```
. טענה: תהיינה A,B בת מנייה אזיA\cup B בת מנייה מנייה
                                                                     \bigcup_{i=1}^n A_i בת מנייה אזי בנות מנייה אזי בת מנייה. \bigcup_{i=1}^n A_i
טענה: תהא \langle f_n \mid n \in \mathbb{N} 
angle חדרת פונקציות באשר או בת מנייה לכל A_i סדרת פונקציות באשר או סענה:
                                                                            על לכל n\in\mathbb{N} אזי סופית או בת מנייה. f_n:\mathbb{N}	o A_n
                                                    A 	imes B = \{\langle a,b \rangle \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\} מכפלה קרטזית: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                       טענה: תהיינה A,B בת מנייה אזי A \times B טענה:
                                                                       . בת מנייה A_1 \times \ldots \times A_n בנות מנייה אזיA_1 \ldots A_n בת מנייה
                                                                                                           A^1=A הגדרה: תהא A קבוצה אזי
                                                                                A^n=A	imes A^{n-1} אזי n\in\mathbb{N}_+ ויהי קבוצה A הגדרה: תהא
                                                                                                                      .טענה: \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n בת מנייה
                                                                                                          |\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A\}| = \aleph_0 מסקנה: |\{A \subseteq \mathbb{N} \mid A\}|
                                                                                                                                  |\mathbb{Z}|=leph_0 :טענה
                                                                                                                                  |\mathbb{Q}|=\aleph_0 :טענה
                                                                     p\left(a
ight)=0 מספר אלגברי: מספר a\in\mathbb{C} עבורו קיים a\in\mathbb{C} מספר
                                                                p\left(a
ight)
eq0 מתקיים p\in\mathbb{Z}\left[x
ight] עבורו לכל a\in\mathbb{C} מספר מספר מספר
                                                                                                    |\{a\in\mathbb{C}\mid A אלגברי a\}|=leph_0 משפט קנטור:
                                                                       יחס סדר חלקי/חלש: תהא A קבוצה ויהי A אזי A באשר יחס סדר חלקי/חלש:
                                                                                                    x \preccurlyeq x אזי x \in A יהי •
                                                                 x \preccurlyeq z אזי y \preccurlyeq z וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y,z \in A אזי יהיו x \preccurlyeq y
                                                        x=y אזי y \preccurlyeq x וכן x \preccurlyeq y עבורם x,y \in A אזי יהיו חלשה: x = y אנטי סימטריות חלשה:
                                                                              יחס סדר חזק: תהא A קבוצה ויהי A^2 אזי A באשר יחס סדר חזק: תהא
                                                                                         \neg \left( x \prec x \right) אזי אזי יהי יהי פלקסיביות: •
                                                                 x\prec z אזי y\prec z וכן x\prec y עבורם x,y,z\in A אזי יהיו
                                                                 \neg (y \prec x) אזי x \prec y עבורם x,y \in A יהיו חזקה: \bullet
                                   (x\preccurlyeq y)\lor(y\preccurlyeq x) מתקיים x,y\in A אבורו לכל (A,\preccurlyeq) עבורו יחס סדר אלקי
                               (x \prec y) \lor (y \prec x) \lor (x = y) מתקיים x, y \in A עבורו לכל (x, x) עבור חזק יחס סדר חזק יחס עבורו לכל
                                                                                                            טענה: \langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle יחס סדר קווי חלקי.
                                                                                      . יחס סדר חלקי \langle \mathcal{P}\left(A\right),\subseteq \rangle יחס סדר חלקי ענה: תהא
(aRb) \Longleftrightarrow (f(a)Sf(b)) מתקיים a,b \in A מתקיים (A,R), \langle B,S \rangle מדרים אזי (A,R), \langle B,S \rangle מתקיים
                                   . סדרים הפיכה \pi:A	o B הפימת \langle A,R \rangle, עבורם סדרים הפיכה שומרת הפיכה \pi:A	o B
                                                                    \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle איזומורפיים איזו סדרים \langle A,R \rangle , \langle B,S \rangle סדרים איזומורפיים
```

 $|X| \leq |Y|$ חח"ע אזי f: X o Y הגדרה: תהיינה X, Y קבוצות ותהא $Y \mapsto f: X \to Y$ חח"ע ועל אזי |X| = |Y| הגדרה: תהיינה $X, Y \mapsto X$

|X|<|Y| אזי אזי $|X|\neq |Y|$ וכן $|X|\leq |Y|$ אזי קבוצות עבורן אזי |X|<|Y|

 $|A|=|\{0,\ldots,n-1\}|$ המקיים $n\in\mathbb{N}$ עבורה עבורה עבורה חופית:

 $.|A| = |\{0,\dots,n-1\}|$ המקיים $n \in \mathbb{N}$ קיים לא עבורה עבוצה קבוצה אינסופית:

טענה: תהא B סופית או בת מנייה תהא f:A o B ותהא קבוצה ותהא מנייה מנייה מנייה מנייה

|X|=|Y| אאי $|Y|\leq |X|$ וכן $|X|\leq |Y|$ אאי און |X|=|Y| משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין (קש"ב): תהיינה

 $|X| \neq |Y|$ אזי $\neg (|X| = |Y|)$ איזי קבוצות עבורן תהיינה X,Y איזי

טענה: תהא B בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אינסופית אזי B בת מנייה. מסקנה: תהא A בת מנייה ותהא $B\subseteq A$ אזי B סופית או בת מנייה.

