

**מרוכבים:** מרחב וקטורי  $\mathbb{R}^2$  מעל  $\mathbb{R}$  עם הפעולות הסטנדרטיות.

**סימון:** נסמן את המרוכבים בעזרת  $\mathbb{C}$ .

**הערה:** נשתמש ב- $\mathbb{C}$  בהתאמה  $(1, 0) \mapsto 1$  וכן ההגדרה  $i = (0, 1)$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי קיימים ויחידים  $a, b \in \mathbb{R}$  עבורם  $z = a + ib$ .

**מכפלת מרוכבים:** יהיו  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  אזי  $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$ .

**טענה:**  $i^2 = -1$ .

**החלק הממשי:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\operatorname{Re}(a + ib) = a$ .

**החלק המדומה:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\operatorname{Im}(a + ib) = b$ .

**הצמוד:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $\overline{a + ib} = a - ib$ .

**הערך המוחלט:** יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**מספר מדומה טהור:**  $z \in \mathbb{C}$  עבורו  $\operatorname{Re}(z) = 0$ .

**מספר ממשי טהור:**  $z \in \mathbb{C}$  עבורו  $\operatorname{Im}(z) = 0$ .

**למה:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי

$$\bullet \overline{\overline{z}} = z$$

$$\bullet |\overline{z}| = |z|$$

$$\bullet z\overline{z} = |z|^2$$

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי  $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ .

**מסקנה:**  $\mathbb{C}$  עם הפעולות שהוגדרו מלעיל הינו שדה.

**טענה:** יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$  אזי

$$\bullet \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\bullet \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$\bullet \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\bullet \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \text{ נניח כי } w \neq 0 \text{ אזי}$$

$$\bullet |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\bullet \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ נניח כי } w \neq 0 \text{ אזי}$$

$$\bullet -|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|$$

$$\bullet -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$$

**טענה אי שיוויון המשולש:** יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$  אזי  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

**טענה אי שיוויון קושי שורץ:** יהיו  $z_1 \dots z_n, w_1 \dots w_n \in \mathbb{C}$  אזי  $\left|\sum_{i=1}^n z_i w_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\right)^{1/2}$ .

**מסקנה:** יהיו  $z, w \in \mathbb{C}$  ויהיו  $a, b \in \mathbb{R}$  אזי

$$\bullet ||z| - |w|| \leq |z - w|$$

$$\bullet |a + ib| \leq |a| + |b|$$

**הצגה פולרית/הצגה קוטבית:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  אזי  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ .

**הארגומנט:** יהי  $z \in \mathbb{C}$  אזי  $\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\theta}\}$ .

**מסקנה:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי קיים ויחיד  $\theta \in (-\pi, \pi]$  עבורו  $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ .

**הארגומנט העיקרי:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ויהי  $\theta \in \arg(z) \cap (-\pi, \pi]$  אזי  $\operatorname{Arg}(z) = \theta$ .

**הערה:** יהי  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  אזי הארגומנט העיקרי קיים ויחיד.

**הערה:**  $\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

**טענה:** יהיו  $\theta, \phi \in \mathbb{R}$  ויהיו  $r, s \geq 0$  אזי

$$\overline{r \cdot e^{i\theta}} = r \cdot e^{-i\theta} \quad \bullet$$

$$(r \cdot e^{i\theta}) \cdot (s \cdot e^{i\phi}) = rs \cdot e^{i(\theta+\phi)} \quad \bullet$$

**מסקנה:** יהיו  $w, z \in \mathbb{C}$  אזי  $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

**טענה:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  ויהי  $r > 0$  אזי  $(r \cdot e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$

**טענה:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  יהי  $r \geq 0$  ויהי  $n \in \mathbb{Z}$  אזי  $(r \cdot e^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta}$

**מסקנה נוסאת דה מואבר:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  ויהי  $n \in \mathbb{Z}$  אזי  $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

**טענה:** יהי  $\theta \in \mathbb{R}$  יהי  $r \geq 0$  ויהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta+2\pi k}{n})} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

**מסקנה שורשי יחידה:** יהי  $n \in \mathbb{N}_+$  אזי  $\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$