```
אזי a,b\in\mathbb{R} אזי אינטרוול: יהיו
                                                                                                                      (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \bullet
                                                                                                                      (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \bullet
                                                                                                                      [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \bullet
                                                                                                                       [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \bullet
                                                                                                                          .(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \bullet
                                                                                                                           .[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\} \bullet
                                                                                                                        .(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \bullet
                                                                                                                        (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\} \bullet
                                                                                                                                            .(-\infty,\infty)=\mathbb{R}
                                                                                                 \mathbb{F} אימס סדר חזק על \mathbb{F} המקיימים
                                                                      \forall x,y \in \mathbb{F}. \ (x < y) \lor (x > y) \lor (x = y) :טריכוטומיה/לינאריות
                                                                      \forall x,y,z \in \mathbb{F}.x < y \Longrightarrow x+z < y+z : קומפטביליות עם חיבור
                                                                  \forall x,y \in \mathbb{F}. \forall z > 0_{\mathbb{F}}. x < y \Longrightarrow x \cdot z < y \cdot z פומפטביליות עם כפל: •
                                                                      \exists x \in \mathbb{F}. \exists n \in \mathbb{N}. x < \sum_{i=0}^n 1 עבורו \mathbb{F} שדה בעל תכונת ארכימדס: שדה בעל
                                                                                                                       טענה: \mathbb{R} מקיים את תכונת ארכימדס.
                                                       |x|=[x]=\max{(n\in\mathbb{Z}\mid n\leq x)} אזי x\in\mathbb{R} יהי שלם ערך שלם תחתון: יהי
                                                                                                            \{x\}=x-[x] אזי x\in\mathbb{R} הערך השברי: יהי
                                                                                                          \lfloor x \rfloor = \min (n \in \mathbb{Z} \mid x \le n) ערך שלם עליון:
                                                                                                                                           .\nexists q\in\mathbb{Q}.q^2=2 :טענה
                  a\leq x\leq b מתקיים b^2\geq 2 מתקיים b\in\mathbb{Q}_+ ולכל a^2\leq 2 המקיים a\in\mathbb{Q} מתקיים a\in\mathbb{Q} טענה: לא קיים
                                                                                                    . orall y \in A.y \leq x המקיים x \in \mathbb{R} חסם מלעיל:
                                                          .\overline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A קבוצת החסמים מלעיל: תהא A\subseteq\mathbb{R} אזי אזי קבוצת החסמים מלעיל: תהא
                                                                                           .\overline{B}_A 
eq arnothing המקיימת A \subseteq \mathbb{R} קבוצה מלעיל: קבוצה חסומה מלעיל
                                                                                                     \forall y \in A.x < y המקיים x \in \mathbb{R} הספר
                                                           \underline{B}_A=\{x\in\mathbb{R}\mid A קבוצת החסמים מלרע: תהא A\subseteq\mathbb{R} אזי A\subseteq \mathbb{R} אזי קבוצת החסמים מלרע
                                                                                            A\subseteq\mathbb{R} קבוצה חסומה מלרע: קבוצה A\subseteq\mathbb{R} המקיימת
                                                                 עבורה A חסומה מלעיל וכן A \subseteq \mathbb{R} חסומה מלרע. A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                       . \forall y \in A. y \leq x מקסימום: תהא A \subseteq \mathbb{R} אזי אזי מקסימום: תהא
                                                       \max{(A)} = x אזי \forall y \in A.y \leq x המקיים x \in A אזי A \subseteq \mathbb{R} אזי A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                         . \forall y \in A.x \leq y מינימום: תהא A \subseteq \mathbb{R} אזי אזי מינימום: תהא
                                                        \min\left(A
ight)=x אזי orall y\in A.x\leq y המקיים x\in A הויהי A\subseteq\mathbb{R} אזי A\subseteq\mathbb{R}
\exists c \in \mathbb{R}. \forall x \in X. \forall y \in Y. x \leq c \leq y אקסיומת השלמות: תהיינה \{\varnothing\} אך עבורן X,Y \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}
ight) \setminus \{\varnothing\}
                                                                          . טענה: תהא (\overline{B}_A) אזי \overline{B}_A 
eq arnothing עבורה A \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}
ight) \setminus \{\varnothing\} אזי מענה:
                                                                       . קיים \max\left(\underline{B}_A\right) אזי אזי \underline{B}_A 
eq arnothing עבורה A \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right) \setminus \{\varnothing\} אזי תהא
                                                                                     \mathbb{Q} את הינו השדה הסדור השלם הקטן ביותר המכיל את \mathbb{R}
                                                                                    \sup\left(A
ight)=\min\left(\overline{B}_A
ight) אזי A\subseteq\mathbb{R} אוני תהא
                                                                                   \inf\left(A
ight)=\max\left(\underline{B}_A
ight) אזי A\subseteq\mathbb{R} אינפימום/חסם תחתון: תהא
                                                                              \inf\left(A
ight)=\min\left(A
ight) איים אזי \min\left(A
ight) עבורה A\subseteq\mathbb{R} טענה: תהא
                                                                           \operatorname{sup}(A) = \max(A) איים אזי \operatorname{max}(A) עבורה A \subseteq \mathbb{R}
                                                                                              \operatorname{ann} ((a,b)) = a אזי a < b עבורם a,b \in \mathbb{R} טענה: יהיו
```

 $.b = \sup (A) \bullet$ 

 $\sup ((a,b)) = b$  אזי a < b עבורם  $a,b \in \mathbb{R}$  טענה: יהיו

טענה: תהא  $A\subseteq\mathbb{R}$  חסומה מלעיל ויהי  $b\in\mathbb{R}$  חסומה מלעיל של

 $\forall d \in \overline{B}_A.b \le d \bullet$ 

```
. \forall \varepsilon > 0. \exists a \in A. (\sup(A) - \varepsilon < a < \sup(A)) מסקנה: תהא A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} מסקנה: תהא
                         (b = \sup(A)) \Longleftrightarrow ((\forall x \in A.x \le b) \land (\forall \varepsilon > 0.\exists x \in A.x > b - \varepsilon)) אזי A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\varnothing\} מסקנה: תהא
                                                                                                                        טענה: תהיינה A,B\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)\setminus\{\varnothing\} חסומות אזי
                                                                                                                                  \inf (A + B) = \inf (A) + \inf (B) \bullet
                                                                                                                               .\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B) \bullet
                                                                                                                                                    .\sup(-A) = -\inf(A) \bullet
                                                                                                                   b^2=c עבורו b\in\mathbb{R}_+ אזי קיים מענה: יהי c\in\mathbb{R}_+ יהי
                                                                                               b^n=c טענה: יהי b\in\mathbb{R}_+ אזי קיים n\in\mathbb{N}_+ יהי c\in\mathbb{R}_+ טענה:
                                              . orall b \in B. orall arepsilon > 0. \exists a \in A. \ |b-a| < arepsilon המקיימת A \subseteq B אזי קבוצה B \subseteq \mathbb{R} אזי קבוצה אפופה: תהא
                                                     .(orall a,b\in\mathbb{R}.\,((a< b)\Longrightarrow ((a,b)\cap S
eq arnothing))) \Longleftrightarrow (\mathbb{R}^-טענה: תהא S\subseteq\mathbb{R} אזי S\subseteq S
                                                                                                         |a,b) \cap \mathbb{Q}| = \aleph_0 אזי a < b עבורם a,b \in \mathbb{Q} טענה: יהיו
                                                                                               \exists r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \, (a < r < b) אזי a < b עבורם a, b \in \mathbb{Q} יטענה: יהיו
                                                                                                  \exists q \in \mathbb{Q}. \, (x < q < y) אזי x < y עבורם x,y \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                                                                                                                                               \mathbb{R}מסקנה: \mathbb{Q} צפופה ב
                                                                                .[a,b] \cap \mathbb{Q} בפופה ב־ a,b \in \mathbb{R} צפופה בי מסקנה: לכל מסקנה: לכל
                                                                                                                             .n! = \left\{egin{array}{ll} 1 & n=0 \ (n-1)! \cdot n & 	ext{else} \end{array}
ight. אזי n \in \mathbb{N} אנרת: יהי
                                                                                                           .\binom{n}{k}=rac{n!}{k!\cdot(n-k)!} אזי n,k\in\mathbb{N} אזי n,k\in\mathbb{N} בחר: יהיו n,k\in\mathbb{N} אזי n,k\in\mathbb{N} אזי n,k\in\mathbb{N} זהות פסקל: יהיו n,k\in\mathbb{N}
                                                             (a+b)^n=\sum_{i=0}^n\binom{n}{i}a^ib^{n-i} אזי n\in\mathbb{N} וויהי a,b\in\mathbb{R} נוסחת הבינום של ניוטון: יהיו
                                                                                                                                    [n]=\{1\dots n\} אזי n\in\mathbb{N}_+ סימון: יהי
                        \sum_{i=1}^n a_i \geq n אזי אזי \prod_{i=1}^n a_i = 1 וכן i \in [n] אכל a_i \geq 0 עבורם a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} אי־שיוויון הממוצעים: יהיו a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} עבורם a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} אי־שיוויון הממוצעים: יהיו a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} עבורם a_1 \ldots a_n \in \mathbb{R} אי־שיוויון הממוצעים: יהיו
.\left(rac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}=rac{n}{\sum_{i=1}^{n}rac{1}{a_i}}
ight)\Longleftrightarrow (orall i,j\in[n]\,.a_i=a_j) אזי i\in[n] אזי a_i\geq 0 עבורם a_1\ldots a_n\in\mathbb{R}
                                                                                         (1+x)^n \geq 1+nאזי אזי n \in \mathbb{N} ויהי x > -1 אי־שיוויון ברנולי: יהי
                                                                                                                         |x|=\left\{egin{array}{ll} x&x\geq 0\ -x&x\leq 0 \end{array}
ight.אזי x\in\mathbb{R} יהי הערך המוחלט: יהי
                                                                                                 (|a| \geq b) \Longleftrightarrow ((b \leq a) \lor (a \leq -b)) אזי a,b \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                                                                                             (|a| \le b) \Longleftrightarrow (-b \le a \le b) אזי a,b \in \mathbb{R} טענה: יהיו
                                                                                            |a+b| \leq |a|+|b| אזי a,b \in \mathbb{R} איישיוויון המשולש (אש"מ): יהיו
                                                                           |x_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| איי איזי אוייון המשולש המוכלל: יהיי יהיו איז איי איי איי
                                                                                                                           |a-b| \leq |a| + |b| אזי a,b \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
                                                                                                        |x-y| \leq |x-z| + |z-y| אזי x,y,z \in \mathbb{R} מסקנה: יהיו
                                                                                            |a|-|b| \le |a-b| אזי a,b\in\mathbb{R} יהיו
                                                                                                      a=b אזי orall arepsilon>0. |a-b|<arepsilon עבורם a,b\in\mathbb{R} אזי
                                                                                                              \sum_{i=0}^n r^i = rac{1-r^{n+1}}{1-r}טענה: יהיr \in \mathbb{R} ויהיr \in \mathbb{R} אזי
                                                                                                                                                       a:\mathbb{N}	o\mathbb{R} סדרה: פונקציה
```

 $\forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0$  :סדרה חיובית

 $a_n = a\left(n\right)$  סימון: תהא a סדרה אזי  $a=(a_n)_{n=0}^\infty$  סימון: תהא a סדרה אזי

הגדרה: תהא  $a_n$  סדרה אזי

 $\forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0$  :סדרה אי שלילית

 $\forall a \in \mathbb{R}. ((a < b) \Longrightarrow (a \notin \overline{B}_A)) \bullet$ 

 $\forall n \in \mathbb{N}. a_n < 0$  :סדרה שלילית

 $\forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq 0$  סדרה אי חיובית: •

