

נקודה צפה: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $a_1 \dots a_t \in \mathbb{Z}$ כאשר $a_1 \neq 0$ וכן $p \in \mathbb{Z}$ וכן $\sigma \in \{\pm 1\}$ עבורם

$$x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^t \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p$$

סימן: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ עבורו $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^t \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p$ ייצוג בנקודה צפה אזי σ .

מנטיסה/ספרות משמעותיות: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ עבורו $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^t \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p$ ייצוג בנקודה צפה אזי $(a_1 \dots a_t)$.

הגבלה על החזקה בנקודה צפה: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהיו $L, U \in \mathbb{Z}$ עבורן בייצוג נקודה צפה $U < p < L$.

טענה: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ יהיו $L, U \in \mathbb{Z}$ הגבלה על החזקה ויהי $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ מספר בעל ייצוג נקודה צפה אזי

$$\beta^{L-1} < |x| < \beta^U$$

גלישה: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהיו $L, U \in \mathbb{Z}$ הגבלה על החזקה ויהי $x \in \mathbb{R}$ אזי

• **overflow:** $|x| \geq \beta^U$.

• **underflow:** $|x| \leq \beta^{L-1}$.

קיצוץ נקודה צפה: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ בעל הצגה $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^\infty \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p$ בבסיס β אזי

$$\text{fl}(x) = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^t \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p$$

עיגול נקודה צפה: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ בעל הצגה $x = \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^\infty \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p$ בבסיס β אזי

$$\text{fl}(x) = \begin{cases} \sigma \cdot \left(\sum_{i=1}^t \frac{a_i}{\beta^i} \right) \cdot \beta^p & 0 \leq a_{t+1} < \frac{\beta}{2} \\ \sigma \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^t \frac{a_i}{\beta^i} \right) + \frac{1}{\beta^t} \right) \cdot \beta^p & \frac{\beta}{2} \leq a_{t+1} < \beta \end{cases}$$

סימון: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $\tilde{x} = \text{fl}(x)$.

שגיאה: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $e(x) = x - \text{fl}(x)$.

שגיאה מוחלטת: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $|e(x)|$.

שגיאה יחסית: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $\delta(x) = \frac{e(x)}{x}$.

מסקנה: יהי $x \in \mathbb{R}$ אזי $\text{fl}(x) = x(1 - \delta(x))$.

טענה: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ בעל ייצוג בקיצוץ נקודה צפה אזי $|\delta(x)| \leq \beta^{-t+1}$.

טענה: יהי $\beta \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ בסיס יהי $t \in \mathbb{N}_+$ ויהי $x \in \mathbb{R}$ בעל ייצוג בעיגול נקודה צפה אזי $|\delta(x)| \leq \frac{1}{2} \beta^{-t+1}$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $|e(x+y)| \leq |e(x)| + |e(y)|$.

מסקנה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ בעלי סימן זהה אזי $|\delta(x+y)| \leq |\delta(x)| + |\delta(y)|$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ בעלי סימן זהה אזי $|\delta(x+y)| \leq \max\{|\delta(x)|, |\delta(y)|\}$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $|\delta(x-y)| \leq \left| \frac{e(x)}{x-y} \right| + \left| \frac{e(y)}{x-y} \right|$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $|\delta(xy)| \leq |\delta(x)| + |\delta(y)| + |\delta(x)\delta(y)|$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $\left| e\left(\frac{x}{y}\right) \right| \leq \frac{|x||e(y)| + |y||e(x)|}{|y \cdot \text{fl}(y)|}$.

טענה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ אזי $\left| \delta\left(\frac{x}{y}\right) \right| \leq \left| \frac{y}{\text{fl}(y)} \right| (|\delta(x)| + |\delta(y)|)$.

אלגוריתם שיטת החצייה: יהי ε תהא $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ויהיו $a_0 < b_0$ עבורם $f(a_0)f(b_0) < 0$ אזי

function BisectionMethod(a_0, b_0, ε):

$n \leftarrow 0$

while $\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} \geq \varepsilon$ **do**

$m_n \leftarrow \frac{a_n + b_n}{2}$

if $f(m_n) = 0$ **then**

return m_n

else if $f(a_n)f(m_n) < 0$ **then**

$(a_{n+1}, b_{n+1}) \leftarrow (a_n, m_n)$

$n \leftarrow n + 1$

else if $f(m_n)f(b_n) < 0$ **then**

$(a_{n+1}, b_{n+1}) \leftarrow (m_n, b_n)$

$n \leftarrow n + 1$

end

טענה: יהי ε תהא $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ויהי $a < b$ עבורם $f(a)f(b) < 0$ אזי קיים שורש $\alpha \in [a, b]$ של f עבורו $|\text{BisectionMethod}(a, b, \varepsilon) - q| < \varepsilon$.

סימון: תהא $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ עבורה $x_n \rightarrow \alpha$ אזי $e_n = \alpha - x_n$.

טענה: תהא $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בעלת שורש יחיד α אזי באלגוריתם החצייה $m_n \rightarrow \alpha$ וכן $|\alpha - m_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

סדר התכנסות: תהא $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ עבורה $x_n \rightarrow \alpha$ אזי $p \in \mathbb{R}_+$ עבורו $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} < \infty$.

מסקנה: סדר ההתכנסות של שיטת החצייה היא לינארית.

טענה: תהא f גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט α וכן $f(x_n) = f(\alpha) + f'(\zeta_n)e_n$ טור טיילור שלה אזי $e_n = \frac{f(x_n)}{f'(\zeta_n)}$.

מסקנה: יהי ε_M דיוק המכונה ותהא f גזירה ברציפות בעלת שורש פשוט α וכן $f(x_n) = f(\alpha) + f'(\zeta_n)e_n$ טור טיילור שלה וכן $|f(x_n)| \leq \varepsilon_M$ אזי $|e_n| \leq \left| \frac{2\varepsilon_M}{f'(\zeta_n)} \right|$.

מספר המצב: תהא f גזירה ברציפות בעלת שורש α מסדר שני אזי $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left| \frac{f(x)}{x f'(x)} \right|$.

שיטת ניוטון: תהא $f \in C^1([a, b], \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

טענה: תהא $f \in C^1([a, b], \mathbb{R} \setminus \{0\})$ בעלת שורש פשוט יחיד α ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי שיטת ניוטון בעלת סדר התכנסות ריבועי.

שיטת המיתרים: תהא $f \in C([a, b], \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ויהיו $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ אזי $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

אלגוריתם שיטת regula falsi: יהי ε תהא $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ויהיו $a_0 < b_0$ עבורם $f(a_0)f(b_0) < 0$ אזי

```
function RegulaFalsi(a0, b0, ε):
    n ← 0
    while (b0 - a0) / 2^(n+1) ≥ ε do
        m_n = a_n - f(a_n) * (a_n - b_n) / (f(a_n) - f(b_n))
        if f(m_n) = 0 then
            return m_n
        else if f(a_n) * f(m_n) < 0 then
            (a_{n+1}, b_{n+1}) ← (a_n, m_n)
            n ← n + 1
        else if f(m_n) * f(b_n) < 0 then
            (a_{n+1}, b_{n+1}) ← (m_n, b_n)
            n ← n + 1
    end
```

טענה: תהא $f \in C([a, b], \mathbb{R} \setminus \{0\})$ בעלת שורש פשוט יחיד α ויהיו $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ אזי שיטת המיתרים בעלת סדר התכנסות $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

שיטת איטרציה: תהא $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי $x_n = g(x_{n-1})$.

