

מרכיבים: מרחב וקטורי \mathbb{R}^2 מעל \mathbb{R} עם הפעולות הסטנדרטיות.

סימון: נסמן את המרכיבים בעזרת \mathbb{C} .

הערה: נשתמש ב- \mathbb{C} בהתאמה $1 \mapsto (1, 0)$ וכן ההגדרה $i = (0, 1)$.

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי קיימים ויחידים $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $z = a + ib$.

מטריצה קונפורמית: $A \in M_2(\mathbb{R})$ $0 \neq A$ המקיימת $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\exists a, b \in \mathbb{R}$.

סימון: $A \in M_2(\mathbb{R})$ קונפורמית $\iff A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $O(n) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ קונפורמית}\}$.

טענה: ההעתקה $T \in \text{Hom}(\mathbb{C}, O(2))$ המוגדרת $T(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ היא איזומורפיזם.

טענה: תהא $A \in M_2(\mathbb{R})$ אזי $A \iff A$ קונפורמית (הפיכה ושוברת זווית).

מטריצה אנטי-קונפורמית: $A \in M_2(\mathbb{R})$ $0 \neq A$ המקיימת $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ $\exists a, b \in \mathbb{R}$.

טענה: תהא $A \in M_2(\mathbb{R})$ אזי $A \iff A$ אנטי-קונפורמית (הפיכה והופכת זווית).

משפט: תהא $A \in M_2(\mathbb{R})$ אזי קיימות ויחידות $B, C \in M_2(\mathbb{R})$ באשר B קונפורמית או 0 וכן C אנטי-קונפורמית או 0 עבורן $A = B + C$.

מכפלת מרכיבים: יהיו $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ אזי $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

טענה: $i^2 = -1$.

החלק הממשי: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\text{Re}(a + ib) = a$.

החלק המדומה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\text{Im}(a + ib) = b$.

הצמוד: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $\overline{a + ib} = a - ib$.

הערך המוחלט: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

מספר מדומה טהור: $z \in \mathbb{C}$ עבורו $\text{Re}(z) = 0$.

מספר ממשי טהור: $z \in \mathbb{C}$ עבורו $\text{Im}(z) = 0$.

למה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי

$$\bullet \overline{\overline{z}} = z$$

$$\bullet |\overline{z}| = |z|$$

$$\bullet z\overline{z} = |z|^2$$

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

מסקנה: \mathbb{C} עם הפעולות שהוגדרו מלעיל הינו שדה.

טענה: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ אזי

$$\bullet \text{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$$

$$\bullet \text{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$\bullet \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\bullet \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$\bullet \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}} \text{ נניח כי } w \neq 0$$

$$\bullet |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\bullet \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ נניח כי } w \neq 0$$

$$\bullet -|z| \leq \text{Re}(z) \leq |z|$$

$$\bullet -|z| \leq \text{Im}(z) \leq |z|$$

טענה אי שוויון המשולש: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ אזי $|z + w| \leq |z| + |w|$.

טענה אי שוויון קושי שורץ: יהיו $z_1 \dots z_n, w_1 \dots w_n \in \mathbb{C}$ אזי $\left|\sum_{i=1}^n z_i w_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2\right)^{1/2}$.

מסקנה: יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ויהיו $a, b \in \mathbb{R}$ אזי

$$\bullet |z| - |w| \leq |z - w|$$

$$\bullet |a + ib| \leq |a| + |b|$$

הצגה פולרית/הצגה קוטבית: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ אזי $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

הארגומנט: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z| e^{i\theta}\}$.

מסקנה: יהי $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי קיים ויחיד $\theta \in (-\pi, \pi]$ עבורו $z = |z| \cdot e^{i\theta}$.

הארגומנט העיקרי: יהי $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ויהי $\theta \in \arg(z) \cap (-\pi, \pi]$ אזי $\text{Arg}(z) = \theta$.

הערה: יהי $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי הארגומנט העיקרי קיים ויחיד.

הערה: $\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

טענה: יהיו $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ ויהיו $r, s \geq 0$ אזי

$$\overline{r \cdot e^{i\theta}} = r \cdot e^{-i\theta} \bullet$$

$$(r \cdot e^{i\theta}) \cdot (s \cdot e^{i\phi}) = rs \cdot e^{i(\theta+\phi)} \bullet$$

מסקנה: יהיו $w, z \in \mathbb{C}$ אזי $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$

טענה: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ ויהי $r > 0$ אזי $(r \cdot e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\theta}$

טענה: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ יהי $r \geq 0$ ויהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $(r \cdot e^{i\theta})^n = r^n \cdot e^{in\theta}$

מסקנה נוסאת דה מואבר: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ ויהי $n \in \mathbb{Z}$ אזי $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$

טענה: יהי $\theta \in \mathbb{R}$ יהי $r \geq 0$ ויהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

מסקנה שורשי יחידה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $\sqrt[n]{1} = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$

המשפט היסודי של האלגברה: יהי $p \in \mathbb{C}_{\geq 1}[x]$ אזי קיים $x \in \mathbb{C}$ עבורו $p(x) = 0$

מסקנה: יהי $p \in \mathbb{C}_{\geq 1}[x]$ אזי קיימים $a_0 \dots a_n \in \mathbb{C}$ עבורם $p(x) = a_0 \prod_{i=1}^n (x - a_i)$

