```
. טענה: תהיינה A,B בנות מנייה אזיB \cup A \cup B בת מנייה
                                                                       \bigcup_{i=1}^n A_i בת מנייה אזי בנות מנייה אזי בת מנייה. \bigcup_{i=1}^n A_i
טענה: תהא \langle f_n \mid n \in \mathbb{N} 
angle חדרת פונקציות באשר או בת מנייה לכל A_i סדרת פונקציות באשר או סענה:
                                                                             על לכל n\in\mathbb{N} אזי סופית או בת מנייה. f_n:\mathbb{N}	o A_n
                                                     A 	imes B = \{\langle a,b \rangle \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\} מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                        טענה: תהיינה A,B בת מנייה אזי A \times B טענה:
                                                                        . בת מנייה A_1 \times \ldots \times A_n בנות מנייה אזיA_1 \ldots A_n בת מנייה
                                                                                                            A^1=A הגדרה: תהא A קבוצה אזי
                                                                                 A^n=A	imes A^{n-1} אזי n\in\mathbb{N}_+ ויהי קבוצה A הגדרה: תהא
                                                                                                                        .טענה: \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n בת מנייה
                                                                                                            |\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A\}| = \aleph_0 מסקנה: |\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A\}|
                                                                                                                                    |\mathbb{Z}|=leph_0 :טענה
                                                                                                                                    |\mathbb{Q}|=\aleph_0 :טענה
                                                                      p\left(a
ight)=0 מספר אלגברי: מספר a\in\mathbb{C} עבורו קיים a\in\mathbb{C} מספר
                                                                 p\left(a
ight)
eq0 מתקיים p\in\mathbb{Z}\left[x
ight] עבורו לכל a\in\mathbb{C} מספר מספר מספר
                                                                                                      |\{a\in\mathbb{C}\mid A אלגברי a\}|=leph_0 משפט קנטור:
                                                                        יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי A אזי A באשר יחס סדר חלקי/חלש:
                                                                                                      x \preccurlyeq x אזי x \in A יהי •
                                                                  x \preccurlyeq z אזי y \preccurlyeq z וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y,z \in A אזי יהיו x \preccurlyeq y
                                                         x=y אזי y \preccurlyeq x וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y \in A אזי יהיו חלשה: x = y אנטי סימטריות חלשה:
                                                                                יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי A^2 אזי A באשר יחס סדר חזק: תהא
                                                                                           \neg \left( x \prec x \right) אזי אזי יהי יהי פלקסיביות: •
                                                                  x\prec z אזי y\prec z וכן x\prec y עבורם x,y,z\in A אזי יהיו
                                                                  \neg (y \prec x) אזי x \prec y עבורם x,y \in A יהיו חזקה: \bullet
                                   (x\preccurlyeq y)\lor(y\preccurlyeq x) מתקיים x,y\in A אבורו לכל (A,\preccurlyeq) עבורו סדר חלקי יחס סדר אווי האקיים מדר קווי
                               (x \prec y) \lor (y \prec x) \lor (x = y) מתקיים x, y \in A עבורו לכל (x, x) עבור חזק יחס סדר חזק יחס עבורו לכל
                                                                                                             טענה: \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle יחס סדר קווי חלקי.
                                                                                        . יחס סדר חלקי \langle \mathcal{P}\left(A\right),\subseteq \rangle יחס סדר חלקי ענה: תהא
(aRb) \Longleftrightarrow (f(a)Sf(b)) מתקיים a,b \in A מתקיים (A,R), \langle B,S \rangle מדרים אזי (A,R), \langle B,S \rangle מתקיים
                                    . סדרים הפיכה \pi:A 	o B הפימת \langle A,R \rangle, עבורם סדרים הפיכה שומרת הפיכה \pi:A 	o B
                                                                     \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle איזומורפיים איזו סדרים \langle A,R \rangle , \langle B,S \rangle סדרים איזומורפיים איזו
```

 $|X| \leq |Y|$ חח"ע אזי f: X o Y הגדרה: תהיינה X, Y קבוצות ותהא $Y \mapsto f: X \to Y$ חח"ע ועל אזי |X| = |Y| הגדרה: תהיינה $X, Y \mapsto X$

|X|<|Y| אזי אזי $|X|\neq |Y|$ וכן $|X|\leq |Y|$ אזי קבוצות עבורן אזי |X|<|Y|

 $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$ המקיים $n\in\mathbb{N}$ עבורה עבורה עבורה חופית:

 $.|A| = |\{0,\dots,n-1\}|$ המקיים $n \in \mathbb{N}$ קיים לא עבורה עבוצה קבוצה אינסופית:

טענה: תהא B סופית או בת מנייה תהא f:A o B ותהא קבוצה ותהא מנייה מנייה מנייה מנייה

|X|=|Y| אאי $|Y|\leq |X|$ וכן $|X|\leq |Y|$ אאי און |X|=|Y| איי ואין און איי וואר אוווי אווי און אווי וואר אי וואר אווי וואר אווי וואר אי וואר אווי וואר אי וואר אי וואר אווי וואר איי וואר אי וואר

 $|X| \neq |Y|$ אזי $\neg (|X| = |Y|)$ איזי קבוצות עבורן תהיינה X,Y איזי

טענה: תהא B בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אינסופית אזי B בת מנייה. מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אזי B סופית או בת מנייה.

