לוגיקה למדעי המחשב (0368-2170)

נכתב ע"י רון גולדמן
ע"פ הרצאות של פרופ' אלכסנדר רבינוביץ'

14 ביוני 2026

תוכן העניינים

1 תורת הפסוקים 3

1.1 סינטקס 3

1.1.1 הגדרת שפת הפסוקים 3

1.1.2 אינדוקציה מבנית והגדרה אינדוקטיבית 3

1.1.3 משפט הקריאות היחידה 4

1.1.4 כללי חסכון בסוגריים 4

1.2 סמנטיקה 4

1.2.1 סביבה וערך אמת של נוסחה 4

1.2.2 מושגים סמנטיים בסיסיים 5

2 תורת ההוכחות 8

2.1 פונקציות בוליאניות 8

2.2 מערכת הוכחה 8

2.3 מערכת ההוכחות של הילברט 9

2.3.1 כוחם של משפטים 10

2.3.2 הוכחת משפט השלמות 13

2.3.3 משפט הקומפקטיות 15

2.3.4 שימושים קומבינטוריים למשפט השלמות 15

3 לוגיקה מסדר ראשון 17

3.1 סינטקס - תחביר 17

3.1.1 שמות עצם 17

3.1.2 נוסחאות 18

3.1.3 מופעים של משתנים 19

3.2 סמנטיקה - משמעות 20

3.2.1 מבנה 20

3.2.2 ערך אמת במבנה 20

3.2.2.1 ערך של שם עצם 20

3.2.2.2 ערך של נוסחה 20

3.2.3 איזומורפיזם של מבנים 21

3.3 הצרנות ומידול 22

3.3.1 גדירות והרחבת מבנים 23
3.4 מושגים סמנטיים בסיסיים 24
3.4.1 חישוביות של לוגיקה מסדר ראשון 24
3.5 שקילויות הזזת כמתים 24
3.5.1 צורת PNF 25
3.5.2 בחזרה לבעיות חישוביות על נוסחאות 25
3.5.3 ספיקות של נוסחאות אוניברסליות 26
3.6 מבנה הרברנד (Herbrand) 27

פרק 1

תורת הפסוקים

1.1 סינטקס

1.1.1 הגדרת שפת הפסוקים

הגדרה 1.1. קבוצת נוסחאות WFF היא קבוצת מחרוזות קטנה ביותר (ביחס להכלה) כך שמתקיים:

1. $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \text{WFF}$.
2. אם $\varphi,\psi \in \text{WFF}$ אזי $(\neg\varphi),(\varphi\vee\psi),(\varphi\wedge\psi),(\varphi\to\psi),(\varphi\leftrightarrow\psi) \in \text{WFF}$.

טענה 1.1. קיימת קבוצה כזאת WFF.

סיבה. $\text{WFF} = \bigcap_{\{p_i\}\subseteq X \text{ closed under connectives}} X$. ■

1.1.2 אינדוקציה מבנית והגדרה אינדוקטיבית

אלגוריתם 1.1. תהא P תכונה, אזי כדי להוכיח ש-$\text{WFF} \subseteq P$, כלומר לכל נוסחה מתקיימת ה,\lnot\תכונה, מספיק להוכיח:

- **בסיס:** לכל $i\in\mathbb{N}$, $p_i \in P$.
- **צעד:** אם $\varphi,\psi\in P$, אזי גם $(\neg\varphi),(\varphi\vee\psi),(\varphi\wedge\psi),(\varphi\to\psi),(\varphi\leftrightarrow\psi)\in P$.

הגדרה 1.2. סדרת מחרוזות $\langle\varphi_1,\dots,\varphi_n\rangle$ נקראת **סדרת יצירה** עבור מחרוזת φ אם $\varphi_n=\varphi$ ולכל $i\in[n]$ מתקיים אחד מהבאים:

1. $\varphi_i \in \{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
2. קיימים $j,k\in[i-1]$ כך ש-$\varphi_i \in \{(\varphi_j * \varphi_k)\}_{*\in\{\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}} \uplus \{(\neg\varphi_j)\}$.

משפט 1.1. למחרוזת φ יש סדרת יצירה אם ורק אם $\varphi\in\text{WFF}$.

הגדרה 1.3 (הגדרה באינדוקציה)**.** תהינה $g:\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}\to D$, $h_\neg : D\to D$, $\{h_*\}_{*\in\{\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}} \subseteq D\times D\to D$, נגדיר את $F:\text{WFF}\to D$ על ידי

$$\begin{cases} F(p_i) \triangleq g(p_i) \\ F((\varphi*\psi)) \triangleq h_*(F(\varphi),F(\psi)) \\ F((\neg\psi)) \triangleq h_\neg(F(\psi)) \end{cases}$$

1.1.3 משפט הקריאות היחידה

משפט 1.2 (קריאות יחידה)**.**

1. קיים אלגוריתם $\mathcal{A}$ כך שלכל מחרוזת α מתקיים $\mathcal{A}(\alpha) = 1$ אם ורק אם $\alpha \in \text{WFF}$.
2. לכל $\alpha \in \text{WFF}$ בדיוק אחד מהבאים מתקיים:
   (א) קיים ויחיד $i \in \mathbb{N}$ כך ש-$\alpha = p_i$.
   (ב) קיימים ויחידים $\beta, \gamma \in \text{WFF}$ ו-$* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \rightarrow\}$ כך ש-$\alpha = (\beta * \gamma)$.
   (ג) קיים ויחיד $\beta \in \text{WFF}$ כך ש-$\alpha = (\neg\beta)$.

הגדרה 1.4 (הצבה)**.** נגדיר **הצבה** של נוסחאות $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \text{WFF}$ במקום משתנים $p_1, \ldots, p_n$ בפסוק $\varphi \in \text{WFF}$ באינדוקציה מבנית

$$\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\} \triangleq \begin{cases} \alpha_i, & \varphi = p_i \\ q, & \varphi = q \in \{p_i\}_{i\in\mathbb{N}} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \\ \left(\varphi_1\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\} * \varphi_2\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\}\right), & \varphi = (\varphi_1 * \varphi_2) \\ \left(\neg\psi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\}\right), & \varphi = (\neg\psi) \end{cases}$$

טענה 1.2. לכל $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varphi \in \text{WFF}$, משתנים $p_1, \ldots, p_n$, $\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\} \in \text{WFF}$.

1.1.4 כללי חסכון בסוגריים

1. אין סוגריים חיצוניים, וכן סוגריים מסביב לשלילה $(\neg x) \mapsto \neg x$.
2. סדר קדימויות:
   (א) $\neg$
   (ב) $\vee, \wedge$
   (ג) $\rightarrow$
   (ד) $\leftrightarrow$

דוגמה 1.1. נרשום את הפסוקים הבאים פורמלית:

1. $\neg p_1 \vee p_2 = (\neg p_1 \vee p_2) = ((\neg p_1) \vee p_2)$
2. $p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3 = (p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3) = (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$

1.2 סמנטיקה

1.2.1 סביבה וערך אמת של נוסחה

הגדרה 1.5. סביבה היא פונקציה מקבוצת המשתנים לערכי האמת שלהם $\rho : \{p_i\} \rightarrow \{T, F\}$.

הגדרה 1.6. ערך אמת של נוסחה α בסביבה ρ מוגדר באינדוקציה מבנית:

$$\begin{cases} [\![p]\!]_\rho \triangleq \rho(p) \\ [\![\varphi_1 * \varphi_2]\!]_\rho \triangleq \mathrm{TT}_*\Big([\![\varphi_1]\!]_\rho, [\![\varphi_2]\!]_\rho\Big) \\ [\![\neg\varphi]\!] \triangleq \mathrm{TT}_\neg\Big([\![\varphi]\!]_\rho\Big) \end{cases}$$

כאשר טבלאות האמת נתונות על ידי:

x	$\mathrm{TT}_\neg(x)$
F	T
T	F

x	y	$\mathrm{TT}_\leftrightarrow(x,y)$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

x	y	$\mathrm{TT}_\rightarrow(x,y)$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

x	y	$\mathrm{TT}_\wedge(x,y)$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

x	y	$\mathrm{TT}_\vee(x,y)$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

הגדרה 1.7. נגדיר את **קבוצת המשתנים** של פסוק באינדוקציה מבנית:

$$\begin{cases} \mathrm{Var}(p) \triangleq \{p\} \\ \mathrm{Var}(\varphi * \psi) \triangleq \mathrm{Var}(\varphi) \cup \mathrm{Var}(\psi) \\ \mathrm{Var}(\neg\varphi) \triangleq \mathrm{Var}(\varphi) \end{cases}$$

משפט 1.3 (משפט התלות הסופית)**.** תהינא $\varphi \in \mathrm{WFF}$ ותהינא ρ_1, ρ_2 סביבות כך ש-$\rho_1|_{\mathrm{Var}(\varphi)} = \rho_2|_{\mathrm{Var}(\varphi)}$, אזי $[\![\varphi]\!]_{\rho_1} = [\![\varphi]\!]_{\rho_2}$.

