כדור פתוח: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|<r\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|=r\}$.

פנים של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{int}(M)=\mathring{M}=\{x\in M\mid\exists r>0.B_r(x)\subseteq M\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $M=\mathring{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\subseteq\mathbb{R}^n\backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\cap M=\{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\partial M=\{x\in M\mid M \text{ נקודת שפה של } x\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M\subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{M}=\mathring{M}\cup\partial M$.

מסקנה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (M פתוחה)$\iff$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.M\subseteq B_r(0)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\iff$(לכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$).

גבול: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k\to\infty}\left\|a^{(k)}-L\right\|=0$ אזי $\lim_{k\to\infty}a^{(k)}=L$.

משפט: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right)\iff\left(\forall j\in[n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_j\right)$.

משפט קושי: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a^{(m)}-a^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\iff$(לכל $a\in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_i)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty}a^{(k_i)}\in K$).

הערה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f=\langle f_1,\ldots,f_m\rangle$ כאשר $f_i:A\to\mathbb{R}$.

גבול: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ תהא $a\in\mathbb{R}^n$ ותהא $L\in\mathbb{R}^m$ אזי

- היינה: אם $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{(k)}\to a\right)\implies\left(f\left(x^{(k)}\right)\to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a}f(x)=L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A\backslash\{a\}.\|x-a\|<\delta\implies\|f(x)-L\|<\varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

רציפות בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in A$ עבורה $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי $(f\in C(b))\iff(f_1,\ldots,f_m\in C(b))$.

מסילה: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$ רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ כך $\gamma(t)=(1-t)a+tb$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b]=\mathrm{Im}(\gamma)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a,b\in M.[a,b]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r(a),\overline{B}_r(a)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to M$ המקיימת $\gamma(0)=x$ וכן $\gamma(1)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_0}(\mathbb{R}^n)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $M=\biguplus\mathcal{A}$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f(a)<f(b)$ מתקיים $[f(a),f(b)]\subseteq f([a,b])$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ קשירה ותהא $f\in C(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ויירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C(\mathcal{K},\mathbb{R})$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f(\mathcal{K})=[f(x),f(y)]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\|x-y\|<\delta\implies\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^m\right)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $(\upsilon(a)\geq0)\wedge((\upsilon(a)=0)\iff(a=0))$.
- הומוגניות: $\upsilon(\lambda a)=|\lambda|\cdot\upsilon(a)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon(a+b)\leq\upsilon(a)+\upsilon(b)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\leq\upsilon\leq b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\|\cdot\|,\upsilon$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\upsilon\left(x^{(k)}\right)\to0\right)\iff\left(\rho\left(x^{(k)}\right)\to0\right)$.

נורמת ℓ_p: עבור $p\in\mathbb{N}_+$ נגדיר נורמה $\|\cdot\|_p:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\|v\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_∞: נגדיר נורמה $\|\cdot\|_\infty:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך $\|v\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|v_i|$.

מסקנה: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ ויהי $a\in(0,1)$ אזי $\gamma'(a)=\begin{pmatrix}\gamma_1'(a)\\ \vdots\\ \gamma_m'(a)\end{pmatrix}$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ המקיימת $f(x)=f(a)+L(x-a)+o(\|x-a\|)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}(a)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}(a)\implies f\in C(a)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\mathrm{grad}f(a)=[L]_{\mathrm{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f(a)=\mathrm{grad}f(a)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hx_i)-f(a)}{h}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=(\nabla f(a))_i$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי ($\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ קיימת לכל i)$\not\Longleftarrow$($f\in\mathcal{D}(a)$).