איטרציה: תהא $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $x_0 \in \mathbb{R}$ אזי x_n .

התכנסות שיטת איטרציה: שיטת איטרציה $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $x_n \rightarrow \alpha$.

נקודת שבת: תהא $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $a \in \mathbb{R}$ עבורה $g(a) = a$.

טענה: תהא $g \in C(I, \mathbb{R})$ שיטת איטרציה מתכנסת עבורה $x_n \rightarrow \alpha$ אזי $g(\alpha) = \alpha$.

קונסיסטנטיות: תהא $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $g \in C(I, \mathbb{R})$ שיטת איטרציה מתכנסת אזי $(f(\alpha) = 0) \iff (g(\alpha) = \alpha)$.

משפט: תהא $g \in C([a, b], [a, b])$ אזי קיימת $\alpha \in [a, b]$ עבורה $g(\alpha) = \alpha$.

משפט: תהא $g \in C^1([a, b], [a, b])$ ויהי $K < 1$ עבורו $|g'| \leq K$ אזי קיימת ויחידה $\alpha \in [a, b]$ עבורה $g(\alpha) = \alpha$.

מסקנה: תהא $g \in C^1([a, b], [a, b])$ ויהי $K < 1$ עבורו $|g'| \leq K$ אזי שיטת האיטרציה g מתכנסת לנקודת השבת.

מסקנה: תהא $g \in C^1([a, b], [a, b])$ ויהי $K < 1$ עבורו $|g'| \leq K$ אזי $|e_n| \leq K |e_{n-1}|$.

תנאי ליפשיץ: פונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ וכן $K > 0$ עבורם $|g(x) - g(y)| \leq K |x - y|$.

תנאי כיווץ: פונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ וכן $1 > K > 0$ עבורם g ליפשיץ K .

תנאי מתיחה: פונקציה $g \in C^1(\mathbb{R})$ וכן $|g'| \geq K > 1$ עבורם g ליפשיץ K .

טענה: יהי X סגור תהא $g \in C(X)$ ויהי $K < 1$ עבורו g ליפשיץ K אזי קיימת ויחידה $\alpha \in [a, b]$ עבורה $g(\alpha) = \alpha$.

מסקנה: יהי X סגור תהא $g \in C(X)$ ויהי $K < 1$ עבורו g ליפשיץ K אזי שיטת האיטרציה g מתכנסת לנקודת השבת.

מסקנה: יהי X סגור תהא $g \in C(X)$ ויהי $K < 1$ עבורו g ליפשיץ K אזי $|e_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$.

משפט: תהא $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ ותהא α נקודת שבת עבורה $|g'(\alpha)| < 1$ אזי קיים $\varepsilon > 0$ עבורו לכל $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ מתקיים כי

g מתכנסת ל- α .

נקודה מושכת: תהא $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ אזי נקודת שבת α עבורה $|g'(\alpha)| < 1$.

נקודה דוחה: תהא $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ אזי נקודת שבת α עבורה $|g'(\alpha)| > 1$.

נקודה דו־פרצופית: תהא $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ אזי נקודת שבת α עבורה קיימים $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}$ תחומים באשר $\alpha \in \partial \mathcal{U}, \partial \mathcal{V}$ וכן $|g'(\mathcal{U})| < 1$ וכן $|g'(\mathcal{V})| > 1$.

מסקנה: תהא $f \in C^1([a, b], \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ויהי $\zeta \in [a, b]$ שורש פשוט אזי קיים $\varepsilon > 0$ עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקטע $(\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$.

משפט: תהא $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ ותהא α נקודת שבת עבורה $0 < |g'(\alpha)| < 1$ אזי קיים $\varepsilon > 0$ עבורו לכל $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ מתקיים כי g מתכנסת ל- α בקצב התכנסות לינארי.

משפט: יהי $p > 1$ תהא $g \in C^p(I, \mathbb{R})$ ותהא α נקודת שבת עבורה $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$ וכן $g^{(n)}(\alpha) = 0$ לכל $n \in [p-1]$ אזי קיים $\varepsilon > 0$ עבורו לכל $x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ מתכנסת ל- α בקצב התכנסות p .

מסקנה: תהא $f \in C^2([a, b], \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ויהי $\zeta \in [a, b]$ שורש פשוט עבורו $f''(\zeta) \neq 0$ אזי קיים $\varepsilon > 0$ עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקצב ריבועי בקטע $(\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$.

מסקנה: תהא $f \in C^2([a, b], \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ויהי $\zeta \in [a, b]$ שורש עבורו $f'(\zeta) = 0$ וכן $f''(\zeta) \neq 0$ אזי קיים $\varepsilon > 0$ עבורו שיטת ניוטון מתכנסת בקצב לינארי בקטע $(\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$.

שיטת ניוטון המתוקנת: תהא $f \in C^1([a, b], \mathbb{R} \setminus \{0\})$ יהי $m \in \mathbb{N}_+$ אזי $g(x) = x - m \cdot \frac{f(x)}{f'(x)}$.

מסקנה: תהא $f \in C^n([a, b], \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ויהי $\zeta \in [a, b]$ שורש מדרגה n אזי קיים $\varepsilon > 0$ עבורו שיטת ניוטון המתוקנת מסדר n מתכנסת בקצב ריבועי בקטע $(\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon)$.

שיטת סטפנסן: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ אזי $g(x) = x - \frac{f(x)^2}{f(x+f(x))-f(x)}$.

תחום ההתכנסות: תהא $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ שיטה איטרטיבית ותהא $\alpha \in I$ נקודת שבת אזי קטע מקסימלי $J \subseteq I$ עבורו $\alpha \in J$ וכן לכל $x \in J$ שיטת האיטרציה g המתחילה ב- x מתכנסת ל- α .

תחום כיווץ: תהא $g \in C^1(I, \mathbb{R})$ שיטה איטרטיבית תהא $\alpha \in I$ נקודת שבת עם תחום התכנסות J אזי קטע מקסימלי $K \subseteq J$ עבורו $\alpha \in K$ וכן לכל $x \in K$ מתקיים $|g'(x)| \leq 1$.

שיטת ניוטון-רפסון: תהא $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ אזי $g(x) = x - Df(x)^{-1} \cdot f(x)$.

טענה: תהא $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ויהי $\zeta \in \mathbb{R}^n$ שורש פשוט אזי קיימת $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של ζ בה שיטת ניוטון-רפסון מתכנסת בקצב ריבועי.

טענה: תהא $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ קמורה ומונוטונית באשר $f(a)f(b) < 0$ אזי regula falsi בעלת סדר לינארי.

סימון: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\Pi_n = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) \leq n\}$.

פולינום טריגונומטרי: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $a_0 \dots a_n, b_0 \dots b_n \in \mathbb{R}$ אזי $f(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$.

פולינום אקספוננטי: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $a_0 \dots a_n, b_0 \dots b_n \in \mathbb{R}$ אזי $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{b_k x}$.

