משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה
- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\mathrm{Vol}_n\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Vol}_n(A_i)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $k\in\mathbb{N}$ קיימות $X_1\ldots X_k,Y_1\ldots Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ וקיימות $\varphi_1\ldots\varphi_k$ איזומטריות המקיימות $X=\biguplus_{i=1}^{k}X_i$ וכן $Y=\biguplus_{i=1}^{k}Y_i$ וכן $\forall j\in[k].Y_j=\varphi_j(X_j)$.

סימון: תהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חופפות בחלקים אזי $X\equiv Y$.

משפט פרדוקס בנך־טרסקי: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ ותהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\mathrm{int}(X)\neq\varnothing$ וכן $\mathrm{int}(Y)\neq\varnothing$ אזי $X\equiv Y$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ אזי לא קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה
- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(A\uplus B)=\mathrm{Vol}_n(A)+\mathrm{Vol}_n(B)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

משפט בנך: יהי $n\in\{1,2\}$ אזי קיימת $\mathrm{Vol}_n:\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ עבורה
- $\mathrm{Vol}_n([0,1]^n)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(A\uplus B)=\mathrm{Vol}_n(A)+\mathrm{Vol}_n(B)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Vol}_n(\varphi(A))=\mathrm{Vol}_n(A)$.

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהיינה $A,B\in\mathcal{A}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{A}$.

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

σ־אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$ σ־אלגברה אזי $\mathcal{A}$ אלגברה.

σ־אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ σ־אלגבראות אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ σ־אלגברה.

σ־אלגברה נוצרת: תהא X קבוצה תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל X המכילות את A אזי $\sigma(A)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $\sigma(A)$ הינה ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את A.

σ־אלגברה בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathcal{B}(X)=\sigma(\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}(X)\mid \text{פתוחה } \mathcal{O}\})$.

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות
- σ־אלגברה בורל על X.
- $\sigma(\{B_r(a)\mid(r>0)\wedge(a\in X)\})$.
- $\sigma(\{B_r(a)\mid(r\in\mathbb{Q}_+)\wedge(a\in X)\})$.
- תהא $Y\subseteq X$ צפופה אזי $\sigma(\{B_r(a)\mid(r\in\mathbb{Q}_+)\wedge(a\in Y)\})$.

קבוצה G_δ: $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ פתוחות המקיימות $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

קבוצה F_δ: $X \subseteq A$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סגורות המקיימות $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_i$.

מסקנה: תהא A קבוצה G_δ ותהא B קבוצה F_δ אזי $A, B \in \mathcal{B}(X)$.

טענה: הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על $\mathbb{R}^n$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mid a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{R}\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mid a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{Q}\right\}\right)$.

משפט: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $C(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ רציפה ב־} x\}$ אזי

- $C(f) \in G_\delta$.
- תהא $X \in G_\delta$ אזי קיימת f עבורה $C(f) = X$.

קבוצה דלילה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ המקיימת $\text{int}\left(\overline{A}\right) = \varnothing$.

קבוצה מקטגוריה ראשונה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימות $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ דלילות עבורן $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ שאינה מקטגוריה ראשונה.

קבוצה שיורית: יהי X מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $A^{\mathcal{C}}$.

למה: יהי X מרחב מטרי אזי

- תהא $A \subseteq X$ דלילה ותהא $B \subseteq A$ אזי B דלילה.
- תהיינה $A_1 \ldots A_n \subseteq X$ דלילות אזי $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ דלילה.
- תהא $A \subseteq X$ דלילה אזי $\overline{A}$ דלילה.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $\text{int}(A) = \varnothing$.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות σ־אידיאל.

מסקנה: $\mathbb{Q} \notin G_\delta$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי קיימת $F \subseteq \mathbb{R}$ מקטגוריה ראשונה וקיימת $N \subseteq \mathbb{R}$ זניחה עבורה $A = F \uplus N$.

משפט בנך: במרחב המטרי $C([0,1])$ עם נורמת מקסימום הקבוצה $\{f \in C([0,1]) \mid \exists x \in (0,1) . f \in \mathcal{D}(x)\}$ היא מקטגוריה ראשונה.

הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבוצה בעלת תכונת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימת $G \subseteq X$ פתוחה וקיימת $Q \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A = G \triangle Q$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ אזי (ל־A יש את תכונת בייר)$\Longleftrightarrow$(קיימת $F \subseteq X$ סגורה וקיימת $P \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A = F \triangle P$).

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ בעלת תכונת בייר אזי $A^{\mathcal{C}}$ בעלת תכונת בייר.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\{A \subseteq X \mid \text{בעלת תכונת בייר } A\} = \sigma\left(\{A \subseteq X \mid (\text{פתוחה } A) \vee (\text{מקטגוריה ראשונה } A)\}\right)$.

משפט: תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\varnothing, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \left\{A^{\mathcal{C}} \mid A \in \mathcal{F}_\alpha\right\} \cup \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_\alpha\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{F}_\alpha$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא X קבוצה עבורה $|X| = \aleph$ אזי $|\sigma(X)| = \aleph$.

מרחב מדיד: תהא X קבוצה ותהא $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ־אלגברה אזי (X, Σ).

פונקציית מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing) = 0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$.

מרחב מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא μ פונקציית מידה אזי (X, Σ, μ).

מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) < \infty$.

מידה σ־סופית: פונקציית מידה μ עבורה קיימים $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ המקיימים $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ וכן $\forall i \in \mathbb{N}_+ . \mu(B_i) < \infty$.

מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) = 1$.

טענה: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי

- מונוטוניות: יהיו $A, B \in \Sigma$ באשר $B \subseteq A$ אזי $\mu(A) \leq \mu(B)$.

- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$.
- רציפות מלעיל: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_n\right)$.
- רציפות מלרע: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ וכן $\mu\left(A_1\right)<\infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_n\right)$.

מידת בורל: תהא X קבוצה אזי מידה μ על $(X,\mathcal{B}(X))$.

קבוצה ממידה אפס/זניחה: $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu\left(E\right)=0$.

סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{N}=\{E\in\Sigma\mid\mu\left(E\right)=0\}$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זניחות אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ זניחה.

כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי ψ פרידיקט עבורו קיימת $E\in\mathcal{N}$ המקיים כי ψ מתקיים לכל $X\backslash E$ אזי נאמר כי "ψ נכונה μ כמעט בכל מקום".

מידה שלמה: פונקציית מידה μ עבורה לכל $E\in\mathcal{N}$ ולכל $F\subseteq E$ מתקיים $F\in\mathcal{N}$.

