לוגיקה למדעי המחשב (0368-2170)

נכתב ע"י רון גולדמן
ע"פ הרצאות של פרופ' אלכסנדר רבינוביץ'

1 ביוני 2026

תוכן העניינים

1 תורת הפסוקים **2**

1.1 סינטקס 2

1.1.1 הגדרת שפת הפסוקים 2

1.1.2 אינדוקציה מבנית והגדרה אינדוקטיבית 2

1.1.3 משפט הקריאות היחידה 3

1.1.4 כללי חסכון בסוגריים 3

1.2 סמנטיקה 3

1.2.1 סביבה וערך אמת של נוסחה 3

1.2.2 מושגים סמנטיים בסיסיים 4

2 תורת ההוכחות **7**

2.1 פונקציות בוליאניות 7

2.2 מערכת הוכחה 7

2.2.1 מערכת ההוכחות של הילברט 8

2.2.1.1 כוחם של משפטים 9

2.2.2 הוכחת משפט השלמות 12

2.2.3 משפט הקומפקטיות 14

2.2.4 שימושים קומבינטוריים למשפט השלמות 14

3 לוגיקה מסדר ראשון **16**

3.1 סינטקס - תחביר 16

3.1.1 שמות עצם 16

3.1.2 נוסחאות 17

3.1.3 מופעים של משתנים 18

3.2 סמנטיקה - משמעות 19

3.2.1 מבנה 19

3.2.2 ערך אמת במבנה 19

3.2.2.1 ערך של שם עצם 19

3.2.2.2 ערך של נוסחה 19

3.3 איזומורפיזם 20

פרק 1

תורת הפסוקים

1.1 סינטקס

1.1.1 הגדרת שפת הפסוקים

הגדרה 1.1. קבוצת נוסחאות WFF היא קבוצת מחרוזות קטנה ביותר (ביחס להכלה) כך שמתקיים:

1. $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \text{WFF}$.
2. אם $\varphi,\psi \in \text{WFF}$ אזי $(\neg\varphi),(\varphi\vee\psi),(\varphi\wedge\psi),(\varphi\to\psi),(\varphi\leftrightarrow\psi) \in \text{WFF}$.

טענה 1.1. קיימת קבוצה כזאת WFF.

סיבה. $\text{WFF} = \bigcap_{\{p_i\}\subseteq X \text{ closed under connectives}} X$. ■

1.1.2 אינדוקציה מבנית והגדרה אינדוקטיבית

אלגוריתם 1.1. תהא P תכונה, אזי כדי להוכיח ש-$\text{WFF} \subseteq P$, כלומר לכל נוסחה מתקיימת ה,\lnot\תכונה, מספיק להוכיח:

- **בסיס:** לכל $i\in\mathbb{N}$, $p_i \in P$.
- **צעד:** אם $\varphi,\psi\in P$, אזי גם $(\neg\varphi),(\varphi\vee\psi),(\varphi\wedge\psi),(\varphi\to\psi),(\varphi\leftrightarrow\psi)\in P$.

הגדרה 1.2. סדרת מחרוזות $\langle\varphi_1,\dots,\varphi_n\rangle$ נקראת **סדרת יצירה** עבור מחרוזת φ אם $\varphi_n=\varphi$ ולכל $i\in[n]$ מתקיים אחד מהבאים:

1. $\varphi_i \in \{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
2. קיימים $j,k\in[i-1]$ כך ש-$\varphi_i \in \{(\varphi_j * \varphi_k)\}_{*\in\{\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}} \uplus \{(\neg\varphi_j)\}$.

משפט 1.1. למחרוזת φ יש סדרת יצירה אם ורק אם $\varphi\in\text{WFF}$.

הגדרה 1.3 (הגדרה באינדוקציה)**.** תהינה $g:\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}\to D$, $h_\neg : D\to D$, $\{h_*\}_{*\in\{\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}} \subseteq D\times D\to D$, נגדיר את $F:\text{WFF}\to D$ על ידי

$$\begin{cases} F(p_i) \triangleq g(p_i) \\ F((\varphi*\psi)) \triangleq h_*(F(\varphi),F(\psi)) \\ F((\neg\psi)) \triangleq h_\neg(F(\psi)) \end{cases}$$

1.1.3 משפט הקריאות היחידה

משפט 1.2 (קריאות יחידה)**.**

1. קיים אלגוריתם $\mathcal{A}$ כך שלכל מחרוזת α מתקיים $\mathcal{A}(\alpha) = 1$ אם ורק אם $\alpha \in \text{WFF}$.
2. לכל $\alpha \in \text{WFF}$ בדיוק אחד מהבאים מתקיים:
   (א) קיים ויחיד $i \in \mathbb{N}$ כך ש-$\alpha = p_i$.
   (ב) קיימים ויחידים $\beta, \gamma \in \text{WFF}$ ו-$* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \rightarrow\}$ כך ש-$\alpha = (\beta * \gamma)$.
   (ג) קיים ויחיד $\beta \in \text{WFF}$ כך ש-$\alpha = (\neg\beta)$.

הגדרה 1.4 (הצבה)**.** נגדיר **הצבה** של נוסחאות $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \text{WFF}$ במקום משתנים $p_1, \ldots, p_n$ בפסוק $\varphi \in \text{WFF}$ באינדוקציה מבנית

$$\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\} \triangleq \begin{cases} \alpha_i, & \varphi = p_i \\ q, & \varphi = q \in \{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \\ \left(\varphi_1\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\} * \varphi_2\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\}\right), & \varphi = (\varphi_1 * \varphi_2) \\ \left(\neg\psi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\}\right), & \varphi = (\neg\psi) \end{cases}$$

טענה 1.2. לכל $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varphi \in \text{WFF}$, משתנים $p_1, \ldots, p_n$, $\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\} \in \text{WFF}$.

1.1.4 כללי חסכון בסוגריים

1. אין סוגריים חיצוניים, וכן סוגריים מסביב לשלילה $(\neg x) \mapsto \neg x$.
2. סדר קדימויות:
   (א) $\neg$
   (ב) $\vee, \wedge$
   (ג) $\rightarrow$
   (ד) $\leftrightarrow$

דוגמה 1.1. נרשום את הפסוקים הבאים פורמלית:

1. $\neg p_1 \vee p_2 = (\neg p_1 \vee p_2) = ((\neg p_1) \vee p_2)$
2. $p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3 = (p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3) = (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$

1.2 סמנטיקה

1.2.1 סביבה וערך אמת של נוסחה

הגדרה 1.5. סביבה היא פונקציה מקבוצת המשתנים לערכי האמת שלהם $\rho : \{p_i\} \rightarrow \{T, F\}$.