פולינום אינטרפולציה (פ"א): תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $p \in \Pi_n$ עבורו $p(x_i) = f(x_i)$ לכל $i \in \{0 \dots n\}$.

משפט: תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ נקודות שונות אזי קיים יחיד $p \in \Pi_n$ פולינום אינטרפולציה.

פולינום לגראנז': תהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\ell_i(x) = \frac{\prod_{k \in \{0 \dots n\} \setminus \{i\}} (x - x_k)}{\prod_{k \in \{0 \dots n\} \setminus \{i\}} (x_i - x_k)}$.

טענה: תהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$.

טענה בסיס לגראנז': תהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\{\ell_0 \dots \ell_n\}$ בסיס של Π_n .

מסקנה צורת לגראנז': תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ נקודות שונות אזי $\sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i(x)$ פולינום אינטרפולציה.

טענה בסיס ניוטון: תהינה $x_0 \dots x_{n-1} \in \mathbb{R}$ אזי $\left\{ \prod_{i=0}^j (x - x_i) \right\}_{j=-1}^{n-1}$ בסיס של Π_n .

טענה: תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$ ויהי $\sum_{j=-1}^n A_{j+1} \prod_{i=0}^j (x - x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f בנקודות $\{x_0, \dots, x_n\}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n-1} A_{j+1} \prod_{i=0}^j (x - x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב- $\{x_0, \dots, x_n\}$.

מסקנה: תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$ ויהי $\sum_{j=-1}^n A_{j+1} \prod_{i=0}^j (x - x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f בנקודות $\{x_0, \dots, x_k\}$ אזי $\sum_{j=-1}^{k-1} A_{j+1} \prod_{i=0}^j (x - x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב- $\{x_0, \dots, x_k\}$.

מסקנה: תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$ יהי $\sum_{j=-1}^n A_{j+1} \prod_{i=0}^j (x - x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f בנקודות $\{x_0, \dots, x_n\}$ ויהי $\sum_{j=-1}^{n-1} B_{j+1} \prod_{i=0}^j (x - x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב- $\{x_0, \dots, x_n\}$ אזי $\sum_{j=-1}^n A_{j+1} \prod_{i=0}^j (x - x_i) = \left(\sum_{j=-1}^{n-1} B_{j+1} \prod_{i=0}^j (x - x_i) \right) + A_{n+1} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

הפרש מחולק: תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_k \in \mathbb{R}$ ויהי $\sum_{j=-1}^{k-1} A_{j+1} \prod_{i=0}^j (x - x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב- $\{x_0 \dots x_k\}$ אזי $f[x_0 \dots x_k] = A_k$.

מסקנה: תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_k \in \mathbb{R}$ שונות ותהא $\sigma \in S_{k+1}$ תמורה אזי $f[x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(k)}] = f[x_0 \dots x_k]$.

מסקנה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n-1} f[x_0 \dots x_{j+1}] \prod_{i=0}^j (x - x_i)$ פולינום אינטרפולציה של f ב- $\{x_0 \dots x_n\}$.

טענה נוסחה רקורסיבית להפרשים המחולקים: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_k \in \mathbb{R}$ באשר $x_0 \neq x_k$ אזי

$$f[x_0 \dots x_k] = \frac{f[x_1 \dots x_k] - f[x_0 \dots x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

השגיאה באינטרפולציה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ויהי $p \in \Pi_n$ פ"א אזי $e(x) = f(x) - p(x)$.

משפט ביטוי לשגיאה באינטרפולציה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_n, x \in \mathbb{R}$ ויהי $p \in \Pi_n$ פ"א אזי

$$e(x) = f[x_0 \dots x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

טענה: תהא $f \in C([a, b])$ באשר $f \in C^k((a, b))$ ותהינה $x_0 \dots x_k \in [a, b]$ אזי קיימת $c \in (a, b)$ עבורה $f[x_0 \dots x_k] = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$.

מסקנה נוסחת השגיאה בפולינום האינטרפולציה: תהא $f \in C([a, b])$ באשר $f \in C^{n+1}((a, b))$ ותהינה $x_0 \dots x_n, x \in \mathbb{R}$ ויהי

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad c \in (a, b) \text{ עבורה}$$

מסקנה: תהא $f \in C([a, b])$ באשר $f \in C^{n+1}((a, b))$ ותהינה $x_0 \dots x_n, x \in \mathbb{R}$ ויהי $p \in \Pi_n$ פ"א אזי קיימת $c \in (a, b)$ עבורה

$$|e(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| (b-a)^{n+1}$$

מסקנה: תהא $f \in C([a, b])$ באשר $f \in C^{n+1}((a, b))$ ותהא $M \in \mathbb{R}$ עבורה $|f^{(n+1)}| \leq M$ ותהינה $x_0 \dots x_n, x \in \mathbb{R}$ ויהי

$$|e(x)| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad p \in \Pi_n \text{ פ"א אזי}$$

פונקציית ספליין: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ תהא $\{x_0 \dots x_n\}$ חלוקה של $[a, b]$ ויהיו $k, m \in \mathbb{N}$ אזי $f \in C^m([a, b])$ באשר $f|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \Pi_k$

לכל $i \in \{1 \dots n\}$.

הערה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ תהא $\{x_0 \dots x_n\}$ חלוקה של $[a, b]$ אזי פונקציית ספליין ממעלה k הינה פונקציית ספליין ממעלה k וסדר

חלקות $k-1$.

אינטרפולנט ליניארי למקוטעים: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ תהא $\{x_0 \dots x_n\}$ חלוקה של $[a, b]$ אזי פונקציית ספליין ממעלה 1.

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ותהא $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ אזי $f\left[\left\{a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right\}_{i=0}^n\right] = \frac{1}{n!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^n \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot k\right)\right)$

הפרש מחולק עם חזרה: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ אזי $f[x, x] = f'(x)$.

טענה: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ אזי $f[x, x] = \lim_{h \rightarrow 0} f[x, x+h]$.

הפרש מחולק עם חזרות: תהא $f \in C^n(\mathbb{R})$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ בסדר עולה אזי $f[x_0 \dots x_n] = \begin{cases} \frac{f[x_1 \dots x_n] - f[x_0 \dots x_{n-1}]}{x_n - x_0} & x_0 < x_n \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} & x_0 = x_n \end{cases}$

פולינום אינטרפולציה הרמיט: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $x_0 \dots x_m \in \mathbb{R}$ ותהא $g : \{x_0 \dots x_m\} \rightarrow \mathbb{N}_+$ באשר $\sum_{i=0}^m g(x_i) = n+1$

אזי $p \in \Pi_n$ עבורו $p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$ לכל $i \in \{0 \dots m\}$ ולכל $j \in \{0 \dots g(x_i) - 1\}$.

משפט: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_m \in \mathbb{R}$ ותהא $g : \{x_0 \dots x_m\} \rightarrow \mathbb{N}_+$ באשר $\sum_{i=0}^m g(x_i) = n+1$ אזי קיים ויחיד

$p \in \Pi_n$ פולינום אינטרפולציה הרמיט.

