

נורמה: יהי L מרחב אוקלידי נוצר סופית אזי $v : L \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה לכל $a \in L$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\bullet (v(a) \geq 0) \wedge ((v(a) = 0) \iff (a = 0))$$

$$\bullet v(\lambda a) = |\lambda| \cdot v(a) \text{ הומוגניות}$$

$$\bullet v(a+b) \leq v(a) + v(b) \text{ אי שיויון המשולש (אש"מ)}$$

$$\text{נורמת } \ell_p: \text{ עבור } p \in \mathbb{N}_+ \text{ נגדיר נורמה } \|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ כך } \|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\text{נורמת } \ell_\infty: \text{ נגדיר נורמה } \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ כך } \|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$$

$$\text{כדור פתוח: יהי } a \in \mathbb{R}^n \text{ ויהי } r \in \mathbb{R} \text{ אזי } B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

$$\text{כדור סגור: יהי } a \in \mathbb{R}^n \text{ ויהי } r \in \mathbb{R} \text{ אזי } \bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$$

$$\text{ספירה: יהי } a \in \mathbb{R}^n \text{ ויהי } r \in \mathbb{R} \text{ אזי } S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$$

$$\text{תיבה פתוחה: יהיו } a, b \in \mathbb{R}^n \text{ אזי } \Pi_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j < x_j < b_j\}$$

$$\text{תיבה סגורה: יהיו } a, b \in \mathbb{R}^n \text{ אזי } \bar{\Pi}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in [n]. a_j \leq x_j \leq b_j\}$$

$$\text{נקודה פנימית: תהא } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ותהא } x \in M \text{ המקיימת } \exists r > 0. B_r(x) \subseteq M \text{ אזי } x \text{ נקודה פנימית.}$$

$$\text{פנים של קבוצה: תהא } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ אזי } \overset{\circ}{M} = \{x \in M \mid M \text{ נקודה פנימית של } M\}$$

$$\text{קבוצה פתוחה: קבוצה } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ עבורה } M = \overset{\circ}{M}$$

$$\text{נקודה חיצונית: תהא } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ותהא } x \in \mathbb{R}^n \text{ המקיימת } \exists r > 0. B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus M \text{ אזי } x \text{ נקודה חיצונית.}$$

$$\text{נקודה מבודדת: תהא } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ותהא } x \in M \text{ המקיימת } \exists r > 0. B_r(x) \cap M = \{x\} \text{ אזי } x \text{ נקודה מבודדת.}$$

$$\text{נקודת שפה: תהא } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ותהא } x \in \mathbb{R}^n \text{ לא נקודה פנימית ולא נקודה חיצונית אזי } x \text{ נקודת שפה.}$$

$$\text{שפה של קבוצה: תהא } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ אזי } \partial M = \{x \in M \mid M \text{ נקודת שפה של } M\}$$

$$\text{קבוצה סגורה: קבוצה } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ עבורה } \partial M \subseteq M$$

$$\text{סגור של קבוצה: תהא } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ אזי } \bar{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$$

$$\text{טענה: תהא } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ אזי } (x \text{ נקודה חיצונית של } M) \iff (x \text{ נקודה פנימית של } \mathbb{R}^n \setminus M).$$

$$\text{מסקנה: תהא } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ אזי } (M \text{ פתוחה}) \iff (M^c \text{ סגורה}).$$

$$\text{קבוצה חסומה: קבוצה } M \subseteq \mathbb{R}^n \text{ המקיימת } \exists r > 0. M \subseteq B_r(0)$$

$$\text{קבוצה קומפקטית: קבוצה } K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ סגורה וחסומה.}$$

$$\text{טענה היינה בורל: תהא } K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ אזי } (K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ קבוצות פתוחות עבורן } A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

$$\text{מתקיים } \exists \mathcal{B} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda). A \subseteq \bigcup_{n \in \mathcal{B}} I_n)$$

