כדור פתוח: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid\left\Vert x-a\right\Vert <r\right\}$.

כדור סגור: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid\left\Vert x-a\right\Vert \leq r\right\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid\left\Vert x-a\right\Vert =r\right\}$.

תיבה פתוחה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\Pi_{a,b}=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}\mid\forall j\in\left[n\right].a_{j}<x_{j}<b_{j}\right\}$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\overline{\Pi}_{a,b}=\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}\mid\forall j\in\left[n\right].a_{j}\leq x_{j}\leq b_{j}\right\}$.

נקודה פנימית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\subseteq M$.

פנים של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathrm{int}\left(M\right)=\overset{\circ}{M}=\left\{ x\in M\mid M\text{ נקודה פנימית של }x\right\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $M=\overset{\circ}{M}$.

נקודה חיצונית: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $x\in\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\subseteq\mathbb{R}^{n}\backslash M$ אזי x נקודה חיצונית.

נקודה מבודדת: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $x\in M$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\cap M=\left\{ x\right\}$ אזי x נקודה מבודדת.

נקודת שפה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $x\in\mathbb{R}^{n}$ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי x נקודת שפה.

שפה של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\partial M=\left\{ x\in M\mid M\text{ נקודת שפה של }x\right\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה $\partial M\subseteq M$.

סגור של קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\overline{M}=\overset{\circ}{M}\cup\partial M$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (x נקודה חיצונית של M)$\Longleftrightarrow$(x נקודה פנימית של $\mathbb{R}^{n}\backslash M$).

מסקנה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (M פתוחה)$\Longleftrightarrow$($M^{\mathcal{C}}$ סגורה).

קבוצה חסומה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\exists r>0.M\subseteq B_{r}\left(0\right)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ סגורה וחסומה.

טענה היינה בורל: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\left\{ I_{n}\right\} _{n\in\Lambda}$ קבוצות פתוחות עבורן $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_{n}$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_{0}}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_{n}$).

סימון: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $a^{\left(k\right)}=a\left(k\right)$.

גבול: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^{n}$ עבורן $\lim_{k\to\infty}\left\Vert a^{\left(k\right)}-L\right\Vert =0$ אזי $\lim_{k\to\infty}a^{\left(k\right)}=L$.

הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר $\lim_{x\to a}$ וכן $\xrightarrow[x\to a]{}$.

משפט: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ ויהי $b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(a^{\left(k\right)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b\right)\Longleftrightarrow\left(\forall j\in\left[n\right].a_{j}^{\left(k\right)}\xrightarrow[k\to\infty]{}b_{j}\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א1 מתקיימות.

משפט קושי: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\Vert a^{\left(m\right)}-a^{\left(p\right)}\right\Vert <\varepsilon\right)$.

מסקנה: תהא $a\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי (a מתכנסת)$\Longleftrightarrow\left(\forall j\in\left[n\right].\forall\varepsilon>0.\exists k\in\mathbb{N}.\forall m,p>k.\left\Vert a_{j}^{\left(m\right)}-a_{j}^{\left(p\right)}\right\Vert <\varepsilon\right)$.

משפט בולצאנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת־סדרה מתכנסת.

משפט: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי (K קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(לכל $a\in K^{\mathbb{N}}$ קיימת תת־סדרה $a^{\left(k_{i}\right)}$ המקיימת $\lim_{k\to\infty}a^{\left(k_{i}\right)}\in K$).

הערה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f=\left\langle f_{1},\ldots,f_{m}\right\rangle$ כאשר $f_{i}:A\to\mathbb{R}$.

גבול: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ ותהא $L\in\mathbb{R}^{m}$ אזי

- היינה: אם $\forall x\in A^{\mathbb{N}}.\left(x^{\left(k\right)}\to a\right)\Longrightarrow\left(f\left(x^{\left(k\right)}\right)\to L\right)$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.
- קושי: אם $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in A\backslash\left\{ a\right\} .\left\Vert x-a\right\Vert <\delta\Longrightarrow\left\Vert f\left(x\right)-L\right\Vert <\varepsilon$ אזי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=L$.

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $a\in A$ עבורה $f\left(a\right)=\lim_{x\to a}f\left(x\right)$.

סימון: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $B\subseteq A$ אזי (f רציפה נקודתית עבור כל $b\in B$)$\Longleftrightarrow\left(f\in C\left(B\right)\right)$.

משפט: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תהא $f:A\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $B\subseteq A$ אזי $\left(f\in C\left(b\right)\right)\Longleftrightarrow\left(f_{1},\ldots,f_{m}\in C\left(b\right)\right)$.

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א1 מתקיימות.

פונקציה הומאומורפית: תהיינה $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ וכן $B\subseteq\mathbb{R}^{m}$ אזי $f:A\to B$ הפיכה עבורה f,f^{-1} רציפות.

עקומה פרמטרית: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma:I\to\mathbb{R}^{m}$.

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{m}$ נגדיר $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^{m}$ כך $\gamma\left(t\right)=\left(1-t\right)a+tb$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{m}$ ותהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^{m}$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^{m}$ ותהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^{m}$ מסילה של קו ישר בין a ל־b אזי $\left[a,b\right]=\mathrm{Im}\left(\gamma\right)$.

קבוצה קמורה: קבוצה $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\forall a,b\in M.\left[a,b\right]\subseteq M$.