סדרה מונוטונית: תהא a סדרה אזי

```
\lim_{n	o\infty}r=r אזי r\in\mathbb{R} טענה: יהי
                                                                                                                                          \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 טענה:
                                                                                                                             g^n 	o 0טענה: יהי q \in (0,1) אזי
                                                                                                                                 \sqrt[n]{c} 	o 1 אזי c>0 טענה: יהי
                                                                                                                                                    \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 :טענה
                                                                                                                              rac{1}{n^{lpha}} 	o 0 אזי lpha \in \mathbb{Q}_+ טענה: יהי
               L_1=L_2 אזי \lim_{n	o\infty}a_n=L_2 וכן ווו\lim_{n	o\infty}a_n=L_1 ותהא סדרה עבורה L_1,L_2\in\mathbb{R} אזי איי
                                                           \lim_{n	o\infty}|a_n|=|L| אזי \lim_{n	o\infty}a_n=L משפט: יהי L\in\mathbb{R} אותהא סדרה עבורה עבורה
                                                                           .(\lim_{n\to\infty}a_n=0)\Longleftrightarrow (\lim_{n\to\infty}|a_n|=0) טענה: תהא סדרה אזי (מינה תהא
                         a_n = L (\lim_{n \to \infty} a_n = L) אזי a_n = L אזי a_n = L סענה: תהיינה a_n = L סדרות עבורן a_n \neq b_n
                                                         a_{n-1}(\lim_{n \to \infty} a_n = L) \Longleftrightarrow (\lim_{n \to \infty} a_{n+k} = L) אזי k \in \mathbb{N} טענה: תהא
סדרה מתבדרת לאינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא M>0.\exists N\in\mathbb{N}. \forall n>N.M< a_n סדרה מתבדרת לאינסופי/גבול אינסופי/גבול הרחב:
                                                                                                                                                 \lim_{n\to\infty} a_n = \infty
סדרה מתבדרת למינוס אינסוף/גבול אינסופי/גבול במובן הרחב: תהא מדרה עבורה M>0.\exists N\in\mathbb{N}. \forall n>N. אזי
                                                                                                                                              \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty
                                                                                                                    \lim_{n\to\infty}a^n=\infty אזי a>1 טענה: יהי
                                                                                                                                         \lim_{n\to\infty} n=\infty טענה:
                                                                \lim_{n	o\infty}rac{1}{a_n}=\infty אזי אוו\lim_{n	o\infty}a_n=0 טענה: תהא
                                                                        . אזי a אזי a חסומה a אזי a חסומה a ותהא a סדרה המקיימת a
                                                                                                                   מסקנה: סדרה לא חסומה איננה מתכנסת.
                     a_n \in \mathbb{R} טענה: יהי \mathbb{R} = \{a_n \notin (L-\varepsilon, L+\varepsilon)\} ענה: יהי a_n \in \mathbb{R} ותהא a_n \in \mathbb{R} טענה: יהי a_n \in \mathbb{R} טענה: יהי
                           . orall r \in (0,|L|)\,. \exists N \in \mathbb{N}. orall n > N.\, |a_n| > r אזי וותהא a_n = L סדרה המקיימת סדרה L \in \mathbb{R} יהי למה: יהי
                                                                        a_n\downarrow L אזי אזי a_n \to L ממש עבורה יורדת מחש סדרה ותהא ותהא ותהא L\in\mathbb{R}
                                                                          a_n \uparrow L אזי א a_n \to L מימון: יהי חדרה עולה ממש סדרה עולה מדרה ותהא ותהא בורה ותהא
                                                                              a_n \searrow L אזי אa_n \to L סדרה יורדת עבורה a אזי ותהא ותהא L \in \mathbb{R}
                                                                                 a_n 
ewline L אזי אזי עבורה עבורה סדרה ותהא חדרה a אזי אזי אזי יהי סימון: יהי
                                                                  .b_n 
\uparrow x וכן a_n \searrow x עבורן a,b: \mathbb{N} 	o \mathbb{Q} וכן אזי קיימות סדרות x \in \mathbb{R}
                    x=n+\sum_{i=-\infty}^{-1}a_i\cdot 10^i עבורם a:\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}	o\{0,\dots,9\} וקיימת n\in\mathbb{N} טענה ייצוג עשרוני: יהי
                                                               m\%n=\ell אזיn=km+\ell עבורם \ell\in\{0\dots n\} ויהיn,m,k\in\mathbb{N} איי
           \overline{d_1\dots d_n}=a אזי a\left(i
ight)=d_{i\%n} כך a:\mathbb{N}	o\{d_1\dots d_n\} נגדיר d_1\dots d_n\in\{0\dots 9\} אזי היו
                     (q\in\mathbb{Q})\Longleftrightarrow \left(\exists n,k,\ell\in\mathbb{N}.\exists a_1\ldots a_k,b_1\ldots b_\ell\in\{0\ldots 9\}\,.\,\left(q=n.a_1\ldots a_k\overline{b_1\ldots b_\ell}
ight)
ight) אוי q\in\mathbb{R} טענה: יהי
                                                                                                            משפט אוקלידס: \mathbb{P} חסומה מלרע אך לא מלעיל.
                                   n\in\mathbb{N}_+ לכל p_n\in\left\{p\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_i
ight)
ight\} וכן p_1\in\mathbb{P} לכל p_n\in\{p_i\in\mathbb{P}\mid p|\left(1+\prod_{i=1}^{n-1}p_i
ight)
                                                                  \left|\left\{\langle p,q
angle\in\mathbb{Q}	imes\mathbb{N}\;\middle|\; \left|	heta-rac{p}{q}
ight|<rac{1}{q^2}
ight\}
ight|\geqleph_0 אזי 	heta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} משפט דריכלה: יהי
                 \exists c\in\mathbb{R}.rac{c}{q^2}<\left|	heta-rac{p}{q}
ight| מתקיים מספר \left|	heta-rac{p}{q}
ight|<rac{1}{q^2} עבורם עבורם q\in\mathbb{N} עבורו לכל p\in\mathbb{Q} אזי a\in\mathbb{R} אזי a,y\in\mathbb{R} אזי a,y\in\mathbb{R} אזי ותהיינה a,b מענה חשבון גבולות: יהיו
```

 $\lim_{n o\infty}a_n=L$  אזי א $arphi>0.\exists N\in\mathbb{N}. orall n>N.$   $|a_n-L|<arepsilon$  חותהא a סדרה עבורה  $L\in\mathbb{R}$  אזי אזי

.  $\forall n,m \in \mathbb{N}. ((n < m) \Longrightarrow (a_n < a_m))$  שעולה ממש: .  $\forall n,m \in \mathbb{N}. ((n < m) \Longrightarrow (a_n \le a_m))$  שעולה: .  $\forall n,m \in \mathbb{N}. ((n < m) \Longrightarrow (a_n > a_m))$  שיורדת ממש: .  $\forall n,m \in \mathbb{N}. ((n < m) \Longrightarrow (a_n \ge a_m))$  שיורדת: •

 $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. a_n < M$  סדרה חסומה מלעיל: סדרה המקיימת  $\exists M \in \mathbb{R}. \forall n \in \mathbb{N}. M < a_n$  סדרה חסומה מלרע: סדרה a באשר a חסומה מלעיל. סדרה חסומה: סדרה a באשר a חסומה מלעיל.

 $a_n o L$  אזי  $\lim_{n o \infty} a_n = L$  אזי חותהא סדרה עבורה  $L \in \mathbb{R}$  איי יהי

```
a_n + b_n \to x + y \bullet
   .a_n \cdot b_n \to x \cdot y \bullet
```

 $rac{a_n}{b_n} o rac{x}{y}$  אזי  $orall n \in \mathbb{N}.b_n 
eq 0$  וכן y 
eq 0 אם •

 $L \geq 0$  אזי  $d_n o L$  אזי עבורה אי־שלילית אזי  $L \in \mathbb{R}$  אזי למה: יהי

 $a_n o \sqrt[k]{a_n} o \sqrt[k]{L}$  אזי אזי  $k \in \mathbb{N}_+$  ויהי  $a_n o L$  טענה: תהא שלילית המקיימת

 $.a \preccurlyeq b$  אזי  $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n \leq b_n$  סדרות עבורן a,b אזי תהיינה סימון: תהיינה

 $a \prec b$  אזי  $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n < b_n$  סדרות עבורן a,b אזי מימון: תהיינה

 $\lim_{n \to \infty} a_n \leq \lim_{n \to \infty} b_n$  אזי אזי  $a \preccurlyeq b$  סדרות מתכנסות סדרות מתכנסות: תהיינה

a,b,c אאי a,c o L וכן  $b\preccurlyeq c$  וכן  $a\preccurlyeq b$  סדרות עבורן סדרות איינה a,b,c אונ $L\in\mathbb{R}$ 

 $a\cdot b o 0$  אזי איי מענה: תהא b o 0 אזי איי סדרה חסומה ותהא

 $rac{a}{n} o 0$  מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי

 $a.b o \sup{(B)}$  אבורה  $b:\mathbb{N} o B$  משפט: תהא חסומה מלעיל אזי קיימת

 $ab \to \inf (B)$  עבורה  $b: \mathbb{N} \to B$  מסקנה: תהא  $B \subseteq \mathbb{R}$  חסומה מלרע אזי קיימת

 $a,b o \infty$  אזי  $a \preccurlyeq b$  וכן  $a o \infty$  סדרות עבורן a,b אזי מענה: תהיינה

 $a,b o -\infty$  אזי  $b \preccurlyeq a$  וכן  $a o -\infty$  סדרות עבורן מדרות a,b אזי

 $.a \rightarrow 0$  אזי  $a \prec \alpha^n$  המקיים  $\alpha \in [0,1)$  קיים עבורה אי שלילית סדרה a אחזי מבחן השורש: מבחן מבחן השורש מבחן השורש הגבולי: יהי  $p\in\mathbb{R}$  ותהא  $a_n$  סדרה אי שלילית המקיימת  $p\in\mathbb{R}$  אזי

 $.(0 \le p < 1) \Longrightarrow (a_n \to 0) \bullet$ 

 $.(p>1) \Longrightarrow (a_n \to \infty) \bullet$ 

 $\sup (a_n) = \sup (\operatorname{Im}(a))$  איי מלעיל סדרה סדרה מדרה מלעיל מימון: תהא

 $\inf\left(a_{n}\right)=\inf\left(\operatorname{Im}\left(a\right)\right)$  אזי מלרע סדרה סדרה מדרה מדרה מלרע סימון: תהא

משפט: תהא a סדרה אזי

 $a_n 
sup (a_n)$  אם  $a_n$  מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אזי

 $a_n 
egthinspace \infty$  אם מונוטונית עולה ולא חסומה מלעיל אזי מונוטונית •

 $a_n \searrow \inf \left( a_n \right)$  אם  $a_n$  מונוטונית יורדת וחסומה מלרע אזי

 $a_n \searrow -\infty$  אם מונוטונית יורדת ולא חסומה מלרע אזי מונוטונית יורדת ו

אזי  $\frac{a_{n+1}}{a_n} o L$  אזי המנה הגבולי: תהא a אחדה המנה הגבולי: מבחן המנה הגבולי

 $(L < 1) \Longrightarrow (a_n \to 0) \bullet$ 

 $(L>1)\Longrightarrow (a_n\to\infty)$  •  $(C)\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n-1}a_i}{n}$  מדרה אזי a סדרה אזי a סדרה אזי a

 $a_n = a$  במובן הרחב אזי ביזארו/התכנסות ממוצע חשבוני: תהא מדרה המקיימת  $a_n \to a$  סדרה המקיימת משפט צ'זארו/התכנסות ממוצע חשבוני:  $a_n o a_n$  משפט התכנסות ממוצע הנדסי: תהא סדרה חיובית המקיימת  $a_n o a_n$  במובן הרחב אזי $a_n o a_n$ 

 $\sqrt[n]{a_n} \to c$  משפט ז'אלאמבר: תהא a סדרה חיובית המקיימת a במובן הרחב אזי a במובן הרחב a סדרה חיובית המקיימת a סדרה חיובית המקיימת a במובן הרחב ותהא a סדרה המקיימת a במובן הרחב ותהא a סדרה המקיימת a סדרה נניח כי a סדרה נניח כי a סדרה נניח כי a סדרה נניח כי a סדרה נוחה a סדרה ותהא a סדרה ותהא a סדרה נוחה שוון a סדרה נוחה a סדרה נוחה שוון a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה ותהא a סדרה נוחה שוון a סדרה נוחה בישפט שטולץ: תהא a סדרה ותהא a סדרה נוחה שוון a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה וותהא a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה וותהא a סדרה בישפט שטולץ: a סדרה בישפט שטולץ: a סדרה וותהא a סדרה נוחה בישפט שטולץ: a סדרה ב

טענה:  $(1+\frac{1}{n})^n$  מונוטונית עולה וחסומה.

