פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_+(a)=f(a)$ וכן $F'_-(b)=f(b)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^I\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\iff(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^I$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int(f+g)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int(\alpha f)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^I$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $F\in\int f$ אזי $\int((f\circ g)\cdot g')=F\circ g$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^n|\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\ldots t_n\}$ המקיימות $t_i\in[x_{i-1},x_i]$.$\forall i\in\{1\ldots n\}$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-L|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a,b])=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid f\text{ אינטגרבילית רימן}\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)\to 0}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot\mathrm{d}t=c(b-a)$.

טענה: $D(x)\notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f\in R([a,b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^n\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\ge\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\Pi\text{ חלוקה}}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\Pi\text{ חלוקה}}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\le\underline{I}(f)\le\overline{I}(f)\le\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ חסומה אזי $\int_{a}^{b}f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי $\omega\left(f,J\right)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה ויהי $x_{0}\in J$ אזי (f רציפה על x_{0})$\iff\left(\lim_{\delta\to0}\omega\left(f,\left[x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right]\right)=0\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\iff\left(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}\left(I\right).\omega\left(f,I\right)<\varepsilon\right)$.

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right)\Delta x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p_{1}\ldots p_{m}\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\ge\overline{I}\left(f\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

משפט: $C\left(\left[a,b\right]\right)\subseteq R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $f_{\upharpoonright_{\left[a,b\right]}}\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\wedge\left(f\in R\left(\left[b,c\right]\right)\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,d\right]}$ חסומה ויהיו $b<c\in\left[a,d\right]$ עבורה $f\in R\left(\left[a,d\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$ אזי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\left\{ \left(a_{i},b_{i}\right)\right\} _{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_{i},b_{i}\right)$ וכן $\sum\left(b_{i}-a_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\left|A\right|\le\aleph_{0}$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\upharpoonright_{A}}=g_{\upharpoonright_{A}}$ אזי $\int_{a}^{b}f=\int_{a}^{b}g$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_{i} & x\in\left\{ b_{1}\ldots b_{m}\right\} \\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_{a}^{c}f=\int_{a}^{c}g$.

משפט לינאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{b}\alpha f+\beta g=\alpha\int_{a}^{b}f+\beta\int_{a}^{b}g$.

משפט לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ ויהי $b\in\left(a,c\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f+\int_{b}^{c}f=\int_{a}^{c}f$.

הגדרה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=-\int_{b}^{a}f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\ge0$ אזי $\int_{a}^{b}f\ge0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_{a}^{b}f\ge\int_{a}^{b}g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ רציפה המקיימת $f\ge0$ וכן $\int_{a}^{b}f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m\left(b-a\right)\le\int_a^b f\le M\left(b-a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b\left|f\right|\le\sup_{[a,b]}\left(\left|f\right|\right)\left(b-a\right)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ אזי $F\in C\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $0\le g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b\left(f\cdot g\right)=f\left(x_0\right)\int_a^b g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $x_0\in\left[a,b\right]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ אזי $F'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]$ אזי $\int_a^b f=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ יהיו $x_1\ldots x_n\in\left[a,b\right]$ ותהא F קדומה של f על $\left[a,b\right]\setminus\left\{x_1\ldots x_n\right\}$ אזי $\int_a^b f=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\left[f\right]|_a^b=f\left(b\right)-f\left(a\right)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_a^b f'g=\left[f\cdot g\right]|_a^b-\int_a^b fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $\varphi\in C^1\left(\left[\alpha,\beta\right],\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $\left(\varphi\left(\alpha\right)=a\right)\wedge\left(\varphi\left(\beta\right)=b\right)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta\left(f\circ\varphi\right)\cdot\varphi'$.

