```
עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. \Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O} עבורה f\in C^\infty\left(G,\mathbb{R}^{n-k}
ight)
                                                                                  .C^{\omega}\left(A,B
ight)=\{f:A
ightarrow B\mid סימון: תהיינה A,B קבוצות אזי f\} אנליטית אזי
יריעה אנליטית x-מימת סביבה \mathcal{O} של xוכן קיימת עבורה לכל x\in\mathcal{M} פיימת איימת x\in\mathcal{M} עבורה לכל איימת x\in\mathcal{M} פיימת סביבה x\in\mathcal{M}
                                                         עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. \Gamma_f=\mathcal{M}\cap\mathcal{O} אנליטית מקומית עבורה f:G	o\mathbb{R}^{n-k}
                                                                                                                                                          . עקומה: יריעה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n שהינה חד־מימדית \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                                                                                             . שהינה דו־מימדית \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n משטח: יריעה
                                                                                                                        . מימדית n-1 שהינה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מימדית מימר n-1
                                                                                                                                                             . טענה: \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n הינה היפר־משפט חלק\mathbb{S}^n
                                                                                                                                                 הערה: בקורס זה המונח יריעה אומר יריעה חלקה.
יריעה לכל \mathcal{M}\cap\mathcal{U}_{lpha} אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M}\subseteq\bigcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_{lpha} פתוחות עבורן פתוחות לכל אזי (\mathcal{M} יריעה)\mathcal{M} וכן \mathcal{M} יריעה לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
                                                                                                                                                                                                                            .(\alpha \in \Lambda
                                                            (יריעה), אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (בורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} יריעה) קיימת סביבה x \in \mathcal{M} יריעה), יריעה אזי \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי (\mathcal{M} \cap \mathcal{U}
                  עבורה r\in C^m (G,\mathbb{R}^n) אני פתוחה אזי G\subseteq\mathbb{R}^k מימדית ותהא T־יריעה T-יריעה T-יריעה T-יריעה ארייריעה ארייריעה פרמטריזציה: תהא
                                                                                                                                                                                                                   .r(G) = \mathcal{M}
       \operatorname{Lank}\left(\mathcal{D}_{r}\left(x
ight)
ight)=k מתקיים x\in G מתקיים עבורה לכל r\in C^{1}\left(G,\mathbb{R}^{n}
ight) פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית: תהא
                                                        f^{-1}\in C\left(B,A
ight) הפיכה עבורה f\in C\left(A,B
ight) אזי אזי B\subseteq\mathbb{R}^{m} ותהא A\subseteq\mathbb{R}^{n} ותהא
                      . פתוחה אזי פרמטריזציה רגולרית r:G	o A שהינה הומאומורפיזם. פתוחה אזי פרמטריזציה ותהא מובה: תהא A\subseteq\mathbb{R}^n שהינה הומאומורפיזם.
וכן קיימות \mathcal{M}=igcup_{lpha\in\Lambda}\mathcal{U}_lpha עבורן ביחס ל־\mathcal{M} עבורן קיימות (קיימות קיימות) אזי איי איי איי איי \mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}^n אזי (\mathcal{M}יריעה) איי איי (\mathcal{M}יריעה)
                                           \mathcal{U}_{lpha}\left(G_{lpha}
ight)=\mathcal{U}_{lpha} עבורן r_{lpha}\subseteq C^{m}\left(G_{lpha},\mathbb{R}^{n}
ight) טובות טובות פרמטריזציות פרמטריזציות עבורן קיימות פרמטריזציות טובות \left\{G_{lpha}\right\}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{k}
ight)
                          . (עבורה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} יריעה)\iff (לכל \mathcal{M} \in \mathcal{M} קיימת סביבה \mathcal{M} עבורה \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי אזי (לכל אזי מובה).
(f_1\dots f_{n-k})(x)=0 המקיימת x\in\mathcal{U} עבורה לכל עבורה אזי \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית: תהא
                                                                                                                                                                                       מתקיים כי \{\nabla f_i(x)\} בת"ל.
עבורו x\in\mathcal{U} עבורו (לכל איזי איזי אויאות אויאות אויאות איזי איזי איזי f_1\dots f_{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R} עבורו פתוחה תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n מערכת משוואות רגולרית
                                                                                                                  . (rank \left(\mathcal{D}_{(f_1\dots f_{n-k})}\left(x
ight)
ight)=n-k מתקיים \left(f_1\dots f_{n-k}
ight)\left(x
ight)=0
                             תיאלית מערכת משוואות רגולרית: תהא מערכת משוואות רגולרית: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k מימדית ותהא מימדית משוואות רגולרית: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n משוואות רגולרית:
                                                                                                                                     \{(f_1\dots f_{n-k})=0\}=\mathcal{M} עבורה \{f_i\}_{i=1}^{n-k}\subseteq\mathcal{U}	o\mathbb{R}
                  .(לכל \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n בעלת הצגה סתומה רגולרית) קיימת סביבה עבורה \mathcal{M} \cap \mathcal{U} אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי (\mathcal{M} \in \mathcal{M} אזי (לכל
                                                                               \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\} אליפסואיד: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי a,b,c\in\mathbb{R} טענה: אליפסואיד הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} היפרבולואיד חד־יריעתי: יהיו a,b,c\in\mathbb{R} אזי יריעתי הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\}
                                                                             . \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1
ight\} אזי a,b,c\in\mathbb{R} אזי היפרבולואיד דו־יריעתי: יהינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית. מענה: היפרבולואיד דו־יריעתי הינו יריעה דו־מימדית הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                                                                             .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} אזי \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}
ight\} טענה: קונוס הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית ללא הנקודה .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1
ight\} אזי .\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\} טענה: גליל הינו יריעה דו־מימדית בעלת הצגה סתומה רגולרית.
                              f(t,
ho)=egin{pmatrix} \gamma_1(t)\cos(
ho) \\ \gamma_1(t)\sin(
ho) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} המוגדרת f:I	imes(0,2\pi)	o\mathbb{R}^3 עקומה אזי \gamma:I	o(0,\infty)	imes\mathbb{R} המוגדרת
\gamma של f אזי משפט הסיבוב עקומה עבורה \gamma פרמטריזציה טובה של \gamma:Im(\gamma) אזי משפט אזי משפט \gamma:I\to(0,\infty)\times\mathbb{R} אזי משפט הינו
                                                                                                                                                                                     \operatorname{Im}\left(f\right) פרמטריזציה טובה של
                                                   f(x)=-rac{2}{\|x\|^2+1}\left(x_1,\ldots,x_n,rac{\|x\|^2-1}{2}
ight) כך f:\mathbb{R}^n	o\mathbb{S}^n נגדיר n\in\mathbb{N}_+ נגדיר n\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                                                                                     \mathbb{S}^1 טורוס: משטח הסיבוב של
```

עבורה לכל $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וכן קיימת סביבה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $M\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וכן קיימת של T^m

יריעה חלקה xימת סביבה \mathcal{O} של xוכן קיימת $G\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה וכן קיימת עבורה לכל $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל

. עבורה $\Gamma_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{O}$ עבורה של קואורדינטות עד כדי פרמוטציה על $f \in C^m \left(G, \mathbb{R}^{n-k} \right)$

```
. טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} יריעה דו־מימדית
                                                              טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M} \backslash \partial \mathcal{M} אינה ניתנת להצגה על ידי פרמטריזציה טובה.
                                                                             . טענה: תהא \mathcal{M} טבעת מוביוס אזי \mathcal{M}\backslash\partial\mathcal{M} אינה ניתנת להצגה סתומה רגולרית.
                                                                                                           a 	imes b = \left(egin{array}{c} a_2b_3 - a_3b_2 \ a_3b_1 - a_1b_3 \ a_1b_2 - a_1b_1 \end{array}
ight) אזי a,b \in \mathbb{R}^3 יהיו
                                                                                                                (u \times v) \perp u וכן (u \times v) \perp v אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                          (u \times v = 0) \iff (u \in \text{span}(v)) אזי u, v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                        \det(u,v,u\times v)=\|u\times v\|^2>0 אזי u,v\in\mathbb{R}^3 טענה: יהיו
                                                                                                          |v \times u| = \|v\| \|u\| \sin\left(\angle\left(v,u\right)\right) אזי u,v \in \mathbb{R}^3 טענה: יהיו
וכן קיים אוכן A\subset \mathcal{U} סביבה המקיימת על \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n עבורה איימת \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^n סביבה המקיימת איים קבוצה ניתנת ליישור על A\subset\mathcal{U}
                                                                                              f(A) = f(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}) דיפאומורפיזם עבורו f: \mathcal{U} \to \mathcal{V}
עבורה P מתקיימת מקומית: תהא עבורה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n עבורה לכל עבורו לכל עבורה עביבה A\subseteq\mathbb{R}^n עבורה אזי פרידיקט
                                                                                                                                                                                              A \cap \mathcal{U}
                                                                                                                                    משפט: תהא k\in\mathbb{N}_+ ויהי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n התב"ש
                                                                                                                                                              יריעה k־מימדית. \mathcal{M}
                                             . עד כדי פרמוטציה של קואורדינטות הגרף. עד כדי f\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n-k}
ight) מקומית גרף של פונקציה \mathcal{M}
                                                                                            x:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^n מקומית בעלת פרמטריזציה טובה \mathcal M • מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית \mathcal M • מקומית בעלת הצגה סתומה רגולרית \mathcal M • מקומית ניתנת ליישור על ידי דיפאומורפיזם ל\mathcal M•
מסקנה: תהא W\subseteq\mathbb{R}^n של (a,0_{n-k}) של וקיים דיפאומורפיזם קיימת סביבה r:G	o\mathbb{R}^n של ייים דיפאומורפיזם r:G	o\mathbb{R}^n
                                                                                                               .s_{\restriction_{W\cap \left(G	imes 0_{n-k}
ight)}}=r עבורו s:W	o s\left(W
ight) הינה 0־מימדית הינה קבוצה של נקודות מבודדות.
                                           \mathcal{U}=W\cap A פתוחה עבורה אזיW\subseteq\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזיA\subseteq\mathbb{R}^d אזיA\subseteq\mathbb{R}^d אזי
                                             \mathcal{U}=W\cap A סגורה עבורה אזי W\subset\mathbb{R}^d עבורה קיימת עבורה אזי A\subset\mathbb{R}^d אזי אזי סגורה סגורה סגורה אזי
                                        (\forall x \in \mathcal{U}. \exists r > 0.B_r(x) \cap A \subseteq \mathcal{U}) \Longleftrightarrow (Aמשפט: תהא \mathcal{U} \subseteq A ותהא \mathcal{U} \subseteq A אזי שמיט: תהא אוי ווהא משפט: משפט מחוחה ביחס ל־
                                             \mathcal{U}\in\{A,\varnothing\} פתוחה יחסית ל־A\subseteq\mathbb{R}^d מתקיים A\subseteq\mathbb{R}^d עבורה לכל
                       \mathcal{U},\mathcal{U}\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית לA\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי (A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\} פתוחות יחסית לA\subseteq\mathbb{R}^d אזי אזי (A\in\{\mathcal{U}\cap\mathcal{V},\mathcal{U}\cup\mathcal{V}\}
פתוחה f^{-1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יחסית ל־B פתוחה יחסית ל־f:A	o B אזי ותהא f:A	o B ותהא אזי ותהא
arphi^{-1} וכן פתוחה arphi פתוחה יריעה arphi:\mathcal{U}	o\mathbb{R}^k החסית ותהא שפה: תהא יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה \mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} ממחה יריעה איריעה איריעה איריעה מימדית מחחה יחסית ותהא
                                                                                                                                                          (\mathcal{U}, \varphi) פרמטרזיציה טובה אזי
                                                     \mathcal{A} אטלס: תהא \mathcal{A} = \mathcal{M} יריעה \mathcal{A}־מימדית אזי קבוצה של מפות אינ איזי \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n אטלס:
             . מפה. (r(\mathcal{U}),r^{-1}) אזי r(\mathcal{U}) אזי רגולרית של פרמטריזציה חח"ע פרמטריזציה ותהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מפה.
                                                                                                           \mathbb{RP}^n = \left\{ vv^T \mid v \in \mathbb{S}^n 
ight\} אזי n \geq 2 המרחב הפרוייקיבי: יהי
                                                                                                                 . יריעה n מימדית. \mathbb{RP}^n\subseteq\mathbb{R}^{(n+1)^2} אזי n\geq 2 יריעה n מימדית.
                                              arphi_{1,2}=arphi_2\circarphi_1^{-1} המוגדרת arphi_{1,2}:\mathbb{R}^k	o\mathbb{R}^k מפות אזי מעבר: תהיינה \left(\mathcal{U}_1,arphi_1
ight),\left(\mathcal{U}_2,arphi_2
ight) מפות אזי
                                    a_i\in\{1,2\} טענה: תהיינה arphi_i\left(\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2
ight) מפות ותהא מפות ותהא מפות מפות A\subseteq\mathbb{R}^k מפות ותהא מפות \mathcal{U}_1,arphi_1
ight), (\mathcal{U}_2,arphi_2)
                                                                 . טענה: \varphi_{1,2} דיפאומורפיזם A\subseteq\mathbb{R}^k מפות ותהא מפות (\mathcal{U}_1,\varphi_1)\,,(\mathcal{U}_2,\varphi_2) דיפאומורפיזם
f \circ \varphi^{-1} הינה f \circ \varphi^{-1} מיריעה: תהא f \circ \varphi^{-1} יריעה f \circ \varphi^{-1} מינדיעה: עבורה לכל מפה f \circ \varphi^{-1} מיריעה: f \circ \varphi^{-1} מיריעה: f \circ \varphi^{-1}
                                                                     C^{lpha} הינה מדרגת מדרגת הינה לכל היותר f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^m אזי מיריעה לכל יריעה מדרגת הינה לכל מיריעה
עבורו \mathcal M של \{(\mathcal U_lpha,arphi_lpha)\}_{lpha\in\Lambda} יריעה \mathcal M יריעה f:\mathcal M	o\mathbb R^m אזי ותהא f:\mathcal M	o\mathbb R^m של \mathcal M\subseteq\mathbb R^n יריעה \mathcal M\subseteq\mathbb R^n יריעה
                                                                                                                                                        \alpha \in \Lambda לכל C^{\alpha} הינה f \circ \varphi^{-1}
                                                                                                        . אטלס\mathcal{M}יריעה \mathcal{M}־מימדית אזי קיים ל\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אטלס.
```

