פעולה בינארית: פונקציה $*:A\times A\to A$ ונסמן $a*b:=*(\langle a,b\rangle)$.

אסוציטיביות/קיבוציות: $\forall a,b,c\in A.a*(b*c)=(a*b)*c$.

קומוטטיביות/חילופיות/אבליות: $\forall a,b\in A.a*b=b*a$.

איבר יחידה: $e\in G$ המקיים $\forall g\in G.e*g=g*e=g$.

איבר הופכי/נגדי: יהי $g\in G$ אזי $h\in G$ המקיים $g*h=h*g=e_G$.

מונואיד: תהא קבוצה G ופעולה בינארית $*$ אזי זוג סדור $\langle G,*\rangle$ המקיים ($*$ אסוציטיבית)$\wedge$(קיים איבר יחידה).

חבורה: $\langle G,*\rangle$ המקיים (מונואיד)$\wedge$(קיים איבר הופכי).

סימון: e_G איבר יחידה בחבורה כללית, 1_G אם הפעולה מסומנת ב־$*$, 0_G אם הפעולה מסומנת ב־$+$.

הגדרה: יהי $\langle A,*\rangle$ מונואיד אזי $A^\times=\{a\in A\mid \exists h\in A.a*h=h*a=e_A\}$.

טענה: $\left\langle A^\times,*\restriction_{A^\times\times A^\times}\right\rangle$ חבורה.

הגדרה: $\left(S_A=A\overset{1-1}{\underset{onto}{\to}}A\right)\wedge\left(S_n=S_{[n]}\right)$.

חבורת התמורות: $\langle S_A,\circ\rangle$.

הגדרה: יהי $n\in\mathbb{N}_{\ge2}$ אזי $x\sim_n y\iff n\mid x-y$ יחס שקילות מעל $\mathbb{Z}$.

טענה: $\left(\mathbb{Z}/\sim_n=\left\{[0]_{\sim_n},\ldots,[n-1]_{\sim_n}\right\}\right)\wedge\left([x]_{\sim_n}+[y]_{\sim_n}=[x+y]_{\sim_n}\right)$.

חבורת השאריות: $\langle \mathbb{Z}/\sim_n,+\rangle$.

פונקציית אוילר: כמות המספרים הזרים הקטנים מאשר $n\in\mathbb{N}$ הוא $\varphi(n)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

טענה: יהיו $e_1,e_2\in G$ איברי יחידה אזי $e_1=e_2$.

טענה: $(\forall a,b,c\in G.a*b=e_G=c*a)\implies(b=c)$.

מסקנה: יהי $a\in G$ וכן $h_1,h_2\in G$ הופכיים אל a אזי $h_1=h_2$.

סימון: יהי $a\in G$ אזי ההופכי שלו הינו a^{-1}.

הגדרה: $\left(a^0=e_G\right)\wedge\left(a^{n+1}=a*a^n\right)\wedge\left(a^{-n}=\left(a^{-1}\right)^n\right)$.

סדר: $\text{ord}(a)=\min\{n\in\mathbb{N}_+\mid a^n=e_G\}$.

משפט: $|G|<\aleph_0\implies\exists a\in G.\text{ord}(a)\le|G|$.

תת חבורה: תהא $\langle G,*\rangle$ חבורה אזי $H\subseteq G$ המקיימת $\left\langle H,*\restriction_{H\times H}\right\rangle$ חבורה.

סימון: תהא G חבורה וכן $H\subseteq G$ תת חבורה אזי $H\le G$.

בוחן תת חבורה: תהא $H\subseteq G$ תת קבוצה אזי (H חבורה)$\iff$(H סגורה לפעולה $*$)$\wedge$($e_G\in H$)$\wedge$($\forall h\in H.h^{-1}\in H$).

איזומורפיזם בין חבורות: $f:G\overset{1-1}{\underset{onto}{\to}}H$ המקיימת $f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$.

חוק הפילוג: $((b+c)*a=b*a+c*a)\wedge(a*(b+c)=a*b+a*c)$.

חוג עם יחידה: $\langle R,+,*\rangle$ המקיים ($\langle R,+\rangle$ חבורה אבלית)$\wedge$($\langle R,*\rangle$ מונואיד)$\wedge$(חוק הפילוג).

איזומורפיזם בין חוגים: $f:R\overset{1-1}{\underset{onto}{\to}}F$ המקיימת ($f(\alpha*\beta)=f(\alpha)*f(\beta)$)$\wedge$($f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$)$\wedge$($f(1_R)=1_F$).

חוג הפולינומים: יהי $\langle R,+,\cdot\rangle$ חוג חילופי אזי $\langle R[x],+,\cdot\rangle$.

נוסחאת המעלות: $\deg(p+q)\le\max(\deg(p),\deg(q))$ וגם $\deg(p\cdot q)\le\deg(p)+\deg(q)$.

הגדרה: $T^{-1}=\left\{t^{-1}\mid t\in T\right\}$.

תת החבורה שנוצרת על ידי T: $\langle T\rangle=\bigcup_{n=0}^{\infty}\left\{\overset{n}{\underset{i=1}{*}}a_i\mid a\in\left(T\cup T^{-1}\right)^n\right\}=\left\{a_1*\ldots*a_n\mid a_1,\ldots,a_n\in T\cup T^{-1}\right\}$.

משפט: $\forall H\ge T.\langle T\rangle\le H$, במילים אחרות $\langle T\rangle$ תת החבורה הקטנה ביותר ביחס ההכלה שמכילה את T.

משפט: תהא G חבורה סופית אזי $\forall g\in G.|\langle g\rangle|=\text{ord}(g)$.

מנה של חבורה: יהיו $H\le G$ אזי $g_1\sim_H g_2\iff g_1*g_2^{-1}\in H$.

סימון: יהיו $H\le G$ אזי $G/H=G/\sim_H$.

משפט: תהא G חבורה אזי $(|G|=|G/H|\cdot|H|)\wedge(\forall g\in G.\text{ord}(g)\mid|G|)$.

משפט: תהא G חבורה עבורה $|G|\in\mathbb{P}$ אזי (G אבלית)$\wedge$($\forall g\ne e_G.\langle g\rangle=G$).

מחלק אפס: יהי R חוג אזי $a\in R\backslash\{0\}$ המקיים $\exists b\in R\backslash\{0\}.a*b=0_G$.

תחום שלמות: $\langle R,+,*\rangle$ המקיים ($\langle R,+,*\rangle$ חוג אבלי)$\wedge$(לא קיימים מחלקי אפס).

חוק צמצום: יהי R תחום שלמות אזי $\forall a\ne0_R.\forall b,c\in R.(a*c=a*b)\implies(c=b)$.

שדה: $\langle\mathbb{F},+,*\rangle$ המקיים ($\langle\mathbb{F},+,*\rangle$ חוג)$\wedge$($\langle\mathbb{F}\backslash\{0_\mathbb{F}\},*\rangle$ חבורה אבלית)$\wedge$($0_\mathbb{F}\ne1_\mathbb{F}$).

טענה: ($\mathbb{F}$ שדה)$\Longleftarrow$($\mathbb{F}$ תחום שלמות).

