פונקציונל ליניארי: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f\in\text{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$.

המרחב הדואלי: $V^{*}=\text{Hom}\left(V,\mathbb{F}\right)$.

טענה: V נ"ס $\Longleftarrow V^{*}\cong V$.

שחלוף/העתקה הדואלית: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ אזי $T^{t}:U^{*}\to V^{*}$ המוגדרת $T^{t}=\lambda\varphi\in U^{*}.\varphi\circ T$.

הטלה: $\Pi_{i}\left(x\right)=x_{i}$.

סימון: יהי C בסיס של V אזי $\Phi_{i}=\Pi_{i}\circ Q_{C}$.

הבסיס הדואלי: יהי C בסיס של V אזי $C^{*}=\left(\Phi_{i}\right)_{i=1}^{\dim(V)}$ בסיס של V^{*}.

טענה: יהי C בסיס של V אזי $\forall f\in V^{*}.f=\sum_{i=1}^{\dim(V)}f\left(C_{i}\right)\Phi_{i}$.

שורה של העתקה: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ אזי $R_{i}\left(T\right)=\Phi_{i}\circ T$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}\left(T\right)=\text{span}\left(\left(R_{i}\left(T\right)\right)_{i=1}^{\dim(U)}\right)$.

טענה: $\ker\left(T\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\ker\left(R_{i}\left(T\right)\right)$.

מסקנה: $\ker\left(T\right)=\bigcap_{f\in\mathcal{R}(T)}\ker\left(f\right)$.

מרחב האפסים: תהא $S\subseteq V^{*}$ אזי $S_{0}=\bigcap_{f\in S}\ker\left(f\right)$.

טענה: יהי V מ"ו ותהנא $S,T\subseteq V$

- S_{0} תמ"ו של V.
- $S\subseteq T\Longrightarrow T_{0}\subseteq S_{0}$.
- $\left(\bigcup_{\alpha}S_{\alpha}\right)_{0}=\bigcap_{\alpha}\left(S_{\alpha}\right)_{0}$.
- $S_{0}=\left(\text{span}\left(S\right)\right)_{0}$.
- $\left(\{0\}\right)_{0}=V$.
- $\left(V^{*}\right)_{0}=\{0\}$.

המרחב המאפס: תהא $A\subseteq V$ אזי $A^{0}=\{\varphi\in V^{*}\mid\varphi_{\restriction_{A}}=0\}$.

טענה: יהי V מ"ו ותהנא $A,B\subseteq V$.

- A^{0} תמ"ו של V^{*}.
- $A\subseteq B\Longrightarrow B^{0}\subseteq A^{0}$.
- $\left(\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}\right)^{0}=\bigcap_{\alpha}\left(A_{\alpha}\right)^{0}$.
- $A^{0}=\left(\text{span}\left(A\right)\right)^{0}$.
- $\left(\{0\}\right)^{0}=V^{*}$.
- $\left(V^{*}\right)^{0}=\{0\}$.

טענה: יהי V מ"ו נ"ס

- יהי $U\subseteq V$ תמ"ו אזי $\left(U^{0}\right)_{0}=U$.
- יהי $W\subseteq V^{*}$ תמ"ו אזי $\left(W_{0}\right)^{0}=W$.

משפט: $\dim\left(M\right)+\dim\left(M^{0}\right)=\dim\left(V\right)$.

משפט: $\dim\left(W\right)+\dim\left(W_{0}\right)=\dim\left(V^{*}\right)$.

משפט: יהי B בסיס של V^{*} אזי קיים בסיס C של V המקיים $B=C^{*}$.

מסקנה: U נ"ס $\Longleftarrow\mathcal{R}\left(T\right)=\left(\ker\left(T\right)\right)^{0}$.

מסקנה: $\dim\left(\mathcal{R}\left(T\right)\right)=\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)=\text{rank}\left(T\right)$.

המרחב הדואלי השני: $\left(V^{*}\right)^{*}$.

פונקציונל ההצבה/האיזומורפיזם הקנוני: $\lambda v\in V.\lambda\psi\in V^{*}.\psi\left(v\right)$.

משפט: פונקציונל ההצבה לינארי וחח"ע.

דמיון מטריצות: $\forall A,B\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right).A\sim B\Longleftrightarrow\exists P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right).A=PBP^{-1}$.

מטריצה לכסינה: $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ המקיימת $\exists\lambda\in\mathbb{F}^{n}.\exists P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right).A\sim\text{Diag}\left(\lambda\right)$.

מטריצה מלכסנת: $P\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ עבורה $P\cdot\text{Diag}\left(\lambda\right)\cdot P^{-1}=A$.

העתקה לכסינה: $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת כי קיים בסיס B עבורו $\left[T\right]_{B}$ אלכסונית.

בסיס מלכסן: בסיס B עבורו $\left[T\right]_{B}$ אלכסונית.

הערה: T לכסינה $\Longleftrightarrow$ לכל בסיס C מתקיים כי $\left[T\right]_{C}$ לכסינה.

וקטור עצמי (ו"ע): תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ אזי $0\neq v\in V$ המקיים $\exists\lambda\in\mathbb{F}.T\left(v\right)=\lambda v$.

ערך עצמי (ע"ע): תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ אזי $\lambda\in\mathbb{F}$ המקיים $\exists v\in V.T\left(v\right)=\lambda v$.

משפט: T לכסינה $\Longleftrightarrow$ קיים בסיס B של וקטורים עצמיים.

המרחב העצמי (מ"ע): יהי λ ע"ע של T אזי $V_{\lambda}=\left\{ v\in V\mid T\left(v\right)=\lambda v\right\}$.

טענה: V_{λ} תמ"ו של V, $V_{0}=\ker\left(T\right)$.

מסקנה: T הפיכה $\Longleftrightarrow$ $V_{0}=\left\{ 0\right\}$ $\Longleftrightarrow$ 0 אינו ע"ע של T.

טענה: $V_{\lambda}=\ker\left(\lambda\cdot Id_{V}-T\right)$.

מסקנה: λ ע"ע של A $\Longleftrightarrow$ $\left|\lambda I-A\right|=0$.

הפולינום האופייני (פ"א): תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $f_{A}\left(x\right)=\left|xI-A\right|$.

מסקנה: λ ע"ע של A $\Longleftrightarrow$ $f_{A}\left(\lambda\right)=0$.

הגדרה: יהי B בסיס של V אזי $f_{T}\left(x\right)=f_{\left[T\right]_{B}}\left(x\right)$.

טענה: $A\sim B\Longrightarrow f_{A}\left(x\right)=f_{B}\left(x\right)$.

פולינום מתוקן: $\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$ המקיים $a_{n}=1$.

טענה: יהי R תחום שלמות תהא $A\in M_{n}\left(R\right)$ ונניח כי $f_{A}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$

- $f_{A}\left(x\right)\in R\left[x\right]$ פולינום מתוקן.
- $\deg\left(f_{A}\left(x\right)\right)=n$.
- $a_{0}=\left(-1\right)^{n}\left|A\right|$, $a_{n-1}=-\text{trace}\left(A\right)$.

טענה: תהא $\sigma\in S_{n}$ אזי $\deg\left(\prod_{i=1}^{n}\left(xI-A\right)_{i,\sigma\left(i\right)}\right)=\sum_{i=1}^{n}\deg\left(\left(xI-A\right)_{i,\sigma\left(i\right)}\right)$.

טענה: $\deg\left(f_{A}\left(x\right)\right)\leq\max_{\sigma\in S_{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\deg\left(\left(xI-A\right)_{i,\sigma\left(i\right)}\right)\right)$.

מסקנה: לכל $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ יש לכל היותר n ע"ע.

הריבוי הגאומטרי: יהי λ ע"ע אזי $\rho_{\lambda}=\dim\left(V_{\lambda}\right)$.

טענה: יהיו $\lambda_{1}\neq\lambda_{2}$ ע"ע אזי $V_{\lambda_{1}}\cap V_{\lambda_{2}}=\left\{ 0\right\}$.

משפט: יהיו $\lambda_{1},\ldots,\lambda_{k}$ ע"ע אזי $\bigoplus_{i=1}^{k}V_{\lambda_{i}}$.

מסקנה: יהיו $B_{i}\subseteq V_{\lambda_{i}}$ בת"ל לכל $i\in\left[k\right]$ אזי $B_{1}\frown B_{2}\frown\ldots\frown B_{k}$ בת"ל.

מסקנה: A לכסינה $\Longleftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{k}\rho_{\lambda_{i}}=n$.

מסקנה: $\exists\lambda_{1}\neq\ldots\neq\lambda_{n}.f_{A}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x-\lambda_{i}\right)\Longleftarrow$ A לכסינה.

טענה: A לכסינה $\Longleftarrow$ $\exists\lambda\in\mathbb{F}^{n}.f_{A}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x-\lambda_{i}\right)$.