טענה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right),\overline{B}_{r}\left(a\right)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה: $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ עבורה לכל $x,y\in M$ קיימת מסילה $\gamma:\left[0,1\right]\to M$ המקיימת $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\gamma\left(1\right)=y$.

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}_{\leq\aleph_{0}}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\biguplus\mathcal{A}=M$.

תכונת דרבו: $f:A\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $a,b\in A$ עבורן $f\left(a\right)<f\left(b\right)$ מתקיים $\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]\subseteq f\left(\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קשירה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי f מקיימת את תכונת דרבו.

משפט ווירשטראס: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}\right)$ אזי קיימים $x,y\in\mathcal{K}$ עבורם $f\left(\mathcal{K}\right)=\left[f\left(x\right),f\left(y\right)\right]$.

רציפה במידה שווה (במ"ש): תהא $\mathcal{M}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f:\mathcal{M}\to\mathbb{R}^{n}$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in\mathcal{M}.\left\Vert x-y\right\Vert <\delta\Longrightarrow\left\Vert f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\Vert <\varepsilon$.

טענה: תהא $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית ותהא $f\in C\left(\mathcal{K},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי f רציפה במ"ש.

נורמה: יהי L מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$ אזי $\upsilon:L\to\mathbb{R}$ עבורה לכל $a\in L$ ולכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

- $\left(\upsilon\left(a\right)\geq0\right)\wedge\left(\left(\upsilon\left(a\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(a=0\right)\right)$.
- הומוגניות: $\upsilon\left(\lambda a\right)=\left|\lambda\right|\cdot\upsilon\left(a\right)$.
- אי שיוויון המשולש (אש"מ): $\upsilon\left(a+b\right)\leq\upsilon\left(a\right)+\upsilon\left(b\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^{n}.\upsilon\left(x\right)\leq c\left\Vert x\right\Vert$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon\in C\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

טענה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי קיים $c>0$ עבורו $\forall x\in\mathbb{R}^{n}.c\left\Vert x\right\Vert \leq\upsilon\left(x\right)$.

נורמות שקולות: $\upsilon,\eta:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמות עבורן קיימים $a,b>0$ המקיימים $a\cdot\eta\leq\upsilon\leq b\cdot\eta$.

טענה: שקילות נורמות הינו יחס שקילות.

מסקנה: תהא $\upsilon:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמה אזי $\upsilon,\left\Vert \cdot\right\Vert$ שקולות.

מסקנה: תהיינה $\upsilon,\rho:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נורמות ותהא $x\in\left(\mathbb{R}^{n}\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(\upsilon\left(x^{\left(k\right)}\right)\to0\right)\Longleftrightarrow\left(\rho\left(x^{\left(k\right)}\right)\to0\right)$.

נורמה ℓ_{p}: עבור $p\in\mathbb{N}_{+}$ נגדיר נורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert _{p}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert _{p}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|v_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמה ℓ_{∞}: נגדיר נורמה $\left\Vert \cdot\right\Vert _{\infty}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך $\left\Vert v\right\Vert _{\infty}=\max_{1\leq i\leq n}\left|v_{i}\right|$.

דיפרנציאל של עקומה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma\left(a+h\right)-\gamma\left(a\right)}{h}$.

מסקנה: תהא $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $a\in\left(0,1\right)$ אזי $\gamma'\left(a\right)=\left(\begin{smallmatrix}\gamma_{1}'\left(a\right)\\ \vdots\\ \gamma_{m}'\left(a\right)\end{smallmatrix}\right)$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert \right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(a\right)\Longrightarrow f\in C\left(a\right)$.

גרדיאנט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\mathrm{grad}f\left(a\right)=\left[L\right]_{\mathrm{st}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי $\nabla f\left(a\right)=\mathrm{grad}f\left(a\right)$.

נגזרת חלקית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(a+hx_{i}\right)-f\left(a\right)}{h}$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $f_{x_{i}}'=\frac{\partial f}{\partial x_{i}}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)=\left(\nabla f\left(a\right)\right)_{i}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1}}\left(a\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n}}\left(a\right)\right)$.

הערה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי ($\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)$ קיימת לכל i)$\not\Longrightarrow$$\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

פונקציה דיפרנציאבילית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה קיימת $L\in\mathrm{Hom}\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{m}\right)$ המקיימת $f\left(x\right)=f\left(a\right)+L\left(x-a\right)+o\left(\left\Vert x-a\right\Vert \right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\left(f\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left\{ 1\ldots m\right\} .f_{i}\in\mathcal{D}\left(a\right)\right)$.

דיפרנציאל/יעקוביאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=\left(\begin{smallmatrix}-\nabla f_{1}\left(a\right)-\\ \vdots\\ -\nabla f_{m}\left(a\right)-\end{smallmatrix}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\left(\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\right)_{i,j}=\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\left(a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהיינה $f,g:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ יהי $a\in\mathcal{U}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי
- אם $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $f\in C\left(a\right)$.
- אם $f,g\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $cf,f+g\in\mathcal{D}\left(a\right)$.
- $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)$.
- תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)$.

פונקציה גזירה ברציפות: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$ וכן $\mathcal{D}_{f}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ גזירה ברציפות אזי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ אזי $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)$ אזי $f\in\mathcal{D}\left(\mathcal{U}\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(\forall i\in\left[m\right].\forall j\in\left[n\right].\frac{\partial f_{i}}{\partial x_{j}}\in C\left(\mathcal{U}\right)\right)$.