X העוצמה של |X| העוצמה של

 $|X|=leph_0$ קבוצה X עבורה מנייה: קבוצה בת מנייה

 $|\{0,\ldots,n-1\}|=n$ אזי $n\in\mathbb{N}$ סימון: יהי

סימון: $|\mathbb{N}|=0$ %.

```
(aRb) \lor (a=b) מתקיים b \in A מתקיים a \in A עבורו קיים a \in A עבורו קיים a \in A מתקיים סדר קווי
                                                                      \min(A) = a אזי a \in A איבר ראשון בעל איבר קווי בעל אדר קווי אזי \langle A, R \rangle יהי
        . טענה: יהי \langle B,S \rangle אזי \langle B,S \rangle אזי איבר ראשון ויהי \langle B,S \rangle סדר קווי באשר סענה: יהי \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle סדר איבר ראשון ויהי
       (aRb) \lor (a=b) מתקיים a \in A מתקיים b \in A מתקיים סדר קווי \langle A,R \rangle עבורו קיים a \in A באשר לכל
                                                                     \max(A) = a אזי a \in A אזיבר אחרון בעל איבר סדר קווי בעל איבר אחרון יהי
        . טענה: אזי \langle B,S \rangle אזי אזי איבר אחרון ויהי יבעל איבר אחרון איבר אחרון ויהי יהי אחרון אזי סענה: יהי אחרון איבר אחרון ויהי
                         zRy וכן xRz עבורו z\in A קיים xRy המקיימים xRy המקיימים עבורו z\in A עבורו וכן אינור z\in A
                                      טענה: יהי \langle A,R
angle\simeq \langle B,S
angle סדר קווי באשר \langle B,S
angle אזי \langle B,S
angle צפוף.
                                                                    טענה: \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
                                                                                                                         \mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}} \not\simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle מסקנה:
      \langle A, \preccurlyeq 
angle \simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} 
angle אזי |A| = leph_0 משפט קנטור: יהי \langle A, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר
       \langle A, \prec 
angle \simeq \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} 
angle אזי משפט קנטור: יהי \langle A, \prec 
angle סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר משפט קנטור: משפט קנטור:
                            (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים X \subseteq A אזי X \subseteq A מדר קווי ותהא A \subseteq A
                                                   \overline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי X \subseteq A סדר קווי ותהא סימון: יהי
                                                                   \overline{B}_X 
eq \emptyset עבורה X \subseteq A אזי אזי X \subseteq A סדר קווי אזי יהי
                            (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים מלרע: יהי אזי X \subseteq A אזי אזי תהא X \subseteq A מחסם מלרע: יהי
                                                    \underline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי ותהא סדר קווי יהי לא סדר קווי ותהא סדר אזי אזי לימון: יהי
                                                                    \underline{B}_X 
eq \emptyset עבורה X \subseteq A אזי אזי X \subseteq A סדר קווי אזי יהי יהי מלרע: יהי
                                                           . סדר חסם מלרע חסם מלרע חסם מלרע אזי איזי X\subseteq A סדר קווי אזי \langle A,R \rangle יהי
                                                                      \operatorname{sup}(X) = \min\left(\overline{B}_X\right) אזי X \subseteq A אדר קווי ותהא A, R סדר קווי ותהא
                                                                       \inf\left(X
ight)=\max\left(\underline{B}_X
ight) אזי אזי X\subseteq A סדר קווי ותהא אור \langle A,R
angle יהי יהי
                                                    \operatorname{sup}\left(X
ight) אינים סדר קווי אלם: סדר קווי \left\langle A,R
ight
angle עבורו לכל
                             (\sup(X),\inf(X),\inf(X)) סדר קווי אזי איי שלם)(A,R) סדר שלם) סטענה: יהי
            המקיים \langle L,\sqsubseteq \rangle סדר הוון אזי סדר ללא איבר האשון וללא איבר אווי חלקי: יהי הי\langle P,\preccurlyeq \rangle סדר הווי חלקי איבר השלמה של יחס סדר קווי חלקי: יהי
                                                                                                                                            .P \subseteq L \bullet
                                                                                             (x \preccurlyeq y) \Longleftrightarrow (x \sqsubseteq y) מתקיים x, y \in P לכל
                                                                              . סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון. \langle L, \Box \rangle
                                                                                                                         \langle L, \sqsubseteq \rangle צפוף ב־ \langle P, \preccurlyeq \rangle \bullet
משפט יחידות השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר סדר קווי חלקי צפוף איבר ראשון ולא איבר אחרון ותהיינה משפט יחידות השלמה:
                                                                                    p \in P לכל \pi\left(p\right) = p עבורו \pi:L 	o L^* לכל
                      משפט קיום השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.
                                                    באשר \langle A,B \rangle אזי אזי A,B \subseteq P ויהיו חלקי ויהיו סדר קווי אזי אזי \langle P,\preccurlyeq \rangle באשר מתך דדקינד: יהי
                                                                                                                                      A \cap B = \emptyset •
                                                                                                                                      A \cup B = P \bullet
                                                                                                     a \preccurlyeq b מתקיים b \in B ולכל •
                                                                                                                       ללא איבר אחרון. \langle A, \preccurlyeq \rangle
```

 $[p] = \langle (-\infty,p)\,,[p,\infty)
angle$ אזי $p\in P$ ויהי חלקי חלקי סדר קווי חלקי אזי $\langle P,\preccurlyeq \rangle$ יהי

.Ded $(P)=\{\langle A,B\rangle \mid$ חתך דדקינד $\langle A,B\rangle \}$ סדר קווי חלקי אזי מימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq \rangle$

 $\langle A,B
angle \preccurlyeq \langle C,D
angle$ אזי $A\subseteq C$ חתכי דדקינג באשר $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$ וויהיו חלקי ויהיו איזי $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$ חתכי מהגדרה: יהי

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p \in P$ אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ חתך דדקינד.

 $.\langle\{[p]\mid p\in P\}\,,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$ טענה: יהי יהי יהי סדר קווי חלקי אזי יהי ענה: יהי יהי ערה פחתכי בהתאמה מעל בתור שיכון של $P,\preccurlyeq\rangle$ בחתכי הדדקינד שלה.

טענה: יהי $\langle \mathrm{Ded}\,(P)\,,\preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי סענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי סענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle \mathrm{Ded}\,(P)\,, \preccurlyeq \rangle$

```
\mathcal{C}=igcap_{i=0}^\infty C_i אזי n\in\mathbb{N} לכל C_{n+1}=\left(rac{1}{3}C_n
ight)\cup\left(rac{2}{3}+rac{1}{3}C_n
ight) ונגדיר ונגדיר C_0=[0,1] לכל
                                                                                                                            .(\mathcal{C},<_{\mathbb{R}})\simeq\left(^{\mathbb{N}}\left\{ 0,1
ight\} ,<_{\mathsf{lex}}
ight) טענה:
|A\cup B|=|C\cup D| אזי און |B|=|D| וכן |A|=|C| אינה ענה. תהיינה |A\cup B|=|C\cup D| אזי אזי ותהיינה לבוצות ארות אזי ותהיינה
                                                                                     |A|+|B|=|A\cup B| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות זרות אזי
                                                                                                              |A \times \{0\}| = |A| טענה: תהא A קבוצה אזי
                                                            |A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}| הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי
                                      |A \times B| = |C \times D| אזי |B| = |D| וכן |A| = |C| אזי |A, B, C, D| טענה: תהיינה
                                                                                        |A|\cdot |B| = |A	imes B| הגדרה כפל: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                             |A|=\kappa עבורה עבורה קבוצה אם קיימת עוצמה א היא עוצמה הערה: נאמר כי היא אוצמה אם היא
                                                                                                                    \kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa טענה: תהא א עוצמה אזי \kappa
                                                                                   \kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu טענה: תהיינה \kappa, \lambda, \mu עוצמות אזי
                                                                                        A = \{f \mid f: B \to A\} הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי
                                                |BA|=|DC| אזי אזי |B|=|D| וכן |A|=|C| אזי אזי |A,B,C,D| טענה: תהיינה
                                                                                                      |A|^{|B|}=|^BA| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                                                                                  |\mathbb{R}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                                        \kappa \cdot \kappa = \kappa^2 טענה: תהא א עוצמה אזי
                          (\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu}) וכן (\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)} וכן \kappa^{(\lambda + \mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} עוצמות אזי \kappa, \lambda, \mu וכן \kappa, \lambda, \mu
                                                                                              .\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0 וכן אור איז n\in\mathbb{N} איז איז n\in\mathbb{N} יהי
                                                                                              \aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0 טענה: יהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ וכן וכן
                                                                                                                              \aleph_0^n=leph_0 אזי n\in\mathbb{N}_+ טענה: יהי
                                                       2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+\aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                          2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot \aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי n\in\mathbb{N}_+
                                                                                        (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן (2^{\aleph_0})^n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי יהי
                                                                                                  \mathfrak{K}_0^{leph_0}=2^{leph_0} וכן n^{leph_0}=2^{leph_0} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי יהי
                                                                                                                                         (2^{\aleph_0})^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0} :טענה
                                          |\mathbb{N}\mathbb{N}|=2^{\aleph_0} וכן |\mathbb{N}\to\mathbb{R}|=2^{\aleph_0} וכן וכן |\mathbb{C}|=2^{\aleph_0} וכן |\mathbb{R}^n|=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי n\in\mathbb{N}_+
                                          |B \backslash A| = 2^{\aleph_0} אזי |A| \leq \aleph_0 באשר A \subseteq B ותהא ותהא |B| = 2^{\aleph_0} אזי באשר B
                                                                                                       |\{a\in\mathbb{C}\mid מסקנה: a\}|=2^{leph_0} מספר טרנסצנדנטי
                                                                                                                  |\{a\in\mathbb{R}\mid aמסקנה: |\{a\in\mathbb{R}\mid a\}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                     |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R})\wedge (f)\}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R})\wedge (f)\}|=2^{leph_0} מסקנה: |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R}) + (f)\}|=2^{leph_0}
                                                                                                            |\{A\mid (A\subseteq\mathbb{R})\land (פתוחה|A|\}|=2^{leph_0} טענה:
                                            יחס סדר טוב: סדר קווי \langle W, \prec 
angle עבורו לכל A 
eq \varnothing באשר איבר קטן ביותר. עבורו לכל
```

