הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע אזי $|X|\le|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ועל אזי $|X|=|Y|$.

סימון: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $\neg(|X|=|Y|)$ אזי $|X|\neq|Y|$.

הגדרה: תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|X|\neq|Y|$ אזי $|X|<|Y|$.

הערה: נקרא לביטוי $|X|$ העוצמה של X.

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין (קש"ב): תהיינה X,Y קבוצות עבורן $|X|\le|Y|$ וכן $|Y|\le|X|$ אזי $|X|=|Y|$.

סימון: $\aleph_0=|\mathbb{N}|$.

קבוצה בת מנייה: קבוצה X עבורה $|X|=\aleph_0$.

קבוצה סופית: קבוצה A עבורה קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $|\{0,\ldots,n-1\}|=n$.

קבוצה אינסופית: קבוצה A עבורה לא קיים $n\in\mathbb{N}$ המקיים $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$.

טענה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אינסופית אזי B בת מנייה.

מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהא A בת מנייה תהא B קבוצה ותהא $f:A\to B$ על אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\cup B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ קבוצות בנות מנייה אזי $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ בת מנייה.

טענה: תהא $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i\in\mathbb{N}$ ותהא $\langle f_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת פונקציות באשר $f_n:\mathbb{N}\to A_n$ על לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ סופית או בת מנייה.

מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי $A\times B=\{\langle a,b\rangle\mid(a\in A)\wedge(b\in B)\}$.

טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזי $A\times B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1\ldots A_n$ בנות מנייה אזי $A_1\times\ldots\times A_n$ בת מנייה.

הגדרה: תהא A קבוצה אזי $A^1=A$.

הגדרה: תהא A קבוצה ויהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $A^n=A\times A^{n-1}$.

טענה: $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{N}^n$ בת מנייה.

מסקנה: $|\{A\subseteq\mathbb{N}\mid \text{סופית } A\}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Q}|=\aleph_0$.

מספר אלגברי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו קיים $p\in\mathbb{Z}[x]$ המקיים $p(a)=0$.

מספר טרנסצנדנטי: מספר $a\in\mathbb{C}$ עבורו לכל $p\in\mathbb{Z}[x]$ מתקיים $p(a)\neq0$.

משפט קנטור: $|\{a\in\mathbb{C}\mid \text{אלגברי } a\}|=\aleph_0$.

יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי $\preccurlyeq\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ באשר

- רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $x\preccurlyeq x$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq z$ אזי $x\preccurlyeq z$.
- אנטי סימטריות חלשה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\preccurlyeq y$ וכן $y\preccurlyeq x$ אזי $x=y$.

יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי $\prec\subseteq A^2$ אזי $\langle A,\prec\rangle$ באשר

- אנטי רפלקסיביות: יהי $x\in A$ אזי $\neg(x\prec x)$.
- טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$ עבורם $x\prec y$ וכן $y\prec z$ אזי $x\prec z$.
- אנטי סימטריות חזקה: יהיו $x,y\in A$ עבורם $x\prec y$ אזי $\neg(y\prec x)$.

יחס סדר קווי חלקי/חלש: יחס סדר חלקי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\vee(y\preccurlyeq x)$.

יחס סדר קווי חזק: יחס סדר חזק $\langle A,\prec\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ מתקיים $(x\prec y)\vee(y\prec x)\vee(x=y)$.

טענה: $\langle\mathbb{N},\le_{\mathbb{N}}\rangle$ יחס סדר קווי חלקי.

טענה: תהא A קבוצה אזי $\langle\mathcal{P}(A),\subseteq\rangle$ יחס סדר חלקי.

פונקציה שומרת סדר: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים אזי $f:A\to B$ חח"ע עבורה לכל $a,b\in A$ מתקיים $(aRb)\Longleftrightarrow(f(a)Sf(b))$.

סדרים חלקיים איזומורפיים: סדרים $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ עבורם קיימת $\pi:A\to B$ הפיכה שומרת סדר.

סימון: יהיו $\langle A,R\rangle,\langle B,S\rangle$ סדרים איזומורפיים אזי $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$.

יחס סדר קווי בעל איבר ראשון/מינימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $a\in A$ באשר לכל $b\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון $a\in A$ אזי $\min\left(A\right)=a$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר ראשון.

יחס סדר קווי בעל איבר אחרון/מקסימום: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו קיים $b\in A$ באשר לכל $a\in A$ מתקיים $(aRb)\vee(a=b)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון $a\in A$ אזי $\max\left(A\right)=a$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ בעל איבר אחרון.

יחס סדר קווי צפוף: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $x,y\in A$ המקיימים xRy קיים $z\in A$ עבורו xRz וכן zRy.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי צפוף ויהי $\langle B,S\rangle$ סדר קווי באשר $\langle A,R\rangle\simeq\langle B,S\rangle$ אזי $\langle B,S\rangle$ צפוף.

טענה: $\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.

מסקנה: $\langle\mathbb{N},\leq_{\mathbb{N}}\rangle\not\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}}\rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A,\prec\rangle$ סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A|=\aleph_0$ אזי $\langle A,\prec\rangle\simeq\langle\mathbb{Q},<_{\mathbb{Q}}\rangle$.

חסם מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\overline{B}_X=\{a\in A\mid X \text{ חסם מלעיל של } a\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\overline{B}_X\neq\varnothing$.

חסם מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $a\in A$ עבורו לכל $x\in X$ מתקיים $(xRa)\vee(x=a)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\underline{B}_X=\{a\in A\mid X \text{ חסם מלרע של } a\}$.

קבוצה חסומה מלרע: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה $\underline{B}_X\neq\varnothing$.

