

הגדרה: תהיינה X, Y קבוצות ותהא $f : X \rightarrow Y$ חח"ע אזי $|X| \leq |Y|$.

הגדרה: תהיינה X, Y קבוצות ותהא $f : X \rightarrow Y$ חח"ע ועל אזי $|X| = |Y|$.

סימון: תהיינה X, Y קבוצות עבורן $\neg(|X| = |Y|)$ אזי $|X| \neq |Y|$.

הגדרה: תהיינה X, Y קבוצות עבורן $|X| \leq |Y|$ וכן $|X| \neq |Y|$ אזי $|X| < |Y|$.

הערה: נקרא לביטוי $|X|$ העוצמה של X .

משפט קנטור-שרדר-ברנשטיין (קש"ב): תהיינה X, Y קבוצות עבורן $|X| \leq |Y|$ וכן $|Y| \leq |X|$ אזי $|X| = |Y|$.

סימון: $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

קבוצה בת מנייה: קבוצה X עבורה $|X| = \aleph_0$.

קבוצה סופית: קבוצה A עבורה קיים $n \in \mathbb{N}$ המקיים $|A| = |\{0, \dots, n-1\}|$.

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $n = |\{0, \dots, n-1\}|$.

קבוצה אינסופית: קבוצה A עבורה לא קיים $n \in \mathbb{N}$ המקיים $|A| = |\{0, \dots, n-1\}|$.

טענה: תהא A בת מנייה ותהא $B \subseteq A$ אינסופית אזי B בת מנייה.

מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא $B \subseteq A$ אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהא A בת מנייה ותהא B קבוצה ותהא $f : A \rightarrow B$ על אזי B סופית או בת מנייה.

טענה: תהיינה A, B בנות מנייה אזי $A \cup B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1 \dots A_n$ קבוצות בנות מנייה אזי $\bigcup_{i=1}^n A_i$ בת מנייה.

טענה: תהא $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i \in \mathbb{N}$ ותהא $\langle f_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרת פונקציות באשר

$f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$ על לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ סופית או בת מנייה.

מכפלה קרטזית: תהיינה A, B קבוצות אזי $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$.

טענה: תהיינה A, B בנות מנייה אזי $A \times B$ בת מנייה.

טענה: תהיינה $A_1 \dots A_n$ בנות מנייה אזי $A_1 \times \dots \times A_n$ בת מנייה.

הגדרה: תהא A קבוצה אזי $A^1 = A$.

הגדרה: תהא A קבוצה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $A^n = A \times A^{n-1}$.

טענה: $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n$ בת מנייה.

מסקנה: $|\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ סופית}\}| = \aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

טענה: $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

מספר אלגברי: מספר $a \in \mathbb{C}$ עבורו קיים $p \in \mathbb{Z}[x]$ המקיים $p(a) = 0$.

מספר טרנסצנדנטי: מספר $a \in \mathbb{C}$ עבורו לכל $p \in \mathbb{Z}[x]$ מתקיים $p(a) \neq 0$.

משפט קנטור: $|\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ אלגברי}\}| = \aleph_0$.

יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי $\preceq \subseteq A^2$ אזי $\langle A, \preceq \rangle$ באשר

• רפלקסיביות: יהי $x \in A$ אזי $x \preceq x$.

• טרנזיטיביות: יהיו $x, y, z \in A$ עבורם $x \preceq y$ וכן $y \preceq z$ אזי $x \preceq z$.

• אנטי סימטריות חלשה: יהיו $x, y \in A$ עבורם $x \preceq y$ וכן $y \preceq x$ אזי $x = y$.

יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי $\prec \subseteq A^2$ אזי $\langle A, \prec \rangle$ באשר

• אנטי רפלקסיביות: יהי $x \in A$ אזי $\neg(x \prec x)$.

• טרנזיטיביות: יהיו $x, y, z \in A$ עבורם $x \prec y$ וכן $y \prec z$ אזי $x \prec z$.

• אנטי סימטריות חזקה: יהיו $x, y \in A$ עבורם $x \prec y$ אזי $\neg(y \prec x)$.