משפט: (R תחום שלמות סופי)$\Longleftarrow$(R שדה).

משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $(n\in\mathbb{P})\Longleftrightarrow$($\langle\mathbb{Z}_n,+,*\rangle$ שדה).

מציין של שדה: $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)=\min\left\{n\in\mathbb{N}\mid\sum_{i=1}^{n}1_{\mathbb{F}}=0_{\mathbb{F}}\right\}$ ואחרת $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)=0$.

טענה: $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)\in\mathbb{P}\cup\{0\}$.

הבינום של ניוטון: יהי $\mathbb{F}$ שדה אזי $\forall a,b\in\mathbb{F}.\left(a+b\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k}b^{n-k}$.

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה עבורו $\mathrm{char}\left(\mathbb{F}\right)=p\neq0$ אזי $\forall a,b\in\mathbb{F}.\forall k\notin\{0,p\}.\left(\binom{p}{k}\cdot a=0\right)\wedge\left(\left(a+b\right)^{p}=a^{p}+b^{p}\right)$.

המשפט הקטן של פרמה: $\forall p\in\mathbb{P}.\forall a\in\mathbb{Z}_{p}.a^{p}\equiv a\mod p$.

קוסט/מחלקה שמאלית: יהיו $G\leq H$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $g*H=\{g*h\mid h\in H\}$.

קוסט/מחלקה ימנית: יהיו $G\leq H$ חבורות ויהי $g\in G$ אזי $H*g=\{h*g\mid h\in H\}$.

סימון: $G/H=\{g*H\mid g\in G\}$, $H\backslash G=\{H*g\mid g\in G\}$.

טענה: $\left(G/H\right)\wedge\left(H\backslash G\right)$ חלוקות של G.

טענה: $\left|G/H\right|=\left|H\backslash G\right|$.

אינדקס: יהיו $G\leq H$ חבורות אזי $[G:H]=\left|G/H\right|$.

משפט לגראנז': יהיו $G\leq H$ חבורות סופיות אזי $\left(\left|H\right|\mid\left|G\right|\right)\wedge\left([G:H]=\frac{|G|}{|H|}\right)$.

תת חבורה נורמלית: תהא G חבורה אזי $N\leq G$ המקיימת $\forall g\in G.gN=Ng$.

סימון: תהא G חבורה וכן $N\leq G$ תת חבורה נורמלית אזי $N\trianglelefteq G$.

כפל קבוצות: תהיינה $G\leq B,A$ חבורות אזי $A*B=\{a*b\mid a\in A\wedge b\in B\}$.

משפט: יהיו $g_1,g_2\in G$ אזי (H נורמלית)$\Longleftrightarrow\left(\left(g_1H\right)*\left(g_2H\right)=\left(g_1*g_2\right)H\right)$.

טענה: (G/H חבורה עם כפל קבוצות)$\Longleftrightarrow$(H נורמלית).

משוואה: יהיו f,g פונקציות עבורן $\mathrm{dom}\left(g\right)=\mathrm{dom}\left(f\right)$ אזי הטענה $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.

הגדרה: תהא X קבוצה עבורה $\mathrm{dom}\left(g\right)=\mathrm{dom}\left(f\right)=X^{n}$ אזי המשוואה מעל X עם n משתנים.

קבוצת פתרונות: תהא $f\in X^{B}$ ותהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{sols}_{A}\left(f\right)=\{a\in A\mid f\left(a\right)=0\}$.

מערכת משוואות: יהיו n משוואות $f_i\left(x\right)=g_i\left(x\right)$ אזי $E=\left\langle f_1\left(x\right)=g_1\left(x\right),\ldots,f_n\left(x\right)=g_n\left(x\right)\right\rangle$.

סימון: תהא מערכת משוואות E אזי E_i תהיה משוואה מספר i.

קבוצת פתרונות של מערכת: $\mathrm{sols}_{A}\left(E\right)=\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{sols}_{A}\left(E_i\right)$.

שקילות: E,E' מערכות/משוואות עבורן $\mathrm{sols}_{A}\left(E\right)=\mathrm{sols}_{A}\left(E'\right)$.

טענה: תהא h חח"ע אזי $\mathrm{sols}\left(\left(h\circ f\right)\left(x\right)=\left(h\circ g\right)\left(x\right)\right)=\mathrm{sols}\left(f\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

קבוצה אלגברית: $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה קיימת מערכת משוואות E מעל $\mathbb{R}$ עם n משתנים המקיימת $\mathrm{sols}\left(E\right)=A$.

פונקציה ליניארית: $f:\mathbb{F}^{n}\to\mathbb{F}$ המקיימת $\exists a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}.f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$.

משוואה ליניארית: תהא f פונקציה ליניארית אזי $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=b$.

מערכת משוואות ליניארית: מערכת משוואות שכל המשוואות בה ליניאריות.

סימון: כדי לייצג מערכת משוואות ליניארית נכתוב $\begin{cases}a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n & =b_1\\ \vdots & \vdots\\ a_{m,1}x_1+\ldots+a_{m,n}x_n & =b_m\end{cases}$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^{2}$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee(\mathbb{R}^{2})$.

משפט: קבוצת הפתרונות של משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}^{3}$ היא $(\varnothing)\vee$(קו ישר)$\vee$(מישור)$\vee(\mathbb{R}^{3})$.

וקטור: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{F}$ אזי $\left\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\right\rangle=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

חיבור וקטורים: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n,\beta_1\ldots\beta_n\in\mathbb{F}$ אזי $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$.

כפל וקטורים: יהיו $\alpha_1\ldots\alpha_n\in\mathbb{F}$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי $\lambda\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot\alpha_1\\ \vdots\\ \lambda\cdot\alpha_n\end{pmatrix}$.

וקטור ה־0: יהי $n\in\mathbb{N}_{+}$ אזי $\bar{0}_n=\begin{pmatrix}0_{\mathbb{F}}\\ \vdots\\ 0_{\mathbb{F}}\end{pmatrix}$.

טענה: יהי $v\in\mathbb{F}^{n}$ וקטור יהי $t\in\mathbb{F}$ אזי $\left(\left(t=0_{\mathbb{F}}\right)\vee\left(v=\bar{0}_n\right)\right)\Longleftrightarrow\left(t\cdot v=\bar{0}\right)$.

משוואה ליניארית הומוגנית: משוואה ליניארית $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$.

טענה: תהא מערכת משוואות לינאריות הומוגניות E אזי $\bar{0} \in \text{sols}(E)$.

משפט: תהא E מערכת משוואות לינאריות הומוגניות אזי $\text{sols}(E)$ סגורה ביחס לחיבור וקטורים וכפילה בסקלר.

סימון: תהא E מערכת משוואות לינאריות אזי E_0 מערכת המשוואות הלינאריות ההומגניות עם אותן פונקציות לינאריות.

משפט: $\forall p \in \text{sols}(E) . \text{sols}(E) = \text{sols}(E_0) + p$.

מטריצה: $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$.

סימון: $(A)_{i,j} = a_{i,j}$.

סדר מטריצה: מטריצה A תקרא מסדר $m \times n$ אם יש לה m שורות ו־n עמודות.