 $\exists x \in \mathcal{M}. (|N(x)| = 1) \land (N(x) \perp x)$ המקיימת $N \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ על־משטח אזי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת של יריעה: יהי

 \mathbb{T}^2 סימוו: נסמו טורוס בעזרת

למה: טבעת מוביוס אינו משטח קו־אוריינטבילי.

```
\dim\left(\mathcal{M}
ight)=k יריעה k־מימדית אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}
עבורה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעה \mathcal{M}'\subset\mathbb{R}^m יריעה \mathcal{M}'\subset\mathbb{R}^m יריעה \mathcal{M}'\subset\mathbb{R}^n יריעה אזי יריעה
                                                                                                                                                                                                         .C^lpha הינה f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^m
                          g\circ f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}''
ight) אזי g\in C^{lpha}\left(\mathcal{M}',\mathcal{M}''
ight) ותהא ותהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) יריעות תהא יריעות יריעות תהא
p של p של p\in \mathbb{R}^n של p\in \mathcal{M} פיימת סביבה p\in \mathcal{M} של אזי p\in \mathcal{M} של p\in \mathcal{M} של אזי p\in \mathcal{M}
                                                                                                                                                                          g_{\upharpoonright_{\mathcal{M} \cap \mathcal{U}}} = f המקיימת g \in C^{lpha}\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight)
 \mathcal{M}' של \mathcal{M} ולכל מפה \mathcal{M}' של \mathcal{M} ולכל מפה אזי (\mathcal{U}, \varphi) של אזי (\mathcal{U}, \varphi) של \mathcal{M}' אזי (f: \mathcal{M} \to \mathcal{M}' ולכל מפה \mathcal{M}, \mathcal{M}' יריעות ותהא
                                                                                                                                                                                     מתקיים כי \psi \circ f \circ \varphi^{-1} הינה מתקיים
                                                              f,f^{-1}\in C^{lpha} עבורה f:\mathcal{M}	o\mathcal{M}' יריעות אזי \mathcal{M},\mathcal{M}' עבורה ירינה יריעות אזי יריעות אזי יריעות אזי
                                                                                                        \dim\left(\mathcal{M}
ight)=\dim\left(\mathcal{M}'
ight) איריעות דיפאומורפיות אזי \mathcal{M},\mathcal{M}' מסקנה: תהיינה
                             סטענה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}־מימדית תהא p\in\mathcal{M} ותהיינה p\in\mathcal{M} סביבות של \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n מפות באשר \mathcal{M}
                                                                                                                                                                        \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi^{-1}}\left(\varphi\left(p\right)\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\psi^{-1}}\left(\psi\left(p\right)\right)\right)
                                         אזי p מפה באשר \mathcal U סביבה של ותהא p\in\mathcal M ותהא מימדית יריעה \mathcal M\subseteq\mathbb R^n יריעה אייי איי
                                                                                                                                                                                              T_p(\mathcal{M}) = \operatorname{Im}\left(\mathcal{D}_{\varphi(p)}\left(\varphi^{-1}\right)\right)
                                                                                                         T_p\left(\mathcal{M}
ight)\subseteq\mathbb{R}^n אזי p\in\mathcal{M} איי ותהא m\in\mathcal{M} יריעה m\in\mathcal{M} יריעה m\in\mathcal{M} יריעה
                                                                                                  \dim\left(T_n\left(\mathcal{M}
ight)
ight)=\dim\left(\mathcal{M}
ight) אזי p\in\mathcal{M} יריעה ותהא \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n אזי \mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n
                                     טענה: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה k יריעה מימדית תהא ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעה M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזיי
                                                                                                                                                                                                        T_p(\mathcal{M}) = \ker \left( \mathcal{D}_p(f) \right)
                                                                                                                                 \dot{\gamma}=rac{d\gamma}{dt} אזי C^1 מסילה \gamma:(a,b)	o \mathcal{M} אהירות: תהא
                                                                                                                             \dot{\gamma}\left(t
ight)\in T_{\gamma\left(t
ight)}\left(\mathcal{M}
ight) אזי C^{1} מסילה \gamma:\left(a,b
ight)
ightarrow\mathcal{M} אהא
                T_p\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{\dot{\gamma}\left(0
ight)\mid\left(\gamma\in C^1\left(\left(-arepsilon,arepsilon
ight),\mathcal{M}
ight)
ight)\wedge\left(\gamma\left(0
ight)=p
ight)
ight\} אזי p\in\mathcal{M} אזי אינים: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}^n יריעה
\gamma_i\left(0
ight)=p מסילות המקיימות מסילות תהא \gamma_1,\gamma_2:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} ותהיינה ותהיינה f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) תהא ותהיp\in\mathcal{M} מסילות המקיימות
                                                                                                                                        \left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{1}\right)\right)\left(0
ight)=\left(\frac{d}{dt}\left(f\circ\gamma_{2}\right)\right)\left(0
ight) אזי \dot{\gamma}_{i}\left(0
ight)=v וכן
\mathcal{D}_p f: T_p\left(\mathcal{M}
ight) 	o T_{f(p)}\left(\mathcal{M}'
ight) אזי f \in C^1\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p \in \mathcal{M} ותהא יריעות: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא
                                         \dot{\gamma}\left(0
ight)=v וכן \gamma\left(0
ight)=p המקיימת \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} עבור מסילה \gamma:\left(-arepsilon,arepsilon
ight)	o \mathcal{M} אבור מסילה עבור מסילה
                                                                . טענה: תהיינה \mathcal{D}_v f אזי f \in C^1(\mathcal{M},\mathcal{M}') ותהא p \in \mathcal{M} העתקה לינארית. תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' איזי
                                             משפט כלל השרשרת: תהיינה M, \mathcal{M}', \mathcal{M}'' יריעות תהא f \in C^{lpha}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') משפט כלל השרשרת: תהיינה איי
                                                                                                                                                                                        \mathcal{D}_{p}\left(g\circ f\right) = \mathcal{D}_{f(p)}\left(g\right)\cdot\mathcal{D}_{p}\left(f\right)
                                                       \mathcal{D}_{p}f\left(v
ight)=\mathcal{D}_{p}\left(f
ight)\cdot v אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'
ight) ותהא p\in\mathcal{M} ותהא יריעות תהא \mathcal{M},\mathcal{M}' מסקנה:
                                                 טענה: תהא p \subseteq \mathcal{M} יריעה תהא אזיי דייעה חומה הצגה \{F=0\} ותהא ותהא p \in \mathcal{M} יריעה עבור סביבה של
                                                                                                                                                       T_{p}\left(\mathcal{M}\right) = \operatorname{span}\left(\left\{\nabla F_{1}\left(p\right), \dots, \nabla F_{n-k}\left(p\right)\right\}^{\perp}\right)
\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{1}
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_{k}
ight)\} אזי p\in\mathcal{M} יריעה תהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא מענה: תהא
                                                                                                                                                                                                                      T_{p}\left(\mathcal{M}\right) בסיס של
                                                               T_p\left(\mathcal{M}
ight) אל הסטנדרטי הבסיס הסטנדרטי להיות \left\{\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_1
ight),\ldots,\mathcal{D}_{arphi(p)}arphi^{-1}\left(e_k
ight)
ight\} הערה: נגדיר את
 (\mathcal{V},\psi) עתהא p \in \mathcal{M} סביבה של סביבה ב־\mathcal{M} מפה ב־\mathcal{M} מפה מפה לענה: תהיינה \mathcal{M},\mathcal{M}' יריעות תהא f \in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathcal{M}'\right) מפה ב־\mathcal{M}
[\mathcal{D}_p f]_{i,j} = rac{\partial \left(\psi \circ f \circ arphi^{-1}
ight)_i}{\partial x_j} אזי f\left(p
ight) אזי f\left(p
ight) באשר \mathcal{M}' \subseteq \mathbb{R}^n באשר g \in C^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) ותהא g \in \mathcal{C}^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) ותהא g \in \mathcal{C}^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) באשר g \in \mathcal{C}^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) ותהא g \in \mathcal{C}^lpha\left(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m
ight) ותהא
                                                                                             \mathcal{D}_pf=\left(\mathcal{D}_pg\right)_{\restriction_{T_p(\mathcal{M})}} אזי g_{\restriction_{\mathcal{M}\cap\mathcal{U}}}=f וכן p סביבה של p נגזרת ביוונית: תהא f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אזי f\in C^{lpha}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אזי
                      L_vf=\sum_{i=1}^k v_i\cdot rac{\partial \left(f\circarphi^{-1}
ight)}{\partial x_i} אוי v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) מפה בסביבה של p מפה בסביבה של f\in C^lpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) אוי f\in C^lpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight)
                                                                                                                      c.rac{\partial f}{\partial v}=L_v f אזי v\in T_p\left(\mathcal{M}
ight) ותהא ותהא f\in C^lpha\left(\mathcal{M},\mathbb{R}^m
ight) איזי
                                                                        v \perp T_p\left(\mathcal{M}
ight) עבורו v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} אזי p \in \mathcal{M} על־משטח על־משטח על־משטח על־משטח עבורו
                                           \|v\|=1 עבורו עבורו v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} אזי וקטור נורמל עבורו על־משטח על־משטח על־משטח על־משטח עבורו M\subseteq\mathbb{R}^n אזי וקטור נורמל יחידה: יהי
טענה: יהי M\subseteq\mathbb{R}^n אזי p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא p\in\mathcal{M} ותהא על־משטח תהא אזי p\in\mathcal{M} ותהא וותהא אזי אוידה p\in\mathcal{M} אזי וקטור נורמל יחידה
```