הגדרה 1.6. ערך אמת של נוסחה α בסביבה ρ מוגדר באינדוקציה מבנית:

$$\begin{cases} [\![p]\!]_\rho \triangleq \rho(p) \\ [\![\varphi_1 * \varphi_2]\!]_\rho \triangleq \mathrm{TT}_*\Big([\![\varphi_1]\!]_\rho, [\![\varphi_2]\!]_\rho\Big) \\ [\![\neg\varphi]\!] \triangleq \mathrm{TT}_\neg\Big([\![\varphi]\!]_\rho\Big) \end{cases}$$

כאשר טבלאות האמת נתונות על ידי:

x	$\mathrm{TT}_\neg(x)$
F	T
T	F

x	y	$\mathrm{TT}_\leftrightarrow(x,y)$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

x	y	$\mathrm{TT}_\rightarrow(x,y)$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

x	y	$\mathrm{TT}_\wedge(x,y)$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

x	y	$\mathrm{TT}_\vee(x,y)$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

הגדרה 1.7. נגדיר את **קבוצת המשתנים** של פסוק באינדוקציה מבנית:

$$\begin{cases} \mathrm{Var}(p) \triangleq \{p\} \\ \mathrm{Var}(\varphi * \psi) \triangleq \mathrm{Var}(\varphi) \cup \mathrm{Var}(\psi) \\ \mathrm{Var}(\neg\varphi) \triangleq \mathrm{Var}(\varphi) \end{cases}$$

משפט 1.3 (משפט התלות הסופית)**.** תהינא $\varphi \in \mathrm{WFF}$ ותהינא ρ_1, ρ_2 סביבות כך ש-$\rho_1|_{\mathrm{Var}(\varphi)} = \rho_2|_{\mathrm{Var}(\varphi)}$, אזי $[\![\varphi]\!]_{\rho_1} = [\![\varphi]\!]_{\rho_2}$.

הגדרה 1.8 (עדכון סביבה)**.** תהינא סביבה ρ, $x_1, \ldots, x_n \in \{T, F\}$ ו-$p_1, \ldots, p_n$ משתנים.
נגדיר **סביבה מעודכנת** $\rho' = \rho\left[\frac{x_1}{p_1}, \ldots, \frac{x_n}{p_n}\right]$ כך ש-$\rho'|_{\{p_1,\ldots,p_n\}^c} = \rho|_{\{p_1,\ldots,p_n\}^c}$ ולכל $i \in [n]$, $\rho'(p_i) = x_i$.

משפט 1.4 (קשר בין הצבה לעדכון סביבות)**.** לכל $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varphi \in \mathrm{WFF}$, משתניס $p_1, \ldots, p_n$, וסביבה ρ,

$$\left[\!\!\left[\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\}\right]\!\!\right]_\rho = [\![\varphi]\!]_{\rho\left[\frac{[\![\alpha_1]\!]_\rho}{p_n}, \ldots, \frac{[\![\alpha_n]\!]_\rho}{p_n}\right]}$$

1.2.2 מושגים סמנטיים בסיסיים

הגדרה 1.9. תהינא $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{WFF}, \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ ו-ρ סביבה:

1. נאמר כי ρ **מספקת** פסוק φ אם $[\![\varphi]\!]_\rho = T$.
2. נאמר כי φ **ספיקה** אם קיימת סביבה ν שמספקת את φ.
3. נאמר כי φ **טאוטולוגיה** אם כל סביבה ν מספקת את φ.
4. נאמר כי φ היא **סתירה** אם אין סביבה ν שמספקת את φ.
5. נאמר כי φ_1 **שקולה** ל-φ_2 ונסמן $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ אם לכל סביבה ν מתקיים $[\![\varphi_1]\!]_\nu = [\![\varphi_2]\!]_\nu$.
6. נאמר כי ρ **מספקת** קבוצת נוסחאות Γ אם לכל $\gamma \in \Gamma$, ρ מספקת את γ.
7. קבוצת נוסחאות Γ תקרא **ספיקה** אם קיימת סביבה ν שמספקת את Γ.

8. נאמר כי φ **נובעת סמנטית** מ-Γ ונסמן $\Gamma \models \varphi$ אם לכל סביבה ν שמספקת את Γ, ν מספקת את φ.

משפט 1.5. תהינא $\psi, \varphi \in \text{WFF}, \Gamma \subseteq \text{WFF}$, אזי:

1. ψ טאוטולוגיה אם ורק אם $\neg\psi$ סתירה.
2. $\Gamma \models \varphi$ אם ורק אם $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ לא ספיקה.
3. φ לא ספיקה אם ורק אם φ סתירה.
4. אם $|\Gamma| < \infty$ אזי Γ ספיקה אם ורק אם $\bigwedge_{\gamma\in\Gamma}\gamma$ ספיקה.
5. $\{\varphi\} \models \psi$ אם ורק אם $\varphi \to \psi$ טאוטולוגיה.
6. φ טאוטולוגיה אם ורק אם $\emptyset \models \varphi$.

משפט 1.6. תהינא $\varphi, \psi, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{WFF}$, ו-$p_1, \dots, p_n$ משתנים, כך ש-$\varphi \equiv \psi$, אזי $\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \dots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\} \equiv \psi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \dots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\}$.

משפט 1.7. תהינא $\alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n \in \text{WFF}$, ו-$p_1, \dots, p_n$ משתנים, כך ש-$\varphi_i \equiv \psi_i$ לכל $i \in [n]$, אזי $\alpha\left\{\frac{\varphi_1}{p_n}, \dots, \frac{\varphi_n}{p_n}\right\} \equiv \alpha\left\{\frac{\psi_1}{p_n}, \dots, \frac{\psi_n}{p_n}\right\}$.

