

טופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

- תהינה $U \subseteq \mathcal{T}$ אזי $\bigcup U \in \mathcal{T}$.

- תהינה $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}$ אזי $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

מרחב טופולוגי (מ"ט): תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ טופולוגיה על X אזי (X, \mathcal{T}) .

קבוצה פתוחה: יהי (X, \mathcal{T}) מרחב טופולוגי אזי $U \subseteq X$ המקיימת $U \in \mathcal{T}$.

קבוצה סגורה: יהי (X, \mathcal{T}) מרחב טופולוגי אזי $E \subseteq X$ המקיימת $X \setminus E \in \mathcal{T}$.

טענה: תהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ וכן $(\bigcup U \in \mathcal{T}) \iff (\forall U \subseteq \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T})$ (לכל $U, V \in \mathcal{T}$ מתקיים).

הטופולוגיה הטריטוראלית: תהא X קבוצה אזי $\{X, \emptyset\}$.

הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X)$.

הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: יהי (X, ρ) מרחב מטרי אזי $\mathcal{T}(X, \rho) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists r > 0. B_r(x) \subseteq U\}$.

טופולוגיה מטריזבילית: מרחב טופולוגי (X, \mathcal{T}_X) עבורו קיים (X, ρ) מרחב מטרי המקיים $\mathcal{T}(X, \rho) = \mathcal{T}_X$.

הטופולוגיה הקו־סופית: תהא X קבוצה אזי $\{A \subseteq X \mid |X \setminus A| < \aleph_0\} \cup \{\emptyset\}$.

משפט: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ויהי $\mathcal{C} = \{E \subseteq X \mid X \setminus E \in \mathcal{T}\}$ אזי

- $X, \emptyset \in \mathcal{C}$.

- תהינה $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ אזי $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \in \mathcal{C}$.

- תהינה $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{C}$ אזי $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{C}$.

בסיס לטופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $\bigcup \mathcal{B} = X$.

- תהינה $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ עבורן $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ותהא $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ קיימת $B_3 \in \mathcal{B}$ עבורה $x \in B_3$ וכן $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists B \in \mathcal{B}. (x \in B) \wedge (B \subseteq U)\}$$

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ טופולוגיה על X .

סימון: $\mathcal{B}_E = \{(a, b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_{\text{Sorg}} = \{(a, b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_E \cup \{(a, b) \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\} \mid a < b\}$.

טענה: $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{\text{Sorg}}, \mathcal{B}_K$ בסיסים של \mathbb{R} .

הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית: $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_E))$.

הישר של זורגנפריי: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{Sorg}}))$.

טופולוגיית-K: $\mathbb{R}_K = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$.

משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \exists \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}. U = \bigcup \mathcal{A}\}$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיסים עבורם $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$ וכן $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_1)$ אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$.

טופולוגיה עדינה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי \mathcal{T}_2 .

טופולוגיה גסה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי \mathcal{T}_1 .

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ עבורו $(x \in A) \wedge (A \subseteq U) \implies \forall U \in \mathcal{T}. \forall x \in U. \exists A \in \mathcal{A}$ בסיס של \mathcal{T} .

טענה: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי $\{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. a \leq x\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. x \leq b\}$ בסיס.

טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי

$$\mathcal{T}(\{(a, b) \mid a < b\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. a \leq x\} \cup \{(a, b) \mid \forall x \in X. x \leq b\})$$

טענה: \mathbb{R} מצוייד בטופולוגיית הסדר זהה ל- \mathbb{R} מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

תת בסיס: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $\bigcup \mathcal{S} = X$.

הטופולוגיה הנוצרת מתת-בסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת-בסיס אזי

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{U \subseteq X \mid \exists A_1 \dots A_k \subseteq \mathcal{S}. U = \bigcup (\bigcap_{i=1}^k A_i)\}$$

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת-בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ טופולוגיה על X .

טופולוגיית זריצקי: יהי \mathbb{F} שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{T}(\{\{a \in \mathbb{F}^n \mid f(a) \neq 0\} \mid f \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]\})$.

סביבה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ויהי $x \in X$ אזי $U \in \mathcal{T}$ עבורה $x \in U$.

פנים של קבוצה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}(A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$.

סגור של קבוצה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{cl}(A) = \overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq E \\ E^c \in \mathcal{T}}} E$.

שפה של קבוצה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \setminus \text{int}(A)$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי

$$\text{int}(A) = \max_{\subseteq} \{U \in \mathcal{T} \mid U \subseteq A\} \bullet$$

$$\overline{A} = \min_{\subseteq} \{E \mid (A \subseteq E) \wedge (E^c \in \mathcal{T})\} \bullet$$

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ התב"ש

$$x \in \overline{A} \bullet$$

• לכל $U \in \mathcal{T}$ המקיים $x \in U$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

• יהי \mathcal{B} בסיס של \mathcal{T} אזי לכל $B \in \mathcal{B}$ המקיים $x \in B$ מתקיים $B \cap A \neq \emptyset$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A})$.

מסקנה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ אזי $(x \in \partial A) \iff (x \in U \text{ המקיימת } U \in \mathcal{T} \text{ ו} U \cap A \neq \emptyset \text{ ו} U \cap A^c \neq \emptyset)$

קבוצה צפופה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט אזי $A \subseteq X$ המקיימת $X = \overline{A}$.

טופולוגיית הנקודה הייחודית: תהא X קבוצה ותהא $p \in X$ אזי $\mathcal{T}_p = \{U \subseteq X \mid p \in U\} \cup \{\emptyset\}$.

נקודת הצטברות: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $x \in X$ עברו לכל סביבה U של x מתקיים $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

סדרה מתכנסת/גבול: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $x \in X^\mathbb{N}$ אזי $y \in X$ עברו לכל סביבה U של y החל ממקום מסוים $x_n \in U$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A} \subseteq \{x \in X \mid x \text{ מקיימת } a \in A^\mathbb{N} \text{ המתכנסת אל } x\}$.

טענה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ נקודת הצטברות של } A\}$.

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ אזי $(A \text{ סגורה}) \iff (x \in \overline{A} \iff x \text{ נקודת הצטברות של } A)$.

פונקציה רציפה בנקודה: יהיו (Y, \mathcal{S}) , (X, \mathcal{T}) מ"טים ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי $x \in X$ עברה לכל $\mathcal{V} \subseteq Y$ סביבה של $f(x)$ קיימת סביבה $U \subseteq X$ של x עברה $f(U) \subseteq \mathcal{V}$.

פונקציה רציפה: יהיו (Y, \mathcal{S}) , (X, \mathcal{T}) מ"טים אזי $f : X \rightarrow Y$ עברה $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ $\forall U \in \mathcal{S}$.

משפט: יהיו (Y, \mathcal{S}) , (X, \mathcal{T}) מ"טים ותהא $f : X \rightarrow Y$ התב"ש

• f רציפה.

• לכל $U \subseteq Y$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה.

• לכל $E \subseteq Y$ סגורה מתקיים כי $f^{-1}(E)$ סגורה.

• לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

• לכל $x \in X$ הפונקציה f רציפה ב- x .

הומיאומורפיזם: יהיו (Y, \mathcal{S}) , (X, \mathcal{T}) מ"טים אזי $f : X \rightarrow Y$ רציפה חח"ע ועל עברה f^{-1} רציפה.

טענה: יהיו (Y, \mathcal{S}) , (X, \mathcal{T}) מ"טים ותהא $f : X \rightarrow Y$ חח"ע ועל התב"ש

• f הומיאומורפיזם.

• תהא $U \subseteq Y$ אזי $(U \text{ פתוחה}) \iff (f^{-1}(U) \text{ פתוחה})$.

• תהא $E \subseteq Y$ אזי $(E \text{ סגורה}) \iff (f^{-1}(E) \text{ סגורה})$.

• לכל $A \subseteq X$ מתקיים $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

הטופולוגיה המושרית על קבוצה מפונקציה: תהא X קבוצה יהי (Y, \mathcal{S}) מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי $\mathcal{T}_f = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{S}\}$.

טענה: תהא X קבוצה יהי (Y, \mathcal{S}) מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי (X, \mathcal{T}_f) מ"ט.

מסקנה: תהא X קבוצה יהי (Y, \mathcal{S}) מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי f רציפה על (X, \mathcal{T}_f) , (Y, \mathcal{S}) .

תת מרחב טופולוגי (ת"מ): יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A = \{U \subseteq A \mid \exists V \in \mathcal{T}. U = \text{Id}^{-1}(V)\}$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי (A, \mathcal{T}_A) מ"ט.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט ויהי \mathcal{B} בסיס של \mathcal{T} אזי $\mathcal{B}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ בסיס של \mathcal{T}_A .

טענה: יהי $A \subseteq X$ אזי

• תהא $U \subseteq A$ אזי $(U \text{ פתוחה ביחס ל-}\mathcal{T}_A) \iff (U \text{ פתוחה ביחס ל-}\mathcal{T} \text{ עברה } V \cap A = U)$.

• תהא $E \subseteq A$ אזי $(E \text{ סגורה ביחס ל-}\mathcal{T}_A) \iff (E \text{ סגורה ביחס ל-}\mathcal{T} \text{ עברה } F \cap A = E)$.

• תהא $D \subseteq A$ אזי $\text{cl}_X(D) \cap A = \text{cl}_A(D)$.

• תהא $D \subseteq A$ אזי $\text{int}_X(D) \cap A \subseteq \text{int}_A(D)$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}_X) מ"ט ויהי (Y, \mathcal{T}_Y) ת"מ אזי

• נניח כי Y פתוחה ב- X , תהא $A \subseteq Y$ פתוחה ב- Y אזי A פתוחה ב- X .

• נניח כי Y סגורה ב- X , תהא $A \subseteq Y$ סגורה ב- Y אזי A סגורה ב- X .

טענה: יהיו X, Z מ"ט יהי $Y \subseteq Z$ ת"מ ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f : X \rightarrow Z$ רציפה.

טענה: יהיו X, Y מ"ט יהי $A \subseteq X$ ת"מ ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f|_A : A \rightarrow Y$ רציפה.

טענה: יהיו X, Z מ"ט יהי $Z \subseteq Y$ ת"מ ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה עבורה $f(X) \subseteq Z$ אזי $f : X \rightarrow Z$ רציפה.

טענה: יהיו X, Z מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי $(f \text{ רציפה}) \iff (f \text{ קיימות } \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X) \text{ פתוחות עבורן } \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = X \text{ וכן } f|_{U_\alpha} \text{ רציפה לכל } \alpha \in \Lambda)$.

טענה: יהיו X, Y, Z מ"ט תהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה ותהא $g : Y \rightarrow Z$ רציפה $g \circ f : X \rightarrow Z$ רציפה.

משפט למת ההדבקה: יהיו X, Y מ"ט תהיינה $A, B \subseteq X$ סגורות עבורן $X = A \cup B$ תהא $f : A \rightarrow Y$ רציפה ותהא $g : B \rightarrow Y$ רציפה עבורן $f \cup g : X \rightarrow Y$ רציפה.

סימון: יהיו X, Y מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ חח"ע ורציפה נגדיר $\hat{f} : X \rightarrow f(X)$ כך $\hat{f} = f$.

שיכון: יהיו X, Y מ"ט אזי $f : X \rightarrow Y$ חח"ע ורציפה עבורה \hat{f} הומיאומורפיזם.

הערה: יהיו X, Y מ"ט ויהי $f : X \rightarrow Y$ שיכון אזי נזהה את X בתור $f(X)$.

תכונה טופולוגית: תכונה P של מ"ט באשר לכל $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$, מ"טים עבורם קיים $f : X \rightarrow Y$ הומיאומורפיזם מתקיים $(X, \mathcal{T}) \iff (Y, \mathcal{S})$ מקיים P .

מרחב טופולוגי בעל תכונת ערך הביניים: מרחב טופולוגי (X, \mathcal{T}) עבורו לכל $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה לכל $a, b \in X$ ולכל $t \in [f(a), f(b)]$ קיים $c \in X$ עבורו $f(c) = t$.

טענה: תכונת ערך הביניים הינה תכונה טופולוגית.

העתקת מנה: יהיו X, Y מ"ט אזי $f : Y \rightarrow X$ פונקציה על המקיימת $(f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_Y) \iff (\forall U \subseteq X. (U \in \mathcal{T}_X))$.

הערה: יהיו X, Y מ"ט ותהא $f : Y \rightarrow X$ העתקת מנה אזי f רציפה.

טענה: יהיו X, Y, Z מ"ט תהא $f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה ותהא $g : Y \rightarrow Z$ העתקת מנה אזי $g \circ f : X \rightarrow Z$ העתקת מנה.

משפט: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f : X \rightarrow A$ על אזי קיימת ויחידה טופולוגיה \mathcal{T}_A על A עבורה f העתקת מנה.

טופולוגיית המנה המושרית: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f : X \rightarrow A$ על אזי טופולוגיה \mathcal{T}_A על A עבורה f העתקת מנה.

מרחב המנה: יהי X מ"ט יהי \sim יחס שקילות מעל X ונגדיר X/\sim כך $f(x) = [x]_\sim$ אזי X/\sim מצוידת עם טופולוגיית המנה.

משפט התכונה האוניברסלית: תהא $f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה ותהא $g : X \rightarrow Z$ עבורה $g|_{f^{-1}(\{y\})}$ קבועה לכל $y \in Y$ אזי קיימת $h : Y \rightarrow Z$ עבורה

$h = g \circ f$ •

• $g = h \circ f$

• $(h \text{ רציפה}) \iff (g \text{ רציפה})$.

• $(h \text{ העתקת מנה}) \iff (g \text{ העתקת מנה})$.

מסקנה: תהא $f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה ותהא $g : X \rightarrow Z$ עבורה $g|_{f^{-1}(\{y\})}$ קבועה לכל $y \in Y$ אזי

• $(g \circ f^{-1}) \iff (g \text{ רציפה})$.