השלמה של σ־אלגברה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}=\{E\cup F\mid(E\in\Sigma)\wedge(\exists N\in\mathcal{N}.F\subseteq N)\}$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}$ σ־אלגברה.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי קיימת ויחידה מידה שלמה ν על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\nu_{\restriction_\Sigma}=\mu$.

השלמה של מידה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי המידה השלמה $\overline{\mu}$ על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\overline{\mu}_{\restriction_\Sigma}=\mu$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\left(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu}\right)$ מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת
- $X\in\mathcal{D}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{D}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $B\backslash A\in\mathcal{D}$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{D}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{D}$.

מערכת π: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ עבורה לכל $A_1\ldots A_n\in\Pi$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\Pi$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ מחלקות דינקין אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$ מחלקת דינקין.

מחלקת דינקין נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ ותהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות דינקין מעל X המכילות את A אזי $d\left(A\right)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $d\left(A\right)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

משפט הלמה של דינקין: תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ מערכת π אזי $\sigma\left(\Pi\right)=d\left(\Pi\right)$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma\left(\Pi\right)$ ותהיינה μ,ν מידות סופיות על Σ עבורן $\mu\left(X\right)=\nu\left(X\right)$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi}=\nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma\left(\Pi\right)$ תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Pi$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ וכן $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=X$ ותהיינה μ,ν מידות על Σ עבורן $\forall n\in\mathbb{N}_+.\mu\left(A_i\right)=\nu\left(A_i\right)<\infty$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi}=\nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

חוג למחצה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת
- $\varnothing\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $C_1\ldots C_n\in\mathcal{E}$ עבורם $A\backslash B=\biguplus_{i=1}^{n}C_i$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ חוג למחצה ויהיו $A_1\ldots A_n\in\mathcal{E}$ אזי
- יהי $P\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $B_1\ldots B_m\in\mathcal{E}$ עבורם $P\backslash\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}B_i$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in[n])\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in\mathbb{N}_+)\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{\infty}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.

מידה אלמנטרית: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ חוג למחצה אזי $\mu:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ המקיימת
- $\mu\left(\varnothing\right)=0$.
- אדיטיביות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ עבורם $A\uplus B\in\mathcal{E}$ אזי $\mu\left(A\uplus B\right)=\mu\left(A\right)+\mu\left(B\right)$.
- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu\left(A\right)\le\mu\left(B\right)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$.

מידה חיצונית: יהי $X\neq\varnothing$ אזי $\mu^*:\mathcal{P}\left(X\right)\to[0,\infty]$ המקיימת
- $\mu^*\left(\varnothing\right)=0$.

- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{P}(X)$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)\le\sum_{i=1}^\infty\mu(A_i)$.

המידה החיצונית הנוצרת על ידי ρ: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ עבורה $\rho(\varnothing)=0$ נגדיר $\rho^*:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ כך $\rho^*(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^\infty\rho(E_i)\mid\left(\{E_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{E}\right)\wedge\left(A\subseteq\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right)\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ עבורה $\rho(\varnothing)=0$ אזי ρ^* מידה חיצונית.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $m^*_{\restriction\mathcal{M}}=m$.

קבוצה λ: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda(\varnothing)=0$ אזי $E\in\mathcal{A}$ עבורה לכל $F\in\mathcal{A}$ מתקיים $\lambda(E\cap F)+\lambda\left(E^{\mathcal{C}}\cap F\right)=\lambda(E\cap F)+\lambda(F\backslash E)=\lambda(F)$.

סימון: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda(\varnothing)=0$ אזי $\Gamma_0=\{E\in\mathcal{A}\mid\lambda\text{ קבוצה }E\}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ עבורה $\lambda(\varnothing)=0$ אזי

- Γ_0 אלגברה.
- λ אדיטיבית על Γ_0.
- תהיינה $E_1\ldots E_n\in\Gamma_0$ ויהי $F\in\mathcal{A}$ אזי $\lambda\left(\biguplus_{i=1}^n(E_k\cap F)\right)=\sum_{i=1}^n\lambda(E_n\cap F)$.

קבוצה מדידה ביחס למידה חיצונית: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $A\subseteq X$ עבורה לכל $E\subseteq X$ מתקיים $\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\backslash A)$.

סימון: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $\Sigma_{\mu^*}=\{A\subseteq X\mid\mu^*\text{ מדידה }A\}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mathcal{M}\subseteq\Sigma_{m^*}$.

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי

- Σ_{μ^*} σ־אלגברה.
- $\mu^*_{\restriction\Sigma_{\mu^*}}$ מידה שלמה.

המשכת קרתיאודורי: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי m^* מידה מעל Σ_{m^*}.

משפט: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא (X,Σ',μ) המשכת קרתיאודורי נוספת של $(\mathcal{M},m)$ אזי

- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A)\le m^*(A)$.
- נניח כי $m^*(X)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A)=m^*(A)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu(A)=m^*(A)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

משפט קרתיאודורי: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא μ^* מידה חיצונית עבורה לכל $A,B\subseteq X$ באשר $d(A,B)>0$ מתקיים $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$ אזי $\mathcal{B}(X)\subseteq\Sigma_{\mu^*}$.

קבוצה רגולרית: קבוצה $A\in\Sigma$ עבורה $\mu(A)=\sup\{\mu(K)\mid(K\subseteq A)\wedge(\text{קומפקטית }K)\}$.

מידה רגולרית: מידה μ עבורה כל $A\in\Sigma$ הינה רגולרית.

משפט אולם: יהי X מרחב מטרי שלם וספירבילי ותהא μ מידת בורל עבורה $\mu(X)<\infty$ אזי μ רגולרית.

מידת הנפח האלמנטרית: מידה אלמנטרית m מעל $\left\{\prod_{i=1}^n(a_i,b_i)\mid a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}\right\}$ עבורה $m\left(\prod_{i=1}^n(a_i,b_i)\right)=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$.

σ־אלגברה לבג: $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)=\sigma\left(\{A\subseteq\mathbb{R}^n\mid(\text{פתוחה }A)\vee(\text{זניחה על פי מידת הנפח האלמנטרית }A)\}\right)$.

מסקנה: $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\subseteq\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

טענה: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)=\Sigma_{m^*}$.

מידת לבג: תהא m מידת הנפח האלמנטרית אזי המשכת קרתיאודור $\lambda=m^*$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\to[0,\infty]$ מידה אלמנטרית עבורה $\nu\left(\prod_{i=1}^n(a_i,b_i)\right)=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$ אזי ν הינה מידת הנפח האלמנטרית.