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ המקיימת $f(x)=f(a)+L(x-a)+o(\|x-a\|)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $(f\in\mathcal{D}(a))\iff(\forall i\in\{1\ldots m\}.f_i\in\mathcal{D}(a))$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\mathcal{D}_f(a)=\begin{pmatrix}-\nabla f_1(a)-\\ \vdots\\ -\nabla f_m(a)-\end{pmatrix}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\left(\mathcal{D}_f(a)\right)_{i,j}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי

- אם $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $f\in C(a)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}(a)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}(a)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$ וכן $\mathcal{D}_f\in C(\mathcal{U})$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה $\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})$ אזי $f\in\mathcal{D}(\mathcal{U})$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי $\left(\forall i\in[m].\forall j\in[n].\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\in C(\mathcal{U})\right)\iff\left(f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{h\to0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\nabla f(a)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\mathcal{D}_f(a)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=c)\iff\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=0\right)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $c\in\mathbb{R}^m$ אזי $(\forall x\in\mathcal{U}.f(x)=Ax+c)\iff\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_f(x)=A\right)$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\{1\ldots n\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ גזירה אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהיו $i,j\in\{1\ldots n\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_i},\frac{\partial f}{\partial x_j}\in C^1(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ אזי $|K|=\sum_{i=1}^n K_i$ וכן $\partial x^K=\partial x_1^{K_1}\ldots\partial x_n^{K_n}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^n$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_f\in C^k(\mathcal{U})$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{|K|}f}{\partial x^K}(a)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ויהי $v\in\mathbb{R}^n$ אזי $\|Av\|_{\mathrm{st}}\leq\|A\|_{\mathrm{st}}\cdot\|v\|_{\mathrm{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^m$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^k$ עבורן $f\in\mathcal{D}(a)$ וכן $g\in D(f(a))$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}(a)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}(a)=\mathcal{D}_g(f(a))\cdot\mathcal{D}_f(a)$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $y-f(a)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $N_a=(-\nabla f(a),1)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}(a)$ אזי $\nabla f(a)\perp\Pi_{f(a)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי

- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f(x)\geq f(a)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f(x)\leq f(a)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f(a)=0$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_f(a)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_f(a)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ נגדיר $\mathcal{D}_{(a,b)}^k f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^n\\|V|=k}}\binom{k!}{V_1,\ldots,V_n}\prod_{i=1}^n(a_i-b_i)^{V_i}\frac{\partial^k}{\partial x^V}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{D}_{(a,b)}^k f=\left(\sum_{i=1}^n(a_i-b_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^k$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה $f\in C^{k+1}(a)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in[x,a]$ עבורו $f(x)=\sum_{i=0}^k\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{(x,a)}^i f(a)+\frac{1}{(k+1)!}\mathcal{D}_{(x,a)}^{k+1}f(c)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_f\right)_{i,j}=f''_{x_i,x_j}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in[x,a]$ עבורו $f(x)=f(a)+(x-a)^t H_f(c)(x-a)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $f\in C^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_f(a)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}(a)>0\right)\right)\Longrightarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_f(a)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}(a)<0\right)\right)\Longrightarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- $\left(\left(\det\left(H_f(a)\right)\neq0\right)\wedge\right.$(לא אחד מהמקרים מלעיל)$\Longrightarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f\in C^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$ אזי $a\in\mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_f(a)\right)\neq0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F_y'(a)\neq0$ אזי קיימים $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ וקיימת $f\in C^1(I_x,I_y)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F_y'(a)\neq0$ יהיו $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ ותהא $f\in C^1(I_x,I_y)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$ אזי $f'(x)=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}$ על I_x.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times(n+m)}{\mathcal{D}_f(a)}=\left(\underset{m\times n}{F_x'(a)},\underset{m\times m}{F_y'(a)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F_y'(a)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ וקיימת $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F_y'(a)$ הפיכה יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ ותהא $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i},\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^n I_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^m I_{y_i}\right)$ מתקיים $(y=f(x))\iff(F(x,y)=0)$ אזי $\mathcal{D}_f(x)=-F_y'(x,f(x))^{-1}\cdot F_x'(x,f(x))$ על $\prod_{i=1}^n I_{x_i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F(a)=0$ וכן $F_y'(a)$ הפיכה אזי משוואת המשטח המשיק לגרף ב־a הינו $\sum_{i=1}^n F_{x_i}'(a)(x_i-a_i)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^1(\mathcal{U},\mathcal{V})$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^1(\mathcal{V},\mathcal{U})$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f\in C^k(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ עבורה $\mathcal{D}_f(a)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}(f(x))=\mathcal{D}_f(x)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $A\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