למה: תהא $f\in C^1\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}f'\left(x\right)\frac{\sin\left(nx\right)}{n}\mathrm{d}x$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f\left(x\right)\cos\left(nx\right)\mathrm{d}x\right|\le\frac{2\pi\sup\left(\left|f'\right|\right)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=\left[a,\infty\right)$ וכן $\forall b\in\left[a,\infty\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_a^\infty f=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=\left(-\infty,b\right]$ וכן $\forall a\in\left(-\infty,b\right].f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.\left(a<b\right)\Longrightarrow\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=\left(a,b\right]$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[c,b\right]\right)$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=\left[a,b\right)$ וכן $\forall c\in I.f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R\left(I\right)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\mid\text{קיים וסופי }\int_I f\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\left\{\infty\right\}$ אזי

- לינאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- לינאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ויהי $c\in\left(a,\omega\right)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^\omega f\ge\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ על $\left[a,\omega\right)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F\left(b\right)-F\left(a\right)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}\left[f\cdot g\right]|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $\varphi\in C^1\left(\left[c,\eta\right),\left[a,\omega\right)\right)$ המקיימת $\varphi\left(c\right)=a$ וכן $\lim_{b\to\eta}\varphi\left(b\right)=\omega$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in\left(a,\omega\right).\forall b_1,b_2\in\left[B,\omega\right).\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow\left(f\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)\right)$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_a^\omega\left|f\right|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\int_a^\omega\left|f\right|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\le\int_a^\omega\left|f\right|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in\left(a,\omega\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftrightarrow$($F\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ חסומה על $\left[a,\omega\right)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in\left(a,\omega\right).f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי

- $\left(\int_a^\omega g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega f<\infty\right)$.
- $\left(\int_a^\omega f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\sum_{n=1}^\infty f\left(n\right)<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\int_1^\infty f<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f\left(n\right)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f\left(n\right)$.

משפט אבל: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)\cap R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $f\in C^1\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C\left(\left[a,\omega\right)\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1\left(\left[a,\omega\right)\right)$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

למה של בונה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $0\leq g$ וכן g יורדת אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=g\left(a\right)\int_a^{x_0}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

למה של אבל: תהא $a_n\geq 0$ סדרה יורדת ותהא b_n סדרה עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.m<\sum_{k=1}^n b_k<M$ אזי $a_1m<\sum_{k=1}^n a_kb_k<a_1M$.

משפט ערך ביניים שני: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר g מונוטונית אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=g\left(a\right)\int_a^{x_0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+g\left(b\right)\int_{x_0}^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $\varphi\in C^1\left(\left[\alpha,\beta\right],\left[a,b\right]\right)$ עולה ממש המקיימת $\left(\varphi\left(\alpha\right)=a\right)\wedge\left(\varphi\left(\beta\right)=b\right)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta\left(f\circ\varphi\right)\cdot\varphi'$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $R_n\left(f,a\right)\left(x\right)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}\left(t\right)\left(x-t\right)^n\mathrm{d}t$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}\left(k-2n\right)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x\right)^m\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x\right)^m\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}=\prod_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

משפט אבל: תהא $g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $f:\left[a,\omega\right)\to\mathbb{R}$ מונוטונית וחסומה אזי $fg\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$.

משפט דיריכלה: תהא $\forall b\in\left[a,\omega\right).g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $G\left(x\right)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f:\left[a,\omega\right)\to\mathbb{R}$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $fg\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\leq n!\leq\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:\left(1,\infty\right)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta\left(s\right)\left(s-1\right)=1$.

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\iff\left(\forall x\in I.\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{p.w.}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי

- רציפות: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in R\left(I\right)\right)$.
- גבול האינטגרל: נניח $f\in R\left(I\right)$ וכן $\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R\left(I\right)$ אזי $\left(\int_I f=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(f'\left(x\right)=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f_n'\left(x\right)=L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\iff\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=0\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\iff\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)\right|\leq M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\wedge\left(g_n\xrightarrow{u}g\right)$ אזי $f_ng_n\xrightarrow{u}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)\iff\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{u}f\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C\left(I\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in C\left(I\right)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{I_n\right\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהי $a<b$ אזי $\left[a,b\right]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ וכן $\forall n<m.f_m<f_n$ אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ באשר $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ וכן לכל $x\in\left[a,b\right]$ הסדרה $\left\{f_n\right\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a\in(0,1)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cos(b^k\pi x)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_0(x)=\left\{\begin{smallmatrix}x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1-x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{smallmatrix}\right.\right)\wedge(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0(x+1)=\triangle_0(x))\wedge\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0(4^kx)}{4^k}\right)$.

