טופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $X, \varnothing \in \mathcal{T}$.
- תהיינה $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ אזי $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$.
- תהיינה $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{T}$ אזי $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

מרחב טופולוגי (מ"ט): תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ טופולוגיה על X אזי $(X, \mathcal{T})$.

קבוצה פתוחה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי אזי $U \subseteq X$ המקיימת $U \in \mathcal{T}$.

קבוצה סגורה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופולוגי אזי $E \subseteq X$ המקיימת $X \backslash E \in \mathcal{T}$.

טענה: תהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $X, \varnothing \in \mathcal{T}$ וכן $(\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}).\forall \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ אזי ($\mathcal{T}$ טופולוגיה)$\Longleftrightarrow$(לכל $U, V \in \mathcal{T}$ מתקיים $U \cap V \in \mathcal{T}$).

הטופולוגיה הטריוואלית: תהא X קבוצה אזי $\{X, \varnothing\}$.

הטופולוגיה הבדידה/הדיסקרטית: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{P}(X)$.

הטופולוגיה המושרית ממרחב מטרי: יהי (X, ρ) מרחב מטרי אזי $\mathcal{T}(X, \rho) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists r > 0. B_r(x) \subseteq U\}$.

טופולוגיה מטריזבילית: מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T}_X)$ עבורו קיים (X, ρ) מרחב מטרי המקיים $\mathcal{T}(X, \rho) = \mathcal{T}_X$.

הטופולוגיה הקו־סופית: תהא X קבוצה אזי $\{A \subseteq X \mid |X \backslash A| < \aleph_0\} \cup \{\varnothing\}$.

משפט: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{C} = \{E \subseteq X \mid X \backslash E \in \mathcal{T}\}$ אזי
- $X, \varnothing \in \mathcal{C}$.
- תהיינה $\{E\}_{\alpha \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$ אזי $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \in \mathcal{T}$.
- תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{C}$ אזי $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{T}$.

בסיס לטופולוגיה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ המקיימת
- $\bigcup \mathcal{B} = X$.
- תהיינה $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ עבורן $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ ותהא $x \in B_1 \cap B_2$ אזי קיימת $B_3 \in \mathcal{B}$ עבורה $x \in B_3$ וכן $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

הטופולוגיה הנוצרת מבסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי
$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U. \exists B \in \mathcal{B}. (x \in B) \wedge (B \subseteq U)\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ טופולוגיה על X.

סימון: $\mathcal{B}_E = \{(a,b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_{\text{Sorg}} = \{[a,b) \mid a < b\}$ וכן $\mathcal{B}_K = \mathcal{B}_E \cup \left\{(a,b) \backslash \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\} \mid a < b\right\}$.

טענה: $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_{\text{Sorg}}, \mathcal{B}_K$ בסיסים של $\mathbb{R}$.

הטופולוגיה האוקלידית/הסטנדרטית: $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_E))$.

הישר של זורגנפריי: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}} = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{Sorg}}))$.

טופולוגיית־K: $\mathbb{R}_K = (\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathcal{B}_K))$.

משפט אפיון שקול לטופולוגיה נוצרת: יהי $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subseteq X \mid \exists A \subseteq \mathcal{B}. U = \bigcup A\}$.

מסקנה: יהיו $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ בסיסים עבורם $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$ וכן $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_1)$ אזי $\mathcal{T}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$.

טופולוגיה עדינה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_2$.

טופולוגיה גסה לטופולוגיה: תהא X קבוצה ותהיינה $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ טופולוגיות על X עבורן $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_1$.

טענה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ עבורו $\forall U \in \mathcal{T}. \forall x \in U. \exists A \in \mathcal{A}. (x \in A) \wedge (A \subseteq U)$ אזי $\mathcal{A}$ בסיס של $\mathcal{T}$.

טענה: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי $\{(a,b) \mid a < b\} \cup \{[a,b) \mid \forall x \in X. a \le x\} \cup \{(a,b] \mid \forall x \in X. x \le b\}$ בסיס.

טופולוגיית הסדר: תהא X קבוצה בעלת יחס סדר מלא אזי
$\mathcal{T}(\{(a,b) \mid a < b\} \cup \{[a,b) \mid \forall x \in X. a \le x\} \cup \{(a,b] \mid \forall x \in X. x \le b\})$.