פונקציית ספליין הרמיט: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ תהא $x_0 \dots x_n$ חלוקה של $[a, b]$ ויהי $k \in \mathbb{N}$ אזי פונקציית ספליין ממעלה k וסדר חלקות 1.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{j=-1}^{n-1} f[x_0 \dots x_{j+1}] \prod_{i=0}^j (x - x_i)$ פולינום אינטרפולציה הרמיט.

פולינום ברשטיין: יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהי $k \in \{0 \dots n\}$ אזי $B_n^k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדר $B_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\{B_n^k\}_{k=0}^n$ בסיס של Π_n .

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $P_n^B : ([0, 1] \rightarrow \mathbb{R}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $P_n^B(f, x) = \sum_{k=0}^n B_n^k(x) \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$.

למה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי

- $P_n^B(\lambda f + \mu g, x) = \lambda P_n^B(f, x) + \mu P_n^B(g, x)$ ויהיו $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ויהיו $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ אזי

- $B_n^k \geq 0$ מתקיים $k \in \{0 \dots n\}$ לכל

- $P_n^B(c, x) = c$ ויהי $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $c \in \mathbb{R}$ אזי

- $P_n^B(x, x) = x$

- $P_n^B(x^2, x) = x^2 + \frac{1}{n}(x - x^2)$

- $\sum_{k=0}^n B_n^k(x) \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n}$

- $B_n^k(x) = x B_{n-1}^{k-1}(x) + (1-x) B_{n-1}^k(x)$

טענה: תהא $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $x \in [0, 1]$ אזי $P_n^B(f, x) \rightarrow f(x)$ כ- $n \rightarrow \infty$.

מסקנה: תהא $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $x \in [0, 1]$ אזי $\sup |f(x) - P_n^B(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

חצי-מכפלה פנימית: יהי V מ"צ נ"ס אזי $H : V^2 \rightarrow \mathbb{C}$ המקיימת

- הרמיטיות: $\forall a, b \in V. H(a, b) = \overline{H(b, a)}$

• לינאריות: $\forall a, b, c \in V. \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. H(\alpha a + \beta b, c) = \alpha H(a, c) + \beta H(b, c)$

• חיוביות: $\forall a \in V. H(a, a) \in \mathbb{R}_+$

חצי-נורמה מושרית: יהי V מ"ן נ"ס ותהא חצי-מכפלה פנימית H על V אזי $\|a\| = \sqrt{H(a, a)}$

קירוב ריבועים מינימליים: יהי V מ"ן נ"ס ותהא חצי-מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0 \dots v_n\} \subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית

מעל $\text{span}\{v_0 \dots v_n\}$ ויהי $u \in L$ אזי $\arg \min_{v \in \text{span}\{v_0 \dots v_n\}} (\text{dist}(u, v))$

משפט: יהי V מ"ן נ"ס ותהא חצי-מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0 \dots v_n\} \subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל

$\text{span}\{v_0 \dots v_n\}$ יהי $u \in L$ ויהיו $c_0 \dots c_n \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{i=0}^n c_i v_i$ הינו קירוב ריבועים מינימליים של u (לכל $k \in \{0 \dots n\}$) מתקיים $\sum_{i=0}^n c_i (v_i, v_k) = (u, v_k)$

טענה: יהי V מ"ן נ"ס ותהא חצי-מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0 \dots v_n\} \subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית מעל $\text{span}\{v_0 \dots v_n\}$

יהי $u \in L$ ויהי $v \in \text{span}\{v_0 \dots v_n\}$ קירוב ריבועים מינימליים אזי $(v - u) \perp \text{span}\{v_0 \dots v_n\}$

מערכת משוואות נורמלית: יהי V מ"ן נ"ס ותהא חצי-מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0 \dots v_n\} \subseteq V$ בת"ל באשר H מכפלה פנימית

מעל $\text{span}\{v_0 \dots v_n\}$ יהי $u \in L$ ויהיו $c_0 \dots c_n \in \mathbb{R}$ אזי $\sum_{i=0}^n c_i (v_i, v_k) = (u, v_k)$

מסקנה: יהי V מ"ן נ"ס ותהא חצי-מכפלה פנימית H מעל V תהא $\{v_0 \dots v_n\} \subseteq V$ בת"ל ואורתוגונלית באשר H מכפלה פנימית

מעל $\text{span}\{v_0 \dots v_n\}$ ויהי $u \in L$ אזי הקירוב ריבועים מינימליים הוא $\sum_{i=0}^n \frac{H(f, v_i)}{H(v_i, v_i)} \cdot v_i$

מכפלה פנימית ממושקלת: תהא $w \in C^1([a, b])$ חיובית ממש עד כדי קבוצה זניחה אזי $H : C^1([a, b])^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך

$$H(f, g) = \int_a^b (f \cdot g \cdot w)$$

טענה: תהא $w \in C^1([a, b])$ חיובית ממש עד כדי קבוצה זניחה אזי מכפלה פנימית ממושקלת w הינה מכפלה פנימית מעל $C^1([a, b])$

סדרה אורתוגונלית של פולינומים: תהא H מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}[x]$ אזי $\mathbb{R}[x]$ $\{q_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathbb{R}[x]$ באשר $q_n \in \Pi_n$ וכן לכל $i \neq j$ מתקיים

$$H(q_i, q_j) = 0$$

פולינומי לג'נדר: $P_0(x) = 1$ וכן $P_1(x) = x$ וכן $P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת 1 בקטע $[-1, 1]$ אזי פולינומי לג'נדר מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

טענה: יהי $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ אזי $P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - \frac{(P_n, P_n)}{(P_{n-1}, P_{n-1})} P_{n-1}(x)$

פולינומי צ'בישב: $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ בקטע $[-1, 1]$ אזי פולינומי צ'בישב מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

טענה: $T_0(x) = 1$ וכן $T_1(x) = x$ וכן $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

פולינומי לגר: $L_0(x) = 1$ וכן $L_1(x) = 1 - x$ וכן $L_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1} - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x)$

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת e^{-x} בקטע $[0, \infty)$ אזי פולינומי לגר מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

פולינומי הרמיט: $H_0(x) = 1$ וכן $H_1(x) = 2x$ וכן $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

טענה: תהא מכפלה פנימית ממושקלת e^{-x^2} בקטע $(-\infty, \infty)$ אזי פולינומי הרמיט מהווים סדרה אורתוגונלית של פולינומים.

טענה: תהא $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $Q_{n+1}(x) = xQ_n(x) + \sum_{i=0}^n f(n+1, i) \cdot Q_i(x)$ סדרה אורתוגונלית של פולינומים אזי

$$f(n+1, i) = -\frac{(xQ_n, Q_i)}{(Q_j, Q_j)}$$

• לכל $i \in \{0 \dots n-2\}$ מתקיים $f(n+1, i) = 0$

טענה: תהא $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ באשר $m > n$ וכן עמודות A בת"ל יהי $b \in \mathbb{R}^m$ ויהי $b' \in \mathbb{R}^m$ קירוב ריבועיים מינימליים של b למרחב

$\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ אזי קיים ויחיד פתרון למערכת $A^T A x = A^T b$

טענה: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $f'(x) = p'(x) + \frac{d}{dx}(f[x_0 \dots x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i))$

שגיאה בנגזרת: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $e_{f'}(x) = e'_f(x)$

סדר נקודות חוקי: נקודות $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ עבורן אם $x_i = x_j$ אזי $\{x_i \dots x_j\} = \{x_i\}$

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ בסדר חוקי ותהא $\sigma \in S_{n+1}$ תמורה בסדר חוקי אזי

$$f[x_0 \dots x_n] = f[x_{\sigma(0)} \dots x_{\sigma(n)}]$$

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $f[x_0 \dots x_n, x]$ רציפה.