f:A o B עבורו קיימת $\langle B,\sqsubset
angle$ עבור איבר אחרון וללא איבר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון

 $\langle P, \preccurlyeq
angle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}
angle$ משפט: יהי $\langle P, \preccurlyeq
angle$ סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי

 $\langle {
m Ded}\,(P)\,,\preccurlyeq \rangle$ טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי פופה אזי $\langle P,\preccurlyeq \rangle$ טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle {
m Ded}\,(P)\,, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי

 $(\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}})$ מספרים ממשיים: $(\mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}})$ הינה ההשלמה של

 $|\mathcal{P}\left(X
ight)|=\left|^X2
ight|$ אזי קבוצה א קבוצה איזי אינה: תהא $|X|<|\mathcal{P}\left(X
ight)|$ משפט קנטור: תהא $|X|<|\mathcal{P}\left(X
ight)|$

 $\mathcal{P}\left(X\right)=\left\{Y\mid Y\subseteq X\right\}$ אזי קבוצה החזקה: תהא קבוצה אזי תהא Xקבוצה החזקה: סימון: תהא אזי Xקבוצה אזי X

שומרת סדר.

 $|\mathbb{R}|
eq \aleph_0$ טענה:

 $|\mathbb{R}|=|\mathbb{N}2|$:טענה

```
W[a] = \{b \in W \mid b \prec a\} אזי a \in W יחס סדר טוב ויהי \langle W, \prec \rangle יחי יחס סדר טוב ויהי
                                                                        Wבישה ב־W רישה ב־W יחס סדר טוב ויהי ויהי A \in W יחס סדר טוב ויהי
                                               S=W\left[x
ight] אזי קיים x\in W טענה: יהי X\in W יחס סדר טוב ותהא ותהא S רישה ב־
                     (x \prec f(x)) \lor (x \prec f(x)) \lor (x \prec f(x)) אומרת סדר אזי (x \prec f(x)) \lor (x \prec f(x)) \lor (x \prec f(x)) לכל
                                                                               W \not\simeq W \left[ a 
ight] אזי a \in W יחס סדר טוב ויהי \langle W, \prec 
angle אזי מסקנה: יהי
                                                              f=\mathrm{Id} איזומורפיזם אזי f:W	o W יחס סדר טוב ויהי יהי איזימורפיזם אזי
                                          f=g איזומורפיזמים אזי f,g:W	o A ויהיו סדר טובים אזי \langle W, \prec 
angle, \langle A, 
angle מסקנה: יהיו
                                                 משפט ההשוואה: יהיו מהבאים מתקיים סדר טובים אזי משפט ההשוואה: יהיו \langle W, \prec 
angle \, , \langle A, \sqsubset 
angle יחסי סדר טובים אזי
                                                                                                                               .\langle W, \prec \rangle \simeq \langle A, \Box \rangle \bullet
                                                                                                \langle W[w], \prec \rangle \simeq \langle A, \Box \rangle עבורו w \in W •
                                                                                                   \langle W, \prec \rangle \simeq \langle A[a], \sqsubseteq \rangle עבורו a \in A סיים •
                                                              y \in X מתקיים y \in A ולכל A \in X עבורה עבורה לכל קבוצה ארנזיטיבית:
                                                                                      סדר טוב. \langle X, \in 
angle יחס סדר טוב. \langle X, \in 
angle
                                                                                                               טענה: יהי \alpha \cup \{\alpha\} סודר אזי \alpha \cup \{\alpha\}
                                                                                                                         \alpha \notin \alpha טענה: יהי \alpha סודר אזי טענה:
                                                                                                         . סודר x אזי אזי x \in \alpha סודר ויהי \alpha סודר מענה: יהי
                                                                                                 \alpha \notin \beta אזי \beta \in \alpha טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים באשר
                                                                                                \alpha \in \beta אזי \alpha \subseteq \beta טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים באשר
                                                                   טענה משפט ההשוואה: יהיו lpha,eta סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים
                                                                                                                                             \alpha = \beta \bullet
                                                                                                                                             .\alpha \in \beta \bullet
                                                                                                                                              .\beta \in \alpha \bullet
                                                                                  . סענה: \min{(S)} אזי סודרים אל ריקה לא ריקה לא קבוצה S קבוצה לא יים.
                                                                                                                          \mathcal{O}_n = \{ \alpha \mid סודר \alpha \} הגדרה:
                                                                                                                                        \mathcal{O}_n = \mathrm{Ord} : סימון
                                                                                                      טענה פרדוקס גוראלי־פורטי: מינה קבוצה. טענה
                                                               (\alpha \cup \{\alpha\} \in \beta) \lor (\alpha \cup \{\alpha\} = \beta) אזי \alpha \in \beta סודרים באשר \alpha, \beta אזי יהיו
                                                                                                          \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} סודר אזי \alpha סודר מימון: יהי
                                                         eta \in \alpha טענה: תהא eta \in S מתקיים אזי קיים סודר אזי קיים מודרים אזי קבוצת סודרים אזי קיים סודר
                                            \langle lpha, \in 
angle \simeq \langle W, \prec 
angle עבורו מיפוס סדר טוב. יהי יהי יהי יהי טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי
                                                                     \langle W, \prec 
angleיחס משפט: יהי \langle W, \prec 
angleיחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל־
                                                  \operatorname{cotp}\left(\langle W, \prec 
angle
ight) = lpha אזי אזי אזי סודר טיפוס מודר טיפוס מדר טוב ויהי \langle W, \prec 
angle אזי מימון: יהי
אזי לכל קבוצה P אזי לכל קבוצה Y אזי לכל קבוצה X קיימת קבוצה לכל קבוצה אקסיומת ההחלפה: תהא P אזי לכל קבוצה אקסיומת החלפה:
                                                                           באשר לכל P\left(a,b
ight) קיים b\in B קיים a\in A זוהי אינה טענה B
                           קבוצה. אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי \{a \in A \mid P\left(a\right)\} קבוצה. אוהי אינה טענה
משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר \alpha מתקיים משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P מוסחה באשר לכל סודר מתקיים
                                                                                                                                                      .P(\gamma)
                                                                             lpha=eta+1 סודר עוקב: סודר eta עבורו קיים סודר עוקב סודר lpha
                                                                              משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת
```