הריבוי האלגברי: יהי λ ע"ע אזי $\mu_{\lambda}=\max_{n\in\mathbb{N}}\left(\left(x-\lambda\right)^{n}\mid f_{A}\left(x\right)\right)$.

משפט: לכל λ ע"ע מתקיים $\rho_{\lambda}\leq\mu_{\lambda}$.

משפט: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי (A לכסינה) $\Longleftrightarrow$ ($f_{A}\left(x\right)$ פריק לגורמים לינארים)$\wedge$(לכל λ ע"ע מתקיים $\rho_{\lambda}=\mu_{\lambda}$).

מסקנה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית ותהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי (A לכסינה) $\Longleftrightarrow$ (לכל λ ע"ע מתקיים $\rho_{\lambda}=\mu_{\lambda}$).

העתקה ניתנת למשלוש: $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת כי קיים בסיס B של V עבורו $\left[T\right]_{B}$ משולשית.

משפט: T ניתנת למשלוש $\Longleftrightarrow$ $\exists\lambda\in\mathbb{F}^{n}.f_{A}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x-\lambda_{i}\right)$.

T אינווריאנטי/תת מרחב שמור: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ אזי תמ"ו $U\subseteq V$ המקיים $T\left[U\right]\subseteq U$.

טענה: $\ker\left(T\right)$, $\text{Im}\left(T\right)$ הם T אינו'.

טענה: יהיו $v_{1},\ldots,v_{k}$ ו"ע אזי $\text{span}\left(v_{1},\ldots,v_{k}\right)$ T אינו'.

טענה: תהא $A\subseteq V$ אזי התמ"ו ה־T־אינו' הקטן ביותר שמכיל את A הוא $\text{span}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}T^{i}\left[A\right]\right)$.

מרחב פריק: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ אזי V מ"ו עבורו קיימים $\left\{ 0\right\} \neq U,W\subseteq V$ T־אינו' המקיימים $V=U\oplus W$.

הצבה בפולינום: יהי $p\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$ ותהא $A\in M_{m}\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $p\left(A\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}A^{i}$.

טענה: $\forall p\in\mathbb{F}\left[x\right].\left[p\left(T\right)\right]_{B}=p\left(\left[T\right]_{B}\right)$.

טענה: (λ ע"ע של A) $\Longleftarrow$ (λ ע"ע של A^{t}).

טענה: יהי $p\in\mathbb{F}_{n}\left[x\right]$ ותהא A המקיימת $Av=\lambda v$ אזי $p\left(A\right)v=p\left(\lambda\right)v$.

טענה: יהי $p\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $\ker\left(p\left(T\right)\right),\text{Im}\left(p\left(T\right)\right)$ הם T-אינו'.

טענה: יהי $V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_{i}$ מ"ו יהי $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ נניח כי לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים כי V_{i} T אינו' וגם B_{i} בסיס של V_{i} אזי $\left[T\right]_{B}=\text{Diag}\left(\left(\left[T_{\upharpoonright V_{i}}\right]_{B_{i}}\right)_{i=1}^{n}\right)$.

מסקנה: נניח כי $V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$ מ"ו ונניח כי לכל $i\in[n]$ מתקיים כי V_i T אינו' אזי $f_T(x)=\prod_{i=1}^{n}f_{T\restriction_{V_i}}(x)$.

טענה: יהיו $\lambda_1\neq\ldots\neq\lambda_n$ ע"ע של T אזי (T לכסינה) $\iff$ ($\prod_{i=1}^{n}(T-\lambda_i\mathrm{Id})=0$).

טענה: $\forall p\in\mathbb{F}[x].A\sim B\Longrightarrow p(A)\sim p(B)$.

טענה: יהיו $f,g\in\mathbb{F}[x]$ ותהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ אזי $g(T)f(T)=f(T)g(T)$.

מסקנה: יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ ותהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ אזי $f(T)\circ T=T\circ f(T)$.

מסקנה: $T\circ S=S\circ T \Longleftarrow$ $\mathrm{Im}(S)$, $\ker(S)$ הן T אינו'.

משפט קיילי המילטון: $f_A(A)=0$.

תת חוג: יהי $\langle R,+,*\rangle$ חוג עם יחידה אזי $R'\subseteq R$ המקיים $\left\langle R',+\restriction_{R'^2},*\restriction_{R'^2}\right\rangle$ חוג עם יחידה.

משפט: כל תחום שלמות הוא תת חוג של שדה.

מחלק: יהי $b\in R$ אזי $a\in R$ המקיים $\exists c\in R.a*c=b$.

סימון: אם a מחלק את b אזי $a|b$.

מסקנה: יהי R תחום שלמות ונניח כי $b=u\cdot a$ וגם $a=v\cdot b$ אזי $v\cdot u=u\cdot v=1$.

מסקנה: $(b|a)\wedge(a|b)\iff\exists u\in R^{\times}.a=u\cdot b$.

חברים: $a,b\in R$ המקיימים $\exists u\in R^{\times}.a\cdot u=b$.

סימון: אם a,b חברים אזי $a\sim b$.

אידאל: $I\subseteq R$ המקיים $(0\in I)\wedge(\forall a,b\in I.a+b\in I)\wedge(\forall x\in R.\forall y\in I.x\cdot y\in I)$.

האידאל הנפרש על ידי איבר: יהי $a\in R$ אזי $Ra=(a)=\{b\cdot a\mid b\in R\}$.

משפט: יהי $I\subseteq\mathbb{Z}$ אידאל אזי $\exists a\in\mathbb{Z}.I=(a)$.

האידאל הנפרש על ידי קבוצה: תהא $X\subseteq R$ אזי $(X)=\{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_i\mid(m\in\mathbb{N}_+)\wedge(\alpha\in R^m)\wedge(v\in X^m)\}$.

טענה: תהא $\varphi:R\to S$ הומומורפיזם בין חוגים אזי $\ker(\varphi)$ אידאל.

טענה: $b|a\iff(a)\subseteq(b)$, $\forall a\in R.(a)=R\iff a\in R^{\times}$.

אידאל ראשי: אידאל $I\subseteq R$ המקיים $\exists a\in R.(a)=I$.

תחום ראשי/PID: תחום שלמות R המקיים כי כל $I\subseteq R$ אידאל הוא ראשי.

אידאל ראשוני: אידאל $I\subseteq R$ המקיים $\forall a,b\in R.ab\in I\Longrightarrow(a\in I)\vee(b\in I)$.

טענה: (a) ראשוני $\iff$ a ראשוני.

טענה: יהיו $I_1,I_2\subseteq R$ אידאלים אזי $I_1\cap I_2$ אידאל.

אידאל פריק: אידאל $I\subseteq R$ עבורו קיימים $I\neq I_1,I_2\subseteq R$ המקיימים $I=I_1\cap I_2$.

טענה: (a) אי פריק $\iff$ a אי פריק.

אידאל מירבי: אידאל $I\subseteq R$ המקיים כי לכל $I\subset J$ אידאל מתקיים $J=R$.

טענה: יהי I אידאל אזי (I מירבי) $\iff$ (I אי פריק).

gcd: יהיו $r_1,\ldots,r_n\in R$ אזי $d\in R$ המקיים $(d)=(r_1,\ldots,r_n)$.

טענה: נניח כי d הוא $\gcd(r_1,\ldots,r_n)$ מתקיים $(d|r_1\ldots r_n)\wedge(a|r_1\ldots r_n\Longrightarrow a|d)$.

lcm: יהיו $r_1,\ldots,r_n\in R$ אזי $d\in R$ המקיים $(d)=(r_1)\cap\ldots\cap(r_n)$.

טענה: נניח כי d הוא $\mathrm{lcm}(r_1,\ldots,r_n)$ מתקיים $(r_1\ldots r_n|d)\wedge(r_1\ldots r_n|a\Longrightarrow d|a)$.

זרים: $r_1,\ldots,r_n\in R$ המקיימים כי 1 הוא $\gcd(r_1,\ldots,r_n)$.

משפט: ($r_1,\ldots,r_n$ זרים) $\iff$ $(\exists a\in R^n.\sum_{i=1}^{n}a_i r_i=1)$.

ראשוני: יהי R תחום שלמות אזי $a\in R$ המקיים $\forall p,q\in R.(a|pq)\Longrightarrow(a|p)\vee(a|q)$.

אי פריק (א"פ): $a\in R\backslash R^{\times}$ המקיים $\forall p,q\in R.(a=pq)\Longrightarrow(p\in R^{\times})\vee(q\in R^{\times})$.

טענה: יהי R חוג ויהי $0\neq a\in R$ אזי (a ראשוני) $\Longleftarrow$ (a א"פ).

טענה: הפיך · ראשוני = ראשוני, הפיך · א"פ = א"פ.

טענה: יהי R תחום ראשי ויהי $0\neq a\in R$ אזי (a ראשוני) $\iff$ (a א"פ).