.p-ל

 \mathcal{M} אזי קו־אוריינטציה של אזי אזי $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ קו־אוריינטציה אזי הצגה סתומה הצגה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ טענה: יהי $\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),...,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(p),-1\right)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+\|\nabla f(p)\|^2}}$ אזי אזי $p\in\mathcal{M}$ אזי וקטור נורמל יחידה $p\in\mathcal{M}$ על־משטח תהא

 \mathcal{M} אזי $\frac{\left(rac{\partial f}{\partial x_1},...,rac{\partial f}{\partial x_{n-1}},-1
ight)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}$ אזי אזי \mathcal{M} אזי קו־אוריינטציה של $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ מסקנה: יהי

$$v_1 imes \dots imes v_{n-1} = \sum_{i=1}^n {(-1)}^{i+1} \det egin{pmatrix} (v_1)_1 & \dots & (v_{n-1})_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_1)_{i-1} & \dots & (v_{n-1})_{i-1} \\ v_1)_{i+1} & \dots & (v_{n-1})_{i+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_1)_n & \dots & (v_{n-1})_n \end{pmatrix}} e_i$$
 אזי בצורה לא פורמלית מתקיים $\begin{pmatrix} e_1 & | & | & | \\ \vdots & v_1 & \dots & v_{n-1} \\ \vdots & v_1 & \dots & v_{n-1} \end{pmatrix}$ הערה: יהיו $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ אזי מכפלה מצולבת העתקה לינארית אנטי־סימטרית. $v_1 \dots v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$

$$\Gamma(v_1\dots v_m)=\detegin{pmatrix} \langle v_1,v_1
angle & \ldots \langle v_1,v_m
angle \ dots & dots \ \langle v_1,v_1
angle & \ldots \langle v_m,v_m
angle \end{pmatrix}$$
 איז $v_1\dots v_m\in \mathbb{R}^n$ איז $v_1\dots v_{n-1}\in \mathbb{R}^n$ טענה: יהיו $v_1\dots v_{n-1}\in \mathbb{R}^n$ איז

- $v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \perp v_i$ מתקיים $i \in [n-1]$
 - $\|v_1 \times \ldots \times v_{n-1}\| = \sqrt{\Gamma(v_1 \ldots v_{n-1})} \bullet$
 - $\det(v_1 \times ... \times v_{n-1}, v_1, ..., v_{n-1}) \ge 0$

טענה: יהי $\frac{\partial r}{\partial x_1}(p) imes \ldots imes \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}(p)$ אזי של־משטח תהא $p \in \mathcal{M}$ ותהא $p \in \mathcal{M}$ וקטור על־משטח על־משטח על־משטח וותהא וותהא $p \in \mathcal{M}$

 \mathcal{M} של קו־אוריינטציה של $\frac{\partial r}{\partial x_1} imes \ldots imes \frac{\partial r}{\partial x_{n-1}}$ אוי פרמטריזציה של r פרמטריזציה של $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ איזי יהי

 $.\partial^{lpha}f=rac{\partial^{|lpha|}}{\partial x^{lpha}}\left(f
ight)$ אזי $lpha\in\mathbb{N}^{k}$ ותהא $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ איזי

סימון: תהא (או) $f\in\mathcal{C}$ (או) סימון: $(\alpha)_{\alpha}$ (או) $f\in\mathcal{C}$ (או) סימון: סימון: תהיינה $(\alpha)_{\beta}$ אוי $(\alpha)_{\beta}$ (אוי $(\alpha)_{\beta}$) $(\alpha)_{\beta}$ אוי $(\alpha)_{\beta}$ (אוי $(\alpha)_{\beta}$) $(\alpha)_{\beta}$ $(\alpha)_{\beta}$ (אוי $(\alpha)_{\beta}$) $(\alpha)_{\beta}$ $(\alpha)_{\beta$ עבור a_{α} וכן $m \in \mathbb{N}$ חלקות.

אופרטור $\overline{\mathcal{U}}$ אופרטור \mathcal{M} על \mathcal{M} על \mathcal{M} באשר \mathcal{M} עבורה לכל מפה \mathcal{M} עבורה אזי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ אופרטור דיפרנציאלי: תהא יריעה אזי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי . תקניים a_{lpha} וכן $m\in\mathbb{N}$ וכן $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ מתקניים $m\in\mathbb{N}$ מתקניים $m\in\mathbb{N}$ איז $m\in\mathbb{N}$ וכן $m\in\mathbb{N}$ וכן לכל מפה $m\in\mathbb{N}$ מתקניים כי $m\in\mathbb{N}$ עבורה $m\in\mathbb{N}$ וכן לכל מפה $m\in\mathbb{N}$ מתקניים כי $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן לכל מפה $m\in\mathbb{N}$ מתקניים כי $m\in\mathbb{N}$ עבור $m\in\mathbb{N}$ וכן לכל מפה $m\in\mathbb{N}$ מתקנים כי

 $.C^{m}$ העתקה $x\mapsto\mathcal{D}_{x}arphi\left(v\left(x
ight)
ight)$

 הינה $L_v\left(f
ight)(x)=L_{v(x)}\left(f
ight)$ המוגדרת $L_v:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי חלק אזי שדה וקטורי חלק אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ המוגדרת $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ הינה אופרטור דיפרנציאלי.

.supp $(f) = \overline{\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) \neq 0\}}$ אזי $f \in C(\mathcal{M})$ תומך: תהא

 $C_C^\infty\left(\mathcal{U}
ight)=\{f\in C^\infty\left(\mathcal{U}
ight)\mid$ קומפקטית supp $(f)\}$ פתוחה אזי $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M}$ יריעה ותהא \mathcal{M} יריעה איזי

 $f_{
ho_\mathcal{U}}=g_{
ho_\mathcal{U}}$ עבורן עבורן $f,g\in C_C^\infty$ פתוחה ולכל עבורה לכל עבורה לכל $L:C^\infty\left(\mathcal{M}
ight) o C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ עבורן אזי אופרטור מקומי: תהא $L\left(f\right)_{\restriction_{\mathcal{U}}}=L\left(g\right)_{\restriction_{\mathcal{U}}}$ מתקיים

 $\|f\|_{W,n}=\sup_{\substack{x\in w\\ |lpha|\leq n}}\|\partial^{lpha}f(\,)x(\|\,$ אזי $n\in\mathbb{N}$ איזי $f\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}
ight)$ פתוחה תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{k}$ פתוחה תהא

 α טענה: תהא $\alpha \leq n$ פתוחה תהא $\alpha \leq n$ ויהי $\alpha \in \mathcal{U}$ עבורה $\alpha \in \mathcal{U}$ עבורה $\alpha \leq n$ ויהי $\alpha \in \mathcal{U}$ אזי קיימת $\alpha \in \mathcal{U}$ אזי קיימת עבורה $g\in C^{\infty}\left(\mathcal{W}
ight)$ וכן $\delta\in\left(0,arepsilon
ight)$

- $.g_{\restriction_{B_{\frac{\delta}{2}}(x)}} = 0 \bullet$ $.g_{\restriction_{\mathcal{W} \backslash B_{\delta}(x)}} = 0 \bullet$
- $.\|f-g\|_{W,n}<\varepsilon \ \bullet$

 $oxedsymbol{\alpha}_{eta}(lpha) = \prod_{i=1}^k inom{lpha_i}{eta_i}$ אזי $lpha, eta \in \mathbb{N}^k$ סימון: יהיו

משפט פיטרה: תהא $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$ יריעה ותהא יריעה ותהא $L:C^{\infty}\left(\mathcal{M}
ight)$

- אופרטור מקומי. L
- .supp $(L(f)) \subseteq \text{supp}(f)$ מתקיים $f \in C^{\infty}(\mathcal{M})$
 - .אופרטור דיפרנציאלי L

x סענה: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ פתוחה יהי ענה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ אופרטור לינארי מקומי ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ אזי קיימת סענה: $\mathcal{U}=\mathcal{U}$ פתוחה יהי עבורה $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$ פתוחה יהי עבורה $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$ וכן $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$ עבורה עבורה $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$ פתוחה יהי עבורה עבורה עבורה של פומפקטית וכן קיים $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$ וכן $\mathcal{U}=\mathcal{U}=\mathcal{U}$

וכן $n\in\mathbb{N}$ פתוחה עבורה קיימים $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{V}$ פתוחה אופרטור לינארי אופרטור לינארי $\mathcal{U}:C^\infty(\mathcal{V})\to C^\infty(\mathcal{V})$ פתוחה יהי $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^k$ אופרטור לינארי מקומי $\mathcal{U}:C^\infty(\mathcal{V})\to C^\infty(\mathcal{V})$ מתקיים $f\in C^\infty_C(\mathcal{W})$ אופרטור דיפרנציאלי מסדר $\mathcal{U}:C>0$

עבורן $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathbb{R}^n
ight)$ אזי קיימות של X אזי קיימות אויהי ויהי אויהי $X\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן $X\subseteq\mathbb{R}^n$