X העוצמה של |X| העוצמה של

 $|X|=leph_0$ קבוצה X עבורה מנייה: קבוצה בת מנייה

 $|\{0,\ldots,n-1\}|=n$ אזי $n\in\mathbb{N}$ סימון: יהי

סימון: $|\mathbb{N}|=0$ %.

```
(aRb) \lor (a=b) מתקיים b \in A מתקיים a \in A עבורו קיים a \in A עבורו קיים a \in A מתקיים סדר קווי
                                                                      \min(A) = a אזי a \in A איבר ראשון בעל איבר קווי בעל אדר קווי אזי \langle A, R \rangle יהי
        . טענה: יהי \langle B,S \rangle אזי \langle B,S \rangle אזי איבר ראשון ויהי \langle B,S \rangle סדר קווי באשר סענה: יהי \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle סדר איבר ראשון ויהי
       (aRb) \lor (a=b) מתקיים a \in A מתקיים b \in A מתקיים סדר קווי \langle A,R \rangle עבורו קיים a \in A באשר לכל
                                                                      \max(A) = a אזי a \in A אזיבר אחרון בעל איבר סדר קווי בעל איבר (A, R) מימון: יהי
         . טענה: אזי \langle B,S \rangle אזי אזי איבר אחרון ויהי יבעל איבר אחרון איבר אחרון ויהי יהי אחרון איבר \langle A,R \rangle \simeq \langle B,S \rangle סדר קווי באשר
                         zRy וכן xRz עבורו z\in A קיים xRy המקיימים xRy המקיימים עבורו z\in A עבורו ווע z\in A וכן
                                      טענה: יהי \langle A,R
angle\simeq \langle B,S
angle סדר קווי באשר \langle B,S
angle אזי \langle B,S
angle צפוף.
                                                                     טענה: \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון.
                                                                                                                         \mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}} \not\simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle מסקנה:
      \langle A, \preccurlyeq 
angle \simeq \langle \mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} 
angle אזי |A| = leph_0 משפט קנטור: יהי \langle A, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר
       \langle A, \prec 
angle \simeq \langle \mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}} 
angle אזי משפט קנטור: יהי \langle A, \prec 
angle סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון באשר משפט קנטור: משפט קנטור:
                            (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים X \subseteq A אזי X \subseteq A מדר קווי ותהא A \subseteq A
                                                   \overline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי X \subseteq A סדר קווי ותהא סימון: יהי
                                                                    \overline{B}_X 
eq \emptyset עבורה X \subseteq A אזי אזי X \subseteq A סדר קווי אזי יהי
                            (xRa) \lor (x=a) מתקיים x \in X מתקיים מלרע: יהי אזי X \subseteq A אזי אזי תהא X \subseteq A מחסם מלרע: יהי
                                                    \underline{B}_X = \{a \in A \mid X סדר קווי ותהא X \subseteq A אזי ותהא סדר קווי יהי לא סדר קווי ותהא סדר אזי אזי לימון: יהי
                                                                     \underline{B}_X 
eq \emptyset עבורה X \subseteq A אזי אזי X \subseteq A סדר קווי אזי יהי יהי מלרע: יהי
                                                            . סדר חסם מלרע חסם מלרע חסם מלרע אזי איזי X\subseteq A סדר קווי אזי \langle A,R \rangle יהי
                                                                      \operatorname{sup}(X) = \min\left(\overline{B}_X\right) אזי X \subseteq A אדר קווי ותהא A, R סדר קווי ותהא
                                                                       \inf\left(X
ight)=\max\left(\underline{B}_X
ight) אזי אזי X\subseteq A סדר קווי ותהא אור \langle A,R
angle יהי יהי
                                                    \operatorname{sup}\left(X
ight) אינים סדר קווי אלם: סדר קווי \left\langle A,R
ight
angle עבורו לכל
                             (\sup(X),\inf(X),\inf(X)) סדר קווי אזי איי שלם)(A,R) סדר שלם) סטענה: יהי
            המקיים \langle L,\sqsubseteq 
angle הזי סדר קווי חלקי: יהי \langle P,\preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי סדר חלקי או המקיים מקיים
                                                                                                                                            .P \subseteq L \bullet
                                                                                             (x \preccurlyeq y) \Longleftrightarrow (x \sqsubseteq y) מתקיים x, y \in P לכל
                                                                              . סדר קווי שלם ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון. \langle L, \Box \rangle
                                                                                                                          \langle L, \sqsubseteq \rangle צפוף ב־ \langle P, \preccurlyeq \rangle \bullet
משפט יחידות השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון ותהיינה \langle P, \preccurlyeq \rangle סדר סדר קווי חלקי צפוף איבר ראשון ולא איבר אחרון ותהיינה משפט יחידות השלמה:
                                                                                    p \in P לכל \pi\left(p\right) = p עבורו \pi:L 	o L^* לכל
                      משפט קיום השלמה: יהי \langle P, \preccurlyeq 
angle סדר קווי חלקי צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון אזי קיימת לו השלמה.
                                                    באשר \langle A,B \rangle אזי אזי A,B \subseteq P ויהיו חלקי ויהיו סדר קווי אזי אזי \langle P,\preccurlyeq \rangle באשר
                                                                                                                                      A \cap B = \emptyset •
                                                                                                                                      A \cup B = P \bullet
                                                                                                     a \preccurlyeq b מתקיים b \in B ולכל •
                                                                                                                       ללא איבר אחרון. \langle A, \preccurlyeq \rangle
```

 $[p] = \langle (-\infty,p)\,,[p,\infty)
angle$ אזי $p\in P$ ויהי חלקי חלקי סדר קווי חלקי אזי $\langle P,\preccurlyeq \rangle$ יהי

.Ded $(P)=\{\langle A,B\rangle \mid$ חתך דדקינד $\langle A,B\rangle \}$ סדר קווי חלקי אזי מימון: יהי $\langle P,\preccurlyeq \rangle$

 $\langle A,B
angle \preccurlyeq \langle C,D
angle$ אזי $A\subseteq C$ חתכי דדקינג באשר $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$ וויהיו חלקי ויהיו איזי $\langle A,B
angle ,\langle C,D
angle$ חתכי מהגדרה: יהי

טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי ויהי $p \in P$ אזי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ חתך דדקינד.

 $.\langle\{[p]\mid p\in P\}\,,\preccurlyeq\rangle\simeq\langle P,\preccurlyeq\rangle$ טענה: יהי יהי יהי סדר קווי חלקי אזי יהי ענה: יהי יהי ערה פחתכי בהתאמה מעל בתור שיכון של $P,\preccurlyeq\rangle$ בחתכי הדדקינד שלה.

טענה: יהי $\langle \mathrm{Ded}\,(P)\,,\preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי סענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי סענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle \mathrm{Ded}\,(P)\,, \preccurlyeq \rangle$

```
\mathcal{C}=igcap_{i=0}^\infty C_i אזי n\in\mathbb{N} לכל C_{n+1}=\left(rac{1}{3}C_n
ight)\cup\left(rac{2}{3}+rac{1}{3}C_n
ight) ונגדיר ונגדיר C_0=[0,1] לכל
                                                                                                                          .(\mathcal{C},<_{\mathbb{R}})\simeq\left(^{\mathbb{N}}\left\{ 0,1
ight\} ,<_{\mathsf{lex}}
ight) טענה:
|A\cup B|=|C\cup D| אזי און |B|=|D| וכן |A|=|C| סענה: תהיינה |A\cup B|=|C\cup D| אזי אזי ותהיינה לבוצות ארות ותהיינה
                                                                                   |A|+|B|=|A\cup B| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות זרות אזי
                                                                                                             |A \times \{0\}| = |A| טענה: תהא A קבוצה אזי
                                                            |A| + |B| = |A \times \{0\}| + |B \times \{1\}| הגדרה חיבור: תהיינה A, B קבוצות אזי
                                      |A \times B| = |C \times D| אזי |B| = |D| וכן |A| = |C| אזי |A, B, C, D| טענה: תהיינה
                                                                                       |A|\cdot |B| = |A	imes B| הגדרה כפל: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                            |A|=\kappa עבורה עבורה קבוצה אם קיימת עוצמה א היא עוצמה הערה: נאמר כי \kappa
                                                                                                                  \kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa טענה: תהא א עוצמה אזי
                                                                                  \kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu טענה: תהיינה \kappa, \lambda, \mu עוצמות אזי
                                                                                       A = \{f \mid f: B \to A\} הגדרה: תהיינה A, B קבוצות אזי
                                               |BA|=|DC| אזי אזי |B|=|D| וכן |A|=|C| אזי אזי |A,B,C,D| טענה: תהיינה
                                                                                                     |A|^{|B|}=|^BA| הגדרה: תהיינה A,B קבוצות אזי
                                                                                                                                                |\mathbb{R}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                                       \kappa \cdot \kappa = \kappa^2 טענה: תהא א עוצמה אזי
                          (\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = (\kappa^{\mu}) \cdot (\lambda^{\mu}) וכן (\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{(\lambda \cdot \mu)} וכן \kappa^{(\lambda + \mu)} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} עוצמות אזי \kappa, \lambda, \mu וכן \kappa, \lambda, \mu
                                                                                            .\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0 וכן אזי n\in\mathbb{N} וכן n\in\mathbb{N} יהי אזי יהי
                                                                                             \aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0 טענה: יהי n\in\mathbb{N}_+ אזי n\in\mathbb{N}_+ וכן וכן
                                                                                                                             \aleph_0^n=leph_0 אזי n\in\mathbb{N}_+ טענה: יהי
                                                      2^{\aleph_0}+2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+\aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}+n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N} טענה: יהי
                                                         2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot \aleph_0=2^{\aleph_0} וכן 2^{\aleph_0}\cdot n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי יהי
                                                                                       (2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0} וכן (2^{\aleph_0})^n=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי יהי יהי
                                                                                                 \mathfrak{K}_0^{leph_0}=2^{leph_0} וכן n^{leph_0}=2^{leph_0} אזי n\in\mathbb{N}_{\geq 2} יהי יהי
                                                                                                                                       (2^{\aleph_0})^{\left(2^{\aleph_0}\right)} > 2^{\aleph_0} :טענה
                                          |\mathbb{N}\mathbb{N}|=2^{\aleph_0} וכן |\mathbb{N}\to\mathbb{R}|=2^{\aleph_0} וכן וכן |\mathbb{C}|=2^{\aleph_0} וכן |\mathbb{R}^n|=2^{\aleph_0} אזי n\in\mathbb{N}_+ יהי n\in\mathbb{N}_+
                                          |B \backslash A| = 2^{\aleph_0} אזי |A| \leq \aleph_0 באשר A \subseteq B ותהא ותהא |B| = 2^{\aleph_0} אזי באשר B
                                                                                                     |\{a\in\mathbb{C}\mid מסקנה: a\}|=2^{leph_0} מספר טרנסצנדנטי
                                                                                                                 |\{a\in\mathbb{R}\mid aמסקנה: |\{a\in\mathbb{R}\mid a\}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                                    |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R})\wedge (f)\}|=2^{\aleph_0} מסקנה:
                                                                                               |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R})\wedge (f)\}|=2^{leph_0} מסקנה: |\{f\mid (f:\mathbb{R}	o\mathbb{R}) + (f)\}|=2^{leph_0}
                                                                                                          |\{A\mid (A\subseteq\mathbb{R})\land (פתוחה|A|\}|=2^{leph_0} טענה:
                                           יחס סדר טוב: סדר קווי \langle W, \prec 
angle עבורו לכל A 
eq \varnothing באשר איבר קטן ביותר. עבורו לכל
```