 $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in (2,3]$  מסקנה:  $e=\lim_{n o\infty}\left(1+rac{1}{n}
ight)^n$  :קבוע אוילר

 $.\Big(1+rac{1}{a_n}\Big)^{a_n} o e$  אזי  $a_n o\infty$  המקיימת  $a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$  אזי  $a_n$  אזי  $a_n$  המקיימת  $a\in\mathbb{N}^\mathbb{N}$  עולה אזי  $a_n$  עולה אזי  $a_n$ 0. תת סדרה חלקית (ת"ס): תהא  $a_n$ 0 סדרה ותהא

משפט הירושה: תהא a סדרה ותהא b תת סדרה של a אזי

.(ל חסומה מלעיל) מלעיל) מלעיל). • חסומה מלעיל).

.(עסומה מלרע) אסומה מלרע) סומה מלרע).

 $(a \to L) \Longrightarrow (b \to L) \bullet$ 

.(מונוטונית) מונוטונית) מונוטונית) a

```
.|\bigcap_{n=0}^{\infty}\left[a_{n},b_{n}\right]|=1 אזי
                                                                                                  \mathcal{C}=[0,1]\setminus igcup_{n=0}^{\infty}igcup_{k=0}^{3^n-1}ig(rac{3k+1}{3^{n+1}},rac{3k+2}{3^{n+1}}ig) קבוצת קנטור:
                                                               משפט בולצאנו ויירשטראס: תהא a סדרה חסומה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת.
                                          משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל: תהא a סדרה אזי קיימת תת סדרה מתכנסת במובן הרחב.
                                                                                                                                         \mathbb{R}_{\infty} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} סימון:
                                            . במובן b 	o x עבורה עבורה b 	o x עבורה עבורה עבורה a עבורה עבורה עבורה a עבורה אזיx \in \mathbb{R}_\infty
                    \widehat{\mathcal{P}}\left(a
ight)=\{L\in\mathbb{R}_{\infty}\mid a סדרה אזי L\} גבול חלקי של של לLו\mathcal{P}\left(a
ight)=\{L\in\mathbb{R}\mid a סימון: תהא a סדרה אזי L
                                                                                                                                                   טענה: תהא a סדרה אזי
                                                                                                                     (\infty \in \widehat{\mathcal{P}})אינה חסומה מלעיל a
                                                                                                                   (-\infty \in \widehat{\mathcal{P}}) \Longleftrightarrowענה חסומה מלרע) •
                                                                                                                                    \left|\widehat{\mathcal{P}}
ight|>0 טענה: תהא a סדרה אזי
                                                             (\forall \varepsilon>0. \ |\{a_n\mid |a_n-L|<arepsilon\}|= \aleph_0) \Longleftrightarrow (\stackrel{\cdot}{L}\in \mathcal{P}) משפט: תהא סדרה אזי
                                                                                        \widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\subseteq\left[\inf\left(a
ight),\sup\left(a
ight)
ight]מסקנה: תהא a סדרה חסומה אזי
                                                                                                          .\lim (\sup (a)) = \sup (\mathcal{P}) סדרה אזי a סדרה מימון: תהא
                                                                                                           \operatorname{lim}(a) = \operatorname{lim}(\sup(a)) סימון: תהא a סדרה אזי
                                                                                                            .\lim (\inf (a)) = \inf (\mathcal{P}) אזי a סדרה a סדרה מימון: תהא
                                                                                                             \underline{\lim}\left(a\right)=\lim\left(\inf\left(a\right)\right)אזי סדרה a סדרה מימון: תהא סדרה מימון
                                                                             (\widehat{\mathcal{P}}=\mathcal{P}) \wedge (\left|\widehat{\mathcal{P}}\right|=1)איי משפט: תהא a סדרה אזי (a מתכנסת)
                                                                                           משפט: תהא \min\left(\mathcal{P}\right), \max\left(\mathcal{P}\right) אזי סדרה חסומה אזי סדרה משפט
\widehat{\mathcal{P}}(a)=ig|_{i=1}^m\widehat{\mathcal{P}}\left(a_{b_i}
ight) איי סענה: יהיו a סדרה אזי b_1\ldots b_m:\mathbb{N}	o\mathbb{N} ותהא a סדרה אזי ותהא המקיימות סענה: יהיו
                                                                            . orall x \in A. \exists arepsilon > 0. \ (x-arepsilon, x+arepsilon) \subseteq A המקיימת המחה: A \subseteq \mathbb{R}
                                                            . פתוחה \bigcup_{i=1}^\infty A_i אזי i\in\mathbb{N} פתוחה לכל \{A_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}
ight) פתוחה.
                                                                                . פתוחה \bigcap_{i=1}^n A_i אזי A_1 \ldots A_n \subseteq \mathbb{R} פתוחה סענה: תהיינה
                                                                                                           קבוצה סגורה: קבוצה B\subseteq\mathbb{R} פתוחה.
                                                             . סגורה \bigcap_{i=1}^\infty B_i אזי i\in\mathbb{N} סגורה לכל B_i באשר באשר \{B_i\}_{i=1}^\infty\subseteq\mathcal{P}\left(\mathbb{R}
ight)
                                                                                 סענה: תהיינה A_1 \ldots A_n \subseteq \mathbb{R} סגורות אזי סגורה. A_1 \ldots A_n \subseteq \mathbb{R}
                                                  .\exists a\in (S\backslash\left\{x
ight\})^{\mathbb{N}}\,.\lim_{n	o\infty}a_n=x המקיימת x\in\mathbb{R} אזי אזי S\subseteq\mathbb{R} נקודת הצטברות: תהא
                                                                                                                                              טענה: תהא B\subseteq\mathbb{R} התב"ש
                                                                                                                                                    . קבוצה סגורה B \bullet
                                                                                                                                  \forall a \in B^{\mathbb{N}}. \lim_{n \to \infty} a_n \in B \bullet
                                                                                                             \{x \in \mathbb{R} \mid B  נקודת הצטברות של \{x \in \mathbb{R} \mid B \in B \bullet \}
                                                                                               משפט: תהא a סדרה חסומה מתקיים \mathcal{P}\left(a\right) קבוצה סגורה.
                                                                                         \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. P\left(n\right) במעט תמיד: פרידקט P\left(n\right) המקיים
```

 $orall n\in\mathbb{N}.$   $(a_n\leq b_n)\wedge([a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n])$  וגם b-a o 0 חדרות המקיימות תהיינה a,b חדרות מקוננים: תהיינה

 $.(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N.a_n \le L) \Longrightarrow (\limsup a \le L) \bullet$ 

 $a = \liminf a \iff$ משפט: תהא סדרה אזי (מתכנסת) משפט: משפט: משפט

 $|\{n\in\mathbb{N}\mid P\left(n
ight)\}|=leph_{0}$  שביח: פרידקט  $P\left(n
ight)$  המקיים

.טענה: תהא a סדרה ללא מקסימום אזי קיימת תת סדרה מונוטונית עולה ממש

. סענה: תהא a סדרה אזי קיימת תח סדרה מונוטונית טענה:

 $.(\forall N \in \mathbb{N}.\exists n > N.a_n \ge L) \Longrightarrow (\limsup a \ge L) \bullet$ 

 $(\exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N.a_n \ge L) \Longrightarrow (\liminf a \ge L) \bullet$ 

 $(\forall N \in \mathbb{N}.\exists n > N.a_n \leq L) \Longrightarrow (\liminf a \geq L) \bullet$ 

משפט: תהא a סדרה ויהי  $L \in \mathbb{R}$  התב"ש

משפט: תהא  $L \in [-\infty,\infty]$  אזי אדרה ויהי a אזי

 $\lim \sup a = L \bullet$ 

```
. \forall \varepsilon>0. \exists N\in\mathbb{N}. \forall m,n\geq N. \, |a_m-a_n|<\varepsilon סדרת קושי: סדרה a המקיימת
                                                                                                                למה: תהא a סדרת קושי אזי a חסומה.
                                                                                   a מתכנסת) סדרת (מתכנסת) משפט: תהא a סדרת אזי (מתכנסת)
                                                                               \sum_{i=k}^{\infty}a_i=\lim_{n	o\infty}\sum_{i=k}^na_i אזי k\in\mathbb{Z} סכום אינטופי: יהי
                                                                                               \sum_{i=0}^\infty a_i טור: תהא a סדרה אזי \sum_{i=0}^\infty a_i טור: תהא \sum_{n=0}^\infty a_n טור אזי \sum_{n=0}^\infty a_n סימון: יהי
                                                                                S_n^a = \sum_{i=0}^n a_i סדרת הסכומים החלקיים: תהא a סדרת הסכומים
                                                                          .(S_n^a 	o L) \Longrightarrow (\sum_{i=0}^\infty a_i = L) טור מתכנס: תהא סדרה אזי
                                                                                            \sum_{m=0}^{\infty} ar^m טור גאומטרי: יהיa 
eq 0 ויהי r \in \mathbb{R}
                                                                                   (|r|<1) \Longleftrightarrowמשפט: יהי r\in\mathbb{R} אזי r\in\mathbb{R} מתכנס) משפט: יהי
                                                                                                                                      .\sum_{n=1}^{\infty}rac{1}{n} הטור ההרמוני: .\sum_{n=1}^{\infty}rac{1}{n}
ightarrow\infty טענה:
                                                                                  (a_n 	o 0)בשנט: תהא a_n 	o 0משנט: תהא a_n 	o 0משנט: תהא a_n 	o 0משנט: תהא a_n 	o 0
(orall arepsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}. orall m>N. orall k\in\mathbb{N}. \left|\sum_{n=m}^{m+k}a_n
ight|<arepsilon)מור אזי \sum_{n=0}^{\infty}a_n מורים ויהי \sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n אזי איזי \xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\} טורים ויהי \sum_{n=0}^{\infty}a_n,\sum_{n=0}^{\infty}b_n
                                                                                    .(מתכנס) מתכנס) מתכנס) מתכנס) מתכנס) מתכנס) מתכנס) \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)
                                                                                              \sum_{n=0}^{\infty} \xi a_n מתכנס) מתכנס) מתכנס) \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתכנס) \sum_{n=0}^{\infty} a_n יור אזי
                                                                                                                        \forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0 טור חיובי:
                                                                                                                  \forall n \in \mathbb{N}. a_n > 0 טור אי שלילי:
                                                                                                                       \forall n \in \mathbb{N}. a_n < 0 טור שלילי: •
                                                                                                                   \forall n \in \mathbb{N}. a_n \leq 0 טור אי חיובי: •
                                                                           . טור מתכנס בהחלט: טור \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| המקיים \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתכנס
                                                                           . טענה: יהי כנס טור מתכנס טור מתכנס טור כהחלט אזי יהי \sum_{n=0}^\infty a_n יהי יהי
                                \sum a_n \preccurlyeq \sum b_n אזי a_n \leq b_nמסויים ממקום עבורם חיוביים טורים טורים הייו \sum a_n, \sum b_n יהייו יהיו
                                                              משפט ההשוואה: יהיו \sum a_n, \sum b_n טורים המקיימים \sum a_n, \sum b_n אזי
                                                                                               \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתכנס). מתכנס) מתכנס). \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתבדר). \sum_{n=0}^{\infty} a_n מתבדר).
                                      מבחן במובן rac{a_n}{b_n} 	o L מבחן המקיימות חיוביות מדרות היה מהבולי: יהיו מבחלי: יהיו
                                                                             (L \in (0,\infty)) \Longrightarrow ((\sum b_n < \infty) \Longleftrightarrow (\sum a_n < \infty)) \bullet
                                                                                      (L=0) \Longrightarrow ((\sum b_n < \infty) \Longrightarrow (\sum a_n < \infty)) \bullet
                                                                                    (L = \infty) \Longrightarrow ((\sum b_n < \infty) \longleftarrow (\sum a_n < \infty)) \bullet
              . (מתכנס). \sum a_n טור אי שלילי (קיים q\in(0,1) עבורו כמעט תמיד \sum a_n טור אי שלילי (קיים a_n) עבורו כמעט עבורו יהי
                                                                                                       מבחן השורש הגבולי: יהי סור חיובי אזי מבחן השורש הגבולי
                                                                                               .(lim \left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right)<1)מתכנס) \sum a_n
                                                                                              .(lim \left(\sup\left(a_n^{\frac{1}{n}}\right)\right) > 1) מתבדר \sum a_n •
                                                                                            מבחן המנה לטורים חיוביים: יהי\sum a_n' טור חיובי אזי
```

