פולינום טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על a אזי $P_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{\left(k\right)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^{k}$.

שארית טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ גזירה n פעמים על a אזי $R_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)=f\left(x\right)-P_{n}\left(f,a\right)\left(x\right)$.

טור טיילור: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ חלקה על a אזי $P\left(f,a\right)\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{\left(k\right)}\left(a\right)}{k!}\left(x-a\right)^{k}$.

פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירה המקיימת $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ לכל $x\in\left(a,b\right)$ ומקיימת $F'_{+}\left(a\right)=f\left(a\right)$ וכן $F'_{-}\left(b\right)=f\left(b\right)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\int f=\left\{ F\in\mathbb{R}^{I}\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{\left(a,b\right)}$ אזי $\left(G'=f\right)\iff\left(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c\right)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int\left(f+g\right)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int\left(\alpha f\right)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int\left(\left(f\circ g\right)\cdot g'\right)$.

חלוקה: יהי $\left[a,b\right]$ אזי $\Pi=\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ המקיימות $a=x_{0}<x_{1}\ldots<x_{n-1}<x_{n}=b$.

סימון: תהא $\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\Delta x_{i}=x_{i}-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i=1}^{n}\left|\Delta x_{i}\right|$.

עידון: תהא Π_{1} חלוקה אזי חלוקה Π_{2} המקיימת $\Pi_{1}\subseteq\Pi_{2}$.

טענה: תהא Π_{1} חלוקה וכן Π_{2} עידון אזי $\lambda\left(\Pi_{2}\right)\le\lambda\left(\Pi_{1}\right)$.

נקודות מתאימות: תהא $\left\{ x_{0},\ldots,x_{n}\right\}$ חלוקה אזי $\left\{ t_{1}\ldots t_{n}\right\}$ המקיימות $\forall i\in\left\{ 1\ldots n\right\} .t_{i}\in\left[x_{i-1},x_{i}\right]$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{ t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)=\sum f\left(t_{i}\right)\Delta x_{i}$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\left\{ t_{i}\right\}$ מתקיים $\left|S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)-L\right|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_{a}^{b}f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_{a}^{b}f=\int_{\left[a,b\right]}f=\int_{\left[a,b\right]}f\left(t\right)dt=\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(\varphi\right)d\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R\left(\left[a,b\right]\right)=\left\{ f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}\mid f\text{ אינטגרבילית רימן}\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_{a}^{b}f\left(t\right)dt=\lim_{\lambda\left(\Pi\right)\to0}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\left\{ t_{i}\right\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_{a}^{b}c\cdot dt=c\left(b-a\right)$.

טענה: $D\left(x\right)\notin R\left(\mathbb{R}\right)$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{\left[x_{i},x_{i-1}\right]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{\left[x_{i},x_{i-1}\right]}\left(f\right)\cdot\Delta x_{i}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)=\sup_{\left\{ t_{i}\right\} \text{ נקודות מתאימות}}S\left(f,\Pi,\left\{ t_{i}\right\} \right)$.

- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}} S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ חסומה אזי $\int_a^b f=\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי $\omega(f,J)=\sup_{x,y\in J}(f(x)-f(y))$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה ויהי $x_0\in J$ אזי (f רציפה על x_0)$\Longleftrightarrow(\lim_{\delta\to0}\omega(f,[x_0-\delta,x_0+\delta])=0)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^J$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}(I).\omega(f,I)<\varepsilon)$.

תנודה כוללת של פונקציה חסומה ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\omega(f,[x_{i-1},x_i])\Delta x_i$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega(f,\Pi)=\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\cup\{p_1\ldots p_m\}=\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)+m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)-m\lambda(\Pi_1)\omega(f,[a,b])$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)\ge\overline{I}(f)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}(f)=\overline{I}(f)$ אזי $f\in R([a,b])$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה כך שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: $C([a,b])\subseteq R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ מונוטונית אזי $f\in R([a,b])$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $f\restriction_{[a,b]}\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,b])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה ויהי $b\in[a,c]$ עבורה $(f\in R([a,b]))\wedge(f\in R([b,c]))$ אזי $f\in R([a,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,d]}$ חסומה ויהיו $b<c\in[a,d]$ עבורה $f\in R([a,d])$ אזי $f\in R([b,c])$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([a,b])$ אזי $f\in R([a,c])$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,c]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in(a,c).f\in R([b,c])$ אזי $f\in R([a,c])$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$ אזי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\left\{ \left(a_{i},b_{i}\right)\right\} _{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_{i},b_{i}\right)$ וכן $\sum\left(b_{i}-a_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\left|A\right|\leq\aleph_{0}$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\upharpoonright_{A}}=g_{\upharpoonright_{A}}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_{i} & x\in\left\{ b_{1}\ldots b_{m}\right\} \\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_{a}^{c}f\left(x\right)dx=\int_{a}^{c}g\left(x\right)dx$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{b}\alpha f+\beta g=\alpha\int_{a}^{b}f+\beta\int_{a}^{b}g$.