פריקות חד ערכית: נניח כי $\prod_{i=1}^{n}p_i=\prod_{i=1}^{m}q_i$ עבור p_i,p_j ראשוניים אזי $(n=m)\wedge(\forall i\in[n].p_i\sim q_i)$.

משפט: יהי R תחום המקיים כי כל ראשוני הוא אי פריק אזי R מקיים פריקות חד ערכית.

מסקנה: תחום ראשי מקיים פריקות חד ערכית.

תחום אוקלידי: תחום שלמות R ופונקציה $N:R\backslash\{0\}\to\mathbb{Z}$ המקיימת $\forall y\in R.\forall x\in R\backslash\{0\}.\exists!q,r\in R.\left(y=xq+r\right)\wedge\left(N\left(r\right)<N\left(x\right)\right)$.

טענה: כל תחום אוקלידי הוא ראשי.

חוג השלמים של גאוס: $\mathbb{Z}\left[i\right]=\left\{a+ib\mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\mathbb{F}\left[x\right]$ תחום אוקלידי ראשי, $\mathbb{Z}\left[i\right]$ תחום אוקלידי.

דיסקרימיננטה: יהי $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in\mathbb{F}_n\left[x\right]$ ויהיו $\left\{\alpha_i\right\}_{i=1}^{n}$ השורשים של f אזי $\Delta\left(f\right)=\left(-1\right)^{\binom{n}{2}}a_n^{2(n-1)}\prod_{i\neq j}\left(\alpha_i-\alpha_j\right)$.

הגדרה: יהי $q\in\mathbb{F}\left[x\right]$ אזי $\forall f,g\in\mathbb{F}\left[x\right].f\sim_{(q)}g\Longleftrightarrow f-g\in\left(q\right)$.

טענה: ${}^{\mathbb{F}[x]}/{}_{\sim_{(q)}}$ שדה.

משפט: $q\left(\left[x\right]_{\sim_{(q)}}\right)=0$.

משפט: כל שדה מוכל בשדה סגור אלגברית.

טענה: יהיו $\mathbb{F}_0\subseteq\mathbb{F}_1$ ותהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}_0\right)$ אזי (A הפיכה מעל $\mathbb{F}_1$) $\Longleftarrow$ (A הפיכה מעל $\mathbb{F}_0$).

טענה: תהיינה $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}_0\right)$ אזי ($A\sim B$ מעל $\mathbb{F}_1$) $\Longleftarrow$ ($A\sim B$ מעל $\mathbb{F}_0$).

האידאל המאפס: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $I_A=\left\{p\in\mathbb{F}\left[x\right]\mid p\left(A\right)=0\right\}$.

מסקנה: $f_A\in I_A$.

הפולינום המינימלי: $m_A\in I_A$ המקיים (m_A פולינום מתוקן)$\wedge$($\left(m_A\right)=I_A$).

טענה: $m_A=\iota\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in I_A.\left(a_n=1\right)\wedge\left(n=\min\left(\deg\left(p\right)\mid p\in I_A\backslash\left\{0\right\}\right)\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ותהא $T\in\mathrm{Hom}\left(V\right)$

- $f\left(A\right)=0\Longleftrightarrow m_A|f$.
- $I_T=I_{[T]_B}$.
- $A\sim B\Longrightarrow m_A=m_B$.

משפט: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו $\lambda_1\neq\ldots\neq\lambda_k$ כל הע"ע אזי (A לכסינה) $\Longleftrightarrow$ ($m_A\left(x\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(x-\lambda_i\right)$).

משפט: λ ע"ע של $A\Longleftrightarrow m_A\left(\lambda\right)=0$.

טענה: $\min\left(d\in\mathbb{N}\mid A^d=0\right)=\deg\left(m_A\right)$.

למת המחלק הפולינום המינימלי: תהא $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ המקיימת $\deg\left(f\right)>0$ אזי ($f|m_A$) $\Longleftarrow$ $f\left(A\right)$ לא הפיכה.

טענה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}_1$ אזי (בת"ל מעל $\mathbb{F}_1$) $\Longleftrightarrow$ (בת"ל מעל $\mathbb{F}_0$).

משפט: m_A לא משתנה בהרחבת שדות.

משפט: $f_A|m_A^n$.

מסקנה: לכל $p\in\mathbb{F}\left[x\right]$ א"פ מתקיים $p|m_A\Longleftrightarrow p|f_A$.

טענה: נניח כי $V=\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$ מ"ו ונניח כי לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים כי V_i T אינו' אזי $m_T=\mathrm{lcm}\left(m_{T\restriction_{V_1}},\ldots,m_{T\restriction_{V_n}}\right)$.

טענה: יהי U תמ"ו T אינו' אזי $\forall p\in\mathbb{F}\left[x\right].p\left(T\right)_{\restriction_U}=p\left(T_{\restriction_U}\right)$.

טענה: יהיו $S_1,S_2\in\mathrm{Hom}\left(V\right)$ המקיימות $S_1+S_2=Id$, $S_1\circ S_2=0=S_2\circ S_1$ אזי

- $\ker\left(S_1\right)=\mathrm{Im}\left(S_2\right)$, $\mathrm{Im}\left(S_1\right)=\ker\left(S_2\right)$.
- $V=\ker\left(S_1\right)\oplus\ker\left(S_2\right)$.

הכללה: יהיו $S_1\ldots S_n\in\mathrm{Hom}\left(V\right)$ המקיימות $\sum_{i=1}^{n}S_i=1$, $S_i\circ\left(\sum_{i\neq j}S_j\right)=0$ אזי

- $\mathrm{Im}\left(S_i\right)=\bigcap_{i\neq j}\ker\left(S_j\right)$.
- $V=\oplus_{i=1}^{n}\ker\left(S_i\right)$.

משפט: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(V\right)$ ויהיו $f,g\in\mathbb{F}\left[x\right]$ המקיימות $\gcd\left(f,g\right)=1$, $f\left(T\right)g\left(T\right)=0$ אזי $V=\ker\left(g\left(T\right)\right)\oplus\ker\left(f\left(T\right)\right)$.

הכללה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(V\right)$ ויהיו $p_1\ldots p_n\in\mathbb{F}\left[x\right]$ המקיימות $\gcd\left(p_i,p_j\right)=1$, $\prod_{i=1}^{n}p_i\left(T\right)=0$ אזי $V=\bigoplus_{i=1}^{n}\ker\left(p_i\left(T\right)\right)$.

משפט הפירוק הפרימרי דרך הפולינום המינימלי: תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(V\right)$ ונניח כי $m_T\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}q_i\left(x\right)^{r_i}$ באשר $q_i\left(x\right)$ אי פריקים מתוקנים אזי

- $V=\bigoplus_{i=1}^{n}\ker\left(q_i\left(T\right)^{r_i}\right)$.
- $m_{T\restriction_{\ker\left(q_i(T)^{r_i}\right)}}\left(x\right)=q_i\left(x\right)^{r_i}$.

הגדרה: נניח כי $f_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)^{r_i}$ אזי $f_A^{red}(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$.

טענה: A לכסינה $\iff f_A^{red}(A)=0$.

נגזרת: נניח כי $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ אזי $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}ia_ix^{i-1}$.

טענה: $f_A^{red}=\frac{f_A}{\gcd(f_A,f_A')}$.

הגדרה: $(a,b)+_{\mathbb{C}}(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)\cdot_{\mathbb{C}}(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

מירכוב: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $V_{\mathbb{C}}=\left\langle V^2,\cdot_{\mathbb{C}},+_{\mathbb{C}}\right\rangle$.

מסקנה: $(a,b)\cong a+ib$.

הגדרה: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ותהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי נגדיר את $T_{\mathbb{C}}:V_{\mathbb{C}}\to V_{\mathbb{C}}$ כך $T_{\mathbb{C}}(u+iv)=T(v)+iT(u)$.

אינדקס הנילפוטנטיות: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי $n(T)=\min\left\{k\in\mathbb{N}\mid T^k=0\right\}$.

טענה: נניח כי $m_T(x)=\prod_{i=1}^{\kappa}(x-\lambda_i)^{k_i}$ אזי $n\left(T\restriction_{\ker\left((x-\lambda_i)^{k_i}\right)}-\lambda_iId_{\ker\left((x-\lambda_i)^{k_i}\right)}\right)=k_i$.

שרשרת: יהי $v\in V$ אזי $\langle v,Tv,\ldots,T^nv\rangle$ עבורו $T^{n+1}v=0$.

מרחב T-ציקלי: מרחב וקטורי V המקיים כי קיימת שרשרת שהיא בסיס.

מסקנה: נניח כי $T\in\text{Hom}(V)$ נילפוטנטית אזי ($n(T)=\dim(V)$) $\iff$ (V הוא T-ציקלי).

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ נילפוטנטית אזי (V מ"ו T ציקלי) $\iff$ (V אי פריק).

ציקלי מקסימלי: תמ"ו $U\subseteq V$ T-אינו' המקיים $\dim(U)=n(T)$.