נגזרת כיוונית: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(a+hv\right)-f\left(a\right)}{h}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\nabla f\left(a\right)\cdot v$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $v\in\mathbb{S}^{n-1}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ המקיימת $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\frac{\partial f}{\partial v}\left(a\right)=\mathcal{D}_{f}\left(a\right)\cdot v$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום אזי ($\mathcal{U}$ קשירה מסילתית)$\Longleftrightarrow$($\mathcal{U}$ קשירה פוליגונלית).

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=0\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=c\right)$.

טענה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)\Longrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)$.

מסקנה: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $c\in\mathbb{R}^{m}$ אזי $\left(\forall x\in\mathcal{U}.\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=A\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in\mathcal{U}.f\left(x\right)=Ax+c\right)$.

סימון: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $i\in\left\{ 1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}^{2}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)}{\partial x_{i}}$.

נגזרת מעורבת: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהיו $i,j\in\left\{ 1\ldots n\right\}$ באשר $\frac{\partial f}{\partial x_{j}}$ גזירה אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\right)}{\partial x_{i}}$.

הערה: הסימון מלעיל מוכלל לנגזרת מסדר k בצורה $\frac{\partial^{k}f}{\partial x_{i_{1}}\ldots\partial x_{i_{k}}}$.

משפט: תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ יהיו $i,j\in\left\{ 1\ldots n\right\}$ עבורן $\frac{\partial f}{\partial x_{i}},\frac{\partial f}{\partial x_{j}}\in C^{1}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי $\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{i}\partial x_{j}}\left(a\right)=\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{j}\partial x_{i}}\left(a\right)$.

סימון: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ אזי $\left|K\right|=\sum_{i=1}^{n}K_{i}$ וכן $\partial x^{K}=\partial x_{1}^{K_{1}}\ldots\partial x_{n}^{K_{n}}$.

מסקנה: יהי $K\in\mathbb{N}^{n}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $\mathcal{D}_{f}\in C^{k}\left(\mathcal{U}\right)$ ויהי $a\in\mathcal{U}$ אזי כל פרמוטציה של הנגזרות החלקיות הוא $\frac{\partial^{\left|K\right|}f}{\partial x^{K}}\left(a\right)$.

טענה: תהא $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ ויהי $v\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert Av\right\Vert _{\text{st}}\le\left\Vert A\right\Vert _{\text{st}}\cdot\left\Vert v\right\Vert _{\text{st}}$.

משפט: יהיו $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תחומים תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהיינה $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, $g:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^{k}$ עבורן $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $g\in D\left(f\left(a\right)\right)$ אזי $g\circ f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ וכן $\mathcal{D}_{g\circ f}\left(a\right)=\mathcal{D}_{g}\left(f\left(a\right)\right)\cdot\mathcal{D}_{f}\left(a\right)$.

גרף פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\Gamma_{f}=\left\{ \left(x,y\right)\in\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}\mid\left(x\in\mathcal{U}\right)\wedge\left(f\left(x\right)=y\right)\right\}$.

עקומות/משטחי גובה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ויהי $c\in\mathbb{R}$ אזי $\Pi_{c}=\left\{ x\in\mathcal{U}\mid f\left(x\right)=c\right\}$.

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $y-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)$.

וקטור הנורמל לגרף בנקודה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $N_{a}=\left(-\nabla f\left(a\right),1\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\in\mathcal{D}\left(a\right)$ אזי $\nabla f\left(a\right)\perp\Pi_{f\left(a\right)}$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\ge f\left(a\right)$.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה קיימת סביבה $\mathcal{O}$ המקיימת $\forall x\in\mathcal{O}.f\left(x\right)\le f\left(a\right)$.

משפט פרמה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\nabla f\left(a\right)=0$.

נקודת קיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי
- נקודת מינימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מינימום מקומי של f_{i}.
- נקודת מקסימום מקומי: $a\in\mathcal{U}$ עבורה לכל $i\in\left[m\right]$ מתקיים a נקודת מקסימום מקומי של f_{i}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קיצון אזי $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

נקודה קריטית/חשודה לקיצון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $\mathcal{D}_{f}\left(a\right)=0$.

הגדרה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $\mathcal{D}_{\left(a,b\right)}^{k}f=\sum_{\substack{V\in\mathbb{N}^{n}\\ \left|V\right|=k}}\binom{k!}{V_{1},\ldots,V_{n}}\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)^{V_{i}}\frac{\partial^{k}}{\partial x^{V}}f$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ויהיו $a,b\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\mathcal{D}_{(a,b)}^{k}f=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i}-b_{i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\right)^{k}$.

משפט טיילור: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^{m}$ עבורה $f\in C^{k+1}\left(a\right)$ תהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה קמורה של a ותהא $x\in\mathcal{O}$ אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\mathcal{D}_{(x,a)}^{i}f\left(a\right)+\frac{1}{(k+1)!}\mathcal{D}_{(x,a)}^{k+1}f\left(c\right)$.

הסיאן: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית פעמיים אזי $\left(H_{f}\right)_{i,j}=f''_{x_{i},x_{j}}$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי קיים $c\in\left[x,a\right]$ עבורו $f\left(x\right)=f\left(a\right)+\left(x-a\right)^{t}H_{f}\left(c\right)\left(x-a\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- ($H_{f}\left(a\right)$ חיובית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מינימום).
- ($H_{f}\left(a\right)$ שלילית ממש)$\Longleftarrow$(a נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ קריטית אזי

- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)>0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מינימום).
- $\left(\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)>0\right)\wedge\left(f''_{x,x}\left(a\right)<0\right)\right)\Longleftarrow$($a$ נקודת מקסימום).
- ($\left(\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0\right)\wedge$(לא אחד מהמקרים מלעיל))$\Longleftarrow$($a$ אינה נקודת קיצון).