יחס סדר קווי חלקי/חלש: יחס סדר חלקי $\langle A, \preceq \rangle$ עבורו לכל $x, y \in A$ מתקיים $(x \preceq y) \vee (y \preceq x)$.

יחס סדר קווי חזק: יחס סדר חזק $\langle A, \prec \rangle$ עבורו לכל $x, y \in A$ מתקיים $(x \prec y) \vee (y \prec x) \vee (x = y)$.

טענה: $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ יחס סדר קווי חלקי.

טענה: תהא A קבוצה אזי $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ יחס סדר חלקי.

פונקציה שומרת סדר: יהיו $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$ סדרים אזי $f : A \rightarrow B$ חח"ע עבורה לכל $a, b \in A$ מתקיים $(aRb) \iff (f(a)Sf(b))$.

סדרים חלקיים איזומורפיים: סדרים $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$ עבורם קיימת $\pi : A \rightarrow B$ הפיכה שומרת סדר.

סימון: יהיו $\langle A, R \rangle, \langle B, S \rangle$ סדרים איזומורפיים אזי $\langle A, R \rangle \simeq \langle B, S \rangle$.

יחס סדר קווי בעל איבר ראשון/מינימום: סדר קווי $\langle A, R \rangle$ עבורו קיים $a \in A$ באשר לכל $b \in A$ מתקיים $(aRb) \vee (a = b)$.

סימון: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון $a \in A$ אזי $\min(A) = a$.

טענה: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי בעל איבר ראשון ויהי $\langle B, S \rangle$ סדר קווי באשר $\langle A, R \rangle \simeq \langle B, S \rangle$ אזי $\langle B, S \rangle$ בעל איבר ראשון.

יחס סדר קווי בעל איבר אחרון/מקסימום: סדר קווי $\langle A, R \rangle$ עבורו קיים $b \in A$ באשר לכל $a \in A$ מתקיים $(aRb) \vee (a = b)$.

סימון: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון $a \in A$ אזי $\max(A) = a$.

טענה: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי בעל איבר אחרון ויהי $\langle B, S \rangle$ סדר קווי באשר $\langle A, R \rangle \simeq \langle B, S \rangle$ אזי $\langle B, S \rangle$ בעל איבר אחרון.

יחס סדר קווי צפוף: סדר קווי $\langle A, R \rangle$ עבורו לכל $x, y \in A$ המקיימים xRy קיים $z \in A$ עבורו xRz וכן zRy .

טענה: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי צפוף ויהי $\langle B, S \rangle$ סדר קווי באשר $\langle A, R \rangle \simeq \langle B, S \rangle$ אזי $\langle B, S \rangle$ צפוף.

טענה: $\langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.

מסקנה: $\langle \mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}} \rangle \not\simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A, \preceq \rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A| = \aleph_0$ אזי $\langle A, \preceq \rangle \simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle$.

משפט קנטור: יהי $\langle A, \prec \rangle$ סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר $|A| = \aleph_0$ אזי $\langle A, \prec \rangle \simeq \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} \rangle$.

חסם מלעיל: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי ותהא $X \subseteq A$ אזי $a \in A$ עבורו לכל $x \in X$ מתקיים $(xRa) \vee (x = a)$.

סימון: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי ותהא $X \subseteq A$ אזי $a \in A$ חסם מלעיל של X $\overline{B}_X = \{a \in A \mid X \subseteq a\}$.

קבוצה חסומה מלעיל: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי אזי $X \subseteq A$ עבורה $\overline{B}_X \neq \emptyset$.

חסם מלרע: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי ותהא $X \subseteq A$ אזי $a \in A$ עבורו לכל $x \in X$ מתקיים $(xRa) \vee (x = a)$.

סימון: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי ותהא $X \subseteq A$ אזי $a \in A$ חסם מלרע של X $\underline{B}_X = \{a \in A \mid X \subseteq a\}$.

קבוצה חסומה מלרע: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי אזי $X \subseteq A$ עבורה $\underline{B}_X \neq \emptyset$.

קבוצה חסומה: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי אזי $X \subseteq A$ בעלת חסם מלרע וחסם מלעיל.

סימון: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי ותהא $X \subseteq A$ אזי $\sup(X) = \min(\overline{B}_X)$.