f:A o B עבורו קיימת $\langle B,\sqsubset
angle$ עבור איבר אחרון וללא איבר קווי חזק אזי קיים סדר קווי חזק צפוף ללא איבר ראשון וללא איבר אחרון

 $\langle P, \preccurlyeq
angle \simeq \langle \mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}
angle$ משפט: יהי $\langle P, \preccurlyeq
angle$ סדר קווי חלקי ללא איבר ראשון ואחרון בעל קבוצה בת־מנייה צפופה בו אזי

 $\langle {
m Ded}\,(P)\,,\preccurlyeq \rangle$ טענה: יהי $\langle P,\preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי פופה אזי $\langle P,\preccurlyeq \rangle$ טענה: יהי $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי $\langle {
m Ded}\,(P)\,, \preccurlyeq \rangle$ סדר קווי חלקי אזי

 $(\mathbb{Q},\leq_{\mathbb{Q}})$ מספרים ממשיים: $(\mathbb{R},\leq_{\mathbb{R}})$ הינה ההשלמה של

 $|\mathcal{P}\left(X
ight)|=\left|^X2
ight|$ אזי קבוצה א קבוצה איזי אינה: תהא $|X|<|\mathcal{P}\left(X
ight)|$ משפט קנטור: תהא $|X|<|\mathcal{P}\left(X
ight)|$

 $\mathcal{P}\left(X\right)=\left\{Y\mid Y\subseteq X\right\}$ אזי קבוצה החזקה: תהא קבוצה אזי תהא Xקבוצה החזקה: סימון: תהא אזי Xקבוצה אזי X

שומרת סדר.

 $|\mathbb{R}|
eq \aleph_0$ טענה:

 $|\mathbb{R}|=|\mathbb{N}2|$:טענה

```
W[a] = \{b \in W \mid b \prec a\} אזי a \in W יחס סדר טוב ויהי \langle W, \prec \rangle יחי יחס סדר טוב ויהי
                                                                       Wבישה ב־W רישה ב־W יחס סדר טוב ויהי ויהי A \in W יחס סדר טוב ויהי
                                               S=W\left[x
ight] אזי קיים x\in W טענה: יהי X\in W יחס סדר טוב ותהא ותהא S רישה ב־
                     x \in W טענה: יהי (X \prec f(x)) \lor (x = f(x)) אומרת סדר אזי f: W \to W לכל לכל על יהי (W, \prec) יחס סדר טוב ותהא
                                                                              W \not\simeq W \left[ a 
ight] אזי a \in W יחס סדר טוב ויהי \langle W, \prec 
angle אזי מסקנה: יהי
                                                              f=\mathrm{Id} איזומורפיזם אזי f:W	o W יחס סדר טוב ויהי יהי איזימורפיזם אזי
                                          f=g איזומורפיזמים אזי f,g:W	o A ויהיו סדר טובים אזי \langle W, \prec 
angle, \langle A, 
angle איזומורפיזמים אזי
                                                 משפט ההשוואה: יהיו מהבאים מתקיים סדר טובים אזי משפט ההשוואה: יהיו \langle W, \prec 
angle \, , \langle A, \sqsubset 
angle יחסי סדר טובים אזי
                                                                                                                               .\langle W, \prec \rangle \simeq \langle A, \Box \rangle \bullet
                                                                                                \langle W[w], \prec \rangle \simeq \langle A, \Box \rangle עבורו w \in W •
                                                                                                   \langle W, \prec \rangle \simeq \langle A[a], \sqsubseteq \rangle עבורו a \in A סיים •
                                                             y \in X מתקיים y \in A ולכל A \in X עבורה עבורה לכל קבוצה ארנזיטיבית:
                                                                                      סדר טוב. \langle X, \in 
angle יחס סדר טוב. \langle X, \in 
angle
                                                                                                              טענה: יהי \alpha \cup \{\alpha\} סודר אזי \alpha \cup \{\alpha\}
                                                                                                                        \alpha \notin \alpha טענה: יהי \alpha סודר אזי טענה:
                                                                                                         . סודר x אזי אזי x \in \alpha סודר ויהי \alpha סודר מענה: יהי
                                                                                                \alpha \notin \beta אזי \beta \in \alpha טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים באשר
                                                                                                \alpha \in \beta אזי \alpha \subseteq \beta טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים באשר
                                                                   טענה משפט ההשוואה: יהיו lpha,eta סודרים אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים
                                                                                                                                            \alpha = \beta \bullet
                                                                                                                                             \alpha \in \beta \bullet
                                                                                                                                             .\beta \in \alpha \bullet
                                                                                  . סענה: \min{(S)} אזי סודרים אל ריקה לא ריקה לא קבוצה S קבוצה לא יים.
                                                                                                                         \mathcal{O}_n = \{ \alpha \mid סודר \alpha \} הגדרה:
                                                                                                                                       \mathcal{O}_n = \mathrm{Ord} : סימון
                                                                                                     טענה פרדוקס גוראלי־פורטי: מינה קבוצה. טענה
                                                              (\alpha \cup \{\alpha\} \in \beta) \lor (\alpha \cup \{\alpha\} = \beta) אזי \alpha \in \beta סודרים באשר \alpha, \beta אזי יהיו
                                                                                                          \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} סודר אזי \alpha סודר מימון: יהי
                                                         eta \in \alpha טענה: תהא eta \in S מתקיים אזי קיים סודר אזי קיים מודרים אזי קבוצת סודרים אזי קיים סודר
                                            \langle lpha, \in 
angle \simeq \langle W, \prec 
angle עבורו מיפוס סדר טוב. יהי יהי יהי יהי טיפוס סדר של יחס סדר טוב: יהי
                                                                     \langle W, \prec 
angleיחס משפט: יהי \langle W, \prec 
angleיחס סדר טוב אזי קיים ויחיד סודר טיפוס ל־
                                                  \operatorname{cotp}\left(\langle W, \prec 
angle
ight) = lpha אזי אזי אזי סודר טיפוס מודר טיפוס מדר טוב ויהי \langle W, \prec 
angle אזי מימון: יהי
אזי לכל קבוצה P אזי לכל קבוצה Y אזי לכל קבוצה X קיימת קבוצה לכל קבוצה אקסיומת ההחלפה: תהא P אזי לכל קבוצה אקסיומת החלפה:
                                                                           באשר לכל P\left(a,b
ight) קיים b\in B קיים a\in A זוהי אינה טענה B
                           אקסיומת ההפרדה: תהא P נוסחה אזי לכל קבוצה A מתקיים כי \{a\in A\mid P\left(a
ight)\} קבוצה. אוהי אינה טענה
משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P נוסחה באשר לכל סודר \alpha מתקיים משפט עיקרון האינדוקציה: תהא P מוסחה באשר לכל סודר מתקיים
                                                                                                                                                     .P(\gamma)
                                                                             lpha=eta+1 סודר עוקב: סודר eta עבורו קיים סודר עוקב סודר lpha
                                                                              משפט אינדוקציה טרנספיניטית: תהא P נוסחה המקיימת
```