נקודה קריטית לא מנוונת: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תחום ותהא $f\in C^{2}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ קריטית עבורה $\det\left(H_{f}\left(a\right)\right)\neq0$.

משפט פונקציה סתומה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ ויהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f'\left(x\right)=-\frac{F'_{x}\left(x,f\left(x\right)\right)}{F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)}$ על I_{x}.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{2}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)\neq0$ ויהיו $I_{x},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם $a_{1}\in I_{x}$ וכן $a_{2}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(I_{x},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in I_{x}\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $f\left(x\right)\in C^{k}\left(I_{x},I_{y}\right)$.

טענה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{x_{n+1}}\left(a\right)\neq0$ ויהיו $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ וכן $a_{n+1}\in I_{y}$ ותהא $f\in C^{1}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},I_{y}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times I_{y}$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(x\right)-=\frac{F'_{x_{i}}\left(x,f\left(x\right)\right)}{F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)}$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}$.

סימון: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי $\underset{m\times(n+m)}{\mathcal{D}_{f}\left(a\right)}=\left(\underset{m\times n}{F'_{x}\left(a\right)},\underset{m\times m}{F'_{y}\left(a\right)}\right)$.

משפט פונקציה סתומה כללי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימים $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y_{1}}\ldots I_{y_{m}}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ ולכל $j\in\left[m\right]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_{j}}$ וקיימת $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)$ הפיכה יהיו $I_{x_{1}},\ldots,I_{x_{n}},I_{y_{1}}\ldots I_{y_{m}}\subseteq\mathbb{R}$ פתוחים עבורם לכל $i\in\left[n\right]$ מתקיים $a_{i}\in I_{x_{i}}$ ולכל $j\in\left[m\right]$ מתקיים $a_{j+n}\in I_{y_{j}}$ ותהא $f\in C^{k}\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}},\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ עבורה לכל $\left(x,y\right)\in\left(\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m}I_{y_{i}}\right)$ מתקיים $\left(F\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(y=f\left(x\right)\right)$ אזי $\mathcal{D}_{f}\left(x\right)=-F'_{y}\left(x,f\left(x\right)\right)^{-1}\cdot F'_{x}\left(x,f\left(x\right)\right)$ על $\prod_{i=1}^{n}I_{x_{i}}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $\nabla F\left(a\right)\neq0$ אזי משוואת המשטח המשיק לגרף ב־a הינו $\sum_{i=1}^{n}F'_{x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)=0$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ תחום תהא $F\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^{m}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ עבורה $F\left(a\right)=0$ וכן $F'_{y}\left(a\right)$ הפיכה אזי משוואת המשטח המשיק לגרף ב־a הינו $\sum_{i=1}^{n}F'_{x_{i}}\left(a\right)\left(x_{i}-a_{i}\right)=0$.

דיפאומורפיזם: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f\in C^{1}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^{1}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

דיפאומורפיזם C^{k}: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $f\in C^{k}\left(\mathcal{U},\mathcal{V}\right)$ הפיכה עבורה $f^{-1}\in C^{k}\left(\mathcal{V},\mathcal{U}\right)$.

משפט פונקציה הפוכה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $\mathcal{D}_f\left(a\right)$ הפיכה אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f דיפאומורפיזם על $\mathcal{O}$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ תהא $f\in C^k\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $\mathcal{D}_f\left(a\right)$ הפיכה ותהא $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a עבורה f דיפאומורפיזם אזי $\mathcal{D}_{f^{-1}}\left(f\left(x\right)\right)=\mathcal{D}_f\left(x\right)^{-1}$ על $\mathcal{O}$.

טענה: יהיו $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $A\subseteq\mathcal{U}$ ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ דיפאומורפיזם אזי

- (A פתוחה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ פתוחה).
- (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ סגורה).
- (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($f\left(A\right)$ קומפקטית).
- אם $\partial A\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\partial\left(f\left(A\right)\right)=f\left(\partial A\right)$.

פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום אזי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$ המקיימת לכל $\widetilde{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{U}$ פתוחה מתקיים $f\left(\widetilde{\mathcal{U}}\right)$ פתוחה.

משפט פונקציה פתוחה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום יהי $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ עבורה $\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_f\left(a\right)\right)=m$ אזי קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה f פתוחה על $\mathcal{O}$.

נקודה קריטית בתנאי: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ אזי $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g\left(a\right)=0$ וכן $\nabla f\left(a\right)\in\operatorname{span}\left\{\nabla g_i\left(a\right)\right\}$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ המקיימת $g\left(a\right)=0$ וכן $\left\{\nabla g_i\left(a\right)\right\}$ בת"ל וכן קיימת סביבה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ של a עבורה a קיצון בקבוצה $\operatorname{sols}\left(g\right)\cap\mathcal{O}$ אזי a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$.

פונקציית לגראנז': יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $g\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ נגדיר $L\in C^1\left(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)$ כך $L\left(x_1\ldots x_n,\lambda_1,\ldots\lambda_m\right)=f\left(x_1\ldots x_n\right)-\sum_{i=1}^m\lambda_ig_i\left(x_1\ldots x_n\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ תהא $g\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ אזי (a נקודה קריטית של f בתנאי $g=0$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $\lambda\in\mathbb{R}^m$ עבורה $\left(a,\lambda\right)$ נקודה קריטית של L).