קבוצה חסומה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ בעלת חסם מלרע וחסם מלעיל.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\sup\left(X\right)=\min\left(\overline{B}_X\right)$.

סימון: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי ותהא $X\subseteq A$ אזי $\inf\left(X\right)=\max\left(\underline{B}_X\right)$.

יחס סדר קווי שלם: סדר קווי $\langle A,R\rangle$ עבורו לכל $X\subseteq A$ חסומה מלעיל קיים $\sup\left(X\right)$.

טענה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי ($\langle A,R\rangle$ סדר שלם)$\Longleftrightarrow$(לכל $X\subseteq A$ חסומה קיימים $\sup\left(X\right),\inf\left(X\right)$).

קבוצה צפופה: יהי $\langle A,R\rangle$ סדר קווי אזי $X\subseteq A$ עבורה לכל $x,y\in A$ באשר xRy קיים $z\in X$ המקיים xRz וכן zRy.

השלמה של יחס סדר קווי חלקי: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי סדר חלקי $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ המקיים

- $P\subseteq L$.
- לכל $x,y\in P$ מתקיים $(x\preccurlyeq y)\Longleftrightarrow(x\sqsubseteq y)$.
- $\langle L,\sqsubseteq\rangle$ סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
- $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ צפוף ב־$\langle L,\sqsubseteq\rangle$.

משפט יחידות השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה $\langle L,\sqsubseteq\rangle,\langle L^*,\sqsubseteq^*\rangle$ השלמות אזי קיים איזומורפיזם $\pi:L\to L^*$ עבורו $\pi\left(p\right)=p$ לכל $p\in P$.

משפט קיום השלמה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.

חתך דדקינד: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $A,B\subseteq P$ לא ריקות אזי $\langle A,B\rangle$ באשר

- $A\cap B=\varnothing$.
- $A\cup B=P$.
- לכל $a\in A$ ולכל $b\in B$ מתקיים $a\preccurlyeq b$.
- $\langle A,\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]=\langle\left(-\infty,p\right),\left[p,\infty\right)\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p\in P$ אזי $[p]$ חתך דדקינד.

הגדרה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $\langle A,B\rangle,\langle C,D\rangle$ חתכי דדקינד באשר $A\subseteq C$ אזי $\langle A,B\rangle\preccurlyeq\langle C,D\rangle$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\{[p]\mid p\in P\},\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$.

הערה: נשתמש בהתאמה מעל בתור שיכון של P בחתכי הדדקינד שלה.

סימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\mathrm{Ded}\left(P\right)=\{\langle A,B\rangle\mid \text{חתך דדקינד } \langle A,B\rangle\}$.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}\left(P\right),\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי.

טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq\rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle\mathrm{Ded}\left(P\right),\preccurlyeq\rangle$ ללא איבר אחרון

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ צפופה ב־$\langle \text{Ded}(P), \preccurlyeq \rangle$.

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle \text{Ded}(P), \preccurlyeq \rangle$ סדר שלם.

טענה: יהי $\langle A, \prec \rangle$ סדר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון $\langle B, \sqsubset \rangle$ עבורו קיימת $f : A \to B$ שומרת סדר.

מספרים ממשיים: $\langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} \rangle$ הינה ההשלמה של $\langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle$.

משפט: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} \rangle$.

טענה: $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$.

קבוצת החזקה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$.

סימון: תהא X קבוצה אזי ${}^{X}2 = \{f \mid f : X \to \{0,1\}\}$.

טענה: תהא X קבוצה אזי $|\mathcal{P}(X)| = \left|{}^{X}2\right|$.

משפט קנטור: תהא X קבוצה אזי $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

טענה: $|\mathbb{R}| = \left|{}^{\mathbb{N}}2\right|$.

קבוצת קנטור: נגדיר $C_0 = [0,1]$ ונגדיר $C_{n+1} = \left(\frac{1}{3}C_n\right) \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי $\mathcal{C} = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$.

טענה: $(\mathcal{C}, <_{\mathbb{R}}) \simeq \left({}^{\mathbb{N}}\{0,1\}, <_{\text{lex}}\right)$.

טענה: תהיינה A, B קבוצות זרות ותהיינה C, D קבוצות זרות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \cup B| = |C \cup D|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות זרות אזי $|A| + |B| = |A \cup B|$.

טענה: תהא A קבוצה אזי $|A \times \{0\}| = |A|$.

הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}|$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \times B| = |C \times D|$.

הגדרה כפל: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| \cdot |B| = |A \times B|$.

הערה: נאמר כי κ היא עוצמה אם קיימת קבוצה A עבורה $|A| = \kappa$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי ${}^{B}A = \{f \mid f : B \to A\}$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $\left|{}^{B}A\right| = \left|{}^{D}C\right|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A|^{|B|} = \left|{}^{B}A\right|$.

מסקנה: $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa^{(\lambda + \mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$ וכן $\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)}$ וכן $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu})$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\aleph_0 + n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0^n = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $2^{\aleph_0} + n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $2^{\aleph_0} \cdot n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\left(2^{\aleph_0}\right)^n = 2^{\aleph_0}$ וכן $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ וכן $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $|\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{N} \to \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $\left|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}\right| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא B קבוצה באשר $|B| = 2^{\aleph_0}$ ותהא $A \subseteq B$ באשר $|A| \leq \aleph_0$ אזי $|B \backslash A| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{C} \mid \text{מספר טרנסצנדנטי } a\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{R} \mid \text{אי־רציונלי } a\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \wedge (\text{רציפה } f)\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) \wedge (\text{מונוטונית } f)\}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $|\{A \mid (A \subseteq \mathbb{R}) \wedge (\text{פתוחה } A)\}| = 2^{\aleph_0}$.