.טענה: $\langle \mathbb{N}, <_{\mathbb{N}} \rangle$ סדר טוב

 $.S \neq W \bullet$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $n \in \mathbb{N}$ סדר טוב. $n \in \mathbb{N}$

 $b \in S$ אזי $b \prec a$ אם $b \in W$ ולכל $a \in S$

רישה של יחס סדר טוב: יהי $\langle W, \prec
angle$ יחס סדר טוב אזי $S \subseteq W$ רישה של יחס סדר טוב:

```
P(\emptyset) • לכל סוז • לכל סוז • לכל סוד י לכל סודר Sנה: תהא Sמון: הסודר
```

 $.P\left(lpha
ight) \Longrightarrow P\left(lpha +1
ight)$ מתקיים מהל סודר לכל סודר lpha

 $(\forall \beta \in \alpha.P(\beta)) \Longrightarrow (P(\alpha))$ מתקיים α מתקיים •

 $.P\left(\gamma\right)$ אזי לכל סודר γ מתקיים

אקסיומת האינסוף: קיימת קבוצה S באשר באשר אוכן לכל $x+1\in S$ מתקיים $x+1\in S$ אקסיומת האינסוף:

. טענה: תהא $\delta \notin S$ אזי א הסודר הראשון באשר $\delta \in S$ טענה: תהא א קבוצה באשר אזי לכל לכל מתקיים מתקיים אזי $x+1 \in S$ מתקיים

 ω סימון: הסודר הגבולי הראשון שאינו הסודר הגבולי

 $0 = \emptyset$. סימון:

 $\mathbb{N}=\omega$:הגדרה

 $n \in \mathbb{N}$ לכל $n+1=n \cup \{n\}$ הערה: בהגדרה מלעיל נשתמש בהתאמה

lpha < eta אזי $lpha \in eta$ אזי מון: יהיו lpha, eta סודרים באשר

הגדרה חיבור: יהי lpha סודר אזי

 $.\alpha + 0 = \alpha \bullet$

 $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ יהי β סודר אזי •

 $. \alpha + \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$ יהי β סודר גבולי אזי •

 $.(lpha+eta)+\gamma=lpha+(eta+\gamma)$ אזי סענה: יהיו $lpha,eta,\gamma$ סודרים אזי

 $.\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ אזי $\alpha < \beta$ באשר סודרים α,β,γ יהיו יהיו טענה: יהיו

 $.\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$ אזי $\alpha<\beta$ באשר סודרים מחדרים α,β,γ יהיו טענה: יהיו

 $.\alpha+\gamma=\beta$ עבורו סודר חיים אזי קיים אזי באשר באשר סודרים α,β יהיו יהיו סענה: יהיו

 $\omega + 1 > \omega$ וכן $1 + \omega = \omega$ וכן $0 + \omega = \omega$

הגדרה כפל: יהי α סודר אזי

 $.\alpha \cdot 0 = 0 \bullet$

 $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$ יהי β סודר אזי •

 $.\alpha\cdot\beta = \bigcup_{\gamma<\beta}\left(\alpha\cdot\gamma\right)$ אזי אזי סודר גבולי יהי •

 $.\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$ אזי $\gamma \neq 0$ וכן $\alpha < \beta$ סודרים באשר α, β, γ אזי יהיו

 $.\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$ אזי $\alpha < \beta$ שטענה: סטענה: α,β,γ יהיו יהיו מענה: יהיו

 $lpha\left(b+\gamma
ight)=lpha\cdoteta+lpha\cdot\gamma$ סענה: יהיו $lpha,eta,\gamma$ סודרים אזי

 $\omega\cdot 2=\omega+\omega$ וכן $2\cdot\omega=\omega$ וכן $1\cdot\omega=\omega$ וכן $0\cdot\omega=0$

 $\omega+\omega>\omega+n$ אזי $n<\omega$

. טענה: יהי α סודר אזי $\alpha+\omega$ סודר גבולי.

הגדרה חזקה: יהי lpha סודר אזי

 $.\alpha^0 = 1 \bullet$

 $.lpha^{eta+1}=lpha^eta\cdotlpha$ יהי eta סודר אזי יהי eta

 $.lpha^eta = igcup_{\gamma < eta} (lpha^\gamma)$ יהי eta סודר גבולי אזי •

 $.\gamma^{\alpha}<\gamma^{\beta}$ אזי $1<\gamma$ וכן $\alpha<\beta$ ובאשר סודרים α,β,γ יהיו יהיו יהיו

 $\alpha^{\gamma} \leq \beta^{\gamma}$ אזי $\alpha < \beta$ טענה: יהיו α, β, γ סטענה: יהיו α, β, γ סודרים אזי α, β, γ סטענה: יהיו α, β, γ

 $\alpha^{-1}\alpha^{-1}=\alpha^{-1}$ and α,β,γ and α,β,γ

 $.\left(lpha^{eta}
ight)^{\gamma}=lpha^{eta\cdot\gamma}$ אזי מענה: יהיו $lpha,eta,\gamma$ סודרים אזי

 $\omega^2>2^\omega$ וכן $\omega^2=\omega\cdot\omega$ וכן $\omega^1=\omega$ וכן $\omega^2=\omega$ וכן $\omega^0=\omega$ וכן $\omega^0=\omega$