• $(g \circ f^{-1}) \iff (g \text{ העתקת מנה})$.

מסקנה: תהא $g : X \rightarrow Z$ רציפה ועל ותהא $f : X \rightarrow \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\}$ העתקת מנה אזי $(g \circ f^{-1})$ הומיאומורפיזם $(g \iff g)$ העתקת מנה.

קבוצה רוויה: תהא $f : X \rightarrow Y$ אזי $A \subseteq X$ עבורה לכל $y \in Y$ אם $A \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ אז $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$.

טענה: תהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $(f \text{ העתקת מנה}) \iff (f \text{ על ולכל } U \in \mathcal{T}_X \text{ רוויה מתקיים כי } f(U) \text{ פתוחה})$.

העתקה פתוחה: העתקה $f : X \rightarrow Y$ עבורה לכל $U \in \mathcal{T}_X$ מתקיים כי $f(U)$ פתוחה.

העתקה סגורה: העתקה $f : X \rightarrow Y$ עבורה לכל $E \subseteq X$ סגורה מתקיים כי $f(E)$ סגורה.

טענה: תהא $f : X \rightarrow Y$ חח"ע ועל התב"ש

• f פתוחה.

• f סגורה.

• f^{-1} רציפה.

טענה: תהא $f : X \rightarrow Y$ חח"ע ועל התב"ש

- f הומיאומורפיזם.
- f רציפה ופתוחה.
- f^{-1} רציפה וסגורה.

טענה: תהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה פתוחה ועל אזי f העתקת מנה.

טענה: תהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה סגורה ועל אזי f העתקת מנה.

המרחב הפרויקטיבי הממשי: נגדיר $\sim = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} (x = \lambda y)\}$ אזי $\mathbb{RP}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$.

מכפלה של קבוצות: תהינה $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ קבוצות אזי $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha\}$.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{B}_{\text{box}} = \{\prod_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\}$ בסיס של $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

טופולוגיית התיבה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{box}} = \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{box}})$.

הטלה: תהינה $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ קבוצות אזי $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ המוגדרת $\pi_\beta(f) = f(\beta)$.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{S}_{\text{prod}} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\}$ תת-בסיס של $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$.

טופולוגיית המכפלה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \mathcal{T}(\mathcal{S}_{\text{prod}})$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים באשר $|\Lambda| < \aleph_0$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \mathcal{T}_{\text{box}}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים באשר $|\Lambda| \geq \aleph_0$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{box}}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים ותהא $(\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \mathcal{T})$ טופולוגיה עבורה π_α רציפה לכל $\alpha \in \Lambda$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subseteq \mathcal{T}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \{ \prod_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{U}_\alpha \mid (\forall \alpha \in \Lambda. \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha) \wedge (|\{\alpha \in \Lambda \mid \mathcal{U}_\alpha \neq X_\alpha\}| \in \mathbb{N}) \}$.

משפט: תהא $f : Y \rightarrow (\prod_{\alpha} X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ אזי $(f \text{ רציפה}) \iff (\pi_\alpha \circ f)$ רציפה לכל α .

טענה: תהא $|\Lambda| \geq \aleph_0$ אזי $(\mathbb{R}^\Lambda, \mathcal{T}_{\text{box}})$ אינה מטריזבילית.

טענה: תהא $|\Lambda| \geq \aleph_0$ אזי $(\mathbb{R}^\Lambda, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ אינה מטריזבילית.

טענה: מטריזביליות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים ותהינה $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ באשר $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ לכל $\alpha \in \Lambda$ אזי $\overline{\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha} = \prod_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}$ בטופולוגיית המכפלה.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים ותהינה $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ באשר $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ לכל $\alpha \in \Lambda$ אזי $\overline{\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha} = \prod_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha}$ בטופולוגיית התיבה.

הפרדה של מרחב טופולוגי: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט אזי $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ באשר $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ וכן $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$ וכן $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \emptyset$.

מרחב טופולוגי קשיר: מרחב טופולוגי (X, \mathcal{T}) עבורו לא קיימת הפרדה.

מרחב טופולוגי אי-קשיר: מרחב טופולוגי (X, \mathcal{T}) עבורו קיימת הפרדה.

משפט: יהי $f : X \rightarrow Y$ הומיאומורפיזם אזי $(X \text{ קשיר}) \iff (Y \text{ קשיר})$.

מסקנה: קשירות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מרחב מטרי התב"ש

- X אי-קשיר.

- קיימות $E, F \subseteq X$ סגורות זרות לא ריקות עבורן $X = E \cup F$.

- קיימת $D \in \mathcal{P}(X) \setminus \{X, \emptyset\}$ סגורה ופתוחה.

טענה: יהי X מ"ט קשיר ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f(X)$ קשירה.

טענה: יהי X מ"ט ויהי $Y \subseteq X$ תת-מרחב אזי $(Y \text{ אי-קשיר}) \iff (Y \text{ קיימות } H, K \in \mathcal{P}(X) \setminus \{X, \emptyset\} \text{ עבורן } Y = H \cup K \text{ וכן } \overline{H} \cap \overline{K} = \emptyset)$.

טענה: תהא $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ הפרדה של X ויהי $Y \subseteq X$ תת-מרחב קשיר אזי $(Y \subseteq \mathcal{U}) \oplus (Y \subseteq \mathcal{V})$.

טענה: תהינה $A, B \subseteq X$ באשר $A \subseteq \overline{B}$ וכן $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ קשירה וכן $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ קשירה.

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ קשירה אזי \overline{A} קשירה.

טענה: תהא $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A \in \mathcal{A}$ מתקיים כי A קשירה וכן $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$ וכן $\bigcup \mathcal{A} = X$ אזי X קשיר.

מסקנה: תהינה $\{X_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ באשר X_n קשיר וכן $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי X קשיר.

מסקנה: \mathbb{R} עם הטופולוגיה הסטנדרטית קשיר.

מסקנה: $(-1, 1)$ עם הטופולוגיה המושרית מ- \mathbb{R} סטנדרטי הינו קשיר.

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ באשר $a < b$ אזי $(a, b), [a, b], (a, b], [a, b)$ קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ- \mathbb{R} סטנדרטי.

מסקנה: יהי $a \in \mathbb{R}$ אזי $(a, \infty), [a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, a], (-\infty, \infty), [a, \infty)$ קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ- \mathbb{R} סטנדרטי.

טענה: \mathbb{R}_{Sorg} איננה קשירה.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טס אזי $(X_\alpha \text{ קשיר לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ קשיר.

טענה: $(\prod_{i=1}^\infty \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{box}})$ איננה קשירה.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי \mathbb{R}^n קשיר עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

טענה: יהיו X, Y מ"ט קשירים תהא $A \subset X$ ותהא $B \subset Y$ אזי $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ מ"ט קשיר.

