פונקציה קדומה:

- תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ גזירה המקיימת $F'=f$.
- תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $F\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירה המקיימת $F'(x)=f(x)$ לכל $x\in(a,b)$ ומקיימת $F'_{+}(a)=f(a)$ וכן $F'_{-}(b)=f(b)$.

אינטגרל לא מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ אזי $\int f=\left\{F\in\mathbb{R}^{I}\mid F'=f\right\}$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ תהא $F\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ קדומה ותהא $G\in\mathbb{R}^{(a,b)}$ אזי $(G'=f)\Longleftrightarrow(\exists c\in\mathbb{R}.G=F+c)$.

הערה: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי מקובל לסמן $\int f=F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$.

טענה: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{I}$ בעלות פונקציות קדומות אזי

- $\int(f+g)=\left(\int f\right)+\left(\int g\right)$.
- יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי $\int(\alpha f)=\alpha\left(\int f\right)$.

טענה אינטגרציה בחלקים: תהיינה $u,v\in\mathbb{R}^{I}$ גזירות אזי $\int uv'=u\cdot v-\int u'v$.

טענה החלפת משתנים: תהא $f\in\mathbb{R}^{I}$ ותהא $F\in\int f$ אזי $F\circ g=\int((f\circ g)\cdot g')$.

חלוקה: יהי $[a,b]$ אזי $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ המקיימות $a=x_0<x_1\ldots<x_{n-1}<x_n=b$.

סימון: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$.

מדד העדינות: תהא $\Pi=\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\lambda(\Pi)=\max_{i=1}^{n}|\Delta x_i|$.

עידון: תהא Π_1 חלוקה אזי חלוקה Π_2 המקיימת $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

טענה: תהא Π_1 חלוקה וכן Π_2 עידון אזי $\lambda(\Pi_2)\leq\lambda(\Pi_1)$.

נקודות מתאימות: תהא $\{x_0,\ldots,x_n\}$ חלוקה אזי $\{t_1\ldots t_n\}$ המקיימות $t_i\in[x_{i-1},x_i]$.$\forall i\in\{1\ldots n\}$.

סכום רימן: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $S(f,\Pi,\{t_i\})=\sum f(t_i)\Delta x_i$.

אינטגרביליות רימן: $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורה קיים $L\in\mathbb{R}$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ לכל נקודות מתאימות $\{t_i\}$ מתקיים $|S(f,\Pi,\{t_i\})-L|<\varepsilon$.

אינטגרל רימן מסויים: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $L=\int_a^b f$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אינטגרביליות רימן אזי $\int_a^b f=\int_{[a,b]}f=\int_{[a,b]}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

הערה: יהיו $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $\int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ אינטגרל על פי המשתנה φ.

הערה: כל עוד ברור מהו תחום האינטגרל וכן מהי הפונקציה כל הסימונים תקפים.

סימון: $R([a,b])=\left\{f\in\mathbb{R}^{[a,b]}\mid \text{אינטגרבילית רימן } f\right\}$.

הערה: ניתן להגדיר אינטגרביליות רימן בסימון $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{\lambda(\Pi)\to0}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

טענה: יהי $c\in\mathbb{R}$ תהא Π חלוקה ויהיו $\{t_i\}$ נקודות מתאימות אזי $\int_a^b c\cdot\mathrm{d}t=c(b-a)$.

טענה: $D(x)\notin R(\mathbb{R})$.

משפט: תהא $f\in R([a,b])$ אזי f חסומה.

סכום דרבו עליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

סכום דרבו תחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_i,x_{i-1}]}(f)\cdot\Delta x_i$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi)=\sup_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi)=\inf_{\{t_i\}\text{נקודות מתאימות}}S(f,\Pi,\{t_i\})$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_1\subseteq\Pi_2$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}(f,\Pi_1)\geq\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.
- $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\leq\underline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהיינה Π_1,Π_2 חלוקות אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi_1)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi_2)$.

האינטגרל העליון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\overline{I}(f)=\inf_{\text{חלוקה }\Pi}\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

האינטגרל התחתון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $\underline{I}(f)=\sup_{\text{חלוקה }\Pi}\underline{\Sigma}(f,\Pi)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\underline{\Sigma}(f,\Pi)\leq\underline{I}(f)\leq\overline{I}(f)\leq\overline{\Sigma}(f,\Pi)$.

קריטריון דרבו: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ חסומה אזי $(f\in R([a,b]))\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ לכל Π חלוקה המקיימת $\lambda(\Pi)<\delta$ מתקיים $\overline{\Sigma}(f,\Pi)-\underline{\Sigma}(f,\Pi)<\varepsilon$).

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ חסומה אזי $\int_{a}^{b}f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

תנודה: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי $\omega\left(f,J\right)=\sup_{x,y\in J}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה ויהי $x_{0}\in J$ אזי (f רציפה על x_{0})$\Longleftrightarrow\left(\lim_{\delta\to0}\omega\left(f,\left[x_{0}-\delta,x_{0}+\delta\right]\right)=0\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{J}$ חסומה אזי (f רציפה במ"ש)$\Longleftrightarrow\left(\forall I\subseteq J.\forall\varepsilon>0.\exists\delta>\text{len}\left(I\right).\omega\left(f,I\right)<\varepsilon\right)$.

תנודה כוללת ביחס לחלוקה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\omega\left(f,\left[x_{i-1},x_{i}\right]\right)\Delta x_{i}$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהא Π חלוקה אזי $\omega\left(f,\Pi\right)=\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ותהיינה $\Pi_{1}\cup\left\{ p_{1}\ldots p_{m}\right\} =\Pi_{2}$ חלוקות

- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\le\overline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)+m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.
- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{1}\right)\ge\underline{\Sigma}\left(f,\Pi_{2}\right)-m\lambda\left(\Pi_{1}\right)\omega\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ לכל Π חלוקה $\lambda\left(\Pi\right)<\delta$ מתקיים

- $\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\le\underline{I}\left(f\right)\le\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)+\varepsilon$.
- $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)\ge\overline{I}\left(f\right)\ge\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת $\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קריטריון דרבו משופר: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה אזי $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\Longleftrightarrow$(לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π עבורה $\overline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)-\underline{\Sigma}\left(f,\Pi\right)<\varepsilon$).

משפט: $C\left(\left[a,b\right]\right)\subseteq R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה ומונוטונית אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $f_{\upharpoonright_{\left[a,b\right]}}\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה ויהי $b\in\left[a,c\right]$ עבורה $\left(f\in R\left(\left[a,b\right]\right)\right)\wedge\left(f\in R\left(\left[b,c\right]\right)\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,d\right]}$ חסומה ויהיו $b<c\in\left[a,d\right]$ עבורה $f\in R\left(\left[a,d\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$.

משפט: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,c\right]}$ חסומה המקיימת $\forall b\in\left(a,c\right).f\in R\left(\left[b,c\right]\right)$ אזי $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y & x=b\\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $g\in R\left(\left[a,c\right]\right)$.

מסקנה: נגדיר $f\left(x\right)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$ אזי $f\in R\left(\left[-1,1\right]\right)$.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{\left[a,b\right]}$ חסומה המקיימת מונוטוניות או רציפות למקוטעין אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ תהא $H\in C\left(\mathbb{R}\right)$ וכן $c\in\mathbb{R}$

- $\left(f+g\right),\left(cf\right)\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.
- $\left(f\cdot g\right),\left(H\circ f\right),\left|f\right|\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

קבוצה ממידה אפס: $A\subseteq\mathbb{R}$ עבורה לכל $\varepsilon>0$ קיימים $\left\{ \left(a_{i},b_{i}\right)\right\} _{i=0}^{\infty}$ עבורם $A\subseteq\bigcup\left(a_{i},b_{i}\right)$ וכן $\sum\left(b_{i}-a_{i}\right)<\varepsilon$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ המקיימת $\left|A\right|\le\aleph_{0}$ אזי A ממידה אפס.