משפט לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ ויהי $b\in\left(a,c\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f+\int_{b}^{c}f=\int_{a}^{c}f$.

הגדרה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=-\int_{b}^{a}f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\geq0$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\geq0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\geq\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $m\leq f\leq M$ אזי $m\left(b-a\right)\leq\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\leq M\left(b-a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_{a}^{b}f\right|\leq\int_{a}^{b}\left|f\right|\leq\sup_{\left[a,b\right]}\left(\left|f\right|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסוים: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ אזי $F\in C\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $0\leq g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(x_{0}\right)\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$.

הלמה של בונה: תהא f מונוטונית ותהא $0\leq g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_{0}\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(a\right)\int_{a}^{x_{0}}g\left(x\right)dx+f\left(b\right)\int_{x_{0}}^{b}g\left(x\right)dx$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt$ אזי $F'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ יהיו $x_{1}\ldots x_{n}\in\left[a,b\right]$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]\backslash\left\{ x_{1}\ldots x_{n}\right\}$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ אזי $\left[f\right]|_{a}^{b}=f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f'g=\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}fg'$.

הלמה של בונה: תהא $\substack{f\in C([a,b])\\ f\in C^1((a,b))}$ עבורה $(f'\geq 0)\vee(f'\leq 0)$ ותהא $g\in C([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int_a^{x_0}g(x)\,dx+f(b)\int_{x_0}^b g(x)\,dx$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}([a,b])$ אזי $R_n(f,a)(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\substack{\varphi\in[a,b]^{[\alpha,\beta]}\\ \varphi\in C^1([\alpha,\beta])}$ המקיימת $\substack{\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b}$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,dx=-\int_0^{2\pi}f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}dx$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,dx\right|\leq\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1}(k-2n)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^m\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^m\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $f\in R([a,b])$. $\forall b\in[a,\infty)$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $f\in R([a,b])$. $\forall a\in(-\infty,b]$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.(a<b)\Longrightarrow(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R([a,c])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\;\middle|\;\text{קיים וסופי }\int_I f\right\}$.

הערה: מכאן כל המשפטים יהיו חד צדדים ימינה אך תקפים לכל סוגי הקטעים עם שינויים קלים.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ויהי $c\in(a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ המקיימות $f\geq g$ אזי $\int_a^\omega f\geq\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'(x)=f(x)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F(b)-F(a)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,\omega))$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}[f\cdot g]|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $\substack{\varphi\in[a,\omega)^{[c,\eta)}\\ \varphi\in C^1([c,\eta))}$ המקיימת $\substack{\varphi(c)=a\\ \lim_{b\to\eta}\varphi(b)=\omega}$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $(f\in R([a,\omega)))\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in(a,\omega).\forall b_1,b_2\in[B,\omega).\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\leq\int_a^\omega|f|$.

טענה: תהא $0\leq f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftrightarrow(F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ חסומה על

.$[a,\omega)$)

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega).f,g\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega g<\infty\right)\implies\left(\int_a^\omega f<\infty\right)$.

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega).f,g\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f=\infty\right)\implies\left(\int_a^\omega g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty\right)\iff\left(\int_1^\infty f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta(s)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta(s)(s-1)=1$.