יחס מנה: יהי $V\subseteq U$ תמ"ו נגדיר יחס שקילות $\forall v_1,v_2\in V.v_1\sim_U v_2\iff v_1-v_2\in U$.

מרחב מנה: $V/U=V/\sim_U$.

העתקת המנה: $T_U(v)=[v]_{\sim_U}$.

מסקנה: $\dim(V/U)=\dim(V)-\dim(U)$.

טענה: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו ויהיו $(v_1\ldots v_n)=B\in V^n$ וגם $\left([v_1]_{\sim_U}\ldots[v_n]_{\sim_U}\right)=\overline{B}\in V/U$

- $\overline{B}$ בת"ל $\Longleftarrow$ ($\forall\alpha\in\mathbb{F}.\forall v\in\prod_{i=1}^{n}[v_i]_{\sim_U}.\sum\alpha_iv_i\in U\implies\forall i\in[n].a_i=0$).
- $\overline{B}$ בת"ל $\Longleftarrow$ (B בת"ל)$\wedge$($U\oplus\text{span}(B)$).
- $\overline{B}$ פורשת $\Longleftarrow$ $U+\text{span}(B)=V$.
- $[v]_{B\frown C}=[P_U(v)]_C\frown\left[[v]_{\sim_U}\right]_{\overline{B}}$.

קו-מימד: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו אזי $\dim(V/U)$.

הגדרה: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $W/U=T_U[W]=\left\{[w]_U\mid w\in W\right\}$.

הגדרה: יהי $U\subseteq V$ תמ"ו ותהא $T\in\text{Hom}(V)$ אזי נגדיר $\overline{T}:V/U\to V/U$ כך $\overline{T}\left([v]_{\sim_U}\right)=[T(v)]_{\sim_U}$.

טענה: יהי $W\subseteq V$ תמ"ו T-אינו' אזי $[T]_{B\frown C}=\left(\begin{array}{c|c}[T\restriction_W]_B & *\\\hline 0 & [T]_{\overline{C}}\end{array}\right)$.

בלוק ז'ורדן: $(J_k(\lambda))_{i,j}=\lambda\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j}$ או תצוגתית $J_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda\end{pmatrix}_{k\times k}$.

מערך ז'ורדן: $I(\lambda)=\text{Diag}\left(J_{k_1}(\lambda),\ldots,J_{k_r}(\lambda)\right)$.

מטריצת/צורת ז'ורדן: $J=\text{Diag}\left(I(\lambda_1),\ldots,I(\lambda_k)\right)$.

טענה: $\left(J_r(0)^k\right)_{i,j}=\delta_{i+k,j}$.

הבינום של ניוטון: יהיו A,B מתחלפות אזי $(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$.

טענה: $J_n(\lambda)^k=(J_n(0)+\lambda I_n)^k=\sum_{m=0}^{k}\binom{m}{k}\lambda^{k-m}J_n(0)^m$.

מסקנה: יהי $\lambda\neq0$ אזי $J_n(\lambda)^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda^i}J_n(0)^{i-1}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ ויהי B בסיס של V

- $[T]_B=J_n(0)\iff B=\left(T^{n-1}v,\ldots,v\right)$ המקיים $v\in\ker(T^n)\setminus\ker\left(T^{n-1}\right)$.
- $[T]_B=J_n(\lambda)\iff B=\left((T-\lambda I)^{n-1}v,\ldots,v\right)$ המקיים $v\in\ker\left((T-\lambda I)^n\right)\setminus\ker\left((T-\lambda I)^{n-1}\right)$.

מסקנה: $[T]_B$ מטריצת ז'ורדן $\Longleftrightarrow$ B שרשור בסיסים מהצורה $\left((T-\lambda I)^{n-1}v,\ldots,v\right)$.

וקטור עצמי מוכלל: תהא $S\in\text{Hom}(V)$ אזי $v\in V$ שמקיימים $\exists\lambda\in\mathbb{F}.\exists k>0.\left(S-\lambda I\right)^{k}(v)=0$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}(V)$ ונניח כי $m_T(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{r_i}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B=\text{Diag}\left(I(\lambda_1),\ldots,I(\lambda_k)\right)$.

טענה: נניח כי $[T]_B=\text{Diag}\left(I(\lambda_1),\ldots,I(\lambda_k)\right)$ בעבור $I(\lambda_i)=\text{Diag}\left(J_{k_1^i}(\lambda_i),\ldots,J_{k_{n_i}^i}(\lambda_i)\right)$

- כל הע"ע של T הם $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$.
- $\mu_i=\sum_{j=1}^{n_i}k_j^i$.
- $\rho_i=n_i$.
- הריבוי האלגברי בפולינם המינימלי של ע"ע λ_i הוא $\max\left(k_1^i,\ldots,k_{n_i}^i\right)$.
- $\left|\left\{j\mid k_j^i\ge r\right\}\right|=\dim\left(\ker\left((T-\lambda_iI)^r\right)\right)-\dim\left(\ker\left((T-\lambda_iI)^{r-1}\right)\right)$.

מסקנה: צורת ז'ורדן היא יחידה עד כדי שינוי סדר.

אלגוריתם ז'ורדן: יהי $\mathbb{F}$ שדה סגור אלגברית ויהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ עם פ"א $f_A(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{d_i}$ בעבור $\lambda_i\neq\lambda_j$

- צורת ז'ורדן:

$$
\begin{aligned}
&J=0\\
&\text{for }\ (1\le i\le k)\\
&\qquad\text{for }\ (1\le m\le d_i)\\
&\qquad\qquad s_{i,m}=\dim\left(\text{sols}\left((A-\lambda_iI)^m\right)\right)\\
&\qquad\text{for }\ (1\le m\le d_i)\\
&\qquad\qquad r_{i,m}=2s_{i,m}-s_{i,m+1}-s_{i,m-1}\\
&\qquad\qquad\text{for }\ (1\le t\le r_{i,m})\\
&\qquad\qquad\qquad J=\text{Diag}\left(J,J_m(\lambda_i)\right)\\
&\text{return }\ B
\end{aligned}
$$

- בסיס ז'ורדן:

$$
\begin{aligned}
&P=\langle,\rangle\\
&\text{for }\ (1\le i\le k)\\
&\qquad\text{for }\ (1\le m\le d_i)\\
&\qquad\qquad\text{for }\ (1\le t\le r_{i,m})\\
&\qquad\qquad\qquad v_{i,m,t}^{1}\in\text{sols}\left((A-\lambda_iI)^m\right)\\
&\qquad\qquad\qquad v_{i,m,t}^{1}\notin\text{sols}\left((A-\lambda_iI)^{m-1}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad v_{i,m,t}^{1}\notin\text{span}\left(v_{i,m',t'}^{\ell'};\ \begin{matrix}1\le m'\le m\\1\le t'\le r_{i,m'}\\2\le\ell'\le m'\end{matrix}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\text{for }\ (2\le\ell\le m)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad v_{i,m,t}^{\ell}=(A-\lambda_iI)\,v_{i,m,t}^{\ell-1}\\
&\qquad\qquad\qquad\text{for }\ (m\le l\le 1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad P=P^{\frown}v_{i,m,t}^{l}
\end{aligned}
$$

התכנסות של סדרת מטריצות: תהא $A:\mathbb{N}\to M_n(\mathbb{F})$ אזי $\lim\limits_{m\to\infty}A_m=\begin{pmatrix}\left(\lim\limits_{m\to\infty}A_m\right)_{1,1} & \cdots & \left(\lim\limits_{m\to\infty}A_m\right)_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ \left(\lim\limits_{m\to\infty}A_m\right)_{n,1} & \cdots & \left(\lim\limits_{m\to\infty}A_m\right)_{n,n}\end{pmatrix}$.

טענה: $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$.

מסקנה: $e^{I(\lambda)}=e^{\text{Diag}\left(J_{n_1}(\lambda),\dots,J_{n_k}(\lambda)\right)}=\text{Diag}\left(e^{J_{n_1}(\lambda)},\dots,e^{J_{n_k}(\lambda)}\right)$.

מסקנה: $e^{J}=e^{\text{Diag}(I(\lambda_1),\dots,I(\lambda_k))}=\text{Diag}\left(e^{I(\lambda_1)},\dots,e^{I(\lambda_k)}\right)$.

טענה: נניח כי $A=PJP^{-1}$ אזי $e^A=Pe^JP^{-1}$.

מסקנה: e^A קיים ומוגדר היטב בשדה סגור אלגברית.

טענה: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ מתחלפות אזי $e^Ae^B=e^Be^A=e^{A+B}$.

משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר): יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $F\left(x,y(x),\dots,y^{(n)}(x)\right)=0$.

משפט: בהינתן n תנאי התחלה קיים ויחיד פתרון $y(x)$ למד"ר מסדר n.

