贝叶斯决策

1. 贝叶斯估计[40p]

在贝叶斯估计中，给定有限样本集合 $\mathbf{X}=\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n\}$ 情况下，贝叶斯估计量可通过最小化期望风险获得，即

$$\theta^* = \arg\min_{\hat{\theta}} R(\hat{\theta}\,|\,\mathbf{X}) = \int_\theta \lambda(\hat{\theta},\theta) p(\theta\,|\,\mathbf{X}) d\theta$$

其中，$\lambda(\hat{\theta},\theta)$ 是定义的损失函数，当损失函数为平方误差损失函数，即

$\lambda(\hat{\theta},\theta)=(\hat{\theta}-\theta)^2$ 时，请证明，在给定样本集 $\mathbf{X}$ 下，θ 的贝叶斯估计量是

$\theta^* = E[\theta\,|\,\mathbf{X}] = \int_\theta \theta p(\theta\,|\,\mathbf{X}) d\theta$。

2. 最大似然估计[60p]（提交作业请提供源代码）

课上老师简单介绍了最大似然估计的原理，请同学们课下自己推导其原理，并回答以下问题。

(1) 你对贝叶斯估计和最大似然估计的理解。

(2) 令 X_1，X_2，…, X_n 是从标准正态分布N(μ, σ^2)中的抽样，假设μ未知，σ^2已知，请求解μ的最大似然估计。如果加上条件$\mu > \mu_0$，请给出μ的最大似然估计。

(3) 请从正态分布$N(0,1)$中分别抽取 10，100，1000 个样本，利用最大似然估计正态分布假设下的模型参数，分别重复三次实验，将同一抽样量下的三次重复实验估计的概率密度分布曲线绘制在一张图片内，并与正态分布$N(0,1)$的概率密度分布曲线比较。

(4) 请从均匀分布$U(0,1)$中抽取 100 个样本，利用最大似然估计正态分布假设下的模型参数，绘制出估计得到的概率密度分布曲线图，并与均匀分布$U(0,1)$的概率密度分布曲线图比较。

(5) 通过上述实验，讨论模型的选择、样本量对参数估计的影响。