טענה: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $f[x_0 \dots x_n, x] \left(\frac{d}{dx} f[x_0 \dots x_n, x]\right)(x) = f[x_0 \dots x_n, x]$

מסקנה: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ ותהיינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי

$$e_{f'}(x) = f[x_0 \dots x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) + f[x_0 \dots x_n, x] \frac{d}{dx} \left(\prod_{i=0}^n (x - x_i)\right)$$

מסקנה: תהא $f \in C^1([a, b])$ תהיינה $x_0 \dots x_n \in [a, b]$ ויהי p פ"א של f אזי קיימים $\zeta, \xi \in (a, b)$ עבורם

$$f'(x) = p'(x) + \frac{f^{(n+2)}(\zeta)}{(n+2)!} \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \frac{d}{dx} \left(\prod_{i=0}^n (x - x_i)\right)$$

מסקנה: תהא $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי

• אם $\prod_{i=0}^n (a - x_i) = 0$ אזי $e_{f'}(a) = \mathcal{O}((b-a)^n)$

• אם $\frac{d}{dx}(\prod_{i=0}^n (x - x_i))(a) = 0$ אזי $e_{f'}(a) = \mathcal{O}((b-a)^{n+1})$

סדר הקירוב: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $p \in \mathbb{N}$ מקסימלי עבורו קיים $C \in \mathbb{R}$ וקיים

$$|e_{f'}(a)| \leq Ch^p \quad h \in [\min_{i \neq j} |x_i - x_j|, \max |x_i - x_j|]$$

הערה: תהא שיטת קירוב מעל הנקודות $x_1 \dots x_n$ עם מרחק מקסימלי h בין הנקודות ועם שגיאה $e(x)$ סדר הקירוב של השיטה הוא

$$|e(x)| = \mathcal{O}(h^p) \quad p \in \mathbb{N} \text{ מינימלי עבורו}$$

טענה: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ותהא $a \in \mathbb{R} \setminus \{x_0 \dots x_n\}$ עבורה $\{x_0 \dots x_n\}$ סימטריות סביב a אזי

$$\frac{d}{dx}(\prod_{i=0}^n (x - x_i))(a) = 0$$

סדר דיוק אלגברי: תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ותהא $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שגיאה של נוסחת קירוב אזי $n \in \mathbb{N}$ מקסימלי עבורו לכל $p \in \Pi_n$ מתקיים

$$e_p = 0$$

טענה: תהא $f \in C^m(\mathbb{R})$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי

$$f''(x) = p''(x) + f[x_0 \dots x_n, x, x, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) + 2f[x_0 \dots x_n, x, x] \frac{d}{dx}(\prod_{i=0}^n (x - x_i)) + f[x_0 \dots x_n, x] \frac{d^2}{dx^2}(\prod_{i=0}^n (x - x_i))$$

מסקנה: תהא $f \in C^2([a, b])$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in [a, b]$ ויהי p פ"א של f אזי קיימים $\zeta, \xi, \chi \in (a, b)$ עבורם

$$f''(x) = p''(x) + \frac{f^{(n+3)}(\zeta)}{(n+3)!} \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i) + \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \cdot \frac{d}{dx}(\prod_{i=0}^n (x - x_i)) + \frac{f^{(n+1)}(\chi)}{(n+1)!} \cdot \frac{d^2}{dx^2}(\prod_{i=0}^n (x - x_i))$$

כלל הפרש קדמי לקירוב נגזרת: תהא $f \in C^2(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $h > 0$ אזי $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

טענה: תהא $f \in C^2(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ באשר קיימת סביבה \mathcal{U} של a בה f'' חסומה אזי סדר קירוב הפרש קדמי הינו $\mathcal{O}(h)$

כלל הפרש מרכזי לקירוב נגזרת: תהא $f \in C^2(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $h > 0$ אזי $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

מסקנה: תהא $f \in C^2(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $h > 0$ ויהי p פ"א של f בנקודות $\{a+h, a-h\}$ אזי $p'(a) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

טענה: תהא $f \in C^3(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ באשר קיימת סביבה \mathcal{U} של a בה f''' חסומה אזי סדר קירוב הפרש מרכזי הינו $\mathcal{O}(h^2)$

טענה: תהא $f \in C^3(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ באשר קיימת סביבה \mathcal{U} של a בה f''' חסומה אזי הפרש מרכזי בעל סדר דיוק אלגברי 2.

משפט ריצ'רדסון: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $h > 0$ ותהא D שיטת קירוב ל- $f'(a)$ מסדר $\mathcal{O}(h^{2k})$ בעלת הפרש h בין

$$f'(a) = D(h) + \sum_{i=0}^{\infty} C_i h^{2k+2i}$$

מסקנה קירוב ריצ'רדסון: תהא $f \in C^1(\mathbb{R})$ ויהי $a \in \mathbb{R}$ ויהי $h > 0$ ותהא $D(h)$ שיטת קירוב ל- $f'(a)$ מסדר $\mathcal{O}(h^{2k})$ בעלת הפרש

$$f'(a) = \frac{4^k D(h) - D(2h)}{4^k - 1} + \mathcal{O}(h^{2k+2})$$

טענה: תהא $f \in R([a, b])$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ויהי p פ"א של f אזי $\int_a^b f = \int_a^b p + \int_a^b f[x_0 \dots x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx$

שגיאה באינטגרל: תהא $f \in R([a, b])$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ אזי $\int_a^b e_f(x) dx$

טענה: תהא $f \in C^{n+1}([a, b])$ ותהינה $x_0 \dots x_n, k \in \mathbb{R}$ באשר $\max_{i \in [n]} \max_{x \in [a, b]} |x - x_i| \leq k(b-a)$ אזי

$$\left| E\left(\int_a^b f\right) \right| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a) (k(b-a))^{n+1}$$

מסקנה: תהא $f \in C^{n+1}([a, b])$ ותהינה $x_0 \dots x_n, k \in \mathbb{R}$ באשר $\max_{i \in [n]} \max_{x \in [a, b]} |x - x_i| \leq k(b-a)$ אזי

$$\left| E\left(\int_a^b f\right) \right| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+2}\right)$$

טענה: תהא $f \in C^{n+1}([a, b])$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ באשר $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a, b]$ אזי קיים $\xi \in (a, b)$

$$\left| E\left(\int_a^b f\right) \right| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx$$

מסקנה: תהא $f \in C^{n+1}([a, b])$ ותהינה $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ באשר $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$ בעלת סימן קבוע בקטע $[a, b]$ אזי

$$\left| E\left(\int_a^b f\right) \right| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+2}\right)$$

כלל המלבן לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^1([a, b])$ אזי $(b-a)f(a)$

מסקנה: תהא $f \in C^1([a, b])$ אזי קיים $\xi \in (a, b)$ עבורו שגיאת כלל המלבן הינה $\frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$