מסילה: יהי X מ"ט ויהיו $x, y \in X$ אזי $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ רציפה עבורה $\gamma(0) = x$ וכן $\gamma(1) = y$.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתי: מרחב טופולוגי (X, \mathcal{T}) עבורו לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה מ- x ל- y .

טענה: יהי X מ"ט קשיר מסילתי אזי X קשיר.

מסקנה: יהי $n > 1$ אזי \mathbb{R}^n איננו הומיאומורפי ל- \mathbb{R} .

למה: יהי X מ"ט קשיר מסילתי ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f(X)$ קשיר מסילתי.

מסקנה: קשירות מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי \mathbb{C}^n עם הטופולוגיה הסטנדרטית על \mathbb{R}^{2n} ויהי $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ אזי $\mathbb{C}^n \setminus \{x \in \mathbb{C}^n \mid p(x) = 0\}$ קשירה מסילתית.

מסקנה: יהי $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית על \mathbb{C}^{n^2} אזי $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ תת-מרחב קשיר מסילתי.

סימון: יהי X מ"ט ויהיו $x, y \in X$ אזי $(x \sim_{\text{קשיר}} y) \iff (x, y \in D \text{ קשירה עבורה } D \subseteq X)$ (קיימת מסילה מ- x ל- y).

טענה: יהי X מ"ט אזי $\sim_{\text{קשיר}}$ יחס שקילות מעל X .

רכיבי קשירות: יהי X מ"ט אזי $X/\sim_{\text{קשיר}}$.

סימון: יהי X מ"ט ויהיו $x, y \in X$ אזי $(x \sim_{\text{מסילתית}} y) \iff (x, y \in D \text{ קשירה עבורה } D \subseteq X)$ (קיימת מסילה מ- x ל- y).

טענה: יהי X מ"ט אזי $\sim_{\text{מסילתית}}$ יחס שקילות מעל X .

רכיבי קשירות מסילתית: יהי X מ"ט אזי $X/\sim_{\text{מסילתית}}$.

משפט: יהיו $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ רכיבי הקשירות של X אזי

- לכל $\alpha \in \Lambda$ מתקיים כי D_α קשירה.

- יהיו $\alpha, \beta \in \Lambda$ באשר $\alpha \neq \beta$ אזי $D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$.

- מתקיים $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$.

- לכל $Y \subseteq X$ תת-מרחב קשיר קיים ויחיד $\alpha \in \Lambda$ עבורו $Y \subseteq D_\alpha$.

משפט: יהיו $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ רכיבי הקשירות המסילתית של X אזי

- לכל $\alpha \in \Lambda$ מתקיים כי D_α קשירה.

- יהיו $\alpha, \beta \in \Lambda$ באשר $\alpha \neq \beta$ אזי $D_\alpha \cap D_\beta = \emptyset$.

- מתקיים $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} D_\alpha$.

- לכל $Y \subseteq X$ תת-מרחב קשיר קיים ויחיד $\alpha \in \Lambda$ עבורו $Y \subseteq D_\alpha$.

מסקנה: יהי D רכיב קשירות של X אזי D סגור.

מרחב טופולוגי קשיר מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x \in X$ המקיים לכל סביבה $\mathcal{U} \subseteq X$ של x קיימת סביבה $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ קשירה

עבורה $x \in \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי קשיר מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ מתקיים כי X קשיר מקומית ב- x .

טענה: קשירות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x \in X$ המקיים לכל סביבה $\mathcal{U} \subseteq X$ של x קיימת סביבה $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ קשירה מסילתית עבורה $x \in \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ מתקיים כי X קשיר מסילתית מקומית ב- x .

טענה: קשירות מקומית מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: \mathbb{R}_{Sorg} איננו קשיר מקומית.

טענה: יהי X מ"ט אזי $(X \text{ קשיר מקומית}) \iff (\text{לכל } \mathcal{U} \in \mathcal{T} \text{ ולכל } D \text{ רכיב קשירות של } \mathcal{U} \text{ מתקיים } (D \in \mathcal{T}))$.

טענה: יהי X מ"ט אזי $(X \text{ קשיר מסילתית מקומית}) \iff (\text{לכל } \mathcal{U} \in \mathcal{T} \text{ ולכל } D \text{ רכיב קשירות מסילתית של } \mathcal{U} \text{ מתקיים } (D \in \mathcal{T}))$.

טענה: יהי X מ"ט קשיר וקשיר מסילתית מקומית אזי X קשיר מסילתית.

בסיס סביבות בן מנייה בנקודה: יהי X מ"ט אזי $x \in X$ עבורו קיימות $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^\infty$ סביבות של x עבורן לכל סביבה \mathcal{V} של x קיים

$n \in \mathbb{N}$ עבורו $\mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המנייה הראשונה: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ קיים בסיס סביבות בן מנייה ב- x .

מסקנה: יהי X מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי X מניה I.

טענה: \mathbb{R}_{Sorg} מניה I.

טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה מניה I.

טענה: \mathbb{R} המצוייד עם הטופולוגיה הקו־בת־מניה אינו מניה I.

משפט: יהי X מ"ט מניה I ותהא $A \subseteq X$ תת־קבוצה אזי $\{\text{קיימת } a \in A^{\mathbb{N}} \text{ המתכנסת אל } x \mid x \in X\} = \bar{A}$.

משפט: יהיו X, Y מ"טים באשר X מניה I ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי f (רציפה) $\iff \{x_n\} \subseteq X$ המתכנסת ל- $a \in X$ עבור $a \in X$ מתקיים כי $\{f(x_n)\}$ מתכנסת ל- $f(a)$.

מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה השנייה: מרחב טופולוגי X עבורו קיים בסיס לכל היותר בן מנייה היוצר את \mathcal{T} .

מסקנה: יהי X מ"ט מניה II אזי X מניה I.

טענה: \mathbb{R}^n מניה II.

סימון: $\mathbb{R}^{\aleph_0} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}$

טענה: $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ מניה II.

טענה: $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{box}})$ אינו מניה I.

טענה: \mathbb{R}_{Sorg} אינו מניה II.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X, \mathcal{T}) מניה II $\iff \aleph_0 \geq |X|$.

טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הטריואלית מניה II.

טענה: נגדיר $d_u : \mathbb{R}^{\aleph_0} \times \mathbb{R}^{\aleph_0} \rightarrow \mathbb{R}$ כך $d_u((a_k)_{k=1}^{\infty}, (b_k)_{k=1}^{\infty}) = \min\{\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k - b_k|, 1\}$ אזי d_u מטריקה.

הטופולוגיה האחידה: $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}(d_u))$ הינו מניה I וכן אינו מניה II.

טענה: יהי X מ"ט מניה I והי $A \subseteq X$ תת־מרחב אזי A מניה I.

טענה: יהי X מ"ט מניה II והי $A \subseteq X$ תת־מרחב אזי A מניה II.

טענה: יהי X מ"ט מניה I ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה ופתוחה אזי $f(X)$ מניה I.

מסקנה: מניה I הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט מניה II ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה ופתוחה אזי $f(X)$ מניה II.

מסקנה: מניה II הינה תכונה טופולוגית.