 $\omega^{lpha} \geq lpha$ טענה: יהי lpha סודר אזי

טענה צורת קנטור נורמלית: יהי $\beta_i>\beta_j$ סדר אזי קיים ויחידים $\beta_1\dots\beta_k$ קיימים ויחידים אזי קיים ויחיד סיים ויחיד סיים ויחידים אויחידים $k<\omega$ סיים ויחידים אזי קיים ויחידים $\alpha=\sum_{i=1}^k\omega^{\beta_i}\cdot n_i$ עבורם עבורם ויחידים $\alpha=\sum_{i=1}^k\omega^{\beta_i}\cdot n_i$

 $.\xi<\alpha$ וכן $\beta=\alpha\cdot\delta+\xi$ עבורם ξ,δ סודרים ויחידים אזי קיימים וכן $\alpha<\beta$ וכן באשר באשר סודרים α,β יהיו יהיו טענה:

|eta|<|lpha| מתקיים eta<lpha עבורו לכל lpha

 $\aleph_0 = \omega$:סימון

```
טענה: יהיו \alpha, \beta סודרים בני מנייה אזי \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^{\beta} סודרים בני מנייה.
                                                                                        . טענה: קיים סודר \alpha המקיים \omega < \alpha המקיים \alpha אינו בן מנייה
                                                                                                     .\delta < \kappa טענה: יהי \delta סודר אזי קיים מונה א באשר
                                                                                   lpha < lpha^+ סודר אזי lpha^+ הינו המונה הראשון עבורו lpha^+ סימון: יהי
                                                                                                                 \aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha}^+ אזי \alpha סודר אזי מיהי אוי הגדרה א: יהי
                                                                                                    \aleph_{\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} \aleph_{\beta} אזי גבולי סודר מודר \alpha יהי : איז הגדרה
                                                                                                                          טענה: יהי \alpha סודר אזי \alpha מונה.
                                                                                          \kappa=\aleph_{lpha} עבורו סיענה: יהי מונה אזי קיים ויחיד סודר מונה א
                                                                                                                         \omega_{\alpha}=\aleph_{\alpha} סודר אזי סודר מימון: יהי סימון:
                                                                              |\delta|=leph_lpha אזי אוי|\delta|=|lpha_lpha| אזי אינסופיים באשר אינסופיים סימון: יהיו
הערה: כאשר מבצעים פעולות בין מונים הכוונה היא לפי ההגדרה של עוצמות, כאשר מבצעים פעולות בין סודרים הכוונה היא לפי
                                                                                                                                         ההגדרה של סודרים.
הגדרה: יהי \alpha סודר אזי יחס סדר \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \rangle באשר לכל \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha} \rangle באשר לכל הגדרה: יהי \alpha סודר אזי יחס סדר אי
                                                                                                                                                          מתקיים
                                                                                                                         \max(\beta, \gamma) < \max(\delta, \kappa) \bullet
                                                                                                            .\beta < \delta וכן \max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa) •
                                                                                             .\gamma < \kappa וכן \beta = \delta וכן \max(\beta, \gamma) = \max(\delta, \kappa)
                                                                                                 טענה: יהי \alpha סודר אזי \langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}, \lhd \rangle יחס סדר טוב.
                                                                                                   .otp (\langle \aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}, \lhd \rangle) = \aleph_{\alpha} משפט: יהי \alpha סודר אזי משפט:
                                                                                                                 \aleph_{\alpha}\cdot\aleph_{\alpha}=\aleph_{\alpha} מסקנה: יהי \alpha סודר אזי מסקנה:
                                                                                                                    משפט: יהיו \kappa,\lambda מונים אינסופיים אזי
                                                                                                                               .\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\} \bullet
                                                                                                                                 .\kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\} \bullet
                                                                                                                              מסקנה: יהיו lpha,eta סודרים אזי
                                                                                                                            \aleph_{\alpha} + \aleph_{\beta} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \bullet
                                                                                                                              \aleph_{\alpha} \cdot \aleph_{\beta} = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}} \bullet
                                f\left(X
ight)\in X מתקיים X\in S מתקיים f:S	o A מוק באשר S פונקציית בחירה: תהא
                             אקסיומת הבחירה (AC): תהא S קבוצה באשר קבוצה באיר אינה טענה S אווי אינה אינה טענה אקסיומת הבחירה (AC).
                                                               g:\mathbb{N}	o A אזי (קיימת f:A	o\mathbb{N} חח"ע) אזי (קיימת f:A	o\mathbb{N} אזי (קיימת מענה: תהא
         A משפט הסדר הטוב/משפט צרמלו: תהא A קבוצה עבורה קיימת פונקציית בחירה על
                                                         הגדרה משפט הסדר הטוב: תהא A קבוצה אזי קיים סדר טוב על A. זוהי אינה טענה
                                                                                                                    משפט: (AC)\Longleftrightarrow(AC)
                                                          AC טענה: תהא A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד סודר lpha עבורו A קבוצה אינסופית אזי קיים ויחיד
                                                                               אינה טענה ,AC דורש .2^{\aleph_0}=leph_1:(CH) השערת הרצף הפרטית
                                                     אינה טענה ,AC אורי אינה אינה אינה מודר אזי (GCH): יהי lpha סודר איזי יהי אינה אינה מערת הרצף הכללית
                                                                                                                             .ZFC בלתי תלויה ב־CH
                                                                                                                           .ZFC בלתי תלויה ב־GCH
                                                                                                                               הערה: AC בלתי תלויה ב־ZF.