טענה: תהא λ מידת לבג אזי

- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ אזי $\lambda(E)=\lim_{n\to\infty}\lambda\left(E\cap[-n,n]^d\right)$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $E\subseteq\mathcal{O}$ פתוחה עבורה $\lambda(\mathcal{O}\backslash E)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ סגורה עבורה $\lambda(E\backslash F)<\varepsilon$.
- תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)$ עבורה $\mu(E)<\infty$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $F\subseteq E$ קומפקטית עבורה $\lambda(E\backslash F)<\varepsilon$.
- תהא $E\subseteq\mathbb{R}^d$ אזי $\left(E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)\Longleftrightarrow$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\lambda(A)=\lambda(B)$).

טענה: תהא μ מידת לבג ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ התב"ש
- $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$.
- קיימת $G\in G_{\delta}$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=G\backslash E$.
- קיימת $F\in F_{\sigma}$ וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורן $A=F\cup E$.

מסקנה: תהא λ מידת לבג אזי $\left(\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right),\lambda\right)$ השלמה של $\left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{d}\right),m\right)$.

משפט: תהא λ מידת לבג תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^{d}$ פתוחה תהא $f:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^{d}$ ליפשיץ ותהא $A\subseteq\mathcal{O}$ אזי
- נניח כי $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ אזי $f\left(A\right)\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$.
- נניח כי $\lambda\left(A\right)=0$ אזי $\lambda\left(f\left(A\right)\right)=0$.

משפט אינווריאנטיות להזזות: תהא $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\lambda\left(A\right)=\lambda\left(A+x\right)$.

מסקנה: תהא $\nu:\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\to\left[0,\infty\right]$ מידה אינווריאנטית להזזות וכן לכל $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ חבומה מתקיים $\nu\left(E\right)<\infty$ אזי קיים $\kappa\in\left[0,\infty\right)$ עבורו $\lambda=\kappa\nu$.

משפט: תהא $T\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ ותהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ אזי $\lambda\left(T\left(E\right)\right)=\left|\det\left(T\right)\right|\lambda\left(E\right)$.

קבוצה פשוטה: $A\subseteq\mathbb{R}^{d}$ עבורה קיימים $a_{1},b_{1}\ldots a_{n},b_{n}\in\mathbb{R}$ המקיימים $A=\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i},b_{i}\right)$.

הגדרה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה ותהא λ מידת לבג אזי
- מידת ז'ורדן פנימית: $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\sup\left\{ \lambda\left(A\right)\mid\left(\text{פשוטה }A\right)\wedge\left(A\subseteq E\right)\right\}$.
- מידת ז'ורדן חיצונית: $\lambda_{J}^{*}\left(E\right)=\inf\left\{ \lambda\left(A\right)\mid\left(\text{פשוטה }A\right)\wedge\left(A\supseteq E\right)\right\}$.

קבוצה מדידה ז'ורדן: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה עבורה $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\lambda_{J}^{*}\left(E\right)$ אזי $\lambda_{J}\left(E\right)=\lambda_{J}^{*}\left(E\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה אזי $\lambda_{*,J}\left(E\right)=\lambda\left(\mathrm{int}\left(E\right)\right)$ וכן $\lambda_{J}^{*}\left(E\right)=\lambda\left(\overline{E}\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{d}$ חסומה ותהא λ מידת לבג אזי
- E מדידה ז'ורדן.
- לכל $\varepsilon>0$ אזי קיימות A,B פשוטות עבורן $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\lambda\left(B\backslash A\right)<\varepsilon$.
- $\lambda_{J}^{*}\left(\partial E\right)=0$.
- $\lambda^{*}\left(\partial E\right)=0$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>1$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Z}^{d}\backslash\left\{ 0\right\}$.

משפט מינקובסקי: יהי $V\subseteq\mathbb{R}^{d}$ גוף קמור סימטרי סביב 0 עבורו $\lambda\left(V\right)>2^{d}$ אזי $V\cap\left(\mathbb{Z}^{d}\backslash\left\{ 0\right\} \right)\neq\varnothing$.

למה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)\in\left(0,\infty\right)$ ותהא $\theta\in\left(0,1\right)$ אזי קיימת קוביה $Q\subseteq\mathbb{R}^{d}$ עבורה $\lambda\left(E\cap Q\right)>\theta\cdot\lambda\left(Q\right)$.

משפט שטיינהאוס: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>0$ אזי $0\in\mathrm{int}\left(E-E\right)$.

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}\right)$ עבורה $\lambda\left(E\right)>0$ אזי קיימים $x,y\in E$ עבורם $\left(x-y\right)\in\mathbb{Q}\backslash\left\{ 0\right\}$.

למה: תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^{d}$ פתוחה אזי קיימים $\left\{ B_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ כדורים וקיימת $E\in\mathcal{N}$ עבורם $\mathcal{O}=\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_{i}\right)\cup E$.

פונקציית התפלגות: $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ מונוטונית עולה ורציפה מימין.

טענה: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ אזי $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת $F\left(x\right)=\mu\left(\left(-\infty,x\right]\right)$ הינה פונקציית התפלגות.

קדם־מידה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה אזי $\mu:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת
- $\mu\left(\varnothing\right)=0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\left\{ B_{i}\right\} _{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_{i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B_{i}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $m_{\restriction\mathcal{A}}^{*}=m$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי $\mathcal{A}\subseteq\Sigma_{m^{*}}$.

המשכת קרתיאודורי: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה אזי m^{*} מידה מעל $\Sigma_{m^{*}}$.

משפט: תהא $\mathcal{A}$אלגברה תהא m קדם־מידה ותהא $\left(X,\Sigma',\mu\right)$ המשכת קרתיאודורי נוספת של $\left(\mathcal{A},m\right)$ אזי
- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu\left(A\right)\leq m^{*}\left(A\right)$.
- נניח כי $m^{*}\left(X\right)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^{*}\left(A\right)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^{*}}$ מתקיים $\mu\left(A\right)=m^{*}\left(A\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$אלגברה ותהא m קדם־מידה σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu\left(\left[a,b\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$ מידה אלמנטרית מעל החוג למחצה $\left\{ \left[a,b\right)\mid a\leq b\right\}$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(F\left(b_{i}\right)-F\left(a_{i}\right)\right)$ קדם־מידה מעל האלגברה $\left\{ \biguplus_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right)\mid\forall i\in\left[n\right].a_{i}\leq b_{i}\right\}$.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי קיימת ויחידה מידת בורל μ_F עבורה $\mu_F([a,b))=F(b)-F(a)$.