תת בסיס: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עבורה $\bigcup \mathcal{S} = X$.

הטופולוגיה הנוצרת מתת־בסיס: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי
$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \left\{U \subseteq X \mid \exists A_1 \ldots A_k \subseteq \mathcal{S}. U = \bigcup \left(\bigcap_{i=1}^k A\right)\right\}$.

למה: תהא X קבוצה ויהי $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ תת־בסיס אזי $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ טופולוגיה על X.

טופולוגיית זריצקי: יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\mathcal{T}(\{\{a \in \mathbb{F}^n \mid f(a) \neq 0\} \mid f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]\})$.

סביבה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ויהי $x \in X$ אזי $U \in \mathcal{T}$ עבורה $x \in U$.

פנים של קבוצה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{int}(A) = \mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \in \mathcal{T}}} U$.

סגור של קבוצה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\text{cl}(A) = \overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq E \\ E^{\mathcal{C}} \in \mathcal{T}}} E$.

שפה של קבוצה: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A \subseteq X$ אזי $\partial A = \overline{A} \backslash \text{int}(A)$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $A\subseteq X$ ויהי $x\in X$ התב"ש
- $x\in\overline{A}$.
- לכל $U\in\mathcal{T}$ המקיים $x\in U$ מתקיים $U\cap A\neq\varnothing$.
- יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי לכל $B\in\mathcal{B}$ המקיים $x\in B$ מתקיים $B\cap A\neq\varnothing$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\partial A=\overline{A}\cap\left(\overline{X\backslash A}\right)$.

מסקנה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט תהא $A\subseteq X$ ויהי $x\in X$ אזי $(x\in\partial A)\Longleftrightarrow$(לכל $U\in\mathcal{T}$ המקיימת $x\in U$ מתקיים $U\cap A\neq\varnothing$ וכן $U\cap A^{\mathcal{C}}\neq\varnothing$).

קבוצה צפופה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט אזי $A\subseteq X$ המקיימת $X=\overline{A}$.

נקודת הצטברות: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $x\in X$ עבורו לכל סביבה U של x מתקיים $U\cap A\backslash\{x\}\neq\varnothing$.

גבול: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $x\in X^{\mathbb{N}}$ אזי $y\in X$ עבורו לכל סביבה U של y החל ממקום מסוים $x_n\in U$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $A\subseteq\left\{x\in X\mid x \text{ קיימת } a\in A^{\mathbb{N}} \text{ המתכנסת אל }\right\}\subseteq\overline{A}$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $A\cup\{x\in X\mid x \text{ נקודת הצטברות של } A\}=\overline{A}$.

מסקנה: תהא $A\subseteq X$ אזי (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($\{x\in X\mid x \text{ נקודת הצטברות של } A\}\subseteq A$).

פונקציה רציפה בנקודה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $x\in X$ אזי $f:X\to Y$ עבורה לכל $\mathcal{V}\subseteq Y$ סביבה של $f(x)$ קיימת סביבה $\mathcal{U}\subseteq X$ של x עבורה $f(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{V}$.

פונקציה רציפה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים אזי $f:X\to Y$ עבורה $\forall U\in\mathcal{S}.f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$.

משפט: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f:X\to Y$ התב"ש
- f רציפה.
- לכל $U\subseteq Y$ פתוחה מתקיים כי $f^{-1}(U)$ פתוחה.
- לכל $E\subseteq Y$ סגורה מתקיים כי $f^{-1}(E)$ סגורה.
- לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right)\subseteq\overline{f(A)}$.
- לכל $x\in X$ הפונקציה f רציפה ב־x.

הומיאומורפיזם: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים אזי $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל עבורה f^{-1} רציפה.

טענה: יהיו $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{S})$ מ"טים ותהא $f:X\to Y$ חח"ע ועל התב"ש
- f הומיאומורפיזם.
- תהא $U\subseteq Y$ אזי (U פתוחה)$\Longleftrightarrow$($f^{-1}(U)$ פתוחה).
- תהא $E\subseteq Y$ אזי (E סגורה)$\Longleftrightarrow$($f^{-1}(E)$ סגורה).
- לכל $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(\overline{A}\right)=\overline{f(A)}$.