.טענה: $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ סדר טוב

 $.S \neq W \bullet$

טענה: יהי $\langle \mathbb{N}_{\leq n}, <_{\mathbb{N}_{\leq n}}
angle$ אזי $n \in \mathbb{N}$ סדר טוב.

 $b \in S$ אזי $b \prec a$ אם $b \in W$ ולכל $a \in S$

רישה של יחס סדר טוב: יהי $\langle W, \prec
angle$ יחס סדר טוב אזי $S \subseteq W$ רישה של יחס סדר טוב:

```
P(\emptyset) • לכל סוז • לכל סוז • לכל סוד י לכל סודר Sנה: תהא Sמון: הסודר
```

 $.P\left(lpha
ight) \Longrightarrow P\left(lpha +1
ight)$ מתקיים מהל סודר לכל סודר lpha

 $(\forall \beta \in \alpha.P(\beta)) \Longrightarrow (P(\alpha))$ מתקיים α מתקיים •

 $.P\left(\gamma\right)$ אזי לכל סודר γ מתקיים

אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה S באשר באשר אוכן לכל $x+1\in S$ מתקיים $x+1\in S$ אוהי אינה טענה

. טענה: תהא $\delta \notin S$ אזי א הסודר הראשון באשר $\delta \in S$ טענה: תהא א קבוצה באשר אזי לכל לכל מתקיים מתקיים אזי $x+1 \in S$ מתקיים

 ω סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו הסודר הגבולי

 $0 = \emptyset$. סימון:

 $\mathbb{N}=\omega$:הגדרה

 $n \in \mathbb{N}$ לכל $n+1=n \cup \{n\}$ הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה

lpha < eta אזי $lpha \in eta$ אזי מון: יהיו lpha, eta סודרים באשר

הגדרה חיבור: יהי lpha סודר אזי

 $.\alpha + 0 = \alpha \bullet$

 $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ יהי β סודר אזי •

 $. \alpha + \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$ יהי β סודר גבולי אזי •

 $.(lpha+eta)+\gamma=lpha+(eta+\gamma)$ אזי סענה: יהיו $lpha,eta,\gamma$ סודרים אזי

 $.\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ אזי $\alpha < \beta$ באשר סודרים α,β,γ יהיו יהיו טענה: יהיו

 $.\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$ אזי $\alpha<\beta$ באשר סודרים מחדרים α,β,γ יהיו טענה: יהיו

 $.\alpha+\gamma=\beta$ עבורו סודר חיים אזי קיים אזי מאט באשר מודרים α,β יהיו טענה: יהיו מענה

 $\omega + 1 > \omega$ וכן $1 + \omega = \omega$ וכן $0 + \omega = \omega$

הגדרה כפל: יהי α סודר אזי

 $.\alpha \cdot 0 = 0 \bullet$

 $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$ יהי β סודר אזי •

 $.\alpha\cdot\beta = \bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha\cdot\gamma\right)$ אזי אזי סודר גבולי יהי •

 $.\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$ אזי $\gamma \neq 0$ וכן $\alpha < \beta$ סודרים באשר α, β, γ אזי יהיו

 $.\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ אזי $\alpha < \beta$ שטענה: סטענה: α,β,γ יהיו יהיו מענה: יהיו

 $lpha\left(b+\gamma
ight)=lpha\cdoteta+lpha\cdot\gamma$ סענה: יהיו $lpha,eta,\gamma$ סודרים אזי

 $\omega\cdot 2=\omega+\omega$ וכן $2\cdot\omega=\omega$ וכן $1\cdot\omega=\omega$ וכן $0\cdot\omega=0$

 $\omega+\omega>\omega+n$ אזי $n<\omega$

. טענה: יהי α סודר אזי $\alpha+\omega$ סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי lpha סודר אזי

 $.\alpha^0 = 1 \bullet$

 $.lpha^{eta+1}=lpha^eta\cdotlpha$ יהי eta סודר אזי יהי eta

 $.lpha^eta = igcup_{\gamma < eta} (lpha^\gamma)$ יהי eta סודר גבולי אזי •

 $.\gamma^{\alpha}<\gamma^{\beta}$ אזי $1<\gamma$ וכן $\alpha<\beta$ ובשר באשר סודרים α,β,γ יהיו יהיו יהיו

 $\alpha^{\gamma} \leq \beta^{\gamma}$ אזי $\alpha < \beta$ טענה: יהיו α, β, γ סטענה: יהיו α, β, γ סודרים אזי α, β, γ סטענה: יהיו α, β, γ

 $\alpha^{-1}\alpha^{-1}=\alpha^{-1}$ and α,β,γ and α,β,γ

 $.\left(lpha^{eta}
ight)^{\gamma}=lpha^{eta\cdot\gamma}$ אזי מענה: יהיו $lpha,eta,\gamma$ סודרים אזי

 $\omega^2>2^\omega$ וכן $\omega^2=\omega\cdot\omega$ וכן $\omega^1=\omega$ וכן $\omega^2=\omega$ וכן $\omega^0=\omega$ וכן $\omega^0=\omega$

 $\omega^{lpha} \geq lpha$ טענה: יהי lpha סודר אזי

טענה צורת קנטור נורמלית: יהי $\beta_i>\beta_j$ סדר אזי קיים ויחידים $\beta_1\dots\beta_k$ קיימים ויחידים אזי קיים ויחיד סיים ויחיד סיים ויחידים אויחידים $k<\omega$ סיים ויחידים אזי קיים ויחידים $\alpha=\sum_{i=1}^k\omega^{\beta_i}\cdot n_i$ עבורם עבורם ויחידים $\alpha=\sum_{i=1}^k\omega^{\beta_i}\cdot n_i$