קבוצה צפופה: תהא $B\subseteq\mathbb{R}$ אזי $A\subseteq B$ המקיימת $\forall b\in B.\forall\varepsilon>0.\exists a\in A.\left|b-a\right|<\varepsilon$.

טענה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן קיימת A צפופה עבורה $f_{\upharpoonright_{A}}=g_{\upharpoonright_{A}}$ אזי $\int_{a}^{b}f=\int_{a}^{b}g$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ נגדיר $g\left(x\right)=\begin{cases} y_{i} & x\in\left\{ b_{1}\ldots b_{m}\right\} \\ f\left(x\right) & \text{else} \end{cases}$ אזי $\int_{a}^{c}f=\int_{a}^{c}g$.

משפט ליניאריות האינטגרנד: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_{a}^{b}\alpha f+\beta g=\alpha\int_{a}^{b}f+\beta\int_{a}^{b}g$.

משפט ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R\left(\left[a,c\right]\right)$ ויהי $b\in\left(a,c\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f+\int_{b}^{c}f=\int_{a}^{c}f$.

הגדרה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $\int_{a}^{b}f=-\int_{b}^{a}f$.

משפט חיוביות: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימת $f\ge0$ אזי $\int_{a}^{b}f\ge0$.

מונוטוניות האינטגרל: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_{a}^{b}f\ge\int_{a}^{b}g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ רציפה המקיימת $f\ge0$ וכן $\int_{a}^{b}f=0$ אזי $f=0$.

טענה: תהא $f\in R([a,b])$ המקיימת $m\le f\le M$ אזי $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ אזי $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|\le\sup_{[a,b]}(|f|)(b-a)$.

משפט רציפות האינטגרל המסויים: תהא $f\in R([a,b])$ נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F\in C([a,b])$.

משפט ערך ביניים ראשון: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $0\le g\in R([a,b])$ אזי קיים $x_0\in[a,b]$ עבורו $\int_a^b(f\cdot g)=f(x_0)\int_a^b g$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא $x_0\in[a,b]$ נקודת רציפות של f נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ אזי $F'(x_0)=f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

מסקנה: תהא $f\in R([a,b])$ יהיו $x_1\ldots x_n\in[a,b]$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]\setminus\{x_1\ldots x_n\}$ אזי $\int_a^b f=F(b)-F(a)$.

סימון: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ אזי $[f]|_a^b=f(b)-f(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,b])$ אזי $\int_a^b f'g=[f\cdot g]|_a^b-\int_a^b fg'$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in C([a,b])$ ותהא $\varphi\in C^1([\alpha,\beta],[a,b])$ המקיימת $(\varphi(\alpha)=a)\wedge(\varphi(\beta)=b)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$.

למה: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x$.

טענה דעיכת מקמדי פורייה בהינתן גזירות: תהא $f\in C^1([0,2\pi])$ ויהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\left|\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{2\pi\sup(|f'|)}{n}$.

אינטגרל רימן לא אמיתי: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ ותהא $f\in\mathbb{R}^I$ אזי

- חד צדדי חיובי: נניח $I=[a,\infty)$ וכן $\forall b\in[a,\infty).f\in R([a,b])$ אזי $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$.
- חד צדדי שלילי: נניח $I=(-\infty,b]$ וכן $\forall a\in(-\infty,b].f\in R([a,b])$ אזי $\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f$.
- דו צדדי: נניח $I=\mathbb{R}$ וכן $\forall a,b\in\mathbb{R}.(a<b)\Longrightarrow(f\in R([a,b]))$ אזי $\int_{-\infty}^\infty f=\int_{-\infty}^0 f+\int_0^\infty f$.
- לא חסום משמאל: נניח $I=(a,b]$ וכן $\forall c\in I.f\in R([c,b])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to a^+}\int_r^b f$.
- לא חסום מימין: נניח $I=[a,b)$ וכן $\forall c\in I.f\in R([a,c])$ אזי $\int_a^b f=\lim_{r\to b^-}\int_a^r f$.

סימון: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ אזי $R(I)=\left\{f\in\mathbb{R}^I\mid\text{קיים וסופי }\int_I f\right\}$.

משפט: יהיו $\omega,\eta\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ אזי

- ליניאריות האינטגרד: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\int_a^\omega(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^\omega f+\beta\int_a^\omega g$.
- ליניאריות בתחום האינטגרציה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ויהי $c\in(a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\int_a^c f+\int_c^\omega f$.
- מונוטוניות: תהיינה $f,g\in R([a,\omega))$ המקיימות $f\ge g$ אזי $\int_a^\omega f\ge\int_a^\omega g$.
- ניוטון לייבניץ: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $F\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $F'(x)=f(x)$ על $[a,\omega)$ אזי $\int_a^\omega f=\lim_{b\to\omega}F(b)-F(a)$.
- אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f,g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ גזירות עבורן $f',g'\in R([a,\omega))$ אזי $\int_a^\omega f'g=\lim_{b\to\omega}[f\cdot g]|_a^b-\int_a^\omega fg'$.
- שינוי משתנה: תהא $f\in R([a,\omega))$ ותהא $\varphi\in C^1([c,\eta),[a,\omega))$ המקיימת $\varphi(c)=a$ וכן $\lim_{b\to\eta}\varphi(b)=\omega$ אזי $\int_a^\omega f=\int_c^\eta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists B\in(a,\omega).\forall b_1,b_2\in[B,\omega).\left|\int_{b_1}^{b_2}f\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow(f\in R([a,\omega)))$.

התכנסות בהחלט: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ מתכנס.

התכנסות בתנאי: $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ עבורה $\int_a^\omega|f|$ אינו מתכנס אך $\int_a^\omega f$ מתכנס.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\int_a^\omega f$ מתכנס.

מסקנה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ עבורה $\int_a^\omega f$ מתכנס בהחלט אזי $\left|\int_a^\omega f\right|\le\int_a^\omega|f|$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימת $\forall b\in(a,\omega).f\in R([a,b])$ אזי $\left(\int_a^\omega f<\infty\right)\Longleftrightarrow$($F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ חסומה על $[a,\omega)$).

מסקנה: תהיינה $0\le f\le g\in\mathbb{R}^{[a,\omega)}$ המקיימות $\forall b\in(a,\omega).f,g\in R([a,b])$ אזי

- $\left(\int_a^\omega g<\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega f<\infty\right)$.
- $\left(\int_a^\omega f=\infty\right)\Longrightarrow\left(\int_a^\omega g=\infty\right)$.

משפט: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\left(\int_1^\infty f<\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty\right)$.

טענה: תהא $0\le f\in\mathbb{R}^{[1,\infty)}$ יורדת אזי $\sum_{n=2}^\infty f(n)\le\int_1^\infty f\le\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

משפט אבל: תהא $g\in C([a,\omega))\cap R([a,\omega))$ ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית וחסומה אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

משפט דיריכלה: תהא $g\in C([a,\omega))$ עבורה $G(x)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f\in C^1([a,\omega))$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f(x)=0$ אזי $\int_a^\omega fg$ מתכנס.