הגדרה 1.8 (עדכון סביבה)**.** תהינא סביבה ρ, $x_1, \ldots, x_n \in \{T, F\}$ ו-$p_1, \ldots, p_n$ משתנים.
נגדיר **סביבה מעודכנת** $\rho' = \rho\left[\frac{x_1}{p_1}, \ldots, \frac{x_n}{p_n}\right]$ כך ש-$\rho'|_{\{p_1,\ldots,p_n\}^c} = \rho|_{\{p_1,\ldots,p_n\}^c}$ ולכל $i \in [n]$, $\rho'(p_i) = x_i$.

משפט 1.4 (קשר בין הצבה לעדכון סביבות)**.** לכל $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \varphi \in \mathrm{WFF}$, משתניס $p_1, \ldots, p_n$, וסביבה ρ,

$$\left[\!\!\left[\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \ldots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\}\right]\!\!\right]_\rho = [\![\varphi]\!]_{\rho\left[\frac{[\![\alpha_1]\!]_\rho}{p_n}, \ldots, \frac{[\![\alpha_n]\!]_\rho}{p_n}\right]}$$

1.2.2 מושגים סמנטיים בסיסיים

הגדרה 1.9. תהינא $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{WFF}, \Gamma \subseteq \mathrm{WFF}$ ו-ρ סביבה:

1. נאמר כי ρ **מספקת** פסוק φ אם $[\![\varphi]\!]_\rho = T$.
2. נאמר כי φ **ספיקה** אם קיימת סביבה ν שמספקת את φ.
3. נאמר כי φ **טאוטולוגיה** אם כל סביבה ν מספקת את φ.
4. נאמר כי φ היא **סתירה** אם אין סביבה ν שמספקת את φ.
5. נאמר כי φ_1 **שקולה** ל-φ_2 ונסמן $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ אם לכל סביבה ν מתקיים $[\![\varphi_1]\!]_\nu = [\![\varphi_2]\!]_\nu$.
6. נאמר כי ρ **מספקת** קבוצת נוסחאות Γ אם לכל $\gamma \in \Gamma$, ρ מספקת את γ.
7. קבוצת נוסחאות Γ תקרא **ספיקה** אם קיימת סביבה ν שמספקת את Γ.

8. נאמר כי φ **נובעת סמנטית** מ-Γ ונסמן $\Gamma \models \varphi$ אם לכל סביבה ν שמספקת את Γ, ν מספקת את φ.

משפט 1.5. תהינא $\psi, \varphi \in \text{WFF}, \Gamma \subseteq \text{WFF}$, אזי:

1. ψ טאוטולוגיה אם ורק אם $\neg\psi$ סתירה.
2. $\Gamma \models \varphi$ אם ורק אם $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ לא ספיקה.
3. φ לא ספיקה אם ורק אם φ סתירה.
4. אם $|\Gamma| < \infty$ אזי Γ ספיקה אם ורק אם $\bigwedge_{\gamma\in\Gamma}\gamma$ ספיקה.
5. $\{\varphi\} \models \psi$ אם ורק אם $\varphi \to \psi$ טאוטולוגיה.
6. φ טאוטולוגיה אם ורק אם $\emptyset \models \varphi$.

משפט 1.6. תהינא $\varphi, \psi, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{WFF}$, ו-$p_1, \dots, p_n$ משתניים, כך ש-$\varphi \equiv \psi$, אזי $\varphi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \dots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\} \equiv \psi\left\{\frac{\alpha_1}{p_n}, \dots, \frac{\alpha_n}{p_n}\right\}$.

משפט 1.7. תהינא $\alpha, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_n \in \text{WFF}$, ו-$p_1, \dots, p_n$ משתניים, כך ש-$\varphi_i \equiv \psi_i$ לכל $i \in [n]$, אזי $\alpha\left\{\frac{\varphi_1}{p_n}, \dots, \frac{\varphi_n}{p_n}\right\} \equiv \alpha\left\{\frac{\psi_1}{p_n}, \dots, \frac{\psi_n}{p_n}\right\}$.

טענה 1.3 (שקילויות חשובות). תהינא $\alpha, \beta, \gamma \in \text{WFF}$ אזי:

1. לכל $* \in \{\vee, \wedge\}$:
   (א) **אסוציאטיביות:** $\alpha * (\beta * \gamma) \equiv (\alpha * \beta) * \gamma$.
   (ב) **קומוטטיביות:** $\alpha * \beta \equiv \beta * \alpha$.
2. **דיסטריבוטיביות:**
$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma), \qquad \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$$
3. $\alpha \equiv \neg\neg\alpha$.
4. **דה-מורגן:**
$$\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta, \qquad \neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta.$$

משפט 1.8. קיימים אלגוריתמים $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} : \text{WFF} \to \{0,1\}, \mathcal{D} : \text{WFF}^2 \to \{0,1\}, \mathcal{E} : \mathcal{P}(\text{WFF}) \times \text{WFF} \to \{0,1\}$ כך שלכל $\varphi, \psi \in \text{WFF}, \Gamma \subseteq \text{WFF}$:

1. $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ אם ורק אם φ ספיקה.
2. $\mathcal{B}(\varphi) = 1$ אם ורק אם φ טאוטולוגיה.
3. $\mathcal{C}(\varphi) = 1$ אם ורק אם φ סתירה.
4. $\mathcal{D}(\varphi, \psi) = 1$ אם ורק אם $\varphi \equiv \psi$.

5. $\mathcal{E}(\Gamma, \varphi) = 1$ אם ורק אם $\Gamma \models \varphi$.

בעיה 1.1 (בעיית הספיקות). נגדיר את בעיית הספיקות (Boolean Satisfiability Problem - SAT).
קלט: נוסחא $\varphi \in \text{WFF}$ מעל משתנים $\text{Var}(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
שאלה: האם φ ספיקה?

פרק 2

תורת ההוכחות

2.1 פונקציות בוליאניות

הגדרה 2.1. קבוצת משתנים $\Delta \subseteq \{p_i\}$ נקראת **תמיכה/תומכת** של פונקציה $F : (\{p_i\} \to \{T, F\}) \to \{T, F\}$ אם לכל ρ_1, ρ_2 כך ש-$\rho_1|_\Delta = \rho_2|_\Delta$ מתקיים $F(\rho_1) = F(\rho_2)$.
נאמר כי ל-F יש **תומך סופי** אם קיימת Δ סופית שתומכת ב-F.

משפט 2.1. לכל פונקציה F עם תומך סופי יש נוסחה φ כך ש-$F(\rho) = [\![\varphi]\!]_\rho$.

הגדרה 2.2. עבור קבוצת קשרים $\Sigma \subseteq \{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ נגדיר את $\mathrm{WFF}_\Sigma \triangleq \mathrm{WFF} \cap (\{p_i\} \uplus \{(,)\} \uplus \Sigma)^*$.

הגדרה 2.3. קבוצת קשרים $\Sigma \subseteq \{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ נקראת **שלמה פונקציונלית** אם לכל פונקציה F בעלת תומך סופי יש נוסחה $\varphi \in \mathrm{WFF}_\Sigma$ כך ש-$[\![\varphi]\!] = F$.

טענה 2.1. הקבוצות הבאות שלמות פונקציונלית:

1. $\{\wedge, \vee, \neg\}$.
2. $\{\wedge, \neg\}$.
3. $\{\to, \neg\}$.

2.2 מערכת הוכחה

הערה 2.1. בהרצאה ראינו הגדרה פחות פורמלית. זאת הגדרה פורמלית (לפי אלכס).

הגדרה 2.4 (מערכת הוכחה)**.** רביעייה $(\Sigma, X, \mathcal{A}, I)$ כאשר:

- **<u>אלפבית:</u>** Σ
- **<u>נוסחאות:</u>** $X \subseteq \Sigma^*$
- **<u>אקסיומות:</u>** $\mathcal{A} \subseteq X$
- **<u>כללי היסק:</u>** $I = \{R_i\}_i$ כך שלכל i, יש n_i עבורו $I \subseteq X^{n_i} \times X$

הגדרה 2.5. הוכחה במערכת S של נוסחה φ מקבוצת נוסחאות Γ היא סדרת נוסחאות $\langle\varphi_1,\dots,\varphi_k\rangle$ כך ש-$\varphi_k=\varphi$ וגם לכל $k\geq i$ אחד מהבאים מתקיים:

1. φ_i אקסיומה
2. $\varphi_i\in\Gamma$
3. קיימים $i_1,\dots,i_\ell<i$ וכלל היסק R כך ש-$\frac{\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_\ell}}{\varphi_i}\in R$.

אם ל-φ יש הוכחה מ-Γ במערכת S נסמן $\Gamma\vdash_S\varphi$.

הגדרה 2.6. נאמר כי φ הוא **משפט** ב-S אם $\emptyset\vdash_S\varphi$.

טענה 2.2 (תכונות של יכיחות). תהא S מערכת הוכחה, אזי:

1. **מונוטוניות:** אם $\Gamma\vdash_S\varphi$ ו-$\Gamma\subseteq\Delta$ אזי $\Delta\vdash_S\varphi$.
2. **קומפקטיות:** אם $\Gamma\vdash_S\varphi$ אזי קיימת $\Gamma'\subseteq\Gamma$ סופית עבורה $\Gamma'\vdash_S\varphi$.
3. **טרנזיטיביות:** אם $\Gamma\vdash_S A,\Gamma\cup\{A\}\vdash_S B$ אזי $\Gamma\vdash_S B$.