כלל הטרפז לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^2([a, b])$ אזי $\frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$

מסקנה: תהא $f \in C^2([a, b])$ אזי קיים $\xi \in (a, b)$ עבורו שגיאת כלל הטרפז הינה $-\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$

טענה: תהא $f \in C^{n+2}([a, b])$ ותהינה $x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$ באשר $\int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx = 0$ וכן $\prod_{i=0}^{n+1} (x - x_i)$ בעלת סימן קבוע

$$E\left(\int_a^b f\right) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n+1} (x - x_i) dx$$

מסקנה: תהא $f \in C^{n+2}([a, b])$ ותהינה $x_0 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$ באשר $\int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx = 0$ וכן $\prod_{i=0}^{n+1} (x - x_i)$ בעלת סימן קבוע

$$\left| E\left(\int_a^b f\right) \right| = \mathcal{O}\left((b-a)^{n+3}\right)$$

כלל נקודות האמצע לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^2([a, b])$ אזי $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

מסקנה: תהא $f \in C^2([a, b])$ אזי קיים $\xi \in (a, b)$ עבורו שגיאת כלל נקודת האמצע הינה $E\left(\int_a^b f\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$

טענה: תהא $f \in R([a, b])$ תהיינה $A_0 \dots A_n \in \mathbb{R}$ ויהי $x_0 \dots x_n \in [a, b]$ ויהי p פ"א של f אזי (הכלל $\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ לקירוב אינטגרל בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות n) $\Leftrightarrow \int_a^b p(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i p(x_i)$

מסקנה: תהיינה $f, w \in R([a, b])$ באשר $w \geq 0$ ותהיינה $A_0 \dots A_n \in \mathbb{R}$ ויהי $x_0 \dots x_n \in [a, b]$ אזי (הכלל $\sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ לקירוב $\int_a^b f(x) w(x) dx$ בעל סדר דיוק אלגברי של לפחות n) $\Leftrightarrow \int_a^b \ell_i(x) w(x) dx = A_i$ $i \in \{0 \dots n\}$ (לכל מתקיים $i \in \{0 \dots n\}$)

כלל סימפסון לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C([a, b])$ אזי $\frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

טענה: תהא $f \in C([a, b])$ אזי כלל סימפסון בעל סדר דיוק אלגברי 3.

מסקנה: תהא $f \in C^4([a, b])$ אזי קיים $\xi \in (a, b)$ עבורו שגיאת כלל סימפסון הינה $E\left(\int_a^b f\right) = -\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \cdot \frac{f^{(4)}(\xi)}{90}$

כלל הטרפז המורכב לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^2([a, b])$ ותהא $x_0 \dots x_n$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h אזי $T_h(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$

מסקנה: תהא $f \in C^2([a, b])$ אזי קיים $\xi \in (a, b)$ עבורו שגיאת כלל הטרפז המורכב הינה $E\left(\int_a^b f\right) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$

מסקנה: תהא $f \in C([a, b])$ גזירה פעמיים באשר $|f^{(2)}| \leq M$ אזי שגיאת כלל הטרפז המורכב הינה $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M$

כלל סימפסון המורכב לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C([a, b])$ ותהא $x_0 \dots x_{2M}$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h אזי $S_h(f) = \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_{2M}) + 2 \sum_{i=1}^{M-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=1}^{M-1} f(x_{2i-1})\right)$

מסקנה: תהא $f \in C^4([a, b])$ אזי קיים $\xi \in (a, b)$ עבורו שגיאת כלל סימפסון המורכב הינה $E\left(\int_a^b f\right) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$

טענה: תהא $f \in C([a, b])$ ותהא $x_0 \dots x_n$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h אזי $S_h(f) = \frac{4T_h(f) - T_{2h}(f)}{3}$

כלל הטרפז המורכב עם שגיאה לקירוב אינטגרל: תהא $f \in C^2([a, b])$ ותהא $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ ותהא h קבוע h ותהא $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ אזי $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + \varepsilon_i + f(x_{i+1}) + \varepsilon_{i+1})$

מסקנה: תהא $f \in C^2([a, b])$ ותהא $x_0 \dots x_n$ חלוקה בעלת הפרש קבוע h ותהא $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ אזי שגיאת כלל הטרפז המורכב עם שגיאה הינה $\left|E\left(\int_a^b f\right)\right| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} |f''(\xi)| + (b-a) \cdot \max_{i \in [n]} (\varepsilon_i)$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי המקדם הראשי של $T_n(x)$ הינו 2^{n-1}

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\{T_n = 0\} = \left\{\cos\left(\frac{2k+1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}$

מסקנה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $|\{T_n = 0\}| = n$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $-1 \leq T_n \leq 1$

טענה: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי נקודות הקיצון של T_n בקטע $(-1, 1)$ הינן $\left\{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \mid k \in \{0, \dots, n\}\right\}$

כלל גאוס לקירוב אינטגרל: תהיינה $f, w \in R([a, b])$ באשר $w \geq 0$ יהי $n \in \mathbb{N}$ תהא $\{q_i\}_{i=0}^\infty$ סדרה אורתוגונלית של פולינומים באשר $\text{sols}(q_{n+1}) = \{x_0 \dots x_n\}$ אזי $\sum_{i=0}^n \left(\int_a^b \ell_i(x) w(x) dx\right) \cdot f(x_i)$

משפט: תהא $w \in R([a, b])$ באשר $w \geq 0$ ותהא $f \in C^{2n+2}([a, b])$ אזי קיים $\xi \in (a, b)$ עבורו שגיאת כלל גאוס הינה $E\left(\int_a^b f\right) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot \int_a^b \left(\prod_{i=0}^n (x - x_i)\right)^2 w(x) dx$

מסקנה: תהא $w \in R([a, b])$ באשר $w \geq 0$ ותהא $f \in C^{2n+2}([a, b])$ אזי כלל גאוס בעל סדר דיוק אלגברי $2n+1$

טענה: יהי $f \in C^{n+1}([a, b])$ ויהי p פ"א של f אזי קיים $c \in (a, b)$ עבורו $\|e(x)\|_\infty = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right| \cdot \left\|\prod_{i=0}^n (x - x_i)\right\|_\infty$

פולינום צ'בישב מתוקן: יהי $n \in \mathbb{N}$ אזי $\hat{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$

פולינום המינימקס: תהא $f \in C([a, b])$ אזי $p \in \Pi_n$ מתוקן עבורו לכל $q \in \Pi_n$ מתקיים $\|f(x) - p(x)\|_\infty \leq \|f(x) - q(x)\|_\infty$

משפט המינימקס לפולינומים: יהי $p \in \Pi_n$ מתוקן בקטע $[-1, 1]$ אזי $\left\|\hat{T}_n\right\|_\infty \leq \|p\|_\infty$

מסקנה: פולינום המינימקס ממעלה n של x^{n+1} בקטע $[-1, 1]$ הינו $x^{n+1} - \hat{T}_{n+1}(x)$

מסקנה: יהי $f \in R([-1, 1])$ פולינום מדרגה $n+1$ ויהי $p \in \Pi_n$ פולינום המינימקס של f אזי p פ"א של f בשורשי \hat{T}_{n+1}