הגדרה: קבוצת כל המטריצות מסדר $m \times n$ מעל R תסומן $M_{m\times n}(R)$.

סימון: $C_j(A)$ הינה העמודה ה־jית, $R_i(A)$ הינה השורה ה־iית.

מטריצת ה־0: תהא מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, מתקיים $\forall i \in [m] . \forall j \in [n] . (A)_{i,j} = 0_{\mathbb{F}}$.

מטריצה ריבועית: $A \in M_{m\times m}(\mathbb{F})$.

מטריצת מקדמים: עוד סימון אפשרי לייצוג מערכת לינארית של משוואות הינה $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$.

מטריצת המקדמים המצומצמת: $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$.

עמודת המקדמים החופשיים: $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

איבר פותח בשורה: $\min\left(j \in [n] \mid (A)_{i,j} \neq 0\right)$.

מטריצה מדורגת: מטריצה המקיימת כי (כל שורות האפסים נמצאות למטה)$\wedge$(בכל שורה שיש בה איבר פותח האיבר הפותח הינו מימין ממש לאיבר הפותח בשורה מעליו).

מטריצה מדורגת קנונית: מטריצה מדורגת המקיימת כי (כל האיברים הפותחים הם 1)$\wedge$(בכל עמודה של איבר פותח שאר אברי העמודה הם 0).

שורת סתירה: שורה מהצורה $(0,\dots,0|b)$ באשר $b \neq 0$.

אלגוריתם: תהא $A \in M_{m\times(n+1)}(\mathbb{F})$ מטריצה מדורגת קנונית

- אם קיימת שורת סתירה, $\text{sols}(A) = \varnothing$.
- אם לא קיימת שורת סתירה, נניח כי בעמודות $I = \{i_1 \dots i_k\}$ לא קיים איבר פותח אזי

$$\text{sols}(A) = \left\{ v \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; \forall i \notin I . v_i = (A)_{i,n+1} - \sum_{j \in I}\left((A)_{i,j} v_j\right) \right\}$$

פעולה אלמנטרית: פונקציה $\varphi : M_{m\times n}(\mathbb{F}) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) . \text{sols}(A) = \text{sols}(\varphi(A))$.

הפעולות האלמנטריות של גאוס: (החלפת שורה $\varphi_{R_i \leftrightarrow R_j}(A)$)$\wedge$(הכפלה בסקלר $\varphi_{R_i \to \lambda R_i}(A)$)$\wedge$(חיבור שורה $\varphi_{R_i \to R_i + R_j}(A)$).

שקילות שורה (ש"ש): $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עבורן קיימות פעולות אלמנטריות $\varphi_1 \dots \varphi_n$ המקיימות $(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n)(A) = B$.

משפט גאוס: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה.

אלגוריתם גאוס: $\mathcal{O}\left(n^2 m\right)$

$$
\begin{aligned}
&\text{row} = 1\\
&\text{for}\ \ (1 \le \text{col} \le n)\\
&\qquad \text{if}\ \ \left(\exists \min(j) \ge \text{row}.\, (A)_{j,\text{col}} \neq 0\right)\\
&\qquad\qquad \text{if}\ \ (j \neq \text{row})\\
&\qquad\qquad\qquad R_j \leftrightarrow R_{\text{row}}\\
&\qquad\qquad R_{\text{row}} \to \frac{1}{(A)_{\text{row},\text{col}}} R_{\text{row}}\\
&\qquad\qquad \text{for}\ \ (1 \le k \le m \wedge k \neq \text{row})\\
&\qquad\qquad\qquad R_k \to R_k - (A)_{k,\text{col}} R_{\text{row}}\\
&\qquad\qquad \text{row} += 1
\end{aligned}
$$

מסקנה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מדורגת קנונית ללא שורת סתירה בעלת k שורות ללא איבר פותח אזי $|\text{sols}(A)| = |\mathbb{F}|^k$.

הדלתא של קרונקר: $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & else \end{cases}$.

מטריצת היחידה: $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ המקיימת $(I_n)_{i,j} = \delta_{i,j}$.

משפט: תהא $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ אזי (למערכת $(A|0)$ יש פתרון יחיד)$\Longleftrightarrow$(הצורה הקנונית של A היא I_n).

משפט: מערכת משוואות לינארית עם m משוואות ו־n נעלמים שקולה למשוואה אחת של m־יות.

צירוף לינארי: יהיו $\langle \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \rangle \in (\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v_i}$ עבור $\alpha \in \mathbb{F}^n$.

כפל מטריצה ב־n־יה: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}).\forall \vec{v} \in \mathbb{F}^n. A\vec{v} = \sum_{i=1}^n C_i(A)\vec{v_i}$.

משפט: $(A\cdot(\underline{v}+\underline{u}) = A\cdot\underline{v} + A\cdot\underline{u}) \wedge (A\cdot(\alpha\cdot\underline{v}) = \alpha\cdot(A\cdot\underline{v})) \wedge$(יש מחלקי אפס).

מטריצת סיבוב: $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

מטריצת ונדרמונד: מטריצה שבא כל עמודה או שורה הינה סדרה הנדסית.

פולינום לגראנז' ה־i: $P_i(x) = \left(\prod_{k=1}^{j-1}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)\left(\prod_{k=j+1}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\right)$, מתקיים $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

סימון: יהי $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \in (\mathbb{F}^m)^n$ נגדיר $\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

הגדרה: נגדיר $e_j \in \mathbb{F}^n$ כך $(e_j)_i = \delta_{j,i}$.

מטריצת תמורה: יהי $\sigma \in S_n$ נגדיר $P(\sigma) = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma(1)} & \ldots & e_{\sigma(n)} \\ | & & | \end{pmatrix}$ מתקיים $(P(\sigma)\cdot v)_i = v_{\sigma^{-1}(i)}$.

משפט אי הפרישה: תהא $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ וכן B הצורה הקנונית אזי $(\exists i. R_i(B) = 0) \Longleftrightarrow (\exists b \in \mathbb{F}^m.\text{sols}(A|b) = \varnothing)$.

מסקנה: $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}).(n < m) \Longrightarrow (\exists b \in \mathbb{F}^m.\text{sols}(A|b) = \varnothing)$.

סימון: $M_{n\times n}(\mathbb{F}) = M_n(\mathbb{F})$.

מסקנה: $\forall A \in M_n(\mathbb{F}).(\forall b \in \mathbb{F}^n.\text{sols}(A|b) \neq \varnothing) \Longrightarrow (\forall b \in \mathbb{F}^n.|\text{sols}(A|b)| = 1)$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v \in (\mathbb{F}^n)^m$ נגדיר $\text{span}(v) = \left\{\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \mid \alpha \in \mathbb{F}^m\right\}$.

סדרה פורשת: סדרה $v \in (\mathbb{F}^n)^m$ שמקיימת $\text{span}(v) = \mathbb{F}^n$.

הגדרה: נגדיר $T : (\mathbb{F}^n)^m \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ כך α $T_{\vec{v}}(\alpha) = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \ldots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ על)$\iff$($\vec{v}$ פורשת).

סדרה בת"ל (בלתי תלויה לינארית): סדרה $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ המקיימת $(\alpha = 0) \iff (\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0) .\forall \alpha \in \mathbb{F}^n$.