2.3 מערכת ההוכחות של הילברט

הגדרה 2.7 (מערכת ההוכחות של הילברט)**.** $\mathrm{HPC}=(\Sigma,X,\mathcal{A},I)$ כאשר:

- $\Sigma=\{\to,\neg,(,)\}\cup\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
- $X=\mathrm{WFF}\cap\Sigma^*$.
- $\mathcal{A}=\{A_1(A,B),A_2(A,B,C),A_3(A,B)\}_{A,B,C\in X}$ כאשר:

$$\begin{aligned}A_1(A,B)&=A\to(B\to A)\\A_2(A,B,C)&=(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))\\A_3(A,B)&=(\neg B\to\neg A)\to((\neg B\to A)\to B)\end{aligned}$$

- $I=\{R\}$ modus ponens, $R\frac{A,A\to B}{B}$.

טענה 2.3. $A\to A$ משפט ב-HPC.

משפט 2.2 (שלמות HPC)**.** $\Gamma\models\varphi$ אם ורק אם $\Gamma\vdash_{\mathrm{HPC}}\varphi$.

מסקנה 2.1. φ היא טאוטולוגיה אם ורק אם היא משפט ב-HPC.

משפט 2.3 (נאותות HPC)**.** אם $\Gamma\vdash_{\mathrm{HPC}}\varphi$ אזי $\Gamma\models\varphi$.

סימון 2.1. $\vdash$ במקום $\vdash_{\mathrm{HPC}}$.

2.3.1 כוחם של משפטים

משפט 2.4 (דדוקציה)**.** אם $\Gamma, A \vdash B$ אזי $\Gamma \vdash A \to B$.

הוכחה. באינדוקציה על אורך ההוכחה ב-HPC.
בסיס: אם יש הוכחה באורך 1 מ-Γ, A, אזי אחד מהבאים מתקיים:

1. B אקסיומה. עבור $A \leftarrow B, B \leftarrow A$ באקסיומה 1:

$$B \to (A \to B)$$

B אקסיומה, ולכן מMP, נובע כי כי $A \to B$, ולכן בפרט $\Gamma \vdash A \to B$.

2. $B \in \Gamma$. עבור $A \leftarrow B, B \leftarrow A$ באקסיומה 1:

$$B \to (A \to B)$$

$B \in \Gamma$, ולכן מMP, נובע כי כי $A \to B$, ולכן בפרט $\Gamma \vdash A \to B$.

3. $B \equiv A$. וראינו כי $A \to A = A \to B$ משפט ב-HPC, ולכן גם $\Gamma \vdash A \to B$.

צעד: נניח כי נכון עבור הוכחה בגודל $< k+1$ ב-HPC.
תהא $\varphi_1, \dots \varphi_k, \varphi_{k+1} \equiv B$ הוכחה של B מ-Γ, A.
לפי ההגדרה, מתקיים אחד מהבאים:

1. φ_{k+1} אקסיומה
2. $\varphi_{k+1} \in \Gamma$
3. $A \equiv \varphi_{k+1}$
4. קיימים $i, m \leq k$ כך ש-$\varphi_m = \varphi_i \to \varphi_{k+1}$ ואז φ_{k+1} מתקבל מ-MP על φ_i, φ_m.

עבור מקרים 1-3 הוכחנו כבר בבסיס למעשה. במקרה 4, לכן $\varphi_m \equiv \varphi_i \to B$. לפי הנחת האינדוקציה

$1. A \to (\varphi_i \to B)$	Assumption
$2. A \to \varphi_i$	Assumption
$3. (A \to (\varphi_i \to B)) \to ((A \to \varphi_i) \to (A \to B))$	Ax2 $: A \leftarrow A, B \leftarrow \varphi_i, C \leftarrow B$
$4. (A \to \varphi_i) \to (A \to B)$	MP $: 1, 3$
$5. A \to B$	MP $: 2, 4$

■

טענה 2.4. $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

הוכחה. נראה כי $A \to B, B \to C, A \vdash C$ ואז ממשפט הדדוקציה נקבל את הדרוש.

$1. A \to B$	Assumption
$2. B \to C$	Assumption
$3. A$	Assumption
$4. B$	MP :$1, 3$
$5. C$	MP :$2, 4$

■

טענה 2.5. $\emptyset \vdash (\neg A \to (A \to B))$.

הוכחה. ראשית נוכיח כי $\neg A, A \vdash B$.

$1. \neg A$	Assumption
$2. A$	Assumption
$3. (A \to (\neg B \to A))$	Ax1
$4. (\neg A \to (\neg B \to \neg A))$	Ax1
$5. \neg B \to A$	MP 2,3
$6. \neg B \to \neg A$	MP 1,4
$7. (\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$	Ax3
$8. ((\neg B \to A) \to B)$	MP 6,7
$9. B$	MP 5,8

■

משפט 2.5 (הוכחה ב-HPC לפי מקרים). אם $\Gamma, A \vdash B$ ו-$\Gamma, \neg A \vdash B$ אזי $\Gamma \vdash B$.

הוכחה. $\Gamma, A \vdash B$ ולכן לפי משפט הדדוקציה $\Gamma \vdash A \to B$.
$\Gamma, \neg A \vdash B$ ולכן לפי משפט הדדוקציה $\Gamma \vdash \neg A \to B$. לכן הוכחה ב-$\Gamma$ היא:

$1. A \to B$	Deduction
$2. \neg A \to B$	Deduction
$3. (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$	Moodle on Page the from 8
$4. (\neg A \to B) \to B$	1,8 MP
$5. B$	2,4 MP

■

הגדרה 2.8 (עקביות)**.** תהי קבוצת נוסחאות Γ.

1. Γ היא **עקבית** ב-HPC אם קיימת נוסחה שלא ניתנת להוכחה מ-Γ.
2. Γ היא **לא עקבית** אם כל נוסחא ניתנת להוכחה ממנה.

טענה 2.6. Γ לא עקבית אם ורק אם יש A כך ש- $\Gamma \vdash A$ וגם $\Gamma \vdash \neg A$.

הוכחה. הכיוון $\Longleftarrow$ מיידי. בכיוון $\Longrightarrow$, לכל B:

$1.A$	Assumption
$2.\neg A$	Assumption
$3.\neg A \to (A \to B)$	2.5 Claim
$4.A \to B$	2,3 MP
$5.B$	1,4 MP

לכן Γ לא עקבית. ■

הגדרה 2.9. Γ היא **עקבית מקסימלית** (Maximal Consistent) ב-HPC אם Γ עקבית ולכל Δ עבורה $\Gamma \subset \Delta$ מתקיים כי Δ לא עקבית.

טענה 2.7 (תכונות של עקביות מקסימלית). תהא Γ עקבית מקסימלית. אזי:

1. Γ סגורה תחת יכיחות, אם $\Gamma \vdash A$ אזי $A \in \Gamma$.
2. לכל A, $A \in \Gamma$ או $\neg A \in \Gamma$.
3. $A \to B \in \Gamma$ אם ורק אם $A \notin \Gamma$ או $B \in \Gamma$.

הוכחה. מתקיים:

1. נניח כי $A \notin \Gamma$ ונראה ש-$\Gamma \cup \{A\}$ עקבית. תהא B כך ש-$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, נתון $\Gamma \vdash A$ ולכן $\Gamma \vdash B$.
2. נניח $A \notin \Gamma$, אזי $\Gamma \cup \{A\}$ לא עקבית. אם $\neg A \notin \Gamma$ אזי $\Gamma \cup \{\neg A\}$ לא עקבית. אזי לכל B,

$1.\Gamma, A \vdash B$	Inconsistent
$2.\Gamma, \neg A \vdash B$	Inconsistent
$3.\Gamma \vdash B$	1,2 Theorem Cases by Proof

3. $\underline{\Longleftarrow}$: אם $A \to B \in \Gamma$. אם $A \notin \Gamma$ סיימנו, אחרת $A \in \Gamma$. לכן, מ-MP ותכונה 1, $B \in \Gamma$. $\underline{\Longrightarrow}$: אם $B \in \Gamma$, אזי

$1.B$	Assumption
$2.B \to (A \to B)$	Ax1
$3.A \to B$	1,2 MP

אם $A \notin \Gamma$, אזי

$1.\neg A \in \Gamma$	2 Property
$2.\neg A \to (A \to B)$	Moodle on Page the from 6
$3.A \to B$	1,2 MP

■

2.3.2 הוכחת משפט השלמות

משפט 2.6 (שלמות - כיוון קשה). אם $\Gamma \models \varphi$ אזי $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \varphi$.

משפט 2.7 (שלמות - גרסה לספיקות). אם Γ עקבית אזי Γ ספיקה.

משפט 2.8. אם Γ לא ספיקה אזי Γ לא עקבית.

טענה 2.8. אם משפט 2.7 מתקיים אזי גם משפט 2.6

הוכחה. נניח כי משפט 2.7 מתקיים. נניח $\Gamma \models \varphi$, צ"ל כי $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \varphi$.
מתקיים כי $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ לא ספיקה ולכן $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ לא עקבית. מכאן כי $\Gamma, \neg\varphi \vdash_{\text{HPC}} \varphi$.
גם כן $\Gamma, \varphi \vdash_{\text{HPC}} \varphi$, ולכן ממשפט הפרדה למקרים $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} \varphi$. ■

למה 2.1. אם Γ עקבית אזי קיימת $\Delta \supseteq \Gamma$ כך ש-Δ עקבית מקסימלית.