טענה: $\triangle_n\xrightarrow{u}\triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט: תהיינה $f_n\in C^1([a,b])$ עבורה $f_n'\xrightarrow{u}g$ ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n\xrightarrow{u}f$ וכן $f'=g$.

סימון: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n}f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty}f_n=f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b\sum_{i=0}^{\infty}u_n=\sum_{i=0}^{\infty}\int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}u_i$.

משפט בוחן M של ויירשטראס: תהיינה $u_n\in\mathbb{R}^I$ ותהא $M\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}M_n<\infty$ וכן $\forall x\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.|u_n(x)|\le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m(b_k-b_{k+1})$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n}f_ig_i$ מתכנס במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n\xrightarrow{u}0$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n}f_ig_i$ מתכנס במ"ש.

למה: תהא $f\in C([0,1])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין עבורה $\max|f-\varphi|<\varepsilon$.

למה: תהא $f\in C([0,1])$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ נגדיר $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין כך $\varphi(x)=f(0)+N\sum_{k=0}^{N-1}(f(a_{k+1})-2f(a_k)+f(a_{k-1}))\max\{x-a_k,0\}$ אזי $\forall m\in\{0\ldots N\}.\varphi(a_m)=f(a_m)$.

למה: קיימים $p_n\in\mathbb{R}[x]$ עבורן $\lim_{n\to\infty}\max_{[-1,1]}|p_n(x)-|x||=0$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי $\exists p\in\mathbb{R}[x].\max_{[a,b]}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ אזי קיימות $p_n\in\mathbb{R}[x]$ עבורן $p_n\xrightarrow{u}f$.

הגדרה: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n\xrightarrow{u}f$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R([a,\omega))$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi\in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.|f_n|\le\Psi$ אזי $(\forall b\in[a,\omega).f\in R([a,b]))\wedge\left(\int_a^{\omega}f\ \text{מתכנסת בהחלט}\right)\wedge\left(\int_a^{\omega}f=\lim_{n\to\infty}\int_a^{\omega}f_n\right)$.

טענה: $\int_0^{\infty}e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q\in\mathbb{R}$ ויהי $r<|q|$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|,|r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי קיים $R\in[0,\infty]$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases}\text{מתכנס} & x\in(-R,R)\\ \text{מתבדר} & x\notin[-R,R]\end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי $R\in[0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמר: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_nx^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right)\Longrightarrow(R=\infty)\right)\wedge\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right)\Longrightarrow(R=0)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}a_{k+m}x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_kx^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty}a_k<0$ אזי $\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k$.

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftrightarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_kx^k$ טור חזקות אזי ($\sum ka_kx^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftrightarrow$($\sum a_kx^k$ מתכנס ב־$-R$).

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}a_i$ מתכנס בהחלט ותהא $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל אזי $\sum_{i=0}^{\infty}a_i=\sum_{i=0}^{\infty}a_{p(i)}$.

טענה מכפלות קושי: יהיו $p,q\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_nx^n,\sum b_nx^n$ טורי חזקות מתכנסים בהחלט על I אזי $\sum\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.

סכים לפי אבל: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim\limits_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^k$ (A).

התכנסות צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$ (C).

סכים לפי צ'זארו: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$ (C).

סימון: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$ (C).

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ (C).

משפט: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ (C) אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\ell$ (A).

משפט טאובר: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$ (A) וכן $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\rho$.

משפט: יהי $\sum a_kz^k$ טור חזקות מרוכב המתכנס עבור $w\in\mathbb{C}$ ויהי $r<|w|$ אזי $\sum a_kz^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $\overline{B}_r(0)$.

משפט אוילר: יהי $\theta\in\mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

מסקנה: יהי $z\in\mathbb{C}$ אזי

- $\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$.
- $\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists!u,v\in\mathbb{R}^{[a,b]}.f=u+iv$.

