מרוכבים: מרחב וקטורי $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ עם הפעולות הסטנדרטיות.

סימון: נסמן את המרוכבים בעזרת $\mathbb{C}$.

הערה: נשתמש ב־$\mathbb{C}$ בהתאמה $(1,0)\mapsto 1$ וכן ההגדרה $i=(0,1)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי קיימים ויחידים $a,b\in\mathbb{R}$ עבורם $z=a+ib$.

מטריצה קונפורמית: $0\neq A\in M_2(\mathbb{R})$ המקיימת $\exists a,b\in\mathbb{R}.A=\left(\begin{smallmatrix}a & -b\\ b & a\end{smallmatrix}\right)$.

סימון: $O(n)=\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid A \text{ קונפורמית}\}$.

טענה: ההעתקה $T\in\text{Hom}(\mathbb{C},O(2))$ המוגדרת $T(a+ib)=\left(\begin{smallmatrix}a & -b\\ b & a\end{smallmatrix}\right)$ היא איזומורפיזם.

טענה: תהא $A\in M_2(\mathbb{R})$ אזי (A קונפורמית)$\iff$(A הפיכה ושומרת זווית).

מטריצה אנטי־קונפורמית: $0\neq A\in M_2(\mathbb{R})$ המקיימת $\exists a,b\in\mathbb{R}.A=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ b & -a\end{smallmatrix}\right)$.

טענה: תהא $A\in M_2(\mathbb{R})$ אזי (A אנטי־קונפורמית)$\iff$(A הפיכה והופכת זווית).

משפט: תהא $A\in M_2(\mathbb{R})$ אזי קיימות ויחידות $B,C\in M_2(\mathbb{R})$ באשר B קונפורמית או 0 וכן C אנטי־קונפורמית או 0 עבורן $A=B+C$.

מכפלת מרוכבים: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ אזי $(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$.

טענה: $i^2=-1$.

החלק הממשי: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\text{Re}(a+ib)=a$.

החלק המדומה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\text{Im}(a+ib)=b$.

הצמוד: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{a+ib}=a-ib$.

הערך המוחלט: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$.

מספר מדומה טהור: $z\in\mathbb{C}$ עבורו $\text{Re}(z)=0$.

מספר ממשי טהור: $z\in\mathbb{C}$ עבורו $\text{Im}(z)=0$.

למה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\overline{(\overline{z})}=z$.
- $|\overline{z}|=|z|$.
- $z\overline{z}=|z|^2$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ אזי $z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

מסקנה: $\mathbb{C}$ עם הפעולות שהוגדרו מלעיל הינו שדה.

טענה: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ אזי

- $\text{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$.
- $\text{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$.
- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.
- $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.
- נניח כי $w\neq 0$ אזי $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.
- נניח כי $w\neq 0$ אזי $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$.
- $-|z|\leq\text{Re}(z)\leq|z|$.
- $-|z|\leq\text{Im}(z)\leq|z|$.

טענה אי שיוויון המשולש: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ אזי $|z+w|\leq|z|+|w|$.

טענה אי שיוויון קושי שוורץ: יהיו $z_1\ldots z_n,w_1\ldots w_n\in\mathbb{C}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^n z_iw_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^n|z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n|w_i|^2\right)$.

מסקנה: יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי

- $|z|-|w|\leq|z-w|$.
- $|a+ib|\leq|a|+|b|$.

הצגה פולרית/הצגה קוטבית: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

הארגומנט: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\arg(z)=\left\{\theta\in\mathbb{R}\mid z=|z|e^{i\theta}\right\}$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ אזי קיים ויחיד $\theta\in(-\pi,\pi]$ עבורו $z=|z|\cdot e^{i\theta}$.

הארגומנט העיקרי: יהי $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ ויהי $\theta\in\arg(z)\cap(-\pi,\pi]$ אזי $\text{Arg}(z)=\theta$.

הערה: יהי $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ אזי הארגומנט העיקרי קיים ויחיד.

הערה: $\arg\left(z\right)=\left\{ \text{Arg}\left(z\right)+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

טענה: יהיו $\theta,\phi\in\mathbb{R}$ ויהיו $r,s\geq0$ אזי
- $\overline{r\cdot e^{i\theta}}=r\cdot e^{-i\theta}$.
- $\left(r\cdot e^{i\theta}\right)\cdot\left(s\cdot e^{i\phi}\right)=rs\cdot e^{i\left(\theta+\phi\right)}$.

מסקנה: יהיו $w,z\in\mathbb{C}$ אזי $\arg\left(zw\right)=\arg\left(z\right)+\arg\left(w\right)$.

טענה: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ ויהי $r>0$ אזי $\left(r\cdot e^{i\theta}\right)^{-1}=\frac{1}{r}\cdot e^{-i\theta}$.

טענה: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ יהי $r\geq0$ ויהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\left(r\cdot e^{i\theta}\right)^{n}=r^{n}\cdot e^{in\theta}$.

מסקנה נוסחאת דה מואבר: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ ויהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\left(\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)\right)^{n}=\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)$.

טענה: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ יהי $r\geq0$ ויהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\sqrt[n]{re^{i\theta}}=\left\{ \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)}\mid k\in\left\{ 0,\ldots,n-1\right\} \right\}$.

מסקנה שורשי יחידה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\sqrt[n]{1}=\left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}}\mid k\in\left\{ 0,\ldots,n-1\right\} \right\}$.

המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p\in\mathbb{C}_{\geq1}\left[x\right]$ אזי קיים $x\in\mathbb{C}$ עבורו $p\left(x\right)=0$.

מסקנה: יהי $p\in\mathbb{C}_{\geq1}\left[x\right]$ אזי קיימים $a_{0}\ldots a_{n}\in\mathbb{C}$ עבורם $p\left(x\right)=a_{0}\prod_{i=1}^{n}\left(x-a_{i}\right)$.

הקוטב הצפוני: נסמן ב-$\mathbb{R}^{3}$ את $N=\left(0,0,1\right)$.

ספירה: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\mathbb{S}^{n}=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid\left\Vert x\right\Vert =1\right\}$.

ההמיספרה העליונה: כל הנקודות $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{S}^{2}$ המקיימות $z>0$.

ההמיספרה התחתונה: כל הנקודות $\left(x,y,z\right)\in\mathbb{S}^{2}$ המקיימות $z<0$.

הטלה סטריאוגרפית: נגדיר $f:\mathbb{C}\to\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ N\right\}$ כך $f\left(x+iy\right)=\left(\frac{2x}{x^{2}+y^{2}+1},\frac{2y}{x^{2}+y^{2}+1},1-\frac{2}{x^{2}+y^{2}+1}\right)$.

הערה: במרחב $\mathbb{R}^{3}$ נגדיר את $\mathbb{C}$ להיות שני הצירים הראשונים, אז ההטלה הסטריאוגרפית היא מבחינה מעשית $f\left(p\right)=\text{line}_{p,N}\cap\mathbb{S}^{1}$.

טענה: f רציפה.

