משפט: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי לא קיימת $\text{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $\left\{A_i\right\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי $\text{Vol}_n\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Vol}_n\left(A_i\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)$.

קבוצות חופפות בחלקים: $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ עבורן קיים $k\in\mathbb{N}$ קיימות $X_1\ldots X_k,Y_1\ldots Y_k\subseteq\mathbb{R}^n$ וקיימות $\varphi_1\ldots\varphi_k$ איזומטריות המקיימות $X=\biguplus_{i=1}^{k}X_i$ וכן $Y=\biguplus_{i=1}^{k}Y_i$ וכן $\forall j\in[k].Y_j=\varphi_j\left(X_j\right)$.

סימון: תהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חופפות בחלקים אזי $X\equiv Y$.

משפט פרדוקס בנך־טרסקי: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1,2\right\}$ ותהיינה $X,Y\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומות עבורן $\text{int}\left(X\right)\neq\varnothing$ וכן $\text{int}\left(Y\right)\neq\varnothing$ אזי $X\equiv Y$.

מסקנה: יהי $n\in\mathbb{N}\backslash\left\{0,1,2\right\}$ אזי לא קיימת $\text{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(A\uplus B\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)+\text{Vol}_n\left(B\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)$.

משפט בנך: יהי $n\in\left\{1,2\right\}$ אזי קיימת $\text{Vol}_n:\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)\to[0,\infty]$ עבורה

- $\text{Vol}_n\left([0,1]^n\right)=1$.
- תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(A\uplus B\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)+\text{Vol}_n\left(B\right)$.
- תהא $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה ותהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי $\text{Vol}_n\left(\varphi\left(A\right)\right)=\text{Vol}_n\left(A\right)$.

אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה ותהיינה $A,B\in\mathcal{A}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{A}$.

אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

σ־אלגברה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{A}$.
- $\forall E\in\mathcal{A}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{A}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

מסקנה: תהא $\mathcal{A}$ σ־אלגברה אזי $\mathcal{A}$ אלגברה.

σ־אידיאל: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ המקיימת

- $X\notin\mathcal{I}$.
- $\forall A\in\mathcal{I}.\forall B\subseteq A.B\in\mathcal{I}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{A}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{A}$.

טענה: תהיינה $\left\{\mathcal{A}_\alpha\right\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ σ־אלגבראות אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$ σ־אלגברה.

σ־אלגברה נוצרת: תהא X קבוצה תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ ותהיינה $\left\{\mathcal{A}_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל X המכילות את A אזי $\sigma\left(A\right)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{A}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $\sigma\left(A\right)$ הינה ה־σ־אלגברה הקטנה ביותר המכילה את A.

σ־אלגברה בורל: יהי X מרחב מטרי אזי $\mathcal{B}\left(X\right)=\sigma\left(\left\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}\left(X\right)\mid \text{פתוחה } \mathcal{O}\right\}\right)$.

טענה: יהי X מרחב מטרי אזי הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על X.
- $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r>0\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_+\right)\wedge\left(a\in X\right)\right\}\right)$.
- תהא $Y\subseteq X$ צפופה אזי $\sigma\left(\left\{B_r\left(a\right)\mid\left(r\in\mathbb{Q}_+\right)\wedge\left(a\in Y\right)\right\}\right)$.

קבוצה G_δ: $A\subseteq X$ עבורה קיימות $\left\{\mathcal{O}_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ פתוחות המקיימות $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}\mathcal{O}_i$.

קבוצה F_δ: $A \subseteq X$ עבורה קיימות $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^{\infty}$ סגורות המקיימות $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_i$.

מסקנה: תהא A קבוצה G_δ ותהא B קבוצה F_δ אזי $A, B \in \mathcal{B}(X)$.

טענה: הקבוצות הבאות שוות

- σ־אלגברה בורל על $\mathbb{R}^n$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mid a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{R}\right\}\right)$.
- $\sigma\left(\left\{\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \mid a_1, b_1 \ldots a_n, b_n \in \mathbb{Q}\right\}\right)$.