מרחב טופולוגי ספרבילי: מרחב טופולוגי X עבורו קיימת $A \subseteq X$ צפופה בת מנייה.

מרחב טופולוגי לינדלוף: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $\{\mathcal{U}_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$ המקיימים $\bigcup \mathcal{U}_{\alpha} = X$ קיימת $f : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$ עבורה

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{U}_{f(i)} = X$$

טענה: \mathbb{R}_{Sorg} ספרבילי.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי (X, \mathcal{T}) ספרבילי $\iff \aleph_0 \geq |X|$.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הטריואלית אזי X ספרבילי.

טענה: \mathbb{R} המצוייד בטופולוגיה הקו־בת־מנייה אינו ספרבילי.

טענה: יהי X מ"ט מניה II אזי X לינדלוף וספרבילי.

טענה: \mathbb{R} המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית אינו מניה I.

למה: יהי \mathcal{B} בסיס של (X, \mathcal{T}) אזי (X, \mathcal{T}) לינדלוף $\iff \{\mathcal{B}_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B}$ (לכל $\mathcal{B}_{\alpha} \subseteq \mathcal{B}$) המקיימים $\bigcup \mathcal{B}_{\alpha} = X$ קיימת $f : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$ עבורה

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}_{f(i)} = X$$

טענה: \mathbb{R}_{Sorg} לינדלוף.

טענה: יהי X מ"ט ספרבילי ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f(X)$ ספרבילי.

מסקנה: ספרביליות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט לינדלוף ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f(X)$ לינדלוף.

מסקנה: לינדלוף הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט ספרבילי ותהא $A \subseteq X$ פתוחה אזי A ספרבילי.

טענה: יהי X מ"ט לינדלוף ותהא $E \subseteq X$ סגורה אזי E לינדלוף.

מסקנה: יהיו $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים מניה I באשר $|\Lambda| \leq \aleph_0$ אזי $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ מניה I.

מסקנה: יהיו $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים מניה II באשר $|\Lambda| \leq \aleph_0$ אזי $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ מניה II.

מסקנה: יהיו $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים ספרבילים באשר $|\Lambda| \leq \aleph_0$ אזי $(\prod X_{\alpha}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ ספרבילי.

טענה: יהי X מרחב מטרי התב"ש

- X מניה II.
- X ספרבילי.
- X לינדלף.

מרחב טופולוגי T_0 : מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x, y \in X$ שונים קיימת סביבה \mathcal{U} של x עבורה $y \notin \mathcal{U}$ או קיימת סביבה \mathcal{V} של y עבורה $x \notin \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי T_1 : מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x, y \in X$ שונים קיימת סביבה \mathcal{U} של x עבורה $y \notin \mathcal{U}$ וגם קיימת סביבה \mathcal{V} של y עבורה $x \notin \mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי T_2 /האוסדורף: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x, y \in X$ שונים קיימת סביבה \mathcal{U} של x וכן סביבה \mathcal{V} של y עבורן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

מסקנה: T_0, T_1, T_2 הינן תכונות טופולוגיות.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_1 אזי X מרחב טופולוגי T_0 .

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_2 אזי X מרחב טופולוגי T_1 .

טענה: יהי X מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי X מרחב T_2 .

טענה: תהייה \mathcal{T}, \mathcal{S} טופולוגיות על X באשר \mathcal{S} עדינה מ- \mathcal{T} וכן (X, \mathcal{T}) מרחב T_i אזי (X, \mathcal{S}) מרחב T_i .

מסקנה: \mathbb{R}_{sorg} האוסדורף.

טענה: \mathbb{Q} המצוייד בטופולוגיה הקו־סופית הינו T_1 וכן אינו T_2 .

טענה: \mathbb{R} המצוייד בטופולוגיה הקו־בת־מניה הינו T_1 וכן אינו T_2 .

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי $(X, \mathcal{T}(d))$ הינו T_2 .

טענה: תהא (X, \mathcal{T}) מ"ט T_i ותהא (Y, \mathcal{S}) מ"ט באשר $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ אזי (Y, \mathcal{S}) הינה T_i .

טענה: יהי X מ"ט T_i ויהי $A \subseteq X$ תת־מרחב אזי A מרחב T_i .

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי (X_α) מרחב T_i לכל $\alpha \in \Lambda \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ מרחב (T_i) .

הישר עם הראשית הכפולה: תהא $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ- \mathbb{R}^2 הסטנדרטית ויהי $\sim = \text{Id} \cup \{((\frac{a}{0}), (\frac{a}{1})) \mid a \neq 0\}$ יחס שקילות על $\mathbb{R} \times \{0, 1\}$ אזי $\mathbb{R} \times \{0, 1\} / \sim$ עם טופולוגיית המנה.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט אזי (\mathcal{T}) הוא T_0 \iff (לכל $a, b \in X$ שונים מתקיים $\overline{\{a\}} \neq \overline{\{b\}}$).

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט אזי (\mathcal{T}) הוא T_1 \iff $\{x\}$ קבוצה סגורה לכל $x \in X$.

טענה: יהי (X, \mathcal{T}) מ"ט אזי (\mathcal{T}) הוא T_2 \iff (לכל $A \subseteq X$ מתקיים $A = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{T}} \bigcup_{A \subseteq \mathcal{U}} \mathcal{U}$).

טענה: יהי X מ"ט האוסדורף ותהא $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה מתכנסת אזי קיים ויחיד $y \in X$ עבורו $\{x_n\}$ מתכנסת ל- y .

מרחב טופולוגי T_i מקומית: מ"ט X עבורו לכל $x \in X$ קיימת סביבה \mathcal{U} של x עבורה \mathcal{U} הינה T_i .

טענה: יהי X מ"ט T_0 מקומית אזי X הינו T_0 .

טענה: יהי X מ"ט T_1 מקומית אזי X הינו T_1 .

טענה: הישר עם הראשית הכפולה הינו T_2 מקומית וכן אינו T_2 .

קבוצה מסוג G_δ : יהי X מ"ט אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימת $\{U_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{T}$ המקיימת $A = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$.

טענה: יהי X מ"ט T_1 מניה I ויהי $x \in X$ אזי $\{x\}$ הינו G_δ .

העתקת נסג: יהי X מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $r : X \rightarrow A$ רציפה עבורה $r(a) = a$ לכל $a \in A$.

קבוצת נסג: יהי X מ"ט אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימת $r : X \rightarrow A$ נסג.

טענה: יהי X האוסדורף ותהא $A \subseteq X$ נסג אזי A סגורה.

טענה: יהי X מ"ט T_1 תהא $A \subseteq X$ ויהי $x \in X$ אזי (x) נקודת הצטברות של A \iff (לכל \mathcal{U} סביבה של x מתקיים $|A \cap \mathcal{U}| \geq \aleph_0$).

טענה: יהי X מ"ט אזי (X) מרחב האוסדורף $\iff \{(a, a) \mid a \in X\}$ קבוצה סגורה.