טענה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי
- $\left(z\in\mathbb{S}^{1}\right)\iff\left(f\left(z\right)=z\right)$.
- ($f\left(z\right)$ בהמיספרה העליונה)$\iff$(z מחוץ ל-$\mathbb{S}^{1}$).
- ($f\left(z\right)$ בהמיספרה התחתונה)$\iff$(z בתוך $\mathbb{S}^{1}$).

טענה: f הפיכה ומתקיים $f^{-1}:\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ N\right\} \to\mathbb{C}$ כך $f^{-1}\left(x,y,z\right)=\frac{x}{1-z}+i\frac{y}{1-z}$.

סימון: $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\left\{ \infty\right\}$.

הספירה של רימן: f ניתנת להרחבה רציפה $f:\widehat{\mathbb{C}}\to\mathbb{S}^{2}$ וכן $f\left(\infty\right)=N$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ N\right\}$ אזי (A מעגל)$\iff$($f^{-1}\left[A\right]$ מעגל או ישר).

מסקנה: יהי $C\subseteq\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ N\right\}$ מעגל ויהי P מישור עבורו $C=P\cap\mathbb{S}^{2}$ אזי ($f^{-1}\left[C\right]$ ישר)$\iff$($N\in P$).

גבול: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z\in\mathbb{C}$ עבורם $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.\left|a_{n}-z\right|<\varepsilon$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_{n}=z$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\left(\left|a_{n}-z\right|\to0\right)\iff\left(a_{n}\to z\right)$.

גבול אינסופי: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\forall M\in\mathbb{R}.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n\geq N.M<\left|a_{n}\right|$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_{n}=\infty$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\left|a_{n}\right|\to\infty\right)\iff\left(a_{n}\to\infty\right)$.

טענה: תהיינה $a,b\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהיו $z,w\in\widehat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_{n}\to z$ וכן $b_{n}\to w$ אזי
- $a_{n}+b_{n}\to z+w$.
- $a_{n}\cdot b_{n}\to z\cdot w$.
- נניח כי $w\neq0$ אזי $\frac{a_{n}}{b_{n}}\to\frac{z}{w}$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z\in\widehat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_{n}\to z$ אזי
- $\overline{a_{n}}\to\overline{z}$.
- $\left|a_{n}\right|\to\left|z\right|$.
- $\text{Re}\left(a_{n}\right)\to\text{Re}\left(z\right)$.
- $\text{Im}\left(a_{n}\right)\to\text{Im}\left(z\right)$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff$($\text{Re}\left(a\right),\text{Im}\left(a\right)$ מתכנסות).

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m\geq N.\left|a_{n}-a_{m}\right|<\varepsilon\right)$.

טענה: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\left|a_{n}\right|\to0$ אזי $a_{n}\to0$.

מסקנה: תהיינה $a,b\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ באשר a חסומה וכן $b_{n}\to0$ אזי $a_{n}b_{n}\to0$.

הערה: מכאן והלאה הסימון $\mathbb{F}$ יתאר שדה מבין $\mathbb{R},\mathbb{C}$ וכאשר נאמר כי $\mathcal{U}$ פתוחה הכוונה היא ביחס לשדה.

גבול: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה תהא $a\in\mathbb{F}_1$ ותהא $A\in\mathbb{F}_2$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{F}_2$ עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall z\in\mathcal{U}\backslash\{a\}.|z-a|<\delta\Longrightarrow|f(z)-A|<\varepsilon$ אזי $\lim_{z\to a}f(z)=A$.

משפט היינה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה אזי $\left(\forall b\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}.(b_n\to a)\Longrightarrow(f(b_n)\to A)\right)\Longleftrightarrow(\lim_{z\to a}f(z)=A)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה ותהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{F}_2$ באשר $\lim_{z\to a}f(z)=A$ וכן $\lim_{z\to a}g(z)=B$ אזי
- $\lim_{z\to a}(f+g)(z)=A+B$.
- $\lim_{z\to a}(fg)(z)=AB$.
- נניח $B\neq0$ אזי $\lim_{z\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(z)=\frac{A}{B}$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}$ פתוחה ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ באשר $\lim_{z\to a}f(z)=A$ אזי
- $\lim_{z\to a}\overline{f(z)}=\overline{A}$.
- $\lim_{z\to a}|f(z)|=|A|$.
- $\lim_{z\to a}\mathrm{Re}(f(z))=\mathrm{Re}(A)$.
- $\lim_{z\to a}\mathrm{Im}(f(z))=\mathrm{Im}(A)$.

גבול אינסופי: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ויהי $a\in\mathbb{C}$ אזי
- שאיפה לאינסוף בנקודה: אם $\forall M>0.\exists\delta>0.\forall z\in\mathbb{C}\backslash\{a\}.|z-a|<\delta\Longrightarrow M<|f(z)|$ אזי $\lim_{z\to a}f(z)=\infty$.
- שאיפה לנקודה באינסוף: אם $\forall\varepsilon>0.\exists R>0.\forall z\in\mathbb{C}.R<|z|\Longrightarrow|f(z)-a|<\varepsilon$ אזי $\lim_{z\to\infty}f(z)=a$.
- שאיפה לאינסוף באינסוף: אם $\forall M>0.\exists R>0.\forall z\in\mathbb{C}.R<|z|\Longrightarrow M<|f(z)|$ אזי $\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

פונקציה רציפה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה יהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{F}_2$ המקיימת $\lim_{z\to a}f(z)=f(a)$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

נגזרת: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}_1$ פתוחה יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{F}_2$ אזי $f'(a)=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$.

פונקציה הולומורפית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ גזירה על כל $\mathcal{U}$.

מסקנה: כל מניפולציות הנגזרת של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

הערה: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ נסמן $f=u+iv$ עבור $v,u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ אזי (f גזירה)$\Longleftrightarrow$(v,u גזירות).

למה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ גזירה אזי $(f'=0)\Longleftrightarrow(\exists c\in\mathbb{C}.f=c)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ גזירה ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f'(a)=\frac{\partial u}{\partial x}(a)+i\frac{\partial v}{\partial x}(a)=\frac{\partial v}{\partial y}(a)-i\frac{\partial u}{\partial y}(a)$.

מסקנה משוואות קושי־רימן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ גזירה אזי $\left(\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\right)\wedge\left(\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^2$ דיפרנציאבילית אזי
- $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.
- $\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ גזירה אזי (f הולומורפית)$\Longleftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}=0\right)$.

טענה: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ אזי (f גזירה)$\Longleftrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.f=c)$.

משפט: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ אזי (f גזירה ברציפות)$\Longleftrightarrow\left((u,v\in C^1(\mathcal{U}))\wedge\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\right)\wedge\left(\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\right)$.

לפלסיאן: תהא $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים אזי $\Delta g=\frac{\partial^2g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2g}{\partial y^2}$.

פונקציה הרמונית: $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים המקיימת $\Delta g=0$.