סימון: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי ותהא $X \subseteq A$ אזי $\inf(X) = \max(\underline{B}_X)$.

יחס סדר קווי שלם: סדר קווי $\langle A, R \rangle$ עבורו לכל $X \subseteq A$ חסומה מלעיל קיים $\sup(X)$.

טענה: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי אזי $(\langle A, R \rangle \text{ סדר שלם}) \iff (X \subseteq A \text{ חסומה קיימים } \sup(X), \inf(X))$.

קבוצה צפופה: יהי $\langle A, R \rangle$ סדר קווי אזי $X \subseteq A$ עבורה לכל $x, y \in A$ באשר xRy קיים $z \in X$ המקיים xRz וכן zRy .

השלמה של יחס סדר קווי חלקי: יהי $\langle P, \preceq \rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי סדר חלקי $\langle L, \sqsubseteq \rangle$ המקיים

$$P \subseteq L$$

$$(x \preceq y) \iff (x \sqsubseteq y) \text{ לכל } x, y \in P \text{ מתקיים}$$

$$\langle L, \sqsubseteq \rangle \text{ סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.}$$

$$\langle P, \preceq \rangle \text{ צפוף ב-} \langle L, \sqsubseteq \rangle.$$

משפט יחידות השלמה: יהי $\langle P, \preceq \rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה $\langle L^*, \sqsubseteq^* \rangle, \langle L, \sqsubseteq \rangle$ השלמות אזי

$$\text{קיים איזומורפיזם } \pi : L \rightarrow L^* \text{ עבורו } \pi(p) = p \text{ לכל } p \in P.$$

משפט קיום השלמה: יהי $\langle P, \preceq \rangle$ סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.

חתך דדקינד: יהי $\langle P, \preceq \rangle$ סדר קווי חלקי ויהיו $A, B \subseteq P$ לא ריקות אזי $\langle A, B \rangle$ באשר

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cup B = P$$

$$\text{לכל } a \in A \text{ ולכל } b \in B \text{ מתקיים } a \preceq b$$

$$\langle A, \preceq \rangle \text{ ללא איבר אחרון.}$$

$$\text{סימון: יהי } \langle P, \preceq \rangle \text{ סדר קווי חלקי ויהי } p \in P \text{ אזי } [p] = \langle (-\infty, p), [p, \infty) \rangle$$

$$\text{טענה: יהי } \langle P, \preceq \rangle \text{ סדר קווי חלקי ויהי } p \in P \text{ אזי } [p] \text{ חתך דדקינד.}$$

$$\text{הגדרה: יהי } \langle P, \preceq \rangle \text{ סדר קווי חלקי ויהיו } \langle A, B \rangle, \langle C, D \rangle \text{ חתכי דדקינד באשר } A \subseteq C \text{ אזי } \langle A, B \rangle \preceq \langle C, D \rangle.$$

$$\text{טענה: יהי } \langle P, \preceq \rangle \text{ סדר קווי חלקי אזי } \langle \{[p] \mid p \in P\}, \preceq \rangle \simeq \langle P, \preceq \rangle.$$

הערה: נשתמש בהתאמה מעל בתור שיכון של P בחתכי הדדקינד שלה.

$$\text{סימון: יהי } \langle P, \preceq \rangle \text{ סדר קווי חלקי אזי } \text{Ded}(P) = \{ \langle A, B \rangle \mid \text{חתך דדקינד } \langle A, B \rangle \}$$

$$\text{טענה: יהי } \langle P, \preceq \rangle \text{ סדר קווי חלקי אזי } \langle \text{Ded}(P), \preceq \rangle \text{ סדר קווי חלקי.}$$

$$\text{טענה: יהי } \langle P, \preceq \rangle \text{ סדר קווי חלקי אזי } \langle \text{Ded}(P), \preceq \rangle \text{ ללא איבר אחרון}$$

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ צפופה ב- $\langle \text{Ded}(P), \preccurlyeq \rangle$.

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle \text{Ded}(P), \preccurlyeq \rangle$ סדר שלם.

טענה: יהי $\langle A, \prec \rangle$ סדר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון $\langle B, \sqsubset \rangle$ עבורו קיימת $f: A \rightarrow B$ שומרת סדר.

