right)=0$

- אם $f''\left(x_{0}\right)>0$ אזי x_{0} מינימום מקומי של f.
- אם $f''\left(x_{0}\right)<0$ אזי x_{0} מקסימום מקומי של f.

משפט: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right)\right)$ גזירה על $\left(a,b\right)$ המקיימת $\lim_{x\to a^{+}}f'\left(x\right)\in\mathbb{R}$ אזי $f'_{+}\left(a\right)=\lim_{x\to a^{+}}f'\left(x\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירה ברציפות אזי $f'\left(x_{0}\right)>0\implies\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right).f'\left(x\right)>0$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירה אזי ($f'_{+}\left(a\right)<0$ גורר a לא מינימום מקומי)$\wedge$($f'_{-}\left(b\right)>0$ גורר b לא מקסימום מקומי).

משפט דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירה אזי $\forall y\in\left(\min\left(f'\left(a\right),f'\left(b\right)\right),\max\left(f'\left(a\right),f'\left(b\right)\right)\right).\exists c\in\left(a,b\right).f'\left(c\right)=y$.

כלל לופיטל: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות ותהא $x\in I_{\infty}^{\pm}$ נניח כי $\lim_{x\to x_{0}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מתכנס במובן הרחב

- $\left(\lim_{x\to x_{0}}f\left(x\right)=0=\lim_{x\to x_{0}}g\left(x\right)\right)\implies\left(\lim_{x\to x_{0}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_{0}}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.
- $\left(\lim_{x\to x_{0}}g\left(x\right)=\infty\right)\implies\left(\lim_{x\to x_{0}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_{0}}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$.

אי־שיוויון יאנג: יהיו $x,y>0$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ מתקיים $\frac{x^{p}}{p}+\frac{y^{q}}{q}\ge xy$.

אי־שיוויון הולדר: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי $\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}y_{i}\right|\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_{i}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$.

אי־שיוויון מינקובסקי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ ויהיו $p,q>0$ המקיימים $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי $\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}+y_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|y_{i}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}$.

מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_{0}\in I^{\pm}$

- $f\in O\left(g\right)\iff\left(\exists c>0.\exists\delta>0.\forall x\in\left(x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right).\left|f\left(x\right)\right|\le c\left|g\left(x\right)\right|\right)$. אינטואיטיבית $f\le g$
- $f\in\Omega\left(g\right)\iff\left(g\in O\left(f\right)\right)$. אינטואיטיבית $f\ge g$
- $f\in o\left(g\right)\iff\left(\lim_{x\to x_{0}}\frac{f(x)}{g(x)}=0\right)$. אינטואיטיבית $f<g$
- $f\in\omega\left(g\right)\iff\left(g\in o\left(f\right)\right)$. אינטואיטיבית $f>g$
- $f\in\Theta\left(g\right)\iff\left(f\in O\left(g\right)\wedge f\in\Omega\left(g\right)\right)$. אינטואיטיבית $f=g$
- $f\sim g\iff\left(\lim_{x\to x_{0}}\frac{f(x)}{g(x)}=1\right)$. אינטואיטיבית $f=g$ בדיוק של קבועים

למה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $x_{0}\in I$ אזי $f\in\Theta\left(g\right)\implies\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\xrightarrow[x\to x_{0}]{}c\neq0\right)$.

מזדהה עד סדר: $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות n פעמים על x_{0} המקיימות $\forall k\in\left\{0\ldots n\right\}.f^{\left(k\right)}\left(x_{0}\right)=g^{\left(k\right)}\left(x_{0}\right)$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ מזדהות עד סדר n על x_{0} אזי $f-g\in o\left(\left(x-x_{0}\right)^{n}\right)$.

מסקנה: תהא $h\in\mathbb{R}^{I}$ רציפה על x_{0} וכן $h\in o\left(\left(x-x_{0}\right)^{n}\right)$ אזי (h גזירה n פעמים על x_{0})$\wedge$($h^{\left(k\right)}\left(x_{0}\right)=0$).