 $.\xi<\alpha$ וכן $\beta=\alpha\cdot\delta+\xi$ עבורם ξ,δ סודרים ויחידים אזי קיימים וכן $\alpha<\beta$ וכן באשר באשר סודרים α,β יהיו יהיו טענה:

|eta|<|lpha| מתקיים eta<lpha עבורו לכל lpha

 $\aleph_0 = \omega$:סימון

```
טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים בני מנייה אזי \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^{\beta} סודרים בני מנייה.
                                                                                        . טענה: קיים סודר \alpha המקיים \omega < \alpha המקיים \alpha אינו בן מנייה
                                                                                                     .\delta < \kappa טענה: יהי \delta סודר אזי קיים מונה א באשר
                                                                                   lpha < lpha^+ סודר אזי lpha^+ הינו המונה הראשון עבורו lpha^+ סימון: יהי
                                                                                                                 \aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha}^+ אזי \alpha סודר אזי מיהי אוי הגדרה א: יהי
                                                                                                    \aleph_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_{\beta} אזי גבולי סודר מודר \alpha יהי : איז הגדרה
                                                                                                                          טענה: יהי \alpha סודר אזי \alpha מונה.
                                                                                          \kappa=\aleph_{lpha} עבורו סיענה: יהי מונה אזי קיים ויחיד סודר מונה א
                                                                                                                         \omega_{\alpha}=\aleph_{\alpha} סודר אזי סודר מימון: יהי סימון:
                                                                              |\delta|=leph_lpha אזי אוי|\delta|=|lpha_lpha| אזי אינסופיים באשר אינסופיים סימון: יהיו
הערה: כאשר מבצעים פעולות בין מונים הכוונה היא לפי ההגדרה של עוצמות, כאשר מבצעים פעולות בין סודרים הכוונה היא לפי
                                                                                                                                         ההגדרה של סודרים.
הגדרה: יהי \alpha סודר אזי יחס סדר \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \rangle באשר לכל \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \rangle באשר לכל הגדרה: יהי \alpha סודר אזי יחס סדר אי
                                                                                                                                                          מתקיים
                                                                                                                         \max(\beta, \gamma) < \max(\delta, \kappa) \bullet
                                                                                                            .\beta < \delta וכן \max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa) •
                                                                                             .\gamma < \kappa וכן \beta = \delta וכן \max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa)
                                                                                                 טענה: יהי \alpha סודר אזי \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}, \lhd \rangle יחס סדר טוב.
                                                                                                   .otp (\langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}, \lhd \rangle) = \aleph_{\alpha} משפט: יהי \alpha סודר אזי משפט:
                                                                                                                 \aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\alpha}=\aleph_{\alpha} מסקנה: יהי \alpha סודר אזי מסקנה:
                                                                                                                    משפט: יהיו \kappa,\lambda מונים אינסופיים אזי
                                                                                                                               .\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\} \bullet
                                                                                                                                 .\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\} \bullet
                                                                                                                              מסקנה: יהיו lpha,eta סודרים אזי
                                                                                                                            \aleph_{\alpha} + \aleph_{\beta} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \bullet
                                                                                                                              \aleph_{\alpha} \cdot \aleph_{\beta} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \bullet
                                f\left(X
ight)\in X מתקיים X\in S מתקיים f:S	o A מוק באשר S פונקציית בחירה: תהא
                             אקסיומת הבחירה (AC): תהא S קבוצה באשר קבוצה באיר אינה טענה S אווי אינה אינה טענה אקסיומת הבחירה (AC).
                                                               g:\mathbb{N}	o A אזי (קיימת f:A	o\mathbb{N} חח"ע) אזי (קיימת f:A	o\mathbb{N} אזי (קיימת מענה: תהא
         A משפט הסדר הטוב/משפט צרמלו: תהא A קבוצה עבורה קיימת פונקציית בחירה על
                                                         הגדרה משפט הסדר הטוב: תהא A קבוצה אזי קיים סדר טוב על A. זוהי אינה טענה
                                                                                                                    משפט: (AC)\Longleftrightarrow(AC)
                                                          AC טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד סודר lpha עבורו A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד
                                                                               אינה טענה ,AC דורש .2^{\aleph_0}=leph_1:(CH) השערת הרצף הפרטית
                                                     אינה טענה ,AC אורי אינה אינה אינה מודר אזי (GCH): יהי lpha סודר איזי יהי אינה אינה מערת הרצף הכללית
                                                                                                                             .ZFC בלתי תלויה ב־CH
                                                                                                                           .ZFC בלתי תלויה ב־GCH
                                                                                                                               הערה: AC בלתי תלויה ב־ZF.
                                                                         AC טענה: תהא B\subseteq A בת מנייה. דורש אזי קיימת אורט קבוצה אינסופית אזי קיימת