למה של בונה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר $0\le g$ וכן g יורדת אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=g\left(a\right)\int_a^{x_0}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

למה של אבל: תהא $a_n\ge 0$ סדרה יורדת ותהא b_n סדרה עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.m<\sum_{k=1}^n b_k<M$ אזי $a_1 m<\sum_{k=1}^n a_k b_k<a_1 M$.

משפט ערך ביניים שני: תהיינה $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ באשר g מונוטונית אזי קיים $x_0\in\left[a,b\right]$ עבורו $\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x=g\left(a\right)\int_a^{x_0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+g\left(b\right)\int_{x_0}^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

משפט שינוי משתנה: תהא $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $\varphi\in C^1\left(\left[\alpha,\beta\right],\left[a,b\right]\right)$ עולה ממש המקיימת $\left(\varphi\left(\alpha\right)=a\right)\wedge\left(\varphi\left(\beta\right)=b\right)$ אזי $\int_a^b f=\int_\alpha^\beta\left(f\circ\varphi\right)\cdot\varphi'$.

טענה: תהא $f\in C^{n+1}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $R_n\left(f,a\right)\left(x\right)=\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}\left(t\right)\left(x-t\right)^n\mathrm{d}t$.

סימון: יהי $k\in\mathbb{N}_+$ אזי $k!!=\prod_{n=0}^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor-1}\left(k-2n\right)$.

למה: יהי $m\in\mathbb{N}_+$ אזי $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(x\right)^m\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(x\right)^m\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & m\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}$.

משפט מכפלת ואליס: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\ldots(2n-2)\cdot(2n-2)\cdot2n}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n-1)\cdot(2n-1)}=\prod_{n=1}^\infty\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$.

משפט אבל: תהא $g\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$ ותהא $f:\left[a,\omega\right)\to\mathbb{R}$ מונוטונית וחסומה אזי $fg\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$.

משפט דיריכלה: תהא $g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורה $\forall b\in\left[a,\omega\right).$ $G\left(x\right)=\int_a^x g$ חסומה ותהא $f:\left[a,\omega\right)\to\mathbb{R}$ מונוטונית עבורה $\lim_{x\to\omega}f\left(x\right)=0$ אזי $fg\in R\left(\left[a,\omega\right)\right)$.

טענה נוסחאת סטירלינג: יהי $n\in\mathbb{N}$ אזי $\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\le n!\le\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}}$.

מסקנה: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}=\sqrt{2\pi}$.

פונקציית זטא של רימן: נגדיר $\zeta:\left(1,\infty\right)\to\mathbb{R}$ כך $\zeta\left(s\right)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}$.

טענה: $\lim_{s\to1^+}\zeta\left(s\right)\left(s-1\right)=1$.

משפט הרמיט: e הינו טרנסצנדנטי.

התכנסות נקודתית: יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}g\right)\Longleftrightarrow\left(\forall x\in I.\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=g\left(x\right)\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{p.w.}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{pointwise}}f\right)$.

טענה: תהא $f\in\mathbb{R}^I$ ותהא $f_n\in\mathbb{R}^I$ מתכנסת נקודתית אל f אזי
- רציפות: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in C\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in C\left(I\right)\right)$.
- אינטגרביליות רימן: $\left(\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R\left(I\right)\right)\not\Longrightarrow\left(f\in R\left(I\right)\right)$.
- גבול האינטגרל: נניח $f\in R\left(I\right)$ וכן $\forall n\in\mathbb{N}.f_n\in R\left(I\right)$ אזי $\left(\int_I f=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}\int_I f_n=L\right)$.
- נגזרת: יהי $x\in I$ נניח f גזירה ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים f_n גזירה אזי $\left(f'\left(x\right)=L\right)\not\Longrightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}f_n'\left(x\right)=L\right)$.

התכנסות במידה שווה (במ"ש): יהי I קטע מוכלל תהא $g\in\mathbb{R}^I$ ויהי $f\in\left(\mathbb{R}^I\right)^{\mathbb{N}}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{\text{uniform}}g\right)\Longleftrightarrow\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=0\right)$.

סימון: $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\Longleftrightarrow\left(f_n\xrightarrow{\text{unifom}}f\right)$.

טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\Longleftrightarrow\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall x\in A.\forall n>N.\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)$.

חסומה במידה אחידה: $f_n\in\mathbb{R}^I$ המקיימת $\exists M\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)\right|\le M$.

למה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^I$ חסומות במידה אחידה על ידי $M\in\mathbb{R}$ עבורן $\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)\wedge\left(g_n\xrightarrow{u}g\right)$ אזי $f_n g_n\xrightarrow{u}fg$.

משפט קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ אזי $\left(\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall n,m>N.\forall x\in I.\left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon\right)\Longleftrightarrow\left(\exists f\in\mathbb{R}^I.f_n\xrightarrow{u}f\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in C\left(I\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in C\left(I\right)$.

קבוצה קומפקטית: $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שלכל $\left\{I_n\right\}_{n\in\Lambda}$ קטעים פתוחים עבורם $A\subseteq\bigcup_{n\in\Lambda}I_n$ מתקיים $\exists\mathcal{B}\in\mathcal{P}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq\bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n$.

הלמה של היינה־בורל: יהיו $a<b$ אזי $\left[a,b\right]$ קומפקטית.

משפט דיני: תהיינה $f_n\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ ותהא $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ וכן $\forall n<m.f_m<f_n$ אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{p.w.}f$ באשר $f\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ וכן לכל $x\in\left[a,b\right]$ הסדרה $\left\{f_n\right\}_{n=0}^\infty$ מונוטונית אזי $f_n\xrightarrow{u}f$.

טענה: תהיינה $f_n\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $f\in R\left(\left[a,b\right]\right)$.

משפט: תהיינה $f_n\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\int_a^b f=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

פונקציית ויירשטראס: יהי $a\in(0,1)$ ויהי $b\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ עבורם $ab>1+\frac{3\pi}{2}$ אזי $W(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}\cos\left(b^{k}\pi x\right)$.

הגדרה: נגדיר $\triangle_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ כך $\left(\triangle_k=\frac{\triangle_0\left(4^k x\right)}{4^k}\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}.\triangle_0(x+1)=\triangle_0(x)\right)\wedge\left(\triangle_0(x)=\left\{\begin{smallmatrix}x & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 1-x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{smallmatrix}\right.\right)$.

טענה: $\triangle_n\xrightarrow{u}\triangle$.

מסקנה: $\triangle$ רציפה בכל נקודה.

משפט: $\triangle$ אינה גזירה באף נקודה.

משפט: תהיינה $f_n\in C^1([a,b])$ עבורה $f_n'\xrightarrow{u}g$ ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אזי $f_n\xrightarrow{u}f$ וכן $f'=g$.

סימון: תהיינה $f_n\in\mathbb{R}^I$ עבורה $\sum_{i=0}^{n}f_n\xrightarrow{u}f$ אזי $\sum_{i=0}^{\infty}f_n=f$ במ"ש.

משפט אינטגרציה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C([a,b])$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty}u_n$ במ"ש אזי $\int_a^b\sum_{i=0}^{\infty}u_n=\sum_{i=0}^{\infty}\int_a^b u_i$.

משפט גזירה איבר איבר: תהיינה $u_n\in C^1([a,b])$ עבורה $\sum u_i'$ במ"ש ותהא $x_0\in[a,b]$ עבורה $\sum u_i(x_0)$ מתכנס אזי $\sum u_i$ במ"ש וכן $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_i\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dx}u_i$.