סימון: יהיו $u,v\in R([a,b])$ אזי $u+iv\in R([a,b])$.

אינטגרל: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\int_a^b(u+iv)=\int_a^bu+i\int_a^bv$.

טענה: תהיינה $f,g\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי

- $\int_a^b(f+g)=\int_a^bf+\int_a^bg$.
- $\int_a^bf=\int_a^cf+\int_c^bf$.
- $\int_a^bcf=c\int_a^bf$.
- $\int_a^b\overline{f}=\overline{\int_a^bf}$.

נגזרת: יהיו $u,v\in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\frac{d}{dx}(u+iv)=\frac{du}{dx}+i\cdot\frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $|f|\in R([a,b])$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^xf(t)\,\mathrm{d}t\right)'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^bf(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\int_a^bf'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^bfg'$.

מסקנה: תהא $f\in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\left|\int_a^bf\right|\le\int_a^b|f|$.

פונקציה מחזורית: $f\in\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T\in\mathbb{R}.\forall x\in\mathbb{R}.f(x+T)=f(x)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R(\mathbb{T})=\{f\in R([0,2\pi])\mid\forall x\in\mathbb{R}.f(x+2\pi)=f(x)\}$.

סימון: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n(t)=e^{int}$.

טענה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $e_n(t)\in R(\mathbb{T})$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\{c_n\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $(c_m\ne0)\vee(c_{-m}\ne0)$ אזי m.

טענה: $R(\mathbb{T})$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f,g\in R(\mathbb{T})$ אזי $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

טענה: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ מכפלה פנימית על $C(\mathbb{T})$.

טענה: $\langle e_n,e_m\rangle=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}(m)=\langle f,e_m\rangle$.

טענה: יהי $f(t)=\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n(t)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}(k)=c_k$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f(t)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)e_n(t)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\langle f,g\rangle=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\|f\|^2=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}(n)\right|^2$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $\hat{f}(m)=\langle f,e_m\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $(S_mf)(t)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)e_n(t)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ אזי $\hat{f}(-n)=\overline{\hat{f}(n)}$.

מסקנה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$(S_mf ממשית).

טענה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ ויהי $|k|\leq m$ אזי $(f-S_mf)\perp e_k$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $(f-S_mf)\perp S_mf$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $\|f\|^2=\|S_mf\|^2+\|f-S_mf\|^2$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2\leq\|f\|^2$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}(n)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_2: תהיינה $f_n,g\in R([0,2\pi])$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{L_2}g\right)\iff\left(\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-g\|=0\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_2 איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R(\mathbb{T})$ אזי $\|g\|\leq\sup|g|$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in R([0,2\pi])$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\Longrightarrow\left(f_n\xrightarrow{L_2}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי קיימת $p_n\in\mathbb{C}[x]$ עבורה $p_n\xrightarrow{L_2}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup\limits_{t\in[0,2\pi]}|p(t)-f(t)|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R([0,2\pi])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\|p-f\|<\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי קיימים p_n פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_n\xrightarrow{L_2}f$.

משפט: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי $\lim\limits_{m\to\infty}\|S_mf-f\|=0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R([0,2\pi])$ עבורה $\|f\|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2$.

מסקנה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

מסקנה: תהיינה $f,g\in R([0,2\pi])$ המקיימות $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}(n)=\hat{g}(n)$ אזי בכל נקודת רציפות של f,g מתקיים $f=g$.

טענה: תהא $f\in R([0,2\pi])$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\{c_n\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\|f-\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\right\|^2\geq\|f-S_mf\|^2$.

מסקנה: תהיינה $f_m,g\in R([0,2\pi])$ עבורן $\|f_m-g\|\xrightarrow[m\to\infty]{}0$ אזי $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}_m(n)\xrightarrow[m\to\infty]{}\hat{g}(n)$.

טור פורייה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ עבורה g $\xrightarrow{p.w.}$ S_Nf באשר $g\in R(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int}$.