  AC טענה: תהא (A_n\mid n\in\mathbb{N}) סופית או בת מנייה. דורש או בת מנייה לכל A_i סופית או בת מנייה. דורש
          (b \leq a) \Longrightarrow (b=a) מתקיים b \in A באשר לכל a \in A עבורו קיים a \in A עבורו קיים עבור מינימלי: סדר חלקי סדר חלקי עבורו קיים
           a\in A מתקיים (b\leq a) מתקיים a\in A באשר לכל b\in A עבורו קיים b\in A עבורו קיים איבר מקסימלי: סדר קווי בעל איבר מקסימלי:
הגדרה הלמה של צורן: יהי \langle P, \leq 
angle יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת A \subseteq P קיים חסם מלעיל אזי קיים ב־P יחס סדר טוב עבורו
                                                                                                                         (AC) \Longleftrightarrow (AC)משפט:
```

```
n<\omega לכל x_n\in X באשר x_n\mid m<\omega באשר אזי קיימת מעל אין לכל x_n\in X באשר אקסיומת הבחירה התלויה
                                                                                                           עבורה n<\omega לכל לכל x_nRx_{n+1} אינה טענה
                                                                                   (DC) \Longrightarrow (AC_{\omega}) וכן (AC) \Longrightarrow (AC_{\omega}) \Longrightarrow (AC_{\omega})
         \prod_{i\in I}X_i=\left\{f\mid \left(f:I	o igcup_{i\in I}X_i
ight)\wedge (orall i\in I(f(i)\in X))
ight\} קבוצות אזי \left(X_i\mid i\in I
ight) קבוצה ותהיינה קבוצה אזי קבוצות אזי
                          AC טענה: תהא \alpha \in I אזי \alpha \in I אזי X_{lpha} 
eq \alpha קבוצות באשר קבוצה X_i \mid i \in I אזי X_i \mid i \in I סענה: תהא
                                  .(AC)\Longleftarrow(\prod_{i\in I}X_i
eq\varnothing אזי \alpha\in I אזי \alpha\in I סענה: (לכל קבוצה X_i\mid i\in I) טענה:
                                                                             (AC) \longleftarrow (|A| \geq |B| או |A| \leq |B| מתקיים A,B מתקיים
                                                                        AC טענה: יהי \mathbb F שדה ויהי \langle V,+,\cdot 
angle מ"ו מעל \mathbb F אזי קיים בסיס ל
A_i = |B_i| אזי ארות באשר אויר אוינה אוי ותהיינה אוי ארות ותהיינה לA_i = |B_i| לכל לכל אוי ההא לכל וותהיינה לA_i = |B_i| לכל לכל אוי
                                                                                                                           AC דורש .\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|=\left|\bigcup_{i\in I}B_i\right|
AC דורש .\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|
                   |A_i|=|B_i| סטענה: תהא I קבוצות ההיינה |A_i|=|B_i| קבוצות ותהיינה |A_i|=|B_i| לכל לכל וואזי
                                                                                                                          AC דורש .\left|\prod_{i\in I}A_i\right|=\left|\prod_{i\in I}B_i\right|
             מנים: תהא |A_i|=\kappa_i לכל |A_i|=\kappa_i מונים ותהיינה אזיי אויינה |A_i|=\kappa_i קבוצות באשר אזיי אויינה |A_i|=\kappa_i איי
                                                                                                                             AC דורש .\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \prod_{i \in I} A_i \right|
                                                                                        .AC הערה: מכאן והלאה לא ייסומן כאשר הטענות יסתמכו על
                                                                        \sum_{i<\lambda}\kappa=\kappa\cdot\lambda אזי \kappa\geq 1 מונה אינסופי ויהי \kappa מונה באשר מונה אזי מונה \lambda
                 \sum_{i<\lambda} \kappa_i = \sup\left\{\kappa_i \mid i<\lambda
ight\}\cdot \lambda אזי i<\lambda לכל \kappa_i\geq 1 מונים באשר אינסופי ויהיו (היי ויהיו \{\kappa_i \mid i<\lambda\} מונים באשר
                                                                                                                                     \sum_{1 \leq n < \aleph_0} n = \aleph_0 טענה:
                                                                                                                                    \prod_{1\leq n<\aleph_0} n=2^{\aleph_0} טענה:
  \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i אזי i\in I לכל הבאשר אינים באשר \langle \lambda_i \mid i\in I 
angle מונים ויהיו משפט \langle \kappa_i \mid i\in I 
angle משפט קניג: תהא
וכן i<\delta לכל lpha>lpha_i המקיימת סודר היה אוי הסודר המינימלי \delta עבורו קיימת סדרה עולה \langle lpha_i \mid i<\delta \rangle המקיימת סודר גבולי אזי הסודר המינימלי
                                                                                                                                                     .\alpha = \bigcup_{i < \delta} \alpha_i
                                                                                              \operatorname{cof}(\alpha) הינה \alpha סודר גבולי אזי הסופיות של סודר גבולי סודר גבולי
                                                                                           \operatorname{cof}(\aleph_{\omega}) = \omega וכן \operatorname{cof}(\omega + \omega) = \omega וכן \operatorname{cof}(\omega) = \omega
                                                                                                          .lpha=\cos{(lpha)} סודר סדיר: סודר גבולי lpha המקיים
                                                                                                          lpha 
eq \cot(lpha) סודר חריג: סודר גבולי lpha המקיים
                                                                                                                 מונה. \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                                         טענה: יהי \kappa מונה אזי \kappa סודר גבולי.
                                                                                                    \operatorname{cof}(\operatorname{cof}(\alpha)) = \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                          . מונה סדיר מונה \operatorname{cof}\left(\alpha\right) אזי מונה סדיר סדיר מונה מיהי יהי
.(\kappa = \sum_{i < \lambda} \kappa_i עבורם i < \lambda לכל לכל \kappa_i < \kappa מונה אזי (\kappa_i < \kappa חריג) לקיים סודר i < \kappa וקיימים מונים (\kappa_i < \kappa באשר i < \kappa באשר א
                                                                                                             AC טענה: יהי lpha סודר אזי lpha_{lpha+1} סדיר. דורש
                                                                                                         \operatorname{cof}(\aleph_{\alpha}) = \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                                                          \operatorname{cof}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0 :טענה
                                                                                                                       \aleph_{\alpha} יהי אזי גבולי: יהי \alpha סודר גבולי
                                                                                                                       .מונה עוקב: יהי lpha סודר עוקב אזי
```

