אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת

- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ סופית אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.

σ־אלגברה: תהא Ω קבוצה אזי $\mathcal{F}\subseteq 2^{\Omega}$ המקיימת

- $\Omega\in\mathcal{F}$.
- $\forall E\in\mathcal{F}.E^{\mathcal{C}}\in\mathcal{F}$.
- לכל $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה מתקיים $\bigcup E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\varnothing\in\mathcal{F}$.

למה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה ותהא $E\subseteq\mathcal{F}$ בת מנייה אזי $\bigcap E\in\mathcal{F}$.

משפט: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $\mathcal{F}$ הינה אלגברה מעל Ω.

פונקציה אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $B_1\ldots B_n\in\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{n}B_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(B_i\right)$.

מידה על אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ אדטיבית.

פונקציה σ־אדטיבית: פונקציה $\mu:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ המקיימת לכל $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{A}$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\biguplus_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B_i\right)$.

מידה על σ־אלגברה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה אזי $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ σ־אדטיבית.

מרחב מדיד: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $(\Omega,\mathcal{F})$.

קבוצה מדידה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי $E\in\mathcal{F}$.

למה: תהא μ מידה על $\mathcal{F}$ המקיימת $\exists E\in\mathcal{F}.\mu(E)<0$ אזי $\mu(\varnothing)=0$.

למה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ אזי μ אדטיבית.

למה: תהא μ מידה ותהיינה $A,B\in\mathcal{F}$ עבורן $A\subseteq B$ אזי $\mu(A)\le\mu(B)$.

סדרת קבוצות מונוטונית: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי

- מונוטונית עולה חלש: $\forall n\in\mathbb{N}.A_n\subseteq A_{n+1}$.
- מונוטונית יורדת חלש: $\forall n\in\mathbb{N}.A_{n+1}\subseteq A_n$.

סופרמום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\sup(A)=\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i$.

אינפימום: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\inf(A)=\bigcap_{i=0}^{\infty}A_i$.

גבול עליון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$.

גבול תחתון: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ אזי $\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i$.

גבול: תהא $\mathcal{A}$ קבוצה ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ עבורה $\liminf_{n\to\infty}A_n=\limsup_{n\to\infty}A_n$ אזי $\lim_{n\to\infty}A_n=\liminf_{n\to\infty}A_n$.

טענה: תהא μ מידה מעל σ־אלגברה $\mathcal{F}$ ותהא $A:\mathbb{N}\to\mathcal{F}$ עבורה $\lim_{n\to\infty}A_n=B$ אזי $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\mu(B)$.

מרחב מידה: תהא $\mathcal{F}$ אלגברה/σ־אלגברה מעל Ω ותהא μ מידה על $\mathcal{F}$ אזי $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$.

מידת הסתברות: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω אזי מידה $\mathbb{P}:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ המקיימת $\mathbb{P}(\Omega)=1$.

מרחב הסתברות: מרחב מידה $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ עבורו μ מידת הסתברות.

מרחב התוצאות: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי Ω.

מאורע: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $E\in\mathcal{F}$.

מרחב המאורעות: יהי $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $\mathcal{F}$.

אינווריאנטיות להזזות: מרחב הסתברות $((0,1],\mathcal{F},\mathbb{P})$ עבורו לכל $A\subseteq(0,1]$ ולכל $b\in(0,1]$ באשר $A+b\subseteq(0,1]$ מתקיים $\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A+b)$.

טענה: לכל מרחב הסתברות $\left((0,1],2^{(0,1]},\mathbb{P}\right)$ לא מתקיימת אינווריאנטיות להזזות.

קבוצה פתוחה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $\forall x\in A.\exists\varepsilon>0.(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\subseteq A$.

קבוצה סגורה: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה $A^{\mathcal{C}}$ פתוחה.

טענה: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ σ־אלגבראות מעל Ω אזי $\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ הינה σ־אלגברה מעל Ω.