מרחב טופולוגי רגולרי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ ולכל $E \subseteq X$ סגורה באשר $x \notin E$ קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ עבורן $x \in \mathcal{U}$ וכן $E \subseteq \mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

מרחב טופולוגי נורמלי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $E, F \subseteq X$ סגורות באשר $E \cap F = \emptyset$ קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ עבורן $E \subseteq \mathcal{U}$ וכן $F \subseteq \mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

מרחב טופולוגי T_3 : מרחב טופולוגי X רגולרי וכן T_1 .

מרחב טופולוגי T_4 : מרחב טופולוגי X נורמלי וכן T_1 .

מסקנה: T_3, T_4 הינן תכונות טופולוגיות.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_3 אזי X מרחב טופולוגי T_2 .

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_4 אזי X מרחב טופולוגי T_3 .

טענה: \mathbb{R}_K הינו T_2 וכן אינו רגולרי.

טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף: נגדיר $\mathcal{T} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ אזי $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

טענה: \mathbb{R} המצוייד עם טופולוגיית הקרניים ההולכות לאינסוף הינו T_0 וכן אינו T_1 וכן אינו רגולרי וכן הינו נורמלי.

טענה: \mathbb{R}_{Sorg} הינו T_4 .

סימון: תהייה $X, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ עבורן $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ וכן $\bar{\mathcal{V}} \subseteq \mathcal{U}$ אזי $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$.

טענה: יהי X מ"ט אזי $(X \text{ רגולרי}) \iff x \in X$ ולכל $\mathcal{U} \subseteq X$ סביבה של x קיימת סביבה \mathcal{V} של x עבורה $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$.

טענה: יהי X מ"ט אזי $(X \text{ נורמלי}) \iff (X \text{ סגורה ולכל } E \subseteq X \text{ פתוחה באשר } E \subseteq \mathcal{U} \text{ קיימת } \mathcal{V} \subseteq X \text{ פתוחה עבורה } E \subseteq \mathcal{V} \in \mathcal{U})$.

משפט הלמה של אוריסון: יהי X מ"ט אזי $(X \text{ נורמלי}) \iff (X \text{ סגורות וזרות ולכל } [a, b] \subseteq \mathbb{R} \text{ קיימת } f : X \rightarrow [a, b] \text{ רציפה עבורה } f|_A = a \text{ וכן } f|_B = b)$.

טענה: יהי X מ"ט רגולרי ויהי $A \subseteq X$ אזי A רגולרי.

טענה: יהי X מ"ט נורמלי ויהי $E \subseteq X$ סגור אזי E נורמלי.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $(X_\alpha \text{ רגולרי לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ רגולרי.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $(X_\alpha \text{ הינו } T_3 \text{ לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ הינו T_3 .

מסקנה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}^2$ הינו רגולרי וכן אינו נורמלי.

טענה: יהי X מ"ט מטריזבילי אזי X נורמלי.

טענה: יהי (X, \prec) יחס סדר טוב אזי X המצוייד עם טופולוגיית הסדר נורמלי.

מרחב טופולוגי נורמלי לחלוטין: מ"ט X עבורו לכל $A \subseteq X$ מתקיים כי A נורמלי.

קבוצות מופרדות: יהי X מ"ט אזי $(X \text{ נורמלי לחלוטין}) \iff (X \text{ מופרדות קיימות } \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T} \text{ זרות עבורן } A \subseteq \mathcal{U} \text{ וכן } B \subseteq \mathcal{V})$.

טענה: יהי X מ"ט אזי $(X \text{ נורמלי לחלוטין}) \iff (X \text{ מופרדות קיימות } \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T} \text{ זרות עבורן } A \subseteq \mathcal{U} \text{ וכן } B \subseteq \mathcal{V})$.

סימון: $\mathcal{B}_{\text{moore},1} = \{B_r(p) \mid (p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \wedge (p_2 > r > 0)\}$

סימון: $\mathcal{B}_{\text{moore},2} = \{B_{p_2}(p) \cup \{(p_1, 0)\} \mid (p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0})\}$

המישור של מור: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ מצוייד עם הטופולוגיה $(\mathcal{B}_{\text{moore},1} \cup \mathcal{B}_{\text{moore},2})$.

טענה: המישור של מור הינו קשיר האוסדורף רגולרי וכן אינו נורמלי.

טענה: יהי X מ"ט רגולרי ומניה II אזי X נורמלי.

מסקנה: יהי X מ"ט רגולרי לינדלוף אזי X נורמלי.

למה: יהי X מ"ט באשר \mathcal{T}_X מושרית מהמטריקה d אזי קיימת מטריקה d' של X עבורה $d' \leq 1$ וכן d' משרה את \mathcal{T}_X .

למה: יהיו $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ מ"טים אזי $(X_n \text{ מטריזבילי לכל } n \in \mathbb{N}) \iff (\prod X_n, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ מטריזבילי.

מסקנה: $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ מטריזבילי.

משפט המטריזציה של אוריסון: יהי X מ"ט T_0 רגולרי ומניה II אזי X מטריזבילי.

מרחב טופולוגי מטריזבילי מקומית: מ"ט X עבורו לכל $x \in X$ קיימת סביבה \mathcal{U} של x עבורה \mathcal{U} הינה מטריזבילית.

טענה: יהי X מ"ט T_0 רגולרי לינדלוף ומטריזבילי מקומית אזי X מטריזבילי.

מרחב טופולוגי קומפקטי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $\mathcal{U}_\alpha \subseteq \mathcal{T}$ המקיימים $\bigcup \mathcal{U}_\alpha = X$ קיים $n \in \mathbb{N}$ וקיימת $f : [n] \rightarrow \Lambda$ עבורה $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_{f(i)} = X$.

טענה: יהי \mathcal{B} בסיס של (X, \mathcal{T}) אזי $(X \text{ קומפקטי}) \iff (\text{לכל } \{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B} \text{ המקיימים } \bigcup \mathcal{B}_\alpha = X \text{ קיים } n \in \mathbb{N} \text{ וקיימת } f : [n] \rightarrow \Lambda \text{ עבורה } \bigcup_{i=0}^n \mathcal{B}_{f(i)} = X)$.

טענה: X המצוייד עם הטופולוגיה הטריזבילית קומפקטי.

טענה: יהי X המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי $(X \text{ קומפקטי}) \iff (X \text{ סופי})$.

טענה: תהא X קבוצה סופית ותהא \mathcal{T} טופולוגיה על X אזי (X, \mathcal{T}) קומפקטי.

טענה: \mathbb{R} המצוייד עם הטופולוגיה הקו־סופית קומפקטי.

טענה: \mathbb{R} המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי.

מסקנה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי (a, b) המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $[a, b]$ המצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי.

טענה: יהי X מ"ט ויהי $Y \subseteq X$ אזי $(Y \text{ קומפקטי}) \iff \{ \mathcal{U}_\alpha \}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}_X$ המקיימים $Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ וקיימת $n \in \mathbb{N}$ וקיימת $f : [n] \rightarrow \Lambda$ עבורה $(Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{f(i)})$.