מסקנה: תהא $f\in C(\mathbb{T})$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|<\infty$ אזי $S_Nf\xrightarrow{u}f$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[-\pi,\pi)}$ המוגדרת $f(t)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_+.\hat{f}(n)=\frac{(-1)^ni}{n}\right)\wedge\left(\hat{f}(0)=0\right)$.
- $S_mf(t)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}\sin(nt)}{n}$.
- יהי $r\in[0,\pi)$ אזי $S_mf\xrightarrow{u}f$ על $[-r,r]$.
- f $\xrightarrow{p.w.}$ S_mf על $(-\pi,\pi)$.

מסקנה: $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ המוגדרת $f(t)=\frac{(\pi-t)^2}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_+.\hat{f}(n)=\frac{1}{2n^2}\right)\wedge\left(\hat{f}(0)=\frac{\pi^2}{12}\right)$.
- $S_mf(t)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos(nt)}{n^2}$.

- $S_m f \xrightarrow{u} f$ על $[0,2\pi]$.

מסקנה: $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

מסקנה: $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

טענה: יהי $\alpha \notin \mathbb{Z}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$.

למה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$.

מסקנה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $S_m(f') = (S_m f)'$.

למה: תהא $f \in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f^{(k)}}(n) = i^k n^k \hat{f}(n)$.

מסקנה: תהא $f \in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\lim_{n\to\infty} n^k \hat{f}(n) = 0$.

משפט: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} n^k \hat{f}(n) = 0$ אזי $f \in C^{k-2}(\mathbb{T})$.

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| < \infty$.

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{T})$ אזי $S_m f \xrightarrow{u} f$.

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(n)\right| < \infty$ אזי $S_m f \xrightarrow{u} f$.

תנאי ליפשיץ מקומי: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ אזי $a \in \mathbb{R}$ עבורה $\exists\delta > 0.\exists M > 0.\forall x \in (a-\delta, a+\delta).\left|f(x) - f(a)\right| < M\left|x-a\right|$.

הערה: יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהא $f \in C^1((a-\delta, a+\delta))$ אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a.

משפט: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in \mathbb{T}$ עבורן f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a אזי $S_N f(a) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(a)$.

קונבולוציה: תהיינה $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי $(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי

- $f * g = g * f$.
- $f * (g + h) = f * g + f * h$.
- $(cf) * g = c(f * g)$.
- $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- $f * g \in C(\mathbb{T})$.
- $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$.

גרעין דיריכלה: נגדיר $D_N \in R(\mathbb{T})$ כך $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$.

למה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $D_N * f = S_N f$.

למה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $\widehat{D_N}(n) = \begin{cases} 1 & |n| \le N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $\left|D_N(y)\right| \le 2N + 1$.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $D_N(y) = \begin{cases} 2N+1 & y = 0 \\ \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & y \ne 0 \end{cases}$.

מסקנה: D_N זוגית ממשית וכן מתקיים $\left(y \in \left\{\frac{2\pi k}{2N+1} \mid k \in \{-N, \ldots, N\}\right\}\right) \Longleftrightarrow (D_N(y) = 0)$.

למה: D_N בעלת N מינימום מקומיים וכן $N+1$ מקסימום מקומיים.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $\left|D_N(y)\right| \le \left|\frac{1}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right|$.

מסקנה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $\left|D_N(y)\right| \le \frac{\pi}{|y|}$.

טענה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

טענה: $\int_{-\pi}^{\pi} \left|D_N(y)\right|\mathrm{d}y \ggg 1$.

סכומי פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $(\sigma_N f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n f(x)$.

גרעין פייר: נגדיר $F_N \in R(\mathbb{T})$ כך $F_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(x)$.

למה: יהי $y \in [-\pi, \pi]$ אזי $F_N(y) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right)^2$.

למה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)\,\mathrm{d}y = 1$.

למה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f = f * F_N$.

למה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $\widehat{F_N}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N+1} & |n| \le N \\ 0 & |n| > N \end{cases}$.

למה: יהי $\delta > 0$ ויהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $N \ge N_0$ מתקיים $\int_{-\pi}^{-\delta} F_N(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\pi} F_N(x)\,\mathrm{d}x \le \varepsilon$.