טענה 1.3 (שקילויות חשובות). תהינא $\alpha, \beta, \gamma \in \text{WFF}$ אזי:

1. לכל $* \in \{\vee, \wedge\}$:
   (א) **אסוציאטיביות:** $\alpha * (\beta * \gamma) \equiv (\alpha * \beta) * \gamma$.
   (ב) **קומוטטיביות:** $\alpha * \beta \equiv \beta * \alpha$.
2. **דיסטריבוטיביות:**
$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma), \qquad \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$$
3. $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$.
4. **דה-מורגן:**
$$\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta, \qquad \neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta.$$

משפט 1.8. קיימים אלגוריתמים $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} : \text{WFF} \to \{0,1\}, \mathcal{D} : \text{WFF}^2 \to \{0,1\}, \mathcal{E} : \mathcal{P}(\text{WFF}) \times \text{WFF} \to \{0,1\}$ כך שלכל $\varphi, \psi \in \text{WFF}, \Gamma \subseteq \text{WFF}$:

1. $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ אם ורק אם φ ספיקה.
2. $\mathcal{B}(\varphi) = 1$ אם ורק אם φ טאוטולוגיה.
3. $\mathcal{C}(\varphi) = 1$ אם ורק אם φ סתירה.
4. $\mathcal{D}(\varphi, \psi) = 1$ אם ורק אם $\varphi \equiv \psi$.

5. $\mathcal{E}(\Gamma, \varphi) = 1$ אם ורק אם $\Gamma \models \varphi$.

בעיה 1.1 (בעיית הספיקות). נגדיר את בעיית הספיקות (Boolean Satisfiability Problem - SAT).
קלט: נוסחא $\varphi \in \text{WFF}$ מעל משתנים $\text{Var}(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
שאלה: האם φ ספיקה?

פרק 2

תורת ההוכחות

2.1 פונקציות בוליאניות

הגדרה 2.1. קבוצת משתנים $\Delta \subseteq \{p_i\}$ נקראת **תמיכה/תומכת** של פונקציה $F : (\{p_i\} \to \{T, F\}) \to \{T, F\}$ אם לכל ρ_1, ρ_2 כך ש-$\rho_1|_\Delta = \rho_2|_\Delta$ מתקיים $F(\rho_1) = F(\rho_2)$.
נאמר כי ל-F יש **תומך סופי** אם קיימת Δ סופית שתומכת ב-F.

משפט 2.1. לכל פונקציה F עם תומך סופי יש נוסחה φ כך ש-$F(\rho) = [\![\varphi]\!]_\rho$.

הגדרה 2.2. עבור קבוצת קשרים $\Sigma \subseteq \{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ נגדיר את $\text{WFF}_\Sigma \triangleq \text{WFF} \cap (\{p_i\} \uplus \{(,)\} \uplus \Sigma)^*$.

הגדרה 2.3. קבוצת קשרים $\Sigma \subseteq \{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ נקראת **שלמה פונקציונלית** אם לכל פונקציה F בעלת תומך סופי יש נוסחה $\varphi \in \text{WFF}_\Sigma$ כך ש-$[\![\varphi]\!] = F$.

טענה 2.1. הקבוצות הבאות שלמות פונקציונלית:

1. $\{\wedge, \vee, \neg\}$.
2. $\{\wedge, \neg\}$.
3. $\{\to, \neg\}$.

2.2 מערכת הוכחה

הערה 2.1. בהרצאה ראינו הגדרה פחות פורמלית. זאת הגדרה פורמלית (לפי אלכס).

הגדרה 2.4 (מערכת הוכחה)**.** רביעייה $(\Sigma, X, \mathcal{A}, I)$ כאשר:

- **<u>אלפבית:</u>** Σ
- **<u>נוסחאות:</u>** $X \subseteq \Sigma^*$
- **<u>אקסיומות:</u>** $\mathcal{A} \subseteq X$
- **<u>כללי היסק:</u>** $I = \{R_i\}_i$ כך שלכל i, יש n_i עבורו $I \subseteq X^{n_i} \times X$

הגדרה 2.5. הוכחה במערכת S של נוסחה φ מקבוצת נוסחאות Γ היא סדרת נוסחאות $\langle\varphi_1,\dots,\varphi_k\rangle$ כך ש-$\varphi_k=\varphi$ וגם לכל $k\geq i$ אחד מהבאים מתקיים:

1. φ_i אקסיומה
2. $\varphi_i\in\Gamma$
3. קיימים $i_1,\dots,i_\ell<i$ וכלל היסק R כך ש-$\frac{\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_\ell}}{\varphi_i}\in R$.

אם ל-φ יש הוכחה מ-Γ במערכת S נסמן $\Gamma\vdash_S\varphi$.

הגדרה 2.6. נאמר כי φ הוא **משפט** ב-S אם $\emptyset\vdash_S\varphi$.

טענה 2.2 (תכונות של יכיחות). תהא S מערכת הוכחה, אזי:

1. **מונוטוניות:** אם $\Gamma\vdash_S\varphi$ ו-$\Gamma\subseteq\Delta$ אזי $\Delta\vdash_S\varphi$.
2. **קומפקטיות:** אם $\Gamma\vdash_S\varphi$ אזי קיימת $\Gamma'\subseteq\Gamma$ סופית עבורה $\Gamma'\vdash_S\varphi$.
3. **טרנזיטיביות:** אם $\Gamma\vdash_S A,\Gamma\cup\{A\}\vdash_S B$ אזי $\Gamma\vdash_S B$.

2.2.1 מערכת ההוכחות של הילברט

הגדרה 2.7 (מערכת ההוכחות של הילברט)**.** $\mathrm{HPC}=(\Sigma,X,\mathcal{A},I)$ כאשר:

- $\Sigma=\{\to,\neg,(,)\}\cup\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
- $X=\mathrm{WFF}\cap\Sigma^*$.
- $\mathcal{A}=\{A_1(A,B),A_2(A,B,C),A_3(A,B)\}_{A,B,C\in X}$ כאשר:

$$\begin{aligned}A_1(A,B)&=A\to(B\to A)\\A_2(A,B,C)&=(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))\\A_3(A,B)&=(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B)\end{aligned}$$

- $I=\{R\}$ modus ponens, $R\frac{A,A\to B}{B}$.

טענה 2.3. $A\to A$ משפט ב-HPC.

משפט 2.2 (שלמות HPC)**.** $\Gamma\models\varphi$ אם ורק אם $\Gamma\vdash_{\mathrm{HPC}}\varphi$.

מסקנה 2.1. φ היא טאוטולוגיה אם ורק אם היא משפט ב-HPC.

משפט 2.3 (נאותות HPC)**.** אם $\Gamma\vdash_{\mathrm{HPC}}\varphi$ אזי $\Gamma\models\varphi$.

סימון 2.1. $\vdash$ במקום $\vdash_{\mathrm{HPC}}$.

2.2.1.1 כוחם של משפטים

משפט 2.4 (דדוקציה)**.** אם $\Gamma, A \vdash B$ אזי $\Gamma \vdash A \to B$.