אסיומת הבחירה הבת־מנייה ((AC_ω) : תהא S קבוצה בת־מנייה באשר g אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S. אוהי אינה טענה

מסקנה: יהי \aleph_{α} מונה עוקב אזי מונה סדיר.

 $\mathbb{J}(\kappa)=\kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$ איז מונה איז היי κ מונה מונה מינה κ טענה: יהי κ מונה עוקב איז מונה טענה: יהי

 $.2^{<\kappa}=\sup\left\{2^{\lambda}\mid ($ מונה $\lambda)\wedge(\lambda<\kappa)
ight\}$ יהי מונה מונה מונה אזי

```
A \cap B \in F אזי A, B \in F תהיינה
                                                                                                                            B\in F אזי A\subseteq B באשר B\subseteq X ותהא A\in F תהא
                                                      X\backslash Y\in F אזי מסנן Y\in F מתקיים Y\subseteq X עבורו לכל אזי מסנן F\subseteq \mathcal{P}\left( X
ight) אזי מסנן אזי מסנן
                                                 AC טענה: תהא G\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) באשר F\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) אזי קיים על־מסנן איי קיים על־מסנן ויהי
         F=\{Y\subseteq X\mid A\subseteq Y\} המקיימת A
eq\varnothing באשר A
eq\varnothing באשר A
eq\varnothing עבורו קיימת איי מסנן A
eq\varnothing עבורו קיימת אוא מסנן ראשי: תהא
                                                    .F=\{Y\subseteq X\mid a\in Y\} עבורו a\in X מסגן ראשי אזי קיים F\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) טענה: תהא א
                                                               AC אינסופית אזי קיימת F\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) באשר באשר לא ראשי. דורש
                                                                                                                                   \aleph_{\alpha}=\alpha טענה: יהי 	au סודר אזי קיים סודר lpha עבורו 	au
                                                                                                       . מונה אי נשיג חלש: יהי lpha סודר אזי מונה lpha באשר מונה גבולי וסדיר מונה אי נשיג חלש: יהי
                                       .((GCH) מתקיים (\aleph_{\alpha}) אי נשיג חלש) מתקיים (\alpha אי נשיג חזק) (אי נשיג חזק)).
                                                                                                            V_{\omega}=igcup_{n\in\mathbb{N}}V_n וכן n\in\mathbb{N} לכל לכל V_{n+1}=\mathcal{P}\left(V_{n}
ight) וכן V_{0}=\varnothing :הגדרה
                                                                                                                                         A \in V_\omega באשר A באשר קבוצה קבוצה סופית באופן תורשתי:
                                                                                   . טענה: תהא V_{\omega} קבוצה טרנזיטיבית הסופיות האופן עורשתי אזי עולה: תהא קבוצה סרנזיטיבית.
                                                                      x\in V_\omega טענה: תהא x\subseteq V_\omega סופית אזי באופן תורשתי ותהא x\subseteq V_\omega סופית אזי
                                                                                                                               טענה: תהא קבוצת הקבוצות הסופיות באופן עורשתי אזי V_{\omega} טענה:
                                                                                                          "אקסיומת האינסוף. לא מקיימת את אזי x\in V_\omega אזי אזי x\in V_\omega תהא
                                                                                                       "אקסיומת הזיווג את אקסיומת הזיווג \{x,y\}\in V_\omega אזיx,y\in V_\omega מקיימת \bullet
                                                                                                "מקיימת את אקסיומת קבוצת החזקה. \mathcal{P}\left(x
ight)\in V_{\omega} אזי x\in V_{\omega} תהא x\in V_{\omega}
                                                                      "מקיימת את אקסיומת ההחלפה. Im (f) \in V_\omega אזי f: x 	o V_\omega ותהא x \in V_\omega תהא x \in V_\omega
                                           V=igcup_{lpha\in\mathcal{O}_{-}}V_{lpha} וכן V_{eta}=igcup_{\gamma<eta}V_{\gamma} אזי אזי \gamma סודר אזי וכן יהי וכן יהי וכן יהי \gamma סודר אזי \gamma
                                                                                                                                                                            מסקנה: V מודל של תורת הקבוצות.
                                                                                                                                                                     \operatorname{cof}(2^{\aleph_{\alpha}}) > \aleph_{\alpha} טענה: יהי \alpha סודר אזי
                                                                                                                                          \operatorname{cof}(\kappa^{\aleph_{\alpha}}) > \aleph_{\alpha} מסקנה: יהי \alpha מונה ויהי \alpha סודר אזי
                                                                                                                                        \mathfrak{L}^{\aleph_{eta}}_{lpha}=2^{\aleph_{eta}} אזי lpha<eta סענה: יהיו lpha,eta סודרים באשר
                                                                                                |\{X\subseteq\aleph_lpha\mid |X|=\aleph_eta\}|=\aleph_lpha^{\aleph_eta} אזי eta\leqlpha סענה: יהיו lpha,eta סודרים באשר
                                                                        .(\aleph_{lpha}^{\aleph_{eta}}=\aleph_{lpha} סיענה: (GCH) אוכן eta<lpha סודרים באשר סודרים (GCH) טענה:
                                                                     (\mathrm{GCH}) מסקנה: א\beta<\mathrm{cof}\left(\aleph_{lpha}
ight) סודרים באשר מסקנה: של לכל (GCH) מסקנה:
                                                                      .(אָ^{\aleph_{eta}}_{lpha}=\left\{egin{array}{ll} \aleph_{eta}^{+1} & \stackrel{eta\geqlpha}{\beta<lpha} \end{array} 
ight.מסקנה: (GCH) מסקנה: מסקנה אוריים באשר (^{\aleph_{eta}}_{lpha} סודרים באשר
                                                                                   (\aleph_{\alpha}^{\kappa_{\alpha}})^{\beta<\alpha} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1} & \beta\geq\alpha \\ \aleph_{\alpha+1} & (\beta<\alpha)\wedge(\aleph_{\beta}<\cos(\aleph_{\alpha})) \end{cases}מסקנה: (GCH) (GCH) מסקנה: (GCH) (GCH) מסקנה: מסקנה: (שנה נוסחאת האוסדורף: יהיו (\alpha,\beta) סודרים אזי (\alpha,\beta)
                                                 A\subseteq \delta המקיים \delta<\kappa עבורה קיים A\subseteq \kappa אזי קבוצה אין אזי באשר איז מונה סדיר באשר א מונה סדיר באשר
לכל lpha_i < lpha_j באשר אזי באשר לכל ולכל דכר לכל עבורה לכל אזי קבוצה אזי קבוצה אזי קבוצה אזי אזי קבוצה אזי אזי קבוצה אזי קבוצה אזי לכל אזי לכל אזי קבוצה או היינוני היינונ
                                                                                                                                                                                        \bigcup_{i < \tau} \alpha_i \in C מתקיים i < j
            קבוצה סגורה ולא חסומה (סל"ח): יהי \kappa מונה סדיר באשר אי קבוצה \kappa איי קבוצה סגורה וכן \kappa אינה חסומה. \kappa
                                                                              . סל"ח. סענה: יהי C_0 \cap C_1 מונה סדיר באשר א0 < \kappa ותהיינה אונה סדיר באשר יהי מונה מונה מונה טייר באשר
            . סל"ח אזי i<\lambda סל"ח לכל היי מונה סדיר באשר C_i\subseteq \kappa ותהא אותה א ותהא \lambda<\kappa יהי א0<\kappa יהי מונה סדיר באשר יהי מונה סדיר באשר
                f(lpha)=igcup_{eta<lpha}f(eta) גבולי מתקיים lpha<\kappa אוי f:\kappa	o\kappa אוי איlpha<\kappa עבורה לכל lpha<\kappa גבולי מתקיים
                                                                                . רציפה שומרת סדיר האיז f:\kappa \to \kappa אזי א\kappa_0 < \kappa מונה סדיר מונה מונה האיז הורמלית: יהי
                .(C=\mathrm{Im}\,(f) נורמלית באשר f:\kappa	o\kappa מונה סדיר באשר \kappa0 אזי מול מל"ח) אזי מונה \kappa1 אזי מונה מדיר באשר אותהא מונה מדיר באשר
                                S \cap C 
eq \emptyset מתקיים C \subseteq \kappa מתנה סדיר באשר איי קבוצה איי קבוצה איי קבוצה איי מונה סדיר באשר איי קבוצה איי קבוצה איי קבוצה איי קבוצה איי
```

 $.2^{\aleph_lpha}=$ בורו \aleph_lpha מונה גבולי וכן לכל eta<lpha ולכל מונה $\lambda<\kappa$ קיים $\lambda<\kappa$ עבורו \aleph_lpha מונה גבולי וכן לכל eta<lpha

מסנן: תהא $F \subseteq \mathcal{P}\left(X\right)$ אזי קבוצה אזי קבוצה מסנן: תהא

 $X \in F$ וכן $\varnothing \notin F$

טענה: יהי Y מונה סדיר באשר א $0<\kappa$ ותהא אוי $Y\subseteq \kappa$ ותהא טענה: יהי מונה סדיר באשר

 $|S|=\kappa$ אזי שבת איזי א ותהא אS ותהא אונה סדיר באשר איזי מסקנה: יהי מונה סדיר באשר

. שבת. $X\subseteq X$ אזי א מונה סדיר באשר א מונה $C\subseteq K$ עבורה קיים סל"ח איזי א עבורה אזי א שבת. אזי א מונה סדיר באשר א מונה סדיר א עבורה איזי א עבורה אזי א מונה סדיר באשר א מונה סדיר באשר א עבורה איזי א שבת.