- $0 \le \rho_i \le 1$ מתקיים $i \in \mathbb{N}$ לכל
- .supp $(\rho_i)\subseteq\mathcal{U}_{\alpha}$ עבורו $\alpha\in\Lambda$ קיים $i\in\mathbb{N}$ •
- $|\{i\in\mathbb{N}\mid
 ho_i\left(\mathcal{W}
 ight)
 eq0\}|\in\mathbb{N}$ עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה סביבה פתוחה $x\in X$ לכל \star
 - $\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_{i}\left(x\right)=1$ מתקיים $x\in X$ לכל •

. אופרטור דיפרנציאלי מקומי אזי אופרטור לינארי אופרטור ביפרנציאלי ויהי $L:C^{\infty}\left(\mathcal{V}
ight) o C^{\infty}\left(\mathcal{V}
ight)$ אופרטור אופרטור מסקנה: תהא

עבורן $\{
ho_i\}_{i=1}^\infty\subseteq C^\infty\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי קיימות X של \mathcal{M} כיסוי פתוח כיסוי $X\subseteq\mathcal{M}$ ויהי ויהי אייריעה תהא $X\subseteq\mathcal{M}$

- $0 \leq \rho_i \leq 1$ מתקיים $i \in \mathbb{N}$ לכל
- .supp $(\rho_i) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha}$ עבורו $\alpha \in \Lambda$ קיים $i \in \mathbb{N}$ •
- $|\{i\in\mathbb{N}\mid
 ho_i\left(\mathcal{W}
 ight)
 eq0\}|\in\mathbb{N}$ עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{M}$ עביבה פתוחה $x\in X$ לכל
 - $\sum_{i\in\mathbb{N}}
 ho_i\left(x
 ight) = 1$ מתקיים $x\in X$ לכל

 $\Pi(v_1\dots v_k)=\left\{\sum_{i=1}^k t_iv_i\mid orall i\in [k]\ .t_i\in [0,1]
ight\}$ איז $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$ מקבילון: יהיו $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$ איז $v_1\dots v_k\in \mathbb{R}^n$ נפת מקבילון: יהיו

טענה: יהיו $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^k$ אזי

- $\operatorname{Vol}_k\left(\left(\begin{smallmatrix}v_1\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right),\ldots,\left(\begin{smallmatrix}v_k\\0^{n-k}\end{smallmatrix}\right)\right) = \left|\det\left(v_1\ldots v_k\right)\right| \bullet$
- $\operatorname{Vol}_k\left(Tv_1,\ldots,Tv_k
 ight)=\operatorname{Vol}_k\left(v_1,\ldots,v_k
 ight)$ אזי $T\in O\left(n
 ight)$ תהא

זניחה (\mathcal{U},φ) מתקיים כי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ זניחה ליריעה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזניחה ביחס ליריעה: תהא ביחס ליריעה: \mathbb{R}^k -ב- \mathbb{R}^k

(לכל $(\mathcal{M}_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$) איזי אזי $E \subseteq \mathcal{M}$ אזי ותהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ אטלס של אזיי איזי אזיי אזיי אזיי אזיי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ איזיים כי $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ אניחה ב־ \mathbb{R}^k .

 \mathcal{M} טענה: תהא $\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ אזי ל־ \mathcal{M} זניחות ביחס ל־ $\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathcal{M}
ight)$ זניחה ביחס ל־ $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ איי מענה: תהא

 \mathcal{M} יריעה אזי קיים אטלס בן־מנייה של $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ טענה: תהא

 $B_f=\{x\in\mathcal{M}\mid x$ אינה רציפה על $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$ יריעה ותהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אינה רציפות: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$

- .חסומה $f \bullet$
- $\operatorname{supp}\left(f\right)$ סומפקטי.
- \mathcal{M} זניחה ביחס ל־ $B_f ullet$

M עבורה 1_E אינטגרבילית רימן על יריעה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה אזי אינטגרבילית יריעה אינטגרבילית על יריעה: תהא

 $arphi\left(E
ight)$ טענה: תהא $\overline{E}\subseteq\mathcal{U}$ אזי שפה ותהא $E\subseteq\mathcal{U}$ מפה ותהא מפה ותהא מפה ותהא מדידה ז'ורדן ב־E אזי מדידה E מדידה ז'ורדן ב־E

 $\operatorname{supp}(f)\subseteq\mathcal{U}$ אבורה עבורה מפה קיימת מפה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אבורה בונקציה נוחה: תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$ עבורה \mathcal{M} נוחה.

 $u_i\in\mathbb{N}$ נוחה לכל \mathcal{U}_i נוחה אוי של $\{(\mathcal{U}_i,arphi_i)\}$ של איים אטלס בן־מנייה אוי יריעה איי יריעה אוי איי קיים אטלס בן־מנייה

מסקנה: תהא $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן אזי קיימות $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ עבורן $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ נוחות ואינטגרביליות רימן עבורן ביליות רימן איי אינטגרביליות ואינטגרביליות וא

וכן $G_i\subseteq\mathbb{R}^k$ פרמטרזיציות טובות באשר $r_i:G_i o \mathcal{M}$ וכן פרמטריזציה פרמטריזציה בעלת פרמטריזציה אינטגרבילית רימן אזי $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$ ותהא ותהא $f:\mathcal{M} o\mathbb{R}$

```
אינטגרבילית רימן f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} ותהא אG\subseteq\mathbb{R}^k באשר f:G	o\mathcal{M} באטר פרמטריזציה טובה בעלת פרמטריזציה אינטגרל: תהא
                                                                                                                                                                                         \int_{\mathcal{M}}f=\int_{G}\left(f\circ r
ight)\left(q
ight)\cdot\sqrt{\Gamma\left(\mathcal{D}_{q}\left(r
ight)^{T}\cdot\mathcal{D}_{q}\left(r
ight)
ight)}\mathrm{d}q איי
אינטגרבילית רימן f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} ותהא היא היטאר G\subseteq\mathbb{R}^k באשר רימן ברמטריזציה פרמטריזציה פרמטריזציה בעלת ביטאר אינטגרבילית הא
                                                                                                                                                                                                      \int_{\mathcal{M}} f = \int_{G} \left( f \circ r \right) \left( q \right) \cdot \sqrt{\Gamma \left( rac{\partial r}{\partial x_{1}} \dots rac{\partial r}{\partial x_{k}} 
ight)} \mathrm{d}q איי
                             R_{\mathcal{U}}=\{f:\mathcal{M}	o\mathbb{R}\mid(\mathrm{supp}\,(f)\subseteq\mathcal{U})\wedge(\mathsf{pridential}) נוחה ואינטגרבילית מפה (\mathcal{U},arphi) מפה אזי (\mathcal{U},arphi) מפה אזי (\mathcal{U},arphi) מפה אזי ליימון: תהא
                                                                                                                                                                         טענה: תהא R_{\mathcal{U}} מרחב אזי מפה (\mathcal{U}, arphi) מרחב לינארי. \mathcal{M} מרחב לינארי.
                                                                                                                 . מסקנה: תהא M יריעה ותהא (\mathcal{U}, arphi) מפה אזי הינו פונקציונל לינארי תהא מסקנה: תהא
טענה: תהא f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} נוחות ואינטגרביליות רימן ותהיינה f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} טענה: תהא f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} יריעה תהא
                                                                                                                                               \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i = \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{M}} g_i אזי f = \sum_{i=1}^m g_i וכן f = \sum_{i=1}^n f_i עבורן
עבורן נוחות ואינטגרביליות רימן פורן f_1\dots f_n:\mathcal{M}	o\mathbb{R} אינטגרלי רימן אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות אינטגרביליות רימן אינטגרבילייות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליות רימן אינטגרביליים אינטגרביליות רימן אינטגרבילי
                                                                                                                                                                                                                                  \int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{M}} f_i אז f = \sum_{i=1}^n f_i
                                                                                                                                        R\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{ f:\mathcal{M}
ightarrow\mathbb{R}\mid סימון: תהא fיריעה אזי לfינטגרבילית רימן \mathcal{M}יריעה אזי
                                                                                                                                                                                                                . טענה: תהא \mathcal{M} יריעה אזי R(\mathcal{M}) מרחב לינארי.
                                                                                                                                                       . מסקנה: תהא M יריעה אזי f_{\mathcal{M}}:R\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow\mathbb{R} יריעה אזי איריעה מסקנה: תהא
                                                                                                                                                              \int_{\mathcal{M}}f=\int_{\mathcal{M}}f\mathrm{dVol}_{k} אזי איז f\in R\left(\mathcal{M}
ight) יריעה ותהא \mathcal{M} יריעה ותהא
 \bigcup_{i=1}^\infty E_i = \mathcal{M} יריעה איי אירדן של יריעה: תהא איי אירדן אייריעה איי אייריעה איי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n מיצוי זיורדן של יריעה: תהא איי
עבורו לכל מיצוי ז'ורדן של L\in\mathbb{R} אינטגרל לא אמיתי: תהא M\subseteq\mathbb{R}^n יריעה ותהא M\subseteq\mathbb{R}^n אינטגרל לא אמיתי: תהא
                                                                                                                      \int_{\mathcal{M}}f=L אזי אוו\lim_{i	o\infty}\int_{E_i}f\cdot 1\!\!1_{E_i}=L מתקיים של אוו של (E_i)_{i=1}^\infty
                             טענה: תהא M\subseteq \mathbb{R}^n יריעה ותהא ותהא f\in R(\mathcal{M}) אזי לכל מיצוי ז'ורדן של קבוצות קומפקטיות M\subseteq \mathbb{R}^n של M
                                                                                                                                                  \int_{\mathcal{M}}f=\lim_{i	o\infty}\int_{\mathcal{M}}f\cdot\mathbb{1}_{E_i}נפח של יריעה: תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי \mathcal{M}
```

 $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=arnothing$ עבורן $(\mathcal{U},arphi)\,,(\mathcal{V},\psi)$ מפות זרות: מפות

טענה: תהיינה $f_{\upharpoonright_{\mathcal{M}\setminus(S\cup(\biguplus_{i=1}^n\mathcal{U}_i))}}=0$ מפות זרות בזוגות על איז תהא תהא איינה $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}$ אזי מפות זרות בזוגות על מפות זרות בזוגות על מענה: $\int_{\mathcal{M}} f = \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{U}_i} f$

 $\int_{\gamma}f\mathrm{dVol}_1$ אינטגרבילית אזי $f:\mathrm{Im}\,(\gamma) o\mathbb{R}$ ותהא $\gamma:[a,b] o\mathbb{R}^n$ אינטגרבילית אזי

. Length $(\gamma)=\lim_{m o\infty}\sup_{a=t_0<\ldots< t_m=b}\sum_{i=1}^m\|\gamma\left(t_i\right)-\gamma\left(t_{i-1}\right)\|$ איזי $\gamma\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$ שימון: תהא $\gamma\in C\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$