- (A פתוחה)$\iff$($f(A)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\iff$($f(A)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\iff$($f(A)$ קומפקטית).
- אם $\partial A\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\partial(f(A))=f(\partial A)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת לכל $\tilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\tilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ עבורה $\mathrm{rank}\left(\mathcal{D}_f(a)\right)=m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g(a)=0$ וכן $\nabla f(a)\in\mathrm{span}\{\nabla g_i(a)\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g(a)=0$ וכן $\{\nabla g_i(a)\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\mathcal{O}\cap\mathrm{sols}(g)$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ ותהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ נגדיר $L\in C^1(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ כך $L(x_1\ldots x_n,\lambda_1,\ldots\lambda_m)=f(x_1\ldots x_n)-\sum_{i=1}^m\lambda_i g_i(x_1\ldots x_n)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ תהא $g\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^m)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$)$\iff$(קיימת $\lambda\in\mathbb{R}^m$ עבורה (a,λ) נקודה קריטית של L).

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $P_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\leq x_j\leq b_j\right\}$.

חלוקה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ לכל $i\in[n]$ תהיינה $\left\{t_i^0,\ldots,t_i^{\ell_i}\right\}$ חלוקה של $[a_i.b_i]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^n\left[t_i^{m_i},t_i^{m_i+1}\right]\mid\forall i\in[n].m_i\in[\ell_i-1]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $V(P)=\mathrm{Vol}(P)=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה של P אזי $\mathrm{Vol}(P)=\sum_{i=1}^k\mathrm{Vol}(A_i)$.

סכום רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ תהא $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)}\in A_j$ אזי $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)=\sum_{j=1}^k f\left(x^{(j)}\right)\mathrm{Vol}\left(A_j\right)$.

קוטר קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $d(M)=\sup_{x,y\in M}\|x-y\|$.

מדד העדינות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi=\{A_1,\ldots,A_k\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i\leq i\leq k}d(A_i)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אזי $\int_P f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f\in R(P)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f\in R(P)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1,\ldots,A_n\}$ חלוקה אזי $\overline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\sup_{P_j}(f)\,\mathrm{Vol}\left(P_j\right)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\{A_1,\ldots,A_n\}$ חלוקה אזי $\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{P_j}(f)\,\mathrm{Vol}\left(P_j\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי $\underline{S}(f,\Pi)\leq S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)\leq\overline{S}(f,\Pi)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות אזי $\underline{S}(f,\Pi_1)\leq\underline{S}(f,\Pi_2)\leq\overline{S}(f,\Pi_2)\leq\overline{S}(f,\Pi_1)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}(f,\Pi_1)\leq\overline{S}(f,\Pi_2)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{S}(f,\Pi)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\text{חלוקה }\Pi}\underline{S}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\leq\underline{I}(f)\leq\overline{I}(f)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(P\right)\right)\iff\left(\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ חסומה אזי $\int_{P}f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\text{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^{n}\text{Vol}\left(P_{a,b}\right)$.

טענה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות עבורן לכל $j\neq i$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.

מסקנה: יהיו $P_{1}\ldots P_{n}$ תיבות ותהא $P\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)$.

טענה: יהיו P_{1},P_{2} תיבות אזי $P_{1}\cap P_{2}$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\backslash\text{int}\left(P\right)\right)=0$.

קבוצה זניחה: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{P_{i}\right\}_{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}P_{i}$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid \text{זניחה } E\right\}$.