למה 2.2. אם Γ עקבית מקסימלית אזי Γ ספיקה.

הוכחה. נניח כי Γ עקבית מקסימלית, צ"ל כי Γ ספיקה, כלומר להגדיר $\rho_\Gamma : \{p_i\}_i \to \{T, F\}$ שתספק את Γ. נגדיר:

$$\rho_\Gamma(p_i) = \begin{cases} T, & p_i \in \Gamma \\ F, & \neg p_i \in \Gamma \end{cases}$$

צריך להוכיח כי לכל $\varphi \in \Gamma$ מתקיים כי $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$.
נוכיח באינדוקציה מבנית את הטענה הבאה:

טענה 2.9. $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\varphi \in \Gamma$.

<u>בסיס:</u> φ משתנה ולכן נובע מיידית מהגדרת ρ_Γ.
<u>צעד:</u> נניח כי $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\varphi \in \Gamma$ וגם $[\![\psi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\psi \in \Gamma$.
שלילה - צ"ל כי $[\![\neg\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\neg\varphi \in \Gamma$.
<u>$\Longleftarrow$:</u> אם $[\![\neg\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אזי $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = F$ ולכן מההנחה, $\varphi \notin \Gamma$ ומכאן מתכונות עקבית מקסימלית $\neg\varphi \in \Gamma$.
<u>$\Longrightarrow$:</u> אם $\neg\varphi \in \Gamma$ אזי $\Gamma \vdash \neg\varphi$ ולכן מהעקביות לא מתקיים $\Gamma \vdash \varphi$ ובפרט $\varphi \notin \Gamma$. לכן מההנחה, $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = F$ ומכאן כי $[\![\neg\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$.
גרירה - צ"ל כי $[\![\varphi \to \psi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אם ורק אם $\varphi \to \psi \in \Gamma$.
<u>$\Longleftarrow$:</u> אם $[\![\varphi \to \psi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ אזי:

1. $[\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma} = F$ ואז $\varphi \notin \Gamma$.

2. $[\![\psi]\!]_{\rho_\Gamma} = T$ ואז $\psi \in \Gamma$.

ובכל אחד מהמקרים נקבל מתכונה 3 כי $\varphi \to \psi \in \Gamma$.
$\Longrightarrow$: אם $\varphi \to \psi \in \Gamma$ אזי לפי תכונה 3, $\varphi \notin \Gamma$ או $\psi \in \Gamma$ ואז מההנחה

$$[\![\varphi \to \psi]\!]_{\rho_\Gamma} = \mathrm{TT}_{\to}\Big([\![\varphi]\!]_{\rho_\Gamma}, [\![\psi]\!]_{\rho_\Gamma}\Big) = T$$

■

הוכחת למה 2.1. נוכיח כי כל קבוצה עקבית מוכלת בקבוצה עקבית מקסימלית. תהא $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ מניה של כל הנוסחאות ב-HPC. **נגדיר** סדרה של קבוצות נוסחאות

$$\Gamma_0 := \Gamma$$
$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \begin{cases} \{A_n\}, & \Gamma_n \cup \{A_n\}\text{consistent is} \\ \{\neg A_n\} & \text{else} \end{cases}$$

טענה 2.10. לכל $n \in \mathbb{N}$, Γ_n היא עקבית.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על n.
בסיס: $\Gamma_0 = \Gamma$ היא עקבית.
צעד: נניח כי Γ_n עקבית, אם $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$ אזי מההגדרה היא עקבית.
אם $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$, אזי $\Gamma_n \cup \{A_n\}$ לא עקבית ומכאן כי $\Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$ עקבית. ■

טענה 2.11. לא קיימת Δ עקבית כך ש- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \subset \Delta$.

הוכחה. נניח בשלילה כי קיימת Δ עקבית כך ש-$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \subset \Delta$. אזי יש $k \in \mathbb{N}$ עבורו $A_k \in \Delta$ אבל $A_k \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$.
בפרט, $A_k \notin \Gamma_k$ ולכן $\Gamma_{k-1} \cup \{A_k\}$ לא עקבית. לכן מטענה 2.10, $\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \cup \{\neg A_k\}$ עקבית, ובפרט $\neg A_k \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \subset \Delta$. אזי $A_k, \neg A_k \in \Delta$ ובפרט $\Delta \vdash A_k, \Delta \vdash \neg A_k$ וזו סתירה לעקביות Δ. ■

טענה 2.12. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ היא עקבית.

הוכחה. נניח בשלילה כי $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ לא עקבית, אזי קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \vdash A_k$ וגם $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n \vdash \neg A_k$.
מקומפקטיות, יש $\Delta_1, \Delta_2 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ סופיות כך ש-$\Delta_1 \vdash A_k, \Delta_2 \vdash \neg A_k$, ובפרט, מהסופיות וההכלה בין ה-Γ_n, יש $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}$ כך ש-$\Delta_1 \subseteq \Gamma_{\ell_1}, \Delta_2 \subseteq \Gamma_{\ell_2}$ ולכן מטרנזיטיביות $\Gamma_{\ell_1} \vdash A_k, \Gamma_{\ell_2} \vdash \neg A_k$. ניקח $\ell = \max\{\ell_1, \ell_2\}$ ונקבל כי $\Gamma_\ell \vdash A_k, \Gamma_\ell \vdash \neg A_k$ וזו סתירה לעקביות של Γ_ℓ מטענה 2.10. ■

■

הערה 2.2. בכיתה אלכס הוכיח את הטענות אך אלו שכאן הן שלי.

2.3.3 משפט הקומפקטיות

משפט 2.9 (שלמות). $\Gamma \models A$ אם ורק אם $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} A$.

משפט 2.10 (קומפקטיות).

1. אם $\Gamma \models A$ אזי יש תת קבוצה סופית $\Delta \subseteq \Gamma$ כך ש-$\Delta \models A$.
2. אם כל תת קבוצה סופית של Γ ספיקה, אזי Γ ספיקה.

הוכחה.

1. נניח $\Gamma \models A$, אזי לפי משפט השלמות $\Gamma \vdash_{\text{HPC}} A$.
לפי קומפקטיות של יכיחות יש קבוצה סופית $\Delta \subseteq \Gamma$ כך ש-$\Delta \vdash_{\text{HPC}} A$.
לכן ממשפט הנאותות $\Delta \models A$.
2. מתקבל מהגרסה הבאה של משפט השלמות:

משפט 2.11. Γ ספיקה אם ורק אם Γ עקבית ב-HPC.

■

2.3.4 שימושים קומבינטוריים למשפט השלמות

הגדרה 2.10. צביעה ב-k צמתים של גרף $G = (V, E)$ היא פונקציה $\text{col} : V \to [k]$, נאמר כי היא חוקית אם לכל $e = \{u, v\} \in E$ מתקיים כי $\text{col}(u) \neq \text{col}(v)$.
אם ל-G קיימת k צביעה חוקית נאמר כי הוא **k-צביע**.

משפט 2.12. יהי $G = (V, E)$ גרף. אם כל תת-גרף סופי של G הוא k-צביע, אזי G הוא k-צביע.

הוכחה. נצרין צביעה של גרף וצביעה חוקית של גרף, נשתמש במשתנים $\{p_{v,i}\}_{v \in V, i \in [k]}$.
<u>צביעה של צומת:</u> לכל $v \in V$ נגדיר

$$\psi_v = \left(\bigvee_{i=1}^{k} p_{v,i} \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \left(p_{v,i} \to \neg \left(\bigvee_{j \in [k] \setminus \{i\}} p_{v,j} \right) \right)$$

ψ_v ספיק בסביבה ρ אם ורק אם לכל ρ נותנת ערך T בדיוק לאחד מהמשתנים $\rho_{v,1}, \ldots, \rho_{v,k}$.
<u>צביעה חוקית:</u> אם $\{u, v\} \in E$ אזי u, v צבועים בצבעים שונים. לכל $e = \{u, v\} \in E$ נגדיר

$$\varphi_e = \bigwedge_{i=1}^{k} (p_{v,i} \to \neg p_{u,i}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} (p_{u,i} \to \neg p_{v,i})$$

לכל צביעה col נגדיר סביבה ρ_{col},

$$\rho_{\text{col}}(p_{v,i}) = \begin{cases} T, & \text{col}(v) = i \\ F, & \text{col}(v) \neq i \end{cases}$$

אם col **צביעה חוקית** אזי ρ_{col} תספק את כל הנוסחאות $\Gamma_G = \{\psi_v\}_{v \in V} \cup \{\varphi_e\}_{e \in E}$.