.Length $(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'\left(t\right)\|\,\mathrm{d}t$ אזי $\gamma\in C^1\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}^n\right)$ טענה: תהא

.Length $(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_1\left(\mathcal{M}\right)$ אזי אזי חד־מימדית יריעה \mathcal{M} יריעה \mathcal{M}

.Length $(\mathcal{M})=$ Length (γ) יריעה טובה אזי $\gamma:(a,b)\to\mathcal{M}$ ותהא ותהא יריעה חד־מימדית ענה: תהא \mathcal{M}

.Length $(\Gamma_f)=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'\left(t
ight)
ight)^2}\mathrm{d}t$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}$ אחי

 $\|\gamma'\|=\sqrt{r^2+r'}$ אאי $\gamma\left(t
ight)=\left(r\left(t
ight)\cos\left(heta\left(t
ight)
ight),r\left(t
ight)\sin\left(heta\left(t
ight)
ight)
ight)$ כך $\gamma:\left(a,b
ight) o\mathbb{R}^2$ אאי $\gamma:\left(a,b
ight) o\mathbb{R}^2$ מסקנה: תהיינה

.Area $(\mathcal{M})=\mathrm{Vol}_2\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי חד־מימדית יריעה יריעה \mathcal{M} יריעה \mathcal{M}

 $G\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי טענ $G:G\subseteq\mathbb{R}^2$ יריעה איריאציה וותהא אזי וותהא אזי יריעה דו־מימדית יריעה אזי יריעה אזי $M\subseteq\mathbb{R}^3$ אזי

.Area $(\mathcal{M}) = \int_{G} \left| \frac{\partial r}{\partial x_{1}} (x) \times \frac{\partial r}{\partial x_{2}} (y) \right| dx dy$

.Area $(\Gamma_f)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|
abla f\left(x,y
ight)
ight\|^{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ אאי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אהי $\det\left(I+uv^T
ight)=1+\langle u,v
angle$ אזי $u,v\in\mathbb{R}^n$ טענה: תהיינה

 $\mathrm{Vol}_k\left(\Gamma_f
ight)=\int_{\mathcal{U}}\sqrt{1+\left\|
abla f\left(x
ight)
ight\|^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}
ight)$ פתוחה ותהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ מסקנה: תהא

x בנקודה α (x) באשר $\alpha:\Gamma_f o \mathbb{R}$ ותהא ווהא $f\in C^1$ ($\mathcal{U},\mathbb{R}^{n-k}$) פתוחה תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^k$ באשר $\alpha:\Gamma_f$ $\left\| \sqrt{1+\left\|
abla f\left(x
ight)
ight\| ^{2}}=rac{1}{\cos \left(lpha \left(x
ight)
ight) }$ ציר e_{k+1} ציר

 P_1 בין P_1 ל־ P_2 אזי השטח הכלוא על \mathbb{S}^2 בין P_1 ל־ P_2 אזי הוורים מקבילים במרחק אוריים את מישורים מקבילים במרחק אוריים מקבילים מקבילים במרחק אוריים מקבילים מקבילים

 $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין $R\cdot\mathbb{S}^2$ אזי הייו $R\cdot\mathbb{S}^2$ ויהי $R\cdot\mathbb{S}^2$ בין במרחק לכדים מקבילים מסקנה: יהיו .Area $(\mathcal{M}) = 2\pi hR$

```
. Width (K)=\inf_{\{K\subset P\mid קמור P\}} (Width (P)) גוף קמור אזי גוף אווי אוי יהי K\subseteq\mathbb{R}^n יהי
משפט באנג לבעיית הקורה של טרסקי: יהיK\subseteq igcup_{i=1}^m P_i גוף קמור קומפקטי ויהיו P_1\dots P_m קורות עבורן K\subseteq igcup_i אזי
                                                                                                                                                                                                                                               .Width (K) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{Width}(P_i)
                                                                                                                                            רוחב יחסי של קורה: יהי K\subseteq\mathbb{R}^n גוף קמור קומפקטי ותהא קורה אזי
                                                                                                                                                            .Width<sub>K</sub> (P) = \inf_{m \in \mathbb{R}_+} \{ m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists a \in \mathbb{R}^n . K \subseteq m \cdot P + a \}
השערת באנג: יהי K\subseteq \bigcup_{i=1}^m Width_K(P_i) אזי אוי קורות עבורן קומפקטי ויהיו ויהיו יויהיו קומפקטי ויהיו R_1\dots P_m קורות עבורן
1 \le \sum_{i=1}^m WidthK(P_i) אזי אוי איך קמור קומפקטי עבורו אויהיו אויהיו אויהיו איזי אויר קומפקטי עבורו אזי אוי איזי אויהיו 
                                                                                               . על־משטח על־משטח אזי 
abla^{-1}(t) אזי 
abla^{-1}(t) אזי 
abla^{-1}(t) אזי 
abla^{-1}(t) על־משטח באשר 
abla^{-1}(t) אזי על־משטח
טענה: יהי p\in\mathcal{V} אזי קיים \delta>0 באשר \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) אזי קיים \delta>0 אזי קיים \varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{V},\mathbb{R}) אזי קיים לכל
.\int_{B_{\delta}(p)}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) באשר f\in R\left(V_{\delta}\left(p
ight)
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) ותהא arphi\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר
\int_{\mathcal{V}}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{d}\mathrm{Vol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t אוי u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) לכל u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight) עבורו u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) לכל u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight) עבורו u\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) לכל u,v
angle=L_{v}arphi\left(x
ight)

abla x הוא arphi בנקודה x הוא x\in\mathcal{M} ותהא ותהא arphi\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) הוא יריעה תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אזי הגרדיאנט של
\psi_{ \restriction u \cap \mathcal{M} } = arphi_{ \restriction u}  באשר \psi \in C^1 \left( \mathcal{U}, \mathbb{R} 
ight) ותהא x \in \mathcal{M} סביבה של \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n תהא \varphi \in C^1 \left( \mathcal{M}, \mathbb{R} 
ight) באשר יריעה תהא יריעה תהא

abla_x \varphi = \operatorname{Proj}_{T_x(\mathcal{M})} (\nabla_x \psi) אזי
ותהא arphi\left(\mathcal{M}
ight)=(a,b) וכן 
ablaarphi\neq0 באשר arphi\in C^{1}\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה תהא יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n} וכן משפט נוחסאת קו־שטח ביריעה: תהא
\int_{\mathcal{M}}f=\int_{a}^{b}\int_{arphi^{-1}(t)}rac{f(x)}{\|
ablaarphi(x)\|}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(x
ight)\mathrm{d}t איי איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי f\in R\left(\mathcal{M}
ight) איי supp f\in R\left(\mathcal{V}
ight) תחום תהא f\in R\left(\mathcal{V}
ight) באשר באשר g\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathbb{R}^{k}
ight) באשר \mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n} מסקנה: יהי
                                                                                                                                                                             \int_{\mathcal{V}} f = \int_{\varphi(\mathcal{V})} \int_{\varphi^{-1}(t)} \frac{f(x)}{\sqrt{\det((\mathcal{D}_x \varphi) \cdot (\mathcal{D}_x \varphi)^T)}} dVol_{n-1}(x) dt
                                                   \int_{\mathbb{S}^n} f\left(x
ight) \mathrm{dVol}_n = \int_{\mathbb{S}^n} f\left(Ax
ight) \mathrm{dVol}_n אינטגרבילית רימן ותהא f:\mathbb{S}^n 	o \mathbb{R} אזי f:\mathbb{S}^n 	o \mathbb{R}
                                                                                                                                                \operatorname{Vol}_n\left(r\cdot\mathbb{S}^n
ight)=r^n\cdot\operatorname{Vol}_n\left(\mathbb{S}^n
ight) אזי r>0 טענה: יהי r>0 אזי r>0 טענה שטח פנים של ספירה: יהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ איז n\in\mathbb{N}_+
                                                                                                                                                            .\mathrm{Vol}_n\left(B_1\left(0
ight)
ight)=rac{\pi^{rac{n}{2}}}{\Gamma\left(rac{n}{2}+1
ight)} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי סענה נפח של ספירה: יהי
                                                                                                          \mathfrak{X}^lpha\left(\mathcal{M}
ight)=\left\{v:\mathcal{M}	o\mathbb{R}^k\mid\mathcal{M} מעל C^lpha מעל v\} יריעה אזי v יריעה אזי v
                                                                                                                                                        d^{2} \cdot d^{2} = d^{2} \cdot d^{2}יטענה: תהא \mathcal{M} יריעה \mathcal{C}^{lpha} ותהא ותהא \mathcal{C}^{lpha} מפה אזי \mathcal{M}
                            (C^lpha)טענה: יהי v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M}) אזי v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M}) הינה i\in[k] ולכל מפה (\mathcal{U},arphi) ולכל מפה אזי (v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M}) אזי (v\in\mathfrak{X}(\mathcal{M})).
                                                                                                                           (C^{lpha}) הינה v:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^kיהינה v:\mathcal{M} 	o \mathbb{R}^k הינה v:\mathcal{M} 	o v הינה
\mathcal{U}\subseteq\mathcal{M} פיימת סביבה v\left(x
ight)\in T_{x}\left(\mathcal{M}
ight) עבורה עבורה v:A	o\mathbb{R}^{k} אזי A\subseteq\mathcal{M} איי קיימת סביבה C^{m} מעל תת־קבוצה: תהא
                                                                                                                                                                                                                     .u_{
estriction_{A\cap\mathcal{U}}}=v_{
estriction_{A\cap\mathcal{U}}} עבורו עבורו u\in\mathfrak{X}^{m}\left(\mathcal{U}
ight)
Mוקיימת A\subseteq \mathcal{U} פתוחה בA\subseteq \mathcal{U} מעל (A) מעל מעל C^lpha מעל v:A	o \mathbb{R}^k ותהא אזי (v:A	o \mathbb{R}^k ותהא אזי (v:A	o \mathbb{R}^k

abla 
abla arphi \in \mathfrak{X}^0\left(\mathcal{M}
ight) אזי arphi \in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight) יריעה ותהא \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n אזי \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n
                                                                                           .(סענה: יהי \mathcal{M} על־משטח קשיר אזי (\mathcal{M} בעל 0 קו־אוריינטציות) על־משטח קשיר אזי (\mathcal{M} בעל 0 אזי (\mathcal{M} בעל 1 קו־אוריינטציות)
                                    עבורו F שדה וקטורי דרך M אזי F\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) אזי אוריינטציה של M קו־אוריינטציה של M\subseteq\mathbb{R}^n אזי על־משטח תהא
```

M אזי דרך M שדות וקטוריים דרך $F_1,F_2\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight)$ ויהיו של אוריינטציה של אוריינטציה על־משטח ערהא אוריינטציה של אוריינטציה של אויהיו

עבורו $F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight)$ על־משטחים ארים עד כדי קבוצה אניחה בעלי קו־אוריינטציה אויהי על־משטחים ארים עד כדי קבוצה אניחה בעלי איינטציה $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2\subseteq\mathbb{R}^n$