יחס סדר טוב: סדר קווי $\langle W, \prec \rangle$ עבורו לכל $A \subseteq W$ באשר $A \neq \varnothing$ קיים איבר קטן ביותר.

טענה: $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ סדר טוב.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\left\langle \mathbb{N}_{\leq n}, <_{\mathbb{N}_{\leq n}} \right\rangle$ סדר טוב.

רישה של יחס סדר טוב: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב אזי $S \subseteq W$ המקיימת

- $S \neq W$.
- לכל $a \in S$ ולכל $b \in W$ אם $b \prec a$ אזי $b \in S$.

סימון: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a \in W$ אזי $W[a] = \{b \in W \mid b \prec a\}$.

מסקנה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a \in W$ אזי $W[a]$ רישה ב־W.

טענה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ותהא S רישה ב־W אזי קיים $x \in W$ עבורו $S = W[x]$.

טענה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ותהא $f : W \to W$ שומרת סדר אזי $(x = f(x)) \vee (x \prec f(x))$ לכל $x \in W$.

מסקנה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a \in W$ אזי $W \not\simeq W[a]$.

מסקנה: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $f : W \to W$ איזומורפיזם אזי $f = \mathrm{Id}$.

מסקנה: יהיו $\langle W, \prec \rangle, \langle A, \sqsubset \rangle$ יחסי סדר טובים ויהיו $f, g : W \to A$ איזומורפיזמים אזי $f = g$.

משפט ההשוואה: יהיו $\langle W, \prec \rangle, \langle A, \sqsubset \rangle$ יחסי סדר טובים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\langle W, \prec \rangle \simeq \langle A, \sqsubset \rangle$.
- קיים $w \in W$ עבורו $\langle W[w], \prec \rangle \simeq \langle A, \sqsubset \rangle$.
- קיים $a \in A$ עבורו $\langle W, \prec \rangle \simeq \langle A[a], \sqsubset \rangle$.

קבוצה טרנזיטיבית: קבוצה X עבורה לכל $A \in X$ ולכל $y \in A$ מתקיים $y \in X$.

סודר: קבוצה טרנזיטיבית X עבורה $\langle X, \in \rangle$ יחס סדר טוב.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha \cup \{\alpha\}$ סודר.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha \notin \alpha$.

טענה: יהי α סודר ויהי $x \in \alpha$ אזי x סודר.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \in \beta$ אזי $\beta \notin \alpha$.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\beta \subsetneq \alpha$ אזי $\beta \in \alpha$.

טענה משפט ההשוואה: יהיו α, β סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $\alpha = \beta$.
- $\alpha \in \beta$.
- $\beta \in \alpha$.

טענה: תהא S קבוצה לא ריקה של סודרים אזי $\min(S)$ קיים.

הגדרה: $\mathcal{O}_n = \{\alpha \mid \text{סודר } \alpha\}$.

סימון: $\mathcal{O}_n = \mathrm{Ord}$.

טענה פרדוקס גוראלי־פורטי: $\mathcal{O}_n$ אינה קבוצה.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \in \beta$ אזי $(\alpha \cup \{\alpha\} = \beta) \vee (\alpha \cup \{\alpha\} \in \beta)$.

סימון: יהי α סודר אזי $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

טענה: תהא S קבוצת סודרים אזי קיים סודר α עבורו לכל $\beta \in S$ מתקיים $\beta \in \alpha$.

טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב אזי סודר α עבורו $\langle W, \prec \rangle \simeq \langle \alpha, \in \rangle$.

משפט: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל־$\langle W, \prec \rangle$.

סימון: יהי $\langle W, \prec \rangle$ יחס סדר טוב ויהי α סודר טיפוס של $\langle W, \prec \rangle$ אזי $\mathrm{otp}(\langle W, \prec \rangle) = \alpha$.

אקסיומת ההחלפה: תהא P נוסחה באשר לכל קבוצה X קיימת ויחידה קבוצה Y עבורה $P(X, Y)$ אזי לכל קבוצה A קיימת קבוצה B באשר לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ המקיים $P(a, b)$. זוהי אינה טענה

אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי $\{a \in A \mid P(a)\}$ קבוצה. זוהי אינה טענה

משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר α מתקיים $(\forall \beta \in \alpha . P(\beta)) \Longrightarrow (P(\alpha))$ אזי לכל סודר γ מתקיים $P(\gamma)$.

סודר עוקב: סודר α עבורו קיים סודר $\beta \in \alpha$ המקיים $\alpha = \beta + 1$.

סודר גבולי: סודר α עבורו לכל סודר $\beta \in \alpha$ מתקיים $\alpha \neq \beta + 1$.

משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת

- $P\left(\varnothing\right)$.
- לכל סודר α מתקיים $P\left(\alpha\right)\Longrightarrow P\left(\alpha+1\right)$.
- לכל סודר גבולי α מתקיים $\left(\forall\beta\in\alpha.P\left(\beta\right)\right)\Longrightarrow\left(P\left(\alpha\right)\right)$.

אזי לכל סודר γ מתקיים $P\left(\gamma\right)$.

אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה S באשר $\varnothing\in S$ וכן לכל $x\in S$ מתקיים $x+1\in S$. זוהי אינה טענה

טענה: תהא S קבוצה באשר $\varnothing\in S$ וכן לכל $x\in S$ מתקיים $x+1\in S$ ויהי δ הסודר הראשון באשר $\delta\notin S$ אזי δ סודר גבולי.

סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו $\varnothing$ הינו ω.

סימון: $0=\varnothing$.

הגדרה: $\mathbb{N}=\omega$.

הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה $n+1=n\cup\left\{ n\right\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

סימון: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha\in\beta$ אזי $\alpha<\beta$.