עבור כל סביבה ρ שספקת את Γ, נגדיר צביעה $\mathrm{col}_\rho : V \to [k]$:

$$\mathrm{col}_\rho(v) = \iota\{\, i \in [k] : \ \rho(p_{v,i}) = T \,\}$$

אם סביבה ρ מספקת את Γ_G אזי col_ρ היא חוקית. לכל גרף G התאמנו קבוצת נוסחאות Γ_G כך ש-G k-צביע אם ורק אם Γ_G ספיקה.
כעת נניח כי כל תת גרף סופי של G הוא k-צביע, ולכן מספיק להראות שכל תת קבוצה של Γ_G ספיקה.
נניח $\Delta \subseteq \Gamma_G$ תת קבוצה סופית, בנוסחאות של Δ מספר סופי של צמתים, $U \subseteq V$.
נגדיר $H = G[U]$, אזי $\Delta \subseteq \Gamma_H$.
מההנחה H k-צביע ולכן Γ_H ספיקה. לכן משום ש-$\Delta \subseteq \Gamma_H$ אזי Δ ספיקה.
לכן לפי משפט הקומפקטיות Γ_G היא ספיקה ולכן G k-צביע. ■

פרק 3

לוגיקה מסדר ראשון

3.1 סינטקס - תחביר

הגדרה 3.1. מילון (vocabulary/signature) היא שלישייה $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ כאשר:

- $\mathcal{C}$ שמות קבועים,
- $\mathcal{R}$ - שמות יחסים וכמה ארגומנטים ליחס, כלומר איברים מהצורה (k, R) כך ש-R מייצג יחס k-מקומי,
- $\mathcal{F}$ - שמות פונקציות וכמה ארגומנטים לפונקציה, כלומר איברים מהצורה (k, f) כך ש-f מייצג פונקציה k-מקומית.

הגדרה 3.2. אלפבית מעל מילון $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ היא קבוצה A_Σ כך ש-

- הסימנים ב-Σ נמצאים ב-A_Σ,
- לאלפבית יש משתנים $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq A_\Sigma$,
- הקשרים הבוליאניים באלפבית $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \subseteq A_\Sigma$,
- הכמתים באלפבית $\{\forall, \exists\} \subseteq A_\Sigma$,
- סימוני העזר באלפבית $\{(,), ,\} \subseteq A_\Sigma$.

3.1.1 שמות עצם

הגדרה 3.3. שמות העצם מעל מילון $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ היא קבוצה קטנה ביותר X כך שהבאים מתקיימים:

1. כל משתנה הוא שם עצם, $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$,
2. כל קבוע הוא שם עצם, $\mathcal{C} \subseteq X$,
3. אם $(k, f) \in \mathcal{F}$ אזי לכל $t_1, \ldots, t_k \in X$, גם $f(t_1, \ldots, t_k) \in X$.

אלגוריתם 3.1 (אינדוקציה מבנית לשמות עצם). **כדי להראות** שלכל שם עצם יש תכונה P, מספיק להראות:

1. **בסיס:** לכל קבוע $c \in \mathcal{C}$ יש את התכונה P, ולכל משתנה $x \in \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ יש את התכונה P.
2. **צעד:** עבור כל סימן פונקציה k-מקומית f, $(k,f) \in \mathcal{F}$, אם $t_1,\dots,t_k$ שמות עצם המקיימים את תכונה P אזי גם $f(t_1,\dots,t_k)$ מקיים את התכונה P.

משפט 3.1 (קריאות יחידה לשמות עצם). יהי $\Sigma = (\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{F})$ מילון.

1. קיים אלגוריתם $\mathcal{A}$ שבודק האם מחרוזת היא שם עצם במילון Σ.
2. אם s שם עצם אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים:
   (א) $s \in \mathcal{C}$ קבוע,
   (ב) $s \in \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ משתנה,
   (ג) קיימים ויחידים $(k,f) \in \mathcal{F}$ פונקציה k-מקומית ו-$t_1,\dots,t_k$ שמות עצם כך ש-$s = f(t_1,\dots,t_k)$.

3.1.2 נוסחאות

הגדרה 3.4 (נוסחאות אטומיות). יהי $\Sigma = (\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{F})$ מילון. אם $(k,R) \in \mathcal{R}$ יחס k-מקומי במילון Σ, ו-$t_1,\dots,t_k$ שמות עצם, אזי $R(t_1,\dots,t_k)$ נקראת **נוסחה אטומית**.

הגדרה 3.5 (נוסחאות). יהי $\Sigma = (\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{F})$ מילון. **קבוצת הנוסחאות** היא קבוצה קטנה ביותר כך שמתקיים:

1. אם A נוסחה אטומית אזי היא נוסחה,
2. אם A,B נוסחאות אזי $(A\vee B),(A\wedge B),(A\to B),(A\leftrightarrow B),(\neg A)$ נוסחאות,
3. אם A נוסחה ו-x משתנה אזי $(\forall xA),(\exists xA)$ נוסחאות.

אלגוריתם 3.2 (אינדוקציה מבנית לנוסחאות). **כדי להראות** שלכל נוסחה יש תכונה P, מספיק להראות:

1. **בסיס:** לכל נוסחה אטומית יש תכונה P.
2. **צעד:** עבור כל נוסחאות A,B שמקיימות את תכונה P, גם $(A\vee B),(A\wedge B),(A\to B),(A\leftrightarrow B),(\neg A)$ ולכל משתנה x, $(\forall xA),(\exists xA)$ מתקיימת תכונה P.

משפט 3.2 (קריאות יחידה לנוסחאות). יהי $\Sigma = (\mathcal{C},\mathcal{R},\mathcal{F})$ מילון.

1. קיים אלגוריתם $\mathcal{A}$ שבודק האם מחרוזת היא נוסחה במילון Σ.
2. אם s נוסחה אזי בדיוק אחד מהבאים מתקיים:
   (א) s נוסחה אטומית,
   (ב) קיימים ויחידים A,B נוסחאות ו-$* \in \{\vee,\wedge,\to,\leftrightarrow\}$, כך ש-$s = (A*B)$,
   (ג) קיימת ויחידה נוסחה A כך שבדיוק אחד מהבאים מתקיים:
      i. $s = (\neg A)$,
      ii. קיימים ויחידים $\circledast \in \{\forall,\exists\}$ ומשתנה x כך ש-$s = (\circledast xA)$.

3.1.3 מופעים של משתנים

הגדרה 3.6. נגדיר מופעים של משתנים **קשורים(bound) חופשיים(free) וקושרים(binding)**, באינדוקציה מבנית:

1. כל מופע של משתנה בנוסחה אטומית נקרא **מופע חופשי**.
2. לכל $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ונוסחאות φ_1, φ_2, המופע של משתנה ב-$(\neg\varphi_1)/(\varphi_1 * \varphi_2)$ נורש מ-φ_1 או מ-φ_2 (מ-φ_1).
3. לכל נוסחה φ ו-$\circledast \in \{\exists, \forall\}$, לכל מופע של משתנה y, $x \not\equiv y$, סטטוס המופע שלו ב-$(\circledast x\varphi)$ נורש מ-φ, וכל מופע חופשי של x ב-φ נהיה מופע קשור ב-$(\circledast x\varphi)$. המופע של x ב-$(\circledast x\varphi)$ נקרא מופע קושר.

הגדרה 3.7. נגדיר **הצבה של נוסחה** באינדוקציה מבנית, לכל $x_1, \ldots, x_n$ משתנים ו-$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$שמות עצם.

1. לכל $(k, R) \in \mathcal{R}$, $t_1, \ldots, t_k$ שמות עצם,

$$R(t_1, \ldots, t_k)\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\} \triangleq R\left(t_1\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\}, \ldots, t_k\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\}\right)$$

2. לכל $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ו-A, B נוסחאות,

$$(A * B)\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\} \triangleq \left(A\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\} * B\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\}\right)$$

3. לכל נוסחה φ ומשתנה x, לכל$\circledast \in \{\forall, \exists\}$, נבחר z שלא מופיע ב-φ ושונה מ-$x_1, \ldots, x_n$, ואז

$$(\circledast x\varphi)\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\} \triangleq \left(\circledast z\varphi\left\{\frac{z}{x}\right\}\right)\left\{\frac{\varphi_1}{x_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{x_n}\right\}$$

הגדרה 3.8. נגדיר **שקילות שלד** באינדוקציה מבנית:

1. אם A, B נוסחאות אטומיות, אזי A, B שקולות שלד אם ורק אם $A = B$.
2. לכל $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, ונוסחאות A_1, A_2, B_1, B_2:
   (א) $(\neg A_1), (\neg B_1)$ שקולות אם ורק אם A_1, B_1 שקולות.
   (ב) $(A_1 * A_2), (B_1 * B_2)$ שקולות אם ורק אם A_1, A_2 שקולות ו-B_1, B_2 שקולות.
3. לכל $\circledast \in \{\forall, \exists\}$, משתנים x, y ונוסחאות A, B: $(\circledast xA), (\circledast yB)$ שקולות אם ורק אם קיים משתנה חדש z, כך ש-$A\left\{\frac{z}{x}\right\}, B\left\{\frac{z}{y}\right\}$ שקולות.

משפט 3.3. כל נוסחא שקולת שלד לנוסחא שבה כל המשתנים הקושרים שונים והם שונים מכל המופעים של המשתנים החופשיים.

3.2 סמנטיקה - משמעות

3.2.1 מבנה

הגדרה 3.9 (מבנה עבור מילון)**.** יהי $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ מילון, אזי **מבנה** זה זוג $\mathcal{M} = (D, I)$ כך שמתקיים:

- $D \neq \emptyset$ הנקראת **תחום**.
- **פירוש קבועים:** לכל $c \in \mathcal{C}$, מותאם איבר $c^{\mathcal{M}} \triangleq I(c) \in D$.
- **פירוש יחסים:** לכל שם יחס k-מקומי $(k, R) \in \mathcal{R}$, מותאם יחס $R^{\mathcal{M}} \triangleq I(k, R) \subseteq D^k$.
- **פירוש פונקציות:** לכל שם פונקציה k-מקומית $(k, f) \in \mathcal{F}$, מותאמת פונקציה $f^{\mathcal{M}} \triangleq I(k, f) : D^k \to D$.