σ־אלגברה בורלית מעל $\mathbb{R}$: תהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל $\mathbb{R}$ המכילות את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

קבוצה בורלית: $B\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

טענה: σ־אלגברה בורלית הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

טענה: תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$ המכילה את כל הקבוצות הפתוחות אזי $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{F}$.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{F}$ σ־אלגברה מעל Ω ותהא $A \subseteq \Omega$ אזי $\{E \cap A \mid E \in \mathcal{F}\}$ הינה σ־אלגברה מעל A.

σ־אלגברה בורלית מעל $(0,1]$: $\mathfrak{B}_{(0,1]} = \{B \cap (0,1] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\}$.

מידת לבג: תהא $B \in \mathfrak{B}$ אזי $\lambda(B) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \mid B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\}$.

טענה: $\left((0,1], \mathfrak{B}_{(0,1]}, \lambda\right)$ מרחב הסתברות אינווריאנטי להזזות.

מרחב אחיד על A: עבור $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי $(A, \mathfrak{B}_A, \lambda)$.

σ־אלגברה נוצרת: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ותהיינה $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ כל ה־σ־אלגבראות מעל Ω המכילות את $\mathcal{T}$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i$.

הצילינדר של ה־σ־אלגברה הנוצרת: תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ו־σ־אלגברה $\sigma(\mathcal{T})$ אזי $\mathcal{T}$.

טענה: תהא Ω קבוצה ותהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ נסמן $\mathcal{F}_0 = \mathcal{T} \cup \{\varnothing, \Omega\}$, לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נסמן $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_{\alpha} \cup \left\{A^{\mathcal{C}} \mid A \in \mathcal{F}_{\alpha}\right\} \cup \left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \mathcal{F}_{\alpha}\right\}$ ולכל סודר גבול λ נסמן $\mathcal{F}_{\lambda} = \bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_{\alpha}$ אזי $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_{\omega_1}$ באשר ω_1 הסודר הגבולי הקטן ביותר שאינו בן מניה.

טענה: תהא Ω קבוצה תהא $\mathcal{T} \subseteq 2^{\Omega}$ ויהיו $\omega, \kappa \in \Omega$ עבורן $\forall A \in \mathcal{T}.\omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A$ אזי $\forall A \in \sigma(\mathcal{T}).\omega \in A \Longleftrightarrow \kappa \in A$.

משתנה מקרי/פונקציה מדידה: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות אזי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ עבורה $\forall B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}.X^{-1}[B] \in \mathcal{F}$.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ותהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$ אזי

- $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
- $f^{-1}\left[A^{\mathcal{C}}\right] = f^{-1}[A]^{\mathcal{C}}$.

טענה: יהי $(\Omega, \mathcal{F})$ מרחב מדיד ותהא $X : \Omega \to \mathbb{R}$ אזי $\left\{E \subseteq \mathbb{R} \mid X^{-1}[E] \in \mathcal{F}\right\}$ הינה σ־אלגברה מעל $\mathbb{R}$.

משפט: יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות ותהא $X : \Omega \to \mathbb{R}$ אזי (X מ"מ)$\Longleftrightarrow\left(\forall t \in \mathbb{R}.X^{-1}[(-\infty, t)] \in \mathcal{F}\right)$.

σ־אלגברה נוצרת על ידי משתנה מקרי: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $\sigma(X) = \sigma\left(\left\{X^{-1}[B] \mid B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}\right\}\right)$.

טענה: יהיו X, Y מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

- יהי $c \in \mathbb{R}$ אזי cX מ"מ.
- $X + Y$ מ"מ.
- XY מ"מ.
- יהי Z מ"מ על $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ אזי $f \circ X$ מ"מ.

טענה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ ותהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה אזי $f^{-1}[\mathcal{U}]$ פתוחה.

מסקנה: תהא $f \in C(\mathbb{R})$ אזי f מ"מ על $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$.

פונקציית התפלגות מצטברת: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ המקיימת $F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t)$.

טענה: יהי X מ"מ על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ אזי

- $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$.
- $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$.
- F_X מונוטונית עולה.
- $\lim_{t\to a^+} F_X(t) = F_X(a)$.