טענה: יהי X מ"ט קומפקטי ותהא $Y \subseteq X$ סגורה אזי Y קומפקטי.

טענה: יהי X האוסדורף תהא $Y \subseteq X$ קומפקטי ויהי $x \notin Y$ אזי קיימות $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}_X$ עבורן $x \in \mathcal{U}$ וכן $Y \subseteq \mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

טענה: יהי X האוסדורף ותהא $Y \subseteq X$ קומפקטי אזי Y סגורה.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי אזי X רגולרי.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי אזי X נורמלי.

טענה: יהי X קומפקטי ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי $f(X)$ קומפקטי.

מסקנה: קומפקטיות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X קומפקטי יהי Y האוסדורף ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה והפיכה אזי f הומיאומורפיזם.

מסקנה: יהי X קומפקטי יהי Y האוסדורף ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה וחח"ע אזי f שייכון.

תכונת החיתוך הסופי: יהי X מ"ט אזי $\{ \mathcal{A}_\alpha \}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $f : [n] \rightarrow \Lambda$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}_{f(i)} \neq \emptyset$.

טענה: יהי X מ"ט אזי $(X \text{ קומפקטי}) \iff \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A} \text{ משפחה של קבוצות סגורות המקיימת את תכונת החיתוך הסופי מתקיים} \bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset \}$.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי מטריזבילי מקומית אזי X מטריזבילי.

טענה: יהי X קומפקטי מטריזבילי אזי X ספרבילי.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי אזי $(X \text{ מטריזבילי}) \iff (X \text{ מניה II})$.

טענה: יהי X קומפקטי יהי Y האוסדורף ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה ועל אזי Y מטריזבילי.

טענה: יהי X מ"ט יהי Y האוסדורף קומפקטי ותהא $f : X \rightarrow Y$ אזי f רציפה $\iff (\Gamma_f \text{ סגורה ב- } X \times Y)$.

למה: יהי X קומפקטי יהי Y מ"ט ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y)$ כיסוי פתוח של $X \times Y$ ללא תת-כיסוי סופי אזי קיימת $x \in X$ עבורה לכל \mathcal{U} סביבה של x מתקיים כי $\mathcal{U} \times Y$ אינה ניתנת לכיסוי סופי על ידי אברי \mathcal{A} .

למה: יהיו X, Z מ"טים יהי Y קומפקטי יהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X \times Y \times Z)$ כיסוי פתוח של $X \times Y \times Z$ ללא תת-כיסוי סופי ותהא $x \in X$ עבורה לכל \mathcal{U} סביבה של x מתקיים כי $\mathcal{U} \times Y \times Z$ אינה ניתנת לכיסוי סופי על ידי אברי \mathcal{A} אזי קיימת $y \in Y$ עבורה לכל \mathcal{U} סביבה של x ולכל \mathcal{V} סביבה של y מתקיים כי $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times Z$ אינה ניתנת לכיסוי סופי.

טענה: יהיו $\{ X_i \}_{i=1}^n$ מ"טים אזי $(X_i \text{ קומפקטי לכל } i \in [n]) \iff (\prod_{i=1}^n X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}}) \text{ קומפקטי}$.

טענה: יהיו $\{ X_i \}_{i=1}^\infty$ מ"טים אזי $(X_i \text{ קומפקטי לכל } i \in \mathbb{N}) \iff (\prod_{i=1}^\infty X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}}) \text{ קומפקטי}$.

טענה: (אקסיומת הבחירה) $\iff (\aleph_0 > |\Lambda| \text{ ולכל } \{ X_\alpha \}_{\alpha \in \Lambda} \text{ מ"טים מתקיים } (X_\alpha \text{ קומפקטי לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}) \text{ קומפקטי})$.

מסקנה משפט טיכונוב: יהיו $\{ X_\alpha \}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי $(X_\alpha \text{ קומפקטי לכל } \alpha \in \Lambda) \iff (\prod X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}) \text{ קומפקטי}$.

טענה: יהי $\{0, 1\}$ המצוייד עם הטופולוגיה הבדידה אזי $\{0, 1\}$ קומפקטי וכן $(\prod_{n=1}^\infty \{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{box}})$ אינו קומפקטי.

טענה: יהי X קומפקטי יהי Y מ"ט מצוייד עם טופולוגיית הסדר $<$ ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי קיימים $a, b \in X$ עבורם $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ לכל $x \in X$.

מספר לבג: יהי X מרחב מטרי קומפקטי ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ כיסוי פתוח של X אזי $\delta > 0$ עבורו לכל $A \subseteq X$ אם $\text{diam}(A) < \delta$ אז קיימת $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ עבורה $A \subseteq \mathcal{U}$.

טענה: יהי X מרחב מטרי קומפקטי ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ כיסוי פתוח של X אזי קיים מספר לבג.

מסקנה: יהי X מרחב מטרי קומפקטי יהי Y מרחב מטרי ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.

מרחב טופולוגיה קומפקטי מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x \in X$ קיימת $D \subseteq X$ קומפקטית וכן קיימת $\mathcal{U} \subseteq D$ פתוחה המקיימת $x \in \mathcal{U}$.

טענה: יהי X מ"ט קומפקטי אזי X מ"ט קומפקטי מקומית.

טענה: יהי X האוסדורף התב"ש

• X קומפקטי מקומית.

• לכל $x \in X$ קיימת \mathcal{U} סביבה של x באשר $\overline{\mathcal{U}}$ קומפקטית.

• לכל $x \in X$ ולכל \mathcal{U} סביבה של x קיימת \mathcal{V} סביבה של x עבורה $\overline{\mathcal{V}}$ קומפקטית וכן $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$.

מסקנה: יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית אזי X רגולרי.

טענה: \mathbb{R}^n מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית קומפקטי מקומית.

טענה: $(\mathbb{R}^{\aleph_0}, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ קומפקטי מקומית.

טענה: \mathbb{Q} מצוייד עם הטופולוגיה הסטנדרטית אינו קומפקטי מקומית.

טענה: יהי X קומפקטי מקומית יהי Y מ"ט ותהא $f : X \rightarrow Y$ רציפה ופתוחה אזי $f(X)$ קומפקטית מקומית.

מסקנה: קומפקטיות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X קומפקטי מקומית ותהא $Y \subseteq X$ סגורה אזי Y קומפקטית מקומית.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית ותהא $Y \subseteq X$ פתוחה אזי Y קומפקטית מקומית.

טענה: יהיו $\{X_i\}_{i=1}^n$ מ"טים אזי (X_i) קומפקטי מקומית לכל $i \in [n]$ $\iff (\prod_{i=1}^n X_i, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ קומפקטי מקומית.

הערת נאותה: יהיו X, Y מ"טים אזי $f : X \rightarrow Y$ עבורה לכל $C \subseteq Y$ קומפקטית מתקיים כי $f^{-1}(C)$ קומפקטית.

טענה: יהי X מ"ט יהי Y האוסדורף קומפקטי מקומית ותהא $f : X \rightarrow Y$ חח"ע על רציפה ונאותה אזי f הומיאומורפיזם.