 $P_{H_1,H_2}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid \max\{d\left(x,H_1
ight),d\left(x,H_2
ight)\}\leq d\left(H_1,H_2
ight)\}$ קורה: יהיו $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטחים מקבילים אזי

.Width $(P_{H_1,H_2})=d\left(H_1,H_2
ight)$ אזי על־משטחים אזי $H_1,H_2\subseteq\mathbb{R}^n$ יהיו

 $\operatorname{.Flux}_{F}\left(\mathcal{M}\right) = \int_{\mathcal{M}} \left\langle F\left(x\right), N\left(x\right) \right\rangle d\operatorname{Vol}_{n-1}\left(x\right)$

 $.Flux_{\alpha F_1 + \beta F_2}(\mathcal{M}) = \alpha Flux_{F_1}(\mathcal{M}) + \beta Flux_{F_2}(\mathcal{M})$

 $\operatorname{Flux}_F(M_1 \cup \mathcal{M}_2) = \operatorname{Flux}_F(\mathcal{M}_1) + \operatorname{Flux}_F(\mathcal{M}_2)$ אזי $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ שדה וקטורי דרך F

```
\mathrm{div}\left(F
ight)(x)=\sum_{i=1}^{n}rac{\partial F_{i}}{\partial x_{i}}\left(x
ight) אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי תהא
                 \mathrm{div}\left(F
ight)\left(x
ight)=\mathrm{trace}\left(\mathcal{D}_{x}\left(f
ight)
ight) אזי f\left(x
ight)=F\left(x
ight) כך f:\mathcal{U}
ightarrow\mathbb{R}^{n} נגדיר F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} נגדיר
                                       \operatorname{div}(A\circ F)\left(A^{-1}x
ight)=\operatorname{div}(F)\left(x
ight) איז A\in\operatorname{GL}(\mathbb{R}^n) ותהא F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יהי
                                         \operatorname{div}\left(f\cdot F
ight)=f\cdot\operatorname{div}\left(F
ight)+\left\langle 
abla f,F
ight
angle אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) ותהא F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה יהי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי לענה: תהא
                                                                                                       \Delta f=\sum_{i=1}^{n}rac{\partial^{2}f}{\partial x^{2}} אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי לפלסיאן: תהא
                                                                                                                \Delta f=\operatorname{div}\left(
abla f
ight) אזי f\in C^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}
                                              \mathrm{Cube}_\ell\left(x
ight)=\{Q\subseteq\mathbb{R}^n\mid(x\in Q)\land(\ell הוא Q הוא אזי Q קובייה Q קובייה אורך הצלע של הוא Q אזי אזי אזי אז אזי אזייה אורך הצלע של
באשר \{E_i\} פאות עם נורמל היחידה בכיוון החיצוני אזי הוערה: תהא Q\in \mathsf{Cube}_\ell(x) ויהי x\in \mathbb{R}^n אזי הערה: תהא
                                                                                                                                                                                                                                         .Q-b
                                                   \operatorname{div}\left(F
ight)\left(x
ight)=\lim_{Q\in\operatorname{Cube}_{\ell}\left(x
ight)}\frac{1}{\operatorname{Vol}_{n}\left(Q
ight)}\operatorname{Flux}_{F}\left(\partial Q
ight) אזי F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathcal{U}
ight) פתוחה ותהא \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} אזי \mathcal{U}
עבורה f\in C^1(\mathcal{W},\mathbb{R}) ועבורה \mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n סביבה של x\in\partial\mathcal{U} עבורה אזי x\in\partial\mathcal{U} פתוחה אזי x\in\partial\mathcal{U} עבורה קיימת
                                                                                                                                                     \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{f < 0\} \text{ ich } f(x) = 0 \text{ ich } \nabla_x f \neq 0
                                                                                                    \mathcal{J}^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}=\{x\in\partial\mathcal{U}\mid מקודת שפה חלקה x\} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n סימון: תהא
f\left(x
ight)=0 וכן 
abla_{x}f
eq0 המקיימת x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} וכן ותהא x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} וכן פתוחה תהא של \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n} באשר ש
                                                                                                                                                .Smooth_{\mathcal{U}}(x)=(\mathcal{W},f) אזי \mathcal{U}\cap\mathcal{W}=\{f<0\} וכן
                                   . סענה: תהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n פתוחה ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n אזי קיימת x \in \partial^{\mathrm{sm}} \mathcal{U} פתוחה ותהא \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n מענה: תהא
                                                                                                                                   \partial \mathcal{U}טענה: תהא \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} פתוחה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n פתוחה ל
                                                                                                                                                          . יריעה \partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} יריעה אזי \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה מסקנה: תהא
                                                                                                                                     \mathcal{AU}=\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} עבורה עבורה פתוחה פתוחה קבוצה חלקה:
                                       \lim_{arepsilon 	o 0} rac{1}{arepsilon} \mathrm{Vol}_n \left( \left( \partial \mathcal{U} ackslash \partial^\mathrm{sm} \mathcal{U} 
ight) + B^n_arepsilon \left( 0 
ight) 
ight) = 0 עבורה עלת שפה כמעט חלקה: קבוצה פתוחה \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n
             \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}:\mathcal{W}\cap\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n אזי איי ההאמרה עבורה עבורה x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} עבורה עבורה \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n אזי איי הא
                        קובאר לכל x\in\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U} עבורה לכל עבורה אזי N:\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}	o\mathbb{R}^n פתוחה אזי עבורה אונית קנונית לשפה חלקה: תהא
                                                                                                                                               .N_{
estriction_{\mathcal{W}\cap\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}}}=rac{
abla f}{\|
abla f\|} מתקיים Smooth_{\mathcal{U}}\left(x
ight)=\left(\mathcal{W},f\right)
                                       שטף: תהא \mathcal{U}\subseteq\mathcal{W} ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} ויהי \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} אזי פתוחה באשר \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U} ויהי שטף: עלת שפה כמעט חלקה תהא
                                                                                                                                                                                            .Flux_F(\partial \mathcal{U}) = Flux_F(\partial^{sm}\mathcal{U})
A\in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^n
ight) ותהא \mathcal{M} קו־אוריינטציה של F\in\mathfrak{X}\left(\mathbb{R}^n
ight) יהי של \mathcal{M} יהי קו־אוריינטציה על־משטח תהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n עבורו
                                                                                                                                                                            \operatorname{Flux}_{A \circ F} (A \cdot \mathcal{M}) = \operatorname{Flux}_F (\mathcal{M}) אזי
\mathrm{supp}\left(F\right)\subseteq B_{r}\left(a\right) באשר F\in\mathfrak{X}^{1}\left(\mathbb{R}^{n}\right) יההי i\in\left[n\right] לכל לכל g\in C^{1}\left(B_{r}\left(a\right),\mathbb{R}\right) תהא r>0 יהי a\in\mathbb{R}^{n} לכל מענה:
                                                                                                                                                                    .Flux_F(\partial \{g < 0\}) = \int_{\{g < 0\}} \operatorname{div}(F) איז
r>0 אזי קיים אזי פתוחה עם אזי פתוחה אזי אוי a\in\partial\mathcal{U}ackslash\partial^{	ext{sm}}\mathcal{U} תהא א0ו רכותה אוי פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה עבורה אזי פורה עם שפה כמעט חלקה עבורה אזי פורה אזי פורה מסקנה:
              \operatorname{SHux}_F(\partial\mathcal{U})=\int_\mathcal{U}\operatorname{div}(F) מתקיים supp (F)\subseteq B_r\left(a
ight) המקיים F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight) ולכל \overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W} המקיים \mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n
                                          אזי F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight) אזי \overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W} מסקנה: תהא \mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n וויהי וחלקה תהא חסומה באשר מסקנה:
                                                                                                                                                                                                 \operatorname{Flux}_F(\partial \mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} \operatorname{div}(F)
                                                                                                      למה: תהא X+B_{arepsilon}(0) אזי arepsilon>0 אזי קומפקטית ז'ורדן. X\subset\mathbb{R}^n מדידה א'ורדן.
                                                   המקיימת \psi\in C^\infty\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}
ight) קיימת לכל עבורו לכל עבורו אזי קיים אזי קיים אזי קיים אזי קיים עבורו לכל C\in\mathbb{R}
                                                                                                                                                                                                                .0 < \psi < 1 \bullet
                                                                                                                                                                                                        \psi_{\uparrow_{X+B_{\sigma}(0)}} = 1 \bullet
                                                                                                                                                                        .\psi_{\restriction_{\mathbb{R}^n\setminus(X+B_{3arepsilon}(0))}}=0 • .\Big|rac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big|\leq rac{C}{arepsilon}מתקיים i\in[n] לכל •
```

עבורו F שדה וקטורי דרך $M \subset \mathbb{R}^n$ אזי $M \subset \mathbb{R}^n$ עבורו איזי אוריינטציה $M \subset \mathbb{R}^n$ אזי

 $.Flux_F(\mathcal{M}, N) = Flux_F(\mathcal{M}, -N)$

 \mathcal{U} טענה נוסחת גאוס לנפח: תהא N וויהי N נורמל חיצוני ל־Vol $_{n-1}$ ($\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}$) $<\infty$ טענה נוסחת גאוס לנפח: עם שפה פתוחה עם שפה פתוחה עם שפה אזי N וויהי N נורמל חיצוני ל־Vol $_n$ (\mathcal{U}) $=\frac{1}{n}\int_{\partial^{\mathrm{sm}}\mathcal{U}}\langle x,N\rangle\,\mathrm{dVol}_{n-1}(x)$ אזי

 $\operatorname{Flux}_F\left(\partial\mathcal{U}
ight)=\int_{\mathcal{U}}\operatorname{div}\left(F
ight)$ אזי $F\in\mathfrak{X}^1\left(\mathcal{W}
ight)$ ויהי $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{W}$

משפט הדיברגנץ: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה עבורה $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא משפט פתוחה באשר $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$

 $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה עם שפה $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{W}$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{W}$ תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{W}$ ויהי $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{W}$ אזי ענה נוסחאות גרין: תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{W}=\mathcal{W}$ עבור תהא $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}=\mathcal{W}$ פתוחה עדענה נוסחאות גרין: תהא $\mathcal{W}=\mathcal{W}$ ותהיינה $\mathcal{W}=\mathcal{W}$ חסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{W}=\mathcal{W}$ פתוחה באשר עדיר עריב ורמל חיצוני ל

- $\int_G \Delta u = \int_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial N}$ אזי C^2 הינה u כי .1
- $\int_G \langle \nabla u, \nabla v \rangle = -\int_G u \cdot \Delta v + \int_{\partial G} u \cdot \frac{\partial v}{\partial N}$ אזי C^1 אזי C^2 הינה C^2 הינה C^2 מניח כי
 - $\int_G (u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u)=\int_{\partial G} \left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial N}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial N}
 ight)$ אזי C^2 הון u,v 3.

פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^\mathrm{sm}G\right)<\infty$ עבורה עם שפה כמעט חלקה עבורה $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה באשר . $\int_G\left\|\nabla v\right\|^2$ אזיי $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ אזיי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ אזיי

 $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^\mathrm{sm} G\right)<\infty$ מסקנה: תהא שפה כמעט חלקה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\mathcal{S}\subseteq \mathbb{R}^n$ תהא הי $\mathcal{S}\subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה עם שפה עבורה $\mathcal{S}_G \|\nabla v\|^2 = -\int_G v\cdot\Delta v + \int_{\partial G} v\cdot\frac{\partial v}{\partial N}$ אזי $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ותהא $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ אזי $v\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$

 $\Delta u=0$ המקיימת $u\in C^{2}\left(G,\mathbb{R}
ight)$ פתוחה אזי מתוחה הרמונית: תהא $G\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת

יהי $\overline{G}\subseteq \mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $\mathrm{Vol}_{n-1}\left(\partial^\mathrm{sm} G\right)<\infty$ חסומה פמעט חלקה עבורה שפה כמעט חלקה עבורה $G\subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $G\subseteq \mathbb{R}^n$ וותהא $G\subseteq \mathbb{R}^n$ וותרא $G\subseteq \mathbb{R}^n$ וותרא

- $.Flux_{\nabla u}(\partial G)=0$ •
- .Gב מקומית קבועה u אזי וויט $\left(\frac{\partial u}{\partial N}\right)_{\restriction_{\partial G}}=0$ נניח כי •
- Gנניח כי $u_{\upharpoonright \partial G}$ קבועה מקומית אזי קבועה מקומית ב-

 $f:\mathcal{J}_\mathcal{U}$ $f=rac{1}{\mathrm{Vol}(\mathcal{U})}\int_\mathcal{U} f$ אינטגרבילית רימן אזי $f:\mathcal{U} o\mathbb{R}$ תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סימון: תהא

הרמונית $u\in C^2\left(\mathcal{W},\mathbb{R}\right)$ ותהא ותהא $\overline{B_r\left(a\right)}\subseteq\mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^n$ יהי $a\in\mathbb{R}^n$ יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ותהא ותהא u (a) u (a) אזי u (a) u (a) ותהא ותהא u (a) ותהא אזי u (a) ותהא אזי u (a) ותהא ותהא u (a) ותהא ותהא u (a) ותהא ותהא u (a) ותהא ותהא u (a) ותהא u (a) ותהא ותהא u (a) ותהא ותהא u (a) ותהא (a)

 $u\left(a
ight)=\int_{B_{r}\left(a
ight)}u$ יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ הרמונית אזי $\overline{B_{r}\left(a
ight)}\subseteq\mathcal{W}$ פתוחה באשר $\mathcal{W}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ הרמונית אזי $a\in\mathbb{R}^{n}$ הרמונית אזי $a\in\mathbb{R}^{n}$ סענה: תהא $f\in C^{2}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}
ight)$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא

u אזי $\max\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$ וכן G וכן G וכן u הרמונית בי \overline{G} תחום ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי u המקטימום: יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי אזי u הבועה.

u אזי $\min\left(u\left(\overline{G}
ight)
ight)\in u\left(G
ight)$ וכן Gכן אזי הרמונית בישר $u:\overline{G} o\mathbb{R}$ תחום ותהא $G\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי המינמום: יהי המינמום: יהי החום ותהא קבועה.

. משפט ליוביל: תהא $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ הרמונית וחסומה מלרע אזי קבועה משפט ליוביל

. מסקנה: תהא $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ הרמונית וחסומה $u:\mathbb{R}^n o \mathbb{R}$ קבועה

טענה אינטגרל פואסון: יהי אוי אוי הער אוי באשר אוי באשר $u\in C^2\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}
ight)$ תהא תהא $n\geq 3$ אוי יהי אינטגרל פואסון: יהי

 $u(a) = \frac{1}{\text{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta u(x)}{|x-a|^{n-2}} dx$

מתקיים $a\in B^n_1\left(0
ight)$ משפט גרעין פואסון: תהא $u_{\lceil_{B^n_1\left(0
ight)}}$ רציפה באשר $u:\overline{B^n_1\left(0
ight)} o\mathbb{R}$ מתקיים

 $.u\left(a\right) = \tfrac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u\left(x\right) \cdot \tfrac{1-\|a\|^2}{\|x-a\|^n} \mathrm{dVol}_{n-1}$

 $u\left(x
ight)=rac{1}{\operatorname{Vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f\left(y
ight)\cdotrac{1-\|x\|^{2}}{\|y-x\|^{n}}\mathrm{dVol}_{n-1}\left(y
ight)$ הינה $u\left(x
ight)=rac{1}{B_{1}^{n}\left(0
ight)} o\mathbb{R}$ אזי $f\in C^{2}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}
ight)$ אזי $f\in C^{2}\left(\mathbb{S}^{n-1},\mathbb{R}
ight)$ הרמונית וכן f=f

 $V^* = \operatorname{\mathsf{Hom}}(V,\mathbb{R})$ אזי ממשי ממשי היהי V יהי המרחב הדואלי:

 V^* טענה: יהי V מ"ו ממשי ויהי $\{e_1\dots e_n\}$ בסיס של $\{e_1\dots e_n\}$ בסיס של

 $T_p\left(\mathcal{M}
ight)^*$ אזי $p\in\mathcal{M}$ יריעה ותהא יריעה $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא המרחב הקו־משיק:

 $T_{p}^{*}\left(\mathcal{M}
ight)=T_{p}\left(\mathcal{M}
ight)^{*}$ אזי $p\in\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}^{n}$

 $v\in T_n^*\left(\mathcal{M}
ight)$ אזי $p\in\mathcal{M}$ יריעה ותהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי תהא

 $\omega\left(x
ight)\in T_{x}^{*}\left(\mathcal{M}
ight)$ המקיימת $\omega:\mathcal{M} o\left(\mathbb{R}^{n}
ight)^{*}$ יריעה אזי $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת \mathcal{M}

 $\omega_x = \omega\left(x
ight)$ אזי $x \in \mathcal{M}$ ותהא \mathcal{M} ותהא לית על \mathcal{M} ביפרנציאלית ההא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה תהא

. טענה: יהי $\omega_{x}\left(u
ight)=\left\langle v\left(x
ight),u
ight
angle$ אזי אזי $v\in\mathfrak{X}\left(\mathcal{M}
ight)$ יהי יהי

 $(\mathrm{d}f)_x\left(v
ight)=rac{\partial f}{\partial v}\left(x
ight)$ המוגדרת $\mathrm{d}f:\mathcal{M} o\left(\mathbb{R}^n
ight)^*$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight)$ המוגדרת