טענה: תהיינה $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות התפלגות אזי $(\mu_F=\mu_G)\iff(\exists c\in\mathbb{R}.F-G=c)$.

מידה סופית מקומית: מידת בורל μ מעל $\mathbb{R}$ עבורה $\forall a,b\in\mathbb{R}.\mu([a,b])<\infty$.

מסקנה: תהא μ מידת בורל סופית מקומית על $\mathbb{R}$ אזי קיימת פונקציית התפלגות $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mu=\mu_F$.

מידת לבג־סטילטייס: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי $\overline{\mu_F}$.

סימון: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות נסמן $\mu_F=\overline{\mu_F}$.

מסקנה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}(F(b_i)-F(a_i))\mid E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\right\}$.

למה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}(F(b_i)-F(a_i))\mid E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right\}$.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\in\Sigma_{\mu_F}$ אזי $\mu_F(E)=\sup\{\mu_F(K)\mid(K\subseteq E)\wedge(\text{קומפקטית }K)\}$.

מסקנה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות אזי μ_F רגולרית.

משפט: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות ותהא $E\subseteq\mathbb{R}$ התב"ש

- $E\in\Sigma_{\mu_F}$.
- קיימת $G\in G_\delta$ וכן $N\in\mathcal{N}$ עבורן $E=G\backslash N$.
- קיימת $F\in F_\sigma$ וכן $N\in\mathcal{N}$ עבורן $E=F\uplus N$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}$ אזי $(E\in\Sigma_{\mu_F})\iff$(קיימות $A,B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ המקיימות $A\subseteq E\subseteq B$ וכן $\mu_F(A)=\mu_F(B)$).

טענה העיקרון הראשון של ליטלווד: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציית התפלגות תהא $E\in\Sigma_{\mu_F}$ עבורה $\mu_F(E)<\infty$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימים $a_1,b_1\ldots a_n,b_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\mu_F\left(E\triangle\left(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right)\right)<\varepsilon$.

קבוצת קנטור: $\mathcal{C}=[0,1]\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^n-1}\left(\frac{3k+1}{3^{n+1}},\frac{3k+2}{3^{n+1}}\right)$

טענה: תהא λ מידת לבג אזי $\mathcal{C}\in\mathcal{N}$.

טענה: $\mathcal{C}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{3^i}\mid x\in\mathbb{N}^{\{0,2\}}\right\}$.

קבוצה מושלמת: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ בלתי קשירה לחלוטין אשר לא מכילה נקודות מבודדות.

טענה:

- $|\mathcal{C}|=\aleph$.
- $\mathcal{C}$ קומפקטית.
- $\mathcal{C}$ מושלמת.

קבוצת קנטור מוכללת: תהיינה $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}((0,1))$ נגדיר $C_0=[0,1]$ וכן את C_n להיות C_{n-1} לאחר שהוצאנו ממרכזו של כל קטע I ב־C_{n-1} קטע באורך $\delta_n\cdot\lambda(I)$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}C_i$.

טענה: קבוצת קנטור הינה קבוצת קנטור מוכללת באשר $\forall n\in\mathbb{N}_+.\delta_n=\frac{1}{3}$.

טענה: תהיינה $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}((0,1))$ אזי (קבוצת קנטור המוכללת זניחה על פי מידת לבג)$\iff(\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i=\infty)$.

הגדרה: נגדיר $\varphi^\star:\mathcal{C}\to[0,1]$ כך שאם $x\in\mathcal{C}$ בעל הצגה $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2a_i}{3^i}$ עבור $a_i\in\{0,1\}$ אזי $\varphi^\star(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$.

פונקציית קנטור: נגדיר $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ כך $\varphi(x)=\sup\{\varphi^\star(t)\mid(t\in\mathcal{C})\wedge(t\le x)\}$.

טענה: תהא $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ פונקציית קנטור אזי

- φ עולה.
- φ רציפה.
- $\varphi(\mathcal{C})=[0,1]$.
- קיימת $E\subseteq\mathcal{C}$ עבורה $\varphi(E)\notin\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

קוטר קבוצה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ אזי $\text{diam}(A)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\}$.

הגדרה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $\delta>0$ יהי $E\subseteq X$ אזי

$\mathcal{H}_{s,\delta}(E)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\text{diam}(A_i)^s\mid\left(E\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\wedge(\text{diam}(A_i)<\delta)\right\}$.

מידת האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $E\subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(E)=\lim_{\delta\downarrow0}\mathcal{H}_{s,\delta}(E)$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s\ge0$ ויהי $\delta>0$ אזי

- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f(\delta)=\mathcal{H}_{s,\delta}(E)$ יורדת.
- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:[0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f(s)=\mathcal{H}_{s,\delta}(E)$ יורדת.
- יהי $E\subseteq X$ אזי $f:(0,\infty)\to[0,\infty]$ המוגדרת $f(s)=\mathcal{H}_s(E)$ יורדת.
- $\mathcal{H}_s(\varnothing)=0$.

- $\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s,\delta}$ מידות חיצוניות.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s \geq 0$ יהי $\delta > 0$ ותהיינה $A, B \subseteq X$ עבורן $d(A,B) > \delta$ אזי $\mathcal{H}_{s,\delta}(A \cup B) = \mathcal{H}_{s,\delta}(A) + \mathcal{H}_{s,\delta}(B)$.

מסקנה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s \geq 0$ ותהיינה $A, B \subseteq X$ עבורן $d(A,B) > 0$ אזי $\mathcal{H}_s(A \cup B) = \mathcal{H}_s(A) + \mathcal{H}_s(B)$.

מסקנה: יהי $s \geq 0$ ותהא $E \in \mathcal{B}(X)$ אזי E מדידה $\mathcal{H}_s$.

מסקנה: תהא $f : X \to Y$ ליפשיץ L ותהא $E \subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E)) \leq L^s \cdot \mathcal{H}_s(E)$.

מסקנה: תהא $f : X \to X$ איזומטריה ותהא $E \subseteq X$ אזי $\mathcal{H}_s(f(E)) = \mathcal{H}_s(E)$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי יהי $s \geq 0$ ותהא $E \subseteq X$ אזי

- אם $\mathcal{H}_s(E) < \infty$ אזי לכל $t > s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E) = 0$.
- אם $\mathcal{H}_s(E) > 0$ אזי לכל $t < s$ מתקיים $\mathcal{H}_t(E) = \infty$.

מסקנה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $s > n$ אזי $\mathcal{H}_s(E) = 0$.