בסיס: $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ בת"ל ופורשת.

טענה: יהיו $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ ונגדיר $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

- (v פורשת)$\iff (\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| > 0)$.
- (v בת"ל)$\iff (\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| < 2)$.
- (v בסיס)$\iff (\forall b \in \mathbb{F}^m. |\text{sols}(A\underline{x} = b)| = 1)$.

טענה: ($T_{\vec{v}}$ חח"ע)$\iff$($\vec{v}$ בת"ל).

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ אזי $\text{LD}(v) = \{\alpha \in \mathbb{F}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0\}$.

הערה: (v בת"ל)$\iff (\text{LD}(v) = \{0\})$.

הנפרשת/ספאן: תהא $K \subseteq \mathbb{F}^n$ אזי $\text{span}(K) = \{u \in \mathbb{F}^n \mid \exists m \in \mathbb{N}_+ . \exists v \in K^m . \exists \alpha \in \mathbb{F}^m . u = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i\} \cup \{0\}$.

משפט: (v בת"ל $\Longleftarrow$ כל תת סדרה של v בת"ל)$\wedge$(v פורשת $\Longleftarrow$ כל על סדרה של v פורשת).

משפט: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ בת"ל וסדרה $u \in \mathbb{F}^m$ מתקיים ($v^\frown \langle u \rangle$ בת"ל)$\iff (u \notin \text{span}(v))$.

טענה: $(u \in \text{span}(v)) \iff (\text{span}(v) = \text{span}(v^\frown \langle u \rangle)) .\forall v \in (\mathbb{F}^m)^n . \forall u \in \mathbb{F}^m$.

טענה: $(\exists x \in \text{LD}(v) . x_i \neq 0) \iff \left(v_i \in \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)\right) .\forall v \in (\mathbb{F}^m)^n . \forall i \in [n]$.

משפט: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$ התב"ש

- v בת"ל.
- $\forall i \in [n] . v_i \notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[n]\setminus\{i\}}}\right)$.
- $\forall i \in [n] . v_i \notin \text{span}\left(v_{\restriction_{[i-1]}}\right)$.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ פחות מ־n־יות לא פורשות.

משפט: מעל $\mathbb{F}^n$ יותר מ־n־יות ת"ל.

מסקנה: מעל $\mathbb{F}^n$ לכל בסיס B מתקיים $|B| = n$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $v \in (\mathbb{F}^m)^n$, כל שניים מהשלושה שקולים

- v בת"ל.
- v פורשת.
- $n = m$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A \in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- לכל b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון.
- עמודות A פורשות.
- קיים b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בת"ל.
- לכל b למערכת $Ax = b$ קיים פתרון יחיד.
- עמודות A בסיס.

כפל מטריצות: $\forall \langle A, B \rangle \in M_{k \times m}(\mathbb{F}) \times M_{m \times n}(\mathbb{F}) . \forall i \in [k] . \forall j \in [m] . (AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^m (A)_{i,t} (B)_{t,j}$.

נוסחה: $(BA)_{i,j} = R_i(B) \cdot C_j(A)$.

טענה: $C_i(YX) = YC_i(X)$, $R_i(YX) = R_i(Y)X$.

כפל מטריצה בסקלר: $(\alpha A)_{i,j} = \alpha (A)_{i,j}$.

מטריצה סקלארית: αI_n.

טענה: $A(\alpha B) = \alpha (AB)$.

טענה: $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}) . (AI_n = A) \wedge (I_m A = A)$.

מסקנה: $\langle M_n(\mathbb{F}), \cdot \rangle$ מונואיד.

מטריצות מתחלפות: $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ המקיימות $AB = BA$.

שחלוף: $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{F}) . \left(A^T\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$.

הערה: $R_i\left(A^T\right)=C_i\left(A\right)$.

טענה: $\left(A^T\right)^T=A$,$\left(\alpha A\right)^T=\alpha\left(A^T\right)$,$\left(AB\right)^T=B^TA^T$.

מטריצה סימטרית: $A^T=A$.

מטריצה אנטי סימטרית: $A^T=-A$.

חיבור מטריצות: $\forall A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\left(A+B\right)_{i,j}=\left(A\right)_{i,j}+\left(B\right)_{ij}$.

טענה: $\left\langle M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right),+\right\rangle$ חבורה אבלית וסגורה לכפל בסקלר.

טענה: $\left(\left(A+B\right)^T=A^T+B^T\right)\wedge\left(A\left(B+C\right)=AB+AC\right)$.

הפיכות: תהא $A_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- הפיכה משמאל: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).BA=I_n$.
- הפיכה מימין: $\exists B\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).AB=I_m$.
- הפיכה: (הפיכה משמאל)$\wedge$(הפיכה מימין).

טענה: $\forall A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).\forall B,C\in M_{n\times m}\left(\mathbb{F}\right).\left(AB=I_m\right)\wedge\left(CA=I_n\right)\Longrightarrow B=C$.

מסקנה: אם קיימת הופכית היא יחידה.

סימון: ההופכית של A היא A^{-1}.

מטריצה אלכסונית: $\left(A\right)_{i,j}=\begin{cases}\lambda_i & i=j\\ 0 & else\end{cases}$.

משפט: מטריצה בעלת שורת עמודות/שורות אפסים לא הפיכה.

הערה: $R\left(-\theta\right)R\left(\theta\right)=I_2=R\left(\theta\right)R\left(-\theta\right)$.

טענה: $\left(\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\right)\wedge\left(\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T\right)\wedge\left(\left(A^{-1}\right)^{-1}=A\right)$.

משפט: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\Longleftrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\text{sols}\left(A|b\right)\neq\varnothing\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longleftrightarrow\left(\left|\text{sols}\left(A|0\right)\right|\leq1\right)$.
- (A הפיכה)$\Longleftrightarrow\left(\forall b\in\mathbb{F}^m.\left|\text{sols}\left(A|b\right)\right|=1\right)$.

מסקנה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$

- (A הפיכה מימין)$\Longrightarrow$(עמודות A פורשות)$\wedge\left(m\leq n\right)$.
- (A הפיכה משמאל)$\Longrightarrow$(עמודות A בת"ל)$\wedge\left(m\geq n\right)$.
- (A הפיכה)$\Longrightarrow$(עמודות A בסיס)$\wedge\left(m=n\right)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ התב"ש

- A הפיכה משמאל.
- A הפיכה.
- A הפיכה מימין.
- A^T הפיכה.

טענה: תהא φ פונקציה אלמנטרית אזי $\varphi\left(AB\right)=\varphi\left(A\right)B$.

מטריצה אלמנטרית: $E_\varphi=\varphi\left(I_m\right)$.

מסקנה: $\varphi\left(A\right)=E_\varphi A$.

טענה: $E_\varphi^{-1}=R_{\varphi^{-1}}$.

אלגוריתם: $\left(A\mid I\right)\sim\left(I\mid A^{-1}\right)$.

מטריצה נילפוטנטית: $\exists m\in\mathbb{N}.A^m=0$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי (A הפיכה)$\Longleftrightarrow\left(A\sim I\right)$.

מסקנה: (A,B הפיכות)$\Longleftrightarrow$(AB הפיכה).