$$\text{סימון: תהא } a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \text{ אזי } a^{(k)} = a(k)$$

$$\text{גבול: תהא } a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \text{ ותהא } L \in \mathbb{R}^n \text{ עבורן } \lim_{k \rightarrow \infty} \|a^{(k)} - L\| = 0 \text{ אזי } \lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k)} = L$$

$$\text{הערה: נשתמש באותם סימני גבול כמו במשתנה יחיד, כלומר } \lim_{x \rightarrow a} \text{ וכן } \xrightarrow{x \rightarrow a}$$

$$\text{משפט: תהא } a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \text{ ויהי } b \in \mathbb{R}^n \text{ אזי } \left(a^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b\right) \iff \left(\forall j \in [n]. a_j^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b_j\right)$$

$$\text{מסקנה: כל מניפולציות הגבול של סדרה מחדו"א מתקיימות.}$$

$$\text{משפט קושי: תהא } a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \text{ אזי } (a \text{ מתכנסת}) \iff (\forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a^{(m)} - a^{(p)}\| < \varepsilon)$$

$$\text{מסקנה: תהא } a \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} \text{ אזי } (a \text{ מתכנסת}) \iff (\forall j \in [n]. \forall \varepsilon > 0. \exists k \in \mathbb{N}. \forall m, p > k. \|a_j^{(m)} - a_j^{(p)}\| < \varepsilon)$$

$$\text{משפט בולצאנו ווירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת-סדרה מתכנסת.}$$

$$\text{משפט: תהא } K \subseteq \mathbb{R}^n \text{ אזי } (K \text{ קומפקטית}) \iff (\text{לכל } a \in K^{\mathbb{N}} \text{ קיימת תת-סדרה } a^{(k_i)} \in K \text{ המקיימת } \lim_{k \rightarrow \infty} a^{(k_i)} \in K)$$

הערה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ נחשוב על f כוקטור של פונקציות $f = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ כאשר $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$.

גבול: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ תהא $a \in \mathbb{R}^n$ ותהא $L \in \mathbb{R}^m$ אזי

• היינה: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אזי $\forall x \in A^N. (x^{(k)} \rightarrow a) \implies (f(x^{(k)}) \rightarrow L)$

• קושי: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אזי $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - L\| < \varepsilon$

מסקנה: כל מניפולציות הגבול של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

רציפות בנקודה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ אזי $a \in A$ עבורה $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

סימון: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $B \subseteq A$ אזי f רציפה נקודתית עבור כל $b \in B \iff (f \in C(B))$

משפט: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תהא $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ותהא $B \subseteq A$ אזי $f \in C(b) \iff (f_1, \dots, f_m \in C(b))$

מסקנה: כל מניפולציות הרציפות של פונקציה מחדו"א מתקיימות.

עקומה פרמטרית: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע אזי $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$

מסילה: עקומה פרמטרית רציפה.

מסילה של קו ישר: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ נגדיר $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ כך $\gamma(t) = (1-t)a + tb$

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל- b אזי γ מסילה.

סימון: יהיו $a, b \in \mathbb{R}^m$ ותהא $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ מסילה של קו ישר בין a ל- b אזי $[a, b] = \text{Im}(\gamma)$

קבוצה קמורה: קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ המקיימת $\forall a, b \in M. [a, b] \subseteq M$

טענה: יהי $a \in \mathbb{R}^n$ ויהי $r \in \mathbb{R}$ אזי $B_r(a), \overline{B}_r(a)$ קבוצות קמורות.

קבוצה קשירה מסילתית: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ עבורה לכל $x, y \in M$ קיימת מסילה $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ המקיימת $\gamma(0) = x$ וכן $\gamma(1) = y$

תחום: קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית.

טענה: תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה אזי קיימת $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_{\leq \aleph_0}(\mathbb{R}^n)$ קבוצה של תחומים זרים עבורה $\bigcup \mathcal{A} = M$.