משפט בוחן M של ויירשטראס: תהיינה $u_n\in\mathbb{R}^I$ ותהא $M\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty}M_n<\infty$ וכן $\forall x\in\mathbb{R}.\forall n\in\mathbb{N}.\left|u_n(x)\right|\le M_n$ אזי $\sum u_n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

למה התמרת אבל: תהיינה $a,b\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=1}^{n}a_k b_k=\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k}a_m\left(b_k-b_{k+1}\right)$.

משפט קריטריון אבל: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ מתכנסת במ"ש וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית וחסומה במידה אחידה אזי $\sum_{i=0}^{n}f_i g_i$ מתכנס במ"ש.

משפט קריטריון דיריכלה: תהיינה $f_n,g_n\in\mathbb{R}^{[a,b]}$ עבורן $\sum_{i=0}^{n}f_i$ חסומה במידה אחידה וכן $g_n\xrightarrow{u}0$ וכן לכל $x\in[a,b]$ הסדרה $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ מונוטונית אזי $\sum_{i=0}^{n}f_i g_i$ מתכנס במ"ש.

למה: תהא $f\in C([0,1])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיימת $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין עבורה $\max|f-\varphi|<\varepsilon$.

למה: תהא $f\in C([0,1])$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ נגדיר $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין ולינארית למקוטעין כך $\varphi(x)=f(0)+N\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(a_{k+1})-2f(a_k)+f(a_{k-1})\right)\max\{x-a_k,0\}$ אזי $\forall m\in\{0\ldots N\}.\varphi(a_m)=f(a_m)$.

למה: קיימות $p_n\in\mathbb{R}[x]$ עבורן $\lim_{n\to\infty}\max_{[-1,1]}\left|p_n(x)-|x|\right|=0$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי $\exists p\in\mathbb{R}[x].\max_{[a,b]}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$.

משפט ויירשטראס: תהא $f\in C([a,b])$ אזי קיימות $p_n\in\mathbb{R}[x]$ עבורן $p_n\xrightarrow{u}f$.

הגדרה: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

משפט: תהא $f\in C([0,1])$ אזי $B_n\xrightarrow{u}f$.

משפט מז'ורנטה: תהיינה $f_n\in R([a,\omega))$ עבורן $f_n\xrightarrow{u}f$ על $[a,b]$ ותהא $\Psi\in R([a,\omega))$ עבורה $\forall n\in\mathbb{N}.|f_n|\le\Psi$ אזי $\left(\forall b\in[a,\omega).f\in R([a,b])\right)\wedge\left(\int_a^{\omega}f\text{ מתכנסת בהחלט}\right)\wedge\left(\int_a^{\omega}f=\lim_{n\to\infty}\int_a^{\omega}f_n\right)$.

טענה: $\int_0^{\infty}e^{-x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

משפט: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות המתכנס עבור $q\in\mathbb{R}$ ויהי $r<|q|$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $[-|r|,|r|]$.

משפט אבל: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי קיים $R\in[0,\infty]$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $\begin{cases}\text{מתכנס} & x\in(-R,R)\\ \text{מתבדר} & x\notin[-R,R]\end{cases}$.

רדיוס ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי $R\in[0,\infty]$ המקיים את משפט אבל.

משפט קושי הדמר: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי רדיוס ההתכנסות הוא $\frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$.

הערה: יהי $\sum a_n x^n$ טור חזקות אזי $\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\right)\Longrightarrow(R=0)\right)\wedge\left(\left(\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0\right)\Longrightarrow(R=\infty)\right)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי (רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k$ הינו R)$\Longleftrightarrow$(רדיוס ההתכנסות של $\sum_{k=1}^{\infty}k a_k x^{k-1}$ הינו R).

מסקנה: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k a_k x^{k-1}$ על $(-R,R)$.

משפט: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ עם רדיוס R ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $f^{(m)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{k!}a_{k+m}x^k$ על $(-R,R)$.

מסקנה טור טיילור של טור חזקות: יהי $f=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ עם רדיוס R אזי $P(f,0)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ על $(-R,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $[0,R)$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות עם רדיוס R אשר לא מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ אינו מתכנס במ"ש על $(-R,0]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־R אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$.

משפט אבל על קצה תחום ההתכנסות: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות מתכנס ב־$-R$ אזי $\sum a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $[-R,0]$.

מסקנה: תהא $a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $\sum_{k=0}^{\infty}a_k<0$ אזי $\lim_{r\to1^-}\sum_{k=0}^{\infty}a_k r^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k$.

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי ($\sum k a_k x^{k-1}$ מתכנס ב־R)$\Longleftarrow$($\sum a_k x^k$ מתכנס ב־R).

טענה: יהי $\sum a_k x^k$ טור חזקות אזי ($\sum k a_k x^{k-1}$ מתכנס ב־$-R$)$\Longleftarrow$($\sum a_k x^k$ מתכנס ב־$-R$).

משפט: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ מתכנס בהחלט ותהא $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל אזי $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{p(i)}$.

טענה מכפלות קושי: יהיו $p, q \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ תמורות ויהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ טורי חזקות מתכנסים בהחלט על I אזי $\sum \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.

סכים לפי אבל: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ $\lim\limits_{r \to 1^-}$ $= (A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

התכנסות צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(C) \lim_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i}{n}$.

סכים לפי צ'זארו: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $(C) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i$.

סימון: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ אזי $\sigma_n\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \ell$ אזי $(C) \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \ell$.

משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$ אזי $(C) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$.

משפט: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(C) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$ אזי $(A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$.

משפט טאובר: תהא $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ עבורה $(A) \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho$ וכן $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$ אזי $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho$.

משפט: יהי $\sum a_k z^k$ טור טור חזקות מרוכב המתכנס עבור $w \in \mathbb{C}$ ויהי $r < |w|$ אזי $\sum a_k z^k$ מתכנס בהחלט ובמ"ש על $\overline{B}_r(0)$.

משפט אוילר: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי
- $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

טענה: תהא $f \in \mathbb{C}^{[a,b]}$ אזי $\exists! u, v \in \mathbb{R}^{[a,b]}. f = u + iv$.

סימון: יהיו $u, v \in R([a,b])$ אזי $u + iv \in R([a,b])$.

אינטגרל: יהיו $u, v \in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\int_a^b (u + iv) = \int_a^b u + i \int_a^b v$.

טענה: תהיינה $f, g \in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי
- $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
- $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- $\int_a^b cf = c \int_a^b f$.
- $\int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}$.

נגזרת: יהיו $u, v \in R_{\mathbb{R}}([a,b])$ אזי $\frac{d}{dx}(u + iv) = \frac{du}{dx} + i \cdot \frac{dv}{dx}$.

למה: תהא $f \in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $|f| \in R([a,b])$.

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי: תהא $f \in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא $x_0 \in [a,b]$ נקודת רציפות של f אזי $\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'(x_0) = f(x_0)$.

משפט ניוטון לייבניץ: תהא $f \in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ ותהא F קדומה של f על $[a,b]$ אזי $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

משפט אינטגרציה בחלקים: תהיינה $f, g \in \mathbb{C}^{[a,b]}$ גזירות עבורן $f', g' \in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\int_a^b f' g = [f \cdot g]|_a^b - \int_a^b f g'$.

מסקנה: תהא $f \in R_{\mathbb{C}}([a,b])$ אזי $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

פונקציה מחזורית: $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ עבורה $\exists T \in \mathbb{R}. \forall x \in \mathbb{R}. f(x + T) = f(x)$.

טורוס חד מימדי/מעגל: $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

סימון: $R(\mathbb{T}) = \{f \in R([0, 2\pi]) \mid \forall x \in \mathbb{R}. f(x + 2\pi) = f(x)\}$.