מספרים ממשיים: $\langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} \rangle$ הינה ההשלמה של $\langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle$.

משפט: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}} \rangle$.

טענה: $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$.

קבוצת החזקה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$.

סימון: תהא X קבוצה אזי ${}^X 2 = \{f \mid f: X \rightarrow \{0, 1\}\}$.

טענה: תהא X קבוצה אזי $|\mathcal{P}(X)| = |{}^X 2|$.

משפט קנטור: תהא X קבוצה אזי $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

טענה: $|\mathbb{R}| = |{}^{\mathbb{N}} 2|$.

קבוצת קנטור: נגדיר $C_0 = [0, 1]$ ונגדיר $C_{n+1} = (\frac{1}{3}C_n) \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$.

טענה: $(C, <_{\mathbb{R}}) \simeq ({}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}, <_{\text{lex}})$.

טענה: תהיינה A, B קבוצות זרות ותהיינה C, D קבוצות זרות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \cup B| = |C \cup D|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות זרות אזי $|A| + |B| = |A \cup B|$.

טענה: תהא A קבוצה אזי $|A \times \{0\}| = |A|$.

הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}|$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|A \times B| = |C \times D|$.

הגדרה כפל: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A| \cdot |B| = |A \times B|$.

הערה: נאמר כי κ היא עוצמה אם קיימת קבוצה A עבורה $|A| = \kappa$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $2 \cdot \kappa = \kappa$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי ${}^B A = \{f \mid f: B \rightarrow A\}$.

טענה: תהיינה A, B, C, D קבוצות באשר $|A| = |C|$ וכן $|B| = |D|$ אזי $|{}^B A| = |{}^D C|$.

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי $|A|^{|B|} = |{}^B A|$.

מסקנה: $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא κ עוצמה אזי $\kappa \cdot \kappa = \kappa^2$.

טענה: תהיינה κ, λ, μ עוצמות אזי $\kappa^{(\lambda+\mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$ וכן $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)}$ וכן $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu})$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\aleph_0 + n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$ וכן $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\aleph_0^n = \aleph_0$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $2^{\aleph_0} + n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $2^{\aleph_0} \cdot n = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ וכן $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $(2^{\aleph_0})^n = 2^{\aleph_0}$ וכן $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ אזי $n^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ וכן $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $(2^{\aleph_0})^{(2^{\aleph_0})} > 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $|\mathbb{R}^n| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{C}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ וכן $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: תהא B קבוצה באשר $|B| = 2^{\aleph_0}$ ותהא $A \subseteq B$ באשר $|A| \leq \aleph_0$ אזי $|B \setminus A| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{C} \mid a \text{ מספר טרנסצנדנטי}\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ אי־רציונלי}\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \wedge (f \text{ רציפה})\}| = 2^{\aleph_0}$.

מסקנה: $|\{f \mid (f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \wedge (f \text{ מונוטונית})\}| = 2^{\aleph_0}$.

טענה: $|\{A \mid (A \subseteq \mathbb{R}) \wedge (A \text{ פתוחה})\}| = 2^{\aleph_0}$.

יחס סדר טוב: סדר קווי $\langle W, \prec \rangle$ עבורו לכל $A \subseteq W$ באשר $A \neq \emptyset$ קיים איבר קטן ביותר.

טענה: $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ סדר טוב.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\langle \mathbb{N}_{\leq n}, <_{\mathbb{N}_{\leq n}} \rangle$ סדר טוב.

רישה של יחס סדר טוב: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב אזי $S \subseteq W$ המקיימת

• $S \neq W$.

• לכל $a \in S$ ולכל $b \in W$ אם $b < a$ אזי $b \in S$.

סימון: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a \in W$ אזי $W[a] = \{b \in W \mid b < a\}$.

מסקנה: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a \in W$ אזי $W[a]$ רישה ב- W .

טענה: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב ותהא S רישה ב- W אזי קיים $x \in W$ עבורו $S = W[x]$.

טענה: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב ותהא $f : W \rightarrow W$ שומרת סדר אזי $(x < f(x)) \vee (x = f(x))$ לכל $x \in W$.