הגדרה חיבור: יהי α סודר אזי

- $\alpha+0=\alpha$.
- יהי β סודר אזי $\alpha+\left(\beta+1\right)=\left(\alpha+\beta\right)+1$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha+\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha+\gamma\right)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\left(\alpha+\beta\right)+\gamma=\alpha+\left(\beta+\gamma\right)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\gamma+\alpha<\gamma+\beta$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\alpha+\gamma\le\beta+\gamma$.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי קיים ויחיד סודר γ עבורו $\alpha+\gamma=\beta$.

טענה: $\omega=0+\omega$ וכן $\omega=1+\omega$ וכן $\omega+1>\omega$.

הגדרה כפל: יהי α סודר אזי

- $\alpha\cdot0=0$.
- יהי β סודר אזי $\alpha\cdot\left(\beta+1\right)=\left(\alpha\cdot\beta\right)+\alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha\cdot\beta=\bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha\cdot\gamma\right)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ וכן $\gamma\neq0$ אזי $\gamma\cdot\alpha<\gamma\cdot\beta$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\alpha\cdot\gamma\le\beta\cdot\gamma$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\alpha\left(b+\gamma\right)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$.

טענה: $0\cdot\omega=0$ וכן $1\cdot\omega=\omega$ וכן $2\cdot\omega=\omega$ וכן $\omega\cdot2=\omega+\omega$.

טענה: יהי $n<\omega$ אזי $\omega+\omega>\omega+n$.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha+\omega$ סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי α סודר אזי

- $\alpha^{0}=1$.
- יהי β סודר אזי $\alpha^{\beta+1}=\alpha^{\beta}\cdot\alpha$.
- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha^{\beta}=\bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha^{\gamma}\right)$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ וכן $\gamma>1$ אזי $\gamma^{\alpha}<\gamma^{\beta}$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים באשר $\alpha<\beta$ אזי $\alpha^{\gamma}\le\beta^{\gamma}$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma}$.

טענה: יהיו α,β,γ סודרים אזי $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma}=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

טענה: $1^{\omega}=1$ וכן $2^{\omega}=\omega$ וכן $\omega^{1}=\omega$ וכן $\omega^{2}=\omega\cdot\omega$ וכן $\omega^{2}>2^{\omega}$.

טענה: יהי α סודר אזי $\omega^{\alpha}\ge\alpha$.

טענה צורת קנטור נורמלית: יהי α סודר אזי קיים ויחיד $k<\omega$ קיימים ויחידים $\beta_{1}\ldots\beta_{k}$ סודרים באשר $\beta_{i}>\beta_{j}$ לכל $i<j$ וקיימים ויחידים $n_{1}\ldots n_{k}\in\mathbb{N}_{+}$ עבורם $\alpha=\sum_{i=1}^{k}\omega^{\beta_{i}}\cdot n_{i}$.

טענה: יהיו α,β סודרים באשר $\alpha>0$ וכן $\beta>\alpha$ אזי קיימים ויחידים סודרים ξ,δ עבורם $\beta=\alpha\cdot\delta+\xi$ וכן $\xi<\alpha$.

מונה: סודר α עבורו לכל $\beta<\alpha$ מתקיים $|\beta|<|\alpha|$.

סימון: $\aleph_{0}=\omega$.

טענה: יהיו α,β סודרים בני מנייה אזי $\alpha+\beta,\alpha\cdot\beta,\alpha^{\beta}$ סודרים בני מנייה.

טענה: קיים סודר α המקיים $\omega<\alpha$ באשר α אינו בן מנייה.

טענה: יהי δ סודר אזי קיים מונה κ באשר $\delta<\kappa$.

סימון: יהי α סודר אזי α^{+} הינו המונה הראשון עבורו $\alpha<\alpha^{+}$.

הגדרה ℵ: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha+1}=\aleph_{\alpha}^{+}$.

הגדרה ℵ: יהי α סודר גבולי אזי $\aleph_{\alpha}=\bigcup_{\beta<\alpha}\aleph_{\beta}$.

טענה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha}$ מונה.

טענה: יהי κ מונה אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $\kappa=\aleph_{\alpha}$.

סימון: יהי α סודר אזי $\omega_{\alpha}=\aleph_{\alpha}$.

סימון: יהיו δ,α סודרים אינסופיים באשר $|\delta|=|\aleph_{\alpha}|$ אזי $|\delta|=\aleph_{\alpha}$.

הערה: כאשר מבצעים פעולות בין מונים הכוונה היא לפי ההגדרה של עוצמות, כאשר מבצעים פעולות בין סודרים הכוונה היא לפי ההגדרה של סודרים.

הגדרה: יהי α סודר אזי יחס סדר $\langle\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha},\lhd\rangle$ באשר לכל $(\delta,\kappa),(\beta,\gamma)\in\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha}$ מתקיים $(\beta,\gamma)\lhd(\delta,\kappa)$ אם"ם אחד מהבאים מתקיים

- $\max(\beta,\gamma)<\max(\delta,\kappa)$.
- $\max(\beta,\gamma)=\max(\delta,\kappa)$ וכן $\beta<\delta$.
- $\max(\beta,\gamma)=\max(\delta,\kappa)$ וכן $\beta=\delta$ וכן $\gamma<\kappa$.

טענה: יהי α סודר אזי $\langle\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha},\lhd\rangle$ יחס סדר טוב.

משפט: יהי α סודר אזי $\operatorname{otp}(\langle\aleph_{\alpha}\times\aleph_{\alpha},\lhd\rangle)=\aleph_{\alpha}$.

מסקנה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\alpha}=\aleph_{\alpha}$.