הטופולוגיה המושרית על קבוצה מפונקציה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי $\mathcal{T}_X=\left\{f^{-1}(U)\mid U\in\mathcal{S}\right\}$.

טענה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי $(X,\mathcal{T}_X)$ מ"ט.

מסקנה: תהא X קבוצה יהי $(Y,\mathcal{S})$ מ"ט ותהא $f:X\to Y$ אזי f רציפה על $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{S})$.

תת מרחב טופולוגי (ת"מ): יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A=\left\{U\subseteq A\mid\exists V\in\mathcal{T}.U=\mathrm{Id}^{-1}(V)\right\}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $(A,\mathcal{T}_A)$ מ"ט.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ותהא $A\subseteq X$ אזי $\mathcal{T}_A=\{A\cap U\mid U\in\mathcal{T}\}$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט ויהי $\mathcal{B}$ בסיס של $\mathcal{T}$ אזי $\mathcal{B}_A=\{A\cap B\mid B\in\mathcal{B}\}$ בסיס של $\mathcal{T}_A$.

טענה: יהי $A\subseteq X$ אזי
- תהא $U\subseteq A$ אזי (U פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}_A$)$\Longleftrightarrow$(קיימת V פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}$ עבורה $V\cap A=U$).
- תהא $E\subseteq A$ אזי (E סגורה ביחס ל־$\mathcal{T}_A$)$\Longleftrightarrow$(קיימת F פתוחה ביחס ל־$\mathcal{T}$ עבורה $F\cap A=E$).
- תהא $D\subseteq A$ אזי $\mathrm{cl}_X(D)\cap A=\mathrm{cl}_A(D)$.
- תהא $D\subseteq A$ אזי $\mathrm{int}_X(D)\cap A\subseteq\mathrm{int}_A(D)$.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T}_X)$ מ"ט ויהי $(Y,\mathcal{T}_Y)$ ת"מ אזי
- נניח כי Y פתוחה ב־X, תהא $A\subseteq Y$ פתוחה ב־Y אזי A פתוחה ב־X.
- נניח כי Y סגורה ב־X, תהא $A\subseteq Y$ סגורה ב־Y אזי A סגורה ב־X.

טענה: יהיו X,Z מ"ט יהי $Y\subseteq Z$ ת"מ ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f:X\to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X,Y מ"ט יהי $A\subseteq X$ ת"מ ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f_{\restriction_A}:A\to Y$ רציפה.

טענה: יהיו X, Z מ"ט יהי $Y \subseteq Z$ ת"מ ותהא $f : X \to Y$ רציפה עבורה $f(X) \subseteq Z$ אזי $f : X \to Z$ רציפה.

טענה: יהיו X, Z מ"ט ותהא $f : X \to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(קיימות $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{P}(X)$ פתוחות עבורן $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = X$ וכן $f_{\restriction_{U_\alpha}}$ רציפה לכל $\alpha \in \Lambda$).

טענה: יהיו X, Y, Z מ"ט תהא $f : X \to Y$ רציפה ותהא $g : Y \to Z$ רציפה $g \circ f : X \to Z$ רציפה.

משפט למת ההדבקה: יהיו X, Y מ"ט תהיינה $A, B \subseteq X$ סגורות עבורן $X = A \cup B$ תהא $f : A \to Y$ רציפה ותהא $g : B \to Y$ רציפה עבורן $f = g$ על $A \cap B$ אזי $f \cup g : X \to Y$ רציפה.

סימון: יהיו X, Y מ"ט ותהא $f : X \to Y$ חח"ע ורציפה נגדיר $\hat{f} : X \to f(X)$ כך $\hat{f} = f$.

שיכון: יהיו X, Y מ"ט אזי $f : X \to Y$ חח"ע ורציפה עבורה $\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

העתקת מנה: יהיו X, Y מ"ט אזי $f : Y \to X$ פונקציה על המקיימת $\left(f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_Y\right) \Longleftrightarrow (\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X) .\forall \mathcal{U} \subseteq X$.

הערה: יהיו X, Y מ"ט ותהא $f : Y \to X$ העתקת מנה אזי f רציפה.