טענה: תהא $f\in C^2(\mathbb{C},\mathbb{C})$ אזי u,v הרמוניות.

פונקציה צמודה הרמונית: תהא $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אזי $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ עבורה $u+iv$ הולומורפית.

טענה: תהא $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ותהא $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ צמודה הרמונית ל־u אזי u צמודה הרמונית ל־$(-v)$.

טענה: יהי $\sum_{i=0}^na_iz^i\in\mathbb{C}[z]$ אזי $\left(\sum_{i=0}^na_iz^i\right)'=\sum_{i=1}^na_iiz^{i-1}$.

טענה: יהי $f\in\mathbb{R}[z]$ אזי $\forall z\in\mathbb{C}.f(\overline{z})=\overline{f(z)}$.

התכנסות טור: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{i=0}^\infty a_n$ עבורה $\sum_{i=0}^na_n$ מתכנסת.

התכנסות נקודתית: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה ויהי $a\in\mathbb{C}$ אזי $f\in\left(\mathbb{C}^{\mathcal{U}}\right)^{\mathbb{N}}$ עבורה $f_n(a)$ מתכנסת.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f\in\left(\mathbb{C}^{\mathcal{U}}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in\mathcal{U}.\forall n>N.|f_n(x)-g(x)|<\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f\in\left(\mathbb{C}^{\mathcal{U}}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (f מתכנסת במ"ש)$\Longleftrightarrow$($\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m\geq N.\forall z\in\mathcal{U}\,|f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$).

טענה מבחן M של ויירשטראס להתכנסות: תהא $f\in\left(\mathbb{C}^{\mathcal{U}}\right)^{\mathbb{N}}$ ותהא $M\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}M_n<\infty$ וכן $\forall x\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\,|u_n(x)|\leq M_n$ אזי $\sum_{i=0}^{n}u_i$ מתכנסת בהחלט ובמ"ש.

טענה: תהא $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ותהא $f\in\left(\mathbb{C}^{\mathcal{U}}\right)^{\mathbb{N}}$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C(\mathcal{U})$ וכן $f_n\xrightarrow{u}g$ אזי $g\in C(\mathcal{U})$.

טור חזקות: תהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ סדרה ויהי $b\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_i(z-b)^i$.

משפט אבל: יהי $\sum_{i=0}^{\infty}a_iz^i$ טור חזקות אזי קיים $R\in[0,\infty]$ המקיים

- הטור מתכנס בהחלט על $|z|<R$.
- יהי $0\leq\rho<R$ אזי הטור מתכנס במ"ש על $|z|<\rho$.
- יהי $|z|>R$ אזי $\sum a_nz^n$ לא מתכנס.

טענה: יהי $\sum_{i=0}^{\infty}a_iz^i$ טור חזקות אזי הפונקציה $\sum a_nz^n$ הולומורפית על $|z|<R$ ובפרט $\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_iz^i\right)'=\sum_{i=1}^{\infty}ia_iz^{i-1}$.

משפט קושי־הדמר: יהי $\sum_{i=0}^{\infty}a_iz^i$ טור חזקות ויהי R רדיוס ההתכנסות אזי $R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

טענה: יהיו $g,h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פתרונות של המד"ר $(f'(z)=f(z))\wedge(f(0)=1)$ אזי $g=h$.

פונקציה מעריכית: נגדיר $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ להיות פתרון של המד"ר $(f'(z)=f(z))\wedge(f(0)=1)$.

טענה: $\exp(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{i!}$.

מסקנה: $\exp$ מתכנסת על $\mathbb{C}$.

טענה: $e^0=1$, $(e^z)'=e^z$ על כל $\mathbb{C}$.

מסקנה: $\exp(z)=e^z$.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{C}$ אזי $e^{a+b}=e^a\cdot e^b$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $e^z\neq0$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $e^{\overline{z}}=\overline{e^z}$.

קוסינוס: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.

סינוס: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי $\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

מסקנה: e^z הינה $2\pi i$־מחזורית, $\cos,\sin$ הן 2π־מחזוריות.

טענה: על כל $\mathbb{C}$ מתקיים $\sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n)!}$, $\cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

מסקנה: על כל $\mathbb{C}$ מתקיים $\sin(z)'=\cos(z)$, $\cos(z)'=-\sin(z)$.

$\log$: יהי $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אזי $\log(w)=\text{sols}(e^z=w)$.

טענה: יהי $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ אזי $\log(w)=\{\log|w|+i\theta\mid\theta\in\arg(w)\}$.

חזקה: יהי $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ויהי $b\in\mathbb{C}$ אזי $a^b=e^{b\log a}$.

ענף של $\arg$: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום עבורו $0\notin\mathcal{U}$ אזי $\alpha\in C(\mathcal{U},\mathbb{C})$ המקיימת $\forall z\in\mathcal{U}.\alpha(z)\in\arg(z)$.

ענף של $\log$: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום עבורו $0\notin\mathcal{U}$ אזי $\ell\in C(\mathcal{U},\mathbb{C})$ המקיימת $\forall z\in\mathcal{U}.\ell(z)\in\log(z)$.

ענף של $\sqrt[n]{}$: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי $\rho\in C(\mathcal{U},\mathbb{C})$ המקיימת $\forall z\in\mathcal{U}.\rho(z)\in\sqrt[n]{z}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום עבורו $0\notin\mathcal{U}$ אזי (קיים ענף של $\arg$ על $\mathcal{U}$)$\Longleftrightarrow$(קיים ענף של $\log$ על $\mathcal{U}$).

טענה: בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ לא קיים ענף של $\log$.

טענה: יהי $\ell:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ ענף של $\log$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z)=\frac{1}{z}$.

טענה: יהי $\ell:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ ענף של $\sqrt[n]{}$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z)=\frac{1}{n\ell(z)^{n-1}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי (קיים ענף של $\log$ על $\mathcal{U}$)$\Longrightarrow$(קיים ענף של $\sqrt[n]{}$ על $\mathcal{U}$).

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום עבורו $0\notin\mathcal{U}$ אזי (קיים ענף של $\sqrt[n]{}$ על $\mathcal{U}$)$\Longrightarrow$(קיים ענף של $\log$ על $\mathcal{U}$).

טענה: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ ענף של $\log(1+z)$ בתחום $|z|<1$.

אינטגרל: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע ותהא $f\in C(I,\mathbb{C})$ אזי $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=\int_I u(t)\,\mathrm{d}t+i\int_I v(t)\,\mathrm{d}t$.

טענה: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע ותהא $f\in C(I,\mathbb{C})$ אזי $\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_I|f(t)|\,\mathrm{d}t$.

מסילה: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma\in C(I,\mathbb{C})$.

מסילה חלקה למקוטעין: מסילה γ אשר חלקה עד כדי מספר סופי של נקודות ובהן קיימות נגזרות חד־צדדיות מכל סדר.

אינטגרל מסילתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע תהא $\gamma\in C^1(I,\mathbb{C})$ מסילה ותהא $f\in C(\gamma(I),\mathbb{C})$ אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_I f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$.