משפט: יהיו κ,λ מונים אינסופיים אזי

- $\kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.
- $\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$.

מסקנה: יהיו α,β סודרים אזי

- $\aleph_{\alpha}+\aleph_{\beta}=\aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$.
- $\aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\beta}=\aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}$.

פונקציית בחירה: תהא S קבוצה באשר $\varnothing\notin S$ אזי $f:S\to A$ עבורה לכל $X\in S$ מתקיים $f(X)\in X$.

אקסיומת הבחירה (AC): תהא S קבוצה באשר $\varnothing\notin S$ אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S. זוהי אינה טענה

טענה: תהא $A\neq\varnothing$ אזי (קיימת $f:A\to\mathbb{N}$ חח"ע)$\Longleftrightarrow$(קיימת $g:\mathbb{N}\to A$ על).

משפט הסדר הטוב/משפט צרמלו: תהא A קבוצה עבורה קיימת פונקציית בחירה על $\mathcal{P}(A)\setminus\{\varnothing\}$ אזי קיים סדר טוב על A.

הגדרה משפט הסדר הטוב: תהא A קבוצה אזי קיים סדר טוב על A. זוהי אינה טענה

משפט: (AC)$\Longleftrightarrow$(משפט הסדר הטוב).

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $|A|=\aleph_{\alpha}$. דורש AC

השערת הרצף הפרטית (CH): $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. דורש AC, זוהי אינה טענה

השערת הרצף הכללית (GCH): יהי α סודר אזי $2^{\aleph_{\alpha}}=\aleph_{\alpha+1}$. דורש AC, זוהי אינה טענה

הערה: CH בלתי תלויה ב־ZFC.

הערה: GCH בלתי תלויה ב־ZFC.

הערה: AC בלתי תלויה ב־ZF.

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיימת $B\subseteq A$ בת מנייה. דורש AC

טענה: תהא $\langle A_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$ סופית או בת מנייה. דורש AC

יחס סדר חלקי בעל איבר מינימלי: סדר חלקי $\langle A,\leq\rangle$ עבורו קיים $a\in A$ באשר לכל $b\in A$ מתקיים $(b\leq a)\Longrightarrow(b=a)$.

יחס סדר קווי בעל איבר מקסימלי: סדר קווי $\langle A,\leq\rangle$ עבורו קיים $b\in A$ באשר לכל $a\in A$ מתקיים $(b\leq a)\Longrightarrow(b=a)$.

הגדרה הלמה של צורן: יהי $\langle P,\leq\rangle$ יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת $A\subseteq P$ קיים חסם מלעיל אזי קיים ב־P איבר מקסימלי. זוהי אינה טענה

משפט: (AC)$\Longleftrightarrow$(הלמה של צורן).

אקסיומת הבחירה הבת־מנייה (AC_ω): תהא S קבוצה בת־מנייה באשר $\varnothing \notin S$ אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S. זוהי אינה טענה

אקסיומת הבחירה התלויה (DC): תהא X קבוצה ויהי R יחס מלא מעל X אזי קיימת $\langle x_n \mid m < \omega \rangle$ באשר $x_n \in X$ לכל $n < \omega$ עבורה $x_n R x_{n+1}$ לכל $n < \omega$. זוהי אינה טענה

טענה: $(\text{AC}_\omega) \Longrightarrow (\text{AC})$ וכן $(\text{DC}) \Longrightarrow (\text{AC})$ וכן $(\text{AC}_\omega) \Longrightarrow (\text{DC})$.

הגדרה: תהא I קבוצה ותהיינה $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות אזי $\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f \mid \left(f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i\right) \wedge \left(\forall i \in I \left(f(i) \in X\right)\right)\right\}$.

טענה: תהא I קבוצה ותהיינה $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות באשר $X_\alpha \neq \varnothing$ לכל $\alpha \in I$ אזי $\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$. דורש AC

טענה: (לכל קבוצה I ולכל $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות אם $X_\alpha \neq \varnothing$ לכל $\alpha \in I$ אזי $\prod_{i \in I} X_i \neq \varnothing$)$\Longleftarrow$(AC).

טענה: (לכל קבוצות A, B מתקיים $|A| \leq |B|$ או $|A| \geq |B|$)$\Longleftarrow$(AC).

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $\langle V, +, \cdot \rangle$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי קיים בסיס ל־V. דורש AC

טענה: תהא I קבוצה תהיינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות זרות ותהיינה $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות זרות באשר $|A_i| = |B_i|$ לכל $i \in I$ אזי $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = \left|\bigcup_{i \in I} B_i\right|$. דורש AC

הגדרה סכום מונים: תהא I קבוצה יהיו $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ מונים ותהיינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות זרות באשר $|A_i| = \kappa_i$ לכל $i \in I$ אזי $\sum_{i \in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i \in I} A_i\right|$. דורש AC

טענה: תהא I קבוצה תהיינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות ותהיינה $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות באשר $|A_i| = |B_i|$ לכל $i \in I$ אזי $\left|\prod_{i \in I} A_i\right| = \left|\prod_{i \in I} B_i\right|$. דורש AC

הגדרה כפל מונים: תהא I קבוצה יהיו $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ מונים ותהיינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות באשר $|A_i| = \kappa_i$ לכל $i \in I$ אזי $\prod_{i \in I} \kappa_i = \left|\prod_{i \in I} A_i\right|$. דורש AC

הערה: מכאן והלאה לא ייסומן כאשר הטענות יסתמכו על AC.

למה: יהי λ מונה אינסופי ויהי κ מונה באשר $\kappa \geq 1$ אזי $\sum_{i < \lambda} \kappa = \kappa \cdot \lambda$.