טענה: יהיו X, Y, Z מ"ט תהא $f : X \to Y$ העתקת מנה ותהא $g : Y \to Z$ העתקת מנה אזי $g \circ f : X \to Z$ העתקת מנה.

משפט: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f : X \to A$ על אזי קיימת ויחידה טופולוגיה $\mathcal{T}_A$ על A עבורה f העתקת מנה.

טופולוגיית המנה המושרית: יהי X מ"ט תהא A קבוצה ותהא $f : X \to A$ על אזי טופולוגיה $\mathcal{T}_A$ על A עבורה f העתקת מנה.

מרחב המנה: יהי X מ"ט יהי $\sim$ יחס שקילות מעל X ונגדיר $f : X \to X/\sim$ כך $f(x) = [x]_\sim$ אזי $X/\sim$ מצויידת עם טופולוגיית המנה.

משפט: תהא $f : X \to Y$ העתקת מנה ותהא $g : X \to Z$ עבורה $g_{\restriction_{f^{-1}(\{y\})}}$ קבועה לכל $y \in Y$ אזי קיימת $h : Y \to Z$ עבורה

- $g = h \circ f$.
- (h רציפה)$\Longleftrightarrow$(g רציפה).
- (h העתקת מנה)$\Longleftrightarrow$(g העתקת מנה).

מסקנה: תהא $f : X \to Y$ העתקת מנה ותהא $g : X \to Z$ עבורה $g_{\restriction_{f^{-1}(\{y\})}}$ קבועה לכל $y \in Y$ אזי

- ($g \circ f^{-1}$ רציפה)$\Longleftrightarrow$(g רציפה).
- ($g \circ f^{-1}$ העתקת מנה)$\Longleftrightarrow$(g העתקת מנה).

מסקנה: תהא $g : X \to Z$ רציפה ועל ותהא $f : X \to \left\{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\right\}$ העתקת מנה אזי ($g \circ f^{-1}$ הומיאומורפיזם)$\Longleftrightarrow$(g העתקת מנה).

קבוצה רוויה: תהא $f : X \to Y$ אזי $A \subseteq X$ עבורה לכל $y \in Y$ אם $A \cap f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$ אז $f^{-1}(\{y\}) \subseteq A$.

טענה: תהא $f : X \to Y$ רציפה אזי (f העתקת מנה)$\Longleftrightarrow$(f על ולכל $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$ מתקיים כי $f(\mathcal{U})$ פתוחה ורוויה).

העתקה פתוחה: העתקה $f : X \to Y$ עבורה לכל $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_X$ מתקיים כי $f(\mathcal{U})$ פתוחה.

העתקה סגורה: העתקה $f : X \to Y$ עבורה לכל $E \subseteq X$ סגורה מתקיים כי $f(E)$ סגורה.

טענה: תהא $f : X \to Y$ רציפה פתוחה ועל אזי f העתקת מנה.

טענה: תהא $f : X \to Y$ רציפה סגורה ועל אזי f העתקת מנה.

מכפלה של קבוצות: תהיינה $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ קבוצות אזי $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \left\{f : \Lambda \to \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha\right\}$.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$מ"טים אזי $\mathcal{B}_{\text{box}} = \left\{\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{U}_\alpha \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\right\}$ בסיס של $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

טופולוגיית התיבה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{box}} = \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\text{box}})$.

הטלה: תהיינה $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ קבוצות אזי $\pi_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\beta$ המוגדרת $\pi_\beta(f) = f(\beta)$.

טענה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$מ"טים אזי $\mathcal{S}_{\text{box}} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \left\{\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \mid \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\right\}$ תת־בסיס של $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

טופולוגיית המכפלה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$מ"טים אזי $\mathcal{T}_{\text{box}} = \mathcal{T}(\mathcal{S}_{\text{box}})$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$מ"טים באשר $|\Lambda| < \aleph_0$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} = \mathcal{T}_{\text{box}}$.

מסקנה: יהיו $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$מ"טים באשר $|\Lambda| \geq \aleph_0$ אזי $\mathcal{T}_{\text{prod}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{box}}$.

משפט: תהא $f : Y \to \left(\prod_\alpha X_\alpha, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$($\pi_\alpha \circ f$ רציפה לכל α).