מימד האוסדורף: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $E \subseteq X$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{s \geq 0 \mid \mathcal{H}_s(E) = 0\}$.

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^n) = n$.

משפט: $\dim_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) = \log_3(2)$.

משפט: תהא λ מידת לבג מעל $\mathbb{R}^n$ אזי $\mathcal{H}_n = \frac{2^n}{\lambda(\{|x| \leq 1\})} \cdot \lambda$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $0 < \mathcal{H}_n([0,1]^n) < \infty$.

העתקה מדידה: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים אזי $T : X \to Y$ המקיימת $T^{-1}(\Sigma_Y) \subseteq \Sigma_X$.

סימון: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים ותהא $T : X \to Y$ העתקה מדידה אזי $T : (X, \Sigma_X) \to (Y, \Sigma_Y)$.

טענה: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y), (Z, \Sigma_Z)$ מרחבים מדידים תהא $T : X \to Y$ העתקה (Σ_X, Σ_Y)־מדידה ותהא $S : Y \to Z$ העתקה (Σ_Y, Σ_Z)־מדידה אזי $S \circ T$ העתקה (Σ_X, Σ_Z)־מדידה.

טענה: יהיו $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ מרחבים מדידים תהא $T : X \to Y$ ותהא $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ עבורה $\Sigma_Y = \sigma(\mathcal{E})$ וכן $T^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \Sigma_X$ אזי T העתקה (Σ_X, Σ_Y)־מדידה.

טענה: יהיו X, Y מרחבים מטריים ותהא $T \in C(X,Y)$ אזי T העתקה $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$־מדידה.

הגדרה: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty]$.

הגדרה: נגדיר $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ והפעולות $\infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}$ אינן מוגדרות.

הגדרה: נגדיר $A(x) = \lim_{t \to x} \arctan(t)$ וכן $\rho(x,y) = |A(x) - A(y)|$.

טענה: $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ מרחב מטרי שלם.

טענה: תהא $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ אזי ($A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ וכן $S \in \mathcal{P}(\{\pm\infty\})$ עבורן $A = B \cup S$).

טענה: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי

- העתקה $f : X \to \mathbb{R}$ $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$־מדידה.
- העתקה $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\Sigma, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$־מדידה.

מסקנה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא $f : X \to \mathbb{R}$ התב"ש

- f מדידה בורל.
- לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{f \geq a\} \in \Sigma$.
- לכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\{f \geq a\} \in \Sigma$.
- לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{f > a\} \in \Sigma$.
- לכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\{f > a\} \in \Sigma$.
- לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{f \leq a\} \in \Sigma$.
- לכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\{f \leq a\} \in \Sigma$.
- לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\{f < a\} \in \Sigma$.
- לכל $a \in \mathbb{Q}$ מתקיים $\{f < a\} \in \Sigma$.

מסקנה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא $f \in C(X, \mathbb{R})$ רציפה אזי f מדידה בורל.

טענה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ אזי (f מדידה בורל)$\Longleftrightarrow$($f_{\restriction_{f^{-1}(\mathbb{R})}}$ מדידה בורל וכן $f^{-1}(\pm\infty) \in \Sigma$).

סימון: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ אזי $f^{+}=\max\{f,0\}$ וכן $f^{-}=-\max\{-f,0\}$.

משפט: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $f^{+},f^{-},\frac{1}{f},f\cdot g,f+g,f^{2}$ מדידות.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\{f<g\},\{f\le g\},\{f=g\}\in\Sigma$.

משפט: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות אזי $\sup\{f_n\},\inf\{f_n\},\limsup\{f_n\},\liminf\{f_n\}$ מדידות.

מסקנה: תהא $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ סדרת פונקציות מדידות ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ עבורה $f_n\to f$ אזי f מדידה.

מסקנה: תהיינה $f,g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות אזי $\min\{f,g\},\max\{f,g\},|f|$ מדידות.

פונקציה פשוטה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\ldots E_n\in\Sigma$ וכן $a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

פונקציה סטנדרטית: יהי (X,Σ) מרחב מדיד אזי $\varphi:X\to\mathbb{R}$ עבורה קיימים $E_1\ldots E_n\in\Sigma$ עבורם $\biguplus_{i=1}^{n}E_i=X$ וקיימים $a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}$ עבורם $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{E_i}$.

הצגה סטנדרטית של פונקציה פשוטה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ פשוטה אזי $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbb{1}_{E_i}$ באשר $\biguplus_{i=1}^{n}E_i=X$.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ פשוטה אזי קיימת הצגה סטנדרטית.

טענה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד ותהא $\varphi:X\to\mathbb{R}$ אזי (φ פשוטה)$\Longleftrightarrow$(φ מדידה וכן $\varphi(X)$ סופית).

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$.

משפט: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה חיובית תהא $A\subseteq X$ עבורה f חסומה ותהיינה $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות חיוביות עבורן $\varphi_n\uparrow f$ אזי $\varphi_n\rightrightarrows f$ על A.

מסקנה: תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה אזי קיימות $\{\varphi_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ פשוטות עבורן $\varphi_n\to f$ וכן $|\varphi_n|\uparrow|f|$.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידה ותהא $g:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f=g$ כ.ב.מ. אזי g מדידה.

טענה: תהא μ מידה שלמה תהיינה $\{f_n\}\subseteq X\to\overline{\mathbb{R}}$ מדידות ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ המקיימת $f_n\to f$ כ.ב.מ. אזי f מדידה.

טענה: תהא μ מידה ותהא $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mu}$-מדידה אזי קיימת $g:X\to\overline{\mathbb{R}}$ μ-מדידה וכן $f=g$ $\overline{\mu}$-כ.ב.מ.

מחלקת בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Borel}(X)=\{f:X\to\mathbb{R}\mid f\text{ מדידה בורל}\}$.

סימון: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}_0(X)=C(X)$ וכן $\text{Baire}_{i+1}(X)=\{\lim_{n\to\infty}f_n\mid\{f_n\}\subseteq\text{Baire}_i(X)\}$.

מחלקת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}(X)=\bigcup_{i=0}^{\infty}\text{Baire}_i(X)$.

למה: תהא $\varphi\in C(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ ותהיינה $f,g\in\text{Baire}(X)$ אזי $\varphi(f,g)\in\text{Baire}(X)$.

למה: תהא $F\subseteq X$ סגורה אזי קיימות $\{f_n\}\subseteq C(X,\mathbb{R})$ עבורן $f_n\to\mathbb{1}_F$.