דרגה של פונקציה: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ אזי $\operatorname{rank}\left(f\left(a\right)\right)=\operatorname{rank}\left(\mathcal{D}_f\left(a\right)\right)$.

משפט: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $a\in\mathcal{U}$ ותהא $f\in C^1\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^m\right)$ עבורה $\forall x\in\mathcal{U}.\operatorname{rank}\left(f\left(x\right)\right)=k$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a קיימת $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של $f\left(a\right)$ קיימים דיפאומורפיזמים $\varphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ וכן $\psi:\mathcal{V}\to\mathbb{R}^m$ וקיימת $\mathcal{W}\subseteq\varphi\left(\mathcal{O}\right)$ סביבה של $\varphi\left(a\right)$ עבורם $\left(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\right)\left(x\right)=\left(x_1,\ldots,x_k,0,\ldots,0\right)$ על $\mathcal{W}$.

הלמה של הדמר: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה קמורה של 0 יהי $p\geq1$ ותהא $f\in C^p\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ עבורה $f\left(0\right)=0$ אזי קיימת $g\in C^{p-1}\left(\mathcal{U},\mathbb{R}^n\right)$ עבורה $g\left(0\right)=\nabla f\left(0\right)$ וכן $f\left(x\right)=\sum_{i=1}^nx_ig\left(x\right)$.

הלמה של מורס: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום תהא $f\in C^3\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ ותהא $a\in\mathcal{U}$ נקודה קריטית לא מנוונת אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ סביבה של a וגם $\mathcal{V}\subseteq\mathbb{R}^n$ סביבה של 0 וכן דפיאומורפיזם $g:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$ המקיים $\left(f\circ g\right)\left(x\right)-f\left(a\right)=\sum_{i=1}^kx_i^2-\sum_{i=k+1}^nx_i^2$.

תיבה סגורה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $P_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^n\mid\forall j\in\left[n\right].a_j\leq x_j\leq b_j\right\}$.

תיבה מנוונת: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $\exists i\in\left[n\right].a_i=b_i$ אזי $P_{a,b}$.

חלוקה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ לכל $i\in\left[n\right]$ תהיינה $\left\{t_i^0,\ldots,t_i^{\ell_i}\right\}$ חלוקה של $\left[a_i.b_i\right]$ אזי $\left\{\prod_{i=1}^n\left[t_i^{m_i},t_i^{m_i+1}\right]\mid\forall i\in\left[n\right].m_i\in\left[\ell_i-1\right]\right\}$.

מידה/נפח של תיבה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ אזי $V\left(P\right)=\operatorname{Vol}\left(P\right)=\prod_{i=1}^n\left(b_i-a_i\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\left\{A_1,\ldots,A_k\right\}$ חלוקה של P אזי $\operatorname{Vol}\left(P\right)=\sum_{i=1}^k\operatorname{Vol}\left(A_i\right)$.

הערה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ עבורם $P_{a,b}$ תיבה מנוונת אזי $\operatorname{Vol}\left(P_{a,b}\right)=0$.

סכום רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ תהא $\Pi=\left\{A_1,\ldots,A_k\right\}$ חלוקה ויהיו $x^{(j)}\in A_j$ אזי $S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)=\sum_{j=1}^kf\left(x^{(j)}\right)\operatorname{Vol}\left(A_j\right)$.

קוטר קבוצה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $d\left(M\right)=\sup_{x,y\in M}\left\|x-y\right\|$.

מדד העדינות: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $\Pi=\left\{A_1,\ldots,A_k\right\}$ חלוקה אזי $\lambda\left(\Pi\right)=\max_{i\leq i\leq k}d\left(A_i\right)$.

אינטגרביליות רימן: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אזי $\int_Pf\left(x\right)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S\left(f,\Pi,x^{(j)}\right)$.

סימון: יהיו $a,b\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן אזי $f\in R\left(P\right)$.

טענה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ אזי f חסומה על P.

סכום דרבו עליון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\left\{A_1,\ldots,A_n\right\}$ חלוקה אזי $\overline{S}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^n\sup_{P_j}\left(f\right)\operatorname{Vol}\left(P_j\right)$.

סכום דרבו תחתון: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא $\left\{A_1,\ldots,A_n\right\}$ חלוקה אזי $\underline{S}\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^n\inf_{P_j}\left(f\right)\operatorname{Vol}\left(P_j\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהיו $x^{(j)}$ נקודות מתאימות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi\right)\leq S\left(f,\Pi,\left\{x^{(i)}\right\}\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi_1\right)\leq\underline{S}\left(f,\Pi_2\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_2\right)\leq\overline{S}\left(f,\Pi_1\right)$.

טענה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{S}\left(f,\Pi_1\right)\le\overline{S}\left(f,\Pi_2\right)$.

אינטגרל דרבו עליון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\overline{I}\left(f\right)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{S}\left(f,\Pi\right)$.

אינטגרל דרבו תחתון: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\underline{I}\left(f\right)=\sup_{\text{חלוקה }\Pi}\underline{S}\left(f,\Pi\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\overline{I}\left(f\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

קריטריון דרבו: תהא P תיבה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(P\right)\right)\iff\left(\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)\right)$.

מסקנה: תהא P תיבה ותהא $f\in R\left(P\right)$ חסומה אזי $\int_P f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

טענה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ויהי $\lambda>0$ אזי $\text{Vol}\left(P_{\lambda a,\lambda b}\right)=\lambda^n\text{Vol}\left(P_{a,b}\right)$.