טענה: תהא $|\Lambda| \geq \aleph_0$ אזי $\left(\mathbb{R}^\Lambda, \mathcal{T}_{\text{box}}\right)$ אינה מטריזבילית.

טענה: תהא $|\Lambda| \geq \aleph_0$ אזי $\left(\mathbb{R}^\Lambda, \mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ אינה מטריזבילית.

תכונה טופולוגית: תכונה P של מ"ט באשר לכל X, Y מ"ט עבורן קיים $f : X \to Y$ הומיאומורפיזם מתקיים (X מקיים P)$\Longleftrightarrow$(Y מקיים P).

טענה: מטריזביליות הינה תכונה טופולוגית.

הפרדה של מרחב טופולוגי: יהי $(X, \mathcal{T})$ מ"ט אזי $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ באשר $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}$ וכן $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$ וכן $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = X$ וכן $\mathcal{U}, \mathcal{V} \neq \varnothing$.

מרחב טופולוגי קשיר: מרחב טופולוגי $(X, \mathcal{T})$ עבורו לא קיימת הפרדה.

מרחב טופולוגי אי־קשיר: מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ עבורו קיימת הפרדה.

משפט: יהי $f:X\to Y$ הומיאומורפיזם אזי (X קשיר)$\Longleftrightarrow$(Y קשיר).

מסקנה: קשירות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מרחב מטרי התב"ש

- X אי־קשיר.
- קיימות $E,F\subseteq X$ סגורות זרות לא ריקות עבורן $X=E\cup F$.
- קיימת $D\in\mathcal{P}(X)\backslash\{X,\varnothing\}$ סגורה ופתוחה.

טענה: יהי X מ"ט קשיר ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קשירה.

טענה: יהי X מ"ט ויהי $Y\subseteq X$ תת־מרחב אזי (Y אי־קשיר)$\Longleftrightarrow$(קיימות $H,K\in\mathcal{P}(X)\backslash\{X,\varnothing\}$ עבורן $Y=H\cup K$ וכן $\overline{H}\cap K=H\cap\overline{K}=\varnothing$).

טענה: תהא $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ הפרדה של X ויהי $Y\subseteq X$ תת־מרחב קשיר אזי $(Y\subseteq U)\oplus(Y\subseteq\mathcal{V})$.

טענה: תהיינה $A,B\subseteq X$ באשר A קשירה וכן $A\subseteq B\subseteq\overline{A}$ אזי B קשירה.

מסקנה: תהא $A\subseteq X$ קשירה אזי $\overline{A}$ קשירה.

טענה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A\in\mathcal{A}$ מתקיים כי A קשירה וכן $\bigcap\mathcal{A}\neq\varnothing$ וכן $\bigcup\mathcal{A}=X$ אזי X קשיר.

מסקנה: תהיינה $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}(X)\backslash\{\varnothing\}$ באשר X_n קשיר וכן $X_n\cap X_{n+1}\neq\varnothing$ לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי X קשיר.

מסקנה: $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית קשיר.

מסקנה: $(-1,1)$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ סטנדרטי הינו קשיר.

מסקנה: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ באשר $a<b$ אזי $(a,b),[a,b],(a,b],[a,b)$ קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ סטנדרטי.

מסקנה: יהי $a\in\mathbb{R}$ אזי $(a,\infty),[a,\infty),(-\infty,\infty),(-\infty,a],(-\infty,a)$ קשירים עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}$ סטנדרטי.

טענה: יהי $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ עם $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ אזי ($\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ קשיר)$\Longleftrightarrow$(לכל $\alpha\in\Lambda$ המרחב X_α קשיר).

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}_+$ אזי $\mathbb{R}^n$ קשיר עם הטופולוגיה הסטנדרטית.

מסילה: יהי X מ"ט ויהיו $x,y\in X$ אזי $\gamma:[0,1]\to X$ רציפה עבורה $f(0)=x$ וכן $f(1)=y$.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית: מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ עבורו לכל $x,y\in X$ קיימת מסילה מ־x ל־y.

טענה: יהי X מ"ט קשיר מסילתית אזי X קשיר.

למה: יהי X מ"ט קשיר מסילתית ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קשיר מסילתית.