סימון: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $e_n(t) = e^{int}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $e_n(t) \in R(\mathbb{T})$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $m \in \mathbb{N}$ ויהיו $\{c_n\}_{n=-m}^{m} \in \mathbb{C}$ אזי $\sum_{n=-m}^{m} c_n e_n(t)$.

דרגה של פולינום טריגונומטרי: יהי $\sum_{n=-m}^{m} c_n e_n(t)$ פולינום טריגומוטרי עבורו $(c_m \ne 0) \vee (c_{-m} \ne 0)$ אזי m.

טענה: $R(\mathbb{T})$ מ"ו מעל $\mathbb{C}$.

הגדרה: יהיו $f, g \in R(\mathbb{T})$ אזי $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

טענה: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ מכפלה פנימית על $C(\mathbb{T})$.

טענה: $\langle e_n,e_m\rangle=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$.

מקדם פורייה ה־m: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(m\right)=\langle f,e_m\rangle$.

טענה: יהי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\left(t\right)$ פולינום טריגונומטרי אזי $\hat{f}\left(k\right)=c_k$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $f\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_n\left(t\right)$.

מסקנה: יהיו f,g פולינומים טריגונומטריים אזי $\langle f,g\rangle=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)\overline{\hat{g}\left(n\right)}$.

מסקנה: יהי f פולינום טריגונומטרי אזי $\|f\|^2=\sum_{n=-m}^{m}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^2$.

מקדם פורייה ה־m: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(m\right)=\langle f,e_m\rangle$.

פולינום פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $m\in\mathbb{N}$ אזי $\left(S_mf\right)\left(t\right)=\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}\left(n\right)e_n\left(t\right)$.

טענה: תהא $f\in R_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\hat{f}\left(-n\right)=\overline{\hat{f}\left(n\right)}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי (f ממשית)$\Longleftarrow$(S_mf ממשית).

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $|k|\le m$ אזי $\left(f-S_mf\right)\perp e_k$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f-S_mf\right)\perp S_mf$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\|f\|^2=\|S_mf\|^2+\|f-S_mf\|^2$.

טענה אי־שיוויון בסל: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^2\le\|f\|^2$.

מסקנה הלמה של רימן ולבג: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|=0$.

התכנסות בנורמת L_2: תהיינה $f_n,g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-g\|=0\right)\iff\left(f_n\xrightarrow{L_2}g\right)$.

הערה: התכנסות בנורמת L_2 איננה יחידה.

למה: תהא $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\|g\|\le\sup|g|$.

מסקנה: תהיינה $f_n\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\left(f_n\xrightarrow{L_2}f\right)\Longrightarrow\left(f_n\xrightarrow{u}f\right)$.

מסקנה: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי קיימת $p_n\in\mathbb{C}\left[x\right]$ עבורה $p_n\xrightarrow{L_2}f$.

משפט: תהא $f\in C_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{T}\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\sup\limits_{t\in[0,2\pi]}|p\left(t\right)-f\left(t\right)|<\varepsilon$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים פולינום טריגונומטרי p עבורו $\|p-f\|<\varepsilon$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי קיימיים p_n פולינומים טריגונומטריים עבורם $p_n\xrightarrow{L_2}f$.

משפט: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי $\lim\limits_{m\to\infty}\|S_mf-f\|=0$.

שיוויון פרסבל: $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|^2=\|f\|^2$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ אזי מתקיים שיוויון פרסבל.

מסקנה: תהיינה $f,g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ המקיימות $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}\left(n\right)=\hat{g}\left(n\right)$ אזי בכל נקודת רציפות של f,g מתקיים $f=g$.

טענה: תהא $f\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ יהי $m\in\mathbb{N}$ ויהיו $\left\{c_n\right\}_{n=-m}^{m}\in\mathbb{C}$ אזי $\left\|f-\sum_{n=-m}^{m}c_ne_n\right\|^2\ge\|f-S_mf\|^2$.

מסקנה: תהיינה $f_m,g\in R\left(\left[0,2\pi\right]\right)$ עבורן $\|f_m-g\|\xrightarrow[m\to\infty]{}0$ אזי $\forall n\in\mathbb{Z}.\hat{f}_m\left(n\right)\xrightarrow[m\to\infty]{}\hat{g}\left(n\right)$.

טור פורייה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $S_Nf\xrightarrow{p.w.}g$ באשר $g\in R\left(\mathbb{T}\right)$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}\left(n\right)e^{int}$.

מסקנה: תהא $f\in C\left(\mathbb{T}\right)$ עבורה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}\left(n\right)\right|<\infty$ אזי $S_Nf\xrightarrow{u}f$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[-\pi,\pi)}$ המוגדרת $f\left(t\right)=t$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_+.\hat{f}\left(n\right)=\frac{(-1)^ni}{n}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=0\right)$.
- $S_mf\left(t\right)=\sum_{n=1}^{m}\frac{2(-1)^{n+1}\sin(nt)}{n}$.
- יהי $r\in\left[0,\pi\right)$ אזי $S_mf\xrightarrow{u}f$ על $\left[-r,r\right]$.
- $f\xrightarrow{p.w.}S_mf$ על $\left(-\pi,\pi\right)$.

מסקנה: $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

למה: תהא $f\in\mathbb{R}^{[0,2\pi]}$ המוגדרת $f\left(t\right)=\frac{(\pi-t)^2}{4}$ נמשיכה מחזורית על $\mathbb{R}$ אזי

- $\left(\forall n\in\mathbb{N}_+.\hat{f}\left(n\right)=\frac{1}{2n^2}\right)\wedge\left(\hat{f}\left(0\right)=\frac{\pi^2}{12}\right)$.
- $S_mf\left(t\right)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos(nt)}{n^2}$.

- $f \xrightarrow{u} S_m f$ על $[0,2\pi]$.

מסקנה: $\frac{\pi^4}{90}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

מסקנה: $\frac{\pi^2}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$.

טענה: יהי $\alpha\notin\mathbb{Z}$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$.

למה: תהא $f\in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f'}(n)=in\hat{f}(n)$.

מסקנה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $S_m(f')=(S_m f)'$.

למה: תהא $f\in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\widehat{f^{(k)}}(n)=i^k n^k\hat{f}(n)$.

מסקנה: תהא $f\in C^k(\mathbb{T})$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}n^k\hat{f}(n)=0$.

משפט: תהא $f\in C(\mathbb{T})$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}n^k\hat{f}(n)=0$ אזי $f\in C^{k-2}(\mathbb{T})$.

מסקנה: תהא $f\in C^1(\mathbb{T})$ אזי $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|<\infty$.

מסקנה: תהא $f\in C^1(\mathbb{T})$ אזי $S_m f\xrightarrow{u} f$.

תנאי ליפשיץ מקומי: תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי $a\in\mathbb{R}$ עבורה $\exists\delta>0.\exists M>0.\forall x\in(a-\delta,a+\delta).|f(x)-f(a)|<M|x-a|$.

הערה: יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהא $f\in C^1((a-\delta,a+\delta))$ אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a.

משפט: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ ותהא $a\in\mathbb{T}$ עבורן f מקיימת תנאי ליפשיץ מקומי ב־a אזי $S_N f(a)\xrightarrow[N\to\infty]{} f(a)$.

קונבולוציה: תהיינה $f,g\in R(\mathbb{T})$ אזי $(f*g)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

טענה: תהיינה $f,g\in R(\mathbb{T})$ אזי

- $f*g=g*f$.
- $f*(g+h)=f*g+f*h$.
- $(cf)*g=c(f*g)$.
- $(f*g)*h=f*(g*h)$.
- $f*g\in C(\mathbb{T})$.
- $\widehat{f*g}(n)=\widehat{f}(n)\cdot\widehat{g}(n)$.