הגדרה: $\text{Par}\left(\left\{v_1,\ldots,v_m\right\}\right)=\left\{\sum_{i=1}^m\alpha_iv_i\mid\alpha\in\left[0,1\right]^m\right\}$.

טענה: A הפיכה $\Longleftrightarrow\text{Vol}\left(\text{Par}\left(A\right)\right)\neq0$ (הנפח של המקבילון).

לינארית על פי שורה: פונקציה שמקיימת $f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}-R_1-\\ \vdots\\ -R_i+R_i'-\\ \vdots\\ -R_n-\end{pmatrix}$.

פונקציית נפח: פונקציה $\mathcal{N}:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ (לינארית על פי שורה)$\wedge(\mathcal{N}(I)=1)\wedge((\exists i\neq j.R_i(A)=R_j(A))\Longrightarrow\mathcal{N}(A)=0)$.

טענה: אם ב־A יש שורת אפסים אז $\mathcal{N}(A)=0$.

משפט: תהא φ פעולה אלמנטרית אזי $\mathcal{N}(\varphi(A))=\mathcal{N}(A)\cdot\begin{cases}\lambda & \varphi=f_{R_i\to\lambda R_i}\\ -1 & \varphi=f_{R_i\leftrightarrow R_j}\\ 1 & \varphi=f_{R_i\to R_i+\lambda R_j}\end{cases}$

מסקנה: יהיו A,B שקולות שורה אזי $(\mathcal{N}(A)=0)\Longleftrightarrow(\mathcal{N}(B)=0)$.

מסקנה: (A הפיכה)$\Longleftrightarrow(\mathcal{N}(A)\neq0)$.

מסקנה: $\mathcal{N}(E_\varphi A)=\mathcal{N}(E_\varphi)\mathcal{N}(A)$.

משפט: יהיו $\mathcal{N}_1,\mathcal{N}_2:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ פונקציות נפח אזי $\mathcal{N}_1=\mathcal{N}_2$.

מסקנה: $\mathcal{N}(AB)=\mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.

מסקנה: $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}\left(A^T\right)$.

מינור: תהא $A\in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $i,j\in[n]$ אזי $A_{i,j}\in M_{n-1}(\mathbb{F})$ כך שמתקיים

$$(A_{i,j})_{r,s}=\begin{cases}(A)_{r,s} & (r\leq i-1)\wedge(s\leq j-1)\\ (A)_{r+1,s} & (r\geq i)\wedge(s\leq j-1)\\ (A)_{r,s+1} & (r\leq i-1)\wedge(s\geq j)\\ (A)_{r+1,s+1} & (r\geq i)\wedge(s\geq j)\end{cases}$$

דטרמיננטה: פונקציית הנפח היחידה תיקרא $\det^n$.

הערה: $\forall A\in M_1(\mathbb{F}).\det(A)=(A)_{1,1}$.

פיתוח דטרמיננטה על פי עמודה: יהי $j\in[n]$ אזי $\det_j^n(A)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+j}(A)_{k,j}\det_j^{n-1}(A_{k,j})$.

מסקנה: $\forall j,i\in[n].\det_j^n(A)=\det_i^n(A)$.

סימון: $\det_j^n=\det$.

סימון: $\det(A)=|A|$.

פיתוח דטרמיננטה על פי שורה: יהי $i\in[n]$ אזי $\det(A)=\sum_{k=1}^n(-1)^{k+i}(A)_{i,k}\det(A_{i,k})$.

מטריצה מצורפת: $(\text{adj}(A))_{i,j}=(-1)^{i+j}|A_{j,i}|$.

טענה: $\text{adj}\left(A^T\right)=(\text{adj}(A))^T$.

משפט: $A\cdot\text{adj}(A)=|A|I=\text{adj}(A)\cdot A$.

מסקנה: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj}(A)$.

כלל קרמר: תהא מערכת משוואת $Ax=b$ כאשר A הפיכה אזי $x_i=\frac{|A_i|}{|A|}$ כאשר $C_j(A_i)=\begin{cases}b & i=j\\ C_j(A) & else\end{cases}$.

הגדרה: תהא $\sigma\in S_n$ נגדיר יחס שקילות $a\sim_{\text{cycle}}b\Longleftrightarrow\exists i\in\mathbb{N}.\sigma^i(a)=b$.

ציקלוס/מחזור: $[a]_{\sim_{\text{cycle}}}$.

פירוק תמורה לציקלוסים זרים: כל תמורה ניתנת לפירוק יחיד של ציקלוסים.

חילוף: $\begin{pmatrix}i & j\end{pmatrix}(x)=\begin{cases}j & x=i\\ i & x=j\\ x & else\end{cases}$.

טענה: כל מחזור ניתן לכתיבה כהרכבה של חילופים.

מסקנה: כל תמורה ניתנת לכתיבה כהרכבה של חילופים.

טענה: $\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & m \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$.

סימון: $\text{sign}\left(\sigma\right)=\det\left(P\left(\sigma\right)\right)$.

טענה:

- יהיו $E_{R_i\leftrightarrow R_j},\ldots,E_{R_\lambda\leftrightarrow R_\theta}$ אזי $E_{R_i\leftrightarrow R_j}\cdot\ldots\cdot E_{R_\lambda\leftrightarrow R_\theta}=P\left(\sigma\right)$.
- אם $\left(P\left(\sigma\right)\right)_{i,j}=1$ אז $P\left(\sigma\right)_{i,j}$ מטריצת תמורה.
- $\text{sign}\left(\sigma\right)=\pm1$.

מטריצת תמורה זוגית: $\text{sign}\left(\sigma\right)=1$.

מטריצת תמורה איזוגית: $\text{sign}\left(\sigma\right)=-1$.

טענה: (Id זוגית)$\wedge$($\begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ אי זוגית).

טענה: $P\left(\sigma\tau\right)=P\left(\sigma\right)P\left(\tau\right)$.

מסקנה: $\text{sign}\left(\sigma\tau\right)=\text{sign}\left(\sigma\right)\text{sign}\left(\tau\right)$.

אי סדר של תמורה: זוג סדור $\langle i,j\rangle$ שמקיים $(i<j)\wedge\left(\sigma\left(i\right)>\sigma\left(j\right)\right)$.

אי הסדרים של איבר: $z\left(\sigma,i\right)=\left|\left\{ j>i\mid\sigma\left(i\right)>\sigma\left(j\right)\right\} \right|$.

אי הסדרים של תמורה: $N\left(\sigma\right)=\left|\left\{ \langle i,j\rangle\mid\left(j>i\right)\wedge\left(\sigma\left(i\right)>\sigma\left(j\right)\right)\right\} \right|$.

משפט: $\text{sign}\left(\sigma\right)=\left(-1\right)^{N\left(\sigma\right)}$.

דטרמיננטה על פי תמורה: $|A|=\sum_{\sigma\in S_n}\left(\text{sign}\left(\sigma\right)\prod_{i=1}^{n}\left(A\right)_{i,\sigma\left(i\right)}\right)$.

מסקנה: $\forall A\in M_n\left(\mathbb{Z}\right).\left|A\right|\in\mathbb{Z}$.