מסקנה: קשירות מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי $\mathbb{C}^n$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^{2n}$ ויהי $p:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ אזי $\mathbb{C}^n\backslash\{x\in\mathbb{C}^n\mid p(x)=0\}$ קשירה מסילתית.

מסקנה: יהי $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית על $\mathbb{C}^{n^2}$ אזי $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ תת־מרחב קשיר מסילתית.

סימון: יהי X מ"ט ויהיו $x,y\in X$ אזי ($x\sim_{\text{קשיר}}y$)$\Longleftrightarrow$(קיימת $D\subseteq X$ קשירה עבורה $x,y\in D$).

טענה: יהי X מ"ט אזי $\sim_{\text{קשיר}}$ יחס שקילות מעל X.

רכיבי קשירות: יהי X מ"ט אזי $X/\sim_{\text{קשיר}}$.

סימון: יהי X מ"ט ויהיו $x,y\in X$ אזי ($x\sim_{\text{קשיר מסילתית}}y$)$\Longleftrightarrow$(קיימת מסילה מ־$x$ ל־y).

טענה: יהי X מ"ט אזי $\sim_{\text{קשיר מסילתית}}$ יחס שקילות מעל X.

רכיבי קשירות מסילתית: יהי X מ"ט אזי $X/\sim_{\text{קשיר מסילתית}}$.

משפט: יהיו $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ רכיבי הקשירות של X אזי

- לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי D_α קשירה.
- יהיו $\alpha,\beta\in\Lambda$ באשר $\alpha\neq\beta$ אזי $D_\alpha\cap D_\beta=\varnothing$.
- מתקיים $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}D_\alpha$.
- לכל $Y\subseteq X$ תת־מרחב קשיר קיים ויחיד $\alpha\in\Lambda$ עבורו $Y\subseteq D_\alpha$.

משפט: יהיו $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ רכיבי הקשירות המסילתית של X אזי

- לכל $\alpha\in\Lambda$ מתקיים כי D_α קשירה.
- יהיו $\alpha,\beta\in\Lambda$ באשר $\alpha\neq\beta$ אזי $D_\alpha\cap D_\beta=\varnothing$.
- מתקיים $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}D_\alpha$.
- לכל $Y\subseteq X$ תת־מרחב קשיר קיים ויחיד $\alpha\in\Lambda$ עבורו $Y\subseteq D_\alpha$.

מרחב טופולוגי קשיר מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x\in X$ המקיים לכל סביבה $\mathcal{U}\subseteq X$ של x קיימת סביבה $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ קשירה עבורה $x\in\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי קשיר מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ מתקיים כי X קשיר מקומית ב־x.

טענה: קשירות מקומית הינה תכונה טופולוגית.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית נקודתית: יהי X מ"ט אזי $x\in X$ המקיים לכל סביבה $\mathcal{U}\subseteq X$ של x קיימת סביבה $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ קשירה מסילתית עבורה $x\in\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ מתקיים כי X קשיר מסילתית מקומית ב־x.

טענה: קשירות מקומית מסילתית הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X קשיר מקומית)$\Longleftrightarrow$(לכל $\mathcal{U}\in\mathcal{T}$ ולכל D רכיב קשירות של $\mathcal{U}$ מתקיים $D\in\mathcal{T}$).

טענה: יהי X מ"ט קשיר וקשיר מסילתית מקומית אזי X קשיר מסילתית.

בסיס סביבות בן מנייה בנקודה: יהי X מ"ט אזי $x\in X$ עבורו קיימות $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$ סביבות של x עבורן לכל סביבה $\mathcal{V}$ של x קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $\mathcal{U}_n\subseteq\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה הראשונה: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ קיים בסיס סביבות בן מנייה ב־x.

מסקנה: יהי X מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי X מניה I.

משפט: יהי X מ"ט מניה I ותהא $A\subseteq X$ תת־קבוצה אזי $\overline{A}=\left\{x\in X\mid x\text{ המתכנסת אל } a\in A^{\mathbb{N}} \text{ קיימת}\right\}$.

משפט: יהיו X,Y מ"טים באשר X מניה I ותהא $f:X\to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{x_n\}\subseteq X$ המתכנסת ל־a עבור $a\in X$ מתקיים כי $\{f(x_n)\}$ מתכנסת ל־$f(a)$).

מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה השנייה: מרחב טופולוגי X עבורו קיים בסיס לכל היותר בן מנייה היוצר את $\mathcal{T}$.

מסקנה: יהי X מ"ט מניה II אזי X מניה I.

טענה: יהי X מ"ט מניה I ויהי $A\subseteq X$ תת־מרחב אזי A מניה I.

טענה: יהי X מ"ט מניה II ויהי $A\subseteq X$ תת־מרחב אזי A מניה II.

טענה: יהי X מ"ט מניה I ותהא $f:X\to Y$ רציפה ופתוחה אזי $f(X)$ מניה I.

מסקנה: מניה I הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט מניה II ותהא $f:X\to Y$ רציפה ופתוחה אזי $f(X)$ מניה II.

מסקנה: מניה II הינה תכונה טופולוגית.

מרחב טופולוגי ספרבילי: מרחב טופולוגי X עבורו קיימת $A\subseteq X$ צפופה בת מנייה.

מרחב טופולוגי לינדלוף: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{T}$ המקיימים $\bigcup\mathcal{U}_\alpha=X$ קיימת $f:\mathbb{N}\to\Lambda$ עבורה $\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{U}_{f(i)}=X$.

טענה: יהי X מ"ט מניה II אזי X לינדלוף וספרבילי.

למה: יהי $\mathcal{B}$ בסיס של $(X,\mathcal{T})$ אזי (X לינדלוף)$\Longleftrightarrow$(לכל $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\subseteq\mathcal{B}$ המקיימים $\bigcup\mathcal{B}_\alpha=X$ קיימת $f:\mathbb{N}\to\Lambda$ עבורה $\bigcup_{i=0}^{\infty}\mathcal{B}_{f(i)}=X$).

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ לינדלוף.

טענה: יהי X מ"ט ספרבילי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ ספרבילי.

מסקנה: ספרביליות הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט לינדלוף ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ לינדלוף.

מסקנה: לינדלוף הינה תכונה טופולוגית.

טענה: יהי X מ"ט ספרבילי ותהא $A\subseteq X$ פתוחה אזי A ספרבילי.

טענה: יהי X מ"ט לינדלוף ותהא $E\subseteq X$ סגורה אזי E לינדלוף.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים מניה I באשר $|\Lambda|\le\aleph_0$ אזי $\left(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מניה I.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים מניה II באשר $|\Lambda|\le\aleph_0$ אזי $\left(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ מניה II.

מסקנה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים ספרבילים באשר $|\Lambda|\le\aleph_0$ אזי $\left(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}}\right)$ ספרבילי.

מרחב טופולוגי T_0: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x,y\in X$ שונים קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $y\notin\mathcal{U}$ או קיימת סביבה $\mathcal{V}$ של y עבורה $x\notin\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי T_1: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x,y\in X$ שונים קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x עבורה $y\notin\mathcal{U}$ וגם קיימת סביבה $\mathcal{V}$ של y עבורה $x\notin\mathcal{V}$.

מרחב טופולוגי T_2/האוסדורף: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x,y\in X$ שונים קיימת סביבה $\mathcal{U}$ של x וכן סביבה $\mathcal{V}$ של y עבורן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

מסקנה: T_0,T_1,T_2 הינן תכונות טופולוגיות.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_1 אזי X מרחב טופולוגי T_0.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_2 אזי X מרחב טופולוגי T_1.

טענה: יהי X מ"ט מושרה ממרחב מטרי אזי X מרחב T_2.

טענה: תהיינה $\mathcal{T},\mathcal{S}$ טופולוגיות על X באשר $\mathcal{S}$ עדינה מ־$\mathcal{T}$ וכן $(X,\mathcal{T})$ מרחב T_i אזי $(X,\mathcal{S})$ מרחב T_i.

מסקנה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ האוסדורף.

טענה: יהי X מ"ט T_i ויהי $A\subseteq X$ תת־מרחב אזי A מרחב T_i.