משפט: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהא $C(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f$ רציפה ב־$x\}$ אזי

- $C(f) \in G_\delta$.
- תהא $X \in G_\delta$ אזי קיימת f עבורה $C(f) = X$.

קבוצה דלילה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ המקיימת $\mathrm{int}\left(\overline{A}\right) = \varnothing$.

קבוצה מקטגוריה ראשונה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימות $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ דלילות עבורן $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

קבוצה מקטגוריה שנייה: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ שאינה מקטגוריה ראשונה.

קבוצה שיורית: יהי X מרחב מטרי ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $A^{\mathcal{C}}$.

למה: יהי X מרחב מטרי אזי

- תהא $A \subseteq X$ דלילה ותהא $B \subseteq A$ אזי B דלילה.
- תהיינה $A_1 \ldots A_n \subseteq X$ דלילות אזי $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ דלילה.
- תהא $A \subseteq X$ דלילה אזי $\overline{A}$ דלילה.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות אידיאל.

משפט בייר: יהי X מרחב מטרי שלם ותהא $A \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה אזי $\mathrm{int}(A) = \varnothing$.

מסקנה: קבוצות דלילות מהוות σ־אידיאל.

מסקנה: $\mathbb{Q} \notin G_\delta$.

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי קיימת $F \subseteq \mathbb{R}$ מקטגוריה ראשונה וקיימת $N \subseteq \mathbb{R}$ זניחה עבורה $A = F \uplus N$.

משפט בנך: במרחב המטרי $C([0,1])$ עם נורמת מקסימום הקבוצה $\{f \in C([0,1]) \mid \exists x \in (0,1) . f \in \mathcal{D}(x)\}$ היא מקטגוריה ראשונה.

הערה: "רוב" הפונקציות הרציפות לא גזירות באף נקודה.

קבוצה בעלת תכונת בייר: יהי X מרחב מטרי אזי $A \subseteq X$ עבורה קיימת $G \subseteq X$ פתוחה וקיימת $Q \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A = G \triangle Q$.

משפט: תהא $A \subseteq X$ אזי (A־ל יש את תכונת בייר)$\Longleftrightarrow$(קיימת $F \subseteq X$ סגורה וקיימת $P \subseteq X$ מקטגוריה ראשונה עבורה $A = F \triangle P$).

מסקנה: תהא $A \subseteq X$ בעלת תכונת בייר אזי $A^{\mathcal{C}}$ בעלת תכונת בייר.

משפט: יהי X מרחב מטרי אזי $\{A \subseteq X \mid$ בעלת תכונת בייר $A\} = \sigma\left(\{A \subseteq X \mid (A \text{ פתוחה}) \vee (A \text{ מקטגוריה ראשונה})\}\right)$.

משפט: תהא X קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\varnothing, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \left\{A^{\mathcal{C}} \mid A \in \mathcal{F}_\alpha\right\} \cup \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_\alpha\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{F}_\alpha$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא X קבוצה עבורה $|X| = \aleph$ אזי $|\sigma(X)| = \aleph$.

מרחב מדיד: תהא X קבוצה ותהא $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ־אלגברה אזי (X, Σ).

פונקציית מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד אזי $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing) = 0$.
- σ־אדטיביות: תהיינה $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ זרות בזוגות אזי $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$.

מרחב מידה: יהי (X, Σ) מרחב מדיד ותהא μ פונקציית מידה אזי (X, Σ, μ).

מידה סופית: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) < \infty$.

מידה σ־סופית: פונקציית מידה μ עבורה קיימים $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ המקיימים $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ וכן $\forall i \in \mathbb{N}_+ . \mu(B_i) < \infty$.

מידת הסתברות: פונקציית מידה μ המקיימת $\mu(X) = 1$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי

- מונוטוניות: יהיו $A,B\in\Sigma$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.
- σ־תת־אדיטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.
- רציפות מלעיל: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.
- רציפות מלרע: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ וכן $\mu(A_1)<\infty$ אזי $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$.

קבוצה ממידה אפס/זניחה: $E\in\Sigma$ המקיימת $\mu(E)=0$.

סימון: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\mathcal{N}=\{E\in\Sigma\mid\mu(E)=0\}$.