טענה: יהיו $P_1\ldots P_n$ תיבות עבורן לכל $i\neq j$ מתקיים $\text{int}\left(P_i\right)\cap\text{int}\left(P_j\right)=\varnothing$ וכן $\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^n P_i\right)=\sum_{i=1}^n\text{Vol}\left(P_i\right)$.

מסקנה: יהיו $P_1\ldots P_n$ תיבות ותהא $P\subseteq\bigcup_{i=1}^n P_i$ תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\right)\le\sum_{i=1}^n\text{Vol}\left(P_i\right)$.

טענה: יהיו P_1,P_2 תיבות אזי $P_1\cap P_2$ תיבה.

הערה: תהא P תיבה אזי $\text{Vol}\left(P\backslash\text{int}\left(P\right)\right)=0$.

קבוצה זניחה: $E\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{P_i\right\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty P_i$ וכן $\sum_{i=0}^\infty\text{Vol}\left(P_i\right)<\varepsilon$.

סימון: $\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{E\subseteq\mathbb{R}^n\mid\text{זניחה }E\right\}$.

טענה: $\varnothing\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$, יהי $a\in\mathbb{R}^n$ אזי $\left\{a\right\}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהיינה $\left\{E_i\right\}_{i=0}^\infty$ זניחות אזי $\bigcup_{i=0}^\infty E_i\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (E זניחה)$\iff$(לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{P_i\right\}_{i=0}^\infty$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^\infty\text{int}\left(P_i\right)$ וכן $\sum_{i=0}^\infty\text{Vol}\left(P_i\right)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$ קומפקטית אזי לכל $\varepsilon>0$ קיימות תיבות $\left\{P_i\right\}_{i=0}^n$ המקיימת $E\subseteq\bigcup_{i=0}^n\text{int}\left(P_i\right)$ וכן $\sum_{i=0}^n\text{Vol}\left(P_i\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $E\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$ ותהא $A\subseteq E$ אזי $A\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$, תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה לא מנוונת אזי $P\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

טענה: תהא $M\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורה קיימת נקודה פנימית אזי $M\notin\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$.

מסקנה: תהא $M\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\text{int}\left(M\right)=\varnothing$.

טענה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה ותהא $f\in C\left(P,\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

מסקנה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f\in C\left(\mathcal{U},\mathbb{R}\right)$ אזי $\Gamma_f\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

טענה: תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימות קוביות $\left\{C_i\right\}_{i=0}^\infty$ בעלות אורך צלע 2^{-e_i} עבור $e_i\in\mathbb{N}$ עבורן לכל $i\neq j$ מתקיים $\text{int}\left(P_i\right)\cap\text{int}\left(P_j\right)=\varnothing$ וכן $\mathcal{U}=\bigcup_{i=1}^\infty C_i$.

מסקנה: $\mathbb{S}^{n-1}\in\mathcal{N}\left(\mathbb{R}^n\right)$, קבוצת קנטור זניחה.

תנודה של פונקציה בנקודה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי $\omega\left(f,a\right)=\lim_{\delta\to0^+}\omega\left(f,B_\delta\left(a\right)\cap A\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תהא $a\in A$ ותהא $f:A\to\mathbb{R}$ אזי (f רציפה על a)$\iff$($\omega\left(f,a\right)=0$).

למה של קנטור: תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית יהי $M>0$ ותהא $f:K\to\mathbb{R}$ המקיימת $\forall k\in K.\omega\left(f,k\right)\le M$ אזי $\forall x\in K.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\omega\left(f,B_\delta\left(x\right)\cap K\right)<\omega_0+\varepsilon$.

כמעט לכל: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ויהי ψ פרידיקט אזי נאמר כי "ψ מתקיים כמעט על כל A" אם קיימת $E\subseteq A$ זניחה עבורה ψ מתקיים לכל $A\backslash E$.

סימון: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}=\left\{x\in P\mid\omega\left(f,x\right)\ge\varepsilon\right\}$.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה ויהי $\varepsilon>0$ אזי $B_{f,\varepsilon}$ קומפקטית.

למה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה תהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה תהא Π חלוקה ויהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $\left\{A\in\Pi\mid\left(A\cap B_{f,\frac{1}{k}}\neq\varnothing\right)\wedge\left(\omega\left(f,A\right)\ge\frac{1}{2k}\right)\right\}$ כיסוי של $B_{f,\frac{1}{k}}$.

קריטריון לבג לאינטגרביליות רימן בתיבה: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה ותהא $f:P\to\mathbb{R}$ חסומה אזי (f רציפה כמעט על כל P)$\iff$($f\in R\left(P\right)$).

קבוצה מדידת ז'ורדן: $E\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה עבורה ∂E זניחה.

טענה: תהיינה $E_1,E_2\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי
- ∂E_1 סגורה.
- $\partial\left(E_1\backslash E_2\right),\partial\left(E_1\cup E_2\right),\partial\left(E_1\cap E_2\right)\subseteq\partial E_1\cup\partial E_2$.

סימון: $J\left(\mathbb{R}^n\right)=\left\{E\subseteq\mathbb{R}^n\mid\text{ז'ורדן }E\right\}$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J$ אזי $A\backslash B,A\cup B,A\cap B\in J$.