מסקנה: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $a \in W$ אזי $W \not\subseteq W[a]$.

מסקנה: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב ויהי $f : W \rightarrow W$ איזומורפיזם אזי $f = \text{Id}$.

מסקנה: יהיו $\langle A, \sqsubset \rangle, \langle W, < \rangle$ יחסי סדר טובים ויהיו $f, g : W \rightarrow A$ איזומורפיזמים אזי $f = g$.

משפט ההשוואה: יהיו $\langle A, \sqsubset \rangle, \langle W, < \rangle$ יחסי סדר טובים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

• $\langle W, < \rangle \simeq \langle A, \sqsubset \rangle$.

• קיים $w \in W$ עבורו $\langle W[w], < \rangle \simeq \langle A, \sqsubset \rangle$.

• קיים $a \in A$ עבורו $\langle W, < \rangle \simeq \langle A[a], \sqsubset \rangle$.

קבוצה טרנזיטיבית: קבוצה X עבורה לכל $A \in X$ ולכל $y \in A$ מתקיים $y \in X$.

סודר: קבוצה טרנזיטיבית X עבורה $\langle X, \in \rangle$ יחס סדר טוב.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha \cup \{\alpha\}$ סודר.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha \notin \alpha$.

טענה: יהי α סודר ויהי $x \in \alpha$ אזי x סודר.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\beta \in \alpha$ אזי $\alpha \notin \beta$.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \subsetneq \beta$ אזי $\alpha \in \beta$.

טענה משפט ההשוואה: יהיו α, β סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

• $\alpha = \beta$.

• $\alpha \in \beta$.

• $\beta \in \alpha$.

טענה: תהא S קבוצה לא ריקה של סודרים אזי $\min(S)$ קיים.

הגדרה: $\mathcal{O}_n = \{\alpha \mid \alpha \text{ סודר}\}$.

סימון: $\mathcal{O}_n = \text{Ord}$.

טענה פרדוקס גוראלי-פורטי: \mathcal{O}_n אינה קבוצה.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \in \beta$ אזי $(\alpha \cup \{\alpha\} \in \beta) \vee (\alpha \cup \{\alpha\} = \beta)$.

סימון: יהי α סודר אזי $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

טענה: תהא S קבוצת סודרים אזי קיים סודר α עבורו לכל $\beta \in S$ מתקיים $\beta \in \alpha$.

טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב אזי סודר α עבורו $\langle \alpha, \in \rangle \simeq \langle W, < \rangle$.

משפט: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל- $\langle W, < \rangle$.

סימון: יהי $\langle W, < \rangle$ יחס סדר טוב ויהי α סודר טיפוס של $\langle W, < \rangle$ אזי $\text{otp}(\langle W, < \rangle) = \alpha$.

אקסיומת ההחלפה: תהא P נוסחה באשר לכל קבוצה X קיימת ויחידה קבוצה Y עבורה $P(X, Y)$ אזי לכל קבוצה A קיימת קבוצה

B באשר לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ המקיים $P(a, b)$. זוהי אינה טענה

אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי $\{a \in A \mid P(a)\}$ קבוצה. זוהי אינה טענה

משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר α מתקיים $(P(\alpha)) \implies (\forall \beta \in \alpha. P(\beta))$ אזי לכל סודר γ מתקיים

$P(\gamma)$.

סודר עוקב: סודר α עבורו קיים סודר $\beta \in \alpha$ המקיים $\alpha = \beta + 1$.

סודר גבולי: סודר α עבורו לכל סודר $\beta \in \alpha$ מתקיים $\alpha \neq \beta + 1$.

משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת

- $P(\emptyset)$.

- לכל סודר α מתקיים $P(\alpha) \implies P(\alpha + 1)$.

- לכל סודר גבולי α מתקיים $(P(\alpha)) \implies (\forall \beta \in \alpha. P(\beta))$.

אזי לכל סודר γ מתקיים $P(\gamma)$.

אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה S באשר $\emptyset \in S$ וכן לכל $x \in S$ מתקיים $x + 1 \in S$. זוהי אינה טענה

טענה: תהא S קבוצה באשר $\emptyset \in S$ וכן לכל $x \in S$ מתקיים $x + 1 \in S$ ויהי δ הסודר הראשון באשר $\delta \notin S$ אזי δ סודר גבולי.

סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו \emptyset הינו ω .

סימון: $0 = \emptyset$.

הגדרה: $\mathbb{N} = \omega$.

הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה $n + 1 = n \cup \{n\}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

סימון: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha \in \beta$ אזי $\alpha < \beta$.

הגדרה חיבור: יהי α סודר אזי

- $\alpha + 0 = \alpha$.

- יהי β סודר אזי $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$.

- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים אזי $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים באשר $\alpha < \beta$ אזי $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים באשר $\alpha < \beta$ אזי $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $\alpha < \beta$ אזי קיים ויחיד סודר γ עבורו $\alpha + \gamma = \beta$.

טענה: $\omega + \omega = \omega$ וכן $0 + \omega = \omega$ וכן $1 + \omega = \omega$ וכן $\omega + 1 > \omega$.

הגדרה כפל: יהי α סודר אזי

- $\alpha \cdot 0 = 0$.

- יהי β סודר אזי $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$.

- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha \cdot \gamma)$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים באשר $\alpha < \beta$ וכן $\gamma \neq 0$ אזי $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים באשר $\alpha < \beta$ אזי $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים אזי $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

טענה: $0 \cdot \omega = 0$ וכן $1 \cdot \omega = \omega$ וכן $2 \cdot \omega = \omega$ וכן $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$.

טענה: יהי $n < \omega$ אזי $\omega + n > \omega$.

טענה: יהי α סודר אזי $\alpha + \omega$ סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי α סודר אזי

- $\alpha^0 = 1$.

- יהי β סודר אזי $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$.

- יהי β סודר גבולי אזי $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha^\gamma)$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים באשר $\alpha < \beta$ וכן $1 < \gamma$ אזי $\gamma^\alpha < \gamma^\beta$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים באשר $\alpha < \beta$ אזי $\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים אזי $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$.

טענה: יהיו α, β, γ סודרים אזי $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

טענה: $1^\omega = 1$ וכן $2^\omega = \omega$ וכן $\omega^1 = \omega$ וכן $\omega^2 = \omega \cdot \omega$ וכן $\omega^2 > 2^\omega$.

טענה: יהי α סודר אזי $\omega^\alpha \geq \alpha$.

טענה צורת קנטור נורמלית: יהי α סודר אזי קיים ויחיד $k < \omega$ קיימים ויחידים $\beta_1 \dots \beta_k$ סודרים באשר $\beta_i > \beta_j$ לכל $i < j$ וקיימים

ויחידים $n_1 \dots n_k \in \mathbb{N}_+$ עבורם $\alpha = \sum_{i=1}^k \omega^{\beta_i} \cdot n_i$.

טענה: יהיו α, β סודרים באשר $0 < \alpha < \beta$ אזי קיימים ויחידים סודרים δ, ξ עבורם $\beta = \alpha \cdot \delta + \xi$ וכן $\xi < \alpha$.

מונה: סודר α עבורו לכל $\beta < \alpha$ מתקיים $|\beta| < |\alpha|$.

סימון: $\aleph_0 = \omega$.

טענה: יהיו α, β סודרים בני מנייה אזי $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^\beta$ סודרים בני מנייה.

טענה: קיים סודר α המקיים $\omega < \alpha$ באשר α אינו בן מנייה.

טענה: יהי δ סודר אזי קיים מונה κ באשר $\delta < \kappa$.

סימון: יהי α סודר אזי α^+ הינו המונה הראשון עבורו $\alpha < \alpha^+$.

הגדרה \aleph : יהי α סודר אזי $\aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$.

הגדרה \aleph : יהי α סודר גבולי אזי $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta$.

טענה: יהי α סודר אזי \aleph_α מונה.

טענה: יהי κ מונה אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $\kappa = \aleph_\alpha$.

סימון: יהי α סודר אזי $\omega_\alpha = \aleph_\alpha$.

סימון: יהיו δ, α סודרים אינסופיים באשר $|\delta| = |\aleph_\alpha|$ אזי $|\delta| = \aleph_\alpha$.