טענה: תהא $y\in(\mathbb{F}\to\mathbb{F})^n$ ותהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\text{sols}(y'=Ay)=\left\{ce^{Ax}\mid c\in\mathbb{F}^n\right\}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $m\in\mathbb{N}$ עבורו לכל V מ"ו המקיים כי $m\nmid\dim(V)$ לכל $T\in\text{Hom}(V)$ קיים ע"ע אזי לכל $T,S\in\text{Hom}(V)$ מתחלפות קיים ו"ע משותף.

לכסון סימולטני: יהיו $T,S\in\text{Hom}(V)$ לכסינות ומתחלפות אזי קיים בסיס B של V עבורו $[T]_B,[S]_B$ אלכסוניות.

מטריצה מצורפת/נלווית: יהי $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ מתוקן אזי $A_f=\begin{pmatrix}0 & & & -a_0\\ 1 & \ddots & & -a_1\\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}$.

משפט: $f_{A_p}=p$.

טענה: $m_{A_p}=p$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n\in\mathbb{N}$ התב"ש

- לכל פולינום מעל $\mathbb{F}$ ממעלה n קיים פתרון.
- לכל V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ממימד n מתקיים כי לכל $T\in\text{Hom}(V)$ קיים ע"ע מעל $\mathbb{F}$.
- לכל $A\in M_n(\mathbb{F})$ קיים ע"ע מעל $\mathbb{F}$.

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $f\in\mathbb{F}[x]$ א"פ מתוקן אזי $\mathbb{E}_f=\{g(A_f)\mid g\in\mathbb{F}[x]\}$ שדה.

טענה: $\left\langle I,A_f,\dots,A_f^{\deg(f)-1}\right\rangle$ בסיס של $\mathbb{E}_f$ בתור מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

מסקנה: $f(A_f)=0$.

צורת פרוביניוס: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ עם $f_A(x)=\prod_{i=1}^{r}q_i(x)$ בעבור q_i א"פ זרים בזוגות אזי $A\sim\text{Diag}\left(A_{q_1},\dots,A_{q_r}\right)$.

הגדרה: נגדיר $M_{\mathbb{1}}\in M_n(\mathbb{F})$ כך $(M_{\mathbb{1}})_{i,j}=\delta_{i,n}\delta_{j,n}$.

הגדרה: יהי $q(x)^{\ell}$ בעבור q_i א"פ מתוקן אזי $C(q)\in M_{\ell\deg(q)}(\mathbb{F})$ כך $C(q)=\begin{pmatrix}A_q & \ddots & 0 & 0\\ 0 & \ddots & M_{\mathbb{1}} & 0\\ & \ddots & A_q & M_{\mathbb{1}}\\ 0 & & 0 & A_q\end{pmatrix}$.

צורת יעקובסון: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ עם $f_A(x)=\prod_{i=1}^{r}q_i(x)^{\ell_i}$ בעבור q_i א"פ זרים אזי $A\sim\text{Diag}\left(C(q_1),\dots,C(q_r)\right)$.

הגדרה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ אזי $\overline{A}\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ כך $\left(\overline{A}\right)_{i,j}=\overline{(A)_{i,j}}$.

טענה: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהי λ ע"ע של $A_{\mathbb{C}}$ עם ו"ע b אזי $\overline{\lambda}$ ע"ע של $A_{\mathbb{C}}$ עם ו"ע $\bar{b}$.

טענה: $\rho_\lambda=\rho_{\overline{\lambda}}$, $\mu_\lambda=\mu_{\overline{\lambda}}$.

הגדרה: יהי $a+ib\in\mathbb{C}$ אזי $M_{\mathbb{C}}^{\lambda}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ לכסינה יהיו $\alpha_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ ע"ע עם $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}^n$ ו"ע ויהיו $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_m, \overline{\lambda_m} \in \mathbb{C}$ ע"ע עם $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}^n$ ו"ע של $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ אזי

- $\langle b_1, \ldots, b_k, c_1, \overline{c_1}, \ldots, c_m, \overline{c_m} \rangle$ בסיס מלכסן מעל $\mathbb{C}$.
- $B = \langle b_1, \ldots, b_k, \text{Re}(c_1), \text{Im}(c_1), \ldots, \text{Re}(c_m), \text{Im}(c_m) \rangle$ בסיס מעל $\mathbb{R}$ עבורו $[A]_B = \text{Diag}\left(a_1, \ldots, a_k, M_{\mathbb{C}}^{\lambda_1}, \ldots, M_{\mathbb{C}}^{\lambda_m}\right)$.

טענה: תהא λ ע"ע ויהי $m \in \mathbb{N}$ אזי $\dim(\ker(A - \lambda I)^m) = \dim\left(\ker\left(A - \overline{\lambda} I\right)^m\right)$.

מסקנה: $\overline{I(\lambda)} = I\left(\overline{\lambda}\right)$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ נניח כי $\langle b_1, \ldots, b_k \rangle$ שרשרת היוצרת את $J_k(\lambda)$ אזי $\langle \overline{b_1}, \ldots, \overline{b_k} \rangle$ שרשרת היוצרת את $J_k\left(\overline{\lambda}\right)$.

מכפלה הרמיטית/מכפלה פנימית (מ"פ): יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \to \mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות: $\forall a, b, c \in V. \langle \alpha a + \beta b, c \rangle = \alpha \langle a, c \rangle + \beta \langle b, c \rangle$.
- הרמיטיות: $\forall a, b \in V. \langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle}$.
- חיוביות: $\forall a \in V. \langle a, a \rangle \in \mathbb{R}_+$.
- חיוביות ממש: $\forall a \in V. (\langle a, a \rangle = 0) \Longleftrightarrow (a = 0)$.

מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ): $\langle V, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ שמקיים ($\langle V, +, \cdot \rangle$ מ"ו)$\wedge$($\langle \cdot, \cdot \rangle$ מ"פ).

מכפלה סקלרית סטנדרטית: יהיו $a, b \in \mathbb{C}^n$ אזי $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$.

הגדרה: $\left(\overline{A}\right)_{i,j} = \overline{(A)_{i,j}}$.

מטריצה צמודה: $A^* = \overline{A}^t$.

מכפלה פנימית על מטריצות: יהיו $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\langle A, B \rangle = \text{trace}(AB^*)$.

מכפלה פנימית על פונקציות רציפות: יהיו $f, g \in C^0([0,1])$ אזי $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$.

נורמה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ אזי $\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$.

ניצב/אורתוגונלי/מאונך: $a, b \in \mathbb{R}^n$ המקיימים $\langle a, b \rangle = 0$.

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ניצבים אזי $a \perp b$.

קוסינוס: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ ותהא θ הזווית בין a, b אזי $\cos(\theta_{a,b}) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$.

טענה: $(A^*)^* = A$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^* A^*$.

מסקנה: יהי $v, u \in \mathbb{C}^n$ אזי $\langle v, u \rangle_{st} = u^* \cdot v$.

הגדרה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ אזי $\langle v, u \rangle_A = u^* A v$.

מטריצה הרמיטית: $A^* = A$.

הגדרה: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ סימטרית אזי

- חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית: $\forall v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}. \langle Ax, x \rangle > 0$.
- אי שלילית: $\forall v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}. \langle Av, v \rangle \geq 0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}. \langle Av, v \rangle < 0$.
- אי חיובית: $\forall v \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}. \langle Av, v \rangle \leq 0$.

מסקנה: (A הרמיטית וחיובית לחלוטין) $\Longleftrightarrow$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ מ"פ).

טענה: יהי V ממ"פ

- $\forall v \in V. \langle v, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$.
- $\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^m \beta_i u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, u_i \rangle$.

מטריצת גראם: יהי V ממ"פ ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ אזי $(G(v_1, \ldots, v_n))_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$.

טענה: ($G(v_1, \ldots, v_n)$ הרמיטית ומוגדרת חיובית) $\Longleftrightarrow$ ($v_1, \ldots, v_n$ בת"ל).

מרחק: יהיו v, u אזי $\text{dist}(v, u) = \|v - u\|$.

טענה: $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$, $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$.

אי שיוויון קושי שוורץ: יהי V ממ"פ אזי $\forall v, u \in V. |\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\|$.

טענה: $\text{dist}(v, u) \geq 0$, $\text{dist}(v, u) = 0 \Longleftrightarrow v = u$, $\text{dist}(v, u) + \text{dist}(u, w) \leq \text{dist}(v, w)$.

משפט פיתגורס: $\|v - u\|^2 = \|v\| + \|u\| \Longleftrightarrow \text{Re}(\langle v, u \rangle) = 0$.

משפט הקוסינוסים: $\|v - u\| = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\|v\| \|u\| \text{Re}(\cos(\theta_{v,u}))$.

קבוצה אורתוגונלית: קבוצה $S \subseteq V$ המקיימת $\forall v, u \in S. v \neq u \implies v \perp u$.

וקטור יחידה: $v \in V$ המקיים $\|v\| = 1$.