משפט פייר: תהא $f \in C(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f \xrightarrow{u} f$.

משפט פייר: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in [-\pi, \pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל אזי $\sigma_N f(a) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)}{2}$.

מסקנה: תהא $f \in R(\mathbb{T})$ ותהא $a \in [-\pi, \pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל וכן $S_N f(a) \to \ell$ אזי $\ell = \frac{\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)}{2}$.

מסקנה: $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ צפופים במ"ש ב־$C(\mathbb{T})$.

טענה: $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

מטריקה/מרחק: תהא A קבוצה אזי $d : A^2 \to [0, \infty)$ המקיימת

- חיוביות: $\forall x, y \in A. d(x, y) \geq 0$.
- חיוביות ממש: $\forall x, y \in A. (d(x, y) = 0) \iff (x = y)$.
- סימטריות: $\forall x, y \in A. d(x, y) = d(y, x)$.
- אי־שיוויון המשולש: $\forall x, y, z \in A. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

מרחב מטרי: תהא X קבוצה ותהא $d : X^2 \to [0, \infty)$ מטריצה אזי (X, d).

גבול: יהי (X, d) מרחב מטרי תהא $a \in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $L \in X$ עבורן $d(a_n, L) \to 0$ אזי $a_n \to L$.

טענה: יהי (X, d) מרחב מטרי תהא $a \in X^{\mathbb{N}}$ ויהיו $L_1, L_2 \in X$ עבורם $(a_n \to L_1) \wedge (a_n \to L_2)$ אזי $L_1 = L_2$.

מרחק מנהטן: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ אזי $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

סימון: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ אזי $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, d_p)$.

טענה: ℓ_p^n מרחב מטרי.

מרחק יוניפורמי: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$ אזי $d_\infty(x, y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$.

סימון: $\ell_\infty^n = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$.

טענה: ℓ_∞^n מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f, g \in C([a, b])$ נגדיר $d(f, g) = \sup |f - g|$ אזי $C([a, b]) = (C([a, b]), d)$.

טענה: $C([a, b])$ מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f, g \in R([a, b])$ נגדיר $d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f - g|^2}$ ונגדיר יחס שקילות $(f \sim g) \iff (d(f, g) = 0)$ אזי $L_2([a, b]) = \left({}^{R([a,b])}/_{\sim}, d\right)$.

טענה: $L_2([a, b])$ מרחב מטרי.

טענה: יהי V מ"ו ותהא $\nu : V \to [0, \infty)$ נורמה על V נגדיר $d(x, y) = \nu(x - y)$ אזי (V, d) מרחב מטרי.

למה: יהי $x \in \mathbb{R}^n$ אזי

- $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.
- $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$.

מסקנה: תהא $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ סדרה ותהא $y \in \mathbb{R}^n$ אזי $\left(\lim_{m\to\infty} \left\|x^{(m)} - y\right\|_2 = 0\right) \iff \left(\forall i \in [n] . \lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = y_i\right)$.

כדור פתוח: יהי $a \in X$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) < r\}$.

כדור סגור: יהי $a \in X$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) \leq r\}$.

ספירה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $S_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, a) = r\}$.

נקודה פנימית: תהא $A \subseteq X$ אזי $x \in A$ המקיימת $\exists r > 0. B_r(x) \subseteq A$.

פנים של קבוצה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\{x \in A \mid A$ נקודה פנימית של $x\} = \overset{\circ}{A} = \mathrm{int}(A)$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $A \subseteq X$ עבורה $A = \mathrm{int}(A)$.

למה: תהא $A \subseteq X$ אזי $\mathrm{int}(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(A)$.

משפט: יהי (X, d) מרחב מטרי אזי

- יהיו $\{A_i\}$ פתוחות אזי $\bigcup A_i$ פתוחה.
- יהיו $\{A_i\}_{i=0}^n$ פתוחות אזי $\bigcap A_i$ פתוחה.
- $X, \varnothing$ פתוחות.