רפרמטריזציה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה ותהא $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ רציפה ועולה עבורה $\varphi(c)=a$ וכן $\varphi(d)=b$ אזי $\gamma\circ\varphi$.

טענה: תהא $\gamma:(a,b)\to\mathbb{C}$ מסילה ותהא $\gamma\circ\varphi$ רפרמטריזציה גזירה ברציפות אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma\circ\varphi}f(z)\,\mathrm{d}z$.

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה אזי $-\gamma:[-b,-a]\to\mathbb{C}$ המוגדרת $-\gamma(t)=\gamma(-t)$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\int_{-\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=-\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z$.

סכום מסילות: תהיינה $\gamma_i:[a_i,a_{i+1}]\to\mathbb{C}$ מסילות אזי $\left(\sum\gamma_i\right)(t)=\begin{cases}\gamma_0(t) & t\in[a_0,a_1]\\ \vdots & \\ \gamma_n(t) & t\in[a_n,a_{n+1}]\end{cases}$.

טענה: תהיינה $\gamma_i:[a_i,a_{i+1}]\to\mathbb{C}$ מסילות אזי $\sum\gamma_i$ מסילה.

מסקנה: תהיינה $\gamma_i:[a_i,a_{i+1}]\to\mathbb{C}$ מסילות אזי $\int_{\sum\gamma_i}f(z)\,\mathrm{d}z=\sum\int_{\gamma_i}f(z)\,\mathrm{d}z$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ המקיימת $\gamma(a)=\gamma(b)$.

סימון: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה סגורה אזי $\oint_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z$.

אינטגרל לפי אורך קשת: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma}f(z)\,|\mathrm{d}z|=\int_{I}f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

הערה: מקובל מאוד גם הסימון $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}s=\int_{\gamma}f(z)\,|\mathrm{d}z|$.

אורך מסילה: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma}|\mathrm{d}z|$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma}(f+g)(z)\,|\mathrm{d}z|=\int_{\gamma}f(z)\,|\mathrm{d}z|+\int_{\gamma}g(z)\,|\mathrm{d}z|$.

טענה: תהא γ מסילה ותהא $\gamma\circ\varphi$ רפרמטריזציה אזי $\int_{\gamma}f(z)\,|\mathrm{d}z|=\int_{\gamma\circ\varphi}f(z)\,|\mathrm{d}z|$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\left|\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z\right|\le\int_{\gamma}|f(z)|\,|\mathrm{d}z|$.

מסקנה: תהא $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ מסילה אזי $\left|\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z\right|\le\left(\int_{\gamma}|\mathrm{d}z|\right)\max_{z\in\gamma([a,b])}|f(z)|$.

אינטגרל על פי צמוד: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma}f(z)\,\overline{\mathrm{d}z}=\overline{\int_{I}\overline{f}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}$.

הגדרה: תהא γ מסילה אזי

- $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{\gamma}f(z)\,\overline{\mathrm{d}z}\right)$.
- $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2i}\left(\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z-\int_{\gamma}f(z)\,\overline{\mathrm{d}z}\right)$.

טענה: תהא γ מסילה אזי $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=\left(\int_{\gamma}u(x,y)\,\mathrm{d}x-\int_{\gamma}v(x,y)\,\mathrm{d}y\right)+i\left(\int_{\gamma}u(x,y)\,\mathrm{d}y-\int_{\gamma}v(x,y)\,\mathrm{d}x\right)$.

הערה: מהמשוואה מלעיל ניתן לחשוב על כך שמתקיים $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ ותהא $g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $g'=f$ אזי לכל מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathcal{U}$ מתקיים $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=g(\gamma(b))-g(\gamma(a))$.

משפט קושי למלבן: יהי $R\subseteq\mathbb{C}$ מלבן סגור תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה עבורה $R\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\int_{\partial R}f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

משפט קושי למלבן משופר: יהי $R\subseteq\mathbb{C}$ מלבן סגור תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה עבורה $R\subseteq\mathcal{U}$ יהיו $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_k\}\subseteq R\backslash\partial R$ ותהא $f:\mathcal{U}\backslash\{\zeta_1,\ldots,\zeta_k\}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה לכל $i\in[k]$ מתקיים $\lim_{z\to\zeta_i}(z-\zeta_i)f(z)=0$ אזי $\int_{\partial R}f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

למה: תהא מסילה $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ סגורה חלקה למקוטעין ותהא $a\in\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ אזי קיים $k\in\mathbb{Z}$ עבורו $\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=2\pi ik$.

מספר הליפופים: תהא מסילה $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ סגורה חלקה למקוטעין ותהא $a\in\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ אזי מספר הליפופים של γ סביב a הינו $n(\gamma,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$.

ענף של $\log(f)$: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\ell\in C(\mathcal{U},\mathbb{C})$ המקיימת $\forall z\in\mathcal{U}.\ell(z)\in\log(f(z))$.

ענף של $\sqrt[n]{f}$: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\rho\in C(\mathcal{U},\mathbb{C})$ המקיימת $\forall z\in\mathcal{U}.\rho(z)\in\sqrt[n]{f(z)}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}\backslash\{0\}$ הולומורפית ויהי $\ell:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ ענף של $\log(f)$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $\ell:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ ענף של $\sqrt[n]{f}$ אזי ℓ הולומורפית וכן $\ell'(z)=\frac{f'(z)}{n\ell(z)^{n-1}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f\in C^1(\mathcal{U},\mathbb{C}\backslash\{0\})$ אזי

- (קיים ענף של $\log(f)$ על $\mathcal{U}$)$\iff$(לכל γ מסילה סגורה גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים $n(f\circ\gamma,0)=0$).
- (קיים ענף של $\sqrt[n]{f}$ על $\mathcal{U}$)$\iff$(לכל γ מסילה סגורה גזירה ברציפות למקוטעין מתקיים $n(f\circ\gamma,0)\in n\mathbb{Z}$).

טענה: תהא $f\in C([\alpha,\beta],\mathbb{C})$ נגדיר $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ כך $F(t)=\int_{\alpha}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ אזי F גזירה וכן $\frac{dF}{dt}=f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f\in C(\mathcal{U},\mathbb{C})$ עבורה לכל γ סגורה מתקיים $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=0$ אזי f בעלת קדומה.

למה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק תהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי קיימת $F:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית המקיימת $F'=f$.

משפט קושי לדיסק: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $\gamma:[a,b]\to D$ מסילה סגורה אזי $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

משפט קושי לדיסק משופר: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח יהיו $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_k\}\subseteq D$ תהא $f:D\backslash\{\zeta_1,\ldots,\zeta_k\}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה לכל $i\in[k]$ מתקיים $\lim_{z\to\zeta_i}(z-\zeta_i)f(z)=0$ ותהא $\gamma:[\alpha,\beta]\to D\backslash\{\zeta_1,\ldots,\zeta_k\}$ מסילה סגורה אזי $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

טענה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ מסילה סגורה ויהי $a\in\mathbb{C}\backslash D$ אזי $n(\gamma,a)=0$.