פונקציית אפיון/אינדיקטור: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}:\mathbb{R}^{n}\to\{0,1\}$ כך $\chi_{A}\left(x\right)=\left\{ \begin{smallmatrix}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A \end{smallmatrix}\right.$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $\chi_{A}\in C\left(\text{int}\left(A\right)\right)$ וכן $\chi_{A}\in C\left(\mathbb{R}^{n}\backslash A\right)$.

אינטגרביליות רימן: תהא $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבה סגורה תהא $A\subseteq P$ חסומה ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ עבורה $f\cdot\chi_{A}\in R\left(P\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{P}f\cdot\chi_{A}$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה תהיינה $P_{1},P_{2}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תיבות סגורות עבורן $A\subseteq P_{1},P_{2}$ ותהא $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ אזי

- $\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{1}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(f\cdot\chi_{A}\in R\left(P_{2}\right)\right)$.
- $\int_{P_{1}}f\cdot\chi_{A}=\int_{P_{2}}f\cdot\chi_{A}$.

מידה/נפח של תיבה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $V\left(A\right)=\text{Vol}\left(A\right)=\int_{A}\mathrm{d}x$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ אזי

- יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $af+bg\in R\left(A\right)$ וכן $\int_{A}\left(af+bg\right)=a\int_{A}f+b\int_{A}g$.
- נניח כי $f\ge0$ אזי $\int_{A}f\ge0$.
- נניח כי $f\ge g$ אזי $\int_{A}f\ge\int_{A}g$.
- נניח כי $m\le f\le M$ אזי $m\text{Vol}\left(A\right)\le\int_{A}f\le M\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהא $f\in R\left(A\right)\cap R\left(B\right)$ אזי $f\in R\left(A\cap B\right)$ וכן $f\in R\left(A\cup B\right)$.

מסקנה: תהיינה $A,B\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן $\text{Vol}\left(A\cap B\right)=0$ אזי $\int_{A\cup B}f=\int_{A}f+\int_{B}f$.

משפט ערך הביניים: יהי $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תחום ותהא $f\in C\left(A,\mathbb{R}\right)$ אזי $\exists c\in A.\int_{A}f=f\left(c\right)\text{Vol}\left(A\right)$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ויהי $f\in R\left(A\right)$ אזי $\left|f\right|\in R\left(A\right)$ וכן $\left|\int_{A}f\right|\le\int_{A}\left|f\right|$.

טענה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ ותהיינה $f,g\in R\left(A\right)$ כמעט על כל A אזי $\int_{A}f=\int_{A}g$.

משפט: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\int_{\text{int}\left(A\right)}f=\int_{A}f=\int_{\overline{A}}f$.

טענה: תהיינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $\bigcup_{i=1}^{k}A_{i},\bigcap_{i=1}^{k}A_{i}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$.

מסקנה: תהיינה $A_{1}\ldots A_{k}\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ עבורן לכל $i\ne j$ מתקיים $\text{Vol}\left(A_{i}\cap A_{j}\right)=0$ אזי $\text{Vol}\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_{i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}\left(A_{i}\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(A+a\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right)\Longleftrightarrow\left(A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right)$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ותהא $a\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\text{Vol}\left(A\right)=\text{Vol}\left(A+a\right)$.

משפט יחידות פונקציית נפח: תהא $\nu:J\left(\mathbb{R}^{n}\right)\to\mathbb{R}_{\ge0}$ אדיטיבית אינווריאנטית להזזות עבורה $\nu\left(\left[0,1\right]^{n}\right)=1$ אזי $\nu=\text{Vol}$.

טענה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ חסומה אזי $T\left(A\right)$ חסומה.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ אזי $T\left(\partial A\right)=\partial\left(T\left(A\right)\right)$.

מסקנה: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $E\subseteq\mathbb{R}^{n}$ זניחה וחסומה אזי $T\left(E\right)$ זניחה וחסומה.

משפט: תהא $T\in\text{Hom}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אורתוגונלית ותהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ אזי $T\left(A\right)\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ וכן $\text{Vol}\left(T\left(A\right)\right)=\text{Vol}\left(A\right)$.

משפט פוביני: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ עבורה $\iint_{P\times Q}f$ קיים אזי $\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ קיימים ובפרט $\iint_{P\times Q}f=\int_{P}\int_{Q}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\int_{Q}\int_{P}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסקנה: תהיינה $P\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $Q\subseteq\mathbb{R}^{m}$ תיבות ותהא $f\in R\left(P\times Q\right)$ אזי $\int_{Q}f\left(a,y\right)\mathrm{d}y$ קיים כמעט לכל $a\in P$.

מסקנה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ חסומה תהיינה $\varphi_{1},\varphi_{2}:B\to\mathbb{R}$ תהא $A=\left\{ \left(x,y\right)\in B\times\mathbb{R}\mid\varphi_{1}\left(x\right)\le y\le\varphi_{2}\left(x\right)\right\}$ ותהא $f\in R\left(A\right)$ אזי $\int_{A}f=\int_{B}\int_{\varphi_{1}\left(x\right)}^{\varphi_{2}\left(x\right)}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

מסקנה: תהא $A\in J\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ תהא $A\subseteq\prod_{i=1}^{n}P_{i}$ תיבה אזי $A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{ y\right\} \right)\in J\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ כמעט לכל $y\in P_{n}$ ובפרט $\text{Vol}\left(A\right)=\int_{P_{n}}\text{Vol}\left(A\cap\left(\mathbb{R}^{n-1}\times\left\{ y\right\} \right)\right)\mathrm{d}y$.

