כדור פתוח: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|<r\}$.

כדור סגור: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|\le r\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^n$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_r(a)=\{x\in\mathbb{R}\mid\|x-a\|=r\}$.

תיבה פתוחה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j<x_j<b_j\}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{\Pi}_{a,b}=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in[n].a_j\le x_j\le b_j\}$.

נקודה פנימית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\subseteq M$ אזי x נקודה פנימית.

פנים של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathring{M}=\{x\in M\mid x\text{ נקודה פנימית של }M\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $M=\mathring{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\subseteq\mathbb{R}^n\backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_r(x)\cap M=\{x\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ ותהא $x\in\mathbb{R}^n$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\partial M=\{x\in M\mid x\text{ נקודת שפה של }M\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה $\partial M\subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\overline{M}=\mathring{M}\cup\partial M$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (x נקודה חיצונית של M)$\Longleftrightarrow$(x נקודה פנימית של $\mathbb{R}^n\backslash M$).

מסקנה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (M פתוחה)$\Longleftrightarrow$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^n$ המקיימת $\exists r>0.M\subseteq B_r(0)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה וחסומה.

טענת היינה בורל: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{I_n\}_{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$).

סימון: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{(k)}=a(k)$.

גבול: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^n$ עבורן $\lim_{k\to\infty}\left\|a^{(k)}-L\right\|=0$ אזי $\lim_{k\to\infty}a^{(k)}=L$.

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x\to a}$ וכן $\xrightarrow[x\to a]{}$.

משפט: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left(a^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right)\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].a_j^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_j\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a^{(m)}-a^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $a\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall j\in[n].\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\|a_j^{(m)}-a_j^{(p)}\right\|<\varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $a\in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{(k_i)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty}a^{(k_i)}\in K$).

הערה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f=\langle f_1,\ldots,f_m\rangle$ כאשר $f_i:A\to\mathbb{R}$.

גבול: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $a\in\mathbb{R}^n$ ותהא $L\in\mathbb{R}^m$ אזי
- היינה: אם $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{(k)}\to a\right)\Longrightarrow\left(f\left(x^{(k)}\right)\to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a}f(x)=L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A\backslash\{a\}.\|x-a\|<\delta\Longrightarrow\|f(x)-L\|<\varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ אזי $a\in A$ עבורה $f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי (f רציפה נקודתית עבור כל $b\in B$)$\Longleftrightarrow$$(f\in C(B))$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^m$ ותהא $B\subseteq A$ אזי $(f\in C(b))\Longleftrightarrow(f_1,\ldots,f_m\in C(b))$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ וכן $B\subseteq\mathbb{R}^m$ אזי $f:A\to B$ הפיכה עבורה f,f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma:I\to\mathbb{R}^m$.

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ כך $\gamma(t)=(1-t)a+tb$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $[a,b]=\mathrm{Im}(\gamma)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\forall a,b\in M.\left[a,b\right]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right),\overline{B}_{r}\left(a\right)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:\left[0,1\right]\to M$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\gamma\left(1\right)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_{0}}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\biguplus\mathcal{A}=M$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f\left(a\right)<f\left(b\right)$ מתקיים $\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]\subseteq f\left(\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קשירה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ויירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f\left(\mathcal{K}\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\left\Vert x-y\right\Vert <\delta\Longrightarrow\left\Vert f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\Vert <\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $\left(\upsilon\left(a\right)\geq0\right)\wedge\left(\left(\upsilon\left(a\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(a=0\right)\right)$.
- הומוגניות: $\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon\left(a+b\right)\leq\upsilon\left(a\right)+\upsilon\left(b\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^{n}.\upsilon\left(x\right)\leq c\left\Vert x\right\Vert$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon\in C\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^{n}.c\left\Vert x\right\Vert \leq\upsilon\left(x\right)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\leq\upsilon\leq b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon,\left\Vert \cdot\right\Vert$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\upsilon\left(x^{\left(k\right)}\right)\to0\right)\Longleftrightarrow\left(\rho\left(x^{\left(k\right)}\right)\to0\right)$.

נורמת ℓ_{p}: עבור $p\in\mathbb{N}_{+}$ נגדיר נורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert _{p}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert _{p}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|v_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_{∞}: נגדיר נורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert _{\infty}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert _{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}\left|v_{i}\right|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma\left(a+h\right)-\gamma\left(a\right)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\left(\begin{array}{c}\gamma_{1}'\left(a\right)\\ \vdots\\ \gamma_{m}'\left(a\right)\end{array}\right)$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert \right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)\Longrightarrow f\in C\left(a\right)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\mathrm{grad}f\left(a\right)=\left[L\right]_{\mathrm{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f\left(a\right)=\mathrm{grad}f\left(a\right)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(a+hx_{i}\right)-f\left(a\right)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $f_{x_{i}}'=\frac{\partial f}{\partial x_{i}}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)=\left(\nabla f\left(a\right)\right)_{i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1}}\left(a\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n}}\left(a\right)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $(\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)$ קיימת לכל $i)\not\Longrightarrow\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{m}\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert \right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\left(\forall i\in\left\{ 1\ldots m\right\} .f_{i}\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)\Longleftrightarrow\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

דיפרנציאל: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=\left(\begin{array}{c}-\nabla f_{1}\left(a\right)-\\ \vdots\\ -\nabla f_{m}\left(a\right)-\end{array}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\right)_{i,j}=\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\left(a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי
- אם $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $f\in C\left(a\right)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}\left(a\right)$.
- $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.
- תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$ וכן $\mathcal{D}_{f}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ גזירה ברציפות אזי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(a+hv\right)-f\left(a\right)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\nabla f\left(a\right)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ קשירה מסילתית)$\Longleftrightarrow$($\mathcal{U}$ קשירה פוליגונלית).