הערה: כאשר מבצעים פעולות בין מונים הכוונה היא לפי ההגדרה של עוצמות, כאשר מבצעים פעולות בין סודרים הכוונה היא לפי ההגדרה של סודרים.

הגדרה: יהי α סודר אזי יחס סדר $\langle \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, \triangleleft \rangle$ באשר לכל $(\delta, \kappa), (\beta, \gamma) \in \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ מתקיים $(\delta, \kappa) \triangleleft (\beta, \gamma)$ אם אחד מהבאים מתקיים

- $\max(\beta, \gamma) < \max(\delta, \kappa)$.

- $\max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa)$ וכן $\beta < \delta$.

- $\max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa)$ וכן $\beta = \delta$ וכן $\gamma < \kappa$.

טענה: יהי α סודר אזי $\langle \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, \triangleleft \rangle$ יחס סדר טוב.

משפט: יהי α סודר אזי $\aleph_\alpha = \text{otp}(\langle \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, \triangleleft \rangle)$.

מסקנה: יהי α סודר אזי $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

משפט: יהיו κ, λ מונים אינסופיים אזי

- $\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

- $\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

מסקנה: יהיו α, β סודרים אזי

- $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{\max\{\alpha, \beta\}}$.

- $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max\{\alpha, \beta\}}$.

פונקציית בחירה: תהא S קבוצה באשר $\emptyset \notin S$ אזי $f : S \rightarrow A$ עבורה לכל $X \in S$ מתקיים $f(X) \in X$.

אקסיומת הבחירה (AC): תהא S קבוצה באשר $\emptyset \notin S$ אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S . זוהי אינה טענה

טענה: תהא $A \neq \emptyset$ אזי (קיימת $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ חח"ע) \iff (קיימת $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ על).

משפט הסדר הטוב/משפט צרמלו: תהא A קבוצה עבורה קיימת פונקציית בחירה על $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ אזי קיים סדר טוב על A .

הגדרה משפט הסדר הטוב: תהא A קבוצה אזי קיים סדר טוב על A . זוהי אינה טענה

משפט: (AC) \iff (משפט הסדר הטוב).

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד סודר α עבורו $|A| = \aleph_\alpha$. דורש AC

השערת הרצף הפרטית (CH): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. דורש AC, זוהי אינה טענה

השערת הרצף הכללית (GCH): יהי α סודר אזי $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. דורש AC, זוהי אינה טענה

הערה: CH בלתי תלויה ב-ZFC.

הערה: GCH בלתי תלויה ב-ZFC.

הערה: AC בלתי תלויה ב-ZF.

טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיימת $B \subseteq A$ בת מנייה. דורש AC

טענה: תהא $\langle A_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ סדרת קבוצות באשר A_i סופית או בת מנייה לכל $i \in \mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ סופית או בת מנייה. דורש AC

יחס סדר חלקי בעל איבר מינימלי: סדר חלקי $\langle A, \leq \rangle$ עבורו קיים $a \in A$ באשר לכל $b \in A$ מתקיים $(b \leq a) \implies (b = a)$.

יחס סדר קווי בעל איבר מקסימלי: סדר קווי $\langle A, \leq \rangle$ עבורו קיים $b \in A$ באשר לכל $a \in A$ מתקיים $(b \leq a) \implies (b = a)$.

הגדרה הלמה של צורן: יהי $\langle P, \leq \rangle$ יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת $A \subseteq P$ קיים חסם מלעיל אזי קיים ב- P איבר מקסימלי. זוהי

אינה טענה

משפט: (AC) \iff (הלמה של צורן).

הגדרה: תהא I קבוצה ותהינה $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות אזי $\prod_{i \in I} X_i = \{f \mid (f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i) \wedge (\forall i \in I (f(i) \in X_i))\}$

טענה: תהא I קבוצה ותהינה $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות באשר $X_\alpha \neq \emptyset$ לכל $\alpha \in I$ אזי $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ דורש AC

טענה: (לכל קבוצה I ולכל $\langle X_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות אם $X_\alpha \neq \emptyset$ לכל $\alpha \in I$ אזי $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$) \Leftarrow (AC).