3.2.2 ערך אמת במבנה

יהי מילון $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$ עם מבנה $\mathcal{M} = (D, I)$.

הגדרה 3.10. סביבה היא פונקציה $\rho : \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \to D$.

3.2.2.1 ערך של שם עצם

הגדרה 3.11. ערך אמת של שם עצם בסביבה ρ, מוגדר באינדוקציה מבנית:

1. עבור סימן קבוע $c \in \mathcal{C}$: $[\![c]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}}$.
2. עבור משתנה x: $[\![x]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = \rho(x)$.
3. עבור שם פונקציה k-מקומית $(k, f) \in \mathcal{F}$: $[\![f(t_1, \ldots, t_k)]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}\Big([\![t_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_k]\!]_\rho^{\mathcal{M}}\Big)$.

משפט 3.4 (משפט התלות הסופית לשמות עצם)**.** תהא $X \subseteq \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ קבוצת משתנים כך ש-t שם עצם התלוי במשתנים ב-X בלבד. אזי לכל סביבות ρ_1, ρ_2 כך ש-$\rho_1|_X = \rho_2|_X$ מתקיים כי $[\![t]\!]_{\rho_1}^{\mathcal{M}} = [\![t]\!]_{\rho_2}^{\mathcal{M}}$.

הגדרה 3.12 (הצבה בסביבה)**.** עבור סביבה ρ משתנים $x_1, \ldots, x_n$ ו-$d_1, \ldots, d_n \in D$, נגדיר את $\rho\left[\frac{d_1}{x_1}, \ldots, \frac{d_n}{x_n}\right]$ להיות סביבה ρ' כך ש-$\rho'|_{\{x_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus [n]}} = \rho|_{\{x_i\}_{i \in \mathbb{N} \setminus [n]}}$ ולכל $i \in [n]$, $\rho'(x_i) = d_i$.

למה 3.1 (קשר בין סביבות להצבות)**.**

$$\left[\!\!\left[t\left\{\frac{t_1}{x_1}, \ldots, \frac{t_n}{x_n}\right\}\right]\!\!\right]_\rho^{\mathcal{M}} = [\![t]\!]_{\rho\left[\frac{[\![t_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}}{x_1}, \ldots, \frac{[\![t_n]\!]_\rho^{\mathcal{M}}}{x_n}\right]}^{\mathcal{M}}$$

3.2.2.2 ערך של נוסחה

הגדרה 3.13. ערך אמת של נוסחה בסביבה ρ, $[\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} \in \{T, F\}$ מוגדר באינדוקציה מבנית:

1. עבור שם יחס k-מקומי $(k, R) \in \mathcal{R}$ ושמות עצם $t_1, \ldots, t_k$,

$$[\![R(t_1, \ldots, t_k)]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = T \iff \Big([\![t_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}, \ldots, [\![t_k]\!]_\rho^{\mathcal{M}}\Big) \in R^{\mathcal{M}}$$

2. עבור נוסחאות φ_1, φ_2, לכל $* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

$$[\![\varphi_1 * \varphi_2]\!]_\rho^{\mathcal{M}} \triangleq \mathrm{TT}_*\Big([\![\varphi_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}}, [\![\varphi_2]\!]_\rho^{\mathcal{M}}\Big)$$

3. לכל נוסחה φ:

(א)

$$[\![\neg\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} \triangleq \mathrm{TT}_\neg\Big([\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}}\Big)$$

(ב)

$$[\![\exists x\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = T \iff \exists d \in D.\ [\![\varphi]\!]_{\rho\left[\frac{d}{x}\right]}^{\mathcal{M}} = T$$

(ג)

$$[\![\forall x\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = T \iff \forall d \in D.\ [\![\varphi]\!]_{\rho\left[\frac{d}{x}\right]}^{\mathcal{M}} = T$$

משפט 3.5 (משפט התלות הסופית לנוסחאות)**.** תהא $X \subseteq \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ קבוצת משתנים כך ש-φ נוסחה שכל המשתנים שמופיעים בה חופשית ומצאים ב-X. אזי לכל סביבות ρ_1, ρ_2 כך ש-$\rho_1|_X = \rho_2|_X$ מתקיים כי $[\![\varphi]\!]_{\rho_1}^{\mathcal{M}} = [\![\varphi]\!]_{\rho_2}^{\mathcal{M}}$.

משפט 3.6. אם φ_1, φ_2 שקולות שלד אזי לכל סביבה ρ מתקיים $[\![\varphi_1]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = [\![\varphi_2]\!]_\rho^{\mathcal{M}}$.

3.2.3 איזומורפיזם של מבנים

הגדרה 3.14. תהינא $\mathcal{A} = (D_A, I_A), \mathcal{B} = (D_B, I_B)$ מבנים מעל מילון $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{F})$. אזי $F : D_A \to D_B$ היא **איזומורפיזם** בין $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ אם:

1. F היא חד-חד ערכית ועל.
2. לכל שם פונקציה k-מקומית $(k, f) \in \mathcal{F}$ ו-$d_1, \ldots, d_k \in D_A$ מתקיים

$$F\big(f^{\mathcal{A}}(d_1, \ldots, d_k)\big) = f^{\mathcal{B}}(F(d_1), \ldots, F(d_k)).$$

3. לכל שם יחס k-מקומי $(k, R) \in \mathcal{R}$ ו-$d_1, \ldots, d_k \in D_A$ מתקיים

$$(d_1, \ldots, d_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff (F(d_1), \ldots, F(d_k)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

אם יש איזומורפיזם בין $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ נאמר כי הם **איזומורפיים**.

הגדרה 3.15. פסוק זו נוסחה ללא משתנים חופשיים.

משפט 3.7. אם $\mathcal{M}_1 = (D_1, I_1)$ ו-$\mathcal{M}_2 = (D_2, I_2)$ מבנים איזומורפיים כך ש-$F : D_1 \to D_2$ איזומורפיזם, אזי לכל נוסחה φ וסביבות $\rho_1 : \{x_i\} \to D_1, \rho_2 : \{x_i\} \to D_2$, אם אחד מהבאים מתקיים:

1. φ פסוק.
2. $\rho_2(x) = F(\rho_1(x))$ לכל x שמופיע חופשי ב-φ.

אזי $[\![\varphi]\!]_{\rho_1}^{\mathcal{M}_1} = [\![\varphi]\!]_{\rho_2}^{\mathcal{M}_2}$.

3.3 הצרנות ומידול

דוגמה 3.1. מילון עבור גרפים $\Sigma = (\emptyset, \{(2,=),(2,E)\}, \emptyset)$. עבור גרף $G = (V,E)$ נגדיר מבנה עם פירושים $D^{\mathcal{M}} = V, =^{\mathcal{M}} = Id$, וכן:

1. בגרף מכוון, $E^{\mathcal{M}} = E$.
2. בגרף לא מכוון, $E^{\mathcal{M}} = \{(u,v) \in V \times V | \{u,v\} \in E\}$.

בגרף עם קשתות מקבילות, ניתן להשתמש במילונים הבאים:

1. $\Sigma = (\emptyset, \{(2,=),(3,E)\}, \emptyset)$, עבור גרף $G = (V,E)$ כאשר E מולטיסט, נגדיר מבנה עם פירושים $D^{\mathcal{M}} = V \uplus E, =^{\mathcal{M}} = Id$ וכן
$$E^{\mathcal{M}} = \{(a,b,c) \in V \times E \times V | b \text{ is an edge from } a \text{ to } c\}$$
2. $\Sigma = (\emptyset, \{(2,=),(1,E),(1,V)(2,\mathrm{Adj}_L),(2,\mathrm{Adj}_R)\})$, עבור גרף $G = (V,E)$, נגדיר מבנה עם פירושים $D^{\mathcal{M}} = V \uplus E, =^{\mathcal{M}} = Id, E^{\mathcal{M}} = E, V^{\mathcal{M}} = V$ וכן
$$\mathrm{Adj}_L^{\mathcal{M}} = \{(x,z) \in V \times E | z \text{ is an edge out of } x\}, \qquad \mathrm{Adj}_R^{\mathcal{M}} = \{(x,z) \in V \times E | z \text{ is an edge in to } x\}.$$

נצרין את הפסוק "בין כל שתי צמתים יש לכל היותר שתי קשתות":

1.
$$\forall x \forall y \forall z_1 \forall z_2 \forall z_3 (E(x,z_1,y) \wedge E(x,z_2,y) \wedge E(x,z_3,y)) \to (=(z_1,z_2) \vee =(z_1,z_3) \vee =(z_2,z_3))$$

2.
$$\forall x \forall y \forall z_1 \forall z_2 \forall z_3 (\mathrm{Adj}_L(x,z_1) \wedge \mathrm{Adj}_R(y,z_1) \wedge \mathrm{Adj}_L(x,z_2) \wedge \mathrm{Adj}_R(y,z_2)$$
$$\wedge \mathrm{Adj}_L(x,z_3) \wedge \mathrm{Adj}_R(y,z_3)) \to (=(z_1,z_2) \vee =(z_1,z_3) \vee =(z_2,z_3))$$