. (מתכנס) בורו  $\sum a_n$  ( $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$  מתכנס) עבורו עבורו  $q \in (0,1)$ 

.(כמעט תמיד בדר) מתבדר) (כמעט תמיד ב $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$  מתבדר). מבחן המנה הגבולי לטורים חיוביים: יהי  $\sum a_n$  טור חיובי אזי

 $\lim_{n \to \infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1 \}$ מתכנס)  $\sum_{n \to \infty} a_n$  • .( $\lim_{n \to \infty} \left( \inf_{n \to \infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \right) > 1 \}$  מתבדר)  $\sum_{n \to \infty} a_n$  •

 $. \forall \varepsilon > 0. \ (\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \geq N. a_n < L + \varepsilon) \land (\forall \varepsilon > 0. \forall N \in \mathbb{N}. \exists n \geq N. a_n > L - \varepsilon)$  • .( $\liminf a \leq \liminf b ) \land (\limsup a \leq \limsup b)$  אזי אזי  $a_n \preccurlyeq b_n$  אזי משפט: תהיינה a,b סדרות המקיימות

```
(x>1)מסקנה: יהי x\in\mathbb{R} אזי (x>1) מתכנס)
                                                                                                             מתכנס. \sum (-1)^n a_n אזי a_n \setminus 0 מתכנס.
                                                                                                 טור מתכנס בתנאי: טור \sum |a_n| מתכנס המקיים \sum a_n טור מתכנס בתנאי
                                \sum_{k=m}^n a_k \left(b_{k+1}-b_k
ight) = \left(a_n b_{n+1}-a_m b_m
ight) - \sum_{k=m+1}^n b_k \left(a_k-a_{k-1}
ight) אינה a,b סענה: תהיינה a,b סדרות אזי a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{k+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^k a_k \left(b_k-b_{k+1}
ight) אינה a,b סדרות אזי a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k b_{k+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^k a_k \left(b_k-b_{k+1}
ight)
                                       . סדרה \sum a_n b_n אזי חסומה אזי \sum a_n b_n מתכנס. סדרה עבורה \sum a_n b_n סדרה סדרה סדרה שונוטונית ותהא
                                                       מתכנס. \sum a_n b_n אזי אזי \sum a_n b_n טור מתכנס ותהא b סדרה חסומה מונוטונית אזי סדרה \sum a_n
                                                                  . \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}=\infty משפט: \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k=L אולה ממש אזי b\in\mathbb{N}^\mathbb{N} טור ותהא \sum_{b_0=0}^\infty a_n=L משפט: יהי \sum_{n=0}^\infty a_n=L
אזי \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=b_n}^{b_{n+1}-1} a_k = L בעלי אותו סימן וגם (a_i)_{i=b_n}^{b_{n+1}-1} וכן וכן b_0=0 וכן שולה ממש עבורה b\in\mathbb{N}^\mathbb{N} אזי b\in\mathbb{N}^\mathbb{N}
                                                                            \sum a_{p(n)} = \sum a_n אווג אזי p \in \mathbb{N}^\mathbb{N} משפט: יהי \sum a_n טור חיובי מתכנס ויהי
                                                                                                                               a_n^-=rac{|a_n|-a_n}{2} סימון: תהא סדרה אזי a_n סדרה מון: תהא a_n^+=rac{|a_n|+a_n}{2} סדרה אזי a_n
                                                         .((סמתכנס) אזי \sum a_n^-ו)\wedge מתכנס) מתכנס בהחלט) מתכנס בהחלט) מתכנס סדרה מיי מתכנס) מתכנס בהחלט) משפט: תהא
                                                                         \sum a_{p(n)} = \sum a_n איווג אזי p \in \mathbb{N}^\mathbb{N} משפט: יהי יהי טור מתכנס בהחלט ויהי
                                                                           a_n^+ = \infty = \sum a_n^-משפט: תהא a_n סדרה אזי (a_n מתכנס בתנאי) משפט: תהא משפט
                                                                                                                                                   \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} סימון:
                                                                                                                          משפט רימן: יהי\sum a_nטור מתכנס בתנאי אזי
                                                                                            \sum a_{\sigma(n)} = S הפיכה עבורה \sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N} קיימת S \in \hat{\mathbb{R}} לכל
                                                                               . הרחב ממכנסת לא \sum a_{\sigma(n)} עבורה הפיכה \sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N} מתכנסת \bullet
           \sum a_{p(n)}b_{q(k)}=(\sum a_n)\,(\sum b_n) אזי היו אוי טורים מתכנסים טורים \sum a_n,\sum b_n תמורות ויהיו p,q\in\mathbb{N}^\mathbb{N}
                                                                                                  \sum a_k \left(x-x_0
ight)^k אזי x_0 \in \mathbb{R} סדרה ויהי a_n סדרה מזקות: תהא
                                   x \in (-|q|,|q|) טור חזקות המתכנס עבור \sum a_k x^k אזי אזי q \in \mathbb{R} משפט: יהי
                                                                                              עבורו R \in [0,\infty] אזי חזקות אזי \sum a_k x^k יהי יהי
                                                                                                       . מתכנס בהחלט \sum a_k x^k מתכנס בהחלט x \in (-R,R) לכל
                                                                                                                   . מתבדר \sum a_k x^k מתקיים x \notin [-R, R] סתבדר
                                                                                                 משפט אבל: יהי \sum a_k x^k טור חזקות אזי קיים רדיוס התכנסות.
                                                R=rac{1}{\limsup\left(|a_n|^{rac{1}{n}}
ight)} אזי איזי R אזי ההתכנסות בעל רדיוס טור חזקות טור איזי \sum a_nx^n משפט קושי הדמרד: יהי
                                       -\left(\limsup\left(|a_n|^{rac{1}{n}}
ight)=0
ight)\Longrightarrow(R=\infty) אזי הערה: יהי ווא פעל חזקות בעל רדיוס ההתכנסות התכנסות הערה: יהי
                                   .\Big(\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)=\infty\Big)\Longrightarrow (R=0) אזי איי ההתכנסות בעל רדיוס בעל רדיוס ההתכנסות בעל רדיוס ההתכנסות \sum a_nx^n אזי יהיו בעל רדיוס בעל רדיוס החלנת אזי חזקות אזי וורי חזקות אזי \sum a_nx^n, \sum b_nx^n מכפלת קושי: יהיו
                        a_n מתכנס עבור \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} x^n אזי איזי q\in\mathbb{R} טענה: יהיו טורי חזקות המתכנסים עבור טענה:
                                                                                (C)\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{n	o\infty}rac{\sum_{i=0}^{n-1}S_i^a}{n} אור אזי \sum a_n טור איזי יהי ביארו: יהי יהי \sum_{n=0}^{\infty}S_i^a=\sum_{i=0}^{n-1}a_n\left(1-rac{i}{n}
ight) טענה: יהי \sum a_n טור אזי \sum a_n
                                                                                                                                 פונקציה מונוטונית: תהא f \in \mathbb{R} 	o \mathbb{R} אזי
                                                                                                    \forall x, y \in \mathbb{R}. (x < y) \Longrightarrow (f(x) < f(y)) פעולה ממש: •
                                                                                                            . \forall x,y \in \mathbb{R}. \, (x < y) \Longrightarrow (f \, (x) \leq f \, (y)) \, : עולה: •
                                                                                                   \forall x, y \in \mathbb{R}. (x < y) \Longrightarrow (f(x) > f(y)) יורדת ממש: •
```

 $.orall x,y\in\mathbb{R}.\ (x< y)\Longrightarrow (f\left(x
ight)\geq f\left(y
ight))$  יורדת: •  $.[0,\infty)\$ טענה: יהי  $n\in\mathbb{N}_+$  אזי  $n\in\mathbb{N}_+$  מונוטונית עולה ממש בקטע  $.(f\left(x
ight)=x^n)\Longrightarrow \left(f^{-1}\left(x
ight)=x^{rac{1}{n}}
ight)$  אזי  $n\in\mathbb{N}$  טענה: יהי  $n\in\mathbb{N}$ 

(משפט העיבוי: תהא  $a_n$  סדרה אי שלילית יורדת אזי  $a_n$  מתכנס  $a_n$  מתכנס). משפט העיבוי:

(מתכנס) אי שלילית יורדת אזי  $n \geq 2$  מתכנס) מדרה אי שלילית יורדת אזי  $n \geq 2$  מתכנס) מתכנס) מתכנס).

```
\mathrm{constant}(c^{a_n})=\mathrm{lim}\left(c^{b_n}
ight) אזי a_n,b_n\searrow b המקיימות a,b\in\mathbb{Q}^\mathbb{N} תהיינה c\in\mathbb{R} יטענה: יהי
                                        הגדרה: יהיו b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} ותהא b \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} המקיימת n, m \in \mathbb{N} אזי הגדרה:
                                                                                                         .x^{-n} = \frac{1}{x^n} \bullet.x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} \bullet
                                                                                                   .a^b = \lim_{n \to \infty} a^{b_n} \bullet
                                     f(x)=x^{\alpha} כך f:[0,\infty) \to [0,\infty) נגדיר 0<\alpha יהי
                                     f\left(x
ight)=x^{lpha} כך f:\left(0,\infty
ight)
ightarrow\left(0,\infty
ight) נגדיר 0>lpha יהי
                                                                                         \sqrt[n]{x}=x^{rac{1}{n}} אזי n\in\mathbb{N} שורש: יהי
                                                                         \left(yx
ight)^{a}=y^{a}x^{a} אזי a,b,x,y\in\mathbb{R} משפט: יהיו
                                                                               (x^a)^b = x^{ab} אזי a,b,x \in \mathbb{R} משפט: יהיו
                                                                             x^ax^b=x^{a+b} אזי a,b,x\in\mathbb{R} משפט: יהיו
                                                                       x^r < x^\ellטענה: יהי x > 1 אזי x > 1
                                                                 x^r > x^\ellטענה: יהי 0 < r < \ell ויהיו 0 < x < 1 טענה:
                                     f\left(x
ight)=a^{x} כך כך f\in\left(0,\infty
ight)^{\mathbb{R}} נגדיר 0<lpha
eq1 יהי הפונקציה המעריכית:
       . בתור היחס בין הצלע ממול האווית ליתר במשולש ישר אווית. \sin:[0,2\pi] 	o [-1,1] סינוס:
                                                                       \sin(x+2\pi k)=\sin(x) אזי איניס: יהי k\in\mathbb{N}
     . אווית ישר אווית ליתר במשולש ישר אווית \cos:[0,2\pi] 	o [-1,1] קוסינוס: נגדיר נגדיר \cos:[0,2\pi] 	o [-1,1]
                                                                  \cos\left(x+2\pi k
ight)=\cos\left(x
ight) אזי איי אוי k\in\mathbb{N} קוסינוס: יהי
                                        	an(x)=rac{\sin(x)}{\cos(x)} כך לוח: \mathbb{R}ackslash\left\{rac{\pi}{2}+\pi k\mid k\in\mathbb{Z}
ight\}
ightarrow\mathbb{R} טנגנס: נגדיר
                                             \cot{(x)}=rac{\cos(x)}{\sin(x)} כך \cot:\mathbb{R}ackslash\{\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\}	o\mathbb{R} קוטנגנס: נגדיר
                                                                                                 טענה: זהויות טריגנומטריות.
                                                                                                     arcsin = sin^{-1}:הגדרה
                                                                                                     arccos = cos^{-1} :מגדרה
                                                                                                    \arctan = \tan^{-1}:הגדרה
                                                                                                      .arccot = \cot^{-1} :הגדרה
                                                            f^{-1} = \log_a אזי f(x) = a^x נסמן a > 0 אזי לוגריתם: יהי
                                                                                     ln = \log_e :סימון (הלוגריתם הטבעי)
                                                                                                     טענה: זהויות לוגרתמיות.
                 f\left(x+a
ight)=f\left(x
ight) המקיים a\in\mathbb{R}_{+} עבורה קיים f:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R} פונקציה מחזורית:
                                       \forall x \in \mathbb{R}. f(-x) = f(x) המקיימת f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} פונקציה זוגית: פונקציה מונקציה f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}
                                \forall x \in \mathbb{R}. f(-x) = -f(x) המקיימת f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} פונקציה אי־זוגית: פונקציה המקיימת
                                           I_{x,\delta}=(x-\delta,x+\delta)\setminus\{x\} אזי x\in\mathbb{R} ויהי \delta>0 ויהי
פונקציה מתכנסת בנקודה: יהי L \in \mathbb{R} יהיו a < x_0 < b עבורם a < x_0 < b עבורם יהי L \in \mathbb{R} יהי
```