מסקנה: $\forall A\in M_n\left(\mathbb{Z}\right).\left(\|A\|=1\right)\Longrightarrow\left(A^{-1}\in M_n\left(\mathbb{Z}\right)\right)$.

מסקנה: $\det\left(A\right)\in\mathbb{F}\left[x_1,\ldots,x_{n^2}\right]$.

נורמה: יהי $v\in\mathbb{R}^n$ נגדיר $\|v\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ אזי f רציפה.

מסקנה: $\det$ רציפה.

מסקנה: $\forall A\in M_n^{\times}\left(\mathbb{F}\right).\exists\varepsilon.\forall B\in M_n\left(\mathbb{F}\right).\left(\forall i,j.\left(B\right)_{i,j}\in\left(\left(A\right)_{i,j}-\varepsilon,\left(A\right)_{i,j}+\varepsilon\right)\right)\Longrightarrow B\in M_n^{\times}\left(\mathbb{F}\right)$

מרחב וקטורי (מ"ו): $\langle V,+,*\rangle$ המקיים

- $\langle V,+\rangle$ חבורה אבלית.
- $*:\mathbb{F}\times V\to V$ המקיימת
  - $\forall v\in V.1_{\mathbb{F}}*v=v$.
  - $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v\in V.\left(\alpha*\beta\right)*v=\alpha*\left(\beta*v\right)$.
- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}.\forall v,u\in V.\left(\left(\alpha+\beta\right)*v=\alpha*v+\beta*v\right)\wedge\left(\alpha*\left(v+u\right)=\alpha*v+\alpha*u\right)$.

טענה: $\left(\forall\alpha\in\mathbb{F}.\alpha\cdot0_V=0_V\right)\wedge\left(\alpha*v=0_V\iff\left(\alpha=0_{\mathbb{F}}\right)\vee\left(v=0_V\right)\right)\wedge\left(-1_{\mathbb{F}}*v=-v\right)\wedge\left(\forall v\in V.0_{\mathbb{F}}*v=0_V\right)$.

תת מרחב וקטורי (תמ"ו): קבוצה $\mathcal{U}\subseteq V^n$ המקיימת $\left(\forall v\in\mathcal{U}.\forall a\in\mathbb{F}.a\cdot v\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(\forall u,v\in\mathcal{U}.u+v\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(0\in\mathcal{U}\right)$.

טענה: יהיו U,V תמ"ו אזי $U\cap V$ תמ"ו.

צירוף לינארי: יהיו $v\in V^n$, צירוף לינארי של v הינו ביטוי מהצורה $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i$ בעבור $\alpha\in\mathbb{F}^n$.

הנפרשת/ספאן: תהא $v\in V^m$ נגדיר $\text{span}\left(v\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{m}\alpha_iv_i\mid\alpha\in\mathbb{F}^m\right\}$.

סדרה בת"ל: סדרה $v\in V^n$ שמקיימת $\forall\alpha\in\mathbb{F}^n.\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i=0\iff\alpha=0$.

בסיס: $v\in V$ בת"ל ופורשת.

מרחב התלויות הלינאריות: תהא $v\in V^n$ נגדיר $\text{LD}\left(v\right)=\left\{ \alpha\in\mathbb{F}^n\mid\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i=0\right\}$.

טענה: ($A\subseteq B\Longrightarrow\text{span}\left(A\right)\subseteq\text{span}\left(B\right)$)$\wedge$($A\subseteq\text{span}\left(B\right)\Longrightarrow\text{span}\left(A\right)\subseteq\text{span}\left(B\right)$).

טענה: תהא $K\subseteq V$ אזי $\text{span}\left(K\right)$ הינו התמ"ו הקטן ביותר ביחס ההכלה המכיל את K.

$\wedge$($\text{span}\left(\text{span}\left(A\right)\right)=\text{span}\left(A\right)$)$\wedge$($\text{span}\left(\varnothing\right)=\left\{ 0\right\}$).

משפט ההחלפה של ריס: תהא $v\in V^n$ פורשת ו־$u\in V^m$ בת"ל

- $m\le n$.
- קיימים $1\le i_1\ldots i_m\le n$ כך שהקבוצה $\left\{ u_1\ldots u_k\right\} \cup\left\{ v_j\mid j\notin\left\{ i_1\ldots i_k\right\} \right\}$ פורשת.

מסקנה: יהיו A,B בסיסים אזי $|A|=|B|$.

מימד: יהי B בסיס $\dim_{\mathbb{F}}(V)=|B|$.

נ"ס (נוצר סופית): מ"ו V שמקיים $\exists v\in V^k.\text{span}(v)=V$.

משפט: V נ"ס $\Longleftarrow$ קיים בסיס ל-V.

מסקנה: יהי V נ"ס

- פחות מ-$\dim(V)$ וקטורים לא פורשים.
- יותר מ-$\dim(V)$ וקטורים ת"ל.

משפט 2 מתוך 3: יהי V מ"ו נ"ס ויהי $B\in V^k$, כל שניים מהשלושה שקולים

- B בת"ל.
- B פורשת.
- $\dim(V)=k$.

משפט: תהא V נ"ס, לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים כי U נ"ס.

מסקנה: לכל $U\subseteq V$ תמ"ו מתקיים $\dim(U)\le\dim(V)$.

משפט: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $(U\subseteq W)\wedge(\dim(U)=\dim(W))\Longleftrightarrow U=W$.

סכום מרחבים וקטורים: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו אזי $U+W=\{u+w\mid u\in U\wedge w\in W\}$ תמ"ו של V.

משפט: אם $U=\text{span}(A)$, $W=\text{span}(B)$ אז $W+U=\text{span}(A\cup B)$.

מסקנה: אם $U,W,T\subseteq V$ תמ"ו אז $U,W\subseteq T\Longrightarrow U+W\subseteq T$.

משפט: אם $U\cap W=\{0\}$ אז לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U+W$.

סכום ישר: אם $U\cap W=\{0\}$ אז $U\oplus W=U+W$.

משפט האפיון של סכום ישר: יהיו $U,W\subseteq V$ תמ"ו התב"ש

- $U\oplus W$.
- לכל בסיס B של U, לכל בסיס C של W מתקיים כי $B^\frown C$ בסיס של $U+W$.
- $\forall k\in U+W.\exists!\left\langle u,w\right\rangle\in U\times W.u+w=k$.

מסקנה: $\dim(U\oplus W)=\dim(U)+\dim(W)$.

משפט המימד הראשון: יהיו U,W תמ"ו אזי $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.

קואורדינטות: יהי $b\in V^n$ בסיס ויהי $v\in V$ אזי $\iota\alpha\in\mathbb{F}^n.v=\sum_{i=1}^n\alpha_i b_i$.

סימון: $[v]_B=\iota\alpha\in\mathbb{F}^n.v=\sum_{i=1}^n\alpha_i B_i$.

העתקת קואורדינטות: יהי B בסיס נגדיר $Q_B:V\to\mathbb{F}^{\dim(V)}$ כך $Q_B(v)=[v]_B$.