טענה: $\varnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\{a\right\}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהיינה $\left\{E_{i}\right\}_{i=0}^{\infty}$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty}E_{i}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{P_{i}\right\}_{i=0}^{\infty}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{\infty}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{\infty}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{P_{i}\right\}_{i=0}^{n}$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^{n}\text{int}\left(P_{i}\right)$ וכן $\sum_{i=0}^{n}\text{Vol}\left(P_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $A\subseteq E$ אזי $A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: $\mathbb{Q}^{n}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה לא מנוונת אזי $P\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

מסקנה: תהא $M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\text{int}\left(M\right)=\varnothing$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_{f}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\left\{C_{i}\right\}_{i=0}^{\infty}$ בעלות אורך צלע $2^{-e_{i}}$ עבור $e_{i}\in\mathbb{N}$ עבורן לכל $j\neq i$ מתקיים $\text{int}\left(P_{i}\right)\cap\text{int}\left(P_{j}\right)=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_{i}$.

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$, קבוצת קנטור זניחה.

כמעט לכל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E\subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A\backslash E$.

קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\iff$($f\in R\left(P\right)$).

קבוצה מדידת ז'ורדן: $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה עבורה ∂E זניחה.

טענה: תהיינה $E_{1},E_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי

- ∂E_{1} סגורה.
- $\partial\left(E_{1}\backslash E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cup E_{2}\right),\partial\left(E_{1}\cap E_{2}\right)\subseteq\partial E_{1}\cup\partial E_{2}$.

סימון: $J\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{E\subseteq\mathbb{R}^{n}\mid \text{ז'ורדן } E\right\}$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J$ אזי $A\backslash B,A\cup B,A\cap B\in J$.

פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}:\mathbb{R}^{n}\to\left\{0,1\right\}$ כך $\chi_{A}\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}\in C\left(\text{int}\left(A\right)\right)$ וכן $\chi_{A}\in C\left(\mathbb{R}^{n}\backslash A\right)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $A\subseteq P$ חסומה ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\cdot\chi_{A}\in R\left(P\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{P}f\cdot\chi_{A}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה תהיינה $P_{1},P_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבות סגורות עבורן $A\subseteq P_{1},P_{2}$ ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ אזי

- $\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{1}\right)\right)\iff\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{2}\right)\right)$.
- $\int_{P_{1}}f\cdot\chi_{A}=\int_{P_{2}}f\cdot\chi_{A}$.

מידה/נפח של תיבה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $V\left(A\right)=\text{Vol}\left(A\right)=\int_{A}dx$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ אזי

- יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $af+bg\in R\left(A\right)$ וכן $\int_{A}\left(af+bg\right)=a\int_{A}f+b\int_{A}g$.
- נניח כי $f\geq0$ אזי $\int_{A}f\geq0$.
- נניח כי $f\geq g$ אזי $\int_{A}f\geq\int_{A}g$.
- נניח כי $m\leq f\leq M$ אזי $m\text{Vol}\left(A\right)\leq\int_{A}f\leq M\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $f\in R\left(A\right)\cap R\left(B\right)$ אזי $f\in R\left(A\cap B\right)$ וכן $f\in R\left(A\cup B\right)$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן $\text{Vol}\left(A\cap B\right)=0$ אזי $\int_{A\cup B}f=\int_{A}f+\int_{B}f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תחום ותהא $f\in C\left(A,\mathbb{R}\right)$ אזי $\exists c\in A.\int_{A}f=f\left(c\right)\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $f\in R\left(A\right)$ אזי $\left|f\right|\in R\left(A\right)$ וכן $\left|\int_{A}f\right|\leq\int_{A}\left|f\right|$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ כמעט על כל A אזי $\int_{A}f=\int_{A}g$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\int_{\overline{A}}f=\int_{A}f=\int_{\text{int}\left(A\right)}f$.