גרעין דיריכלה: נגדיר $D_N\in R(\mathbb{T})$ כך $D_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}$.

למה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $D_N*f=S_N f$.

למה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\widehat{D_N}(n)=\begin{cases}1 & |n|\le N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$.

למה: יהי $y\in[-\pi,\pi]$ אזי $|D_N(y)|\le 2N+1$.

למה: יהי $y\in[-\pi,\pi]$ אזי $D_N(y)=\begin{cases}2N+1 & y=0\\ \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} & y\ne 0\end{cases}$.

מסקנה: D_N זוגית ממשית וכן מתקיים $\left(y\in\left\{\frac{2\pi k}{2N+1}\mid k\in\{-N,\ldots,N\}\right\}\right)\Longleftrightarrow(D_N(y)=0)$.

למה: D_N בעלת N מינימום מקומיים וכן $N+1$ מקסימום מקומיים.

למה: יהי $y\in[-\pi,\pi]$ אזי $|D_N(y)|\le\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right|$.

מסקנה: יהי $y\in[-\pi,\pi]$ אזי $|D_N(y)|\le\frac{\pi}{|y|}$.

טענה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(y)\,\mathrm{d}y=1$.

טענה: $\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(y)|\,\mathrm{d}y\ggg 1$.

סכומי פייר: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $(\sigma_N f)(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}S_n f(x)$.

גרעין פייר: נגדיר $F_N\in R(\mathbb{T})$ כך $F_N(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}D_n(x)$.

למה: יהי $y\in[-\pi,\pi]$ אזי $F_N(y)=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)y\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\right)^2$.

למה: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_N(y)\,\mathrm{d}y=1$.

למה: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f=f*F_N$.

למה: יהי $n\in\mathbb{Z}$ אזי $\widehat{F_N}(n)=\begin{cases}1-\frac{|n|}{N+1} & |n|\le N\\ 0 & |n|>N\end{cases}$.

למה: יהי $\delta>0$ ויהי $\varepsilon>0$ אזי קיים $N_0\in\mathbb{N}$ עבורו לכל $N\ge N_0$ מתקיים $\int_{-\pi}^{-\delta}F_N(x)\,\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{\pi}F_N(x)\,\mathrm{d}x\le\varepsilon$.

משפט פייר: תהא $f\in C(\mathbb{T})$ אזי $\sigma_N f\xrightarrow{u} f$.

משפט פייר: תהא $f\in R(\mathbb{T})$ ותהא $a\in[-\pi,\pi]$ בה f רציפה מימין ומשמאל אזי $\sigma_N f(a)\xrightarrow[N\to\infty]{}\frac{\lim_{x\to a^+}f(x)+\lim_{x\to a^-}f(x)}{2}$.

מסקנה: תהא $f\in R\left(\mathbb{T}\right)$ ותהא $a\in\left[-\pi,\pi\right]$ בה f רציפה מימין ומשמאל וכן $S_{N}f\left(a\right)\to\ell$ אזי $\ell=\frac{\lim_{x\to a^{+}}f\left(x\right)+\lim_{x\to a^{-}}f\left(x\right)}{2}$.

מסקנה: $\left\{ e_{n}\right\} _{n=-\infty}^{\infty}$ צפופים במ"ש ב־$C\left(\mathbb{T}\right)$.

טענה: $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

מטריקה/מרחק: תהא A קבוצה אזי $d:A^{2}\to\left[0,\infty\right)$ המקיימת

- חיוביות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)\ge0$.
- חיוביות ממש: $\forall x,y\in A.\left(d\left(x,y\right)=0\right)\iff\left(x=y\right)$.
- סימטריות: $\forall x,y\in A.d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$.
- אי־שיוויון המשולש: $\forall x,y,z\in A.d\left(x,y\right)\le d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right)$.

מרחב מטרי: תהא X קבוצה ותהא $d:X^{2}\to\left[0,\infty\right)$ מטריצה אזי $\left(X,d\right)$.

גבול: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ותהא $L\in X$ עבורן $d\left(a_{n},L\right)\to0$ אזי $a_{n}\to L$.

טענה: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי תהא $a\in X^{\mathbb{N}}$ ויהיו $L_{1},L_{2}\in X$ עבורם $\left(a_{n}\to L_{1}\right)\wedge\left(a_{n}\to L_{2}\right)$ אזי $L_{1}=L_{2}$.

מרחק מנהטן: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $d_{1}\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$.

סימון: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ נגדיר $d_{p}\left(x,y\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ אזי $\ell_{p}^{n}=\left(\mathbb{R}^{n},d_{p}\right)$.

טענה: ℓ_{p}^{n} מרחב מטרי.

מרחק יוניפורמי: יהיו $x,y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $d_{\infty}\left(x,y\right)=\max_{i=1}^{n}\left|x_{i}-y_{i}\right|$.

סימון: $\ell_{\infty}^{n}=\left(\mathbb{R}^{n},d_{\infty}\right)$.

טענה: ℓ_{∞}^{n} מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g\in C\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sup\left|f-g\right|$ אזי $C\left(\left[a,b\right]\right)=\left(C\left(\left[a,b\right]\right),d\right)$.

טענה: $C\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.

סימון: יהיו $f,g\in R\left(\left[a,b\right]\right)$ נגדיר $d\left(f,g\right)=\sqrt{\int_{a}^{b}\left|f-g\right|^{2}}$ ונגדיר יחס שקילות $\left(f\sim g\right)\iff\left(d\left(f,g\right)=0\right)$ אזי $L_{2}\left(\left[a,b\right]\right)=\left(\nicefrac{R\left(\left[a,b\right]\right)}{\sim},d\right)$.

טענה: $L_{2}\left(\left[a,b\right]\right)$ מרחב מטרי.

טענה: יהי V מ"ו ותהא $\nu:V\to\left[0,\infty\right)$ נורמה על V נגדיר $d\left(x,y\right)=\nu\left(x-y\right)$ אזי $\left(V,d\right)$ מרחב מטרי.

נורמת ℓ_{p}^{n}: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert x\right\Vert _{p}=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$.

נורמת ℓ_{∞}^{n}: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left\Vert x\right\Vert _{\infty}=\max_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|$.

למה: יהי $x\in\mathbb{R}^{n}$ אזי

- $\left\Vert x\right\Vert _{\infty}\le\left\Vert x\right\Vert _{2}\le\sqrt{n}\left\Vert x\right\Vert _{\infty}$.
- $\left\Vert x\right\Vert _{2}\le\left\Vert x\right\Vert _{1}\le\sqrt{n}\left\Vert x\right\Vert _{2}$.

מסקנה: תהא $\left\{ x^{\left(m\right)}\right\} \subseteq\mathbb{R}^{n}$ סדרה ותהא $y\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $\left(\lim_{m\to\infty}\left\Vert x^{\left(m\right)}-y\right\Vert _{2}=0\right)\iff\left(\forall i\in\left[n\right].\lim_{m\to\infty}x_{i}^{\left(m\right)}=y_{i}\right)$.

כדור פתוח: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $B_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)<r\right\}$.

כדור סגור: יהי $a\in X$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $\overline{B}_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)\le r\right\}$.

ספירה: יהי $a\in\mathbb{R}^{n}$ ויהי $r\in\mathbb{R}$ אזי $S_{r}\left(a\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}\mid d\left(x,a\right)=r\right\}$.