הוכחה. באינדוקציה על אורך ההוכחה ב-HPC.
בסיס: אם יש הוכחה באורך 1 מ-Γ, A, אזי אחד מהבאים מתקיים:

1. B אקסיומה. עבור $A \leftarrow B, B \leftarrow A$ באקסיומה 1:

$$B \to (A \to B)$$

B אקסיומה, ולכן מMP, נובע כי כי $A \to B$, ולכן בפרט $\Gamma \vdash A \to B$.

2. $B \in \Gamma$. עבור $A \leftarrow B, B \leftarrow A$ באקסיומה 1:

$$B \to (A \to B)$$

$B \in \Gamma$, ולכן מMP, נובע כי כי $A \to B$, ולכן בפרט $\Gamma \vdash A \to B$.

3. $B \equiv A$. וראינו כי $A \to A = A \to B$ משפט ב-HPC, ולכן גם $\Gamma \vdash A \to B$.

צעד: נניח כי נכון עבור הוכחה בגודל $< k+1$ ב-HPC.
תהא $\varphi_1, \dots \varphi_k, \varphi_{k+1} \equiv B$ הוכחה של B מ-Γ, A.
לפי ההגדרה, מתקיים אחד מהבאים:

1. φ_{k+1} אקסיומה
2. $\varphi_{k+1} \in \Gamma$
3. $A \equiv \varphi_{k+1}$
4. קיימים $i, m \leq k$ כך ש-$\varphi_m = \varphi_i \to \varphi_{k+1}$ ואז φ_{k+1} מתקבל מ-MP על φ_i, φ_m.

עבור מקרים 1-3 הוכחנו כבר בבסיס למעשה. במקרה 4, לכן $\varphi_m \equiv \varphi_i \to B$. לפי הנחת האינדוקציה

$1. A \to (\varphi_i \to B)$	Assumption
$2. A \to \varphi_i$	Assumption
$3. (A \to (\varphi_i \to B)) \to ((A \to \varphi_i) \to (A \to B))$	Ax2 $: A \leftarrow A, B \leftarrow \varphi_i, C \leftarrow B$
$4. (A \to \varphi_i) \to (A \to B)$	MP $: 1, 3$
$5. A \to B$	MP $: 2, 4$

■

טענה 2.4. $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

הוכחה. נראה כי $A \to B, B \to C, A \vdash C$ ואז ממשפט הדדוקציה נקבל את הדרוש.

$1. A \to B$	Assumption
$2. B \to C$	Assumption
$3. A$	Assumption
$4. B$	MP :$1, 3$
$5. C$	MP :$2, 4$

■

טענה 2.5. $\emptyset \vdash (\neg A \to (A \to B))$.

הוכחה. ראשית נוכיח כי $\neg A, A \vdash B$.

$1. \neg A$	Assumption
$2. A$	Assumption
$3. (A \to (\neg B \to A))$	Ax1
$4. (\neg A \to (\neg B \to \neg A))$	Ax1
$5. \neg B \to A$	MP 2,3
$6. \neg B \to \neg A$	MP 1,4
$7. (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$	Ax4
$8. ((\neg B \to A) \to B)$	MP 6,7
$9. B$	MP 5,8

■

משפט 2.5 (הוכחה ב-HPC לפי מקרים). אם $\Gamma, A \vdash B$ ו-$\Gamma, \neg A \vdash B$ אזי $\Gamma \vdash B$.

הוכחה. $\Gamma, A \vdash B$ ולכן לפי משפט הדדוקציה $\Gamma \vdash A \to B$.
$\Gamma, \neg A \vdash B$ ולכן לפי משפט הדדוקציה $\Gamma \vdash \neg A \to B$. לכן הוכחה ב-$\Gamma$ היא:

$1. A \to B$	Deduction
$2. \neg A \to B$	Deduction
$3. (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$	Moodle on Page the from 8
$4. (\neg A \to B) \to B$	1,8 MP
$5. B$	1,4 MP

■

הגדרה 2.8 (עקביות)**.** תהי קבוצת נוסחאות Γ.

1. Γ היא **עקבית** ב-HPC אם קיימת נוסחה שלא ניתנת להוכחה מ-Γ.
2. Γ היא **לא עקבית** אם כל נוסחא ניתנת להוכחה ממנה.

טענה 2.6. Γ לא עקבית אם ורק אם יש A כך ש- $\Gamma \vdash A$ וגם $\Gamma \vdash \neg A$.

הוכחה. הכיוון $\Longleftarrow$ מיידי. בכיוון $\Longrightarrow$, לכל B:

$1.A$	Assumption
$2.\neg A$	Assumption
$3.\neg A \to (A \to B)$	2.5 Claim
$4.A \to B$	2,3 MP
$5.B$	1,4 MP

לכן Γ לא עקבית. ■

הגדרה 2.9. Γ היא **עקבית מקסימלית** (Maximal Consistent) ב-HPC אם Γ עקבית ולכל Δ עבורה $\Gamma \subset \Delta$ מתקיים כי Δ לא עקבית.

טענה 2.7 (תכונות של עקביות מקסימלית). תהא Γ עקבית מקסימלית. אזי:

1. Γ סגורה תחת יכיחות, אם $\Gamma \vdash A$ אזי $\Gamma \in A$.
2. לכל A, $A \in \Gamma$ או $\neg A \in \Gamma$.
3. $A \to B \in \Gamma$ אם ורק אם $A \notin \Gamma$ או $B \in \Gamma$.

הוכחה. מתקיים:

1. נניח כי $A \notin \Gamma$ ונראה ש-$\Gamma \cup \{A\}$ עקבית. תהא B כך ש-$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, נתון $\Gamma \vdash A$ ולכן $\Gamma \vdash B$.
2. נניח $A \notin \Gamma$, אזי $\Gamma \cup \{A\}$ לא עקבית. אם $\neg A \notin \Gamma$ אזי $\Gamma \cup \{\neg A\}$ לא עקבית. אזי לכל B,

$1.\Gamma, A \vdash B$	Inconsistent
$2.\Gamma, \neg A \vdash B$	Inconsistent
$3.\Gamma \vdash B$	1,2 Theorem Cases by Proof

3. $\underline{\Longleftarrow}$: אם $A \to B \in \Gamma$. אם $A \notin \Gamma$ סיימנו, אחרת $A \in \Gamma$. לכן, מ-MP ותכונה 1, $B \in \Gamma$. $\underline{\Longrightarrow}$: אם $B \in \Gamma$, אזי

$1.B$	Assumption
$2.B \to (A \to B)$	Ax1
$3.A \to B$	1,2 MP

אם $A \notin \Gamma$, אזי

$1.\neg A \in \Gamma$	2 Property
$2.\neg A \to (A \to B)$	Moodle on Page the from 6
$3.A \to B$	1,2 MP

■

2.2.2 הוכחת משפט השלמות

משפט 2.6 (שלמות - כיוון קשה). אם $\Gamma \models \varphi$ אזי $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \varphi$.