טענה: יהי λ מונה אינסופי ויהיו $\{\kappa_i \mid i < \lambda\}$ מונים באשר $\kappa_i \geq 1$ לכל $i < \lambda$ אזי $\sum_{i < \lambda} \kappa_i = \sup\{\kappa_i \mid i < \lambda\} \cdot \lambda$.

טענה: $\sum_{1 \leq n < \aleph_0} n = \aleph_0$.

טענה: $\prod_{1 \leq n < \aleph_0} n = 2^{\aleph_0}$.

משפט קניג: תהא I קבוצה יהיו $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ מונים ויהיו $\langle \lambda_i \mid i \in I \rangle$ מונים באשר $\kappa_i < \lambda_i$ לכל $i \in I$ אזי $\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$.

סופיות של סודר: יהי α סודר גבולי אזי הסודר המינימלי δ עבורו קיימת סדרה עולה $\langle \alpha_i \mid i < \delta \rangle$ המקיימת $\alpha_i < \alpha$ לכל $i < \delta$ וכן $\alpha = \bigcup_{i < \delta} \alpha_i$.

סימון: יהי α סודר גבולי אזי הסופיות של α הינה $\text{cof}(\alpha)$.

טענה: $\text{cof}(\omega) = \omega$ וכן $\text{cof}(\omega + \omega) = \omega$ וכן $\text{cof}(\aleph_\omega) = \omega$.

סודר סדיר: סודר גבולי α המקיים $\alpha = \text{cof}(\alpha)$.

סודר חריג: סודר גבולי α המקיים $\alpha \neq \text{cof}(\alpha)$.

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\alpha)$ מונה.

טענה: יהי κ מונה אזי κ סודר גבולי.

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\text{cof}(\alpha)) = \text{cof}(\alpha)$.

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\alpha)$ מונה סדיר.

טענה: יהי κ מונה אזי (κ חריג)$\Longleftrightarrow$(קיים סודר $\lambda < \kappa$ וקיימים מונים $\langle \kappa_i \mid i < \lambda \rangle$ באשר $\kappa_i < \kappa$ לכל $i < \lambda$ עבורם $\kappa = \sum_{i < \lambda} \kappa_i$).

טענה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha+1}$ סדיר. דורש AC

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\aleph_\alpha) = \text{cof}(\alpha)$.

טענה: $\text{cof}\left(2^{\aleph_0}\right) > \aleph_0$.

מונה גבולי: יהי α סודר גבולי אזי $\aleph_\alpha$.

מונה עוקב: יהי α סודר עוקב אזי $\aleph_\alpha$.

מסקנה: יהי $\aleph_\alpha$ מונה עוקב אזי $\aleph_\alpha$ מונה סדיר.

סימון: יהי κ מונה אזי $2^{<\kappa} = \sup\left\{2^\lambda \mid (\text{מונה } \lambda) \wedge (\lambda < \kappa)\right\}$.

סימון: יהי κ מונה אזי $\daleth(\kappa) = \kappa^{\text{cof}(\kappa)}$.

טענה: יהי κ מונה עוקב אזי $2^\kappa = \daleth(\kappa)$.

טענה: יהי α סודר עבורו $\aleph_\alpha$ מונה גבולי וכן קיים $\beta < \alpha$ וקיים מונה $\lambda < \kappa$ עבורם $2^{\aleph_\gamma} = \lambda$ לכל $\beta \leq \gamma < \alpha$ אזי $2^{\aleph_\alpha} = 2^{<\aleph_\alpha} \cdot \daleth(\aleph_\alpha)$.

טענה: יהי α סודר עבורו $\aleph_\alpha$ מונה גבולי וכן לכל $\beta < \alpha$ ולכל מונה $\kappa < \lambda$ קיים $\beta \le \gamma < \alpha$ עבורו $\lambda \ne 2^{\aleph_\gamma}$ אזי $2^{\aleph_\alpha} = \gimel\left(2^{<\aleph_\alpha}\right)$.

מסנן: תהא X קבוצה אזי $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $F \notin \varnothing$ וכן $X \in F$.
- תהיינה $A, B \in F$ אזי $A \cap B \in F$.
- תהא $A \in F$ ותהא $X \supseteq B$ באשר $A \subseteq B$ אזי $B \in F$.

על־מסנן: תהא X קבוצה אזי מסנן $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורו לכל $Y \subseteq X$ מתקיים $Y \in F$ או $X \backslash Y \in F$.

טענה: תהא X קבוצה ויהי $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ מסנן אזי קיים על־מסנן $G \subseteq \mathcal{P}(X)$ באשר $F \subseteq G$. דורש AC

מסנן ראשי: תהא X קבוצה אזי מסנן $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורו קיימת $A \subseteq X$ באשר $A \ne \varnothing$ המקיימת $F = \{Y \subseteq X \mid A \subseteq Y\}$.

טענה: תהא X קבוצה ויהי $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ מסנן ראשי אזי קיים $a \in X$ עבורו $F = \{Y \subseteq X \mid a \in Y\}$.

טענה: תהא X קבוצה אינסופית אזי קיימת $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ באשר F על־מסנן לא ראשי. דורש AC

טענה: יהי τ סודר אזי קיים סודר $\aleph_\tau < \alpha$ עבורו $\aleph_\alpha = \alpha$.

מונה אי נשיג חלש: יהי α סודר אזי מונה $\aleph_\alpha$ באשר $\aleph_\alpha$ מונה גבולי וסדיר.

מונה אי נשיג חזק: יהי α סודר אזי מונה $\aleph_\alpha$ באשר $\aleph_\alpha$ מונה סדיר וכן לכל מונה $\lambda < \aleph_\alpha$ מתקיים $2^\lambda < \aleph_\alpha$.