מחלקה מונוטונית: יהי X מרחב מטרי אזי $R\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\subseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in R$.
- תהיינה $\{E_i\}\subseteq R$ עבורן $\forall i\in\mathbb{N}.E_i\supseteq E_{i+1}$ אזי $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\in R$.

מחלקה מונוטונית נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות המונוטוניות מעל X המכילות את A אזי $\mathcal{M}(\mathcal{A})=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{R}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\mathcal{M}(A)$ הינה המחלקה המונוטונית הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ אלגברה אזי $\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\text{Baire}(X)=\text{Borel}(X)$.

משפט לוזין/טענה העיקרון השני של ליטלווד: תהא μ מידת בורל סופית על $\mathbb{R}$ תהא $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon>0$ אזי קיימת $K\subseteq\mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R}\backslash K)<\varepsilon$ וכן $f\in C(K)$.

הגדרה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $L^0(X,\Sigma)=\{f:X\to\overline{\mathbb{R}}\mid f\text{ מדידה}\}$.

התכנסות במידה: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\mu(\{x\in X\mid|f_n(x)-f(x)|>0\})\to 0$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

התכנסות כמעט בכל מקום: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורה $\mu(X\backslash\{x\in X\mid\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\})=0$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$.

סימון: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $f_n\xrightarrow{a.e.}f$ וכן $f_n\xrightarrow{a.s.}f$.

משפט לבג: תהא μ מידה סופית יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ ותהא $f\in L^0(X,\Sigma)$ עבורן $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $f_n\xrightarrow{\mu}f$.

למה בורל קנטלי: יהיו $\{E_n\}\subseteq\Sigma$ מדידות עבורן $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\infty$ אזי $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k)=0$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\}\subseteq L^0(X,\Sigma)$ עבורן לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{|f_n>\varepsilon|\})<\infty$ אזי

- $f_n\xrightarrow{a.e.}0$.

- תהא $\delta > 0$ אזי קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \delta$ וכן $f_n \rightrightarrows 0$ על $X \backslash E$.

משפט ריס: תהיינה $f_n \xrightarrow{\mu} f$ אזי קיימת תת"ס עבורה $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$.

מסקנה: יהיו $\{f_n\} \subseteq L^0(X, \Sigma)$ ותהיינה $f, g \in L^0(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{\mu} f$ וכן $f_n \xrightarrow{\mu} g$ אזי $f = g$ כ.ב.מ..

משפט אגורוב/טענה העיקרון השלישי של ליטלווד: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $E \subseteq X$ עבורה $\mu(E) < \varepsilon$ וכן $f_n \rightrightarrows f$ על $X \backslash E$.

מסקנה לוזין: תהא μ מידה סופית ותהיינה $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי קיימת $N \subseteq X$ עבורה $\mu(N) = 0$ וקיימות $\{A_k\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורן $X = N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ וכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $f_n \rightrightarrows f$ על A_k.

למה פרשה: יהי (X, ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X ותהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ אזי קיימות $\{f_n\} \subseteq C(X)$ עבורן $f \xrightarrow{a.e.} f_n$.

משפט לוזין: יהי (X, ρ) מרחב מטרי שלם וספרבילי תהא μ מידת בורל סופית על X תהא $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ותהא $\varepsilon > 0$ אזי קיימת $K \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית עבורה $\mu(\mathbb{R} \backslash K) < \varepsilon$ וכן $f \in C(K)$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{S}(\Sigma) = \{\varphi \in X \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ פונקציה פשוטה}\}$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{S}^+(\Sigma) = \{\varphi \in \mathcal{S}(\Sigma) \mid \varphi \geq 0\}$.

למה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהיינה $f = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{M} y_i \mathbb{1}_{B_i}$ הצגות סטנדרטיות אזי $\sum_{i=1}^{N} x_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{M} y_i \mu(B_i)$.

אינטגרל: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהא $f = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbb{1}_{A_i}$ הצגה סטנדרטית אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i \mu(A_i)$.

אינטגרל: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f, g \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ תהא $A \in \Sigma$ ויהי $\lambda \geq 0$ אזי

- $\int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A)$.
- הומוגניות חיובית: $\int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: $\int_X (f + g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$.
- מונוטוניות: נניח כי $f \leq g$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ אזי $\psi : \Sigma \to \mathbb{R}$ המוגדרת $\psi(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$ הינה מידה מעל Σ.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $L^0(X, \Sigma) = \left\{f \in X \to \overline{\mathbb{R}} \mid \left(\Sigma, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right) \text{-מדידה } f\right\}$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $L^0_+(X, \Sigma) = \left\{f \in L^0(X, \Sigma) \mid f \geq 0\right\}$.

למה: תהא $f \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+(\Sigma)) \wedge (\varphi \leq f)\right\}$.

אינטגרל: תהא $f \in L^0_+(X, \Sigma)$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup\left\{\int_X \varphi \mathrm{d}\mu \mid (\varphi \in \mathcal{S}^+(\Sigma)) \wedge (\varphi \leq f)\right\}$.

אינטגרל: תהא $f \in L^0_+(X, \Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X \mathbb{1}_E f \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L^0_+(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ ותהא $g \in \mathcal{S}^+(\Sigma)$ באשר $g \leq f$ אזי $\int_X g \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

משפט התכנסות מונוטונית: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L^0_+(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא $f \in L^0_+(X, \Sigma)$ ותהא $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{S}^+(\Sigma)$ עבורה $\varphi_n \uparrow f$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהיינה $f, g \in L^0_+(X, \Sigma)$ תהא $A \in \Sigma$ ויהי $\lambda \geq 0$ אזי

- $\int_X \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A)$.
- הומוגניות חיובית: $\int_X \lambda f \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: $\int_X (f + g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$.
- מונוטוניות: נניח כי $f \leq g$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהא $\{f_n\} \subseteq L^0_+(X, \Sigma)$ ותהא $E \in \Sigma$ אזי $\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f \in L^0_+(X, \Sigma)$ אזי $(\int_X f \mathrm{d}\mu = 0) \Longleftrightarrow (f = 0$ כ.ב.מ.).

טענה התכנסות מונוטונית: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L^0_+(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \uparrow f$ כ.ב.מ. אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

משפט הלמה של פטו: תהא $\{f_n\} \subseteq L^0_+(X, \Sigma)$ אזי $\int_X (\liminf_{n \to \infty} f_n) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

מסקנה: תהיינה $f, \{f_n\} \subseteq L^0_+(X, \Sigma)$ עבורן $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu$.

אינטגרל: תהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ עבורה $\int_X f^{\pm} \mathrm{d}\mu < \infty$ אזי $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \mathrm{d}\mu - \int_X f^- \mathrm{d}\mu$.