משפט 2.7 (שלמות - גרסה לספיקות). אם Γ עקבית אזי Γ ספיקה.

משפט 2.8. אם Γ לא ספיקה אזי Γ לא עקבית.

טענה 2.8. אם משפט 2.7 מתקיים אזי גם משפט 2.6

הוכחה. נניח כי משפט 2.7 מתקיים. נניח $\Gamma \models \varphi$, צ"ל כי $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \varphi$.
מתקיים כי $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ לא ספיקה ולכן $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ לא עקבית. מכאן כי $\Gamma, \neg\varphi \vdash_{\text{HPC}} \varphi$.
גם כן $\Gamma, \varphi \vdash_{\text{HPC}} \varphi$, ולכן ממשפט הפרדה למקרים $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \varphi$. ■

למה 2.1. אם Γ עקבית אזי קיימת $\Delta \supseteq \Gamma$ כך ש-Δ עקבית מקסימלית.

למה 2.2. אם Γ עקבית מקסימלית אזי Γ ספיקה.

הוכחה. נניח כי Γ עקבית מקסימלית, צ"ל כי Γ ספיקה, כלומר להגדיר $\rho_\Gamma : \{p_i\}_i \to \{T, F\}$ שתספק את Γ. נגדיר:

$$\rho_\Gamma(p_i) = \begin{cases} T, & p_i \in \Gamma \\ F, & \neg p_i \in \Gamma \end{cases}$$

צריך להוכיח כי לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים כי $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$.
נוכיח באינדוקציה מבנית את הטענה הבאה:

טענה 2.9. $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\varphi \in \Gamma$.

<u>בסיס:</u> φ משתנה ולכן נובע מיידית מהגדרת ρ_Γ.
<u>צעד:</u> נניח כי $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\varphi \in \Gamma$ וגם $[\![\psi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\psi \in \Gamma$.
שלילה - צ"ל כי $[\![\neg\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\neg\varphi \in \Gamma$.
<u>$\Longleftarrow$:</u> אם $[\![\neg\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אזי $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = F$ ולכן מההנחה, $\varphi \notin \Gamma$ ומכאן מתכונות עקבית מקסימלית $\neg\varphi \in \Gamma$.
<u>$\Longrightarrow$:</u> אם $\neg\varphi \in \Gamma$ אזי $\Gamma \vdash \neg\varphi$ ולכן מהעקביות לא מתקיים $\Gamma \vdash \varphi$ ובפרט $\varphi \notin \Gamma$. לכן מההנחה, $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = F$ ומכאן כי $[\![\neg\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$.
גרירה - צ"ל כי $[\![\varphi \to \psi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\varphi \to \psi \in \Gamma$.
<u>$\Longleftarrow$:</u> אם $[\![\varphi \to \psi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אזי:

1. $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = F$ ואז $\varphi \notin \Gamma$.

2. $[\![\psi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ ואז $\psi \in \Gamma$.

ובכל אחד מהמקרים נקבל מתכונה 3 כי $\varphi \to \psi \in \Gamma$.
$\Longrightarrow$: אם $\varphi \to \psi \in \Gamma$ אזי לפי תכונה 3, $\varphi \notin \Gamma$ או $\psi \in \Gamma$ ואז מההנחה

$$[\![\varphi \to \psi]\!]_{\rho_\Gamma} = \mathrm{TT}_{\to}\Big([\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma}, [\![\psi]\!]_{\rho_\Gamma}\Big) = T$$

■

הוכחת למה 2.1. נוכיח כי כל קבוצה עקבית מוכלת בקבוצה עקבית מקסימלית. תהא $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ מניה של כל הנוסחאות ב-HPC. **נגדיר** סדרה של קבוצות נוסחאות

$$\Gamma_0 := \Gamma$$
$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \begin{cases} \{A_n\}, & \Gamma_n \cup \{A_n\}\text{consistent is} \\ \{\neg A_n\} & \text{else} \end{cases}$$

טענה 2.10. לכל $n \in \mathbb{N}$, Γ_n היא עקבית.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n.
בסיס: $\Gamma_0 = \Gamma$ היא עקבית.
צעד: נניח כי Γ_n עקבית, אם $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$ אזי מההגדרה היא עקבית.
אם $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$, אזי $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ לא עקבית ומכאן כי $\Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$ עקבית. ■

טענה 2.11. לא קיימת Δ עקבית כך ש- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \subset \Delta$.

הוכחה. נניח בשלילה כי קיימת Δ עקבית כך ש-$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \subset \Delta$. אזי יש $k \in \mathbb{N}$ עבורו $A_k \in \Delta$ אבל $A_k \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$.
בפרט, $A_k \notin \Gamma_k$ ולכן $\Gamma_{k-1} \cup \{A_k\}$ לא עקבית. לכן מטענה 2.10, $\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \cup \{\neg A_k\}$ עקבית, ובפרט $\neg A_k \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \subset \Delta$. אזי $A_k, \neg A_k \in \Delta$ ובפרט $\Delta \vdash A_k, \Delta \vdash \neg A_k$ וזו סתירה לעקביות Δ. ■

טענה 2.12. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ היא עקבית.

הוכחה. נניח בשלילה כי $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ לא עקבית, אזי קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \vdash A_k$ וגם $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \vdash \neg A_k$.
מקומפקטיות, יש $\Delta_1, \Delta_2 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ סופיות כך ש-$\Delta_1 \vdash A_k, \Delta_2 \vdash \neg A_k$, ובפרט, מהסופיות וההכלה בין ה-Γ_n, יש $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}$ כך ש-$\Delta_1 \subseteq \Gamma_{\ell_1}, \Delta_2 \subseteq \Gamma_{\ell_2}$ ולכן מטרנזיטיביות $\Gamma_{\ell_1} \vdash A_k, \Gamma_{\ell_2} \vdash \neg A_k$. ניקח $\ell = \max\{\ell_1, \ell_2\}$ ונקבל כי $\Gamma_\ell \vdash A_k, \Gamma_\ell \vdash \neg A_k$ וזו סתירה לעקביות של Γ_ℓ מטענה 2.10. ■

■

הערה 2.2. בכיתה אלכס הוכיח את הטענות אך אלו שכאן הן שלי.