משפט אבל: תהא $g\in C([a,\omega))\cap R([a,\omega))$ ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg<\infty$.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C([a,\omega))$ עבורה $G(x)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$ אזי $\int_a^\omega fg<\infty$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac12}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac12}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac12}}=\sqrt{2\pi}$.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\iff\left(\forall x\in I.\lim_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $(f\in C(I))\not\Leftarrow(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C(I))$.
- אינטגרביליות רימן: $(f\in R(I))\not\Leftarrow(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I))$.
- גבול האינטגרל: נניח $\underset{\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R(I)}{f\in R(I)}$ אזי $\left(\int_I f=L\right)\not\Leftarrow\left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=L\right)\not\Longleftarrow(f'(x)=L)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\iff(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.|f_n(x)|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\wedge\left(g_n\xrightarrow{\text{u}}g\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{\text{u}}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{\text{u}}f\right)\iff(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C(I)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$ אזי $f\in C(I)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $[a,b]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C([a,b])$ עבורן $\underset{\forall n<m.f_m<f_n}{f_n\xrightarrow{\text{p.w.}}f}$ באשר $f\in C([a,b])$ אזי $f_n\xrightarrow{\text{u}}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n \in C([a,b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{\text{p.w.}} f$ באשר $f \in C([a,b])$ וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$.

טענה: תהיינה $f_n \in R([a,b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ אזי $f \in R([a,b])$.

משפט: תהיינה $f_n \in R([a,b])$ עבורן $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ אזי $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n \in R([a,\omega))$ עבורן $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi \in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n \in \mathbb{N}. |f_n| \le \Psi$ אזי $(\forall b \in [a,\omega).f \in R([a,b])) \wedge \left(\int_a^\omega f \text{ מתכנסת בהחלט}\right) \wedge \left(\int_a^\omega f = \lim_{n\to\infty} \int_a^\omega f_n\right)$.

טענה: $\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: תהיינה $f_n \in C^1([a,b])$ עבורה $f_n' \xrightarrow{\text{u}} g$ ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ וכן $f' = g$.

סימון: תהיינה $f_n \in \mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^n f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ אזי $\sum_{i=0}^\infty f_n = f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^\infty u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b \sum_{i=0}^\infty u_n = \sum_{i=0}^\infty \int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n \in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^\infty u_i\right) = \sum_{i=0}^\infty \frac{d}{dx} u_i$.

משפט M בוחן של ויירשטראס: תהיינה $u_n \in \mathbb{R}^I$ ותהא $M \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^\infty M_n < \infty$ וכן $\forall x \in \mathbb{R}.\forall n \in \mathbb{N}. |u_n(x)| \le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k a_m (b_k - b_{k+1})$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^n f_i g_i$ מתכנסת במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n, g_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^n f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n \xrightarrow{\text{u}} 0$ וכן לכל $x \in [a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^n f_i g_i$ מתכנסת במ"ש.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a \in (0,1)$ ויהי $b \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ עבורם $ab > 1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x) = \sum_{k=0}^\infty a^k \cos(b^k \pi x)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_k = \frac{\triangle_0(4^k x)}{4^k}\right) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}.\triangle_0(x+1) = \triangle_0(x)) \wedge \left(\triangle_0(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}\right)$.

טענה: $\triangle_n \xrightarrow{\text{u}} \triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי $\exists p \in \mathbb{R}[x].\max_{[a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f \in C([a,b])$ אזי קיימת $p_n \in \mathbb{R}[x]$ עבורה $p_n \xrightarrow{\text{u}} f$.

הגדרה: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f \in C([0,1])$ אזי $B_n \xrightarrow{\text{u}} f$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q \in \mathbb{R}$ ויהי $r < |q|$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|, |r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R \in [0,\infty]$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases} \text{מתכנס} & x \in (-R,R) \\ \text{מתבדר} & x \notin [-R,R] \end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R \in [0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמרד: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right)\Longrightarrow(R=\infty)\right)\wedge\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right)\Longrightarrow(R=0)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}a_{k+m}x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty}a_k<0$ אזי $\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־$-R$).

סכים לפי אבל: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\ (A)$.

התכנסות צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n\ (C)$.

סכים לפי צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\ (C)$.

סימון: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i=\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell\ (C)$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\ (C)$.

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\ (C)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell\ (A)$.

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho\ (A)$ וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R([a,b])$ אזי $u+iv\in R([a,b])$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\int_a^b(u+iv)=\int_a^b u+i\int_a^b v$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי
- $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.
- $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.
- $\int_a^b cf=c\int_a^b f$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^b f}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\frac{d}{dx}(u+iv)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\|f\|\in R([a,b])$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_{0}\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt\right)'\left(x_{0}\right)=f\left(x_{0}\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{\left[a,b\right]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f'g=\left[f\cdot g\right]|_{a}^{b}-\int_{a}^{b}fg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left\Vert \int_{a}^{b}f\right\Vert \le\int_{a}^{b}\left\Vert f\right\Vert$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R\left(\mathbb{T}\right)=\left\{ f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)\mid\forall x\in\mathbb{R}.f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)\right\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_{n}\left(t\right)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_{n}\left(t\right)\in R\left(\mathbb{T}\right)$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $\left(c_{m}\ne0\right)\vee\left(c_{-m}\ne0\right)$ אזי m.