שאלה 3.1. האם לכל נוסחה φ במילון
$$\Sigma_1 = (\emptyset, \{(2,=),(2,E)\}, \emptyset),$$
קיימת נוסחה ψ במילון
$$\Sigma_2 = (\emptyset, \{(1,V),(1,E),(2,=),(2,\mathrm{Adj}_L),(2,\mathrm{Adj}_R)\}, \emptyset),$$
כך שלכל גרף לא מכוון $G = (V,E)$, כאשר $\mathcal{M}_1(G)$ מבנה מתאים ל-Σ_1, ו-$\mathcal{M}_2(G)$ מבנה מתאים ל-Σ_2,
$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}_1(G)} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}_2(G)}$$

דוגמה 3.2 (הצרנה של מחרוזות)**.** נצרין את המחרוזת $s = aabacb$, נגדיר מילון $\Sigma = \{\emptyset, \{P_a, P_b, P_c, <\}, \emptyset\}$ עבור מחרוזות $w \in \{a,b,c\}^6$, נגדיר מבנה $\mathcal{M}$ עם תחום $D^{\mathcal{M}} = \{1,2,3,4,5,6\}$, ופירושים

$$\begin{aligned}
P_a^{\mathcal{M}} &= \{1,2,4\} \\
P_b^{\mathcal{M}} &= \{3,6\} \\
P_c^{\mathcal{M}} &= \{5\} \\
<^{\mathcal{M}} &= \{(a,b) | a < b\}
\end{aligned}$$

אזי מחרוזת מכילה a,

$$\exists x P_a(x)$$

מחרוזת מכילה גם a וגם b,

$$\exists x P_a(x) \wedge \exists y P_b(y)$$

מחרוזת מכילה מופע של a לפני מופע של b,

$$\exists x \exists y (x < y \wedge P_a(x) \wedge P_b(y))$$

מופיע ab במחרוזת,

$$\exists x \exists y P_a(x) \wedge P_b(y) \wedge \neg(\exists z (x < z \wedge z < y \wedge P_a(z))) \wedge (x < y)$$

3.3.1 גדירות והרחבת מבנים

הגדרה 3.16. יהי Σ מילון ו-$\mathcal{M}$ מבנה מעליו עם תחום $D = \mathcal{D}^{\mathcal{M}}$.

- נאמר כי יחס $R \subseteq D^k$ **גדיר** אם קיימת נוסחה φ בעלת לכל היותר k משתנים חופשיים $x_1, \ldots, x_k$ כך ש-

$$R = \left\{ (a_1, \ldots, a_k) \in D^k \middle| \forall \rho. [\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{\rho\left[\frac{a_1}{x_1}, \ldots, \frac{a_k}{x_k}\right]} = T \right\}$$

- נאמר כי פונקציה $f : D^k \to D$ היא גדירה אם היא גדירה כיחס $\{(x,y) \in D^k \times D \big| y = f(x)\} \subseteq D^{k+1}$.
- נאמר כי איבר $d \in D$ הוא גדיר אם הוא גדיר כיחס $\{d\} \subseteq D$.

הגדרה 3.17. יהיו $(\Sigma, \mathcal{M}), (\Sigma', \mathcal{M}')$ מילונים עם מבנים מעליהם.
נאמר כי $(\Sigma', \mathcal{M}')$ **מבנה הרחבה** של $(\Sigma, \mathcal{M})$ אם:

1. $\mathcal{D}^{\mathcal{M}} = \mathcal{D}^{\mathcal{M}'}$.
2. $\Sigma \subseteq \Sigma'$.
3. לכל $\sigma \in \Sigma$, $\sigma^{\mathcal{M}} = \sigma^{\mathcal{M}'}$.

נאמר כי $(\Sigma', \mathcal{M}')$ היא הרחבה **גדירה** אם כל סימן $\sigma \in \Sigma' \setminus \Sigma$, $\sigma^{\mathcal{M}'}$ הוא גדיר מעל $(\Sigma, \mathcal{M})$.

משפט 3.8. אם $(\Sigma', \mathcal{M}')$ הרחבה גדירה של $(\Sigma, \mathcal{M})$ אזי לכל נוסחה φ ב-Σ' קיימת נוסחה ψ ב-Σ כך ש-$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}'} = [\![\psi]\!]^{\mathcal{M}}$.

3.4 מושגים סמנטיים בסיסיים

הגדרה 3.18. יהי Σ מילון, נגדיר:

1. ρ **מספקת** את φ במבנה $\mathcal{M}$ אם $[\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = T$.
2. φ **ספיקה במבנה** $\mathcal{M}$ אם קיימת ρ המספקת את φ במבנה $\mathcal{M}$.
3. φ **ספיקה** אם קיים מבנה כך ש-φ ספיקה בו.
4. φ **נכונה** במבנה $\mathcal{M}$ אם כל סביבה ρ במבנה $\mathcal{M}$ מספקת את φ.
5. φ **תקיפה** אם φ **נכונה** בכל מבנה.
6. φ **שקולה** ל-ψ ונסמן $\varphi \equiv \psi$ אם לכל מבנה $\mathcal{M}$ ולכל סביבה ρ, $[\![\varphi]\!]_\rho^{\mathcal{M}} = [\![\psi]\!]_\rho^{\mathcal{M}}$.

טענה 3.1. יהי Σ מילון, אזי:

1. φ ספיקה אמם $\exists x\varphi$ ספיקה.
2. אם $\forall x\varphi$ ספיקה אזי φ ספיקה.
3. לכל קבוצת משתנים סופית $x_1, \dots, x_k$, φ נכונה אם ורק אם $\forall x_1 \dots \forall x_k \varphi$ נכונה.

3.4.1 חישוביות של לוגיקה מסדר ראשון

משפט 3.9 (צ'רץ'). אין אלגוריתם שבודק האם נוסחא תקיפה.

בעיה 3.1 (Model Checking). **קלט:** מילון סופי Σ, מבנה סופי $\mathcal{M}$, ונוסחה φ מעל Σ.
שאלה: האם φ ספיקה במבנה $\mathcal{M}$?

בעיה 3.2 (Model Evaluation). **קלט:** מילון סופי Σ, מבנה סופי $\mathcal{M}$, שם עצם t מעל Σ, סביבה ρ ב-$\mathcal{M}$.
שאלה: האם ρ מספקת את φ במבנה $\mathcal{M}$?

בעיה 3.3. קלט: מילון סופי Σ, מבנה סופי $\mathcal{M}$, שם עצם t מעל Σ, $d_1, \dots, d_k \in \mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ השמה למשתנים של t.
שאלה: האם $d_1, \dots, d_k$ השמה המספקת את t במבנה $\mathcal{M}$?

3.5 שקילויות הזזת כמתים

טענה 3.2. תהינא φ, ψ נוסחאות כך ש-x לא חופשי ב-φ. אזי:

1. $\varphi \wedge \exists x\psi$ שקולה ל-$\exists x(\varphi \wedge \psi)$.
2. $\varphi \vee \exists x\psi$ שקולה ל-$\exists x(\varphi \vee \psi)$.
3. $\varphi \wedge \forall x\psi$ שקולה ל-$\forall x(\varphi \wedge \psi)$.
4. $\varphi \vee \forall x\psi$ שקולה ל-$\forall x(\varphi \vee \psi)$.
5. $\neg\exists x\psi$ שקולה ל-$\forall x\neg\psi$.
6. $\neg\forall x\psi$ שקולה ל-$\exists x\neg\psi$.

3.5.1 צורת PNF

הגדרה 3.19. נוסחה φ היא בצורת **Prenix Normal Form** אם קיימת ψ ללא כמתים, משתנים $x_1,\dots,x_k$,וכמתים $\circledast_1,\dots,\circledast_k \in \{\forall,\exists\}$ כך ש-

$$\varphi = \circledast_1 x_1 \dots \circledast_k\, x_k \psi$$

משפט 3.10. לכל φ קיימת ψ ב-PNF. בפרט, יש אלגוריתם שעבור כל φ בונה ψ ב-PNF ששקולה ל-φ.

הוכחה. נפעיל טרנספורמציות הזזת כמתים.

1. נסלק $\leftrightarrow,\rightarrow$ ונשאר רק עם $\neg,\vee,\wedge$, נסמן את הנוסחה החדשה ב-φ_0.
2. נפעיל טרנספורמציות הזזת כמתים איטרטיבית:

(א) אם $\varphi_i = (\circledast x\alpha) * \beta$ כאשר $\circledast \in \{\exists,\forall\}$ הכמת הראשון ב-φ_i ו-$* \in \{\vee,\wedge\}$, אזי עבור y שלא מופיע ב-α,β, נגדיר $\varphi_{i+1} = \circledast y\big(\alpha\{\frac{y}{x}\} * \beta\big)$.

(ב) אם $\varphi_i = \alpha * \circledast x\beta$ כאשר $\circledast \in \{\exists,\forall\}$ הכמת הראשון ב-φ_i ו-$* \in \{\vee,\wedge\}$, אזי עבור y שלא מופיע ב-α,β, נגדיר $\varphi_{i+1} = \circledast y\big(\alpha * \beta\{\frac{y}{x}\}\big)$.