טענה: תהינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\bigcup_{i=1}^{k}A_{i},\bigcap_{i=1}^{k}A_{i}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

מסקנה: תהיינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן לכל $j\neq i$ מתקיים $\text{Vol}\left(A_{i}\cap A_{j}\right)=0$ אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(A_{i}\right)$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Vol}\left(A\right)=\text{Vol}\left(A+a\right)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu:J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\to\mathbb{R}_{\geq0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu\left(\left[0,1\right]^{n}\right)=1$ אזי $\nu=\text{Vol}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה אזי $T\left(A\right)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $T\left(\partial A\right)=\partial\left(T\left(A\right)\right)$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ זניחה וחסומה אזי $T\left(E\right)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $T\left(A\right)\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ וכן $\text{Vol}\left(T\left(A\right)\right)=\text{Vol}\left(A\right)$.

משפט פוביני: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ עבורה f $\iint_{P\times Q}$ קיים אזי $\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)dydx,\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)dxdy$ קיימים ובפרט $\iint_{P\times Q}f=\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)dydx=\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)dxdy$.

מסקנה: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ אזי $\int_{Q}f\left(a,y\right)dy$ קיים כמעט לכל $a\in P$.

מסקנה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_{1},\varphi_{2}:B\to\mathbb{R}$ תהא $A=\left\{\left(x,y\right)\in B\times\mathbb{R}\mid\varphi_{1}\left(x\right)\leq y\leq\varphi_{2}\left(x\right)\right\}$ ותהא $f\in R\left(A\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{B}\int_{\varphi_{1}\left(x\right)}^{\varphi_{2}\left(x\right)}f\left(x,y\right)dydx$.

מסקנה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תהא $A\subseteq\prod_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{y\right\}\right)\in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ כמעט לכל $y\in P_{n}$ ובפרט $\text{Vol}\left(A\right)=\int_{P_{n}}\text{Vol}\left(A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{y\right\}\right)\right)dy$.

שטח: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $S\left(D\right)=\iint_{D}dxdy$.

מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי $m\left(D\right)=\iint_{D}\rho\left(x,y\right)dxdy$.

מומנט מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי ציר x: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}y\cdot\rho\left(x,y\right)dxdy$.
- מומנט מסה לפי ציר y: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}x\cdot\rho\left(x,y\right)dxdy$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\frac{M_{y}(D)}{m(D)},\frac{M_{x}(D)}{m(D)}\right)$.

נפח: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ אזי $V\left(E\right)=\iiint_{E}dxdydz$.

מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי $m\left(E\right)=\iiint_{E}\rho\left(x,y,z\right)dxdydz$.

מומנט מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי המישור $\left\{z=0\right\}$: $M_{xy}\left(E\right)=\iiint_{E}z\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{y=0\right\}$: $M_{xz}\left(E\right)=\iiint_{E}y\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz$.
- מומנט מסה לפי המישור $\left\{x=0\right\}$: $M_{yz}\left(E\right)=\iiint_{E}x\cdot\rho\left(x,y,z\right)dxdydz$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$.

מקבילון: יהיו $v_{1}\ldots v_{n}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Par}\left(v_{1}\ldots v_{n}\right)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i}v_{i}\mid\forall i\in\left[n\right].\alpha_{i}\in\left[0,1\right]\right\}$.

טענה: יהיו $v_{1}\ldots v_{n}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי מתקיים $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(v_{1}\ldots v_{n}\right)\right)=\left|\det\begin{pmatrix}-v_{1}-\\ \vdots\\ -v_{n}-\end{pmatrix}\right|$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $E\subseteq A$ אזי

- (E זניחה)$\Longleftarrow$($\varphi\left(E\right)$ זניחה).
- ($\left(\text{Vol}\left(E\right)=0\right)\wedge\left(\overline{E}\subseteq A\right)$)$\Longleftarrow$($\left(\text{Vol}\left(\varphi\left(E\right)\right)=0\right)\wedge\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)$).
- ($\left(\overline{E}\subseteq A\right)\wedge$($E$ ז'ורדן))$\Longleftarrow$($\left(\overline{\varphi\left(E\right)}\subseteq B\right)\wedge$($\varphi\left(E\right)$ ז'ורדן)).