משפט איפיון כללי לפולינום המינימקס: תהא $f \in C([a, b])$ ויהי $p \in \Pi_n$ מתוקן אזי (פולינום המינימקס של f) $\Leftrightarrow (f, p)$ קיימים $t_0 \dots t_{n+1} \in [a, b]$ עבורם $f(t_i) - p(t_i) = \text{sign}(e(t_0)) \cdot (-1)^i \cdot \|f - p\|_\infty$ לכל $i \in \{0, \dots, n+1\}$

נורמה מושרית על מרחב המטריצות: תהא $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי $\nu_M: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $\nu_M(A) = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left\{\frac{\nu(Ax)}{\nu(x)}\right\}$

הערה: תהא $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי נסמן $\nu = \nu_M$

טענה: תהא $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי $\nu: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה מעל $M_n(\mathbb{R})$

טענה: תהא $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\nu(A) = \max_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} \{\nu(Av)\}$

מסקנה: תהא $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$ אזי $\nu(Ax) \leq \nu(A) \cdot \nu(x)$

טענה: תהא $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה ותהינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\nu(A \cdot B) \leq \nu(A) \cdot \nu(B)$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\|A\|_\infty = \max_{i \in [n]} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\|A\|_1 = \max_{j \in [n]} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$

מסקנה: תהינה $\nu, \eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמות אזי קיימים $m, M > 0$ עבורם $m \cdot \eta(A) \leq \nu(A) \leq M \cdot \eta(A)$

ספקטורם של מטריצה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid A \text{ ע"ע של } \lambda\}$

רדיוס ספקטראלי: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{spec}(A)} |\lambda|$

משפט: תהא $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\rho(A) \leq \nu(A)$

טענה: תהא $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ נורמה אזי $\nu(I) = 1$

מסקנה: הפונקציה $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $f(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ אינה נורמה מושרית.

טענה: יהי $\varepsilon > 0$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי קיימת נורמה $\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ עבורה $\nu(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$

שגיאה של מערכת משוואות: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ותהינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי $e = \tilde{x} - x$

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ותהינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי $Ae = r$

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי

$$\bullet \|b\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\bullet \|x\| \leq \|A^{-1}\| \|b\|$$

$$\bullet \|r\| \leq \|A\| \|e\|$$

$$\bullet \|e\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$$

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי

$$\bullet \frac{1}{\|A\|} \leq \frac{\|e\|}{\|r\|} \leq \|A^{-1}\|$$

$$\bullet \frac{1}{\|A^{-1}\|} \leq \frac{\|b\|}{\|x\|} \leq \|A\|$$

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי

$$\bullet \frac{1}{\|A\| \|A^{-1}\|} \leq \frac{\|e\|}{\|r\|} \cdot \frac{\|b\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\|$$

מספר המצב של מטריצה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

שגיאה יחסית של מערכת משוואות: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן

$$A\tilde{x} = b + r$$

$$\bullet \delta(x) = \frac{\|e\|}{\|x\|}$$

$$\bullet \delta(b) = \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ אזי

$$\delta(x) \in \left[\frac{\delta(b)}{\text{cond}(A)}, \text{cond}(A) \delta(b) \right]$$

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $\text{cond}(A) \geq \left| \frac{\max \text{spec}(A)}{\min \text{spec}(A)} \right|$

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(A) \geq 1$

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ באשר B אינה הפיכה וכן $A \neq B$ אזי $\text{cond}(A) \geq \frac{\|A\|}{\|A-B\|}$

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(A) = \max \left\{ \frac{\|A\|}{\|A-B\|} \mid \det(B) = 0 \right\}$

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(A) = \frac{\|A\|}{\min\{\|A-B\| \mid \det(B)=0\}}$

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $A\tilde{x} = b + r$ וכן b ו"ע של

$$\delta(x) = \left| \frac{\max \text{spec}(A)}{\min \text{spec}(A)} \right| \cdot \delta(b)$$

טענה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ותהינה $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A) \cdot \text{cond}(B)$

שגיאה של מערכת משוואות: תהינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ ותהינה $b, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A+R)\tilde{x} = b$ אזי $e = \tilde{x} - x$

מסקנה: תהינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ ותהינה $b, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A+R)\tilde{x} = b$ אזי $Ae = -R\tilde{x}$

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ באשר A הפיכה ותהינה $b, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A+R)\tilde{x} = b$ אזי

$$\|e\| \leq \|A^{-1}\| \|R\| \|\tilde{x}\|$$

מסקנה: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ באשר A הפיכה ותהינה $b, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A+R)\tilde{x} = b$ אזי

$$\bullet \frac{\|e\|}{\|B\|} \cdot \frac{\|A\|}{\|\tilde{x}\|} \leq \text{cond}(A)$$

שגיאה של מערכת משוואות: תהיינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A + R)\tilde{x} = b + r$ אזי $e = \tilde{x} - x$.

משפט: תהא $\|\cdot\|$ נורמה מושרית תהיינה $A, R \in M_n(\mathbb{R})$ באשר A הפיכה ותהיינה $b, r, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ באשר $Ax = b$ וכן $(A + R)\tilde{x} = b + r$ וכן $\|B\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ אזי $\|B\| \leq \frac{\|r\|}{\|b\|} \left(\frac{\|B\|}{\|A\|} + \frac{\|r\|}{\|b\|} \right)$ וכן $\frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \left(\frac{\|B\|}{\|A\|} \right)}$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ משולשית עליונה והפיכה אזי אלגוריתם גאוס לדירוג בעל סיבוכיות זמן $O(n^2)$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי אלגוריתם גאוס לדירוג בעל סיבוכיות זמן $O(n^3)$.

משפט פירוק LU: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי קיימות $L, U \in M_n(\mathbb{R})$ באשר U משולשית עליונה וכן L משולשית תחתונה עם 1 על האלכסון הראשי עבורן $A = LU$.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $U_A \in M_n(\mathbb{R})$ המטריצה המשולשית העליונה הראשונה המתקבלת באלגוריתם גאוס.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $L_A \in M_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(L_A)_{i,j} = \frac{(U_A)_{i,j}}{(U_A)_{j,j}}$ כאשר $i > j$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי L_A, U_A פירוק LU של A .

אלגוריתם גאוס עם הצרה חלקית: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ויהי $b \in \mathbb{R}^n$ אזי

function GaussPartialPivoting(A, b):

```

     $B \leftarrow (A|b)$ 
    for  $i \leftarrow [1, \dots, n]$  do
         $m \leftarrow \arg \max \{(A)_{i,j} \mid j \in [n]\}$ 
         $[R_1(B), R_m(B)] \leftarrow [R_m(B), R_1(B)]$ 
        for  $j \leftarrow [i + 1, \dots, n]$  do
             $R_j(B) \leftarrow R_i(B) - \frac{(A)_{i,j}}{(A)_{i,i}} \cdot R_i(B)$ 
        end
         $R_i(B) \leftarrow \frac{1}{(A)_{i,i}} \cdot R_i(B)$ 
    end
    return  $\left( \begin{array}{c|c} C_1(B) & \dots & C_n(B) \end{array} \right), C_{n+1}(B)$ 

```

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ויהי $b \in \mathbb{R}^n$ באשר A, b מיוצגים בעזרת נקודה צפה אזי $e(\text{GaussPartialPivoting}(A, b)) \leq e(\text{GaussElimination}(A, b))$ במציאת פתרון למשוואה $Ax = b$.