(ג) אם $\varphi_i = \neg\exists x\psi$ אזי $\varphi_{i+1} = \forall x\neg\psi$.

(ד) אם $\varphi_i = \neg\forall x\psi$ אזי $\varphi_{i+1} = \exists x\neg\psi$.

■

3.5.2 בחזרה לבעיות חישוביות על נוסחאות

בעיה 3.4 (ספיקות)**.** **קלט:** נוסחא φ
פלט: האם φ ספיקה

בעיה 3.5 (תקיפות)**.** **קלט:** נוסחא φ
פלט: האם φ תקיפה

טענה 3.3. אלגוריתם $\mathcal{A}(\cdot)$ פותר את בעיית הספיקות אם ורק אם $1-\mathcal{A}(\neg\cdot)$ אלגוריתם פותר את בעיית התקיפות.

הגדרה 3.20. נוסחה φ היא **אוניברסלית** אם קיימת ψ ללא כמתים ומשתנים $x_1,\dots,x_k$ כך ש-

$$\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi$$

הגדרה 3.21. נוסחה φ היא **ישית** (existential) אם קיימת ψ ללא כמתים ומשתנים $x_1,\dots,x_k$ כך ש-

$$\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_k \psi$$

למה 3.2. יהי Σ מילון ו-$\mathcal{M}$ מבנה מעליו, אזי לכל נוסחה φ, $\exists x\varphi$ ספיקה במבנה $\mathcal{M}$ אם ורק אם קיימים $c \notin \Sigma$ ומבנה הרחבה $(\Sigma' = \Sigma \uplus \{c\}, \mathcal{M}')$ כך ש-$\varphi\{\frac{c}{x}\}$ ספיקה ב-$\mathcal{M}'$.

הוכחה. $\Longleftarrow$: נניח כי $\exists x\varphi$ ספיקה ב-$\mathcal{M}$, אזי קיימת $\rho:\{x_i\}\to\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ ו-$a\in\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ כך ש-$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{\rho\left[\frac{a}{x}\right]}=T$.
נגדיר את $c^{\mathcal{M}'}=a$, ואז

$$\left[\!\!\left[\varphi\left\{\frac{c}{x}\right\}\right]\!\!\right]^{\mathcal{M}'}_{\rho}=[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}'}_{\rho\left[\frac{a}{x}\right]}=[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{\rho\left[\frac{a}{x}\right]}=T$$

כי $(\Sigma',\mathcal{M}')$ מבנה הרחבה של $(\Sigma,\mathcal{M})$ ו-φ נוסחה מעל Σ. ■

למה 3.3. יהי Σ מילון ו-$\mathcal{M}$ מבנה מעליו, ותהינא $x_1,\dots,x_k,y$ משתנים שונים.
אזי לכל נוסחה φ, $\forall x_1\dots\forall x_k\exists y\varphi$ ספיקה במבנה $\mathcal{M}$ אם ורק אם קיימים סימן פונקציה k-מקומית $f\notin\Sigma$ ומבנה הרחבה $(\Sigma'=\Sigma\uplus\{f\},\mathcal{M}')$ כך ש-$\forall x_1\dots\forall x_k\varphi\left\{\frac{f(x_1,\dots,x_k)}{y}\right\}$ ספיקה ב-$\mathcal{M}'$.

הוכחה. $\Longleftarrow$: נניח כי $\forall x_1\dots\forall x_k\exists y\varphi$ ספיקה ב-$\mathcal{M}$. אזי לכל $a_1,\dots,a_k\in\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ קיים $b\in\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ וסביבה ρ כך ש-$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}}_{\rho\left[\frac{a_1}{x_1},\dots,\frac{a_k}{x_k},\frac{b}{y}\right]}=T$.
נגדיר $f^{\mathcal{M}}(a_1,\dots,a_k)=b$ כנ"ל, עבור b יחיד כלשהו לכל $a_1,\dots,a_k\in\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$. (משתמשים באקסיומת הבחירה על קבוצת ה-b-ים האפשריים לכל $a_1,\dots,a_k$). ■

משפט 3.11. קיים אלגוריתם כך שלכל נוסחה φ בונה נוסחא ψ אוניברסלית ב-$\Sigma'\supseteq\Sigma$ כך ש-φ ספיקה מעל Σ אם ורק אם ψ ספיקה מעל Σ'.

אלגוריתם 3.3. עבור נוסחה φ:

1. נמיר לצורת PNF.
2. נסלק כמתי $\exists$ לפי למות 3.2,3.3.

3.5.3 ספיקות של נוסחאות אוניברסליות

אלגוריתם 3.4 (בדיקת ספיקות ללא משתנים וללא כמתים)**.** תהינא $P_1,\dots,P_k$ הנוסחאות האטומיות המופיעות ב-φ, נגדיר את $T(\varphi)$ להיות φ כאשר $p_1,\dots,p_k$ מחליפים את $P_1,\dots,P_k$.

משפט 3.12. אם φ לא כמתים וללא משתנים, אזי $T(\varphi)\in\text{WFF}$ ו-φ ספיקה אם ורק אם $T(\varphi)$ ספיקה.

הוכחה. $\Longleftarrow$: נניח כי φ ספיקה במבנה $\mathcal{M}$, משום שאין בה משתנים אזי היא תקיפה, נגדיר סביבה $\rho:\{p_i\}\to\{T,F\}$ שמספקת את $T(\varphi)$.

$$\rho(p_i)\triangleq\begin{cases}[\![P_i]\!]^{\mathcal{M}}, & i\in[k]\\ T, & i\notin[k]\end{cases}$$

$\Longrightarrow$: נניח כי $T(\varphi)$ ספיקה על ידי סביבה $\rho:\{p_i\}\to\{T,F\}$, נגדיר את $\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ להיות כל שמות העצם שמופיעים ב-φ, ונגדיר פירושים ליחסים, כאשר $P_i=R_i\left(t_1^{(i)},\dots,t_{n_i}^{(i)}\right)$. לכל קבוע c שמופיע ב-φ, $c^{\mathcal{M}}=c$, ליתר הקבועים נקבע פירוש שרירותי. לכל פונקציה f שמופיעה ב-φ, לכל ארגומנטים $t_1,\dots,t_m$ שהם שמות עצם שמופיעים כ-$f(t_1,\dots,t_m)$ ב-φ, $f^{\mathcal{M}}(t_1,\dots,t_m)=f(t_1,\dots,t_m)$, וליתר הערכים שלא מופיעים ב-φ נבחר שרירותית פירוש.
נגדיר פירושים ליחסים $R_1,\dots,R_k$,

$$R_i^{\mathcal{M}}=\bigcup_{j\in[k]:\ R_i=R_j}\left\{\left(t_1^{(j)},\dots,t_{n_j}^{(j)}\right)\middle|\rho(p_j)=T\right\}$$

טענה 3.4. $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{M}} = [\![T(\varphi)]\!]_{\rho}$.

■

3.6 מבנה הרברנד (Herbrand)

הגדרה 3.22. יהי מילון Σ, נאמר כי מבנה $\mathcal{M}$ הוא **הרברנד** מעל Σ אם לכל $a \in \mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ קיים שם עצם יחיד t_a ללא משתנים כך ש-$[\![t_a]\!]^{\mathcal{M}} = a$.

דוגמה 3.3. $\Sigma = \{\mathrm{Succ}, c_0, \leq\}$ עם המבנה

$$\mathcal{D}^{\mathcal{M}} = \mathbb{N}, \mathrm{Succ}^{\mathcal{M}}(x) = x+1, c_0^{\mathcal{M}} = 0, \leq^{M} = \{(a,b) \in \mathbb{N} | a \leq b\}$$

אזי $\mathcal{M}$ הוא מבנה הרברנד.

משפט 3.13. אם קיים סימן קבוע $c \in \Sigma$ אזי קיים $\mathcal{M}$ מבנה הרברנד מעל Σ.

הוכחה. נגדיר את $\mathcal{D}^{\mathcal{M}}$ להיות שמות העצם ללא משתנים מעל Σ.
לכל קבוע $c \in \Sigma$ נגדיר $c^{\mathcal{M}} = c$. לכל $(k,f) \in \Sigma$ נגדיר לכל $t_1, \ldots, t_k$ שמות עצם ללא משתנים

$$f^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1, \ldots, t_k)$$

יחסים יוגדרו בדרך כלשהי (לא משנה). ■

למה 3.4. לכל נוסחה φ, קיים מבנה הרברנד $\mathcal{H}$ כך ש-$\exists x\varphi$ ספיקה ב-$\mathcal{H}$ אם ורק אם יש שם עצם ללא משתנים t כך ש-$\varphi\left\{\frac{t}{x}\right\}$ ספיקה ב-$\mathcal{H}$.

טענה 3.5. לכל נוסחה φ, קיים מבנה הרברנד $\mathcal{H}$ כך ש-$\forall x\varphi$ ספיקה ב-$\mathcal{H}$ אם ורק אם

$$\Gamma_{\varphi} = \left\{ \varphi\left\{\frac{t}{x}\right\} \middle| t \text{ שם עצם ללא משתנים} \right\}$$

ספיקב ב-$\mathcal{H}$.