                                                                        AC טענה: תהא B\subseteq A בת מנייה. דורש אזי קיימת אורט קבוצה אינסופית אזי קיימת
  AC טענה: תהא (A_n\mid n\in\mathbb{N}) סופית או בת מנייה. דורש או בת מנייה לכל A_i סופית או בת מנייה. דורש
          (b \leq a) \Longrightarrow (b=a) מתקיים b \in A באשר לכל a \in A עבורו קיים b \in A מתקיים עבורו חלקי סדר חלקי מינימלי: סדר חלקי b \in A
           a\in A מתקיים (b\leq a) מתקיים a\in A באשר לכל b\in A עבורו קיים b\in A עבורו קיים איבר מקסימלי: סדר קווי בעל איבר מקסימלי:
הגדרה הלמה של צורן: יהי \langle P, \leq 
angle יחס סדר טוב עבורו לכל שרשרת A \subseteq P קיים חסם מלעיל אזי קיים ב־P יחס סדר טוב עבורו
                                                                                                                         (AC) \Longleftrightarrow (AC)משפט:
```

```
n<\omega לכל x_n\in X באשר x_n\mid m<\omega באשר אזי קיימת מעל אין לכל x_n\in X באשר אקסיומת הבחירה התלויה
                                                                                                           עבורה n<\omega לכל לכל x_nRx_{n+1} אינה טענה
                                                                                   (DC) \Longrightarrow (AC_{\omega}) וכן (AC) \Longrightarrow (AC_{\omega}) \Longrightarrow (AC_{\omega})
         \prod_{i\in I}X_i=\left\{f\mid \left(f:I	o igcup_{i\in I}X_i
ight)\wedge (orall i\in I(f(i)\in X))
ight\} קבוצות אזי \left(X_i\mid i\in I
ight) קבוצה ותהיינה קבוצה אזי קבוצות אזי
                          AC טענה: תהא \alpha \in I אזי \alpha \in I אזי X_{lpha} 
eq \alpha קבוצות באשר קבוצה X_i \mid i \in I אזי X_i \mid i \in I סענה: תהא
                                  .(AC)\Longleftarrow(\prod_{i\in I}X_i
eq\varnothing אזי \alpha\in I אזי \alpha\in I סענה: (לכל קבוצה X_i\mid i\in I) טענה:
                                                                             (AC) \longleftarrow (|A| \geq |B| או |A| \leq |B| מתקיים A,B מתקיים
                                                                       AC טענה: יהי \mathbb F שדה ויהי \langle V,+,\cdot 
angle מ"ו מעל \mathbb F אזי קיים בסיס ל
A_i = |B_i| אזי ארות באשר אויר אוינה אוי ותהיינה אוי ארות ותהיינה לA_i = |B_i| לכל לכל אוי ההא לכל וותהיינה לA_i = |B_i| לכל לכל אוי
                                                                                                                           AC דורש .\left|\bigcup_{i\in I}A_i\right|=\left|\bigcup_{i\in I}B_i\right|
AC דורש .\sum_{i \in I} \kappa_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|
                   |A_i|=|B_i| סטענה: תהא I קבוצות ההיינה |A_i|=|B_i| קבוצות ותהיינה |A_i|=|B_i| לכל לכל וואזי
                                                                                                                          AC דורש .\left|\prod_{i\in I}A_i\right|=\left|\prod_{i\in I}B_i\right|
             מנים: תהא |A_i|=\kappa_i לכל |A_i|=\kappa_i מונים ותהיינה אזיי אויינה |A_i|=\kappa_i קבוצות באשר אזיי אויינה |A_i|=\kappa_i איי
                                                                                                                             AC דורש .\prod_{i \in I} \kappa_i = \left| \prod_{i \in I} A_i \right|
                                                                                        .AC הערה: מכאן והלאה לא ייסומן כאשר הטענות יסתמכו על
                                                                        \sum_{i<\lambda}\kappa=\kappa\cdot\lambda אזי \kappa\geq 1 מונה אינסופי ויהי \kappa מונה באשר מונה אזי מונה \lambda
                 \sum_{i<\lambda} \kappa_i = \sup\left\{\kappa_i \mid i<\lambda
ight\}\cdot \lambda אזי i<\lambda לכל \kappa_i\geq 1 מונים באשר מונה אינסופי ויהיו (היי ויהיו \{\kappa_i \mid i<\lambda\} מונים באשר
                                                                                                                                     \sum_{1 \leq n < \aleph_0} n = \aleph_0 טענה:
                                                                                                                                    \prod_{1\leq n<\aleph_0} n=2^{\aleph_0} טענה:
  \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i אזי i\in I לכל הא לכל לכל משפט קניג: תהא i\in I מונים ויהיו אונים ויהיו \lambda_i \mid i\in I מונים משפט קניג: תהא
וכן i<\delta לכל lpha>lpha_i המקיימת סודר היה אוי הסודר המינימלי \delta עבורו קיימת סדרה עולה \langle lpha_i \mid i<\delta \rangle המקיימת סודר גבולי אזי הסודר המינימלי
                                                                                                                                                     .\alpha = \bigcup_{i < \delta} \alpha_i
                                                                                              \operatorname{cof}(\alpha) הינה \alpha סודר גבולי אזי הסופיות של סודר גבולי סודר גבולי
                                                                                          \operatorname{cof}(\aleph_{\omega}) = \omega וכן \operatorname{cof}(\omega + \omega) = \omega וכן \operatorname{cof}(\omega) = \omega
                                                                                                          .lpha=\cos{(lpha)} סודר סדיר: סודר גבולי lpha המקיים
                                                                                                          lpha 
eq \cot(lpha) סודר חריג: סודר גבולי lpha המקיים
                                                                                                                 מונה. \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                                         טענה: יהי \kappa מונה אזי \kappa סודר גבולי.
                                                                                                    \operatorname{cof}(\operatorname{cof}(\alpha)) = \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                          . מונה סדיר מונה \operatorname{cof}\left(\alpha\right) אזי מונה סדיר סדיר מונה מיהי יהי
.(\kappa = \sum_{i < \lambda} \kappa_i עבורם i < \lambda לכל לכל \kappa_i < \kappa מונה אזי (\kappa_i < \kappa חריג) לקיים סודר i < \kappa וקיימים מונים (\kappa_i < \kappa באשר i < \kappa באשר א
                                                                                                             AC טענה: יהי lpha סודר אזי lpha_{lpha+1} סדיר. דורש
                                                                                                         \operatorname{cof}(\aleph_{\alpha}) = \operatorname{cof}(\alpha) טענה: יהי \alpha סודר גבולי אזי
                                                                                                                                          \operatorname{cof}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0 :טענה
                                                                                                                       \aleph_{\alpha} יהי אזי גבולי: יהי \alpha סודר גבולי
```