טענה: תהא $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ מסילה ויהיו $a,b\in\mathbb{C}\backslash\gamma([\alpha,\beta])$ עבורן $[a,b]$ לא נחתכת עם γ אזי $n(\gamma,a)=n(\gamma,b)$.

משפט נוסחת האינטגרל של קושי: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ מסילה סגורה תהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $a\in D\backslash\gamma([\alpha,\beta])$ אזי $n(\gamma,a)\cdot f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$.

מסקנה משפט הערך הממוצע: יהי $r>0$ יהי $a\in\mathbb{C}$ ותהא $f:B_a(r)\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(a+re^{it}\right)\mathrm{d}t$.

סימון: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ מסילה סגורה תהא $\varphi\in C\left(\gamma([\alpha,\beta]),\mathbb{C}\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $F_n:D\to\gamma([\alpha,\beta])$ כך $F_n(z)=\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\mathrm{d}\zeta$.

טענה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ מסילה סגורה תהא $\varphi\in C\left(\gamma([\alpha,\beta]),\mathbb{C}\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי

- F_n רציפה.
- F_n גזירה.
- $F_n'=n\cdot F_{n+1}$.

מסקנה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח ותהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $f\in C^{\infty}(D)$.

מסקנה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $C_r\subseteq D$ מעגל סביב z אזי $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$.

מסקנה: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח ותהא $f:D\to\mathbb{C}$ בעלת קדומה אזי f הולומורפית.

מסקנה משפט מוררה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ עבורה לכל $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathcal{U}$ מתקיים $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=0$ אזי f הלומורפית.

פונקציה שלמה: פונקציה הולומורפית על $\mathbb{C}$.

משפט ליוביל: תהא $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ הלומורפית וחסומה אזי f קבועה.

טענה חסם קושי לנגזרת: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ דיסק פתוח תהא $f:D\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $C_r\subseteq D$ מעגל סביב z אזי $\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!\max_{C_r}|f|}{r^n}$.

מסקנה המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p\in\mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p)\ge 1$ אזי $\exists\alpha\in\mathbb{C}.p(\alpha)=0$.

נקודה יחודית/יחודיות/סינגולריות: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה אזי $a\in\mathcal{U}$ עבורה $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ הולומורפית.

נקודת יחודיות סליקה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה אזי $a\in\mathcal{U}$ יחודיות של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ עבורה קיימת הרחבה הולומורפית $g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ המקיימת $\forall z\in\mathcal{U}\backslash\{a\}.g(z)=f(z)$.

הערה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה ותהא $a\in\mathcal{U}$ סליקה עבור $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי קיימת הרחבה יחידה.

משפט: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי (a סליקה)$\Longleftrightarrow$($\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$).

משפט טיילור: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה תהא $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי קיימת $f_n:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k+f_n(z)(z-a)^n$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה תהא $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי C מעגל סביב a אזי לכל $z\in C$ מתקיים $f_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$.

אפס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $a\in\mathcal{U}$ עבורה $f(a)=0$.

אפס מסדר n: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $a\in\mathcal{U}$ עבורה $n=\min\left\{j\in\mathbb{N}\mid f^{(j)}(a)\neq 0\right\}$.

למה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.f^{(n)}(a)=0$ ויהי $r>0$ עבורו $\overline{B_r(a)}\subseteq\mathcal{U}$ אזי $f_{\restriction_{B_r(a)}}=0$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.f^{(n)}(a)=0$ אזי $f=0$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f\neq 0$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אפס אזי הסדר של a סופי.

אפס מבודד: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי אפס $a\in\mathcal{U}$ עבורו $\exists r>0.\forall z\in B_r(a)\backslash\{a\}.f(z)\neq 0$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f\neq 0$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אפס אזי a אפס מבודד.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $E\subseteq\mathcal{U}$ בעלת נקודת הצטברות ב־$\mathcal{U}$ נניח כי $f=g$ על E אזי $f=g$ על $\mathcal{U}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה עבורה $f=0$ על $\mathcal{O}$ אזי $f=0$ על $\mathcal{U}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא γ מסילה עבורה $f=0$ על γ אזי $f=0$ על $\mathcal{U}$.

נקודת קוטב: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי $a\in\mathcal{U}$ יחודית של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ עבורה קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}\backslash\{a\}$ סביבה של a עבורה $\frac{1}{f}$ מוגדרת היטב בעלת יחודיות סליקה ב־a וכן $\frac{1}{f}(a)=0$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ יחודית של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}\backslash\{a\}$ סביבה של a עבורה $\frac{1}{f}$ מוגדרת היטב בעלת יחודיות סליקה ב־a וכן $\frac{1}{f}(a)\neq 0$ אזי a יחודית סליקה של f.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ יחודית של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי (a קוטב)$\Longleftrightarrow$($\lim_{z\to a}f(z)=\infty$).

קוטב מסדר n: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי $a\in\mathcal{U}$ קוטב של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אשר אפס מסדר n של $\frac{1}{f}$.

קוטב פשוט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי $a\in\mathcal{U}$ קוטב מסדר 1 של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום יהי $n\in\mathbb{N}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ קוטב מסדר n של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי קיימת $f_n:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $f(z)=f_n(z)(z-a)^{-n}$ על $z\in\mathcal{U}\backslash\{a\}$.

פונקציה מרומורפית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $E\subseteq\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\backslash E\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה כל $a\in E$ הינה קוטב של f.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפיות באשר $g\neq 0$ אזי $\frac{f}{g}$ מרומורפית.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפיות באשר $g\neq 0$ אזי

- $\#\left\{\text{אפסים של } \frac{f}{g}\right\}\geq\#\{\text{אפסים של } f\}$.
- $\#\left\{\text{הקטבים של } \frac{f}{g}\right\}\geq\#\{\text{אפסים של } g\}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ מרומורפיות אזי $f+g,f\cdot g$ מרומורפיות.

יחודיות עיקרית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי $a\in\mathcal{U}$ יחודיות של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אשר אינה סליקה ואינה קוטב של f.

משפט ויירשטראס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $a\in\mathcal{U}$ יחודיות עיקרית של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי לכל $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a מתקיים כי $f(\mathcal{O}\backslash\{a\})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $a\in\mathcal{U}$ יחודיות מבודדת של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים

- $f=0$.
- קיים $k\in\mathbb{Z}$ עבורו לכל $h>k$ מתקיים $\lim_{z\to a}|z-a|^h|f(z)|=0$ וכן לכל $h<k$ מתקיים $\lim_{z\to a}|z-a|^h|f(z)|=\infty$.
- לכל $h\in\mathbb{R}$ מתקיים $\lim_{z\to a}|z-a|^h|f(z)|\notin\{0,\infty\}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהיינה $f_n:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפיות ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ עבורה $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ וכן לכל $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{U}$ קומפקטית מתקיים $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי f הולומורפית וכן $f'_n\xrightarrow{p.w.}f'$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהיינה $f_n:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפיות ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ עבורה $\sum_{n=0}^{\infty}f_n=f$ במ"ש אזי $\sum_{n=0}^{\infty}f'_n=f'$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ על $B_{\sup\{r|B_r(a)\subseteq\mathcal{U}\}}(a)$.