טענה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל סודר α מתקיים ($\aleph_\alpha$ אי נשיג חלש)$\Longleftrightarrow$($\aleph_\alpha$ אי נשיג חזק)).

הגדרה: $V_0 = \varnothing$ וכן $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ וכן $V_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$.

קבוצה סופית באופן תורשתי: קבוצה A באשר $A \in V_\omega$.

טענה: תהא V_ω קבוצת הקבוצות הסופיות באופן תורשתי אזי V_ω קבוצה טרנזיטיבית.

טענה: תהא V_ω קבוצת הקבוצות הסופיות באופן תורשתי ותהא $x \subseteq V_\omega$ סופית אזי $x \in V_\omega$.

טענה: תהא V_ω קבוצת הקבוצות הסופיות באופן תורשתי אזי

- תהא $x \in V_\omega$ אזי $|x| < \aleph_0$. לא מקיימת את "אקסיומת האינסוף"
- תהיינה $x, y \in V_\omega$ אזי $\{x, y\} \in V_\omega$. מקיימת את "אקסיומת הזיווג"
- תהא $x \in V_\omega$ אזי $\mathcal{P}(x) \in V_\omega$. מקיימת את "אקסיומת קבוצת החזקה"
- תהא $x \in V_\omega$ ותהא $f : x \to V_\omega$ אזי $\operatorname{Im}(f) \in V_\omega$. מקיימת את "אקסיומת ההחלפה"

הגדרה: יהי α סודר אזי $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ וכן יהי β סודר גבולי אזי $V_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} V_\gamma$ וכן $V = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}_n} V_\alpha$.

מסקנה: V מודל של תורת הקבוצות.

טענה: יהי α סודר אזי $\operatorname{cof}\left(2^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$.

מסקנה: יהי κ מונה ויהי α סודר אזי $\operatorname{cof}\left(\kappa^{\aleph_\alpha}\right) > \aleph_\alpha$.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \le \beta$ אזי $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\beta \le \alpha$ אזי $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = |\{X \subseteq \aleph_\alpha \mid |X| = \aleph_\beta\}|$.

טענה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל α, β סודרים באשר $\beta < \alpha$ וכן $\aleph_\alpha$ מונה סדיר מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$).

מסקנה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל α, β סודרים באשר $\beta < \alpha$ וכן $\aleph_\beta < \operatorname{cof}(\aleph_\alpha)$ מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$).

מסקנה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל α, β סודרים באשר $\aleph_\beta < \operatorname{cof}(\aleph_\alpha)$ מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1} & \beta\ge\alpha \\ \aleph_\alpha & \beta<\alpha \end{cases}$).

מסקנה: (GCH)$\Longleftarrow$(לכל α, β סודרים מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1} & \beta\ge\alpha \\ \aleph_\alpha & (\beta<\alpha)\wedge(\aleph_\beta<\operatorname{cof}(\aleph_\alpha)) \\ \aleph_{\alpha+1} & \text{else} \end{cases}$).

טענה נוסחאת האוסדורף: יהיו α, β סודרים אזי $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$.

קבוצה חסומה: יהי κ מונה סדיר באשר $\aleph_0 < \kappa$ אזי קבוצה $A \subseteq \kappa$ עבורה קיים $\delta < \kappa$ המקיים $A \subseteq \delta$.

קבוצה סגורה: יהי κ מונה סדיר באשר $\aleph_0 < \kappa$ אזי קבוצה $C \subseteq \kappa$ עבורה לכל $\tau < \kappa$ ולכל $\langle \alpha_i \mid i < \tau \rangle \subseteq C$ באשר $\alpha_i < \alpha_j$ לכל $i < j$ מתקיים $\bigcup_{i<\tau} \alpha_i \in C$.

קבוצה סגורה ולא חסומה (סל"ח): יהי κ מונה סדיר באשר $\aleph_0 < \kappa$ אזי קבוצה $C \subseteq \kappa$ באשר C סגורה וכן C אינה חסומה.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\aleph_0 < \kappa$ ותהיינה $C_0, C_1 \subseteq \kappa$ סל"ח אזי $C_0 \cap C_1$ סל"ח.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\aleph_0 < \kappa$ יהי $\lambda < \kappa$ ותהא $\langle C_i \mid i < \lambda \rangle$ באשר $C_i \subseteq \kappa$ סל"ח לכל $i < \lambda$ אזי $\bigcap_{i<\lambda} C_i$ סל"ח.

פונקציה רציפה: יהי κ מונה סדיר באשר $\aleph_0 < \kappa$ אזי $f : \kappa \to \kappa$ עבורה לכל $\alpha < \kappa$ גבולי מתקיים $f(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)$.

פונקציה נורמלית: יהי κ מונה סדיר באשר $\aleph_0 < \kappa$ אזי $f : \kappa \to \kappa$ רציפה שומרת סדר.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\aleph_0 < \kappa$ ותהא $C \subseteq \kappa$ אזי (C סל"ח)$\Longleftrightarrow$(קיימת $f : \kappa \to \kappa$ נורמלית באשר $C = \operatorname{Im}(f)$).

קבוצת שבת: יהי κ מונה סדיר באשר $\aleph_0 < \kappa$ אזי קבוצה $S \subseteq \kappa$ עבורה לכל סל"ח $C \subseteq \kappa$ מתקיים $S \cap C \ne \varnothing$.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ותהא $Y \subseteq \kappa$ חסומה אזי Y אינה שבת.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ותהא S שבת אזי $|S| = \kappa$.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ותהא $X \subseteq \kappa$ עבורה קיים סל"ח $C \subseteq \kappa$ המקיים $C \subseteq X$ אזי X שבת.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ תהא $X \subseteq \kappa$ שבת ויהי $C \subseteq \kappa$ סל"ח אזי $X \cap C$ שבת.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ותהא $S \subseteq \kappa$ אזי (S שבת)$\Longleftrightarrow$(לכל $f : \kappa \to \kappa$ נורמלית קיים $p \in S$ עבורו $f(p) = p$).