טענה: תהיינה $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Sigma$ זניחות אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ זניחה.

כמעט בכל מקום (כ.ב.מ.): יהי ψ פרידיקט עבורו קיימת $E\in\mathcal{N}$ המקיים כי ψ מתקיים לכל $X\backslash E$ אזי נאמר כי "ψ נכונה μ כמעט בכל מקום".

מידה שלמה: פונקציית מידה μ עבורה לכל $E\in\mathcal{N}$ ולכל $F\subseteq E$ מתקיים $F\in\mathcal{N}$.

השלמה של σ־אלגברה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}=\{E\cup F\mid(E\in\Sigma)\wedge(\exists N\in\mathcal{N}.F\subseteq N)\}$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\overline{\Sigma}$ σ־אלגברה.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי קיימת ויחידה מידה שלמה ν על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\nu_{\restriction_\Sigma}=\mu$.

השלמה של מידה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי המידה השלמה $\overline{\mu}$ על $\overline{\Sigma}$ עבורה $\overline{\mu}_{\restriction_\Sigma}=\mu$.

טענה: יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה אזי $\left(X,\overline{\Sigma},\overline{\mu}\right)$ מרחב מידה.

מחלקת דינקין: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $X\in\mathcal{D}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{D}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $B\backslash A\in\mathcal{D}$.
- תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{D}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ אזי $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{D}$.

מערכת π: תהא $X\neq\varnothing$ אזי $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ עבורה לכל $A_1\ldots A_n\in\Pi$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\Pi$.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ מחלקות דינקין אזי $\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$ מחלקת דינקין.

מחלקת דינקין נוצרת: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ ותהיינה $\{\mathcal{D}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כל המחלקות דינקין מעל X המכילות את A אזי $d(A)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathcal{D}_\alpha$.

מסקנה: תהא $A\subseteq\mathcal{P}(X)$ אזי $d(A)$ הינה המחלקת דינקין הקטנה ביותר המכילה את A.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

למה: תהא $\mathcal{A}$ אלגברה על X עבורה לכל $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\supseteq A_{i+1}$ מתקיים $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{A}$ אזי $\mathcal{A}$ σ־אלגברה.

משפט הלמה של דינקין: תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π אזי $\sigma(\Pi)=d(\Pi)$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma(\Pi)$ ותהיינה μ,ν מידות סופיות על Σ עבורן $\mu(X)=\nu(X)$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi}=\nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

מסקנה: יהי (X,Σ) מרחב מדיד תהא $\Pi\subseteq\mathcal{P}(X)$ מערכת π עבורה $\Sigma=\sigma(\Pi)$ תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\Pi$ באשר $\forall i\in\mathbb{N}_+.A_i\subseteq A_{i+1}$ וכן $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=X$ ותהיינה μ,ν מידות על Σ עבורן $\forall n\in\mathbb{N}_+.\mu(A_i)=\nu(A_i)<\infty$ וכן $\mu_{\restriction_\Pi}=\nu_{\restriction_\Pi}$ אזי $\mu=\nu$.

חוג למחצה: תהא X קבוצה אזי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ המקיימת

- $\varnothing\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי $A\cap B\in\mathcal{E}$.
- יהיו $A,B\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $C_1\ldots C_n\in\mathcal{E}$ עבורם $A\backslash B=\biguplus_{i=1}^{n}C_i$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ חוג למחצה ויהיו $A_1\ldots A_n\in\mathcal{E}$ אזי

- יהי $P\in\mathcal{E}$ אזי קיימים $B_1\ldots B_m\in\mathcal{E}$ עבורם $P\backslash\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}B_i$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in[n])\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{m}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.
- קיימים $\{B_{i,j}\mid(i\in\mathbb{N}_+)\wedge(j\in[m_i])\}\subseteq\mathcal{E}$ עבורם $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\biguplus_{i=1}^{\infty}\biguplus_{j=1}^{m_i}B_{i,j}$.

מידה אלמנטרית: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ חוג למחצה אזי $\mu:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ המקיימת

- $\mu(\varnothing)=0$.
- אדיטיביות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ עבורם $A\uplus B\in\mathcal{E}$ אזי $\mu(A\uplus B)=\mu(A)+\mu(B)$.
- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{E}$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.

- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$.

טענה: תהא $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עולה ורציפה משמאל אזי $\mu_F\left(\left[a,b\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)$ מידה אלמנטרית מעל החוג למחצה $\{[a,b)\mid a\le b\}$.

מידה חיצונית: יהי $X\neq\varnothing$ אזי $\mu^*:\mathcal{P}\left(X\right)\to\left[0,\infty\right]$ המקיימת

- $\mu^*\left(\varnothing\right)=0$.
- מונוטוניות: תהיינה $A,B\in\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $A\subseteq B$ אזי $\mu^*\left(A\right)\le\mu^*\left(B\right)$.
- σ־תת־אדטיביות: תהיינה $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אזי $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)$.

המידה החיצונית הנוצרת על ידי ρ: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\rho\left(\varnothing\right)=0$ נגדיר $\rho^*:\mathcal{P}\left(X\right)\to\left[0,\infty\right]$ כך $\rho^*\left(A\right)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\rho\left(E_i\right)\mid\left(\{E_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{E}\right)\wedge\left(A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\right\}$.

טענה: יהי $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ באשר $\varnothing,X\in\mathcal{E}$ ותהא $\rho:\mathcal{E}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\rho\left(\varnothing\right)=0$ אזי ρ^* מידה חיצונית.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $m^*_{\restriction_{\mathcal{M}}}=m$.

קבוצה λ: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי $E\in\mathcal{A}$ עבורה לכל $F\in\mathcal{A}$ מתקיים $\lambda\left(E\cap F\right)+\lambda\left(E^{\mathcal{C}}\cap F\right)=\lambda\left(E\cap F\right)+\lambda\left(F\backslash E\right)=\lambda\left(F\right)$.

סימון: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי $\Gamma_0=\{E\in\mathcal{A}\mid\lambda\text{ קבוצה } E\}$.

טענה: תהא $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)$ אלגברה ותהא $\lambda:\mathcal{A}\to\left[0,\infty\right]$ עבורה $\lambda\left(\varnothing\right)=0$ אזי

- Γ_0 אלגברה.
- λ אדיטיבית על Γ_0.
- תהיינה $E_1\ldots E_n\in\Gamma_0$ ויהי $F\in\mathcal{A}$ אזי $\lambda\left(\biguplus_{i=1}^{n}\left(E_k\cap F\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(E_n\cap F\right)$.

קבוצה מדידה ביחס למידה חיצונית: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $A\subseteq X$ עבורה לכל $E\subseteq X$ מתקיים $\mu^*\left(E\right)=\mu^*\left(E\cap A\right)+\mu^*\left(E\backslash A\right)$.

סימון: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי $\Sigma_{\mu^*}=\{A\subseteq X\mid\mu^*\text{ מדידה } A\}$.

טענה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mathcal{M}\subseteq\Sigma_{m^*}$.

משפט הלמה של קרתאודורי: תהא μ^* מידה חיצונית על X אזי

- Σ_{μ^*} σ־אלגברה.
- $\mu^*_{\restriction_{\Sigma_{\mu^*}}}$ מידה שלמה.

המשכת קרתיאודורי: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית אזי $\mu=m^*$ מידה מעל Σ_{m^*}.

משפט: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה תהא m מידה אלמנטרית ותהא $\left(X,\Sigma',\mu'\right)$ המשכת קרתיאודורי נוספת של $\left(\mathcal{M},m\right)$ אזי

- לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu'\left(A\right)\le\mu\left(A\right)$.
- נניח כי $\mu\left(X\right)<\infty$ אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu'\left(A\right)=\mu\left(A\right)$.
- נניח כי m σ־סופית אזי לכל $A\in\Sigma'\cap\Sigma_{m^*}$ מתקיים $\mu'\left(A\right)=\mu\left(A\right)$.

מסקנה: יהי $\mathcal{M}$ חוג למחצה ותהא m מידה אלמנטרית σ־סופית אזי המשכת קרתיאודורי יחידה.