אסיומת הבחירה הבת־מנייה ((AC_ω) : תהא S קבוצה בת־מנייה באשר S אזי קיימת פונקציה בחירה עבור S. אוהי אינה טענה

טענה: יהי α סודר עבורו α מונה גבולי וכן קיים $\beta<\alpha$ וקיים מונה איז לכל α אזי לכל α מונה איז מונה איז מונה איז מונה איז מונה איז מונה בורו α מונה איז מונה איז מונה בורו α מונה איז מונה איז

.אָ $_{lpha}$ יהי lpha סודר עוקב אזי מונה עוקב:

 $\mathbb{J}(\kappa)=\kappa^{\mathrm{cof}(\kappa)}$ איז מונה איז מימון: יהי κ מונה איז מונה מינה יהי λ

מסקנה: יהי \aleph_{α} מונה עוקב אזי מונה סדיר.

 $.2^{<\kappa}=\sup\left\{2^{\lambda}\mid ($ מונה אוי $\lambda)\wedge(\lambda<\kappa)
ight\}$ מונה אוי מונה מונה אוי

```
.2^{\aleph_lpha}= גו(2^{<\aleph_lpha}) אזי איז eta < \gamma < lpha עבורו eta \leq \gamma < lpha מונה גבולי וכן לכל eta < lpha ולכל מונה \lambda < \kappa קיים \lambda < \kappa סטענה: יהי
                                                                                                       מסנן: תהא F \subseteq \mathcal{P}\left(X\right) אזי קבוצה אזי קבוצה מסנן:
                                                                                                                                   X \in F וכן \varnothing \notin F
                                                                                                               A \cap B \in F אזי A, B \in F תהיינה
                                                                                     B\in F אזי A\subseteq B באשר B\subseteq X ותהא A\in F תהא
                                     X\backslash Y\in F אזי מסנן Y\in F מתקיים Y\subseteq X עבורו לכל אזי מסנן F\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) אזי מסנן על־מסנן: תהא
                                  AC טענה: תהא G\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) באשר F\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) זורש אזי קיים על־מסנן אזי קיים על־מסנן ויהי
      F=\{Y\subseteq X\mid A\subseteq Y\} המקיימת A
eq\varnothing באשר A
eq\varnothing באשר A
eq\varnothing עבורו קיימת איי מסנן ראשי: תהא A
eq\varnothing באשר איי מסנן ראשי
                                    F=\{Y\subseteq X\mid a\in Y\} עבורו a\in X מסנן ראשי אזי קיים F\subseteq\mathcal{P}\left(X
ight) יטענה: תהא א קבוצה ויהי
                                            AC טענה: תהא Y קבוצה אינסופית אזי קיימת F\subseteq \mathcal{P}\left(X
ight) באשר דורש
                                                                                          \aleph_{\alpha}=\alpha טענה: יהי 	au סודר אזי קיים סודר lpha עבורו 	au
                                                                       . מונה אי נשיג חלש: יהי lpha סודר אזי מונה lpha באשר מונה גבולי וסדיר מונה אי נשיג חלש: יהי
                           .((GCH) מתקיים (\aleph_{\alpha}) אי נשיג חלש) מתקיים (\alpha אי נשיג חזק) (אי נשיג חזק)).
                                                                          V_{\omega}=igcup_{n\in\mathbb{N}}V_n וכן n\in\mathbb{N} לכל ליכל V_{n+1}=\mathcal{P}\left(V_n
ight) וכן V_0=\varnothing :הגדרה
                                                                                               A \in V_\omega באשר A באשר קבוצה קבוצה חופית באופן תורשתי:
                                                         . טענה: תהא V_{\omega} קבוצה טרנזיטיבית הסופיות האופן עורשתי אזי עולה: תהא קבוצה סרנזיטיבית.
                                                x\in V_\omega טענה: תהא x\subseteq V_\omega סופית אזי באופן תורשתי ותהא x\subseteq V_\omega סופית אזי
                                                                                        טענה: תהא קבוצת הקבוצות הסופיות באופן עורשתי אזי V_{\omega} טענה:
                                                                         "אקסיומת האינסוף. לא מקיימת את אזי x \in V_\omega אזי אזי x \in V_\omega תהא
                                                                       "אקסיומת הזיווג את אקסיומת הזיווג \{x,y\}\in V_\omega אזיx,y\in V_\omega מקיימת \bullet
                                                                   "מקיימת את אקסיומת קבוצת החזקה. \mathcal{P}\left(x
ight)\in V_{\omega} אזי x\in V_{\omega} תהא x\in V_{\omega}
                                                "מקיימת את אקסיומת ההחלפה. Im (f) \in V_\omega אזי f: x 	o V_\omega ותהא x \in V_\omega תהא x \in V_\omega
                              V=igcup_{lpha\in\mathcal{O}_{-}}V_{lpha} וכן V_{eta}=igcup_{\gamma<eta}V_{\gamma} אזי אזי \gamma סודר אזי וכן יהי וכן יהי וכן יהי \gamma סודר אזי \gamma
                                                                                                                       מסקנה: V מודל של תורת הקבוצות.
                                                                                                                  \operatorname{cof}(2^{\aleph_{\alpha}}) > \aleph_{\alpha} טענה: יהי \alpha סודר אזי
                                                                                               \operatorname{cof}(\kappa^{\aleph_{\alpha}}) > \aleph_{\alpha} מסקנה: יהי \alpha מונה ויהי \alpha סודר אזי
                                                                                              \mathfrak{L}^{\aleph_{eta}}_{lpha}=2^{\aleph_{eta}} אזי lpha<eta סענה: יהיו lpha,eta סודרים באשר
                                                                  |\{X\subseteq\aleph_lpha\mid |X|=\aleph_eta\}|=\aleph_lpha^{lpha_eta} אזי eta\leqlpha סודרים באשר מדרים אזי lpha,eta
                                                  .(\aleph_{lpha}^{\aleph_{eta}}=\aleph_{lpha} סיענה: (GCH) אוכן eta<lpha סודרים באשר סודרים (GCH) טענה:
                                               (\mathrm{GCH}) מסקנה: א\beta<\mathrm{cof}\left(\aleph_{lpha}
ight) סודרים באשר מסקנה: של לכל (GCH) מסקנה:
                                                .(אָ^{\aleph_{eta}}_{lpha}=\left\{egin{array}{ll} \aleph_{eta}^{+1} & \stackrel{eta\geqlpha}{\beta<lpha} \end{array} 
ight.מסקנה: (GCH) מסקנה: מסקנה אוריים באשר (^{\aleph_{eta}}_{lpha} סודרים באשר
                                                         (\aleph_{\alpha}^{\kappa_{\alpha}})^{\beta<\alpha} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1} & \beta\geq\alpha \\ \aleph_{\alpha+1} & (\beta<\alpha)\wedge(\aleph_{\beta}<\cos(\aleph_{\alpha})) \end{cases}מסקנה: (GCH) (GCH) מסקנה: (GCH) (GCH) מסקנה: מחדרים מתקיים (\alpha,\beta סודרים מתקיים (\alpha,\beta) סודרים אזי \alpha,\beta סודרים אזי \alpha,\beta
                                  A\subseteq \delta המקיים \delta<\kappa עבורה קיים A\subseteq \kappa אזי קבוצה איז איז מונה סדיר באשר א מונה סדיר באשר איז קבוצה איז קבוצה איז מונה סדיר באשר
\bigcup_{i < \tau} \alpha_i \in C מתקיים i < j
        קבוצה סגורה ולא חסומה (סל"ח): יהי \kappa מונה סדיר באשר איי קבוצה סגורה ולא חסומה (סל"ח): יהי \kappa מונה סדיר באשר איי קבוצה סגורה ולא
                                                      . סענה: יהי \kappa מונה סדיר באשר א0 \in C_0 ותהיינה אונה \kappa סל"ח אזי מונה סדיר באשר איזי מונה מענה: יהי
        . סל"ח אזי i<\lambda סל"ח לכל היי מונה סדיר באשר אזי \lambda<\kappa יהי ותהא \lambda<\kappa יהי א0<\kappa יהי מונה סדיר באשר יהי מונה סדיר באשר
           f(lpha)=igcup_{eta<lpha}f(eta) גבולי מתקיים lpha<\kappa אוי f:\kappa	o\kappa אוי איז איז איז איז מונה סדיר באשר פונקציה רציפה: יהי lpha מונה סדיר באשר
                                                       . רציפה שומרת סדיר האיז f:\kappa \to \kappa אזי א\kappa_0<\kappa מונה סדיר מונה מדיר האיז הורמלית: יהי
           C=\mathrm{Im}\,(f) טענה: \kappa 	o \kappa מונה סדיר באשר \kappa 	o C ותהא א\kappa 	o C אזי ותהא \kappa 	o C אזי ותהא א מונה סדיר באשר
                      S\cap C
eq \emptyset מתקיים מונה סדיר באשר איז קבוצה לכל סל"ח C\subseteq \kappa עבורה לכל איז קבוצה איז קבוצה איז איז קבוצה איז מונה סדיר באשר
```

```
טענה: יהי \alpha מונה סדיר באשר \alpha < 0 ותהא \alpha < 0 חסומה אזי \alpha < 0 אינה שבת. |S| = \alpha ותהא \alpha < 0 שבת אזי \alpha < 0 ותהא \alpha < 0 ותהא \alpha < 0 שבת אזי \alpha < 0 המקיים \alpha < 0 אזי \alpha < 0 אזי \alpha < 0 שבת. |S| = \alpha טענה: יהי \alpha מונה סדיר באשר \alpha < 0 ותהא \alpha < 0 שבת ויהי \alpha < 0 סל"ח אזי \alpha < 0 שבת. |S| = \alpha עבורו \alpha < 0 שבת ויהי \alpha < 0 סל"ח אזי \alpha < 0 שבת. |S| = \alpha עבורו \alpha < 0 שבת ויהי \alpha < 0 אזי (\alpha < 0 שבת) \alpha < 0 נורמלית קיים \alpha < 0 עבורו \alpha < 0 שבת. |S| = \alpha < 0 אזי (\alpha < 0 שבת) \alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 (\alpha < 0 ויהי \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 ויהי \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 ויהי \alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 (\alpha < 0 ויהי \alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 (\alpha < 0 ויהי \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 ויהי \alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אזי (\alpha < 0 מונה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אוניה סדיר אוניה סדיר באשר \alpha < 0 מונה סדיר אוניר אוניה סדיר אוניה אוניה סדיר אוניה סדיר אוניה סדיר אוניה סדיר אוניה מיינה מיינה מיינה מיינה סדיר אוניה מיינה מי
```