. טענה: תהא $f \in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight)$ אזי לית. $f \in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}
ight)$

```
x_i=q_i\circarphi המוגדרת x_i:\mathbb{R}^n	o\mathbb{R} אזי אזי מפה על (\mathcal{U},arphi) מפה (\mathcal{U},arphi)
                                                                                \{x_1 \dots x_k\} אזי \mathcal M מפה על מפה (\mathcal U, arphi) מערכת מקומיות על יריעה: תהא
                                                                               rac{\partial f}{\partial x_i}=rac{\partial \left(f\circarphi^{-1}
ight)}{\partial q_i} אזי i\in[n] איזי f:\mathcal{U}	o\mathbb{R} תהא \mathcal{M} מפה על מפה על
                                                                            \mathbb{R}^{k}כמו ב־M כמו x_1 \dots x_k מטרת הסימונים מלעיל הינה לאפשר קואורדינטות
                                                                                    \mathcal{U}טענה: תהא (\mathcal{U}, \varphi) מפה על \mathcal{M} ויהי ויהי i \in [n] אזי זיפרנציאלית מפה (\mathcal{U}, \varphi)
                                                                                          .rac{\partial}{\partial x_i}=rac{\partial arphi^{-1}}{\partial q_i} אזי i\in[n] אויהי \mathcal M מפה על (\mathcal U,arphi) מפה על (\mathcal U,arphi) מפה על (\mathcal U,arphi) ויהי p\in\mathcal U אויהי (i\in[n] מפה על (\mathcal U,arphi) מפה על (\mathcal U,arphi) מפה על (\mathcal U,arphi) מפה על (\mathcal U,arphi) ויהי
                                                                       T_x^*\left(\mathcal{M}
ight) בסיס של \{\mathrm{d}x_1|_{x_1},\ldots,\mathrm{d}x_k|_x\} אזי x\in\mathcal{U} ויהי \mathcal{M} מפה על מפה (\mathcal{U},arphi) מפה מיל
\mathrm{d}x_1|_x=\left(rac{\partial}{\partial x_i}
ight)^* אזי x\in\mathcal{U} איהי i\in[n] מפה על \mathcal{M} יהי מפה על \mathcal{M} יהי i\in[n] ויהי \mathcal{M} ולכל f_1\dots f_k\in\mathcal{M} יהיעה אזי 1-תבנית דיפרנציאלית \mathcal{M} עבורה לכל מפה \mathcal{M} של \mathcal{M} ולכל \mathcal{M} ולכל \mathcal{M} בחרה לכל מפה יהיעה אזי 1-תבנית דיפרנציאלית יש
                                                                                                               f_1\dots f_k\in C^m\left(\mathcal{U}
ight) מתקיים \omega=\sum_{i=1}^k f_i\cdot \mathrm{d}x_i באשר \mathcal{U}	o\mathbb{R}
עבורו לכל \{(\mathcal{U}_lpha,arphi_lpha)\}_{lpha\in\Lambda} אטלס אטלס אייים אטלס איי דיפרנציאלית אזי דיפרנציאלית דיפרנציאלית יריעה ותהא \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n אבורו לכל \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n
                                                               \omega = \sum_{i=1}^k f_i \cdot \mathrm{d} x_i באשר באשר f_1 \dots f_k \in \mathcal{U}_lpha 	o \mathbb{R} ולכל lpha \in \Lambda
                                                                    \Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)=\{\omega\mid\mathcal{M} על C^\infty על דיפרנציאלית דיפרנציא אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathcal{R}^n
                                                                                \mathrm{d}f=\sum_{i=1}^{k}rac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_{i}}\cdot\mathrm{d}x_{i} אזי אמיה: תהא f\in C^{m+1}\left(\mathcal{M}
ight) מפה על \mathcal{M} אמי ותהא f\in C^{m+1}\left(\mathcal{M}
ight)
                                                                                                   C^m מסקנה: תהא f \in C^{m+1}\left(\mathcal{M}
ight) אזי אזי f \in C^{m+1}\left(\mathcal{M}
ight) מסקנה: תהא
F^*:\Omega^1\left(N
ight)	o\Omega^1\left(M
ight) איי איי F\in C^1\left(M,N
ight) יריעה ותהא אוריעה M\subseteq\mathbb{R}^m יריעה M\subseteq\mathbb{R}^m אאי (pull back) משיכה לאחור
                                                                                                                                                 .F^{*}\left(\omega,x,v\right)=\omega_{F\left(x\right)}\left(\mathcal{D}_{x}\left(F\right)\cdot v\right) המוגדרת
               .(F^*_\omega)_x(v)=F^*\left(\omega,x,v
ight) אזי איך ותהא תהא N\subseteq\mathbb{R}^n יריעה תהא יריעה עריעה ותהא אינטגרל קווי מסוג שני: תהא \gamma:[a,b]\to\mathcal{M} מסילה \gamma:[a,b]\to\mathcal{M} אינטגרל קווי מסוג שני: תהא אינטגרל קווי מסוג שני
                                                         . טענה: תהא \int_{\gamma}:\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight)
ightarrow\mathbb{R} אזי למקוטעין מסילה \gamma:[a,b]
ightarrow\mathcal{M} הינו פונקציונל לינארי
טענה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה: תהא \psi:[lpha,eta]	o [a,b] למקוטעין תהא \gamma:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה מסילה למקוטעין ענה אי־תלות בבחירת פרמטריזציה: עיי
                                                                                                                                                         .\int_{\gamma}\omega=\int_{\gamma\circ\psi}\omega אזי \omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight) ותהא
                                                                               \det\left([arphi]_{\mathrm{st}}
ight)>0 עבורה arphi\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) העתקה אוריינטציה: העתקה לינארית שומרת 
x\in\mathcal{U} אומרת אוריינטציה: תהיינה \mathcal{D}_x(f) אזי דיפאומורפיזם f:\mathcal{U}	o\mathcal{V} שומרת אוריינטרציה לכל \mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n אואי דיפאומורפיזם
O_1\dots O_k וכן x\in\mathcal{M} לכל T_x\left(\mathcal{M}
ight) בסיס של O\left(x
ight) בסיס אזי O:\mathcal{M}	o\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n
ight) יריעה אזי \mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^n יריעה \mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}
                                                                                                                                                                                                 רציפות למקוטעין.
O\left(x
ight)= המוגדרת O:\operatorname{Im}\left(\gamma
ight)	o\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי למקוטעין אזי \gamma:\left[a,b
ight]	o\mathcal{M} המוגדרת O:\operatorname{Im}\left(\gamma
ight)	o\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) מסילה
                                                                                                                                                                                                         \dot{\gamma} \left( \gamma^{-1} \left( x \right) \right)
                         \operatorname{Im}(\gamma) שענה: תהא \gamma:[a,b]	o \gamma מסילה למקוטעין אזי האוריינטציה הסטנדרטית מסילה \gamma:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה
     ar{\gamma}(t)=\gamma\left(a+b-t
ight) המוגדרת ar{\gamma}:[a,b]	o\mathcal{M} מסילה למקוטעין אזי \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} המיגדרת \gamma:[a,b]	o\mathcal{M}
טענה: תהא O\left(x
ight)=\dot{\overline{\gamma}}\left(\overline{\gamma}^{-1}\left(x
ight)
ight) המוגדרת O:\operatorname{Im}\left(\gamma
ight)	o\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{n}
ight) אזי למקוטעין אזי \gamma:\left[a,b
ight]	o\mathcal{M} המוגדרת \gamma:\left[a,b
ight]	o\mathcal{M}
                                                                                                                                                                                                              \operatorname{Im}(\gamma) של
                                                                                                     \int_{\overline{\gamma}}\omega=-\int_{\gamma}\omega אזי אזי מסילה \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} טענה: תהא
                                                                                                              \int_a^b \omega = -\int_b^a \omega אזי \omega \in \Omega^1\left([a,b]\right)ותהא a,b \in \mathbb{R} יהיו מסקנה: יהיו
(\gamma_1\cup\gamma_2)\,(t)=\gamma_1 מסילה C^1 למקוטעין אזי \gamma_2:[b,c]	o \mathcal{M} מסילה למקוטעין אזי \gamma_1:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה מסילות: תהא
\gamma_1(t) t\in [a,b] יt\in [a,b] יt\in [a,b] יt\in [a,b] אזי אזי \omega\in\Omega^1(\mathcal{M}) מסילה \gamma_1:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה \gamma_2:[b,c]	o \mathcal{M} מסילה \gamma_1:[a,b]	o \mathcal{M} מסילה אזי
\int_{\gamma_1\cup\gamma_2}\omega=\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega טענה: f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} למקוטעין ותהא f:\mathcal{M}	o\mathbb{R} בה למקוטעין סביבה של \gamma:[a,b]	o\mathcal{M} קיימת \gamma:[a,b]	o\mathcal{M}
                                                                                                                                                            \int_{\mathcal{C}} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) אזי C^1
```

 $\|\omega_x\|_{\infty}=\max\left\{\omega_x\left(v\right)\mid\left(v\in T_x\left(\mathcal{M}
ight)
ight)\wedge\left(\|v\|=1
ight)
ight\}$ אזי $x\in\mathcal{M}$ ותהא $\omega\in\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)$ ותהא $\omega\in\Omega^1\left(\mathcal{M}
ight)$

 $\int_{\gamma}\omega\leq \mathrm{Length}\left(\gamma
ight)\cdot\max_{t\in[a,b]}\left\|\omega_{\gamma(t)}
ight\|_{\infty}$ אזי $\omega\in\Omega^{1}\left(\mathcal{M}
ight)$ למקוטעין ותהא $\gamma:[a,b] o\mathcal{M}$ אזי $\gamma:[a,b]$

.d $(f\cdot g)=f\cdot \mathrm{d} g+g\cdot \mathrm{d} f$ אזי $f,g\in C^1\left(\mathcal{M},\mathbb{R}\right)$ היינה כלל לייבניץ': תהיינה $q_i\left(u\right)=u_i$ אזי $q_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אזי $i\in[n]$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ המוגדרת הטלה: יהי

אזי ניתן לחשוב על ∂G בתור איחוד סופי Vol $_{n-1}$ ($\partial^{
m sm}G$) $<\infty$ אזי ניתן לחשוב על שפה כמעט חלקה עבורה זר של מסילות סגורות.

אוריינטציה N אוריינטציית רגל שמאל: תהא א Vol $_{n-1}\left(\partial^{\mathrm{sm}}G\right)<\infty$ חלקה עם שפה כמעט חלקה עם שפה $G\subseteq\mathbb{R}^2$ תהא עבורה $O:\partial G o \mathbb{R}^2$ אזי אוריינטציה אוריינטציה עבורן וסגורות וסגורות מסילות אריינס יותהיינה אוריינטציה מסילות זרות יסגורות עבורן אוריינטציה אוריינטציה ועבורן מסילות אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אוריינטציה אוריינטציה וועבורף מסילות אוריינטציה אורינטציה אוריינטציה אורינטציה אוריינטציה אוריינטציה אורינטציה אורינטציה אורינטציה אוריינטציה אורינטציה א $x \in \partial G$ לכל $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot O(x) = -N(x)$

ינה C^1 אזי ∂G וכן $\partial G = \mathbb{R}^2$ אזי Vol $_{n-1}$ ($\partial^{\mathrm{sm}}G) < \infty$ טענה פרמטריזציה נורמלית: תהא $\|\gamma_i'(t)\|=1$ מתקיים $t\in {
m Dom}\,(\gamma_i)$ ולכל ולך לכל וכן לכל עבורן עבורן עבורן $\gamma_i=\partial G$ מיימות ירות וסגורות עבורן

משפט גרין: תהא ∂G וכן ∂G וכן $\operatorname{Vol}_{n-1}(\partial^{\operatorname{sm}} G)<\infty$ משפט גרין: תהא שפה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה $\int_{\partial G}\left(P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y
ight)=\int_{G}\left(rac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}-rac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}
ight)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ פתוחה באשר G יהי N נורמל חיצוני לG ותהיינה \mathcal{D} ותהיינה \mathcal{D} פתוחה באשר איזי עם אוריינטציית רגל שמאל. באשר ∂G

למקוטעין C^1 וכן ∂G וכן ∂G וכן ∂C^1 וכן ∂C^1 וכן אוס: תהא $G\subseteq \mathbb{R}^2$ אחסומה פתוחה עם שפה כמעט חלקה עבורה . באשר אוריינטציית עם אוריינטציית Area $(G)=\frac{1}{2}\int_{\partial G}\left(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\right)$ אזי

שונים מתקיים $i,j\in[k]$ ולכל ולכל $u_1\ldots u_k\in V$ שונים מתקיים אזי שונים מעל $T\in \mathrm{Hom}\,(V^k,\mathbb{R})$ אזי מ"ו מעל מ"ו מעל

 $T\left(inom{u_1}{\vdots}\right)=-T\left(R_{i\leftrightarrow j}\cdotinom{u_1}{\vdots}\right)$ כי $(i,j)=-T\left(R_{i\leftrightarrow j}\cdotinom{u_1}{\vdots}\right)$ הינה מטריצת החלפת שורות בין השורות $i,j\in[n]$ הערה: יהיו $i,j\in[n]$ אזי $i,j\in[n]$ הינה מטריצת $i,j\in[n]$ אנטי $i,j\in[n]$ סימון: יהי $i,j\in[n]$ אזי $i,j\in[n]$ וכן $i,j\in[n]$ אנטי סימון: יהי $i,j\in[n]$ מ"ו מעל $i,j\in[n]$ אזי $i,j\in[n]$ וכן $i,j\in[n]$ אנטי סימון: יהי $i,j\in[n]$ מ"ו מעל $i,j\in[n]$ אזי $i,j\in[n]$ וכן $i,j\in[n]$

 $\det\in igwedge^n V^*$ אזי $\dim\left(V
ight)=n$ באשר מ"נ מעל מ"נ מ"נ מעל מ"נה: יהי ע מ"נ מעל

 $\omega\left(u_1\dots u_k
ight)=0$ אזי $\omega\inigwedge^kV^*$ אזי לינארית ותהא $u_1\dots u_k\in V$ יהיו מעל $u_1\dots u_k\in V$ אזי מ"נה:

 $(arphi_1\wedge\ldots\wedgearphi_k)\,(u_1\ldots u_k)=\det\left(\left(arphi_i\,(u_j)
ight)_{i,j\in[k]}
ight)$ באשר $arphi_1\wedge\ldots\wedgearphi_k\in\bigwedge^kV^*$ אזי $arphi_1\ldotsarphi_k\in V^*$ באשר מכפלת וודג׳/מכפלת יתד: יהיו טענה: יהי V מ"ו מעל $e_{a_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{a_k}^* \mid 1 \leq a_1 < \ldots < a_k \leq n$ אזי $k \in [n]$ וויהי V וויהי $e_1 \ldots e_n$ בסיס של מ"ו מעל v

 $.igwedge^n V^* = \mathrm{span}\,\{\det\}$ אזי $\dim\,(V) = n$ אזי מסקנה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb R$ באשר באשר $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) \wedge \ldots \wedge (\psi_k) \wedge (\psi_k)$ $(\varphi_1 \dots \varphi_k, \psi_1 \dots \psi_\ell \in V^*)$ לכל ($(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k) = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k \wedge \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$