פונקציה אנליטית: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{F}$ תחום אזי $f\in C^{\infty}(\mathcal{U},\mathbb{F})$ עבורה לכל $a\in\mathcal{U}$ קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a בה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ אזי (f הולומורפית)$\Longleftrightarrow$(f אנליטית).

טור לורן: יהי $c\in\mathbb{C}$ ותהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{C}$ ותהא $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי קיימים $R_1,R_2\in\mathbb{R}$ עבורם $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ מתכנס בטבעת $R_1<|z-c|<R_2$ וכן לכל $\mathcal{K}\subseteq\{R_1<|z-c|<R_2\}$ קומפקטית $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ מתכנס במ"ש ובהחלט.

משפט: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ טבעת תהא $c\in\mathbb{C}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי קיימת $a\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ עבורה $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ על $\mathcal{U}$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ טבעת תהא $c\in\mathbb{C}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי מקדמי טור לורן של f הם $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ טבעת תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $c\in\mathcal{U}$ אפס מסדר $m\in\mathbb{N}$ אזי $f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}a_{n-m}(z-c)^n$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ טבעת תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $c\in\mathcal{U}$ קוטב מסדר $m\in\mathbb{N}$ אזי $f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty}a_{n+m}(z-c)^n$.

מסילה כוויצה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי γ מסילה סגורה עבורה $\forall a\in\mathbb{C}\backslash\mathcal{U}.n(\gamma,a)=0$.

תחום פשוט קשר: תחום $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ עבורו כל מסילה γ סגורה הינה כוויצה.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ פשוט קשר)$\Longleftrightarrow$($\hat{\mathbb{C}}\backslash\mathcal{U}$ קשירה).

מסילות הומוטופיות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום אזי מסילות $\gamma_0,\gamma_1:[a,b]\to\mathcal{U}$ עבורן $(\gamma_0(a)=\gamma_1(a))\wedge(\gamma_0(b)=\gamma_1(b))$ וכן קיימת $\eta\in C([a,b]\times[0,1],\mathcal{U})$ עבורה $(\eta(t,1)=\gamma_1(t))\wedge(\eta(t,0)=\gamma_0(t))\wedge(\eta(b,s)=\gamma_0(b))\wedge(\eta(a,s)=\gamma_0(a))$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא γ מסילה סגורה אזי (γ כוויצה)$\Longleftrightarrow$(γ הומוטופית למסילה קבועה).

משפט קושי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא γ מסילה כוויצה אזי $\int_{\gamma}f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

מסקנה נוסחת האינטגרל של קושי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא D $\gamma:[\alpha,\beta]\to$ מסילה כוויצה תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $a\in\mathcal{U}\backslash\gamma([\alpha,\beta])$ אזי $n(\gamma,a)\cdot f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$.

מסקנה נוסחת הנגזרת של קושי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $C_r\subseteq D$ מעגל כוויץ סביב z אזי $f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{C}$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ טבעת סביב a תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהיו C_1,C_2 מעגלים ב־$\mathcal{U}$ סביב a אזי $\int_{C_1}f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{C_2}f(z)\,\mathrm{d}z$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{C}$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ טבעת סביב a תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא γ מסילה סגורה עבורה $n(\gamma,a)=1$ ויהי C מעגל ב־$\mathcal{U}$ סביב a אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

מסקנה: יהי $a\in\mathbb{C}$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ טבעת סביב a תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא γ מסילה סגורה ויהי C מעגל ב־$\mathcal{U}$ סביב a אזי $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=n(\gamma,a)\cdot\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

שארית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathbb{C}$ יחודיות מבודדת של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ ויהי C מעגל ב־$\mathcal{U}$ סביב a ללא נקודות יחודיות נוספות בתוכו אזי $\mathrm{Res}_a(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathbb{C}$ יחודיות מבודדת של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ ותהא $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ טבעת סביב a אזי $f(z)-\frac{\mathrm{Res}_a(f)}{z-a}$ בעלת קדומה ב־$\mathcal{V}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $a\in\mathbb{C}$ יחודיות סליקה מבודדת של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי $\mathrm{Res}_a(f)=0$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $c\in\mathbb{C}$ יחודיות מבודדת של $f:\mathcal{U}\backslash\{c\}\to\mathbb{C}$ תהא $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ טבעת סביב c ויהי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ טור לורן של f ב־$\mathcal{V}$ אזי $\mathrm{Res}_a(f)=a_{-1}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום יהי $a\in\mathbb{C}$ קוטב פשוט מבודד של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי $\mathrm{Res}_a(f)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

משפט השאריות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $E\subseteq\mathcal{U}$ בת מנייה לכל היותר תהא $f:\mathcal{U}\backslash E\to\mathbb{C}$ הולומורפית ותהא $\gamma:[c,d]\to\mathcal{U}\backslash E$ כיווצה ב־$\mathcal{U}$ אזי $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{a\in E}n(\gamma,a)\cdot\mathrm{Res}_a(f)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית ויהי $a\in\mathcal{U}$ אפס אזי סדר a הינו $\mathrm{ord}_f(a)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ קוטב של $f:\mathcal{U}\backslash\{a\}\to\mathbb{C}$ אזי סדר a הינו $\mathrm{ord}_f(a)$.

משפט עקרון הארגומנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ מורומורפית תהא $\gamma:[c,d]\to\mathcal{U}\backslash\{f \text{ אפסים וקטבים של}\}$ מסילה כוויצה ב־$\mathcal{U}$ אזי $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\sum_{a\in\{f\text{ אפסים של}\}}\mathrm{ord}_f(a)\cdot n(\gamma,a)-\sum_{b\in\{f\text{ קטבים של}\}}\mathrm{ord}_f(b)\cdot n(\gamma,b)$.

מסילה תוחמת קבוצה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא γ מסילה סגורה אזי $\Omega\subseteq\mathcal{U}$ עבורה $\forall z\in\mathbb{C}.\,(n(\gamma,z)=1)\iff(z\in\Omega)$.

משפט רושה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא γ כוויצה עבורה $\forall z\in\mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])\,.n(\gamma,z)\in\{0,1\}$ תהא $\Omega\subseteq\mathcal{U}$ נתחמת על ידי γ ותהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפיות עבורן $\forall z\in\gamma([a,b])\,.\,|f(z)-g(z)|<|f(z)|$ אזי $\#\{\Omega\text{ ב־}g\text{ אפסים של}\}=\#\{\Omega\text{ ב־}f\text{ אפסים של}\}$.