 $S_\delta=\{lpha<\kappa\mid($ סודר גבולי) lpha סונה סדיר אזי lpha<(lpha) מונה סדיר אויהי $lpha<\kappa$ מונה סדיר אויהי $lpha<\kappa$ ויהי $lpha<\kappa$ ויהי $lpha<\kappa$ מונה סדיר אזי $lpha<\kappa$ שבת. $lpha<\kappa$ ויהי $lpha<\kappa$ ויהי $lpha<\kappa$ מונה סדיר אזי lpha

 $S_{\delta_1}\cap S_{\delta_2}=arnothing$ אזי $\delta_1
eq \delta_2$ אונים סדירים באשר $\delta_1,\delta_2<\kappa$ ויהיו $\delta_1<\kappa$ ויהיו מונה סדיר באשר

 $C \not\subseteq S$ מתקיים מסקנה: יהי לכל איזי מונה סדיר באשר אזי קיימת איזי קיימת אזי קיימת אזי מונה סדיר באשר מסקנה: יהי

טענה שובך היונים: יהי α מונה סדיר יהי $\alpha<\mu<$ סודר חהיינה $\{A_{\alpha}\mid \alpha<\mu\}$ קבוצות זרות באשר היונים: יהי $\alpha<\mu<$ אזי קיים סודר היונים: יהי $\alpha<\mu<$ עבורר $\alpha<\mu<$.

 $\kappa=\left|f^{-1}\left[\{lpha^\star\}
ight]
ight|$ עבורו עבור $lpha^\star<\mu$ אזי קיים סודר $lpha^\star<\mu$ סודר ותהא $lpha=\mu<\kappa$ סטענה: יהי lpha מונה סדיר באשר $lpha=\bigcup_{lpha<\mu}A_lpha$ יהי $lpha=\lambda$ סודר ותהיינה $lpha=\lambda$ קבוצות זרות באשר $lpha=\lambda$ אי קיים סודר $lpha=\lambda$ עבורו $lpha=\lambda$ שבת. $lpha=\lambda$

סודר ותהיינה $\{A_{lpha}\mid lpha<\mu\}$ קבוצות ארות שבת היי שבת היי א שבת היינה אונה סדיר באשר א איי קיים סודר מסקנה: היי א $S\subseteq \kappa$ שבת ההיינה אונה שבת היים מודר א A_{lpha^*} עבורו אבת. A_{lpha^*}

עבורו $\alpha^*<\mu$ אזי קיים סודר $f:S o\mu$ אחדר ותהא שבת יהי $\mu<\kappa$ שבת יהי א מונה סדיר באשר איזי קיים סודר א $S\subseteq\kappa$ עבורו אזי קיים סודר $f:S\to\mu$ שבת.

 κ שבת אזי $S^*\subseteq S$ שבת אזי חודר ותהא $\mu<\kappa$ סודר יהי שבת אבת אזי κ עבורה אזי היימת אונה סדיר באשר אזי κ עבורה אזי κ שבת יהי κ שבת היי κ שבת היי κ שבת היי κ שבת היי κ שבת היימת אזי קיימת κ

 $f\left(lpha
ight)<lpha$ מתקיים $lpha\in S$ מתקיים $lpha\in S$ פונקציה דוחסת: יהי lpha מונה סדיר ותהא $lpha<\kappa$ אזי אינ מונה סדיר ותהיינה $lpha<\kappa$ קבוצות באשר $lpha\subset \kappa$ לכל $lpha<\kappa$ אזי $lpha<\kappa$ מונה סדיר ותהיינה $lpha<\kappa$ קבוצות באשר $lpha<\kappa$ ($lpha<\kappa$) קבוצות באשר $lpha<\kappa$ ($lpha<\kappa$)

 $\Delta_{lpha<\kappa}\left(\kappaackslashlpha
ight)=\kappa$ מסקנה: יהי κ מונה סדיר אזי

 $.\kappa$ סל"ח ב־ אזי $\Delta_{\alpha<\kappa}C_{lpha}$ אזי הי סל"ח סל"ח סל"ח ב־ סל"ח בי אויהיו א $0<\kappa$ סל"ח ב־ משפט: יהי א מונה סדיר באשר

 $.\kappa \setminus lpha \in F$ מתקיים $lpha < \kappa$ עבורו לכל א $F \subseteq \mathcal{P}\left(\kappa
ight)$ אזי מסנן אזי מונה סדיר באשר א מונה אזי מסנן אזי מסנן אזי מסנן

 $S=igcup_{lpha<\aleph_1}S_lpha$ עבורן $lpha<\aleph_1$ לכל $lpha<\aleph_1$ לכל $lpha<\aleph_1$ שבת אזי קיימות קבוצות זרות ארות $S\subseteq lpha$ שבת ב־lpha<lpha<lpha שבת אזי קיימות קבוצות זרות מסקנה: יהי lpha מונה סדיר באשר lpha<lpha<lpha ותהא $lpha\subseteq S$ שבת עבורה לכל lpha<lpha<lpha מתקיים lpha<lpha<lpha אזי קיימות קבוצות זרות lpha<lpha<lpha שבת ב־lpha לכל lpha<lpha<lpha עבורן lpha<lpha<lpha באשר lpha שבת ב־lpha לכל lpha<lpha<lpha עבורן lpha<lpha<lpha

מסקנה: יהי $\alpha\in S$ מתקיים $\alpha\in S$ מונה סדיר ותהא $S\subseteq \kappa$ שבת עבורה לכל מונה סדיר באשר איי מונה מיסקנה: יהי $\alpha\in S$ מונה סדיר מונה מונה מונה סדיר באשר איי מונה מונה סדיר ותהא איי באשר ב־ $\alpha<\kappa$ שבת ב- $\alpha<$

אזי קיימות קבוצות זרות $\alpha\in S$ מחקיים מסקנה: יהי א מונה סדיר באשר א $\aleph_0<\kappa$ ותהא א בת עבורה לכל מסקנה: יהי א מונה סדיר באשר א ותהא א בת עבורה א שבת עבורה לכל מסקנה: יהי א מונה סדיר באשר א באשר מסקנה: יהי א לכל א עבורן מסקנה: יהי א מחקיים מסקנה: יהי א מחקיים מסקנה: יהי א מסקנה: יהי א מחקיים מסקנה: יהי א מח