 $(x^m)^{rac{1}{n}}=\left(x^k
ight)^{rac{1}{\ell}}$  אזי  $rac{m}{n}=rac{k}{\ell}$  טענה: יהיו  $n,m,k,\ell\in\mathbb{N}$  המקיימים

- $. \forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0,\delta}. \left| f\left(x\right) L \right| < \varepsilon$  קושי: •
- $\forall y \in (a,b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to L)$  היינה: •

fל לפי קושי) אזי fמתכנסת ב־ $x_0$  לים לפי קושי) אזי  $f:(a,b) \to \mathbb{R}$  ותהא  $a < x_0 < b$  עבורם  $a,b,x_0 \in A$  ויהיו  $a,b,x_0 \in A$  ויהיו  $a,b,x_0 \in A$  לפי היינה).

 $\lim_{x \to x_0} f\left(x
ight) = L$  איי  $x_0$  המתכנסת ב $x_0$  המתכנסת  $x_0$  אויהיו  $x_0$  אויהיו בנקודה: יהי $x_0$  אויהיו  $x_0$  אויהיו  $x_0$  אויהיו  $x_0$  אויהיו בנקודה: יהי

- $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. x \in (x_0, \min\{x_0 + \delta, b\}). |f(x) L| < \varepsilon$  סושי:
  - $\forall y \in (x_0, b)^{\mathbb{N}} . (y_n \downarrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to L)$  היינה: •

 $x_0$ טענה: יהי  $x_0 \in A$  יהיו  $x_0 \in A$  עבורם  $x_0 \in A$  ותהא  $x_0 \in A$  יהיו  $x_0 \in A$  יהיו  $x_0 \in A$  עבורם  $x_0 \in A$  עבורם  $x_0 \in A$  יהינה).

 $x_0$  לים אזיי  $x_0 < b$  יהיו  $x_0 \in A$  יהיו איזי  $x_0 \in A$  יהיו איזי ותהא  $x_0 \in A$  יהיו איזי ותהא  $\lim_{x \to x^+} f(x) = L$ 

 $f:(a,x_0) o\mathbb{R}$  ותהא  $a< x_0$  עבורם  $a,x_0\in A$  יהיו והי בנקודה: יהי שמאל בנקודה: יהי מתכנסת חד־צדדית משמאל בנקודה: יהי

- .  $\forall \varepsilon>0.\exists \delta>0.x\in\left(\max\left\{x_{0}-\delta,a\right\},x_{0}\right).\left|f\left(x\right)-L\right|<\varepsilon$  קושי:
  - $\forall y \in (a, x_0)^{\mathbb{N}} . (y_n \uparrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to L) :$ היינה •

aטענה: יהי a אזי a יהיו a עבורם  $a,x_0\in A$  יהיו a עבורם a יהיו a יהיו a עבורם a יהיו a יהי a יהיו a יהיי a יהיו a יהיו a יהיי a יחי a יהיי a יהיי a יהיי a יהיי a יהיי a יהיי a יהי

 $f:(a,\infty) o\mathbb{R}$  ותהא  $a< x_0$  עבורם  $a,x_0\in A$  יהיו והי עבור $L\in\mathbb{R}$  אזי מתכנסת באינסוף: יהי

- $. orall arepsilon > 0. \exists M \in \mathbb{R}. orall x \geq M. \left| f\left( x 
  ight) L 
  ight| < arepsilon$  קושי:
- $\forall y \in (a,\infty)^{\mathbb{N}} . (y_n \to \infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to L)$  היינה: •

f)לפי קושי) לים לפי מתכנסת f אזי  $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$  ותהא  $a< x_0$  עבורם  $a,x_0\in A$  יהיו ל $a< x_0$  ותהא באינסוף ל $a,x_0\in A$  יהיו לפי היינה).

 $\lim_{x o\infty}f\left(x
ight)=L$  יהיו  $L\in\mathbb{R}$  יהי המתכנסת עבורם  $a,x_0\in A$  ותהא  $a< x_0$  ותהא  $a< x_0$  עבורם  $a,x_0\in A$  יהיו  $a< x_0$  י

- $. \forall \varepsilon > 0. \exists M \in \mathbb{R}. \forall x \leq M. \left| f\left(x\right) L \right| < \varepsilon$  קושי: •
- $\forall y \in (a, x_0)^{\mathbb{N}} . (y_n \uparrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to L)$  היינה: •

f)לישי) לפי קושי לים אינסוף לים מתכנסת במינוס אזי ( $t\in\mathbb{R}$  אזי ותהא אוי ותהא  $x_0< b$  עבורם  $x_0,b\in A$  ויהיו ויהיו ויהיו ענה: יהי מתכנסת במינוס אינסוף ל-t לפי היינה).

 $\lim_{x \to -\infty} f\left(x
ight) = L$  אזי  $L \in \mathbb{R}$  המתכנסת במינוס אינסוף ל־ $L \in \mathbb{R}$  אזי  $x_0 < b$  ווהיי  $x_0 < b$  עבורם  $x_0, b \in A$  ויהיי ווהיי  $x_0 < b$  ויהיי במקום פונקציה מתכנסת נאמר גם כי היא בעלת גבול סופי.

אזי  $f:(a,b) o \mathbb{R}$  ותהא  $a < x_0 < b$  עבורם  $a,b,x_0 \in A$  יהיו בנקודה: יהיו

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0, \delta}. f(x) > M$  קושי: •
- $\forall y \in (a,b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$  היינה:

fמתבדרת (פושי) ב־ $a,b,x_0 \in A$  אזי לפי מתבדרת f אזי (a,b) אזי  $a< x_0 < b$  עבורם  $a,b,x_0 \in A$  אזי לאינסוף ב־ $a,b,x_0 \in A$  לאינסוף ב־ $a,b,x_0 \in A$  לאינסוף ב־ $a,b,x_0 \in A$  לפי היינה).

 $\lim_{x \to x_0} f\left(x
ight) = \infty$  אזי אזי  $a < x_0 < b$  ותהא ותהא  $a < x_0 < b$  שבורם  $a, b, x_0 \in A$  יימון: יהיו

אזי  $f:(a,b) o \mathbb{R}$  ותהא  $a < x_0 < b$  עבורם  $a,b,x_0 \in A$  יהיו בנקודה: יהיו

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in I_{x_0, \delta}. f(x) < M$  קושי: •
- $\forall y \in (a,b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty) :$ היינה

f)לשי(טענה: יהיו  $a,b,x_0\in A$  לפי קושי) אזי  $f:(a,b)\to\mathbb{R}$  ותהא ותהא  $a< x_0< b$  לפי קושי $a,b,x_0\in A$  למינוס אינסוף ב־ $a,b,x_0\in A$  למינוס אינסוף ב־ $a,b,x_0\in A$  למינוס אינסוף ב־ $a,b,x_0\in A$  למינוס אינסוף ב- $a,b,x_0\in A$ 

 $\lim_{x \to x_0} f\left(x
ight) = -\infty$  אזי אינסוף ב־ $a,b,x_0 \in A$  אזי אזי היון: יהיו  $a < x_0 < b$  עבורם  $a,b,x_0 \in A$  אזי אזי היון  $a,b,x_0 \in A$  עבורם  $a,b,x_0 \in A$  אזי אזי  $a < x_0 < b$  עבורם  $a,b,x_0 \in A$  אזי אזי אזי אזי אזי אינסוף בנקודה: יהיו  $a,b,x_0 \in A$  עבורם  $a,b,x_0 \in A$  אזי

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, \min\{x_0 + \delta, b\}). f(x) > M$  פושי:
  - $\forall y \in (x_0, b)^{\mathbb{N}} . (y_n \downarrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$  היינה: •

f)לפי קושי) לפי מימין לאינסוף ב $x_0 < b$  עבורם  $x_0 < b$  עבורם  $x_0 < b$  עבורם  $x_0 < b$  עבורם  $x_0 < b$  עבורם לפי היינה).

- $. \forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0, \min \{x_0 + \delta, b\}) \, . f(x) < M$  קושי:
  - $\forall y \in (x_0, b)^{\mathbb{N}} . (y_n \downarrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty)$  היינה:

f)לפי קושי) לפי לפי למינוס אינסוף ב $x_0 < b$  עבורם  $t, x_0 \in A$  אזי ל $t: (x_0, b) \to \mathbb{R}$  אזי לפי קושי) אינסוף ב $t, x_0 \in A$  עבורם למינוס אינסוף ב $t, x_0 \in A$  מתבדרת חד־צדדית מימין למינוס אינסוף ב $t, x_0 \in A$  לפי היינה).

 $x_0$ ימין מימין מימין מימין ההא המתבדרת הדצדדית המתבדרת ותהא  $x_0 < b$ ותהא עבורם  $x_0 < b$ ותהא אינסוף בי $x_0 < b$ ותהא ותהא וותהא . $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ 

אזי  $f:(a,x_0) o\mathbb{R}$  ותהא  $a< x_0$  עבורם  $a,x_0\in A$  אזי ניהיו בנקודה: יהיו משמאל לאינסוף בנקודה:

- $. \forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in \left(\max\left\{x_0 \delta, a\right\}, x_0\right). f\left(x\right) > M$  קושי:
  - $\forall y \in (a, x_0)^{\mathbb{N}} . (y_n \uparrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$  :היינה

f)לפי קושי) לפי קושי ב־ $x_0$  עבורם  $a,x_0\in A$  אזי לאינסוף ב־ $x_0$  לפי קושי) אזי לוגדית משמאל לאינסוף ב־ $x_0$  לפי היינה).

סימון: יהיו משמאל אינסוף ב- $a,x_0\in A$  המתבדרת חד־צדדית ותהא מינסוף ב- $a,x_0\in A$  ותהא ותהא  $a< x_0$  עבורם ב- $a,x_0\in A$  המתבדרת וווו $a,x_0\in A$  אזי וווו $a,x_0\in A$  ותהא ווווא $a,x_0\in A$  המתבדרת חד־צדדית משמאל לאינסוף ב- $a,x_0\in A$  אזי מימון: יהיו

אזי  $f:(a,x_0) o\mathbb{R}$  ותהא  $a< x_0$  עבורם  $a,x_0\in A$  אזי יהיו בנקודה: יהיו

- .  $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0. \forall x \in \left(\max\left\{x_0 \delta, a\right\}, x_0\right). f\left(x\right) < M$  קושי:
  - $\forall y \in (a, x_0)^{\mathbb{N}} . (y_n \uparrow x_0) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty) :$ היינה

טענה: יהיו  $a,x_0 \in A$  עבורם  $a,x_0 \in A$  ותהא  $a < x_0$  ותהא  $a < x_0$  ותהא  $a < x_0$  עבורם  $a,x_0 \in A$  אזי  $a,x_0 \in A$  אזי  $a,x_0 \in A$  עבורם  $a,x_0 \in A$  עבורם  $a,x_0 \in A$  עבורם אינסוף ב־ $a,x_0 \in A$  לפי היינה).