הקוטב הצפוני: נסמן ב- \mathbb{R}^3 את $N = (0, 0, 1)$

ספירה: יהי $n \in \mathbb{N}_+$ אזי $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$

ההמיספרה העליונה: כל הנקודות $(x, y, z) \in S^2$ המקיימות $z > 0$

ההמיספרה התחתונה: כל הנקודות $(x, y, z) \in S^2$ המקיימות $z < 0$

הטלה סטריאוגרפית: נגדיר $f: \mathbb{C} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ כך $f(x + iy) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, 1 - \frac{2}{x^2+y^2+1} \right)$

הערה: במרחב \mathbb{R}^3 נגדיר את \mathbb{C} להיות שני הצירים הראשונים, אז הטלה הסטריאוגרפית היא מבחינה מעשית $f(p) = \text{line}_{p,N} \cap S^1$

טענה: f רציפה.

טענה: יהי $z \in \mathbb{C}$ אזי

$$(z \in S^1) \iff (f(z) = z) \bullet$$

$$(f(z)) \iff (z \text{ מחוץ ל-} S^1) \bullet$$

$$(f(z)) \iff (z \text{ בתוך } S^1) \bullet$$

טענה: f הפיכה ומתקיים $f^{-1}: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ כך $f^{-1}(x, y, z) = \frac{x}{1-z} + i \frac{y}{1-z}$

סימון: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

הספירה של רימן: f ניתנת להרחבה רציפה $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ וכן $f(\infty) = N$

טענה: תהא $A \subseteq S^2 \setminus \{N\}$ אזי A (מעגל) $\iff f^{-1}[A]$ (מעגל או ישר).

מסקנה: יהי $C \subseteq S^2 \setminus \{N\}$ מעגל ויהי P מישור עבורו $C = P \cap S^2$ אזי $f^{-1}[C]$ (ישר) $\iff (N \in P)$

גבול: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z \in \mathbb{C}$ עבורם $\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. |a_n - a| < \varepsilon$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z \in \mathbb{C}$ אזי $(a_n \rightarrow z) \iff (|a_n - z| \rightarrow 0)$

גבול אינסופי: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ עבורה $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $\forall M \in \mathbb{R}. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. M < |a_n|$ אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $(a_n \rightarrow \infty) \iff (|a_n| \rightarrow \infty)$

טענה: תהיינה $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהיו $z, w \in \hat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_n \rightarrow z$ וכן $b_n \rightarrow w$ אזי

$$a_n + b_n \rightarrow z + w \bullet$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow z \cdot w \bullet$$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{z}{w} \text{ אזי } w \neq 0 \bullet$$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ויהי $z \in \hat{\mathbb{C}}$ עבורם $a_n \rightarrow z$ אזי

$$\overline{a_n} \rightarrow \overline{z} \bullet$$

$$|a_n| \rightarrow |z| \bullet$$

$$\text{Re}(a_n) \rightarrow \text{Re}(z) \bullet$$

$$\text{Im}(a_n) \rightarrow \text{Im}(z) \bullet$$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $(a) \iff (\text{Re}(a), \text{Im}(a))$ מתכנסות).

מסקנה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ אזי $(a) \iff (a \text{ מתכנסת}) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq N. |a_n - a_m| < \varepsilon)$

טענה: תהא $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ המקיימת $|a_n| \rightarrow 0$ אזי $a_n \rightarrow 0$

מסקנה: תהיינה $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ באשר a חסומה וכן $b_n \rightarrow 0$ אזי $a_n b_n \rightarrow 0$

הערה: מכאן והלאה הסימון \mathbb{F} יתאר שדה מביין \mathbb{R}, \mathbb{C} וכאשר נאמר כי \mathcal{U} פתוחה הכוונה היא ביחס לשדה.

גבול: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה תהא $a \in \mathbb{F}_1$ תהא $A \in \mathbb{F}_2$ ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$ עבורה $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall z \in \mathcal{U} \setminus \{a\}. \|z - a\| < \delta \implies \|f(z) - A\| < \varepsilon$

משפט היינה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה אזי $(\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A) \iff (\forall b \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}. (b_n \rightarrow a) \implies (f(b_n) \rightarrow A))$

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה ותהינה $f, g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$ באשר $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ וכן $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = B$ אזי

$$\lim_{z \rightarrow a} (f + g)(z) = A + B \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} (fg)(z) = AB \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(z) = \frac{A}{B} \quad \text{אזי } B \neq 0 \quad \bullet$$

טענה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}$ פתוחה ותהא $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ באשר $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$ אזי

$$\lim_{z \rightarrow a} \overline{f(z)} = \overline{A} \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = |A| \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(A) \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(A) \quad \bullet$$

גבול אינסופי: תהא $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ויהי $a \in \mathbb{C}$ אזי

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \quad \text{אזי } \forall M > 0. \exists \delta > 0. \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}. |z - a| < \delta \implies M < |f(z)| \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a \quad \text{אזי } \forall \varepsilon > 0. \exists R > 0. \forall z \in \mathbb{C}. R < |z| \implies |f(z) - a| < \varepsilon \quad \bullet$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \quad \text{אזי } \forall M > 0. \exists R > 0. \forall z \in \mathbb{C}. R < |z| \implies M < |f(z)| \quad \bullet$$

פונקציה רציפה: תהא $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{F}_1$ פתוחה יהי $a \in \mathcal{U}$ אזי $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{F}_2$ המקיימת $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א מתקיימות.