פולינום טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על x_{0} אזי $p\in\mathbb{R}_{n}\left[x\right]\backslash\mathbb{R}_{n-1}\left[x\right]$ שמזדהה עם f עד סדר n על x_{0}.

למה: יהי $k\in\mathbb{N}$ ותהא $x_{0}\in\mathbb{R}$ אזי $\left(\left(x-x_{0}\right)^{k}\right)^{\left(j\right)}\left(x_{0}\right)=\begin{cases}j! & j=k\\0 & else\end{cases}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על x_{0} אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם f עד סדר n על x_{0}.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על x_{0} אזי פולינום הטיילור הוא $P_{n}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_{0})}{k!}\left(x-x_{0}\right)^{k}$.

שארית: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

משפט פאנו: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה n פעמים על x_0 אזי $R_n(x) \in o(|x-x_0|^n)$.

למה: תהא $g \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים המקיימת $g^{(k)}(x_0) = 0$. $\forall k \in \{0\dots n\}$ אזי $\forall x \in (a,b) . \exists c \in (\min(x,x_0), \max(x,x_0)) . g(x) = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

משפט השארית של לגרנז': תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי $\forall x \in (a,b) . \exists c \in (\min(x,x_0), \max(x,x_0)) . R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

מסקנה: תהא $f \in C^\infty((a,b))$ אזי $\left(R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right) \implies \left(\exists M \in \mathbb{R}.\forall k \in \mathbb{N}. \left|f^{(k)}(x)\right| < M\right) . \forall x \in (a,b)$.

מסקנה: תהא $f \in C^\infty((a,b))$ עבורה $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\forall x \in (a,b)$ אזי $f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

מסקנה: תהא $f \in C^\infty((a,b))$ ותהא a סדרה המקיימת $\left|f^{(m)}(x)\right| < a_m$. $\forall x \in (a,b)$ אזי $\forall c \in \mathbb{R}. \left(\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{m!}c^m = 0\right) \implies \left(\forall x \in [x_0 - c, x_0 + c] . f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$

מסקנה: $\left(e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}\right) \wedge \left(\sin(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \wedge \left(\cos(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$.

מסקנה: $e \notin \mathbb{Q}$.

משפט השארית של קושי: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה $n+1$ פעמים אזי $\forall x \in (a,b) . \exists c \in (\min(x,x_0), \max(x,x_0)) . R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$.

מסקנה: יהי $|x| < 1$ אזי $\arctan(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

טענה: תהא $f \in C^{n+1}((a,b))$ המקיימת $f^{(k)}(x_0) = 0$. $\forall k \in \{0\dots n\}$ וכן $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$

- $n \in \mathbb{N}_{even}$ אזי x_0 אינה נקודת קיצון של f.
- $n \in \mathbb{N}_{odd}$
  - $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.
  - $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ אזי x_0 נקודת מינימום מקומי של f.

פונקציה קמורה: $f \in \mathbb{R}^I$ המקיימת $\forall x,y \in I.\forall \alpha \in [0,1] . f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.

פונקציה קעורה: $f \in \mathbb{R}^I$ המקיימת $\forall x,y \in I.\forall \alpha \in [0,1] . f(\alpha x + (1-\alpha)y) \ge \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.

נקודת פיתול: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ אזי x_0 המקיימת (f קעורה מאחד מצדדיה)$\wedge$(f קמורה מאחד מצדדיה).

משפט שלושת המיתרים: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ קמורה אזי לכל $x_1 < x_2 < x_3$ מתקיים $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

משפט: תהא $f \in \mathbb{R}^I$ גזירה פעמיים

- אם לכל $x \in I$ מתקיים $f''(x) > 0$ אזי f קמורה.
- אם לכל $x \in I$ מתקיים $f''(x) < 0$ אזי f קעורה.

טענה: תהא $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$ קמורה אזי $f \in C((a,b))$.