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longleftarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.

טענה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

סימון: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in\left\{1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}^{2}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)}{\partial x_{i}}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\left\{1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{j}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\right)}{\partial x_{i}}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^{k}f}{\partial x_{i_{1}}\ldots\partial x_{i_{k}}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהיו $i,j\in\left\{1\ldots n\right\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_{i}},\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}\left(a\right)=\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{j}\partial x_{i}}\left(a\right)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ אזי $\left|K\right|=\sum_{i=1}^{n}K_{i}$ וכן $\partial x^{K}=\partial x_{1}^{K_{1}}\ldots\partial x_{n}^{K_{n}}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\in C^{k}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{\left|K\right|}f}{\partial x^{K}}\left(a\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert Av\right\Vert_{\text{st}}\le\left\Vert A\right\Vert_{\text{st}}\cdot\left\Vert v\right\Vert_{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^{k}$ עבורן $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $g\in D\left(f\left(a\right)\right)$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}\left(a\right)=\mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right)\cdot\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\Gamma_{f}=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}\mid\left(x\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(f\left(x\right)=y\right)\right\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $\Pi_{c}=\left\{x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)=c\right\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $y-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $N_{a}=\left(-\nabla f\left(a\right),1\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)\perp\Pi_{f\left(a\right)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\ge f\left(a\right)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\le f\left(a\right)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f\left(a\right)=0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_{i}.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_{i}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $\mathcal{D}_{\left(a,b\right)}^{k}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^{n}\\ \left|V\right|=k}}\binom{k!}{V_{1},\ldots,V_{n}}\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)^{V_{i}}\frac{\partial^{k}}{\partial x^{V}}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{D}^k_{(a,b)}f=\left(\sum_{i=1}^n\left(a_i-b_i\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^k$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ עבורה $f\in C^{k+1}\left(a\right)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in[x,a]$ עבורו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^k\frac{1}{i!}\mathcal{D}^i_{(x,a)}f\left(a\right)+\frac{1}{(k+1)!}\mathcal{D}^{k+1}_{(x,a)}f\left(c\right)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_f\right)_{i,j}=f''_{x_i,x_j}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in[x,a]$ עבורו $f\left(x\right)=f\left(a\right)+\left(x-a\right)^tH_f\left(c\right)\left(x-a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- ($H_f\left(a\right)$ חיובית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מינימום).
- ($H_f\left(a\right)$ שלילית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $f\in C^2\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)>0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)<0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_f\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ וקיימת $f\in C^1\left(I_x,I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(I_x,I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $\left(y=f\left(x\right)\right)\iff\left(F\left(x,y\right)=0\right)$ אזי $f'\left(x\right)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ על I_x.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_x,I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_1\in I_x$ וכן $a_2\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(I_x,I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in I_x\times I_y$ מתקיים $\left(y=f\left(x\right)\right)\iff\left(F\left(x,y\right)=0\right)$ אזי $f\left(x\right)\in C^k\left(I_x,I_y\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1}\in I_y$ וקיימת $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i},I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $\left(y=f\left(x\right)\right)\iff\left(F\left(x,y\right)=0\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_y\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ וכן $a_{n+1}\in I_y$ ותהא $f\in C^1\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i},I_y\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i}\right)\times I_y$ מתקיים $\left(y=f\left(x\right)\right)\iff\left(F\left(x,y\right)=0\right)$ אזי לכל $i\in[n]$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x\right)-=\frac{F'_{x_i}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$ על $\prod_{i=1}^nI_{x_i}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times(n+m)}{\mathcal{D}_f\left(a\right)}=\left(\underset{m\times n}{F'_x\left(a\right)},\underset{m\times m}{F'_y\left(a\right)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ וקיימת $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i},\prod_{j=1}^mI_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^mI_{y_i}\right)$ מתקיים $\left(y=f\left(x\right)\right)\iff\left(F\left(x,y\right)=0\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)$ הפיכה יהיו $I_{x_1},\ldots,I_{x_n},I_{y_1}\ldots I_{y_m}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in[n]$ מתקיים $a_i\in I_{x_i}$ ולכל $j\in[m]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_j}$ ותהא $f\in C^k\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i},\prod_{j=1}^mI_{y_i}\right)$ עבורה לכל $(x,y)\in\left(\prod_{i=1}^nI_{x_i}\right)\times\left(\prod_{j=1}^mI_{y_i}\right)$ מתקיים $\left(y=f\left(x\right)\right)\iff\left(F\left(x,y\right)=0\right)$ אזי $\mathcal{D}_f\left(x\right)=-F'_y\left(x,f\left(x\right)\right)^{-1}\cdot F'_x\left(x,f\left(x\right)\right)$ על $\prod_{i=1}^nI_{x_i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $\nabla F\left(a\right)\neq0$ אזי משוואת המשטח המשיק לגרף ב־a הינו $\sum_{i=1}^nF'_{x_i}\left(a\right)\left(x_i-a_i\right)=0$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_y\left(a\right)$ הפיכה אזי משוואת המשטח המשיק לגרף ב־a הינו $\sum_{i=1}^nF'_{x_i}\left(a\right)\left(x_i-a_i\right)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^1\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

C^k דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^k\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x\right)\right)=\mathcal{D}_{f}\left(x\right)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $A\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

- (A פתוחה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ קומפקטית).
- אם $\partial A\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\partial\left(f\left(A\right)\right)=f\left(\partial A\right)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ עבורה $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\right)=m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.