נקודה פנימית: תהא $A\subseteq X$ אזי $x\in A$ המקיימת $\exists r>0.B_{r}\left(x\right)\subseteq A$.

פנים של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{int}\left(A\right)=\overset{\circ}{A}=\left\{ x\in A\mid A\text{ נקודה פנימית של }x\right\}$.

קבוצה פתוחה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $A=\mathrm{int}\left(A\right)$.

למה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{int}\left(\mathrm{int}\left(A\right)\right)=\mathrm{int}\left(A\right)$.

משפט: יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי אזי

- יהיו $\left\{ A_{i}\right\}$ פתוחות אזי $\bigcup A_{i}$ פתוחה.
- יהיו $\left\{ A_{i}\right\} _{i=0}^{n}$ פתוחות אזי $\bigcap A_{i}$ פתוחה.
- $X,\varnothing$ פתוחות.

סביבה: יהי $a\in X$ אזי $A\subseteq X$ פתוחה עבורה $a\in A$.

טענה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{int}\left(A\right)=\bigcup\left\{ B\subseteq A\mid B\text{ פתוחה}\right\}$.

קבוצה סגורה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $X\backslash A$ פתוחה.

נקודת סגור: תהא $A\subseteq X$ אזי $a\in X$ עבורה $\forall r>0.B_{r}\left(a\right)\cap A\neq\varnothing$.

סגור של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ אזי $\mathrm{cl}\left(A\right)=\overline{A}=\left\{ a\in X\mid A\text{ נקודת סגור של }a\right\}$.

משפט: תהא $X \subseteq A$ אזי (A סגורה)$\Longleftrightarrow$($A=\overline{A}$).
למה: תהא $X \subseteq A$ אזי $\overline{A}=X\backslash\operatorname{int}(X\backslash A)$ וכן $\operatorname{int}(A)=X\backslash\overline{(X\backslash A)}$.
טענה: תהא $X \subseteq A$ אזי $\overline{A}=\bigcap\{A\subseteq B \mid B \text{ סגורה}\}$.
משפט: תהא $X \subseteq A$ ותהא $a\in X$ אזי ($a\in\overline{A}$)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_n\in A$ עבורה $x_n\to a$).
נקודת הצטברות: תהא $X \subseteq A$ אזי $a\in X$ המקיימת $\forall r>0.\left(B_r(a)\setminus\{a\}\right)\cap A\neq\varnothing$.
טענה: תהא $X \subseteq A$ ותהא $a\in X$ אזי (a הצטברות של A)$\Longleftrightarrow$(קיימת סדרה $x_n\in A\backslash\{a\}$ עבורה $x_n\to a$).
שפה של קבוצה: תהא $X \subseteq A$ אזי $\partial A=\overline{A}\cap\overline{X\backslash A}=\overline{A}\backslash\operatorname{int}(A)$.
קבוצה צפופה: קבוצה $Y\subseteq X$ עבורה $\overline{Y}=X$.
טענה: תהא $Y\subseteq X$ אזי (Y צפופה)$\Longleftrightarrow$(לכל $A\subseteq X$ פתוחה באשר $A\neq\varnothing$ מתקיים $Y\cap A\neq\varnothing$).
מרחב מטרי ספרבילי: מרחב מטרי (X,d) עבורו קיימת $Y\subseteq X$ צפופה לכל היותר בת מנייה.
קבוצה חסומה: קבוצה $A\subseteq X$ עבורה $\exists r>0.\exists a\in X.A\subseteq B_r(a)$.
קוטר של קבוצה: תהא $A\subseteq X$ חסומה אזי $\operatorname{diam}(A)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\}$.
טענה: תהא $\left\{x^{(m)}\right\}\subseteq\mathbb{R}^n$ סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה $x^{(m_j)}$ מתכנסת.
מסקנה: לכל קבוצה חסומה ואינסופית קיימת נקודת הצטברות.
סדרת קושי: סדרה $\{x_n\}\subseteq X$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}.\forall k,m\geq N.d(x_k,x_m)<\varepsilon$.
למה: סדרת קושי הינה חסומה.
טענה: סדרה מתכנסת הינה סדרת קושי.
מרחב מטרי שלם: מרחב מטרי (X,d) עבורו כל סדרת קושי מתכנסת.
משפט: $\mathbb{R}^n$ סטנדרטי שלם, $C([a,b])$ שלם, ℓ_2 שלם.
טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי שלם ותהא $Y\subseteq X$ אזי ((Y,d) שלם)$\Longleftrightarrow$(Y סגורה).
מרחבים מטריים איזומטריים: מרחבים מטריים $(X,d),(Y,\rho)$ עבורם קיימת $f:X\to Y$ חח"ע ועל המקיימת $\forall x,y\in X.d(x,y)=d((x),f(y))$.
השלמה של מרחב מטרי: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי (Y,ρ) מרחב מטרי שלם עבורו $X\subseteq Y$ צפופה וכן $\rho_{\restriction_{X^2}}=d$.
משפט: לכל מרחב מטרי קיימת השלמה.
טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי בעל השלמות $(Y,\rho),(Z,\zeta)$ אזי $(Y,\rho),(Z,\zeta)$ איזומטריים.
נקודת שבת: תהא $f:X\to X$ אזי $a\in X$ עבורה $f(x)=x$.
העתקה מכווצת: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי $A\in\operatorname{Hom}(X)$ עבורה קיים $\lambda<1$ המקיים $\forall x,y\in X.d(Ax,y)\leq\lambda d(x,y)$.
משפט נקודת השבת של בנך: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $A\in\operatorname{Hom}(X)$ העתקה מכווצת אזי קיים ויחיד $x\in X$ עבורו $Ax=x$.
מסקנה: יהי (X,d) מרחב מטרי תהא $A\in\operatorname{Hom}(X)$ העתקה מכווצת ותהא $x\in X$ עבורה $Ax=x$ אזי לכל $y\in X$ מתקיים $x=\lim_{n\to\infty}A^nz$.
מסקנה: יהי (X,d) מרחב מטרי תהא $A\in\operatorname{Hom}(X)$ העתקה מכווצת ותהא $x\in X$ עבורה $Ax=x$ אזי לכל $y\in X$ מתקיים $d(A^ny,x)\leq\frac{\lambda^n}{1-\lambda}d(y,Ay)$.
כיסוי פתוח: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $A\subseteq X$ אזי קבוצות $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ עבורן $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$.
מרחב קומפקטי: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של X קיימות $\{\beta_i\}_{i=1}^m\in I$ עבורן $X=\bigcup_{i=1}^mA_{\beta_i}$.
קבוצה קומפקטית: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי $B\subseteq X$ עבורו (B,d) מרחב קומפקטי.
טענה קבוצה פתוחה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $Y\subseteq X$ אזי ($U\subseteq Y$ פתוחה ב־(Y,d))$\Longleftrightarrow$(קיימת $V\subseteq X$ פתוחה עבורה $U=V\cap Y$).
טענה קבוצה סגורה יחסית: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $Y\subseteq X$ אזי ($U\subseteq Y$ סגורה ב־(Y,d))$\Longleftrightarrow$(קיימת $V\subseteq X$ סגורה עבורה $U=V\cap Y$).
טענה: תהא $K\subseteq X$ קומפקטית אזי K חסומה וכן K סגורה.
טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(לכל סדרה יורדת $\{K_i\}_{i=1}^\infty\subseteq X$ סגורות לא ריקות אזי $\bigcap_{i=1}^\infty K_i\neq\varnothing$).
קומפקטיות סדרתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת.
משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$((X,d) קומפקטי סדרתית).
טענה: תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ אזי (A קומפקטית)$\Longleftrightarrow$(A סגורה וחסומה).
מרחב פרה־קומפקטי: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל סדרה יש תת סדרה קושי.