תחום טוב: קבוצה $G\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה חסומה עבורה קיימות $\gamma_1\ldots\gamma_n$ מסילות זרות סגורות פשוטות וחלקות למקוטעין המקיימות $\forall j\in[n]\,.\forall t\in\mathrm{Dom}(\gamma_j)\,.\exists\varepsilon>0.\gamma_j(t)\cdot i\cdot\varepsilon\in G$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום יהי $G\subseteq\mathcal{U}$ תחום טוב ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית אזי $\int_{\partial G}f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

משפט עקרון המקסימום: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא $a\in\mathcal{U}$ ויהי $r>0$ עבורם $\overline{B}_r(a)\subseteq\mathcal{U}$ וכן $|f(a)|=\max_{z\in\overline{B}_r(a)}|f(z)|$ אזי f קבועה.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית התב"ש

- $|f|$ חסרת מקסימום מקומי.
- (f לא קבועה)$\Longleftarrow$($|f|$ חסרת מקסימום ב־$\mathcal{U}$).
- נניח כי $\overline{\mathcal{U}}$ חסומה וכן $f:\overline{\mathcal{U}}\to\mathbb{C}$ רציפה אזי $\max_{z\in\overline{\mathcal{U}}}|f(z)|$ מתקבל ב־$\partial\overline{\mathcal{U}}$.

מסקנה עקרון המינימום: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית תהא $a\in\mathcal{U}$ ויהי $r>0$ עבורם $\overline{B}_r(a)\subseteq\mathcal{U}$ וכן $0<|f(a)|=\min_{z\in\overline{B}_r(a)}|f(z)|$ אזי f קבועה.

מסקנה הלמה של שוורץ: תהא $f:B_1(0)\to\mathbb{C}$ הולומורפית עבורה $|f|\le1$ וכן $f(0)=0$ אזי

- $\forall z\in B_1(0)\,.\,|f(z)|\le|z|$.
- $|f'(0)|\le1$.
- נניח כי קיימת $a\in B_1(0)\backslash\{0\}$ עבורה $|f(a)|=|a|$ אזי קיים $\alpha\in\mathbb{R}$ עבורו $f(z)=e^{i\alpha}z$.

משפט ההעתקה הפתוחה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ הולומורפית לא קבועה אזי $f(\mathcal{U})$ פתוחה.

טענה: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ אזי ($\frac{az+b}{cz+d}$ קבועה)$\Longleftrightarrow(ad-bc=0)$.

העתקת מוביוס: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ עבורן $ad-bc\neq0$ אזי $f:\mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}\to\mathbb{C}$ המוגדרת $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$.

הרחבת העתקת מוביוס: יהיו $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ עבורן $ad-bc\neq0$ אזי $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ המקיימת $f(z)=\begin{cases}\frac{az+b}{cz+d} & z\in\mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}\\ \infty & z=-\frac{d}{c}\\ \frac{a}{c} & z=\infty\end{cases}$.

טענה: תהא $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ העתקת מוביוס אזי f רציפה חח"ע ועל.

העתקת מוביוס אלמנטרית: $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ עבורה

- מתיחה: $\exists\lambda\in\mathbb{R}_{>0}.f(z)=\lambda z$.
- סיבוב: $\exists\theta\in(-\pi,\pi]\,.f(z)=e^{i\theta}z$.

- הזזה: $\exists a \in \mathbb{C}. f\left(z\right) = z + a$.
- היפוך: $f\left(z\right) = \frac{1}{z}$.

טענה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ העתקת מוביוס אזי קיימות $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ העתקות מוביוס אלמנטריות עבורן $f = g_1 \circ \ldots \circ g_n$.

מעגל מוכלל: מעגל או ישר.

טענה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ העתקת מוביוס ויהי $A \subseteq \mathbb{C}$ מעגל מוכלל אזי $f\left(A\right)$ מעגל מוכלל.

טענה: תהיינה $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ שונות אזי קיימת ויחידה $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ העתקת מוביוס עבורה $f\left(0\right) = a$ וכן $f\left(1\right) = b$ וכן $f\left(\infty\right) = c$.

מסקנה: יהיו $A, B \subseteq \mathbb{C}$ מעגלים מוכללים אזי קיימת $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ העתקת מוביוס עבורה $f\left(A\right) = B$.

בונוסים

מטריצת השכנויות: יהי G גרף על n קודקודים אזי $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ המקיים $(\{i,j\} \in E(G)) \iff \left((A)_{i,j} = 1\right)$.

טענה: יהי G גרף k־רגולרי אזי A לכסינה וכן $\text{spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$.

טענה: יהי G גרף k־רגולרי ויהי $\lambda \in \text{spec}(A)$ אזי $|\lambda| \le k$.

טענה: יהי G גרף k־רגולרי אזי $k \in \text{spec}(A)$.

משפט: יהי G גרף k־רגולרי אזי (G קשיר)$\iff(r_g(k) = 1)$.

משפט: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ המקיימת $\forall z \in \mathbb{C}. f(z)^2 = z$ אזי f אינה רציפה ב־$\mathbb{C}$.

משפט המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) \ge 1$ אזי $\exists \alpha \in \mathbb{C}. p(\alpha) = 0$.

אפס של פולינום: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) = k$ וכן $p(z) = a \prod (z - a_i)^{\ell_i}$ אזי $\{a_i\}$.

סדר של אפס של פולינום: יהי $p \in \mathbb{C}[x]$ עבורו $\deg(p) = k$ וכן $p(z) = a \prod (z - a_i)^{\ell_i}$ יהי a_i אפס אזי ℓ_i.

פונקציה רציונלית: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ אזי $\frac{p}{q}$.

סדר של פונקציה רציונלית: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ אזי $\text{ord}\left(\frac{p}{q}\right) = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$.

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ זרים ויהי $a \in \mathbb{C}$ אזי

- קוטב מסדר m של $\frac{p}{q}$: אפס של q מסדר m.
- אפס מסדר m של $\frac{p}{q}$: אפס של p מסדר m.

הגדרה: יהיו $p, q \in \mathbb{C}[x]$ זרים אזי

- אם $\deg(p) > \deg(q)$ אזי ∞ קוטב של $\frac{p}{q}$ מסדר $\deg(p) - \deg(q)$.
- אם $\deg(p) < \deg(q)$ אזי ∞ אפס של $\frac{p}{q}$ מסדר $\deg(q) - \deg(p)$.

הגדרה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית אזי נרחיבה לפונקציה $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ כך

- יהי $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ קוטב של f אזי $f(z) = \infty$.
- נניח כי ∞ אפס של f אזי $f(\infty) = 0$.
- אם ∞ אינו קוטב ואינו אפס אזי $f(\infty) = \frac{a_n}{b_n}$ באשר a_n, b_n המקדמים המובילים של הפולינומים בהתאמה.

טענה: תהא $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ רציונלית אזי $\#\{f \text{ אפסים של}\} = \#\{f \text{ קטבים של}\} = \text{ord}(f)$.