שטח: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $S\left(D\right)=\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי $m\left(D\right)=\iint_{D}\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מומנט מסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי ציר x: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}y\cdot\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
- מומנט מסה לפי ציר y: $M_{x}\left(D\right)=\iint_{D}x\cdot\rho\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^{2}$ אזי $\left(\frac{M_{y}\left(D\right)}{m\left(D\right)},\frac{M_{x}\left(D\right)}{m\left(D\right)}\right)$.

נפח: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ אזי $V\left(E\right)=\iiint_{E}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי $m\left(E\right)=\iiint_{E}\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מומנט מסה: תהא $E\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהא $\rho:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}_{\ge0}$ צפיפות אזי

- מומנט מסה לפי המישור $\left\{ z=0\right\}$: $M_{xy}\left(E\right)=\iiint_{E}z\cdot\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

- מומנט מסה לפי המישור $\{y=0\}$: $M_{xz}(E)=\iiint_E y\cdot\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
- מומנט מסה לפי המישור $\{x=0\}$: $M_{yz}(E)=\iiint_E x\cdot\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

מרכז המסה: תהא $D\subseteq\mathbb{R}^2$ אזי $\left(\frac{M_{yz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xz}(E)}{m(E)},\frac{M_{xy}(E)}{m(E)}\right)$.

מקבילון: יהיו $v_1\ldots v_n\in\mathbb{R}^n$ אזי $\mathrm{Par}(v_1\ldots v_n)=\left\{\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i\mid\forall i\in[n].\alpha_i\in[0,1]\right\}$.

טענה: יהיו $v_1\ldots v_n\in\mathbb{R}^n$ אזי מתקיים $\mathrm{Vol}(\mathrm{Par}(v_1\ldots v_n))=\left|\det\begin{pmatrix}- & v_1 & -\\ & \vdots & \\ - & v_n & -\end{pmatrix}\right|$.

תומך: יהי $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום ותהא $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ אזי $\mathrm{supp}(f)=\overline{\{x\in\mathcal{U}\mid f(x)\neq0\}}$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $E\subseteq A$ אזי

- (E זניחה)$\Longleftarrow$($\varphi(E)$ זניחה).
- $((\mathrm{Vol}(E)=0)\wedge(\overline{E}\subseteq A))\Longleftarrow((\mathrm{Vol}(\varphi(E))=0)\wedge\left(\overline{\varphi(E)}\subseteq B\right))$.
- ((E ז'ורדן)$\wedge(\overline{E}\subseteq A)$)$\Longleftarrow$(($\overline{\varphi(E)}\subseteq B)\wedge$($\varphi(E)$ ז'ורדן)).

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R(B)$ אזי $(f\circ\varphi)|\det\mathcal{D}_\varphi|\in R(A)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R(B)$ אזי $(f\circ\varphi)|\varphi'|\in R(A)$ ובפרט $\int_B f=\int_A f(\varphi(t))|\varphi'|\,\mathrm{d}t$.

דיפאומורפיזם אלמנטרי: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ פתוחות וחסומות אזי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם עבורו קיימת $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $\varphi(x)=(x_1,\ldots,\psi(x_i),\ldots x_n)$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם אלמנטרי ותהא $f\in R(B)$ אזי $\int_B f=\int_A f(\varphi(t))|\det\mathcal{D}_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B,C\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהיו $\varphi:B\to C$, $\psi:A\to B$ דיפאומורפיזם אלמנטריים ותהא $f\in R(A)$ אזי $\int_C f=\int_A f((\varphi\circ\psi)(t))|\det\mathcal{D}_{\varphi\circ\psi}(t)|\,\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ויהי $a\in A$ אזי קיימת $\mathcal{O}\subseteq A$ סביבה של a וכן $\psi_1\ldots\psi_m$ דיפאומורפיזם אלמנטריים עבורם $\varphi=\psi_1\circ\ldots\circ\psi_m$ על $\mathcal{O}$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם ותהא $f\in R(B)$ אזי $\int_B f=\int_A f(\varphi(t))|\det\mathcal{D}_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות יהי $\varphi:A\to B$ דיפאומורפיזם תהא $E\subseteq A$ עבורה $\overline{E}\subseteq A$ ותהא $f\in R(\varphi(E))$ אזי $(f\circ\varphi)|\det\mathcal{D}_\varphi|\in R(E)$ ובפרט $\int_{\varphi(E)}f=\int_E f(\varphi(t))|\det\mathcal{D}_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.

משפט: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi(A\backslash E)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם בעל דיפרנציאל חסום על $A\backslash E$ ותהא $f\in R(S)$ אזי $(f\circ\varphi)|\det\mathcal{D}_\varphi|\in R(A\backslash E)$ ובפרט $\int_B f=\int_{A\backslash E}f(\varphi(t))|\det\mathcal{D}_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.

מסקנה: תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחות וחסומות תהא $\varphi:A\to B$ בעל דיפרנציאל חסום תהיינה $E\subseteq A$, $S\subseteq B$ זניחות עבורן $A\backslash E,S\backslash B$ פתוחות וכן $\varphi(A\backslash E)=S\backslash B$ כמו כן φ דיפאומורפיזם על $A\backslash E$ ותהא $f\in R(S)$ אזי $(f\circ\varphi)|\det\mathcal{D}_\varphi|\in R(A)$ ובפרט $\int_B f=\int_A f(\varphi(t))|\det\mathcal{D}_\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.