הגדרה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ויהי $\delta < \kappa$ מונה סדיר אזי $S_\delta = \{\alpha < \kappa \mid (\text{סודר גבולי } \alpha) \wedge (\operatorname{cof}(\alpha) = \delta)\}$.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ויהי $\delta < \kappa$ מונה סדיר אזי S_δ שבת.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_1$ ויהיו $\delta_1, \delta_2 < \kappa$ מונים סדירים באשר $\delta_1 \neq \delta_2$ אזי $S_{\delta_1} \cap S_{\delta_2} = \varnothing$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_1$ אזי קיימת $S \subseteq \kappa$ שבת עבורה לכל סל"ח $C \subseteq \kappa$ מתקיים $C \nsubseteq S$.

טענה שובך היונים: יהי κ מונה סדיר יהי $\mu < \kappa$ סודר ותהיינה $\{A_\alpha \mid \alpha < \mu\}$ קבוצות זרות באשר $\kappa = \bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha$ אזי קיים סודר $\alpha^\star < \mu$ עבורו $|A_{\alpha^\star}| = \kappa$.

טענה שובך היונים: יהי κ מונה סדיר יהי $\mu < \kappa$ סודר ותהא $f : \kappa \to \mu$ אזי קיים סודר $\alpha^\star < \mu$ עבורו $\kappa = \left|f^{-1}\left[\{\alpha^\star\}\right]\right|$.

טענה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ יהי $\mu < \kappa$ סודר ותהיינה $\langle A_\alpha \mid \alpha < \mu\rangle$ קבוצות זרות באשר $\kappa = \bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha$ אזי קיים סודר $\alpha^\star < \mu$ עבורו $A_{\alpha^\star}$ שבת.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ תהא $S \subseteq \kappa$ שבת יהי $\mu < \kappa$ סודר ותהיינה $\{A_\alpha \mid \alpha < \mu\}$ קבוצות זרות באשר $S = \bigcup_{\alpha<\mu} A_\alpha$ אזי קיים סודר $\alpha^\star < \mu$ עבורו $A_{\alpha^\star}$ שבת.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ תהא $S \subseteq \kappa$ שבת יהי $\mu < \kappa$ סודר ותהא $f : S \to \mu$ אזי קיים סודר $\alpha^\star < \mu$ עבורו $f^{-1}\left[\{\alpha^\star\}\right]$ שבת.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ תהא $S \subseteq \kappa$ שבת יהי $\mu < \kappa$ סודר ותהא $f : S \to \mu$ אזי קיימת $S^\star \subseteq S$ שבת ב־κ עבורה $f_{\restriction_{S^\star}}$ קבועה.

פונקציה דוחסת: יהי κ מונה סדיר ותהא $S \subseteq \kappa$ אזי $f : S \to \kappa$ עבורה לכל $\alpha \in S$ מתקיים $f(\alpha) < \alpha$.

חיתוך אלכסוני: יהי κ מונה סדיר ותהיינה $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ קבוצות באשר $C_\alpha \subseteq \kappa$ לכל $\alpha < \kappa$ אזי $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \{\beta < \kappa \mid \forall \alpha < \beta\,(\beta \in C_\alpha)\}$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר אזי $\Delta_{\alpha<\kappa}(\kappa \backslash \alpha) = \kappa$.

משפט: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ויהיו $\langle C_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ סל"חים ב־κ אזי $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ סל"ח ב־κ.

מסנן נורמלי: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ אזי מסנן $F \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ עבורו לכל $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ באשר $A_\alpha \in F$ לכל $\alpha < \kappa$ מתקיים $\Delta_{\alpha<\kappa} A_\alpha \in F$.

מסנן עדין: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ אזי מסנן $F \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ עבורו לכל $\alpha < \kappa$ מתקיים $\kappa \backslash \alpha \in F$.

משפט פודור: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ תהא $S \subseteq \kappa$ שבת ותהא $f : S \to \kappa$ דוחסת אזי קיימת $S^\star \subseteq S$ שבת ב־κ עבורה $f_{\restriction_{S^\star}}$ קבועה.

משפט: תהא $S \subseteq \aleph_1$ שבת אזי קיימות קבוצות זרות $\langle S_\alpha \mid \alpha < \aleph_1\rangle$ באשר S_α שבת ב־$\aleph_1$ לכל $\alpha < \aleph_1$ עבורן $S = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} S_\alpha$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ותהא $S \subseteq \kappa$ שבת עבורה לכל $\alpha \in S$ מתקיים $\operatorname{cof}(\alpha) = \omega$ אזי קיימות קבוצות זרות $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ באשר S_α שבת ב־κ לכל $\alpha < \kappa$ עבורן $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ יהי $\delta < \kappa$ מונה סדיר ותהא $S \subseteq \kappa$ שבת עבורה לכל $\alpha \in S$ מתקיים $\operatorname{cof}(\alpha) = \delta$ אזי קיימות קבוצות זרות $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ באשר S_α שבת ב־κ לכל $\alpha < \kappa$ עבורן $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$.

מסקנה: יהי κ מונה סדיר באשר $\kappa > \aleph_0$ ותהא $S \subseteq \kappa$ שבת עבורה לכל $\alpha \in S$ מתקיים $\operatorname{cof}(\alpha) < \alpha$ אזי קיימות קבוצות זרות $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ באשר S_α שבת ב־κ לכל $\alpha < \kappa$ עבורן $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$.