משפט:

- $Q_B^{-1}(\alpha)=\sum_{i=1}^{\dim(V)}\alpha_i b_i$.
- $(Q(\alpha v)=\alpha Q(v))\wedge(Q(v+w)=Q(v)+Q(w))$.
- $v_1\dots v_k$ בת"ל $\Longleftrightarrow$ $Q_B(v_1)\dots Q_B(v_k)$ בת"ל.
- $v\in\text{span}(v_1\dots v_k)\Longleftrightarrow Q_B(v)\in\text{span}(Q_B(v_1)\dots Q_B(v_k))$.

מרחב העמודות: $\mathcal{C}(A)=\text{span}(\{C_i(A)\mid i\in[n]\})$.

מרחב השורות: $\mathcal{R}(A)=\text{span}(\{R_i(A)\mid i\in[m]\})$.

טענה: $\mathcal{C}(A)=\{Ax\mid x\in\mathbb{F}^n\}=\text{Im}(T_A)$.

טענה: $\mathcal{R}(AB)\subseteq\mathcal{R}(B)$, $\mathcal{C}(AB)\subseteq\mathcal{C}(A)$.

משפט: $\dim(\mathcal{C}(A))=\dim(\mathcal{R}(A))$.

דרגה: $\text{rank}(A)=\dim(\mathcal{C}(A))$.

מרחב האפסות: $\mathcal{N}(A)=\dim(\text{sols}(A))$.

טענה: $\text{rank}(A)\le\min(n,m)$, $\text{rank}(AB)\le\min(\text{rank}(A),\text{rank}(B))$, $\text{rank}(A+B)\le\text{rank}(A)+\text{rank}(B)$.

טענה: אם A הפיכה אזי $\text{rank}(AB)=\text{rank}(B)$.

המשפט היסודי של הדירוג: יהיו $A,A'\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ש"ש

- $\text{sols}(A)=\text{sols}(A')$.
- $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(A')$.

- $\text{rank}\left(A\right)=\text{rank}\left(A'\right)$.

טענה: $\text{sols}\left(A\right)=\text{LD}\left(\left\{C_i\left(A\right)\mid i\in[n]\right\}\right)$.

מסקנה: תהא A מטריצה מדורגת קנונית אזי אין איבר פותח בעמודה ה־i $\iff C_i\left(A\right)\in\text{span}\left(C_1\left(A\right),\ldots,C_{i-1}\left(B\right)\right)$.

משפט: יהיו $A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$ ויהיו A',B' המטריצות הקנוניות שלהם בהתאמה, התב"ש

- $A\sim B$.
- $A'=B'$.
- $\mathcal{R}\left(A\right)=\mathcal{R}\left(B\right)$.

המשפט היסודי של האלגברה הלינארית: תהא $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$ אזי $\left(\text{rank}\left(A\right)=n\right)\iff\left(A\text{ הפיכה}\right)$.

משפט הדרגה והאפסות: $n=\text{rank}\left(A\right)+\mathcal{N}\left(A\right)$.

פונקציה מטריציונית: $f:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ שמקיימת $\exists A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).f=T_A$.

הגדרה: $\ker\left(T_A\right)=T_A^{-1}\left[\left\{0\right\}\right]=\text{sols}\left(A\right)$.

טענה: $\forall A,B\in M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right).T_A=T_B\iff A=B$.

טענה: T_A לינארית.

העתקה לינארית/טרנספורמציה לינארית (ט"ל): יהיו U,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ אזי $T:V\to U$ שמקיימת כי T לינארית.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל מתקיים $\left(T\left(0\right)=0\right)\wedge\left(T\left(\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i\right)=\sum_{i=1}^n\alpha_iT\left(v_i\right)\right)$.

טענה: תהא $T:U\to W$ ט"ל ותהא $S:V\to U$ ט"ל אזי $T\circ S$ ט"ל.

משפט: תהא $T:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ אזי T לינארית $\iff T$ מטריציונית.

משפט: תהא $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ ט"ל אזי $C_i\left(A\right)=T\left(\delta_i\right)$.

טענה: $\text{Im}\left(T\right)$, $\ker\left(T\right)$ תמ"ו.

טענה: תהא T ט"ל אזי

- $\langle T\left(v_1\right)\ldots T\left(v_n\right)\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow\langle v_1\ldots v_n\rangle$ בת"ל.
- $\langle v_1\ldots v_n\rangle$ פורשת $\Longleftarrow\langle T\left(v_1\right)\ldots T\left(v_n\right)\rangle$ פורשת את $\text{Im}\left(T\right)$.

למה: תהא T ט"ל אזי

- נניח כי T חח"ע, $\langle v_1\ldots v_n\rangle$ בת"ל $\Longleftarrow\langle T\left(v_1\right)\ldots T\left(v_n\right)\rangle$ בת"ל.
- נניח כי T על, $\langle v_1\ldots v_n\rangle$ פורשת $\Longleftarrow\langle T\left(v_1\right)\ldots T\left(v_n\right)\rangle$ פורשת.

מסקנה: תהא T ט"ל הפיכה ויהי $\langle b_1\ldots b_n\rangle$ בסיס אזי $\langle T\left(b_1\right)\ldots T\left(b_n\right)\rangle$ בסיס.

איזומורפיזם בין מרחבים וקטורים: $T:V\to U$ ט"ל הפיכה.

טענה: תהא $T:V\to U$ ט"ל

- T חח"ע $\iff\ker\left(T\right)=\left\{0\right\}$.
- T על $\iff\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)=\dim\left(U\right)$.
- $\forall u\in\text{Im}\left(T\right).\forall v\in T^{-1}\left[\left\{u\right\}\right].T^{-1}\left[\left\{u\right\}\right]=v+\ker\left(T\right)$.

משפט המימד השני: תהא $T:V\to U$ ט"ל $\dim\left(V\right)=\dim\left(\ker\left(T\right)\right)+\dim\left(\text{Im}\left(T\right)\right)$.

משפט 2 מתוך 3: תהא $T:V\to U$ ט"ל, כל שניים מהשלושה שקולים

- T חח"ע.
- T על.
- $\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

טענה: $T:V\to U$ איזומורפיזם $\Longleftarrow\dim\left(V\right)=\dim\left(U\right)$.

משפט: T איזומורפיזם $\iff T^{-1}$ איזומורפיזם.

משפט: לכל V מ"ו נ"ס מתקיים $V\cong\mathbb{F}^{\dim\left(V\right)}$.

מסקנה: יהיו V,W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ אזי $V\cong W\iff\dim\left(V\right)=\dim\left(W\right)$.

משפט: יהי $b\in V^n$ בסיס ויהי $c\in U^n$ אזי $T:V\to U$ המוגדרת $T\left(x\right)=\sum_{i=1}^n\left(\left[x\right]_b\right)_i\cdot c_i$ היא הט"ל היחידה שמקיימת $\forall i\in[n].T\left(b_i\right)=c_i$.

טענה: יהיו $T_1,T_2:V\to U$ ט"ל ויהי b פורשת את V אזי $T_1=T_2\Longleftarrow\forall i\in[n].T_1\left(b_i\right)=T_2\left(b_i\right)$.

מרחב העתקות הלינאריות: $\text{Hom}\left(V,U\right)=\left\{T\in V\to U\mid T\text{ ט"ל}\right\}$.