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\right)$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R\left(B\right)$ אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|dt$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם תהא $E\subseteq A$ עבורה $\overline{E}\subseteq A$ ותהא $f\in R\left(\varphi\left(E\right)\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(E\right)$ ובפרט $\int_{\varphi\left(E\right)}f=\int_{E}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|dt$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi\left(A\backslash E\right)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם על $A\backslash E$ ותהא $f\in R\left(S\right)$ אזי $\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\right|\in R\left(A\right)$ ובפרט $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|dt$.

קואורדינטות קוטביות/פולריות: יהי $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\rho,\phi\right)\in\left(0,\infty\right]\times\left[0,2\pi\right]$ עבורן $x=\rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לפולריות אזי $\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|=\rho$.

קואורדינטות גליליות: יהי $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\rho,\phi,\iota\right)\in\left(0,\infty\right]\times\left[0,2\pi\right]\times\left\{z\right\}$ עבורן $x=\rho\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\phi\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לגליליות אזי $\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|=\rho$.

קואורדינטות כדוריות: יהי $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\rho,\phi,\theta\right)\in\left(0,\infty\right]\times\left[0,2\pi\right]\times\left[0,\pi\right]$ עבורן $x=\rho\sin\left(\theta\right)\cos\left(\phi\right)$ וכן $y=\rho\sin\left(\theta\right)\sin\left(\phi\right)$ וכן $z=\rho\cos\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ מעבר מקואורדינטות אוקלידיות לכדוריות אזי $\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|=\rho^{2}\sin\left(\theta\right)$.

טענה: תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ סיבוב S סביב ציר z בקואורדינטות גליליות אזי $\text{Vol}\left(E\right)=2\pi\iint_{S}\rho d\rho dz$.

מסקנה נפח גוף סיבוב: תהיינה $f,g:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ עבורן $f\leq g$ תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ סביב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}\left(E\right)=\pi\int_{a}^{b}\left(g^{2}\left(x\right)-f^{2}\left(x\right)\right)dx$.

משפט פאפוס: תהא $S\subseteq\mathbb{R}^{2}$ יהי $c\in\mathbb{R}^{2}$ מרכז המסה של S ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ סיבוב S סביב ציר x אזי $\text{Vol}\left(E\right)=2\pi R_{c}\cdot\text{Vol}\left(S\right)$ באשר R_{c} רדיוס סיבוב c.

מיצוי ז'ורדן: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות מדידות ז'ורדן עולה עבורה $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{k}$.

טענה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E אזי $\text{Vol}\left(E\right)=\lim_{k\to\infty}\text{Vol}\left(E_{k}\right)$.

מסקנה: תהא $E\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ יהי $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E ותהא $f\in R\left(E\right)$ אזי $\int_{E}f=\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$.

אינטגרל לא אמיתי: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ עבורם לכל $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ מיצוי ז'ורדן של E מתקיים $\forall k\in\mathbb{N}.f\in R\left(E_{k}\right)$ וכן $\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$ קיים ושווה אזי $\int_{E}f=\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ אי שלילית עבורה קיים מיצוי ז'ורדן $\left(E_{k}\right)_{k=1}^{\infty}$ של E המקיימת $\forall k\in\mathbb{N}.f\in R\left(E_{k}\right)$ וכן $\lim_{k\to\infty}\int_{E_{k}}f$ קיים אזי $\int_{E}f$ מתכנס.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\int_{\mathbb{R}^{n}}e^{-\left\Vert x\right\Vert^{2}}dx=\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^{2}}dt\right)^{n}=\pi^{\frac{n}{2}}$.