אוסף פונקציות רציף במידה אחידה: סדרה $\{f_n\} \subseteq C([a,b])$ המקיימת $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall n\in\mathbb{N}.\forall s,t\in[a,b].|s-t|<\delta\Longrightarrow|f_n(s)-f_n(t)|<t$.

משפט: תהא $\{f_n\}\subseteq C([a,b])$ סדרה אזי ($\{f_n\}$ פרה־קומפקטית)$\Longleftrightarrow$($\{f_n\}$ חסומה במ"ש ורציפה במידה אחידה).

גבול: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים תהא $f:X\to Y$ תהא $a\in X$ ותהא $L\in Y$ אזי

- קושי: $(\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x\in B(a,\delta).f(x)\in B(L,\varepsilon))\Longleftrightarrow(\lim_{x\to a}f(x)=L)$.
- היינה: $\left(\forall x\in(X\backslash\{a\})^{\mathbb{N}}.(x_k\to a)\Longrightarrow(f(x_k)\to L)\right)\Longleftrightarrow(\lim_{x\to a}f(x)=L)$.

רציפות בנקודה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f:X\to Y$ אזי $a\in X$ עבורה $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

משפט: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $f:X\to Y$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $U\subseteq Y$ פתוחה מתקיים $f^{-1}(U)$ פתוחה).

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי ותהא $f:X\to\mathbb{R}^m$ אזי (f רציפה)$\Longleftrightarrow$(לכל $i\in[m]$ מתקיים כי f_i רציפה).

רציפות במידה שווה: יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ותהא $A\subseteq X$ אזי $f:A\to Y$ עבורה $\forall\varepsilon>0.\exists\delta>0.\forall x,y\in A.(d(x,y)<\delta)\Longrightarrow(\rho(f(x),f(y))<\varepsilon)$.

משפט: תהיינה $f,g:X\to\mathbb{R}^n$ רציפות ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ אזי $\alpha f+\beta g$ רציפה וכן $\langle f,g\rangle$ רציפה.

משפט רציפות ההרכבה: יהיו $(X,d),(Y,\rho),(Z,\eta)$ מרחבים מטריים תהא $a\in X$ תהא $f:X\to Y$ רציפה על a ותהא $g:f(X)\to Z$ רציפה על $f(a)$ אזי $g\circ f$ רציפה על a.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי $f(X)$ קומפקטית.

משפט: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קומפקטי)$\Longleftrightarrow$(לכל $f\in C(X,\mathbb{R})$ הינה חסומה).

משפט קנטור: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.

משפט ויירשטראס: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי ותהא $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה אזי קיימים $a,b\in X$ עבורם $f(X)=[f(a),f(b)]$.

מסקנה: תהיו $\nu,\eta:X\to\mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $c,C\in\mathbb{R}$ עבורם $c\nu\le\eta\le C\nu$.

מסילה: פונקציה $\gamma\in C([a,b],X)$.

מסילה סגורה: מסילה $\gamma:[a,b]\to X$ עבורה $\gamma(a)=\gamma(b)$.

מסילה פשוטה: מסילה $\gamma:[a,b]\to X$ עבורה $\gamma_{\restriction_{(a,b]}},\gamma_{\restriction_{[a,b)}}$ חח"ע.

המסילה ההפוכה: תהא $\gamma:[0,1]\to X$ מסילה אזי $-\gamma:[0,1]\to X$ המוגדרת $-\gamma(t)=\gamma(1-t)$.

מרחב מטרי קשיר מסילתית: מרחב מטרי (X,d) עבורו לכל $x,y\in X$ קיימת עקומה $\gamma:[0,1]\to X$ המקיימת $\gamma(0)=x$ וכן $\gamma(1)=y$.

משפט תכונת דרבו: יהי (X,d) מרחב מטרי קשיר מסילתית תהא $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה יהיו $x,y\in X$ ותהא $c\in\mathbb{R}$ עבורה $f(x)<c<f(y)$ אזי קיים $z\in X$ עבורו $f(z)=c$.

תחום: קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה וקשירה מסילתית.

מרחב מטרי קשיר: מרחב מטרי (X,d) עבורו הקבוצות היחידות שפתוחות וסגורות במקביל הן $X,\varnothing$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי אזי ((X,d) קשיר מסילתית)$\Longleftarrow$((X,d) קשיר).

טענה: תהא $A\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ אזי A רציפה.

טענה: תהיינה $A,B\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|$.

מסקנה: תהא $A\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\left\|A^k\right\|\le\|A\|^k$.

משפט: תהא $A\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ ונגדיר $f\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ כך $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}x$ אזי f רציפה.

אקספוננט: תהא $A\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ נגדיר $e^A\in M_n(\mathbb{R})$ כך $e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$.

מסקנה: תהא $A\in\text{Hom}(\mathbb{R}^n)$ אזי e^A מתכנסת וכן $\left\|e^A\right\|\le e^{\|A\|}$.

הגדרה: תהא $\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ מסילה אזי נגדיר מסילה $\Phi\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ כך $\Phi\eta=\begin{cases}\frac{1}{2}(\eta_2(4t),\eta_1(4t)) & 0\le t\le\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-1),\eta_2(4t-1))+\left(0,\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(\eta_1(4t-2),\eta_2(4t-2))+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}(-\eta_2(4t-3),-\eta_1(4t-3))+\left(1,\frac{1}{2}\right) & \frac{3}{4}\le t\le1\end{cases}$.

נורמה של עקומה: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי $\|\gamma\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}\|\gamma(t)\|$.

מרחק של עקומות: תהיינה $\gamma,\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומות אזי $d(\gamma,\eta)=\|\gamma-\eta\|_\infty$.

טענה: תהיינה $\gamma,\eta:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומות אזי $d(\Phi\gamma,\Phi\eta)=\frac{1}{2}d(\gamma,\eta)$.

עקום פביאנו: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי $\gamma_\infty=\lim_{n\to\infty}\Phi^n\gamma$.

טענה: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי γ_∞ רציפה וכן $\gamma_\infty([0,1])$ קומפקטית.

משפט: תהא $\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ עקומה אזי $\gamma_\infty([0,1])$ צפופה ב־$[0,1]^2$.

טענה: יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי יהי (Y,ρ) מרחב מטרי ותהא $f:X\to Y$ רציפה חח"ע ועל אזי (Y,ρ) קומפקטי וכן f^{-1} רציפה.

טענה: לא קיימת פונקציה רציפה חח"ע ועל ב־$[0,1]\to[0,1]^2$.

עקומה פוליגונלית: עקומה לינארית למקוטעין.

אורך עקומה פוליגונלית: תהא γ עקומה פוליגונלית בעלת חלקים לינאריים בקטעים $[\gamma(t_{i-1}),\gamma(t_i)]$ אזי $L(\gamma)=\sum_{i=1}^{M}\|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i-1})\|$.

מסקנה: תהא γ עקומה פוליגונלית אזי $L(\gamma)=\int_0^1\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.

עקומה בעלת אורך ביחס לחלוקה: תהא Π חלוקה של $[a,b]$ אזי עקומה γ עבורה קיים חסם עליון לאורך של עקומה פוליגונלית בין הנקודות $\{\gamma(t_i)\}$.

טענה: תהא $\gamma\in C^1([a,b],\mathbb{R}^m)$ עקומה אזי $L(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$.