טענה: תהא $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ רציונלית ויהי $a \in \hat{\mathbb{C}}$ אזי

- (a אפס של f)$\iff(\lim_{z \to a} f(z) = 0)$.
- (a קוטב של f)$\iff(\lim_{z \to a} f(z) = \infty)$.

מסקנה: תהא $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ רציונלית ויהי $a \in \hat{\mathbb{C}}$ אזי

- (a אפס של f מסדר k)$\iff$($\frac{1}{a}$ אפס של $\frac{1}{f}$ מסדר k).
- (a קוטב של f מסדר k)$\iff$($\frac{1}{a}$ קוטב של $\frac{1}{f}$ מסדר k).

משפט פירוק סינגולרי: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית אזי קיים ויחיד $g \in \mathbb{C}[x]$ ללא מקדם חופשי וכן $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית ללא קוטב ב־∞ עבורן $f = g + h$.

החלק הסינגולרי ב־∞: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית ויהי $f = g + h$ פירוק סינגולרי אזי $g_\infty = g$.

החלק הסינגולרי ב־α: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית נסמן $\tilde{f}(z) = f\left(\alpha + \frac{1}{z}\right)$ ויהי $\tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}$ פירוק סינגולרי אזי $g_\alpha(z) = \tilde{g}\left(\frac{1}{z - \alpha}\right)$.

טענה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית ויהי $\alpha \in \hat{\mathbb{C}}$ קוטב אזי g_α בעלת ערך סופי על $\hat{\mathbb{C}} \backslash \{\alpha\}$ וכן $g_\alpha(\alpha) = \infty$.

מסקנה: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$ קוטב אזי $f - g_\alpha$ חסרת קוטב ב־α.

משפט פירוק לשבריים חלקיים: תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ רציונלית עם פירוק סינגולרי $f = g + h$ ויהיו $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{C}$ קטבים אזי קיים $c \in \mathbb{C}$ עבורו $f = (g + c) + \sum_{k=1}^{n} g_{\alpha_k}$.

הקוטב הדרומי: נסמן ב־$\mathbb{R}^3$ את $S = (0, 0, -1)$.

הטלה סטריאוגרפית מהדרום: נגדיר $T:\mathbb{C}\to\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ S\right\}$ כך $T\left(x+iy\right)=\left(\frac{2x}{x^{2}+y^{2}+1},\frac{2y}{x^{2}+y^{2}+1},\frac{1-x^{2}-y^{2}}{x^{2}+y^{2}+1}\right)$.

הערה: במרחב $\mathbb{R}^{3}$ נגדיר את $\mathbb{C}$ להיות שני הצירים הראשונים, אז ההטלה הסטריאוגרפית מהדרום היא מבחינה מעשית $T\left(p\right)=\text{line}_{p,S}\cap\mathbb{S}^{1}$.

היטל מרקטור: נגדיר $p:\left[-\frac{W}{2},\frac{W}{2}\right]\times\left[-\infty,\infty\right]\to\mathbb{S}^{2}\backslash\left\{ N,S\right\}$ רציפה כך $p\left(x+iy\right)=e^{i\left(x+iy\right)}$.

טענה: $p_{\restriction_{\left(-\frac{W}{2},\frac{W}{2}\right]\times\left[-\infty,\infty\right]}}$ חח"ע ועל.

פונקציה קונפורמית: $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ דיפרנציאבילית עבורה לכל $a\in\mathbb{R}^{2}$ מתקיים כי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ קונפורמית.

פונקציה קונפורמית: $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{S}^{2}$ דיפרנציאבילית עבורה לכל $p\in\mathbb{R}^{2}$ קיימת $\left(a,b,c\right)\in\mathbb{R}^{3}\backslash\left\{ 0\right\}$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\left(p\right)=\left(\begin{smallmatrix}a & f_{2}(p)c-f_{3}(p)b\\ b & f_{3}(p)a-f_{1}(p)c\\ c & f_{1}(p)b-f_{2}(p)a \end{smallmatrix}\right)$.

הערה: תהא $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{S}^{2}$ קונפורמית אזי $f\left(p\right)\times\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\\ c \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}f_{2}(p)c-f_{3}(p)b\\ f_{3}(p)a-f_{1}(p)c\\ f_{1}(p)b-f_{2}(p)a \end{smallmatrix}\right)$.

טענה: תהא $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ קונפורמית ותהא $g:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{S}^{2}$ קונפורמית אזי $g\circ f$ קונפורמית.

טענה: p קונפורמית, T קונפורמית.

מסקנה: $T\circ p$ קונפורמית.

עיוות שטח: תהא $p\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\alpha_{T}\left(p\right)=\left\Vert \frac{\partial T}{\partial x}\left(p\right)\right\Vert \left\Vert \frac{\partial T}{\partial y}\left(p\right)\right\Vert$.

טענה: תהא $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{2}$ אזי $\alpha_{T}\left(x,y\right)=\frac{4}{\left(1+x^{2}+y^{2}\right)^{2}}$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathbb{C}$ עבורה $\gamma_{\restriction_{\left(a,b\right]}},\gamma_{\restriction_{\left[a,b\right)}}$ חח"ע.

משפט ז'ורדן: תהא $\gamma:\left[a,b\right]\to\mathbb{C}$ מסילה פשוטה וסגורה אזי קיימים $\Omega_{1},\Omega_{2}\subseteq\mathbb{C}\backslash\gamma\left(\left[a,b\right]\right)$ קשירים מסילתית עבורם $\Omega_{1}\uplus\Omega_{2}=\mathbb{C}\backslash\gamma\left(\left[a,b\right]\right)$ וכן Ω_{1} חסום וכן Ω_{2} אינו חסום.

מסקנה: תהא γ מסילה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין ויהי Ω התחום הכלוא על ידי γ אזי מתקיים $\text{Vol}\left(\Omega\right)=\frac{1}{2}\int_{\gamma}x\text{d}y-\frac{1}{2}\int_{\gamma}y\text{d}x$.

משפט: תהא γ מסילה פשוטה סגורה וחלקה למקוטעין ויהי Ω התחום הכלוא על ידי γ אזי $\text{Vol}\left(\Omega\right)=-\frac{i}{2}\int_{\gamma}\overline{z}\text{d}z$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי מתקיים $\int_{0}^{2\pi}\left(\cos\left(t\right)\right)^{2n}\text{d}t=\frac{2\pi}{4^{n}}\cdot\binom{2n}{n}$.

סדרה חשבונית: יהי $a\in\mathbb{Z}$ ויהי $d\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $a+d\mathbb{Z}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימים $a_{1}\ldots a_{n}\in\mathbb{Z}$ ולא קיימים $d_{1}\ldots d_{n}\in\mathbb{N}_{+}$ שונים עבורם $\mathbb{Z}=\biguplus_{k=1}^{n}\left(a_{k}+d_{k}\mathbb{Z}\right)$.

טענה: יהי $\leq$ יחס סדר מלא על $\mathbb{C}$ אזי $\left(\mathbb{C},\leq\right)$ אינו שדה סדור.