 $x_0$  בימון: יהיו  $a,x_0\in A$  עבורם  $a,x_0\in A$  ותהא ותהא  $a< x_0$  ותהא עבורם  $a,x_0\in A$  המתבדרת חד־צדדית משמאל למינוס אינסוף ב־ $a,x_0\in A$  ותהא  $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$ 

אזי  $f:(a,\infty) o\mathbb{R}$  ותהא  $a< x_0$  עבורם  $a,x_0\in A$  אזי יהיו לאינסוף לאינסוף אזי מתבדרת מתבדרת באינסוף אינסוף אויי

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f\left(x\right) > M$  .  $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f\left(x\right) > M$
- $\forall y \in (a,\infty)^{\mathbb{N}} . (y_n \to \infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$  היינה: •

טענה: יהיו f) אזי f (מתבדרת באינסוף לפי קושי) אזי לו מתבדרת f (מתבדרת ההא  $a < x_0$  עבורם  $a, x_0 \in A$  אזי לאינסוף לפי היינה).

 $\lim_{x \to \infty} f\left(x
ight) = \infty$  אזי  $x_0 = a$  אזי היין היין המתבדרת אינטוף  $a, x_0 \in A$  ותהא ותהא  $a < x_0$  ותהא  $a < x_0$  אזי  $a < x_0$  פונקציה מתבדרת באינטוף למינוס אינטוף: יהיו  $a, x_0 \in A$  עבורם  $a, x_0 \in A$  ותהא אינטוף למינוס אינטוף: יהיו

- $. \forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \geq \delta. f\left(x\right) < M$  קושי: •
- $\forall y \in (a,\infty)^{\mathbb{N}}. (y_n \to \infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty)$  :היינה

סענה: יהיו f) אזי  $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$  ותהא  $a< x_0$  עבורם  $a,x_0\in A$  אזי יהיו  $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$  ותהא באינסוף לפי קושי).

 $\lim_{x \to \infty} f\left(x
ight) = -\infty$  אזי אינסוף ב־ $a,x_0 \in A$  אזי היין  $a,x_0 \in A$  אזי היין  $a,x_0 \in A$  אזי היין אינסוף: יהיו  $a,x_0 \in A$  אזי עבורם  $a,x_0 \in A$  אזי יהיו  $a,x_0 \in A$  אזי יהיו אינסוף לאינסוף: יהיו  $a,x_0 \in A$  עבורם  $a,x_0 \in A$  ותהא

- $. \forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \leq \delta. f\left(x\right) > M$  קושי: •
- $\forall y \in (-\infty, b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to -\infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to \infty)$  היינה:

f) מתבדרת (שינסוף לפי קושי) אינסוף לאינסוף אינסוף לאינסוף לאינסוף לו אוי  $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$  מתבדרת מתבדרת לאינסוף לאינסוף לפי היינה).

 $\lim_{x \to -\infty} f\left(x
ight) = \infty$  אינסוף איי אינסוף איי המון: המון: המון: 0 < b ותהא אווהא  $x_0 < b$  ותהא אינסוף איי היון  $x_0 < b$  עבורם  $x_0 < b$  ותהא אינסוף למינוס אינסוף למינוס אינסוף: יהיו  $x_0 < b$  עבורם  $x_0 < b$  ותהא אינסוף למינוס אינסוף אינסוף אינסוף למינוס אינ

- $\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta \in \mathbb{R}. \forall x \leq \delta. f(x) < M$  קושי:
- $\forall y \in (-\infty, b)^{\mathbb{N}} . (y_n \to -\infty) \Longrightarrow (f(y_n) \to -\infty) :$

fל (שפי) אינסוף למינוס אינסוף למינוס אזי אזי  $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$  אזי ותהא  $x_0< b$  עבורם  $b,x_0\in A$  אזי לפינוס אינסוף למינוס אינסוף למינוס אינסוף לפי היינה).

סימון: יהיו אינסוף למינוס אינסוף אזי המתבדרת המינוס אינסוף אוותהא  $f:(-\infty,b) \to \mathbb{R}$  ותהא ותהא עבורם  $b,x_0 \in A$  אינסוף אזי וווו $x_{x \to -\infty}$  ותהא  $f(x) = -\infty$ 

הערה: במקום פונקציה מתבדרת לאינסוף או למינוס אינסוף נאמר גם כי היא בעלת גבול במובן הרחב או מתכנסת במובן הרחב.

 $f\left(x
ight) \xrightarrow[x o a]{} L$  יהי  $\lim_{x o a} f\left(x
ight) = L$  עבורה עבורה ותהא  $f:I o \mathbb{R}$  ותהא  $a \in \hat{\mathbb{R}}$  יהי  $L \in \hat{\mathbb{R}}$  יהי

 $((\lim_{x o a}f\left(x
ight)=L_1)\wedge(\lim_{x o a}f\left(x
ight)=L_2))\Longrightarrow(L_1=L_2)$  אזי  $a\in\mathbb{R}$  איזי  $f:I o\mathbb{R}$  משפט: תהא

 $\lim_{x o a}f\left(x
ight)=L$  אזי  $\lim_{x o a^+}f\left(x
ight)=L$  ווהי  $\lim_{x o a^-}f\left(x
ight)=L$  אזי  $\lim_{x o a^+}f\left(x
ight)=L$  אזי  $\lim_{x o a^+}f\left(x
ight)=L$ 

```
\lim_{x \to a} \left( f\left( x \right) + g\left( x \right) \right) = \left( \lim_{x \to a} f\left( x \right) \right) + \left( \lim_{x \to a} g\left( x \right) \right) \bullet
                                                                                          \lim_{x \to a} (f(x) g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x)) \cdot (\lim_{x \to a} g(x)) \bullet
                                                                                                                                   \lim_{x \to a} x = a אזי a \in \mathbb{R} למה: יהי
                                                                                               \lim_{x \to a} p\left(x
ight) = p\left(a
ight) אזי p \in \mathbb{R}\left[x
ight] ויהי a \in \mathbb{R} מסקנה: יהי
  \lim_{x	o a}g\left(f\left(x
ight)
ight)=\lim_{x	o b}g\left(x
ight) איי \lim_{x	o a}f\left(x
ight)=b המקיימת g:I_{b}	o\mathbb{R} תהא g:I_{b}	o\mathbb{R} תהא g:I_{b}	o\mathbb{R} ותהא
                                         \mathbb{R}\left[x
ight] \cup \{\sin,\cos\} \cup \{x^a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup (\bigcup\left\{\{\log_a\left(x
ight),a^x\right\} \mid a>0\}\right) פונקציות אלמנטריות בסיסיות:
                             באשר אחד מהבאים מתקיים h:\mathbb{R} \to \mathbb{R} באשר בסיסיות מתקיים מנקציות פונקציות ההיינה f,g פונקציות אלמנטריות בסיסיות איז
                                                                                                                                                              h = f \circ q \bullet
                                                                                                                                                              .h = f + a \bullet
                                                                                                                                                               .h = f \cdot g \bullet
                                                                                                                                                                h = f^{-1}
                                                                        \forall a \in \text{Dom}(f) . \lim_{x \to a} f(x) = f(a) טענה: תהא f פונקציה אלמנטרית אזי
                                                                                                                                 |\sin{(x)}| \leq |x| אזי x \in \mathbb{R} משפט: יהי
                                                                        f(x) \preccurlyeq g(x) אזי \forall x \in I. f(x) \leq g(x) המקיימות f,g:I \to \mathbb{R} איזי
                    \lim_{x	o a}f\left(x
ight)\leq\lim_{x	o a}g\left(x
ight) אזי f\left(x
ight)\preccurlyeq g\left(x
ight) המקיימות f,g:I	o\mathbb{R} ותהיינה a\in\hat{\mathbb{R}} ותהיינה
\left(f\left(x
ight),h\left(x
ight) \xrightarrow[r 
ightarrow a]{} L
ight) \Longrightarrow אזי אזי f\left(x
ight) \preccurlyeq g\left(x
ight) \preccurlyeq h\left(x
ight) המקיימות f,g,h:\mathbb{R}^{I} המקיימות a\in\hat{\mathbb{R}} יהי L\in\hat{\mathbb{R}} יהי L\in\hat{\mathbb{R}} יהי
                                                                                                                                                  .\left(g\left(x
ight)\xrightarrow[x
ightarrow a]{}L
ight). lim_{x
ightarrow0}\frac{\sin(x)}{x}=1 .
                                                                                                                                              אזי f:I	o\mathbb{R} אזי
                                                                                               \lim_{x\to a} f\left(x\right) = f\left(x_0\right) עבורה a\in I בנקודה: •
                                                                      \lim_{x\to a^+} f\left(x\right) = f\left(x_0\right) עבורה a\in I נקודה: • רציפה חד צדדית מימין בנקודה:
                                                                   \lim_{x\to a^-}f\left(x
ight)=f\left(x_0
ight) עבורה a\in I משמאל בנקודה: • רציפה חד צדדית משמאל
                                                      \forall a \in I. \lim_{x 	o a} f\left(x\right) = f\left(a\right) המקיימת הציפה בצורת קושי: פונקציה f: I 	o \mathbb{R}
       . orall a \in I. orall x \in I^{\mathbb{N}}. \left((x_n 	o a) \Longrightarrow \left(\lim_{n 	o \infty} f\left(x_n
ight) = f\left(a
ight)
ight)
ight) המקיימת f:I 	o \mathbb{R} המקיימת פונקציה רציפה בצורת היינה: פונקציה המקיימת
                                                                     .(בייה) אזי f:I 	o \mathbb{R} משפט: תהא f:I 	o \mathbb{R} אזי f:I 	o \mathbb{R} משפט: תהא
                                               . \forall x \in B. \exists arepsilon > 0. \ (x-arepsilon, x+arepsilon) \cap A \subseteq B המקיימת שוי A \subseteq \mathbb{R} אזי A \subseteq \mathbb{R}
                                          B\subseteq\mathbb{R} פתוחה יחסית לB\subseteq\mathbb{R} אזי Aיי (Bרציפה על Bיי) משפט: תהא משפט: תהא אזי (Aרציפה על Bיי) משפט: תהא
                      f_{\restriction_{[c,b)}}אזי f(c) רציפה על איי איי רציפה על איי איי פון רציפה על איי איי פון ותהא f:(a,b) \to \mathbb{R} איי איי פון רציפה על איי
                                                                                             C\left(I
ight)=\{f:I
ightarrow\mathbb{R}\mid I אזי f\} רציפה על I\subseteq\mathbb{R} אזי סימון: תהא
                                                                                                                טענה: תהא f \in C\left((a,b)
ight) רציפה מונוטונית עולה
                                                                                    (\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f[(a,b)]) חסומה מלעיל) •
                                                                                           (\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty) אינה חסומה מלעיל) אינה f[(a,b)]
                                                                                      \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf f[(a,b)] תסומה מלרע) • חסומה מלרע) •
                                                                                         \lim_{x\to b^-} f(x) = -\inftyרע) אינה מלרע) חסומה אינה מלרע) •
                          \forall x \in I. f(x) > 0 טענה: תהא a עבורה a עבורה a אזי קיימת אזי קיימת a עבורה a עבורה a רציפה על a
```

 $\forall x \in I. f\left(x
ight) > g\left(x
ight)$  עבורה a של a עבורה קיימת סביבה a אזי קיימת על המקיימות a רציפות על המקיימות a אזי קיימת סביבה a אזי קיימת על המקיימות על המקיימות אזי קיימת סביבה a אזי קיימת סביבה a עבורה a עבורה a אזי קיימת סביבה a עבורה a עבורה

 $(\forall q \in \mathbb{Q}.f(q) = g(q)) \Longrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}.f(x) = g(x))$  איז  $f,g \in C(\mathbb{R})$  טענה: יהיו

 $(\forall y \in \mathbb{N}^I. (y_n o a) \Longrightarrow ($ יטענה: תהא  $f: I o \mathbb{R}$  איי  $f: I o \mathbb{R}$  טענה: תהא

נקודת אי־רציפות: תהא  $f:I o\mathbb{R}$  אזי  $a\in I$  אזי אי־רציפות:

 $\lim_{x\to a^{-}} f(x) \neq \lim_{x\to a^{+}} f(x)$  :סוג ראשון/קפיצה •

. (לא קיים) לא  $\lim_{x\to a^-}f(x))\lor($ לא לא היים לא  $\lim_{x\to a^+}f(x))$  לא שני: שני:  $f:I\to\mathbb{R}$  מונוטונית אזי כל נקודות האי־רציפות הן מסוג ראשון.