נרמול: יהי $0 \neq v \in V$ אזי $\frac{v}{\|v\|}$.

קבוצה אורתונורמלית: קבוצה $S \subseteq V$ אורתגונלית המקיימת $\forall v \in S. \|v\| = 1$.

משפט: תהא $0 \notin S \subseteq V$ אורתוגונלית אזי S בת"ל.

טענה: תהא $0 \notin B = (v_1, \ldots, v_n)$ סדרה אורתוגונלית

- $G(B) = \text{Diag}\left(\|v_1\|^2, \ldots \|v_n\|^2\right)$.
- נניח כי B בסיס אזי $([v]_B)_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$.
- נניח כי B בסיס אזי $\langle v, u \rangle = [v]_B^T G(B) \overline{[u]_B}$.
- שיוויון פרסבל: נניח כי B בסיס אזי $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{|\langle v, v_i \rangle|^2}{\|v_i\|^2}}$.

ניצבות לקבוצה: יהי $S \subseteq V$ אזי $v \perp S \iff \forall s \in S. v \perp s$.

טענה: $v \perp \text{span}(v_1, \ldots, v_n) \iff \forall i \in [n]. v \perp v_i$.

הטלה אורתוגונלית: יהי $e_1, \ldots, e_k$ בסיס אורתונורמלי של $U \subseteq V$ נגדיר $P_U : V \to U$ כך $P_U(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, e_i \rangle e_i$.

טענה: P_U לינארית, $v - P_U(v) \perp U$, $P_U^2 = P_U$, $\text{Im}(P_U) = U$, $\ker(P_U) = \{v \mid v \perp U\}$.

המשלים לניצב: יהי $U \subseteq V$ אזי $U^\perp = \{v \in V \mid v \perp U\}$.

טענה: $U^\perp$ תמ"ו, $U \oplus U^\perp$.

טענה: יהי V מ"ו נ"ס ויהיו $U, W \subseteq V$ ויהי בסיס אורתונורמלי של U

- $V = U \oplus U^\perp$, $v = P_U(v) + (v - P_U(v))$.
- $P_{(U,U^\perp)} = P_U$, $P_{(U^\perp,U)} = Id - P_U$.
- $U \subseteq W \implies W^\perp \subseteq U^\perp$.
- $\dim(U) + \dim\left(U^\perp\right) = \dim(V)$.
- $\left(U^\perp\right)^\perp = U$.
- $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$, $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

מסקנה: $\langle v, v \rangle = \langle P_U(v), P_U(v) \rangle + \langle v - P_U(v), v - P_U(v) \rangle$.

מרחק ממרחב: יהי $U \subseteq V$ מרחב ויהי $v \in V$ אזי $\text{dist}(v, U) = \inf_{u \in U}(\text{dist}(v, u))$.

משפט: יהי $U \subseteq V$ מרחב ויהי $v \in V$ אזי $\text{dist}(v, U) = \text{dist}(v, P_U(v))$.

תהליך גראם שמידט: בהינתן $v_1, \ldots v_n \in V$ בת"ל נגדיר $GS(v_1, \ldots v_n) = \left(\frac{v_i - P_{\text{span}(v_1, \ldots, v_{i-1})}(v_i)}{\left\|v_i - P_{\text{span}(v_1, \ldots, v_{i-1})}(v_i)\right\|}\right)_{i=1}^n$.

טענה: $\text{span}(v_1, \ldots v_n) = \text{span}(GS(v_1, \ldots v_n))$, $GS(v_1, \ldots v_n)$ קבוצה אורתונורמלי.

מסקנה: יהי V ממ"פ ויהי $U \subseteq V$ תמ"ו נ"ס אזי קיים בסיס אורתונורמלי ל־U.

מטריצה אורתוגונלית: מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ המקיימת $AA^t = I$.

מטריצה אוניטרית: מטריצה $Q \in M_n(\mathbb{C})$ המקיימת $QQ^* = I$.

טענה: Q אוניטרית $\iff$ עמודות Q בסיס אורתונורמלי לממ"פ $(\mathbb{C}^n, \langle , \rangle_{st})$ $\iff$ Q^t אוניטרית.

טענה: תהא $Q \in M_n(\mathbb{C})$ אזי $|\det(Q)| = 1$.

משפט פירוק QR: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ בעבור $m \geq n$ אזי $A = QR$ בעבור Q אוניטרית ו־R משולשית עליונה.

מסקנה: נניח כי $QR = A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ אזי $Q \in M_m(\mathbb{C})$, $R \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

טענה: נניח כי $A = QR$ ונניח כי $(u_1, \ldots, u_r)$ בסיס של $\mathcal{C}(A)$ ו־$(u_1, \ldots, u_m)$ השלמה לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^m$ אזי

$$(R)_{i,j} = \begin{cases} \langle C_j(A), u_i \rangle & i \leq j \\ 0 & else \end{cases}$$

$$C_i(Q) = u_i$$

טענה: יהיו B, C בסיסים של V אזי $G(C) = \left([Id]_B^C\right)^T G(B) \overline{[Id]_B^C}$.

משפט: B בת"ל $\iff \det(G(B)) \neq 0$.

טענה: $\det\left(G\left(B\right)\right)\geq0$.

הגדרה: $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\sqrt{\det\left(G\left(B\right)\right)}$.

טענה: $v_{1},\ldots,v_{n}$ אורתוגונלים $\Longleftarrow$ $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}\left\Vert v_{i}\right\Vert$.

טענה: יהי E בסיס אורתונורמלי ויהי B בסיס אזי $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\left|\det\left(\left[Id\right]_{E}^{B}\right)\right|$.

הגדרה: נגדיר יחס שקילות על בסיסים $\det\left(\left[Id\right]_{C}^{B}\right)>0\Longleftrightarrow B\sim C$.

נפח עם אוריאנטציה: יהי E בסיס אורתונורמלי ויהי B בסיס אזי $\text{Vol}^{*}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\det\left(\left[Id\right]_{E}^{B}\right)$.

טענה: יהי V ממ"פ יהי $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ ויהי B בסיס אורתונורמלי אזי $\left(\left[T\right]_{B}\right)_{i,j}=\left\langle T\left(B_{j}\right),B_{i}\right\rangle$.

הגדרה: יהי V ממ"פ ויהי $v\in V$ נגדיר $a_{v}\in V^{*}$ כך $a_{v}\left(u\right)=\left\langle u,v\right\rangle$.

הגדרה: יהי V ממ"פ נ"ס אזי נגדיר $a:V\to V^{*}$ כך $a\left(v\right)=a_{v}$.

טענה: $a\left(v\right)$ הפיכה ובפרט איזומורפיזם קנוני בין V ל־V^{*}.

משפט: תהא V נ"ס אזי $\forall T\in\text{Hom}\left(V\right).\exists!T^{*}\in\text{Hom}\left(V\right).\forall v,u\in V.\left\langle T\left(v\right),u\right\rangle=\left\langle v,T^{*}\left(u\right)\right\rangle$.

טענה: $T^{*}=a^{-1}\circ T^{t}\circ a$.

טענה: יהיו $T,S\in\text{Hom}\left(V\right)$

- $\left(T+S\right)^{*}=T^{*}+S^{*}$.
- $\left(\alpha T\right)^{*}=\overline{\alpha}T^{*}$.
- $\left(T\circ S\right)^{*}=S^{*}\circ T^{*}$.
- $T^{**}=T$.
- $\left[T^{*}\right]_{B}=\left[T\right]_{B}^{*}$.

מסקנה: יהי B בסיס אורתונורמלי אזי $\left(\left[T^{*}\left(u\right)\right]_{B}\right)_{i}=\left\langle u,T\left(B_{i}\right)\right\rangle$.

איזומטריה: יהיו V,U ממ"פ אזי $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ הפיכה המקיימת $\forall v,u\in V.\left\langle v,u\right\rangle=\left\langle T\left(v\right),T\left(u\right)\right\rangle$.

טענה: יהיו $S,T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ איזומטריות

- $S\circ T$ איזומטריה.
- S^{-1} איזומטריה.
- $\left\Vert v\right\Vert_{V}=\left\Vert S\left(v\right)\right\Vert_{U}$, $\text{dist}\left(u,v\right)=\text{dist}\left(S\left(v\right),S\left(u\right)\right)$.
- $\theta_{v,u}=\theta_{S\left(v\right),S\left(u\right)}$, $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\text{Vol}\left(\text{Par}\left(S\left(B\right)\right)\right)$.

משפט: יהיו V,U ממ"פ אזי $V\cong U\Longleftrightarrow\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ התב"ש

- T איזומטריה.
- $T^{*}\circ T=Id$.
- לכל בסיס אורתונומלי B של V מתקיים כי $T\left(B\right)$ בסיס אורתונומלי של U.
- קיים בסיס אורתונומלי B של V עבורו $T\left(B\right)$ בסיס אורתונומלי של U.
- $\forall v,u\in V.\text{dist}\left(v,u\right)=\text{dist}\left(T\left(v\right),T\left(u\right)\right)$.