טענה: $R\left(\mathbb{T}\right)$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$.

טענה: $\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle$ מכפלה פנימית על $R\left(\mathbb{T}\right)$.

טענה: $\left\langle e_{n},e_{m}\right\rangle =\begin{cases} 0 & n\ne m\\ 1 & n=m \end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\left\langle f,e_{m}\right\rangle$.

סימון: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(m\right)=\left\langle f,e_{m}\right\rangle$.

טענה: יהי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\left(t\right)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(k\right)=c_{k}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_{n}\left(t\right)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\left\langle f,g\right\rangle =\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)\overline{\hat{g}\left(n\right)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\left\Vert f\right\Vert ^{2}=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(m\right)=\left\langle f,e_{m}\right\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\left(S_{m}f\right)\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_{n}\left(t\right)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(-n\right)=\overline{\hat{f}\left(n\right)}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$($S_{m}f$ ממשית).

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\left|k\right|\le m$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp e_{k}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f-S_{m}f\right)\perp S_{m}f$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left\Vert f\right\Vert ^{2}=\left\Vert S_{m}f\right\Vert ^{2}+\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}\le\left\Vert f\right\Vert ^{2}$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_{2}: תהיינה $f_{n},g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(\lim_{n\to\infty}\left\Vert f_{n}-g\right\Vert =0\right)\Longleftrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}g\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_{2} איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\left\Vert g\right\Vert \le\sup\left|g\right|$.

מסקנה: תהיינה $f_{n}\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_{n}\xrightarrow{L_{2}}f\right)\Longrightarrow\left(f_{n}\xrightarrow{\text{u}}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_{n}\in\mathbb{C}\left[x\right]$ עבורה $f\xrightarrow{L_{2}}p_{n}$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup_{t\in\left[0,2\pi\right]}\left|p\left(t\right)-f\left(t\right)\right|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\left\Vert p-f\right\Vert <\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי קיימים p_{n} פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_{n}\xrightarrow{L_{2}}f$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{ c_{n}\right\} _{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\Vert f-\sum_{n=-m}^{m}c_{n}e_{n}\right\Vert ^{2}\ge\left\Vert f-S_{m}f\right\Vert ^{2}$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim_{m\to\infty}\left\Vert S_{m}f-f\right\Vert =0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורה $\left\Vert f\right\Vert ^{2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[-\pi,\pi\right)}$ המוגדרת $f\left(t\right)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\hat{f}\left(0\right)=0\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}i}{n}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2\left(-1\right)^{n+1}\sin\left(nt\right)}{n}$.
- יהי $r\in\left[0,\pi\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[-r,r\right]$.
- $S_{m}f\xrightarrow{\text{p.w.}}f$ על $\left(-\pi,\pi\right)$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[0,2\pi\right]}$ המוגדרת $f\left(t\right)=\frac{\left(\pi-t\right)^{2}}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\hat{f}\left(0\right)=\frac{\pi^{2}}{12}\right)\wedge\left(\forall n\in\mathbb{N}_{+}.\hat{f}\left(n\right)=\frac{1}{2n^{2}}\right)$.
- $S_{m}f\left(t\right)=\frac{\pi^{2}}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos\left(nt\right)}{n^{2}}$.
- $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$ על $\left[0,2\pi\right]$.

מסקנה: $\frac{\pi^{4}}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4}}$.

מסקנה: $\frac{\pi^{2}}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}}{k^{2}}$.

למה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f'}\left(n\right)=in\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}\left(f'\right)=\left(S_{m}f\right)'$.

למה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\widehat{f^{\left(k\right)}}\left(n\right)=i^{k}n^{k}\hat{f}\left(n\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{k}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{T}}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}n^{k}\hat{f}\left(n\right)=0$ אזי $f\in C^{k-2}\left(\mathbb{T}\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$.

מסקנה: תהא $f\in C^{1}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$.

טענה: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$ אזי $S_{m}f\xrightarrow{\text{u}}f$.