טענה: יהיו $\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha\in\Lambda}$ מ"טים אזי (X_α מרחב T_i לכל $\alpha\in\Lambda$)$\Longleftrightarrow$($(\prod X_\alpha,\mathcal{T}_{\text{prod}})$ מרחב T_i).

הישר עם הראשית הכפולה: תהא $\mathbb{R}\times\{0,1\}$ עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}^2$ הסטנדרטית ויהי $\sim=\text{Id}\cup\left\{\left(\left(\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}a\\1\end{smallmatrix}\right)\right)\mid a\neq 0\right\}$ יחס שקילות על $\mathbb{R}\times\{0,1\}$ אזי $^{\mathbb{R}\times\{0,1\}}/_{\sim}$ עם טופולוגיית המנה.

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט אזי ($\mathcal{T}$ הוא T_1)$\Longleftrightarrow$($\{x\}$ קבוצה סגורה לכל $x\in X$).

טענה: יהי $(X,\mathcal{T})$ מ"ט אזי ($\mathcal{T}$ הוא T_1)$\Longleftrightarrow$(לכל $A\subseteq X$ מתקיים $A=\bigcap_{\substack{A\subseteq\mathcal{U}\\ \mathcal{U}\in\mathcal{T}}}\mathcal{U}$).

טענה: יהי X מ"ט האוסדורף ותהא $\{x_n\}\subseteq X$ סדרה מתכנסת אזי קיים ויחיד $y\in X$ עבורו $\{x_n\}$ מתכנסת ל־y.

טענה: יהי X מ"ט T_1 תהא $A\subseteq X$ ויהי $x\in X$ אזי (x נקודת הצטברות של A)$\Longleftrightarrow$(לכל $\mathcal{U}$ סביבה של x מתקיים $|A\cap\mathcal{U}|\geq\aleph_0$).

טענה: יהי X מ"ט אזי (X מרחב האוסדורף)$\Longleftrightarrow$($\{(a,a)\mid a\in X\}$ קבוצה סגורה).

מרחב טופולוגי רגולרי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $x\in X$ ולכל $E\subseteq X$ סגורה באשר $x\notin E$ קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ עבורן $x\in\mathcal{U}$ וכן $E\subseteq\mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

מרחב טופולוגי נורמלי: מרחב טופולוגי X עבורו לכל $E,F\subseteq X$ סגורות באשר $E\cap F=\varnothing$ קיימות $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathcal{T}$ עבורן $E\subseteq\mathcal{U}$ וכן $F\subseteq\mathcal{V}$ וכן $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\varnothing$.

מרחב טופולוגי T_3: מרחב טופולוגי X רגולרי וכן T_1.

מרחב טופולוגי T_4: מרחב טופולוגי X נורמלי וכן T_1.

מסקנה: T_3,T_4 הינן תכונות טופולוגיות.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_3 אזי X מרחב טופולוגי T_2.

מסקנה: יהי X מרחב טופולוגי T_4 אזי X מרחב טופולוגי T_3.

טענה: $\mathbb{R}_{\text{Sorg}}$ הינו T_4.

סימון: תהיינה $\mathcal{U},\mathcal{V}\subseteq X$ עבורן $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ וכן $\overline{\mathcal{V}}\subseteq\mathcal{U}$ אזי $\mathcal{V}\Subset\mathcal{U}$.

טענה: יהי X מ"ט אזי (X רגולרי)$\Longleftrightarrow$(לכל $x\in X$ ולכל $\mathcal{U}\subseteq X$ סביבה של x קיימת סביבה $\mathcal{V}$ של x עבורה $\mathcal{V}\Subset\mathcal{U}$).

טענה: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי)$\Longleftrightarrow$(לכל $E\subseteq X$ סגורה ולכל $\mathcal{U}\subseteq X$ פתוחה באשר $E\subseteq\mathcal{U}$ קיימת $\mathcal{V}\subseteq X$ פתוחה עבורה $E\subseteq\mathcal{V}\Subset\mathcal{U}$).

משפט הלמה של אוריסון: יהי X מ"ט אזי (X נורמלי)$\Longleftrightarrow$(לכל $A,B\subseteq X$ סגורות וזרות ולכל $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ קיימת $f:X\to[a,b]$ רציפה עבורה $f_{\restriction_A}=a$ וכן $f_{\restriction_B}=a$).