מסקנה: יהי B בסיס אזי (T איזומטריה) $\Longleftrightarrow$ ($\left[T\right]_{B}^{-1}=\left[T\right]_{B}^{*}$).

מסקנה: תהא T איזומטריה ויהי λ ע"ע אזי $\left|\lambda\right|=1$.

העתקה קונפורמית: $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ המקיימת $\forall v,u\in V.\theta_{v,u}=\theta_{T\left(v\right),T\left(u\right)}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ איזומטריה אזי λT קונפורמית.

העתקה שומרת נפח: $T\in\text{Hom}\left(V,U\right)$ המקיימת $\text{Vol}\left(\text{Par}\left(B\right)\right)=\text{Vol}\left(\text{Par}\left(T\left(B\right)\right)\right)$.

העתקה הרמיטית: $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת $T^{*}=T$.

העתקה נורמלית: $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת $TT^{*}=T^{*}T$.

משפט: יהי B בסיס אורתונורמלי ויהי C בסיס אזי (C אורתונורמלי) $\Longleftrightarrow$ ($\left[Id\right]_{C}^{B}$ אוניטרית).

טענה: A אוניטרית $\Longleftrightarrow$ T_{A} איזומטריה.

הגדרה:

- $U\left(n\right)=\left\{ Q\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)\mid QQ^{*}=I\right\}$.
- $SU\left(n\right)=\left\{ Q\in U\left(n\right)\mid\det\left(Q\right)=1\right\}$.
- $O\left(n\right)=\left\{ A\in M_{n}\left(\mathbb{R}\right)\mid AA^{t}=I\right\}$.

- $SO(n)=\{A\in O(n)\mid\det(A)=1\}$.

טענה: $\langle U(n),\cdot\rangle$, $\langle SU(n),\cdot\rangle$, $\langle O(n),\cdot\rangle$, $\langle SO(n),\cdot\rangle$ חבורות.

טענה: תהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ אזי $(\ker(T)=\mathrm{Im}(T^*)^{\perp})\wedge(\mathrm{Im}(T)=\ker(T^*)^{\perp})$.

טענה: תהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ אזי (T אוניטריות)$\vee$(T הרמיטיות) $\Longleftarrow$ (T נורמלית).

טענה: תהא T נורמלית אזי $\forall v,u\in V.\langle T(v),T(u)\rangle=\langle T^*(v),T^*(u)\rangle$.

מסקנה: $\|T(v)\|=\|T^*(v)\|$, $T^*(v)\perp T^*(u)\iff T(v)\perp T(u)$.

לכסינה אוניטרית/לכסינה אורתוגונלית: $T\in\mathrm{Hom}(V)$ עבורה קיים בסיס אורתונורמלי B כך ש־$[T]_B$ אלכסונית.

דמיון אוניטרי: $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ המקיימות כי קיימת מטריצה P אוניטרית עבורה $A=PBP^*$.

לכסינה אוניטרית/לכסינה אורתוגונלית: A אשר דומה אוניטרית למטריצה אלכסונית.

טענה: תהא A מטריצה הרמיטית/אוניטרית/נורמלית ותהא B דומה אוניטרית לA אזי B הרמיטית/אוניטרית/נורמלית.

למה: אם W הוא T אינו' אז $W^{\perp}$ הוא T^* אינו'.

למה: T נורמלית אז לכל λ,v מתקיים $T^*(v)=\overline{\lambda}v\iff T(v)=\lambda v$.

טענה: אם T נורמלית אז $T-\lambda I$ נורמלית.

טענה: אם T נורמלית אז ו"ע לע"ע שונים ניצבים.

למה: (T נורמלית)$\wedge$(f_T מתפרק לגורמים לינארים) $\iff$ (T ניתנת ללכסון אוניטרי).

משפט הפירוק הספקטרלי: $A\in M_n(\mathbb{C})$ ניתנת ללכסון אוניטרי $\iff A$ נורמלית.

מסקנה: תהא $A\in M_n(\mathbb{C})$ נורמלית

- $A=A^*\iff\mathrm{sols}_{\mathbb{C}}(f_A)\subseteq\mathbb{R}$.
- $AA^*=I\iff\mathrm{sols}_{\mathbb{C}}(f_A)\subseteq\{x\in\mathbb{C}\mid\|x\|=1\}$.

משפט הפירוק הספקטרלי: $A\in M_n(\mathbb{R})$ ניתנת ללכסון אורתוגונלי $\iff A$ סימטרית.

משפט: תהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ אזי (T נורמלית) $\iff$ ($\exists p\in\mathbb{R}[x].T^*=p(T)$).

טענה: תהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי קיים תמ"ו $U\subseteq V$ T־אינו' המקיים $\dim(U)\leq 2$.

משפט: תהא T העתקתה נורמלית אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו

$$[T]_B=\left(\begin{array}{ccc|ccccc}\lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & \\ \hline & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & -b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_r & b_r \\ & & & & & & -b_r & a_r\end{array}\right)$$

מסקנה: תהא T העתקה אורתוגונלית אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו

$$[T]_B=\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & R(\theta_1) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R(\theta_k) \end{array}\right)$$

לכסון סימולטני אוניטרי: יהיו $T,S\in\text{Hom}(V)$ נורמליות ומתחלפות אזי קיים בסיס B אורתונורמלי עבורו $[T]_B,[S]_B$ אלכסוניות.

תבנית בילינארית: יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $f:V\times W\to\mathbb{C}$ המקיימת

- לינאריות ברכיב הראשון: $f(\alpha v+\beta u,w)=\alpha f(v,w)+\beta f(u,w)$.
- לינאריות ברכיב השני: $f(w,\alpha v+\beta u)=\alpha f(w,v)+\beta f(w,u)$.

טענה: יהיו $\varphi\in V^*$, $\psi\in W^*$ אזי $f(v,w)=\varphi(v)\psi(w)$ תבנית בילינארית.

מרחב התבניות הבילינאריות: $\text{Bil}(V,W)=B(V,W)=\{T\in V\times W\to\mathbb{F}\mid T\text{תבנית בילינארית}\}$.

טענה: $B(V,W)$ מ"ו.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי $f_A(v,u)=v^tAu$ תבנית בילינארית.

טענה: תהא $f\in B(\mathbb{F}^m,\mathbb{F}^n)$ אזי $f=f_A$.$\exists A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

מסקנה: תהא $f_A\in B(\mathbb{F}^m,\mathbb{F}^n)$ אזי $(A)_{i,j}=f_A(e_i,e_j)$.

מטריצה מייצגת: תהא $f\in B(V,W)$ ויהיו C בסיס של V וגם B בסיס של W אזי המטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עבורה $f_A(x,y)=f\left(Q_C^{-1}(x),Q_B^{-1}(y)\right)$.

סימון: המטריצה המייצגת של f על פי הבסיסים C,B היא $[f]_B^C=M(f)$.

טענה: $\left([f]_B^C\right)_{i,j}=f(v_i,v_j)$.

מסקנה: $f(v,u)=[v]_C^t\cdot[f]_B^C\cdot[u]_B$.

משפט: $[*]_B^C:B(V,W)\to M_{\dim(V)\times\dim(W)}(\mathbb{F})$ המוגדרת $[*]_B^C(f)=[f]_B^C$ היא איזומורפיזם.

מסקנה: $\dim(B(V,W))=\dim(V)\cdot\dim(W)$.

משפט: $[f]_{B_1}^{C_1}=\left([Id]_{C_2}^{C_1}\right)^t[f]_{B_2}^{C_2}[Id]_{B_2}^{B_1}$.

דרגה של תבנית: תהא $f\in B(V,W)$ אזי $\text{rank}(f)=\text{rank}\left([f]_C^B\right)$.

מסקנה: $[f]_C^B=\left(\begin{array}{c|c} I_{\text{rank}(f)} & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$.

סימון: $B(V,V)=B(V)$.

סימון: אם $f\in B(V)$ אזי $[f]_C=[f]_C^C$.

מטריצות חופפות: $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $P^tBP=A$.$\exists P\in M_n^{\times}(\mathbb{F})$.

טענה: יהיו A,B חופפות אזי

- $\text{rank}(A)=\text{rank}(B)$.
- $\exists c\in\mathbb{F}.\,|A|=c^2|B|$.

תבנית סימטרית: $f\in B(V)$ המקיימת $\forall v,u\in V.f(v,u)=f(u,v)$.

תבנית אנטי סימטרית: $f\in B(V)$ המקיימת $\forall v,u\in V.f(v,u)=-f(u,v)$.

תבנית מנוונת: $f\in B(V)$ המקיימת $\exists v\in V\setminus\{0\}.\,(\forall w\in V.f(v,w)=0)\vee(\forall w\in V.f(w,v)=0)$.