משפט מבחן ההשוואה לאינטגרלים לא אמיתיים: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהיינה $f,g:E\to\mathbb{R}$ עבורן $\left|f\right|\leq g$ וכן $\forall A\in\mathcal{P}\left(E\right)\cap J\left(\mathbb{R}^{n}\right).\left(f\in R\left(A\right)\right)\iff\left(g\in R\left(A\right)\right)$ וכן $\int_{E}g$ מתכנס אזי $\int_{E}f,\int_{E}\left|f\right|$ מתכנסים.

מסקנה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ אזי ($\int_{E}\left|f\right|$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_{E}f$ מתכנס).

משפט: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ בעלת מיצוי ז'ורדן ותהא $f:E\to\mathbb{R}$ בעלת קבוצת נקודות אי־רציפות זניחה אזי ($\int_{E}f$ מתכנס)$\Longleftarrow$($\int_{E}\left|f\right|$ מתכנס).

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהיינה $f,g:E\to\mathbb{R}$ עבורן $\int_{E}f,\int_{E}g$ מתכנסים אזי $\int_{E}\left(f+g\right)=\int_{E}f+\int_{E}g$.

הערה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה E בעלת מיצוי ז'ורדן.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f:B\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $E\subseteq B$ ז'ורדן וקומפקטית מתקיים $f\in R\left(E\right)$ וכן $\int_{B}f$ מתכנס אזי $\int_{B}f=\int_{A}f\left(\varphi\left(t\right)\right)\left|\det\mathcal{D}_{\varphi}\left(t\right)\right|dt$.

פונקציית גאמא: יהי $t>0$ אזי $\Gamma\left(t\right)=\int_{0}^{\infty}x^{t-1}e^{-x}dx$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\Gamma\left(n\right)=\left(n-1\right)!$.

טענה: יהי $t>0$ אזי $\Gamma\left(t\right)$ מתכנס.

פונקציית בטא: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)=\int_{0}^{\infty}x^{t-1}\left(1-x\right)^{s-1}dx$.

טענה: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)$ מתכנס.

מסקנה: יהיו $t,s>0$ אזי $B\left(t,s\right)=\frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)}$.

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\text{Vol}\left(B_{1}\left(0\right)\right)=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

סימפלקס: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\Delta_{n}=\left\{x\in\mathbb{R}^{n}\mid\left(\forall i\in\left[n\right].x_{i}\geq0\right)\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}x_{i}\leq1\right)\right\}$.

טענה נוסחת דירכלה: יהיו $p_{1}\ldots p_{n}>0$ אזי $\int\cdots\int_{\Delta_{n}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}^{p_{i}-1}\right)dx_{1}\ldots dx_{n}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_{i})}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}p_{i}\right)}$.

מסקנה: יהיו $p_{1}\ldots p_{n}>0$ ויהיו $\gamma_{1}\ldots\gamma_{n}>0$ אזי $\int\cdots\int_{\substack{x_{1},\ldots x_{n}\geq0\\ \sum x_{i}^{\gamma_{i}}\leq1}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}^{p_{i}-1}\right)dx_{1}\ldots dx_{n}=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\gamma_{i}}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{p_{i}}{\gamma_{i}}\right)}{\Gamma\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_{i}}{\gamma_{i}}\right)}$.

טענה: יהיו $p_{1}\ldots p_{n}>0$ ותהא $\psi:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$ רציפה כמעט תמיד אזי $\int\cdots\int_{\Delta_{n}}\psi\left(x_{1}\ldots x_{n}\right)\left(\prod_{i=1}^{n}x_{i}^{p_{i}-1}\right)dx_{1}\ldots dx_{n}=\frac{\prod_{i=1}^{n}\Gamma(p_{i})}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}p_{i}\right)}\int_{0}^{1}\psi\left(u\right)u^{\left(\sum p_{i}\right)-1}du$.