סימון: יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה אזי $L^1(\mu) = \left\{f \in L^0(X, \Sigma) \mid \int_X f^{\pm} \mathrm{d}\mu < \infty\right\}$.

טענה: תהא $f \in L^0(X, \Sigma)$ התב"ש

- $f \in L^1(\mu)$.

- $f^{\pm}\in L^{1}\left(\mu\right)$.
- $\left|f\right|\in L^{1}\left(\mu\right)$.
- קיימת $g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\left|f\right|\leq g$.

טענה: יהיו $f,g\in L^{1}\left(\mu\right)$ ויהי $\lambda\in\mathbb{R}$ אזי

- הומוגניות: מתקיים $\lambda f\in L^{1}\left(\mu\right)$ ובפרט $\int_{X}\lambda f\mathrm{d}\mu=\lambda\int_{X}f\mathrm{d}\mu$.
- חיבוריות: מתקיים $f+g\in L^{1}\left(\mu\right)$ ובפרט $\int_{X}\left(f+g\right)\mathrm{d}\mu=\int_{X}f\mathrm{d}\mu+\int_{X}g\mathrm{d}\mu$.
- $\max\left\{f,g\right\},\min\left\{f,g\right\}\in L^{1}\left(\mu\right)$.
- מונוטוניות: נניח כי $f\leq g$ אזי $\int_{X}f\mathrm{d}\mu\leq\int_{X}g\mathrm{d}\mu$.
- אי־שיוויון המשולש: $\left|\int_{X}f\mathrm{d}\mu\right|\leq\int_{X}\left|f\right|\mathrm{d}\mu$.

אינטגרל: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ ותהא $E\in\Sigma$ אזי $\int_{E}f\mathrm{d}\mu=\int_{X}\mathbb{1}_{E}f\mathrm{d}\mu$.

מידה עם צפיפות ביחס למידה: תהא $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ אזי $\psi:\Sigma\to\mathbb{R}$ המוגדרת $\psi\left(E\right)=\int_{E}f\mathrm{d}\mu$.

סימון: תהא $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ אזי מידה עם צפיפות f ביחס למידה μ הינה $f\mathrm{d}\mu$.

למה: תהא $f\in L_{+}^{0}\left(X,\Sigma\right)$ אזי $f\mathrm{d}\mu$ הינה מידה מעל Σ.

פונקציה מדידה בורל/מדידה: יהי $\left(X,\Sigma\right)$ מרחב מדיד אזי העתקה $f:X\to\mathbb{C}$ $\left(\Sigma,\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{2}\right)\right)$־מדידה.

טענה: תהא $f:X\to\mathbb{C}$ אזי (f מדידה)$\Longleftrightarrow$($\mathrm{Re}\left(f\right),\mathrm{Im}\left(f\right)$ מדידות).

אינטגרל: תהא $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה עבורה $\int_{X}\mathrm{Re}\left(f\right)\mathrm{d}\mu,\int_{X}\mathrm{Im}\left(f\right)\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\int_{X}f\mathrm{d}\mu=\int_{X}\mathrm{Re}\left(f\right)\mathrm{d}\mu+i\int_{X}\mathrm{Im}\left(f\right)\mathrm{d}\mu$.

הערה: נשתמש בסימון $L^{1}\left(\mu\right)$ גם עבור פונקציות מרוכבות אינטגרביליות.

טענה: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ אזי $\left|\int_{X}f\mathrm{d}\mu\right|\leq\int_{X}\left|f\right|\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ אזי $\left\{f\neq0\right\}$ קבוצה σ־סופית.

טענה: תהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ אזי (לכל $E\in\Sigma$ מתקיים $\int_{E}f\mathrm{d}\mu=0$)$\Longleftrightarrow$($f=0$ כ.ב.מ.).

מסקנה: תהיינה $f,g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורן $\mu\left(\left\{f\neq g\right\}\right)=0$ אזי $\int_{X}f\mathrm{d}\mu=\int_{X}g\mathrm{d}\mu$.

הגדרה: תהיינה $f,g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורן $\mu\left(\left\{f\neq g\right\}\right)=0$ אזי $f\sim g$.

הערה: מכאן והלאה נתייחס לפונקציות שקולות כזהות, כלומר $L^{1}\left(\mu\right)\equiv{}^{L^{1}\left(\mu\right)}/_{\sim}$.

טענה: תהא μ מידה אזי $L^{1}\left(\mu\right)\equiv L^{1}\left(\overline{\mu}\right)$.

משפט ההתכנסות הנשלטת/לבג: תהא $\left\{f_{n}\right\}\subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\to f$ וכן קיימת $g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\left|f_{n}\right|\leq g$ אזי $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ וכן $\int_{X}f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{X}f_{n}\mathrm{d}\mu$.

טענה: תהא $\left\{f_{n}\right\}\subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $f_{n}\xrightarrow{\mu}f$ וכן קיימת $g\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\left|f_{n}\right|\leq g$ אזי $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ וכן $\int_{X}f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{X}f_{n}\mathrm{d}\mu$.

הערה: מהגדרת האינטגרל ניתן להפוך את כל המגבלות לכמעט בכל מקום.

מסקנה: תהא $\left\{f_{n}\right\}\subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\sum f_{n}$ מתכנסת כ.ב.מ..

מסקנה: תהא $\left\{f_{n}\right\}\subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי $\sum f_{n}\in L^{1}\left(\mu\right)$ וכן $\int_{X}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\right)\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{X}f_{n}\mathrm{d}\mu$.

משפט שפה: תהא $\left\{f_{n}\right\}\subseteq L^{1}\left(\mu\right)$ ותהא $f\in L^{1}\left(\mu\right)$ עבורן $f_{m}\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $\left(\int_{X}\left|f_{n}-f\right|\mathrm{d}\mu\to0\right)\Longleftrightarrow\left(\int_{X}\left|f_{n}\right|\mathrm{d}\mu\to\int_{X}\left|f\right|\mathrm{d}\mu\right)$.

סימון: תהא $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי אינטגרל רימן שלה הינו $\left(R\right)\int_{a}^{b}f\mathrm{d}x$.

משפט: תהא λ מידת לבג ותהא $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי קיימת $g:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ מדידה עבורה $g\in L^{1}\left(\lambda\right)$ וכן $f=g$ λ־כ.ב.מ. המקיימת $\left(R\right)\int_{a}^{b}f\mathrm{d}x=\int_{\left[a,b\right]}g\mathrm{d}\lambda$.