טענה: $\text{Hom}\left(V,U\right)$ מ"ו מעל השדה של V,U.

הערה: $\forall T_1,T_2\in\mathrm{Hom}(V,U).T_1\circ T_2\in\mathrm{Hom}(V,U)$.

משפט: $\dim(\mathrm{Hom}(V,U))=\dim(V)\cdot\dim(U)$.

טענה: יהיו b,c בסיסים של V,U בהתאמה לכן $\left\{T_{i,j}(b_k)=\begin{cases}c_j & i=k\\0 & else\end{cases}\;\middle|\; i,j\in[n]\right\}$ בסיס של $\mathrm{Hom}(V,U)$.

סימון: $\mathrm{Hom}(V)=\mathrm{Hom}(V,V)$.

משפט: תהא $T\in\mathrm{Hom}(V,U)$ ויהיו B,C בסיסים של V,U בהתאמה לכן $Q_C\circ T\circ Q_B^{-1}$ מטריציונית.

מטריצה מייצגת: המטריצה $[T]_C^B=A$ עבורה $Q_C\circ T\circ Q_B^{-1}=T_A$.

סימון: $[T]_B=[T]_B^B$.

מסקנה: $C_i\left([T]_C^B\right)=[T(B_i)]_C$.

מסקנה: $[T]_C^B\cdot[v]_B=[T(v)]_C$.

הטלה: יהיו $V=U\oplus W$ מ"ו אזי $P_{(U,W)}:V\to V$ המוגדרת $P_{(U,W)}(v)=\iota u\in U.\exists w\in W.u+w=v$.

טענה: $P_{(U,W)}$ ט"ל, $\mathrm{Im}\left(P_{(U,W)}\right)=U$, $\ker\left(P_{(U,W)}\right)=W$, $P^2_{(U,W)}=P_{(U,W)}$.

הערה: $[T]_C^B\in M_{\dim(U)\times\dim(V)}(\mathbb{F})$.

משפט:

- $\left(Q_B\right)_{\restriction_{\ker(T)}}:\ker(T)\to\mathrm{sols}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.
- $\left(Q_C\right)_{\restriction_{\mathrm{Im}(T)}}:\mathrm{Im}(T)\to\mathcal{C}\left([T]_C^B\right)$ איזומורפיזם.

מסקנה: $\mathcal{N}\left([T]_C^B\right)=\dim(\ker(T))$, $\mathrm{rank}\left([T]_C^B\right)=\dim(\mathrm{Im}(T))$.

טענה: תהא $T\in\mathrm{Hom}(V,U)$ אזי T הפיכה $\Longleftrightarrow$ $[T]_C^B$ הפיכה.

משפט: $T\in\mathrm{Hom}(V,U)$, $S\in\mathrm{Hom}(U,W)$ אזי $[S\circ T]_D^B=[S]_D^C\cdot[T]_C^B$.

מסקנה: $\left([T]_C^B\right)^{-1}=\left[T^{-1}\right]_B^C$.

מטריצת שינוי קואורדינטות: $[Id_V]_C^B$.

הערה: $C_i\left([Id]_C^B\right)=[B_i]_C$.

מסקנה: $[T]_C^B=[Id]_C^E\cdot[T]_E^D\cdot[Id]_D^B$.

דמיון מטריצות: $\forall A,B\in M_n(\mathbb{F}).A\sim B\Longleftrightarrow\exists P\in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BP=A$.

משפט: יהיו $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ התב"ש

- $B\sim A$.
- $\forall T\in\mathrm{Hom}(V,U).A=[T]_D^C\Longrightarrow\exists C',D'.B=[T]_{D'}^{C'}$.
- $\exists T\in\mathrm{Hom}(V,U).([T]_C=A)\wedge([T]_D=B)$.

טענה: A,B דומות אזי $\det(A)=\det(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ אזי $\det(T)=\det([T]_B)$.

עקבה: $\mathrm{trace}(A)=\sum_{i=1}^n(A)_{i,i}$.

טענה: $\forall A,B\in M_n(\mathbb{F}).\mathrm{trace}(AB)=\mathrm{trace}(BA)$.

מסקנה: A,B דומות $\Longleftarrow$ $\mathrm{trace}(A)=\mathrm{trace}(B)$.

הגדרה: תהא $T\in\mathrm{Hom}(V)$ אזי $\mathrm{trace}(T)=\mathrm{trace}([T]_B)$.

מטריצות מתאימות: $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}).A\sim_{\text{green}}B\Longleftrightarrow\exists P,Q\in M_n(\mathbb{F}).P^{-1}BQ^{-1}=A$.

הערה: A,B דומות $\Longleftarrow$ A,B מתאימות.

טענה: $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}B\Longleftrightarrow$ A,B מתאימות.

הגדרה: $[*]_C^B:\mathrm{Hom}(V,W)\to M_{\dim(V)\times\dim(W)}(\mathbb{F})$ כך $[*]_C^B(T)=[T]_C^B$.

משפט: $[*]_C^B$ איזומורפיזם.

אלגברה: $\langle V,+,\cdot,*\rangle$ שמקיים ($\langle V,+,\cdot\rangle$ מ"ו)$\wedge(*:V\times V\to V)$.

אלגברת מטריצות: המרחב $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ עם פעולת כפל מטריצות.

אלגברת Hom: המרחב $\mathrm{Hom}(V,W)$ עם פעולת ההרכבה.

איזומורפיזם בין אלגברות: $T:A\to B$ ט"ל הפיכה שמקיימת $\forall\alpha,\beta\in A.T(\alpha*\beta)=T(\alpha)*T(\beta)$.

משפט: אם $[*]_B:\mathrm{Hom}(V)\to M_{\dim(V)}(\mathbb{F})$ אזי $[*]_B$ איזומורפיזם בין אלגברות.

מטריצת בלוקים:

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

הערה: מספר העמודות והשורות בין מטריצות צמודות חייב להיות שווה.

סימון:

$$(A_{i,j})_{1\le i,j\le m} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \end{pmatrix}$$

כפל מטריצת בלוקים: $(AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^{m} A_{i,t}B_{t,j}$.

מטריצת בלוקים ריבועית: מטריצת בלוקים כך שמקיימת $\forall i.A_{i,i} \in M_n(\mathbb{F})$.

מטריצת בלוקים משולשית עליונה: $\left((A_{i,j})_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell} = \begin{cases} A_{k,\ell} & k \le \ell \\ 0 & else \end{cases}$.

מטריצת בלוקים משולשית תחתונה: $\left((A_{i,j})_{1\le i,j\le m}\right)_{k,\ell} = \begin{cases} A_{k,\ell} & k \ge \ell \\ 0 & else \end{cases}$.

מטריצת בלוקים אלכסונית: מטריצת בלוקים משולשית תחתונה ועליונה.

הגדרה: $(\text{Diag}(A_{1,1},\dots,A_{n,n}))_{k,\ell} = \begin{cases} A_{k,k} & k = \ell \\ 0 & else \end{cases}$.

משפט: אם $(A_{i,j})_{1\le i,j\le m}$ משולשית אז $\det\left((A_{i,j})_{1\le i,j\le m}\right) = \prod_{i=1}^{n} \det(A_{i,i})$.