. שבת $X\cap C$ שבת אזי $C\subseteq \kappa$ שבת ויהי א שבת $X\subseteq \kappa$ שבת אזי אזי אזי אזי אינה סענה: יהי מונה סדיר באשר

. שבת S_δ יהי אזי מונה מדיר ויהי אויה אויה אויהי אויהי באשר מונה סדיר מונה מונה $\delta<\kappa$

 $.S_{\delta_1}\cap S_{\delta_2}=arnothing$ איי $\delta_1
eq \delta_2$ מונים סדירים באשר איי $\delta_1<\kappa$ ויהיו א $1<\kappa$ ויהי איי מונה סדיר באשר

 $C \not\subseteq S$ מתקיים מסקנה: יהי לכל איזי מונה סדיר באשר אזי קיימת איזי קיימת אזי קיימת אזי מונה סדיר באשר מסקנה: יהי

טענה שובך היונים: יהי α מונה סדיר יהי $\alpha<\mu<$ סודר ותהיינה $\{A_{\alpha}\mid \alpha<\mu\}$ קבוצות זרות באשר היהי מונה סדיר יהי $\alpha<\kappa$ סודר ותהיינה $\alpha<\mu<$ סודר ותהיינה $\alpha<\mu<$ עבורר $\alpha<\mu<$

 $.\kappa=\left|f^{-1}\left[\{lpha^\star\}
ight]
ight|$ עבורו עבה $lpha^\star<\mu$ אזי קיים סודר $lpha^\star<\mu$ סודר ותהא $\mu<\kappa$ סודר $\mu<\kappa$ אזי קיים סודר איז מונה סדיר באשר $lpha^\star=\bigcup_{lpha<\mu}A_lpha$ אוי קיים סודר $lpha^\star=\lambda$ עבורו $lpha^\star=\lambda$ עבורו $lpha^\star=\lambda$ עבורו $lpha^\star=\lambda$ עבורו $lpha^\star=\lambda$

מסקנה: יהי α מונה סדיר באשר אור א $\alpha< \kappa$ שבת יהי $\alpha< \kappa$ שבת יהי א סודר ותהיינה אונה סדיר באשר אור איז $\alpha^*< \kappa$ שבת יהי א $\alpha^*< \kappa$ עבורו $\alpha^*< \kappa$ עבורו איז קיים סודר $\alpha^*< \kappa$ עבורו אור שבת.

עבורו $\alpha^*<\mu$ אזי קיים סודר $f:S o\mu$ אחדר ותהא שבת יהי $\mu<\kappa$ שבת יהי $S\subseteq\kappa$ תהא $\aleph_0<\kappa$ אזי קיים סודר אזי מסקנה: יהי $\alpha^*=\alpha^*=\alpha^*=\alpha^*$ עבורו f^{-1} [$\{\alpha^*\}$]

 κ שבת אזי $S^*\subseteq S$ שבת אזי חודר ותהא $\mu<\kappa$ סודר יהי שבת אבת אזי κ עבורה אזי היימת אונה סדיר באשר אזי κ עבורה אזי κ שבת יהי κ שבת אזי שבת היי κ שבת ב־ κ

f(lpha)<lpha מתקיים $lpha\in S$ מתקיים לכל $f:S o\kappa$ אזי אזי וחסת: יהי lpha מתקיים

אזי $\alpha<\kappa$ לכל $C_lpha\subseteq\kappa$ אזי קבוצות באשר לכסוני: יהי מונה סדיר ותהיינה $\alpha<\kappa$ אזי מונה סדיר ותהיינה

 $.\Delta_{\alpha < \kappa} C_{\alpha} = \{ \beta < \kappa \mid \forall \alpha < \beta \, (\beta \in C_{\alpha}) \}$

 $.\Delta_{lpha<\kappa}\left(\kappaackslashlpha
ight)=\kappa$ מסקנה: יהי מונה סדיר אזי

 $.\kappa$ משפט: יהי α מונה סדיר באשר א $\Delta_{\alpha<\kappa}C_{lpha}$ איזי סל"חים ב־ $\alpha<\kappa$ סל"ח ב־משפט: יהי מונה סדיר באשר

מסנן נורמלי: יהי $\alpha<\kappa$ מחנה סדיר באשר $A_{lpha}\in F$ אזי מסנן לכל לכל עבורו לכל $F\subseteq\mathcal{P}\left(\kappa\right)$ אזי מסנן אזי מסנן אזי מסנן מרמלי: יהי $A_{lpha}\in F$ מתקיים $A_{lpha}\in F$ מתקיים $A_{lpha}\in F$

 $.\kappa \setminus lpha \in F$ מחקיים $lpha < \kappa$ עבורו לכל א $F \subseteq \mathcal{P}\left(\kappa
ight)$ אזי מסנן אזי מונה סדיר באשר מטנן אזי מסנן אזי מסנן

שבת ב־S שבת אזי קיימת S שבת שבת אזי קיימת $S \subseteq \kappa$ שבת תהא אוי קיימת אזי קיימת אזי קיימת אזי עבורה $S \subseteq \kappa$ שבת ב־ $S \subseteq \kappa$ שבת ב- $S \subseteq \kappa$

 $S=igcup_{lpha<leph_1}S_lpha$ עבורן $lpha<lpha_1$ לכל $lpha<lpha_1$ לכל $lpha<lpha_1$ שבת אזי קיימות קבוצות זרות ארות $S\subseteqlpha$ שבת אזי מונה סדיר באשר lpha<lpha ותהא $lpha\subseteqlpha$ שבת עבורה לכל $lpha\in S$ מתקיים lpha=lpha אזי קיימות קבוצות זרות lpha=lpha=lpha שבת ב־lpha לכל lpha<lpha עבורן lpha=lpha=lpha=lpha באשר lpha=lpha שבת ב־lpha לכל lpha<lpha<lpha עבורן lpha=lpha=lpha=lpha=lpha=lpha

lpha מסקנה: יהי lpha מונה סדיר מחלנה $lpha \in S$ שבת עבורה לכל $lpha \in S$ מתקיים $lpha < \kappa$ מונה סדיר ותהא $lpha \in S$ שבת עבורה לכל $lpha < \kappa$ מונה סדיר באשר $lpha < \kappa$ שבת ב־lpha לכל $lpha < \kappa$ עבורן $lpha < \kappa$ עבורן $lpha < \kappa$ באשר $lpha < \kappa$ באשר $lpha < \kappa$ שבת ב־lpha לכל $lpha < \kappa$ עבורן $lpha < \kappa$

אזי קיימות קבוצות ארות $\alpha\in S$ מתקיים $\alpha\in S$ שבת עבורה לכל $S\subseteq \kappa$ ותהא ותהא $\aleph_0<\kappa$ מסקנה: יהי α מונה סדיר באשר אוי מימות עבורה $S=\bigcup_{\alpha<\kappa}S_\alpha$ עבורן $\alpha<\kappa$ שבת ב- α לכל $\alpha<\kappa$ באשר $\alpha<\kappa$