סימון: יהי $p\in\left[1,\infty\right)$ אזי $L^{p}\left(\mu\right)=\left\{f:X\to\mathbb{R}\mid\left(f\in L^{0}\left(X,\Sigma\right)\right)\wedge\left(\int_{X}\left|f\right|^{p}\mathrm{d}\mu<\infty\right)\right\}$.

סימון: $L^{\infty}\left(\mu\right)=\left\{f:X\to\mathbb{R}\mid\left(f\in L^{0}\left(X,\Sigma\right)\right)\wedge\left(\exists c>0.\mu\left(\left\{\left|f\right|\geq0\right\}\right)=0\right)\right\}$.

הגדרה: נגדיר $\left\Vert\cdot\right\Vert_{p}:L^{p}\left(\mu\right)\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert f\right\Vert=\left(\int_{X}\left|f\right|^{p}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

הגדרה: נגדיר $\left\Vert\cdot\right\Vert_{\infty}:L^{\infty}\left(\mu\right)\to\mathbb{R}$ כך $\rho_{\infty}\left(f,g\right)=\inf\left\{c>0\mid\mu\left(\left\{\left|f\right|\geq c\right\}\right)=0\right\}$.

טענה אי־שיוויון הולדר: יהיו $p,q\in\left[1,\infty\right]$ עבורם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ תהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ ותהא $g\in L^{q}\left(\mu\right)$ אזי $fg\in L^{1}\left(\mu\right)$ וכן $\int_{X}\left|fg\right|\mathrm{d}\mu\leq\left\Vert f\right\Vert_{p}\left\Vert g\right\Vert_{q}$.

מסקנה: יהיו $p,q\in\left[1,\infty\right)$ עבורם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ תהא $f\in L^{p}\left(\mu\right)$ עבורה $\left\Vert f\right\Vert_{p}\neq0$ ותהא $g\in L^{q}\left(\mu\right)$ עבורה $\left\Vert g\right\Vert_{q}\neq0$ אזי ($\int_{X}\left|fg\right|\mathrm{d}\mu=\left\Vert f\right\Vert_{p}\left\Vert g\right\Vert_{q}$)$\Longleftrightarrow$($\frac{\left|f\right|^{p}}{\left\Vert f\right\Vert_{p}^{p}}=\frac{\left|g\right|^{p}}{\left\Vert g\right\Vert_{p}^{p}}$ כ.ב.מ.).

מסקנה: ρ_{p} מטריקה מעל $L^{p}\left(\mu\right)$.

מסקנה: תהא $f\in L^1(\mu)$ ותהא $g\in L^\infty(\mu)$ אזי $\left(\int_X |fg|\,\mathrm{d}\mu=\|f\|_1\|g\|_\infty\right)\iff\left(g_{\restriction\{f\neq0\}}=\|g\|_\infty\right)$ כ.ב.מ.).

מסקנה אי־שיוויון קושי־שוורץ: תהיינה $f,g\in L^2(\mu)$ אזי $\int_X|fg|\,\mathrm{d}\mu\le\|f\|_2\|g\|_2$.

מסקנה אי־שיוויון מינקובסקי: יהי $p\in[1,\infty]$ ותהיינה $f,g\in L^p(\mu)$ אזי $f+g\in L^p(\mu)$ וכן $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$.

טענה אי־שיוויון צ'בישב: תהא $\varphi\in L_+^0(X,\Sigma)$ אזי לכל $t>0$ מתקיים $\mu(\{x\in X\mid\varphi\ge t\})\le\frac{1}{t}\int_X\varphi\mathrm{d}\mu$.

התכנסות L^p: תהא $\{f_n\}\subseteq L^p(\mu)$ ותהא $f\in L^p(\mu)$ עבורן $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$ אזי $f_n\xrightarrow{L^p}f$.

סדרת קושי במרחב L^p: $\{f_n\}\subseteq L^p(\mu)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m\ge N$ מתקיים $\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$.

מסקנה: יהי $p\in[1,\infty)$ אזי $\mathcal{S}(\Sigma)$ צפופה במרחב $L^p(\mu)$.

למה: יהי $p\in[1,\infty)$ ותהא $\{f_n\}\subseteq L^p(\mu)$ חיוביות אזי $\|\sum_{n=1}^\infty f_n\|_p\le\sum_{n=1}^\infty\|f_n\|_p$.

משפט ריס: יהי $p\in[1,\infty)$ תהא $\{f_n\}\subseteq L^p(\mu)$ ותהא $f\in L^p(\mu)$ עבורה $f_n\xrightarrow{\mu-a.e.}f$ אזי $\left(\|f_n\|_p\to\|f\|_p\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{L^p}f\right)$.

משפט ריס־פיסצ'ר: יהי $p\in[1,\infty]$ אזי $L^p(\mu)$ מרחב שלם.

מסקנה: יהי $p\in[1,\infty)$ תהא $\{f_n\}\subseteq L^p(\mu)$ ותהא $f\in L^p(\mu)$ עבורה $f_n\xrightarrow{L^p}f$ אזי קיימת תת"ס f_{n_k} עבורה $f_{n_k}\xrightarrow{\mu-a.e.}f$.

טענה רציפות של אינטגרל: תהא $f\in L^1(\mu)$ אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu(E)<\delta$ מתקיים $\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

אינטגרבילית במידה שווה: $\{f_n\}\subseteq L^1(\mu)$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu(E)<\delta$ מתקיים $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_E|f_n|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.

משפט ויטלי: תהא $\{f_n\}\subseteq L^1(\mu)$ אזי (קיימת $f\in L^1(\mu)$ עבורה $f_n\xrightarrow{L^1}f$)$\iff$(($\{f_n\}$ אינטגרביליות במ"ש)$\wedge$(קיימת $f\in L^1(\mu)$ עבורה $f_n\xrightarrow{\mu}f$)$\wedge$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $E\in\Sigma$ עבורה $\mu(E)<\infty$ וכן $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\backslash E}|f_n|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon$)).

מסקנה: יהי $p\in[1,\infty)$ תהא $\{f_n\}\subseteq L^p(\mu)$ ותהא $f\in L^p(\mu)$ עבורה $f_n\xrightarrow{\mu}f$ התב"ש

- $f_n\xrightarrow{L^p}f$.
- $\{|f_n|^p\}$ אינטגרביליות במ"ש וכן לכל $\varepsilon>0$ קיימת $E\in\Sigma$ עבורה $\mu(E)<\infty$ וכן $\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\backslash E}|f_n|^p\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon$.
- $\|f_n\|_p\to\|f\|_p<\infty$.