 $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$  .

 $D\left(x
ight)=\left\{egin{array}{ll} 0 & x\in\mathbb{Q} & 1 & x
otin \end{array}
ight.$ כך כך  $D:\mathbb{R} o\mathbb{R}$  נגדיר נגדיר

אזי  $f,g:I_a o\mathbb{R}$  ויהיו  $a\in\hat{\mathbb{R}}$  אזי משבון גבולות: יהי

```
\lim_{x\to a} R(x) = 0 אזי a\in\mathbb{R} טענה: יהי
                                               a טענה חשבון רציפות: יהי f+g,f\cdot g,f^g אזי אזי f+g,f\cdot g,f^g רציפות על ויהיו a\in\mathbb{R} יהי היי
                                                         g\circ f אזי g\circ f אזי g\circ f אזי g:B	o C טענה: תהא g:A	o B רציפה על
                                                                                                                                                      מסקנה: כל פונקציה אלמנטרית רציפה.
                                                              \lim_{x \to a} f\left(g\left(x\right)\right) = f\left(\lim_{x \to a} g\left(x\right)\right) אזי g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} רציפה ותהא f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}
                                                                                                                                            rac{p}{a} אזי p,q\in\mathbb{R}\left[x
ight] אזי אוי פונקציה רציונאלית: יהיו
                           . טענה: תהא f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} עבורה f \in \mathbb{R} עבורה לכל היותר בת מנייה. אזי כמות נקודות האי־רציפות לכל היותר בת מנייה.
                                         (\forall x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}) \Longrightarrow (\exists x_0 \in \mathbb{R}. \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)) איז f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} מסקנה: תהא
                                                                                                              . חסומה f אזי f\in C\left([a,b]
ight) תהא הראשון: תהא תיירשטראס הראשון
                                                                      \exists \max \left( f\left( [a,b] 
ight) 
ight), \min \left( f\left( [a,b] 
ight) 
ight) אזי f \in C\left( [a,b] 
ight) משפט ויירשטראס השני: תהא
                 \forall y \in (\min\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right),\max\left(f\left(a\right),f\left(b\right)\right) . \exists c \in (a,b).f\left(c\right)=y אאי f \in C\left([a,b]\right) משפט ערך הביניים: תהא
                                                                                \exists \zeta \in [a,b]. f(\zeta) = 0 אזי f(a) f(b) < 0 המקיימת f \in C([a,b]) אזי למה: תהא
                                                                             f([a,b]) = [\min(f([a,b])), \max(f([a,b]))] אזי f \in C([a,b]) מסקנה: תהא
                                                                          \exists x,y \in A. \forall \lambda \in [0,1]. \lambda x + (1-\lambda) \ y \in A המקיימת A \subseteq \mathbb{R} הבוצה קטע מוכלל:
                                                                                                 . מונוטונית ממש חח"ע אזי f מונוטונית ממש למה: יהי f \in C\left(I\right) מוכלל ותהא
                                      f(I) \wedge (f^{-1} \in C(f(I))) פשפט: יהי f(I) \wedge (f^{-1} \in C(I) מונוטונית ממש אזי משפט: יהי f(I) \wedge (f^{-1} \in C(f(I))) משפט:
                                                 f\in C(I) (בשפט: יהי f קטע מוכלל ותהא f\in \mathbb{R}^I מונוטונית ממש אזי משפט: יהי f\in \mathbb{R}^I מונוטונית
                                                                                                                                                   x^{a},a^{x}\in C\left(\mathbb{R}
ight) אזי a>0 מסקנה: יהי
                                                                                      a_n^{b_n} 	o a^b סדרה אזי a_n 	o a^b סדרה אזי מסקנה: תהא מסקנה: מסקנה
                                                                                             .\exists \zeta \in \mathbb{R}. p\left(\zeta
ight)=0 אזי p \in \mathbb{R}_n\left[x
ight] ackslash \mathbb{R}_{n-1}\left[x
ight] ויהי n \in \mathbb{N}_{	ext{odd}} איזי n \in \mathbb{N}_{	ext{odd}}
A\subseteq \mathcal{D}_{<\aleph_0}\left(\Lambda\right).A\subseteq \bigcup_{n\in\mathcal{B}}I_n מתקיים מתקיים A\subseteq \bigcup_{n\in\Lambda}I_n קטעים פתוחים עבורם \{I_n\}_{n\in\Lambda} כך שלכל באלכל לבוצה קומפקטית:
                                                                                                                          . קומפקטית [a,b] אזי a < b יהיו היינה־בורל: הלמה של היינה־בורל:
    . orall arepsilon > 0. \exists \delta > 0. orall x \in A. orall y \in (x-\delta,x+\delta) \, . \, |f\left(x
ight) - f\left(y
ight)| < arepsilon המקיימת המקיימת המידה שווה (במ"ש): f \in \mathbb{R}^A
                                                    ... משפט: תהא f\in\mathbb{R}^A רציפה במ"ש אזי f רציפה הא משפט: תהא f\in\mathbb{R}^A אזי f\in\mathbb{R}^A אזי f\in\mathbb{R}^A תנאי ליפשיץ: תהא f\in\mathbb{R}^A עבורה f\in\mathbb{R}^A עבורה f\in\mathbb{R}^A אזי f\in\mathbb{R}^A אזי f\in\mathbb{R}^A
                                                                                                            [a,b] משפט קנטור: תהא f\in C\left([a,b]
ight) אזי לf\in C\left([a,b]
ight)
             (a,d) טענה: תהא f\in\mathbb{R}^A רציפה במ"ש על (a,b], [c,d) אזי f רציפה במ"ש על f\in\mathbb{R}^A אזי f\in\mathbb{R}^A אזי f\in\mathbb{R}^D. \lim_{n\to\infty}x_n\in\mathbb{R} שותהא f(x_n)\in\mathbb{R} רציפה במ"ש אזי f\in\mathbb{R}^D אזי f\in\mathbb{R}^D ותהא f\in\mathbb{R}^D אזי f\in\mathbb{R}^D
                                                     (\lim_{x \to a^+} f(x), \lim_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}) \Longleftrightarrowמסקנה: תהא f \in C((a,b)) אזי אזי (f \in C((a,b))
                                                             [a,\infty) אוי f רציפה במ"ש על \lim_{x	o\infty}f\left(x
ight)\in\mathbb{R} המקיימת המשפט: תהא f\in C\left([a,\infty)
ight)
                                                                                                                                . חסומה f אזי אזי f \in \mathbb{R}^{(a,b)} אחי טענה: תהא
                                  \omega_f\left(\delta
ight)=\sup\left\{|f\left(x_1
ight)-f\left(x_2
ight)||\left(x_1,x_2\in I
ight)\wedge\left(|x_1-x_2|<\delta
ight)
ight\} אזי f\in\mathbb{R}^I מודולוס הרציפות: תהא
                                                          f'(x_0)=\lim_{x	o x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} אזי x_0\in I אזי x_0\in I אזי f'(x_0)=\lim_{x	o x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} אזי f'(x_0)=\lim_{x	o x_0}\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0} אזי f'(x_0)=\lim_{x	o x_0}\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0} אזי f'(x_0)=\lim_{x	o x_0}\frac{f(x_0)-f(x_0)}{x-x_0}
                                                                                                                                                 .f':I	o\mathbb{R} אזי f:I	o\mathbb{R} נגזרת: תהא
                                                                                                                           \frac{df}{dx}\left(x
ight)=rac{d}{dx}f\left(x
ight)=f'\left(x
ight) אזי f\in\mathbb{R}^{I} אינון: תהא
```

x'(t)=v(t) אזי מיקום ומהירות פונקציית  $x,v\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$  פונקציית  $x,v\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$  אזי חלקיק ותהיינה יהי חלקיק ותהא  $t\in\mathbb{R}^I$  אזיר אזירה בנקודה  $t\in\mathbb{R}^I$  אוותהא ותהא  $t\in\mathbb{R}^I$  ותהא

 $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0$  המקיימת  $p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[x]$  אזי  $x_0 \in I$  ותהא  $f \in \mathbb{R}^I$  המקיימת

 $R\left(x
ight)=\left\{egin{array}{l} rac{1}{q} & \exists p,q\in\mathbb{Z}.(\gcd(p,q)=1)\land\left(x=rac{p}{q}
ight) \ & ext{else} \end{array}
ight.$  כך  $R:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R}$  כד  $R:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R}$  כד  $R:\mathbb{R}
ightarrow\mathbb{R}$ 