טענה: (לכל קבוצות A, B מתקיים $|A| \leq |B|$ או $|A| \geq |B|$) \Leftarrow (AC).

טענה: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $\langle V, +, \cdot \rangle$ מ"ז מעל \mathbb{F} אזי קיים בסיס ל- V . דורש AC

טענה: תהא I קבוצה תהינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות זרות ותהינה $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות זרות באשר $|A_i| = |B_i|$ לכל $i \in I$ אזי

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| = |\bigcup_{i \in I} B_i| \quad \text{דורש AC}$$

הגדרה סכום מונים: תהא I קבוצה יהיו $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ מונים ותהינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות זרות באשר $|A_i| = \kappa_i$ לכל $i \in I$ אזי

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup_{i \in I} A_i| \quad \text{דורש AC}$$

טענה: תהא I קבוצה תהינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות ותהינה $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות באשר $|A_i| = |B_i|$ לכל $i \in I$ אזי

$$|\prod_{i \in I} A_i| = |\prod_{i \in I} B_i| \quad \text{דורש AC}$$

הגדרה כפל מונים: תהא I קבוצה יהיו $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ מונים ותהינה $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ קבוצות באשר $|A_i| = \kappa_i$ לכל $i \in I$ אזי

$$\prod_{i \in I} \kappa_i = |\prod_{i \in I} A_i| \quad \text{דורש AC}$$

הערה: מכאן והלאה לא ייסומן כאשר הטענות יסתמכו על AC.

למה: יהי λ מונה אינסופי ויהי κ מונה באשר $\kappa \geq 1$ אזי $\sum_{i < \lambda} \kappa = \kappa \cdot \lambda$

טענה: יהי λ מונה אינסופי ויהיו $\{\kappa_i \mid i < \lambda\}$ מונים באשר $\kappa_i \geq 1$ לכל $i < \lambda$ אזי $\sum_{i < \lambda} \kappa_i = \sup \{\kappa_i \mid i < \lambda\} \cdot \lambda$

$$\sum_{1 \leq n < \aleph_0} n = \aleph_0 \quad \text{טענה:}$$

$$\prod_{1 \leq n < \aleph_0} n = 2^{\aleph_0} \quad \text{טענה:}$$

משפט קניג: תהא I קבוצה יהיו $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ מונים ויהיו $\langle \lambda_i \mid i \in I \rangle$ מונים באשר $\kappa_i < \lambda_i$ לכל $i \in I$ אזי $\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$

סופיות של סודר: יהי α סודר גבולי אזי הסודר המינימלי δ עבורו קיימת סדרה עולה $\langle \alpha_i \mid i < \delta \rangle$ המקיימת $\alpha_i > \alpha$ לכל $i < \delta$ וכן

$$\alpha = \bigcup_{i < \delta} \alpha_i$$

סימון: יהי α סודר גבולי אזי הסופיות של α הינה $\text{cof}(\alpha)$

טענה: $\text{cof}(\aleph_\omega) = \omega$ וכן $\text{cof}(\omega + \omega) = \omega$ וכן $\text{cof}(\omega) = \omega$

סודר סדיר: סודר גבולי α המקיים $\alpha = \text{cof}(\alpha)$

סודר חריג: סודר גבולי α המקיים $\alpha \neq \text{cof}(\alpha)$

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\alpha)$ מונה.

טענה: יהי κ מונה אזי κ סודר גבולי.

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\text{cof}(\alpha)) = \text{cof}(\alpha)$

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\alpha)$ מונה סדיר.

טענה: יהי κ מונה אזי $\kappa \Leftarrow \text{חריג} \iff \kappa < \lambda$ וקיימים $\langle \kappa_i \mid i < \lambda \rangle$ באשר $\kappa_i < \kappa$ לכל $i < \lambda$ עבורם $\kappa = \sum_{i < \lambda} \kappa_i$.

טענה: יהי α סודר אזי $\aleph_{\alpha+1}$ סדיר. דורש AC

טענה: יהי α סודר גבולי אזי $\text{cof}(\aleph_\alpha) = \text{cof}(\alpha)$

טענה: $\text{cof}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$