2.2.3 משפט הקומפקטיות

משפט 2.9 (שלמות). $\Gamma \models A$ אם ורק אם $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} A$.

משפט 2.10 (קומפקטיות).

1. אם $\Gamma \models A$ אזי יש תת קבוצה סופית $\Delta \subseteq \Gamma$ כך ש-$\Delta \models A$.
2. אם כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה, אזי Γ ספיקה.

הוכחה.

1. נניח $\Gamma \models A$, אזי לפי משפט השלמות $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} A$.
לפי קומפקטיות של יכיחות יש קבוצה סופית $\Delta \subseteq \Gamma$ כך ש-$\Delta \vdash_{\text{HPC}} A$.
לכן ממשפט הנאותות $\Delta \models A$.
2. מתקבל מהגרסה הבאה של משפט השלמות:

משפט 2.11. Γ ספיקה אם ורק אם Γ עקבית ב-HPC.

■

2.2.4 שימושים קומבינטוריים למשפט השלמות

הגדרה 2.10. צביעה ב-k צמתים של גרף $G = (V, E)$ היא פונקציה $\text{col} : V \to [k]$, נאמר כי היא חוקית אם לכל $e = \{u, v\} \in E$ מתקיים כי $\text{col}(u) \neq \text{col}(v)$.
אם ל-G קיימת k צביעה חוקית נאמר כי הוא **k-צביע**.

משפט 2.12. יהי $G = (V, E)$ גרף. אם כל תת-גרף סופי של G הוא k-צביע, אזי G הוא k-צביע.

הוכחה. נצרין צביעה של גרף וצביעה חוקית של גרף, נשתמש במשתנים $\{p_{v,i}\}_{v \in V, i \in [k]}$.
<u>צביעה של צומת:</u> לכל $v \in V$ נגדיר

$$\psi_v = \left(\bigvee_{i=1}^{k} p_{v,i} \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \left(p_{v,i} \to \neg \left(\bigvee_{j \in [k] \setminus \{i\}} p_{v,j} \right) \right)$$

ψ_v ספיק בסביבה ρ אם ורק אם לכל ρ נותנת ערך T בדיוק לאחד מהמשתנים $\rho_{v,1}, \ldots, \rho_{v,k}$.
<u>צביעה חוקית:</u> אם $\{u, v\} \in E$ אזי u, v צבועים בצבעים שונים. לכל $e = \{u, v\} \in E$ נגדיר

$$\varphi_e = \bigwedge_{i=1}^{k} (p_{v,i} \to \neg p_{u,i}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} (p_{u,i} \to \neg p_{v,i})$$

לכל צביעה col נגדיר סביבה ρ_{col},

$$\rho_{\text{col}}(p_{v,i}) = \begin{cases} T, & \text{col}(v) = i \\ F, & \text{col}(v) \neq i \end{cases}$$

אם col **צביעה חוקית** אזי ρ_{col} תספק את כל הנוסחאות $\Gamma_G = \{\psi_v\}_{v \in V} \cup \{\varphi_e\}_{e \in E}$.

עבור כל סביבה ρ שספקת את Γ, נגדיר צביעה $\mathrm{col}_\rho : V \to [k]$:

$$\mathrm{col}_\rho(v) = \iota\{\, i \in [k] : \ \rho(p_{v,i}) = T \,\}$$

אם סביבה ρ מספקת את Γ_G אזי col_ρ היא חוקית. לכל גרף G התאמנו קבוצת נוסחאות Γ_G כך ש-G k-צביע אם ורק אם Γ_G ספיקה.
כעת נניח כי כל תת גרף סופי של G הוא k-צביע, ולכן מספיק להראות שכל תת קבוצה של Γ_G ספיקה.
נניח $\Delta \subseteq \Gamma_G$ תת קבוצה סופית, בנוסחאות של Δ מספר סופי של צמתים, $U \subseteq V$.
נגדיר $H = G[U]$, אזי $\Delta \subseteq \Gamma_H$.
מההנחה H k-צביע ולכן Γ_H ספיקה. לכן משום ש-$\Delta \subseteq \Gamma_H$ אזי Δ ספיקה.
לכן לפי משפט הקומפקטיות Γ_G היא ספיקה ולכן G k-צביע. ■

פרק 3

לוגיקה מסדר ראשון

3.1 סינטקס - תחביר

הגדרה 3.1. מילון (vocabulary/signature) היא שלישייה $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ כאשר:

- $\mathcal{C}$ שמות קבועים,
- $\mathcal{R}$ - שמות יחסים וכמה ארגומנטים ליחס, כלומר איברים מהצורה (k, R) כך ש-R מייצג יחס k-מקומי,
- $\mathcal{F}$ - שמות פונקציות וכמה ארגומנטים לפונקציה, כלומר איברים מהצורה (k, f) כך ש-f מייצג פונקציה k-מקומית.

הגדרה 3.2. אלפבית מעל מילון $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ היא קבוצה A_Σ כך ש-

- הסימנים ב-Σ נמצאים ב-A_Σ,
- לאלפבית יש משתנים $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A_\Sigma$,
- הקשרים הבוליאניים באלפבית $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \subseteq A_\Sigma$,
- הכמתים באלפבית $\{\forall, \exists\} \subseteq A_\Sigma$,
- סימוני העזר באלפבית $\{(,), ,\} \subseteq A_\Sigma$.

3.1.1 שמות עצם

הגדרה 3.3. שמות העצם מעל מילון $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ היא קבוצה קטנה ביותר X כך שהבאים מתקיימים:

1. כל משתנה הוא שם עצם, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$,
2. כל קבוע הוא שם עצם, $\mathcal{C} \subseteq X$,
3. אם $(k, f) \in \mathcal{F}$ אזי לכל $t_1, \ldots, t_k \in X$, גם $f(t_1, \ldots, t_k) \in X$.

אלגוריתם 3.1 (אינדוקציה מבנית לשמות עצם). **כדי להראות** שלכל שם עצם יש תכונה P, מספיק להראות:

1. **בסיס:** לכל קבוע $c \in \mathcal{C}$ יש את התכונה P, ולכל משתנה $x \in \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ יש את התכונה P.
2. **צעד:** עבור כל סימן פונקציה k-מקומית f, $(k,f) \in \mathcal{F}$, אם $t_1,\dots,t_k$ שמות עצם המקיימים את תכונה P אזי גם $f(t_1,\dots,t_k)$ מקיים את התכונה P.