קומפקטיפיקציה: יהי X מ"ט אזי מ"ט קומפקטי והאוסדורף Y עבורו קיים שיכון $f : X \rightarrow Y$ המקיים $\overline{f(X)} = Y$.

הערה: קומפקטיפיקציה היא לעיתים מ"ט ולעיתים השיכון.

מסקנה: יהי X מ"ט ותהא Y קומפקטיפיקציה אזי X צפוף ב- Y .

קומפקטיפיקציה חד-נקודתית/אלכסנדרוב: יהי X מ"ט אזי קומפקטיפיקציה Y עבורה $|Y \setminus X| = 1$.

טענה: יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית שאינו קומפקטי אזי קיימת ל- X קומפקטיפיקציה חד-נקודתית.

הערה: יהי X האוסדורף קומפקטי מקומית שאינו קומפקטי ותהייה Y, Z קומפקטיפיקציות חד-נקודתיות אזי Z, Y הומיאומורפיים.

קומפקטיפיקציית סטון-צ'י: יהי X מ"ט אזי קומפקטיפיקציה $i : X \rightarrow Y$ עבורה לכל מ"ט האוסדורף Z ולכל $f : X \rightarrow Z$ רציפה

קיימת $g : Y \rightarrow Z$ רציפה עבורה $g \circ i = f$.

טענה: יהי X מ"ט ותהייה Y, Z קומפקטיפיקציות סטון-צ'י אזי Z, Y הומיאומורפיים.

מרחב טופולוגי קומפקטי סדרתי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל סדרה a_n קיימת תת-סדרה a_{k_n} מתכנסת.

למה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים תהא $a : \mathbb{N} \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ סדרה ויהי $b \in \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ אזי (a) מתכנסת ל- (b) $\iff (\pi_\alpha(a_n))_{n=0}^\infty$ מתכנסת ל- $(\pi_\alpha(b))_{n=0}^\infty$ לכל $\alpha \in \Lambda$.

טענה: $\{x \in [0, 1] \mid |\{x_\alpha = 1\}| \leq \aleph_0\}$ קומפקטית סדרתית וכן אינה קומפקטית.

טענה: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ קומפקטית וכן אינה קומפקטית סדרתית.

טענה: $[0, 1]^2$ מצוייד עם טופולוגיית הסדר המילוני הינו קומפקטי וכן קומפקטי סדרתית.

טענה: יהי X קומפקטי מניה I אזי X קומפקטי סדרתית.

טענה: יהי X לינדלוף קומפקטי סדרתית אזי X קומפקטי.

טופולוגיית הישר הארוך: יהי ω_1 הסודר המינימלי שאינו בן-מניה אזי $\omega_1 \times [0, 1]$ מצוייד עם הסדר המילוני.

טענה: הישר הארוך הינו קומפקטי סדרתית וכן אינו קומפקטי וכן אינו מטריזבילי.

טענה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ מ"טים אזי (X_α) קומפקטי מקומית לכל $\alpha \in \Lambda$ וכן קיימת $\Delta \subseteq \Lambda$ סופית עבורה X_β קומפקטי לכל $\beta \in \Lambda \setminus \Delta$ $\iff (\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ קומפקטי מקומית.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי שלם ותהא $A \subseteq X$ אזי (A) סגורה $\iff (A, d)$ מרחב מטרי שלם.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי שלם אזי $(X, \min\{d, 1\})$ מרחב מטרי שלם.

המטריקה האחידה: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא Λ קבוצה אזי $\rho(d) : X^\Lambda \times X^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת

$$\rho(d)(x, y) = \sup_{\alpha \in \Lambda} \{\min\{d(x_\alpha, y_\alpha), 1\}\}$$

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי ותהא Λ קבוצה אזי $\rho(d)$ מטריקה מעל X^Λ וכן $\rho(d) \leq 1$.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי שלם ותהא Λ קבוצה אזי $(X^\Lambda, \rho(d))$ מרחב מטרי שלם.

למה: יהי X מ"ט יהי (Y, d) מרחב מטרי תהא $f : X \rightarrow Y$ ותהייה $\{f_n\}_{n=0}^\infty \subseteq X \rightarrow Y$ רציפות עבורן $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי f רציפה.

טענה: יהי X מ"ט ויהי (Y, d) מרחב מטרי אזי $C(X, Y)$ סגורה במרחב המטרי $(Y^X, \rho(d))$.

מסקנה: יהי X מ"ט ויהי (Y, d) מרחב מטרי שלם אזי $C(X, Y)$ מרחב מטרי שלם.

העתקות הומוטופיות: יהיו X, Y מ"ט אזי $f, g : X \rightarrow Y$ רציפות עבורן קיימת $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ רציפה המקיימת $F(x, 0) = f(x)$

וכן $F(x, 1) = g(x)$ לכל $x \in X$.

סימון: יהיו X, Y מ"ט ויהיו $f, g : X \rightarrow Y$ הומוטופיות אזי $f \sim_{\text{homotopy}} g$.

טענה: יהיו X, Y מ"ט אזי \sim_{homotopy} יחס שקילות.

החבורה יסודית של מרחב טופולוגי: יהי X מ"ט ותהא $a \in X$ אזי $\pi_1(X, a) = \{f \in C([0, 1], X) \mid f(0) = f(1) = a\} / \sim_{\text{homotopy}}$

טענה: יהי X מ"ט ותהא $a \in X$ אזי $\pi_1(X, a)$ חבורה ביחס לשרשור מסילות.

מסקנה משפט העקומה של ז'ורדן: תהא γ מסילה סגורה פשוטה מעל \mathbb{S}^2 אזי מספר רכיבי הקשירות של $\mathbb{S}^2 \setminus \gamma$ הינו 2.

מסקנה: $K_{3,3}$ איננו מישורי.

משפט קורטובסקי: יהי G גרף אזי $(G \text{ איננו מישורי}) \iff (K_{3,3} \text{ תת גרף של } G \text{ או } K_5 \text{ תת גרף של } G)$.

חבורת המילים: יהי Σ אלפבית אזי $G(\Sigma) = \left\{ \left(w_1^{\sigma(1)}, \dots, w_n^{\sigma(n)} \right) \mid (w_1, \dots, w_n \in \Sigma) \wedge (\sigma : [n] \rightarrow \{\pm 1\}) \right\}$

טענה: יהי Σ אלפבית אזי $G(\Sigma)$ חבורה ביחס לשרשור מילים.

טענה: יהי T טורוס בעל 4 חורים החתוך על ידי מישור בצד ותהא $a \in T$ על החתך אזי $G(\Sigma) \cong \pi_1(T, a)$.

הערה: יהי Σ אלפבית יהי T טורוס בעל $|\Sigma|$ חורים החתוך בצורה מסוימת ויהי $a \in T$ על חתך מסוים אזי $G(\Sigma) \cong \pi_1(X, a)$.

סימון: יהי X מ"ט ויהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\pi_n(X) = \{f \in C(\mathbb{S}^n, X)\} / \sim_{\text{homotopy}}$