 $R\left(x
ight)=R\left(x+1
ight)$  אזי  $x\in\mathbb{R}$  טענה: יהי

```
(x^r)' = rx^{r-1} אזי r \in \mathbb{R} מסקנה: יהי
                                                                                                                                          .arctan' (x) = \frac{1}{1+x^2}מסקנה:
g \circ f'(x_0) = g'(f(x)) \cdot f'(x) אזי איזי איזירה על g \in C(f(I)) גזירה על f \in C(I) אזי איזירה על f \in C(I) מלל השרשרת: תהא
                                                                    f^{(0)}=f \wedge \left(f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}
ight)'
ight) גזירה אזי f\in\mathbb{R}^I נגזרת מסדר גבוה: תהא
                                                                                     \left(\Delta f
ight)(x)=f\left(x+1
ight)-f\left(x
ight) אזי f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} הפרש דיסקרטי: תהא
                                                                             A(\Delta^{(0)}f=\Delta f)\wedge \left(\Delta^{(k+1)}f=\Delta\left(\Delta^{(k)}f
ight)
ight) אזי f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} הגדרה: תהא
                                                                                                    פונקציה גזירה ברציפות: f \in \mathbb{R}^I בזירה עבורה f' רציפה.
                                             .(C^{n}\left(I
ight)=\left\{ f\in C^{n-1}\left(I
ight)\mid גזירה ברציפות f
ight\} )\wedge\left(C^{0}\left(I
ight)=C\left(I
ight) אזי אזי ווא אזי בימון: תהא
                                                                                          f\in C^{\infty}\left(I\right)=\bigcap_{n=0}^{\infty}C^{n}\left(I\right)אזי I\subseteq\mathbb{R} תהא חלקה: תהא פונקציה חלקה
                                                       .(f\cdot g)^{(n)}\left(x
ight)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}\left(x
ight)\cdot g^{(n-k)}\left(x
ight) גזירות אזי f,g\in\mathbb{R}^{I} מלל לייבניץ: תהיינה
                                                                                                           אזי f \in \mathbb{R}^I נקודת קיצון מקומית/אקסטרמום: תהא
                                                                  \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). f(x) \leq f(x_0) עבורה x_0 \in I מקסימום:
                                                                    \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) . f(x_0) \le f(x) עבורה x_0 \in I מינימום:
                                          f'(x_0)=0 אזי קיצון אזי f\in C\left([a,b]
ight) נקודת קיצון אזי f\in C\left([a,b]
ight) משפט פרמה:
                                       \exists c \in (a,b)\,.f'\left(c
ight) = 0 אזי f\left(a
ight) = f\left(b
ight) המקיימת f\left(a,b
ight) אזי f \in C\left([a,b]
ight) אזי המא
                                                         \exists c \in (a,b)\,.f'\left(c
ight) = rac{f(b)-f(a)}{b-a} אזי f \in C\left([a,b]
ight) משפט לגרנז': תהא וא גזירה על f \in C\left([a,b]
ight)
                                                                                          .(עינה: תהא f \in \mathbb{R}^I גזירה אזי איי (f \in \mathbb{R}^I רציפה במ"ש).
                                                                                                                                           \forall x > 0.e^x > 1 + x טענה:
                                                                                                               \forall x, y \in \mathbb{R}. |\sin(x) - \sin(y)| < |x - y| טענה:
                                                             \exists a \in \mathbb{R}. f\left(x
ight) = a אזי \forall x \in \mathbb{R}. f'\left(x
ight) = 0 גזירה המקיימת f \in C\left(\mathbb{R}
ight) אזי
                                                                                 \exists c \in \mathbb{R}. q = h + c אזי q' = h' המקיימות q, h \in \mathbb{R}^I מסקנה: תהיינה
                                                                             \exists c \in \mathbb{R}. f\left(x\right) = e^{x} אזי f = f' אזירה המקיימת f \in C\left(\mathbb{R}\right) איזי תהא
                       \exists x_0 \in (a,b) \cdot rac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = rac{f'(x_0)}{g'(x_0)} אזי (a,b) אזי f,g \in C\left([a,b]
ight) משפט הערך הממוצע של קושי: תהיינה
                                                                                                                                       משפט: תהא f \in \mathbb{R}^I גזירה אזי
                                                                                                . אזי f עולה ממש x \in I אזי אוי f'(x) > 0 מתקיים
                                                                                               . אם לכל f'(x) < 0 מתקיים x \in I אזי אם לכל
                                                                             משפט: תהא f'\left(x_{0}
ight)=0 גזירה פעמיים על x_{0}\in I ומתקיים f\in\mathbb{R}^{I} אזי
                                                                                                         f''(x_0) > 0 אם f''(x_0) > 0 אזי f''(x_0) > 0
                                                                                                       f''(x_0) < 0 אזי אזי מקסימום מקומי של f''(x_0)
                             f'_+(a)=\lim_{x	o a^+}f'(x) אזי \lim_{x	o a^+}f'(x)\in\mathbb{R} המקיימת f\in C\left([a,b)
ight) אזי f\in C\left([a,b)
ight) משפט: תהא
                                 .f'\left(x_{0}
ight)>0\Longrightarrow\exists\delta>0.orall x\in\left(x_{0}-\delta,x_{0}+\delta
ight).f'\left(x
ight)>0 איירה ברציפות איי f\in\mathbb{R}^{\left[a,b
ight]} איירה ברציפות איי
                   (גורר t לא מקסימום מקומי). גורר f'_-(b)>0 גורר לא מינימום מקומי). גורר f'_+(a)<0 גורר אזי f\in\mathbb{R}^{[a,b]} גורר למה:
                   . \forall y \in \left(\min\left(f'\left(a\right), f'\left(b\right)\right), \max\left(f'\left(a\right), f'\left(b\right)\right)\right). \exists c \in \left(a, b\right). f'\left(c\right) = y גזירה אזי f \in \mathbb{R}^{\left[a, b\right]} משפט דרבו: תהא
                                      מתכנס במובן הרחב אזי \lim_{x	o x_0}rac{f'(x)}{g'(x)} נניח כי x\in I_\infty^\pm גזירות ותהא ותהא f,g\in\mathbb{R}^I מתכנס במובן
```

 $(x_0, x_0)$  אזי  $f \in \mathbb{R}^I$  אזי אזי בנקודה: תהא  $f \in \mathbb{R}^I$  אזי אזי  $f \in \mathbb{R}^I$  אזי אינים קירוב מסדר ראשון של

 $(x_0$  אזי ( $x_0$  )

 $.\left(f^{-1}
ight)'(y_{0})=rac{1}{f'(f^{-1}(y_{0}))}$  אזי  $f^{-1}\left(y_{0}
ight)$  אזירה על  $f\in C\left(I
ight)$  אונית  $x_{0}\in I$  מונוטונית חזק אזירה על משפט: תהא

 $\deg(p)$  אזי  $x_0$  קירוב בנקודה p(x) ויהי ויהי  $f \in \mathbb{R}^I$  אזי

 $(g(x_0) \neq 0) \Longrightarrow \left( \left( \frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \right) \bullet$ 

אזי  $x_0$  אזירות בנקודה  $f,g\in\mathbb{R}^I$  אזירות היינה

 $.(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \bullet$ 

 $.(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \bullet$ 

 $an'(x) = rac{1}{\cos^2(x)}$  מסקנה:  $(e^x)' = e^x$ 

```
(\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty) \Longrightarrow \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \bullet
                                                                         \frac{1}{2}\cdot \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy מתקיים \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 מתקיים x,y>0 ויהיו היו אי־שיוויון יאנג: יהיו
|x_i| \le (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{rac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{rac{1}{q}} אזי איישיוויון הולדר: יהיו x,y \in \mathbb{R}^n ויהיו x,y \in \mathbb{R}^n המקיימים המקיימים rac{1}{p} + rac{1}{q} = 1 איישיוויון מינקובסקי: יהיו x,y \in \mathbb{R}^n ויהיו x,y \in \mathbb{R}^n המקיימים המקיימימים המקיימים המקיימים המקיימימים המקיימים המקיימ
                                                                                                                                                                 (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}} 
                                                                                                                                     מחלקות שקילות אסימפטוטית: תהא f,g\in\mathbb{R}^I ותהא אזי אזי מחלקות אסימפטוטית:
                                     f \leq g אינטואיטיבית .(\exists c > 0. \exists \delta > 0. \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). |f(x)| \leq c |g(x)|) \Longleftrightarrow f \in O(g)
                                                                                                                                                          f\geq g אינטואיטיבית .(g\in O\left(f
ight))\Longleftrightarrow f\in\Omega\left(g
ight)
                                                                                                                                    f < g אינטואיטיבית .\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\right) \Longleftrightarrow f \in o\left(g\right) • f > g אינטואיטיבית .\left(g \in o\left(f\right)\right) \Longleftrightarrow f \in \omega\left(g\right) •
                                                                                                                          f=g אינטואיטיבית .(f\in O\left(g
ight)\wedge f\in \Omega\left(g
ight))\Longleftrightarrow f\in\Theta\left(g
ight)
                                                                                                 אינטואיטיבית f=g בדיוק של קבועים .\left(\lim_{x	o x_0}rac{f(x)}{g(x)}=1
ight)\Longleftrightarrow f\sim g
                                                                                             .\left(rac{f\left(x
ight)}{g\left(x
ight)}\xrightarrow[x
ight.]{c}c
eq0
ight)\Longrightarrow f\in\Theta\left(g
ight) אזי x_{0}\in I ותהא f,g\in\mathbb{R}^{I} למה: תהיינה
                                                  \exists k \in \{0\dots n\}.f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) מזדהה עד סדר: f,g \in \mathbb{R}^I גזירות פעמים על מזדהה עד סדר:
                                                                                              f-g\in o\left((x-x_0)^n
ight) אזי x_0 אזי סדר f,g\in\mathbb{R}^{(a,b)} טענה: תהיינה
                                   (h^{(k)}(x_0)=0)גירה n פעמים על n וכן h\in o((x-x_0)^n) וכן n וכן h\in \mathbb{R}^I אזי אזי h\in o((x-x_0)^n)
                        x_0 על סדר על f עד סדר עם p\in\mathbb{R}_n\left[x
ight]\setminus\mathbb{R}_{n-1}\left[x
ight] אזי אזירה f\in\mathbb{R}^I עד סדר על סיילור: תהא
                                                                                                                 .ig((x-x_0)^kig)^{(j)}(x_0)= egin{cases} j! & j=k \ 0 & else \end{cases}אזי א x_0\in\mathbb{R} ותהא k\in\mathbb{N} למה: יהי
                                     x_0 על סדר n עד סדר על f עזירה עם טענה: תהא על f \in \mathbb{R}^I אזי קיים ויחיד פולינום טיילור שמזדהה עם אזירה f \in \mathbb{R}^I
                                      P_n\left(x
ight) = \sum_{k=0}^n rac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \left(x-x_0
ight)^k אזי פולינום הטיילור הוא f\in\mathbb{R}^I גזירה מעמים על סענה: תהא
                                                                                                              R_n\left(x
ight)=f\left(x
ight)-P_n\left(x
ight) אזי איי פעמים על מעמים n גזירה f\in\mathbb{R}^I אארית: תהא
                                                                                                         R_n\left(x
ight)\in o\left(\left|x-x_0
ight|^n
ight) משפט פאנו: תהא f\in\mathbb{R}^I גזירה f\in\mathbb{R}^I משפט פאנו:
                                                                                  למה: תהא \forall k \in \{0\dots n\} . g^{(k)}\left(x_0\right)=0 פעמים המקיימת n+1 פעמים g\in\mathbb{R}^{(a,b)} אזי . \forall x\in(a,b) . \exists c\in\left(\min\left(x,x_0\right),\max\left(x,x_0\right)\right). g\left(x\right)=\frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}
                                                                                                                                    משפט השארית של לגרנז': תהא f \in \mathbb{R}^{(a,b)} משפט השארית של לגרנז': תהא
                                                                                                \forall x \in (a,b) . \exists c \in (\min(x,x_0), \max(x,x_0)) . R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}
                      . \forall x \in (a,b) \,. \left(\exists M \in \mathbb{R}. \forall k \in \mathbb{N}. \left|f^{(k)}\left(x\right)\right| < M\right) \Longrightarrow \left(R_n\left(x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0\right) אזי f \in C^\infty\left((a,b)\right) מסקנה: תהא
                               f\left(x
ight)=\sum_{k=0}^{\infty}rac{f^{\left(k
ight)}\left(x_{0}
ight)}{k!}\left(x-x_{0}
ight)^{k} אא לx\in\left(a,b
ight).R_{n}\left(x
ight)\xrightarrow[n
ightarrow\infty]{}0 עבורה f\in C^{\infty}\left(\left(a,b
ight)
ight) אא
                                                                         אזי \forall x \in (a,b) . \left|f^{(m)}\left(x
ight)
ight| < a_m סדרה המקיימת f \in C^{\infty}\left((a,b)
ight) אזי אזי f \in C^{\infty}\left((a,b)
ight)
                                                    \forall c \in \mathbb{R}. \left(\lim_{m \to \infty} \frac{a_m}{m!} c^m = 0\right) \Longrightarrow \left(\forall x \in \left[x_0 - c, x_0 + c\right]. f\left(x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \left(x - x_0\right)^k\right)
                                                \int_{0}^{\infty} \left(\cos\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) \wedge \left(\sin\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \wedge \left(e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}\right)
                                                                                                                                     משפט השארית של קושי: תהא f \in \mathbb{R}^{(a,b)} גזירה n+1 פעמים אזי
                                                                                  \exists x \in (a,b) \ \exists c \in (\min(x,x_0),\max(x,x_0)) \ . R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-x_0) \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ in } |x| < 1
                                                         טענה: תהא f^{(n+1)}\left(x_{0}
ight)
eq0 וכן \forall k\in\left\{ 0\ldots n
ight\} .f^{(k)}\left(x_{0}
ight)=0 המקיימת f\in C^{n+1}\left(\left(a,b
ight)
ight) אזי
                                                                                                                                                                      f אזי קיצון אזי אינה אזי n\in\mathbb{N}_{\mathrm{even}} אם •
```

אזי  $n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$  אזי  $\bullet$ 

 $(\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\right) \bullet$ 

 $\exists x,y \in I. \forall \alpha \in [0,1] . f\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \leq \alpha f\left(x\right) + (1-\alpha)f\left(y\right) \text{ המקיימת } f \in \mathbb{R}^I \text{ вацех биль } f \in \mathbb{R}^I \text{ вац$ 

- . אזי f אזי f''(x)>0 מתקיים  $x\in I$  אזי f
- . אזי f אזי f''(x) < 0 מתקיים  $x \in I$  אזי  $x \in I$  אם לכל

 $f \in C\left((a,b)
ight)$  אזי קמורה  $f \in \mathbb{R}^{(a,b)}$  עטענה: תהא