משפט 3.1 (קריאות יחידה לשמות עצם). יהי $\Sigma = (\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{F})$ מילון.

1. קיים אלגוריתם $\mathcal{A}$ שבודק האם מחרוזת היא שם עצם במילון Σ.
2. אם s שם עצם אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים:
   (א) $s \in \mathcal{C}$ קבוע,
   (ב) $s \in \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ משתנה,
   (ג) קיימים ויחידים $(k,f) \in \mathcal{F}$ פונקציה k-מקומית ו-$t_1,\dots,t_k$ שמות עצם כך ש-$s = f(t_1,\dots,t_k)$.

3.1.2 נוסחאות

הגדרה 3.4 (נוסחאות אטומיות). יהי $\Sigma = (\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{F})$ מילון. אם $(k,R) \in \mathcal{R}$ יחס k-מקומי במילון Σ, ו-$t_1,\dots,t_k$ שמות עצם, אזי $R(t_1,\dots,t_k)$ נקראת **נוסחה אטומית**.

הגדרה 3.5 (נוסחאות). יהי $\Sigma = (\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{F})$ מילון. **קבוצת הנוסחאות** היא קבוצה קטנה ביותר כך שמתקיים:

1. אם A נוסחה אטומית אזי היא נוסחה,
2. אם A,B נוסחאות אזי $(A\vee B),(A\wedge B),(A\to B),(A\leftrightarrow B),(\neg A)$ נוסחאות,
3. אם A נוסחה ו-x משתנה אזי $(\forall xA),(\exists xA)$ נוסחאות.

אלגוריתם 3.2 (אינדוקציה מבנית לנוסחאות). **כדי להראות** שלכל נוסחה יש תכונה P, מספיק להראות:

1. **בסיס:** לכל נוסחה אטומית יש תכונה P.
2. **צעד:** עבור כל נוסחאות A,B שמקיימות את תכונה P, גם $(A\vee B),(A\wedge B),(A\to B),(A\leftrightarrow B),(\neg A)$ ולכל משתנה x, $(\forall xA),(\exists xA)$ מתקיימת תכונה P.

משפט 3.2 (קריאות יחידה לנוסחאות). יהי $\Sigma = (\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{F})$ מילון.

1. קיים אלגוריתם $\mathcal{A}$ שבודק האם מחרוזת היא נוסחה במילון Σ.
2. אם s נוסחה אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים:
   (א) s נוסחה אטומית,
   (ב) קיימים ויחידים A,B נוסחאות ו-$* \in \{\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}$, כך ש-$s = (A * B)$,
   (ג) קיימת ויחידה נוסחה A כך שבדיוק אחד מהבאים מתקיים:
      i. $s = (\neg A)$,
      ii. קיימים ויחידים $\circledast \in \{\forall,\exists\}$ ומשתנה x כך ש-$s = (\circledast xA)$.

3.1.3 מופעים של משתנים

הגדרה 3.6. נגדיר מופעים של משתנים **קשורים(bound) חופשיים(free) וקושרים(binding)**, באינדוקציה מבנית:

1. כל מופע של משתנה בנוסחה אטומית נקרא **מופע חופשי**.
2. לכל $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ונוסחאות φ_1, φ_2, המופע של משתנה ב-$(\neg\varphi_1)/(\varphi_1 * \varphi_2)$ נורש מ-φ_1 או מ-φ_2 (מ-φ_1).
3. לכל נוסחה φ ו-$\circledast \in \{\exists, \forall\}$, לכל מופע של משתנה y, $x \not\equiv y$, סטטוס המופע שלו ב-$(\circledast x\varphi)$ נורש מ-φ, וכל מופע חופשי של x ב-φ נהיה מופע קשור ב-$(\circledast x\varphi)$. המופע של x ב-$(\circledast x\varphi)$ נקרא מופע קושר.

הגדרה 3.7. נגדיר **הצבה של נוסחה** באינדוקציה מבנית, לכל $x_1, \ldots, x_n$ משתנים ו-$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$שמות עצם.

1. לכל $(k, R) \in \mathcal{R}$, $t_1, \ldots, t_k$ שמות עצם,

$$R(t_1, \ldots, t_k)\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\} \triangleq R\left(t_1\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\}, \ldots, t_k\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\}\right)$$

2. לכל $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ו-A, B נוסחאות,

$$(A * B)\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\} \triangleq \left(A\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\} * B\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\}\right)$$

3. לכל נוסחה φ ומשתנה x, לכל$\circledast \in \{\forall, \exists\}$, נבחר z שלא מופיע ב-φ ושונה מ-$x_1, \ldots, x_n$, ואז

$$(\circledast x\varphi)\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\} \triangleq \left(\circledast z\varphi\left\{\frac{z}{x}\right\}\right)\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\}$$

הגדרה 3.8. נגדיר **שקילות שלד** באינדוקציה מבנית:

1. אם A, B נוסחאות אטומיות, אזי A, B שקולות שלד אם ורק אם $A = B$.
2. לכל $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, ונוסחאות A_1, A_2, B_1, B_2:
   (א) $(\neg A_1), (\neg B_1)$ שקולות אם ורק אם A_1, B_1 שקולות.
   (ב) $(A_1 * A_2), (B_1 * B_2)$ שקולות אם ורק אם A_1, A_2 שקולות ו-B_1, B_2 שקולות.
3. לכל $\circledast \in \{\forall, \exists\}$, משתנים x, y ונוסחאות A, B: $(\circledast xA), (\circledast yB)$ שקולות אם ורק אם קיים משתנה חדש z, כך ש-$A\left\{\frac{z}{x}\right\}, B\left\{\frac{z}{y}\right\}$ שקולות.

משפט 3.3. כל נוסחא שקולת שלד לנוסחא שבה כל המשתנים הקושרים שונים והם שונים מכל המופעים של המשתנים החופשיים.