משפט פירוק QR: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי קיימות $Q, R \in M_n(\mathbb{R})$ באשר Q אורתוגונלית וכן R משולשית עליונה עבורן $A = QR$.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה ותהא $v_1 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ תוצאת גרס-שמידט על $C_1(A), \dots, C_n(A)$ אזי $Q_A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי $R_A \in M_n(\mathbb{R})$ המוגדרת $(R_A)_{i,j} = \langle C_j(A), C_i(Q_A) \rangle$ כאשר $i \leq j$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה אזי Q_A, R_A פירוק QR של A .

טענה: תהא $Q \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית אזי $\text{cond}(Q) = 1$ בנורמה המושרית הסטנדרטית.

סימון: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $i \in [n]$ אזי $r_i = \sum_{j \in [n] \setminus \{i\}} |(A)_{i,j}|$.

משפט העיגולים של גרשגורין: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי לכל $\lambda \in \text{spec}(A)$ קיים $i \in [n]$ עבורו $|\lambda - (A)_{i,i}| \leq r_i$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $\lambda \in \text{spec}(A)$ אזי

$$\min_{i \in [n]} \left(|(A)_{i,i} - r_i| \right) \leq |\lambda| \leq \rho(A) \leq \max_{i \in [n]} \left(|(A)_{i,i} - r_i| \right) = \|A\|_\infty$$

מטריצה בעלת אלכסון דומיננטי בשורות: מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ עבורה לכל $i \in [n]$ מתקיים $|(A)_{i,i}| > r_i$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ בעלת אלכסון דומיננטי בשורות אזי A הפיכה.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ באשר $\rho(A) < 1$ ויהי $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ אזי $c(A - I)$ הפיכה.

מנת רליי: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ אזי $\sigma : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת $\sigma(x) = \frac{x^T A x}{x^T x}$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ יהי $\lambda \in \text{spec}(A)$ ויהי $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ו"ע של λ אזי $\sigma(v) = \lambda$.

טענה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ ויהי $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ אזי $\sigma(v) = v^T A v$.

משפט שיטת החזקה: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ באשר $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ יהיו $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ יהיו $C_1 \dots C_m \in \mathbb{R}$ באשר $C_1 \neq 0$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ עבורה $v_1 \dots v_m$ קבוצת ו"ע בת"ל מקסימלית וכן ו"ע של λ_i לכל $i \in [m]$.

אזי

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma \left(A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i \right) \right) = \lambda_1 \bullet$$

$$\bullet \text{ קיים } \alpha \in \mathbb{R} \text{ עבורו } \left| \sigma \left(A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i \right) \right) - \lambda_1 \right| \leq \alpha \cdot \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \text{ לכל } k \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet \text{ אם } A \text{ סימטרית אזי קיים } \alpha \in \mathbb{R} \text{ עבורו } \left| \sigma \left(A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i \right) \right) - \lambda_1 \right| \leq \alpha \cdot \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^{2k} \text{ לכל } k \in \mathbb{N}.$$

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i \right)}{\lambda_1^k} = C_1 v_1$$

טענה: יהיו $\lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ באשר $|\lambda_i| \geq |\lambda_j|$ לכל $i < j$ יהי $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ באשר $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ יהיו $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ יהיו $C_1 \dots C_m \in \mathbb{R}$ באשר $C_1 \neq 0$ ותהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ עבורה $v_1 \dots v_m$ קבוצת ו"ע בת"ל מקסימלית וכן ו"ע של λ_i לכל $i \in [m]$

$$\text{אזי } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|A^{k+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i \right)\|_2}{\|A^k \cdot \left(\sum_{i=1}^m C_i v_i \right)\|_2} = |\lambda_1|$$

משפט שיטת החזקה ההפוכה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ יהי $\mu \in \mathbb{R} \setminus \text{spec}(A)$ ויהי $\lambda \in \text{spec}(A)$ עם ו"ע $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ אזי

$$(A - \mu I)^{-1} v = \frac{1}{\lambda - \mu} v$$

פירוק SVD: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ אזי $A = U \Sigma V^T$ באשר $V \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וכן $U \in M_m(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וכן

$$\Sigma \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \text{ אלכסונית אי-שלילית עבורה } (\Sigma)_{i,i} \leq (\Sigma)_{j,j} \text{ לכל } i \geq j.$$

ערכים סינגולריים: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A = U \Sigma V^T$ פירוק SVD אזי $\text{Sing}(A) = \left\{ (\Sigma)_{i,i} \mid i \in [\min\{n, m\}] \right\}$

וקטורים סינגולריים ימניים: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A = U \Sigma V^T$ פירוק SVD אזי $\{C_i(V) \mid i \in [n]\}$

וקטורים סינגולריים שמאליים: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A = U \Sigma V^T$ פירוק SVD אזי $\{C_i(U) \mid i \in [m]\}$

טענה: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ אזי $\text{spec}(AA^T) \cup \{0\} = \text{spec}(A^T A) \cup \{0\}$

טענה: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ בעלת פירוק SVD אזי $\text{spec}(A^T A) \cup \{0\} = \{\sigma^2 \mid \sigma \in \text{Sing}(A)\} \cup \{0\}$

טענה: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ בעלת פירוק SVD אזי הוקטורים הסינגולריים הימניים של A הם ו"ע של $A^T A$

טענה: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ בעלת פירוק SVD אזי הוקטורים הסינגולריים השמאליים של A הם ו"ע של AA^T

סימון: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ יהי $A = U \Sigma V^T$ פירוק SVD ויהי $i \in [\min\{n, m\}]$ עבורו הע"ע של $C_i(V)$ בתור ו"ע של $A^T A$ שווה

לע"ע של $C_i(U)$ בתור ו"ע של AA^T אזי $C_i(V) \sim C_i(U)$

טענה: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A = U \Sigma V^T$ פירוק SVD אזי $\{A \cdot C_i(V) \mid (i \in [\min\{n, m\}]) \wedge (C_i(V) \sim C_i(U))\}$

אורתוגונליים וכן הינם ו"ע של AA^T .

אלגוריתם למציאת פירוק SVD: ...

משפט: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ אזי A בעלת פירוק SVD.

משפט יחידות פירוק SVD: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ ויהי $A = U \Sigma V^T$ פירוק SVD באשר $(\Sigma)_{i,i} \neq (\Sigma)_{j,j}$ לכל $i \neq j$ אזי קיים ויחיד

פירוק SVD עד כדי סימן הוקטורים הסינגולריים.

משפט יחידות פירוק SVD: תהא $A \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ ויהי $A = U \Sigma V^T$ פירוק SVD באשר $(\Sigma)_{i,i} \neq (\Sigma)_{j,j}$ לכל $i \neq j$ אזי קיים ויחיד

פירוק SVD עד כדי הכפלת הוקטורים הסינגולריים ב- $\{1, -1, i, -i\}$.

מסקנה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית אזי $\text{Sing}(A) = \{|\lambda| \mid \lambda \in \text{spec}(A)\}$