הגדרה: תהא $\varphi \in B(V)$ מעל $\mathbb{F}$ המקיימת $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ אזי
- $\varphi^{+}(u,v) = \frac{\varphi(u,v)+\varphi(v,u)}{2}$.
- $\varphi^{-}(u,v) = \frac{\varphi(u,v)-\varphi(v,u)}{2}$.

משפט: תהא $\varphi \in B(V)$ אזי (φ סימטרית) $\iff$ ($[\varphi]_C$ סימטרית).

תבנית ריבועית: תהא $f \in B(V)$ תבנית סימטרית אזי $Q_f : V \to \mathbb{F}$ המקיימת $Q_f(v) = f(v,v)$.

משפט הפולריזציה: יהי $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ ותהא $f \in B(V)$ סימטרית אזי
- $f(v,w) = \frac{Q_f(v+v)-Q_f(v)-Q_f(w)}{2}$.
- $f \neq 0 \Longrightarrow Q_f \neq 0$.

לכסון תבניות: נניח $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ תהא $f \in B(V)$ תבנית סימטרית אז קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B$ אלכסונית.

מסקנה: תהא $f \in B(V)$ מעל $\mathbb{C}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B = \left(\begin{array}{c|c} I_{\text{rank}(f)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

מסקנה: תהא $f \in B(V)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי קיים בסיס B של V עבורו $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$.

משפט ההתמדה של סילבסטר: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ וגם $[f]_C = \text{Diag}(I_{p'}, -I_{q'}, 0)$ אזי $\langle p,q \rangle = \langle p',q' \rangle$.

אינדקס ההתמדה החיובי: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי p.

סימון: אינדקס ההתמדה החיובי הוא $\sigma_+(f)$.

אינדקס ההתמדה השלילי: נניח כי $[f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מעל $\mathbb{R}$ אזי q.

סימון: אינדקס ההתמדה החיובי הוא $\sigma_-(f)$.

הסיגנטורה/החתימה של תבנית: תהא f תבנית מעל $\mathbb{R}$ אזי $(\sigma_+(f), \sigma_-(f))$.

סימון: $\sigma_0(f) = \dim(V) - \text{rank}(f)$.

המינור הפינתי: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי נגדיר $A_{(k)} \in M_k(\mathbb{R})$ כך $\left(A_{(k)}\right)_{i,j} = (A)_{i,j}$.

הדטרמיננטה הפינתית: $\Delta_k = \left|A_{(k)}\right|$, $\Delta_0 = 1$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0$. $\forall k \in [n]$ אזי קיימת $C \in M_n(\mathbb{R})$ משולשית תחתונה עבורה CAC^t אלכסונית.

קריטריון סילבסטר: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0$. $\forall k \in [n]$ אזי $\sigma_-(A) = |\{i \in [n] \mid \Delta_i \Delta_{i-1} < 0\}|$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית עבורה $\Delta_k \neq 0$. $\forall k \in [n]$ אזי (A מוגדרת חיובית) $\iff$ ($\forall i \in [n] . \Delta_i > 0$).

משפט: יהי $\mathbb{F}$ שדה המקיים $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$ וגם $\forall \alpha \in \mathbb{F}. \exists \beta \in \mathbb{F}. \beta^2 = \alpha$ ותהא $T \in B(V)$ סימטרית אזי הסיגנטורה היא $(\text{rank}(T), 0)$.

שיטת לגראנז' על פי השלמה לריבוע: תהא Q_f תבנית ריבועית אזי קיימת החלפת משתנים עבורה $Q_f(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ בפרט $[Q_f]_B = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ באשר B בסיס המשתנים המוחלפים.

הגדרה: תהא $T \in B(V)$ סימטרית מעל $\mathbb{R}$ אזי
- חיובית לחלוטין/מוגדרת חיובית: $\forall v \in V \backslash \{0\} . T(v,v) > 0$.
- אי שלילית: $\forall v \in V \backslash \{0\} . T(v,v) \geq 0$.
- שלילית לחלוטין: $\forall v \in V \backslash \{0\} . T(v,v) < 0$.
- אי חיובית: $\forall v \in V \backslash \{0\} . T(v,v) \leq 0$.

טענה: תהא $T \in B(V)$ סימטרית ותהא $A = \text{Diag}(I_p, -I_q, 0)$ מטריצה מייצגת אזי
- T חיובית לחלוטין $\iff A = I$.
- T אי שלילית $\iff A = \text{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.
- T שלילית לחלוטין $\iff A = -I$.
- T אי חיובית $\iff A = \text{Diag}(-1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$.

משפט: תהא $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמיטית התב"ש
- T_A מוגדרת חיובית.
- לכל $T \in \text{Hom}(V)$ המטריצה $[T]_B = A$ מוגדרת חיובית.
- קיים $T \in \text{Hom}(V)$ כך שהמטריצה $[T]_B = A$ מוגדרת חיובית.
- כל הע"ע של A ממשיים חיוביים ממש.

משפט: תהא A סימטרית מייצגת של $f\in B\left(V\right)$ סימטרית מעל $\mathbb{R}$ אזי

$$\sigma_{+}\left(f\right)=\#\left\{ \lambda\mid\lambda>0\wedge\text{ע"ע }\lambda\right\}$$
$$\sigma_{-}\left(f\right)=\#\left\{ \lambda\mid\lambda<0\wedge\text{ע"ע }\lambda\right\}$$
$$\sigma_{0}\left(f\right)=\#\left\{ \lambda\mid\lambda=0\wedge\text{ע"ע }\lambda\right\}$$

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ הרמיטית אי שלילית מעל $\mathbb{C}$ אזי קיימת ויחידה $R\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיימת $R^{2}=T$.

סימון: אם $R^{2}=T$ אזי $R=\sqrt{T}$.

משפט הפירוק הפולרי של העתקות לינאריות הפיכות: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ הפיכה אזי קיימות ויחידות $U\in\text{Hom}\left(V\right)$ אוניטרית ו־$R\in\text{Hom}\left(V\right)$ מוגדרת חיובית הרמיטית עבורן מתקיים $T=UR$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ הפיכה אזי נגדיר $R=\sqrt{TT^{*}}$, $U=T\circ\left(\sqrt{TT^{*}}\right)^{-1}$.

ערכים סינגולרים: תהא $T\in\text{Hom}\left(V\right)$ אזי הע"ע של $\sqrt{TT^{*}}$.

טענה: $f_{TT^{*}}\left(x\right)=f_{T^{*}T}\left(x\right)$.

פירוק SVD: תהא $A\in M_{n}\left(\mathbb{C}\right)$ אזי קיימות U,V אוניטריות וקיימת D אלכסונית אי שלילית המקיימות $A=UDV$.

טענה: נניח כי $A=UDV$ פירוק SVD ונניח כי $\alpha_{1}\dots\alpha_{n}$ הערכים הסינגולרים של A אזי $D=\text{Diag}\left(\alpha_{1},\dots,\alpha_{n}\right)$.

תבנית סימפלקטית: תבנית בילינארית אנטי סימטירת לא מנוונת.

הגדרה: תהא $\omega\in B\left(V\right)$ סימפלקטית ויהי $W\subseteq V$ תמ"ו אזי $W^{\omega}=\left\{ v\in V\mid\forall w\in W.\omega\left(v,w\right)=0\right\}$.

מרחב לגרנז'יאני: תהא $\omega\in B\left(V\right)$ סימפלקטית אזי תמ"ו $W\subseteq V$ המקיים $W^{\omega}=W$.

מבנה מרוכב: יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ אזי איזומורפיזם $J\in\text{Hom}\left(V\right)$ המקיים $J^{2}=-I$.

מבנה תואם תבנית: מבנה מרוכב J ותבנית סימפלקטית ω המקיימות $\left(\forall v\in V.\omega\left(Jv,v\right)>0\right)\wedge\left(\forall v,u\in V.\omega\left(Jv,Ju\right)=\omega\left(v,u\right)\right)$.

שניונית: פולינום בנעלמים $x_{1}\dots x_{n}$ מהצורה $c+2\sum_{i=1}^{n}b_{i}x_{i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\left(A\right)_{i,j}x_{i}x_{j}+\sum_{i=1}^{n}\left(A\right)_{i,i}x_{i}^{2}=0$.

מסקנה: מטריציונית שניונית היא $c+2b^{t}x+x^{t}Ax=0$.

המטריצה המצומצת של שניונית: A.

מסקנה: מטריצניות שניונית היא $\left(\begin{array}{cccc} x_{1} & \dots & x_{n} & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} A & b\\ b & c \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_{1}\\ \vdots\\ x_{n}\\ 1 \end{array}\right)=0$.

המטריצה המורחבת של שניונית: $\left(\begin{array}{cc} A & b\\ b & c \end{array}\right)$.

איזומטריה אופיינית: $f:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}^{3}$ המקיימת כי קיימת איזומטריה T וקיים $w\in\mathbb{R}^{3}$ עבורם $f\left(x\right)=T\left(x\right)+w$.