3.2 סמנטיקה - משמעות

3.2.1 מבנה

הגדרה 3.9 (מבנה עבור מילון)**.** יהי $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ מילון, אזי **מבנה** זה זוג $\mathcal{M} = (D, I)$ כך שמתקיים:

- $D \neq \emptyset$ הנקראת **תחום**.
- **פירוש קבועים:** לכל $c \in \mathcal{C}$, מותאם איבר $c^{\mathcal{M}} \triangleq I(c) \in D$.
- **פירוש יחסים:** לכל שם יחס k-מקומי $(k, R) \in \mathcal{R}$, מותאם יחס $R^{\mathcal{M}} \triangleq I(k, R) \subseteq D^k$.
- **פירוש פונקציות:** לכל שם פונקציה k-מקומית $(k, f) \in \mathcal{F}$, מותאמת פונקציה $f^{\mathcal{M}} \triangleq I(k, f) : D^k \to D$.

3.2.2 ערך אמת במבנה

יהי מילון $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ עם מבנה $\mathcal{M} = (D, I)$.

הגדרה 3.10. סביבה היא פונקציה $\rho : \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \to D$.

3.2.2.1 ערך של שם עצם

הגדרה 3.11. ערך אמת של שם עצם בסביבה ρ, מוגדר באינדוקציה מבנית:

1. עבור סימן קבוע $c \in \mathcal{C}$: $[\![c]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}}$.
2. עבור משתנה x: $[\![x]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = \rho(x)$.
3. עבור שם פונקציה k-מקומית $(k, f) \in \mathcal{F}$: $[\![f(t_1, \ldots, t_k)]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}\Big([\![t_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_k]\!]_\rho^{\mathcal{M}}\Big)$.

משפט 3.4 (משפט התלות הסופית לשמות עצם)**.** תהא $X \subseteq \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ קבוצת משתנים כך ש-t שם עצם התלוי במשתנים ב-X בלבד. אזי לכל סביבות ρ_1, ρ_2 כך ש-$\rho_1|_X = \rho_2|_X$ מתקיים כי $[\![t]\!]_{\rho_1}^{\mathcal{M}} = [\![t]\!]_{\rho_2}^{\mathcal{M}}$.

הגדרה 3.12 (הצבה בסביבה)**.** עבור סביבה ρ משתנים $x_1, \ldots, x_n$ ו-$d_1, \ldots, d_n \in D$, נגדיר את $\rho\left[\frac{d_1}{x_1}, \ldots, \frac{d_n}{x_n}\right]$ להיות סביבה ρ' כך ש-$\rho'|_{\{x_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus [n]}} = \rho|_{\{x_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus [n]}}$ ולכל $i \in [n]$, $\rho'(x_i) = d_i$.

למה 3.1 (קשר בין סביבות להצבות)**.**

$$\left[\!\!\left[t\left\{\frac{t_1}{x_1}, \ldots, \frac{t_n}{x_n}\right\}\right]\!\!\right]_\rho^{\mathcal{M}} = [\![t]\!]_{\rho\left[\frac{[\![t_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}}{x_1}, \ldots, \frac{[\![t_n]\!]_\rho^{\mathcal{M}}}{x_n}\right]}^{\mathcal{M}}$$

3.2.2.2 ערך של נוסחה

הגדרה 3.13. ערך אמת של נוסחה בסביבה ρ, $[\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} \in \{T, F\}$ מוגדר באינדוקציה מבנית:

1. עבור שם יחס k-מקומי $(k, R) \in \mathcal{R}$ ושמות עצם $t_1, \ldots, t_k$,

$$[\![R(t_1, \ldots, t_k)]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = T \iff \Big([\![t_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_k]\!]_\rho^{\mathcal{M}}\Big) \in R^{\mathcal{M}}$$

2. עבור נוסחאות φ_1, φ_2, לכל $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

$$[\![\varphi_1 * \varphi_2]\!]_\rho^{\mathcal{M}} \triangleq \mathrm{TT}_*\Big([\![\varphi_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}, [\![\varphi_2]\!]_\rho^{\mathcal{M}}\Big)$$

3. לכל נוסחה φ:

(א)

$$[\![\neg\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} \triangleq \mathrm{TT}_\neg\Big([\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}}\Big)$$

(ב)

$$[\![\exists x\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = T \iff \exists d \in D.\ [\![\varphi]\!]_{\rho\left[\frac{d}{x}\right]}^{\mathcal{M}} = T$$

(ג)

$$[\![\forall x\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = T \iff \forall d \in D.\ [\![\varphi]\!]_{\rho\left[\frac{d}{x}\right]}^{\mathcal{M}} = T$$

משפט 3.5 (משפט התלות הסופית לנוסחאות)**.** תהא $X \subseteq \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ קבוצת משתניים כך ש-φ נוסחה שכל המשתנים שמופיעים בה חופשית ונמצאים ב-X. אזי לכל סביבות ρ_1, ρ_2 כך ש-$\rho_1|_X = \rho_2|_X$ מתקיים כי $[\![\varphi]\!]_{\rho_1}^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_{\rho_2}^{\mathcal{M}}$.

3.3 איזומורפיזם

הגדרה 3.14. תהינה $\mathcal{A} = (D_A, I_A), \mathcal{B} = (D_B, I_B)$ מבנים מעל מילון $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$. אזי $F : D_A \to D_B$ היא **איזומורפיזם** בין $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ אם:

1. F היא חד-חד ערכית ועל.
2. לכל שם פונקציה k-מקומית $(k, f) \in \mathcal{F}$ ו-$d_1, \ldots, d_k \in D_A$ מתקיים

$$F\big(f^{\mathcal{A}}(d_1, \ldots, d_k)\big) = f^{\mathcal{B}}(F(d_1), \ldots, F(d_k)).$$

3. לכל שם יחס k-מקומי $(k, R) \in \mathcal{R}$ ו-$d_1, \ldots, d_k \in D_A$ מתקיים

$$(d_1, \ldots, d_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff (F(d_1), \ldots, F(d_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

אם יש איזומורפיזם בין $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ נאמר כי הם **איזמורפיים**.

הגדרה 3.15. פסוק זו נוסחה ללא משתנים חופשיים.

משפט 3.6. אם $\mathcal{M}_1 = (D_1, I_1)$ ו-$\mathcal{M}_2 = (D_2, I_2)$ מבנים איזומורפיים כך ש-$F : D_1 \to D_2$ איזומורפיזם, אזי לכל נוסחה φ וסביבות $\rho_1 : \{x_i\} \to D_1, \rho_2 : \{x_i\} \to D_2$, אם אחד מהבאים מתקיים:

1. φ פסוק.
2. $\rho_2 = F \circ \rho_1$.

אזי $[\![\varphi]\!]_{\rho_1}^{\mathcal{M}_1} = [\![\varphi]\!]_{\rho_2}^{\mathcal{M}_2}$.